Wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust

J.J.A. van Huijstee

R/1983/8/D

Vloeistofmechanica
Afdeling der Civiele Techniek
Technische Hogeschool Delft

Technische Hogeschool Delft

Afdeling der Civiele Techniek

Vakgroep Vloeistofmechanica

Deelontwerp: Wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust

Docent : Prof.dr.ir.J.P.Th.Kalkwijk

Begeleider : Ir.J.Voogt

Student : J.J.A.van Huijstee

Datum : Augustus 1983

I N H O U D blz.

0. Inleiding 1

1. Afleiding van drie mogelijke getijgolven 3

1.1. Inleiding 3
1.2. Het ondiep-water model 4
1.3. De ondiep-water vergelijkingen 5
1.4. Bewegingen met kleine amplitude 7
1.5. Poincaré en Kelvin golf 8
1.6. De Rossby golf 11
1.7. Geschiktheidsonderzoek getijgolven 12

2. Eén inkomende Kelvin golf 13

2.1. Inleiding 13
2.2. Situatieschets en formules 14
2.3. Golfhoogte η 15
2.3.1. Golfhoogte η als functie van X, Y en t 15
2.3.2. Fase-amplitude diagram golfhoogte η 16
2.3.3. Isolijnen van één inkomende Kelvin golf 17
2.4. Stroomsnelheid u 18
2.4.1. Stroomsnelheid u als functie van X, Y en t 18
2.4.2. Fase-amplitude diagram stroomsnelheid u 19
2.4.3. Relatie tussen η en u 20
2.5. Fasesnelheid c 20

	blz.
3. <u>Golfbeeld door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf</u>	21
3.1. Inleiding	21
3.2. Situatieschets en formules	22
3.3. De totale golfhoogte η_{tot}	23
3.3.1. Bepaling η_{tot}	23
3.3.2. De totale golfhoogte η_{tot} als functie van t	24
3.3.3. Fase-amplitude diagram totale golfhoogte η_{tot}	26
3.3.4. Isolijnen bij interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf	29
3.4. De totale stroomsnelheid u_{tot}	30
3.4.1. Bepaling u_{tot}	30
3.4.2. De totale stroomsnelheid u_{tot} als functie van t	31
3.4.3. Fase-amplitude diagram totale stroomsnelheid u_{tot}	33
3.4.4. Relatie tussen η_{tot} en u_{tot}	34
3.5. De totale fasesnelheid c_{tot}	36
4. <u>Stroomsnelheidsberekening</u>	37
4.1. Inleiding	37
4.2. De Britse Admiraliteits getijdetafels	37
4.3. Bepaling η_{tot}-basisellips uit de harmonische constanten van n punten	38
4.3.1. Inleiding	38
4.3.2. De ellips	39
4.3.3. De kleinste kwadraten methode van Gauss	41
4.4. Berekening η_1 en η_2 uitgaande van de η_{tot}-basisellips	44
4.5. Berekening van η_{TOT} en u_{TOT}	49
4.6. Overzicht berekeningswijze	50
4.7. Overwegingen, aannamen en eisen	52
4.7.1. Overwegingen	52
4.7.2. Aannamen	53
4.7.3. Eisen	54

blz.

5. Toepassing stroomsnelheidsberekening 55

5.1. Inleiding 55
5.2. De Nederlandse kust 56
5.2.1. Trajectbeschrijving 56
5.2.2. Invoer 58
5.2.3. Uitvoer 59
5.2.4. Verwerking uitvoer 60
5.2.5. Bespreking resultaten 64
5.2.6. Oorzaak en invloed faseveschil stroomsnelheidscurve 65
5.3. De Engelse zuid-oost kust 66
5.3.1. Trajectbeschrijving 66
5.3.2. Invoer 68
5.3.3. Uitvoer 69
5.3.4. Verwerking uitvoer 70
5.3.5. Bespreking resultaten 74
5.3.6. Mate van overéénstemming tussen HVH 100 en GOR 83 75
5.4. De oostkust van Groot-Brittannië 77
5.4.1. Trajectbeschrijving 77
5.4.2. Invoer 79
5.4.3. Uitvoer 81
5.4.4. Verwerking uitvoer 82
5.4.5. Bespreking resultaten 86

6. Samenvatting en conclusies 87

6.1. Samenvatting 87
6.2. Conclusies 90

Wiskundige symbolen
Toegepaste symbolen
Indices
Literatuur
Bijlage I: Computerprogramma in HPL voor de HP-41 CV

0. Inleiding

De titel van het deelontwerp luidt:"Wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust." Bij deze titel zijn enige kanttekeningen te plaatsen.

Het betreft een twee-dimensionaal model dat op grond van verticale getijgegevens van meerdere punten langs de kust, de golfhoogte en de stroomsnelheid van het getij berekent voor willekeurige plaats en tijd.

Onder verticale getijgegevens wordt verstaan de harmonische constanten van elke getijcomponent.
Het ontwerp van het model is afgestemd op gebruik in combinatie met de "Admiralty Tide Tables" als bron voor de harmonische constanten.

Het wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust, ook wel aangegeven met getijmodel, berust op de veronderstelling dat het getij voor elke getijcomponent kan worden weergegeven door een golfbeeld dat ontstaat door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf.

Het getijmodel is toegepast langs drie verschillende kusten in de zuidelijke Noordzee. Daarbij is de nauwkeurigheid van het model beproefd tot 100 à 200 kM uit de kust.

De achtergrond voor de keuze van dit ontwerp is gelegen in het feit dat bij gebleken nauwkeurigheid van het model, dit model als subroutine zal worden toegevoegd aan SMOSS. SMOSS is een afkorting van Simulation Model for Oil Slicks at Sea. Bij gebruik van SMOSS in de huidige vorm wordt de stroomsnelheid van het getij extern ingevoerd.
Indien nu géén of onvoldoende stroomgegevens voor handen zijn, is er behoefte aan een wiskundig model, dat deze getijstroomsnelheden op snelle -dus éénvoudige- wijze berekent. Aan deze wensen probeert het model in dit ontwerp te voldoen.

Hieronder volgt een kort overzicht van het deelontwerp:

In hoofdstuk 1 worden drie soorten lange golven afgeleid. Daartoe worden de continuïteits- en bewegingsvergelijkingen opgesteld voor een ondiep-water model en verder uitgewerkt onder de aanname dat het bewegingen met kleine amplitude betreft. Na afweging aan de hand van fysische en rekentechnische eisen blijkt de Kelvin golf het best te voldoen om de getijgolf te beschrijven.

In hoofdstuk 2 wordt het gedrag van één inkomende Kelvin golf onderzocht. Daartoe worden de golfhoogte η, de stroomsnelheid u en de fasesnelheid c bepaald en in grafieken weergegeven.

In hoofdstuk 3 wordt, met dezelfde aanpak als in hoofdstuk 2, het golfbeeld onderzocht dat ontstaat door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf.
Dit golfbeeld van twee tegen elkaar inlopende golven zal dienen als model voor de berekening van getijstroomsnelheden langs de kust.

In hoofdstuk 4 wordt, op grond van de voorgaande theorie, de berekeningswijze van de getijstroomsnelheid afgeleid.

In hoofdstuk 5 wordt de stroomsnelheidsberekening toegepast op drie kusten aan de zuidelijke Noordzee.
De nauwkeurigheid van de berekening wordt nagegaan aan de hand van waarden verkregen uit stroomatlassen van de desbetreffende kusten.

In hoofdstuk 6 wordt het deelontwerp besloten met een samenvatting en conclusies betreffende het getijmodel.

Het computerprogramma van het getijmodel is aan het eind toegevoegd.
Dit programma is geschreven in Hewlett Packard Language.

1. Afleiding van drie mogelijke getijgolven

1.1. Inleiding

Als uitgangspunt voor de afleiding van mogelijke getijgolven, is gekozen voor het ondiep-water model.

De continuïteitsvergelijking en de bewegingsvergelijkingen worden allereerst voor dit ondiep-water model opgezet.

Deze vergelijkingen worden vervolgens verder uitgewerkt onder de aanname dat het hier bewegingen met kleine amplitude betreft.

Deze werkwijze resulteert in drie mogelijke getijgolven:
1. De Poincaré golf
2. De Kelvin golf
3. De Rossby golf

Op grond van rekentechnische eisen en fysische overwegingen, kan worden onderzocht welke van de drie mogelijke getijgolven geschikt is voor toepassing in het te ontwerpen wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust.

Uit dit onderzoek blijkt dat de Poincaré golf en de Rossby golf niet voldoen aan de gestelde eisen. Deze vallen af.

De Kelvin golf blijkt wel te voldoen aan de gestelde eisen. Het is dan ook de Kelvin golf die ten grondslag ligt aan het verdere verloop van dit ontwerp.

Bij de opzet van dit hoofdstuk is in sterke mate gebruik gemaakt van bestaande literatuur op dit gebied.[1][2]

1) C.Verspuy & M.de Vries : Lange Golven
2) Joseph Pedlosky : Geophysical Fluid Dynamics

1.2. Het ondiep-water model

Veronderstel een ondiepe, roterende laag homogene, onsamendrukbare en niet-visceuse vloeistof.
Dit ondiep-water model wordt gebruikt ter bepaling van mogelijke getijgolven.

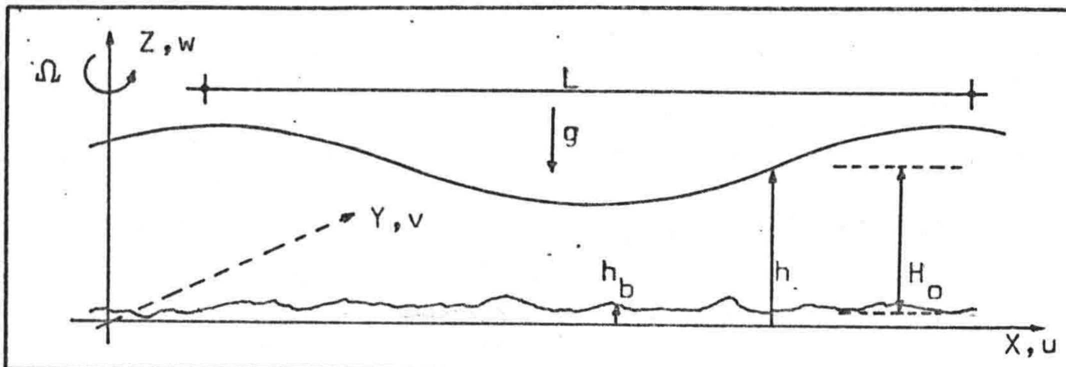


Fig.1.1. Het ondiep-water model

Coördinaatassen	: X, Y en Z
Stroomsnelheden langs resp. X-, Y- en Z-as	: u, v, en w
Zwaartekrachtsversnelling	: g
Hoogte waterspiegel (tot XY-vlak)	: h
Hoogte bodem (tot XY-vlak)	: h_b
Dikte vloeistoflaag bij afwezigheid van beweging	: H_o
Golflengte	: L
Hoeksnelheid aarde	: Ω

Dichtheid	: ρ = constant	(1-1)
Dynamische viscositeit:	$\mu = 0$	(1-2)
Bodemoppervlak	: $Z = h_b(X,Y)$	(1-3)
Waterspiegel	: $Z = h(X,Y,t)$	(1-4)

1.3. De ondiep-water vergelijkingen

Voor het afleiden van de continuïteitsvergelijking is het uitgangspunt het opzetten van een massabalans voor een volume-elementje. Hieruit volgt:

$$\frac{\delta\varrho}{\delta t} + \frac{\delta(\varrho u)}{\delta X} + \frac{\delta(\varrho v)}{\delta Y} + \frac{\delta(\varrho w)}{\delta Z} = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

Uitgaande van een homogene vloeistof, waarvoor de dichtheid constant is, volgt voor de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\delta u}{\delta X} + \frac{\delta v}{\delta Y} + \frac{\delta w}{\delta Z} = 0 \qquad (1\text{-}6)$$

Voor het afleiden van de bewegingsvergelijkingen (Navier Stokes) is het uitgangspunt het opstellen van een impulsbalans voor een volume-elementje in X-, Y- en Z-richting.
De bewegingsvergelijkingen in een vast coördinatenstelsel zijn:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta(u^2)}{\delta X} + \frac{\delta(uv)}{\delta Y} + \frac{\delta(uw)}{\delta Z} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta X} - \nu\left[\frac{\delta^2 u}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta Y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta Z^2}\right] = 0 \qquad (1\text{-}7)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \frac{\delta(uv)}{\delta X} + \frac{\delta(v^2)}{\delta Y} + \frac{\delta(vw)}{\delta Z} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta Y} - \nu\left[\frac{\delta^2 v}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta Y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta Z^2}\right] = 0 \qquad (1\text{-}8)$$

$$\frac{\delta w}{\delta t} + \frac{\delta(uw)}{\delta X} + \frac{\delta(vw)}{\delta Y} + \frac{\delta(w^2)}{\delta Z} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta Z} - \nu\left[\frac{\delta^2 w}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta Y^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta Z^2}\right] + g = 0 \qquad (1\text{-}9)$$

Met behulp van (1-2) en (1-6) en rekening houdend met het feit dat de bewegingsvergelijkingen moeten gelden voor een toeschouwer in een uniform roterend coördinatenstelsel, volgt:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u\cdot\frac{\delta u}{\delta X} + v\cdot\frac{\delta u}{\delta Y} + w\cdot\frac{\delta u}{\delta Z} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta X} - fv = 0 \qquad (1\text{-}10)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} + u\cdot\frac{\delta v}{\delta X} + v\cdot\frac{\delta v}{\delta Y} + w\cdot\frac{\delta v}{\delta Z} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta Y} + fu = 0 \qquad (1\text{-}11)$$

$$\frac{\delta w}{\delta t} + u\cdot\frac{\delta w}{\delta X} + v\cdot\frac{\delta w}{\delta Y} + w\cdot\frac{\delta w}{\delta Z} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta Z} + g = 0 \qquad (1\text{-}12)$$

p = druk
ν = kinematische viscositeit ($= \mu/\varrho$)
f = Coriolis-parameter ($= 2.\Omega.\sin\theta$)

Indien in vergelijking (1-12) alle versnellingstermen worden verwaarloosd ten opzichte van de zwaartekrachtsversnelling, resulteert dat voor (1-12) in de volgende vergelijking:

$$\frac{\delta p}{\delta Z} = -\varrho g \qquad (1\text{-}13)$$

De vergelijking (1-13) kan in Z-richting worden geïntegreerd. Indien men voor de druk aan de vrije waterspiegel stelt $p = p_o$, dan volgt hieruit:

$$p = \varrho g(h - Z) + p_o \qquad (1\text{-}14)$$

Tevens kan in de vergelijking in X-richting de term $w.\delta u/\delta z$ en in de vergelijking in Y-richting de term $w.\delta v/\delta z$ worden verwaarloosd, omdat de snelheidscomponent w verwaarloosbaar klein is.

Met behulp van (1-14) en de hierboven beschreven verwaarlozing kan voor het stelsel (1-10),(1-11) en (1-12) het volgende worden geschreven:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u.\frac{\delta u}{\delta X} + v.\frac{\delta v}{\delta Y} - fv + g.\frac{\delta h}{\delta X} = 0 \qquad (1\text{-}15)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} + u.\frac{\delta v}{\delta X} + v.\frac{\delta v}{\delta Y} + fu + g.\frac{\delta h}{\delta Y} = 0 \qquad (1\text{-}16)$$

$$p = \varrho g(h - z) + p_o \qquad (1\text{-}17)$$

Door integratie van (1-6) over de diepte en met behulp van de kinematische voorwaarde op de bodem ($Z = h_b$) en op de vrije waterspiegel ($Z = h$), wordt de vergelijking (1-20) gevonden. Gecombineerd met de vergelijkingen (1-15) en (1-16) geeft dit het volgende stelsel:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u.\frac{\delta u}{\delta X} + v.\frac{\delta u}{\delta Y} - fv + g.\frac{\delta h}{\delta X} = 0 \qquad (1\text{-}18)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} + u.\frac{\delta v}{\delta X} + v.\frac{\delta v}{\delta Y} + fu + g.\frac{\delta h}{\delta Y} = 0 \qquad (1\text{-}19)$$

$$\frac{\delta(h-h_b)}{\delta t} + \frac{\delta(u(h-h_b))}{\delta X} + \frac{\delta(v(h-h_b))}{\delta Y} = 0 \qquad (1\text{-}20)$$

1.4. Bewegingen met kleine amplitude

H_o is de dikte van de vloeistoflaag bij afwezigheid van beweging.
In het algemeen geldt: $H(X,Y,t) = H_o(X,Y) + \eta(X,Y,t)$ (1-21)
Kleine amplitude : $\eta \ll H_o$ (1-22)

Veronderstel :

$$\delta u/\delta t \gg u.(\delta u/\delta X) + v.(\delta u/\delta Y) \quad (1\text{-}23)$$
$$\delta v/\delta t \gg v.(\delta v/\delta X) + v.(\delta v/\delta Y) \quad (1\text{-}24)$$
$$U = u.H_o \quad (1\text{-}25)$$
$$V = v.H_o \quad (1\text{-}26)$$

Daaruit volgt :

$$\delta U/\delta t - fV + gH_o.(\delta\eta/\delta X) = 0 \quad (1\text{-}27)$$
$$\delta V/\delta t + fU + gH_o.(\delta\eta/\delta Y) = 0 \quad (1\text{-}28)$$
$$\delta\eta/\delta t + \delta U/\delta X + \delta V/\delta Y = 0 \quad (1\text{-}29)$$

Door manipulatie van (1-27) en (1-28) wordt de volgende formule verkregen:

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} + f^2\right)\left(\frac{\delta V}{\delta Y} + \frac{\delta U}{\delta X}\right) = -g.\frac{\delta}{\delta t}\nabla.(H_o\nabla\eta) - fg\left(\frac{\delta H_o}{\delta X}.\frac{\delta\eta}{\delta Y} - \frac{\delta H_o}{\delta Y}.\frac{\delta\eta}{\delta X}\right) \quad (1\text{-}30)$$

Een vergelijking met enkel de variabele η kan nu worden verkregen door (1-29) en (1-30) te combineren:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} + f^2\right)\eta - \nabla\cdot(C_o^2\nabla\eta)\right] - gfJ(H_o,\eta) = 0 \quad (1\text{-}31)$$

Waarbij:

$$C_o^2 = gH_o \quad (1\text{-}32)$$
$$J(A,B) \equiv \frac{\delta A}{\delta X}.\frac{\delta B}{\delta Y} - \frac{\delta A}{\delta Y}.\frac{\delta B}{\delta X} \quad (1\text{-}33)$$

De snelheden u en v, uitgedrukt in termen van η, kunnen worden gevonden door (1-27) en (1-28) te combineren:

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} + f^2\right) u = -g\left(\frac{\delta^2\eta}{\delta X\delta t} + f.\frac{\delta\eta}{\delta Y}\right) \quad (1\text{-}34)$$
$$\left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} + f^2\right) v = -g\left(\frac{\delta^2\eta}{\delta Y\delta t} - f.\frac{\delta\eta}{\delta X}\right) \quad (1\text{-}35)$$

1.5. Poincaré en Kelvin golf

Beschouw nu de vrije, lineaire oscillaties van een ondiepe, roterende vloeistoflaag. Echter met die beperking dat er sprake is van een gedeeltelijk begrensd gebied en constante diepte H_o.

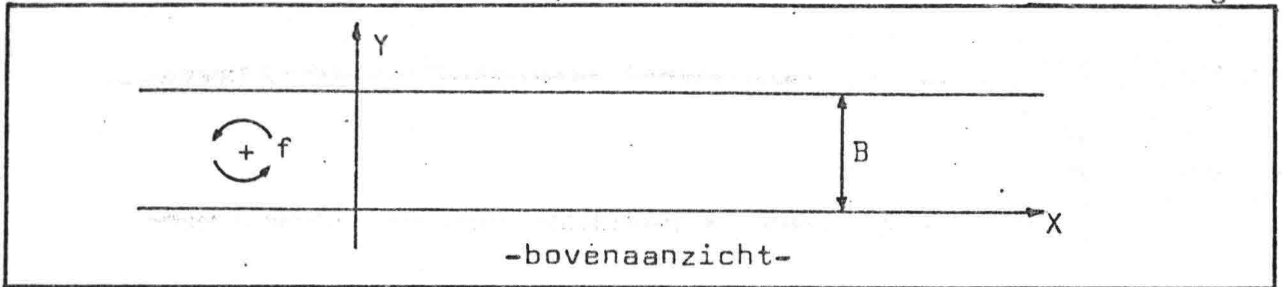


Fig.1.2. Oneindig lang kanaal, roterend met hoeksnelheid $\frac{1}{2}f$.

De dwarssnelheid v moet nul zijn voor Y=0 en Y=B.
Uitgaande van (1-35) volgt uit deze voorwaarde:

$$\frac{\delta^2\eta}{\delta Y\delta t} - f.\frac{\delta\eta}{\delta X} = 0, \qquad Y = 0,B \qquad (1\text{-}36)$$

De vergelijking (1-31) wordt, bij constante H_o, gereduceerd tot:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} + f^2\right)\eta - c_o^2\nabla^2\eta\right] = 0 \qquad (1\text{-}37)$$

Golfoplossingen, welke periodiek zijn voor X en t, kunnen worden gezocht in de vorm: $\eta = \mathrm{Re}\,\bar{\eta}(Y).\exp(i(kX - \sigma t))$ (1-38)
waarbij $\bar{\eta}(Y)$ de (complexe) golfamplitude is die varieert met Y.

Substitueren van (1-38) in (1-36) en (1-37) resulteert in het eigenwaardeprobleem voor $\bar{\eta}$, namelijk:

$$\frac{d^2\bar{\eta}}{dY^2} + \left(\frac{\sigma^2 - f^2}{c_o^2} - k^2\right)\bar{\eta} = 0 \qquad (1\text{-}39)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dY} + f.\frac{k}{\sigma}.\bar{\eta} = 0, \quad Y = 0,\ B \qquad (1\text{-}40)$$

De algemene oplossing van (1-39) luidt: $\bar{\eta} = A'\sin\alpha Y + B'\cos\alpha Y$ (1-41)

waarbij: $\alpha^2 = \frac{\sigma^2 - f^2}{c_o^2} - k^2$ (1-42)

Substitutie van (1-41) in de randvoorwaarde (1-40) voor Y=0 en Y=B, resulteert in twee lineaire, homogene vergelijkingen voor A' en B':

$$\alpha A' + \frac{fk}{\sigma}.B' = 0 \qquad (1\text{-}43)$$

$$A'\left[\alpha\cos\alpha B + f.\frac{k}{\sigma}.\sin\alpha B\right] + B'\left[\frac{fk}{\sigma}.\cos\alpha B - \alpha\sin\alpha B\right] = 0 \qquad (1\text{-}44)$$

Niet-triviale oplossingen voor A' en B' kunnen enkel worden gevonden als de coëfficientendeterminant van de vergelijkingen voor A' en B' nul is. Dit levert de eigenwaarde relatie:

$$(\sigma^2 - f^2)(\sigma^2 - C_o^2k^2)\sin\alpha B = 0 \qquad (1\text{-}45)$$

Hieruit volgt dat er drie mogelijke oplossingen zijn:

(i) $\sin\alpha B = 0$ (1-46)

(ii) $\sigma^2 = C_o^2k^2$ (1-47)

(iii) $\sigma^2 = f^2$ (1-48)

(i) $\sin\alpha B = 0$ (1-46) ; De Poincaré golf

Dit geldt alleen als: $\alpha = n\pi/B$, $n = 1,2,3,..$ (1-49)

Met behulp van (1-42) en (1-49) volgt hieruit voor :

$$\sigma = \pm\left[f^2 + C_o^2\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{B^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad n = 1,2,3,... \qquad (1\text{-}50)$$

Met behulp van (1-41), (1-43) en (1-50) volgt hieruit het volgende stelsel:

$$\eta = \eta_o\left[\cos\frac{n\pi Y}{B} - \frac{B}{n\pi}.\frac{f}{C_x}.\sin\frac{n\pi Y}{B}\right]\cos(kX - \sigma t + \varphi) \qquad (1\text{-}51)$$

$$u = \frac{\eta_o}{H_o}.\left[\frac{C_o^2}{C_x}.\cos\frac{n\pi Y}{B} - \frac{fB}{n\pi}.\sin\frac{n\pi Y}{B}\right]\cos(kX - \sigma t + \varphi) \qquad (1\text{-}52)$$

$$v = -\frac{\eta_o}{H_o}.\frac{B}{\sigma n\pi}\left[f^2 + \frac{C_o^2n^2\pi^2}{B^2}\right]\sin\frac{n\pi Y}{B}.\sin(kX - \sigma t + \varphi) \qquad (1\text{-}53)$$

De vergelijkingen (1-51), (1-52) en (1-53) geven de golven weer die Poincaré golven genoemd worden.

(ii) $\sigma^2 = C_o^2 k^2$ (1-47) : De Kelvin golf

Nu geldt :	$\sigma = \pm C_o . k$	(1-54)
daaruit volgt:	$\alpha^2 = - f^2/C_o^2$	(1-55)
oftewel :	$\alpha = \pm if/C_o$	(1-56)

Hieruit volgt het volgende stelsel:

$$\eta = \eta_o . \exp(-fY/C_o) . \cos(kX - kC_o t + \varphi) \qquad (1\text{-}57)$$

$$u = (\eta_o/H_o) . C_o . \exp(-fY/C_o) . \cos(kX - kC_o t + \varphi) \qquad (1\text{-}58)$$

$$v = 0 \qquad (1\text{-}59)$$

De vergelijkingen (1-57), (1-58) en (1-59) geven de Kelvin golf weer. De Kelvin golf heeft geen dwarssnelheid (v=0). Fysisch gezien komt het er op neer dat de Coriolis-kracht op de bewegende watermassa in evenwicht is met de kracht uitgeoefend door het verhang van de waterspiegel in dwarsrichting.

(iii) $\sigma^2 = f^2$ (1-48)

Uitwerking van (1-48) laat zien dat dit een valse wortel van het eigenwaarde probleem is en dat de volledige oplossing bestaat uit de Poincaré en de Kelvin golf.

1.6. De Rossby golf

De opzet van paragraaf 1.5. wordt geheel aangehouden met die verandering dat de diepte varieert met de afstand Y:

$$H_o = D_o.(1 - sY/B) \qquad (1\text{-}60)$$

$$s << 1 \qquad (1\text{-}61)$$

Wederom moet de oplossing voor (1-31) worden gezocht in de vorm:

$$\eta = \text{Re}\ \bar{\eta}(Y).\exp(ikX - i\sigma t) \qquad (1\text{-}62)$$

Volgens een soortgelijke uitwerking als gegeven in paragraaf 1.5. wordt uiteindelijk het volgende stelsel gevonden:

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= \eta_o.\sin\frac{n\pi Y}{B}.\cos(kX - \sigma t + \varphi) + O(s) && (1\text{-}63)\\ u &= -\frac{g}{f}.\frac{n\pi}{B}.\eta_o.\cos\frac{n\pi Y}{B}.\cos(kX - \sigma t + \varphi) + O(s) && (1\text{-}64)\\ v &= -\frac{g}{f}.k\eta_o.\sin\frac{n\pi Y}{B}.\sin(kX - \sigma t + \varphi) + O(s) && (1\text{-}65)\end{aligned}}$$

O(s) geeft een restterm aan in de orde van grootte van s.

De vergelijkingen (1-63), (1-64) en (1-65) geven golven weer die Rossby golven genoemd worden.

Voor kleine s is de frequentie σ van de Rossby golf altijd kleiner dan de Coriolis-parameter f.
Hieruit volgt dat de Rossby golf een laag frequente golf is met een golfperiode langer dan een dag.

1.7. Geschiktheidsonderzoek getijgolven

Vervolgens wordt onderzocht of één van de drie golven geschikt is voor toepassing in het te ontwerpen wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust.

Dit geschiktheidsonderzoek bestaat uit twee punten:

1. Wat is het fysische belang van de te onderzoeken golf?

2. Is het mogelijk, om op grond van de verticale getijgegevens langs de kust, de bewuste getijgolf te berekenen?

Elk der drie getijgolven wordt getoetst aan deze twee punten:

De Poincaré golf: 1. Het betreft kustgebieden waar $v \approx 0$ zodat de Poincaré golf niet hoeft te worden beschouwd.

2. De variabele n -in de formule van de Poincaré golf- kan enkel bepaald worden met getijgegevens uit de kust.

De Kelvin golf : 1. Van belang in kustgebieden.

2. De golf kan volledig bepaald worden op grond van verticale getijgegevens langs de kust.

De Rossby golf : 1. De Rossby golf is een laag frequente golf met een golfperiode langer dan een dag en om die reden niet van belang.

2. De golfhoogte is nul langs de kustlijn, vandaar dat de golf niet te bepalen is op grond van verticale getijgegevens langs de kust.

Conclusie: De Kelvin golf voldoet als enige aan de gestelde eisen. Vandaar dat de Kelvin golf ten grondslag ligt aan het ontwerp van het wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust.

2. Eén inkomende Kelvin golf

2.1. Inleiding

In hoofdstuk 1 is de Kelvin golf gekozen als kenmerkende getijgolf in het ontwerp van het model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust.

Behalve uit te gaan van een bepaalde getijgolf is het ook van belang een bepaald golfbeeld te veronderstellen.
In hoofdstuk 2 en 3 zijn de twee volgende golfbeelden uitgewerkt:

1. Eén inkomende Kelvin golf (hoofdstuk 2)
2. Golfbeeld dat ontstaat door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf (hoofdstuk 3)

ad 1 Het geval van één inkomende Kelvin golf is uitgewerkt om inzicht te krijgen in het gedrag en ter inleiding van punt 2.

ad 2 Het geval van twee tegen elkaar inlopende Kelvin golven zal het golfbeeld zijn waarop het getijmodel zal berusten.

Voor beide golfbeelden is de wijze van uitwerking dezelfde. Deze bestaat uit het achtereenvolgens uitwerken van de golfhoogte η, de stroomsnelheid u en de fasesnelheid c.
De grafische presentatie van de golfhoogte η en de stroomsnelheid u geschiedt voor beide op twee manieren:

a. Als functie van X, Y en t
b. Fase-amplitude diagram

ad a Hierbij wordt de golfhoogte η (of stroomsnelheid u) langs de verticale as uitgezet en de variabele X, Y of t langs de horizontale as. Deze presentatie geeft de meeste inzicht in het gedrag van de Kelvin golf.

ad b Hierbij wordt de fase θ van de golfhoogte η (of stroomsnelheid u) uitgezet tegen de amplitude $|\eta|$ van de golf. Het fase-amplitude diagram dient als uitgangspunt voor de stroomsnelheidsberekening in hoofdstuk 4.

2.2. Situatieschets en formules

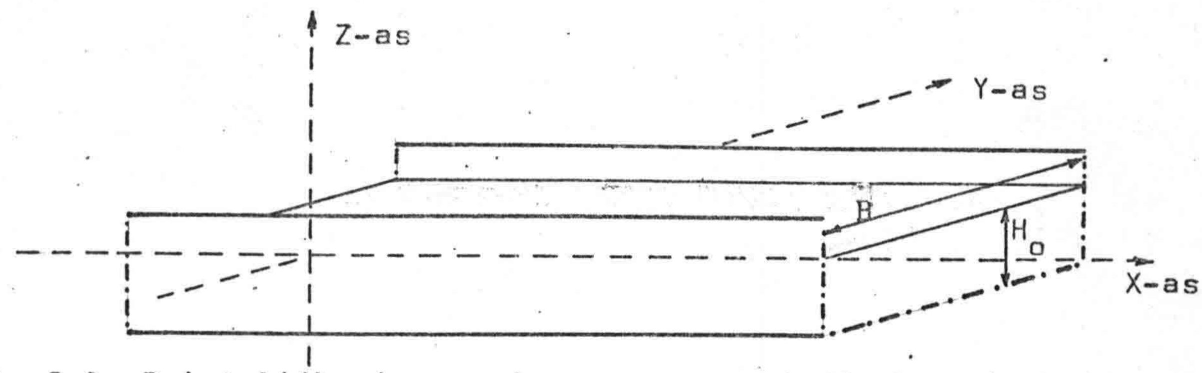


Fig.2.1. Ruimtelijke impressie van een oneindig lang kanaal.

De formules voor de Kelvin golf zijn:

$$\eta = \eta_o . \exp(-fY/C_o).\cos(k(X - C_o t) + \varphi) \qquad (2\text{-}1)$$

$$u = (\eta_o/H_o).C_o.\exp(-fY/C_o).\cos(k(X - C_o t) + \varphi) \qquad (2\text{-}2)$$

$$v = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

$C_o = \sqrt{gH_o}$
f = Coriolis-parameter
H_o = dikte van de vloeistoflaag bij afwezigheid van beweging
k = golfgetal
t = tijd
u = stroomsnelheid in X-richting
v = stroomsnelheid in Y-richting
X = coördinaat X-as
Y = coördinaat Y-as
η = golfhoogte
η_o = amplitude golfhoogte η voor $Y=0$
φ = fasehoek

Mbv $kC_o=\sigma$ kan gesteld worden:

$$\theta = kX - \sigma t + \varphi \qquad (2\text{-}4)$$

$$|\eta| = \eta_o . \exp(-fY/C_o) \qquad (2\text{-}5)$$

Daaruit volgt:

$$\eta = |\eta| .\cos\theta \qquad (2\text{-}6)$$

$$u = \sqrt{g/H_o}.\eta \qquad (2\text{-}7)$$

$$v = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

2.3. Golfhoogte η

2.3.1. Golfhoogte η als functie van X, Y en t

De golfhoogte η is een functie van X, Y en t: $\eta(X,Y,t)$.
De relaties η-X, η-Y en η-t zijn in de onderstaande grafieken weergegeven waarbij moet worden opgemerkt dat φ nul verondersteld is.

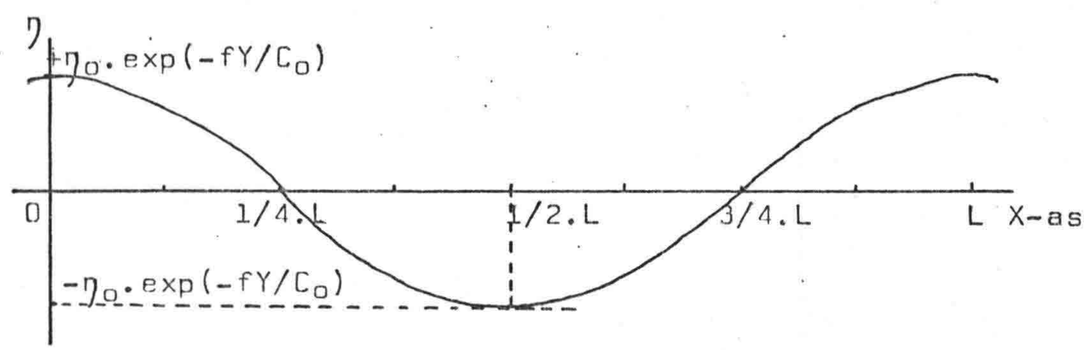


Fig.2.2. $\eta(X;Y;t=0)$

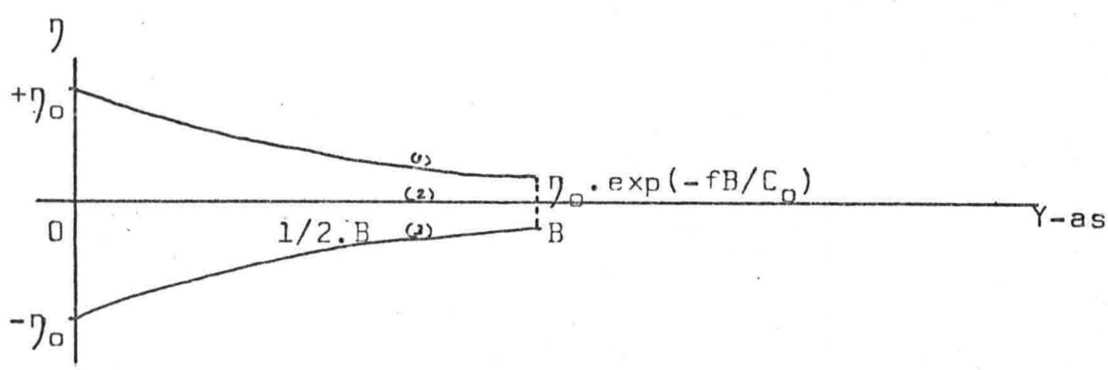


Fig.2.3. $\eta_{(1)}(X=0;Y;t=0)$, $\eta_{(2)}(X=\frac{1}{4}L;Y;t=0)$ en $\eta_{(3)}(X=\frac{1}{2}L;Y;t=0)$

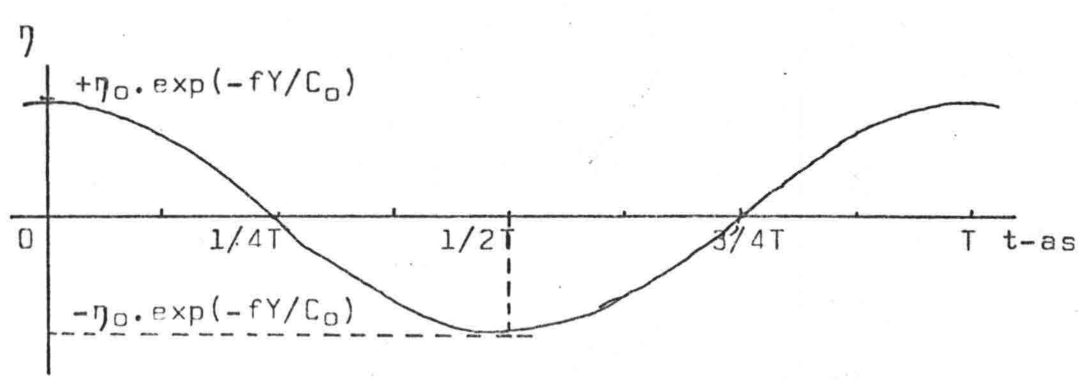


Fig.2.4. $\eta(X=0;Y;t)$

2.3.2. Fase-amplitude diagram golfhoogte η

Formule golfhoogte η	: $\eta = \lvert\eta\rvert \cdot \cos\theta_\eta$
	; de parameters die behoren bij de golfhoogte n zijn voorzien van de index η.
Polaire coördinaten	: $(\lvert\eta\rvert, \theta_\eta)$
Amplitude $\lvert\eta\rvert$	: $\lvert\eta\rvert = \eta_o \cdot \exp(-fY/C_o)$
Fasehoek θ_η	: $\theta_\eta = kX - \sigma t + \varphi$
	; de hoek is positief tegen de wijzers van de klok in, gerekend vanaf de positieve X-as.
Cartesische coördinaten:	(x_η, y_η)
	; Let wel: $x \neq X$ en $y \neq Y$
x_η	: $x_\eta = \lvert\eta\rvert \cdot \cos\theta_\eta$
y_η	: $y_\eta = \lvert\eta\rvert \cdot \sin\theta_\eta$
Vector $\bar{r}_\eta$	: $\bar{r}_\eta$ loopt van O naar (x_η, y_η).
	r_η is de straal van de golfhoogtecirkel

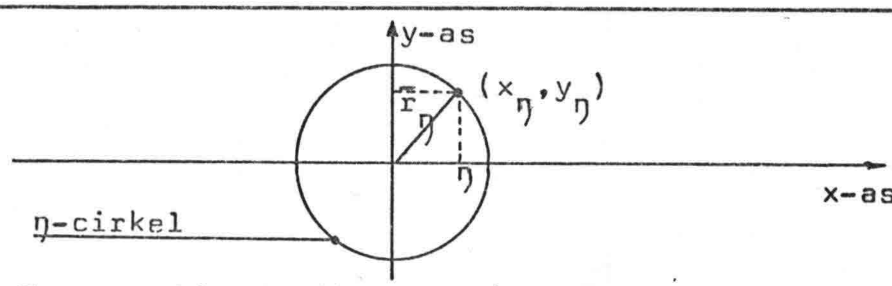


Fig.2.5. Fase-amplitude diagram η/golfhoogte-cirkel

(i) Invloed van X: Bij verandering van X verandert de fasehoek θ_η. Daardoor ontstaat de golfhoogte-cirkel.

(ii) Invloed van Y: Bij verandering van Y verandert de grootte van de straal r_η. De η-cirkel wordt groter of kleiner.

(iii) Invloed van t: Bij verandering van t verandert de fasehoek θ_η. (x_η, y_η) doorloopt de η-cirkel.

2.3.3. Isolijnen van één inkomende Kelvin golf

Isolijnen zijn hier gedefinieerd als lijnen van gelijke fase.

In fig.2.6. is weergegeven hoe één inkomende Kelvin golf zich verplaatst in het oneindig lang veronderstelde kanaal. In een bovenaanzicht wordt de positie van de Kelvin golf op bepaalde fasen van de getijperiode door isolijnen aangegeven.

In fig.2.7. wordt een "3-dimensionale impressie gegeven van het verticale getij.

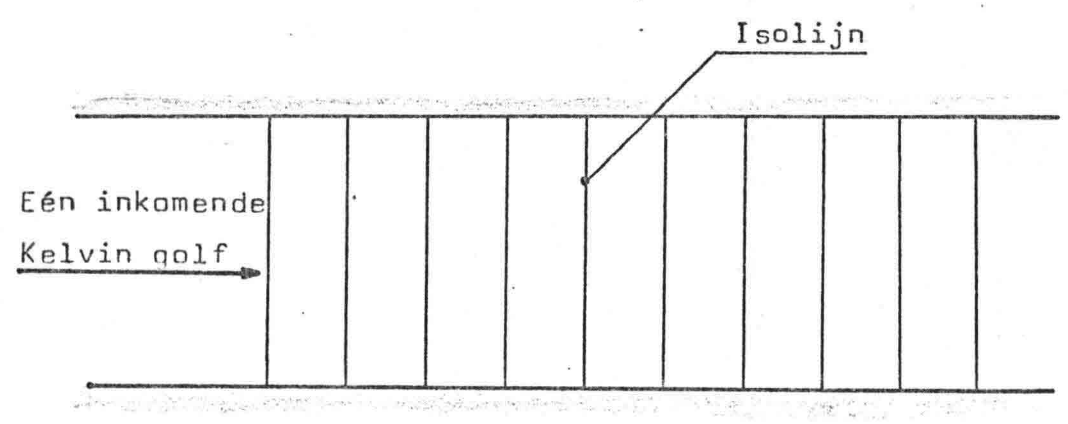


Fig.2.6. Isolijnen van één inkomende Kelvin golf.

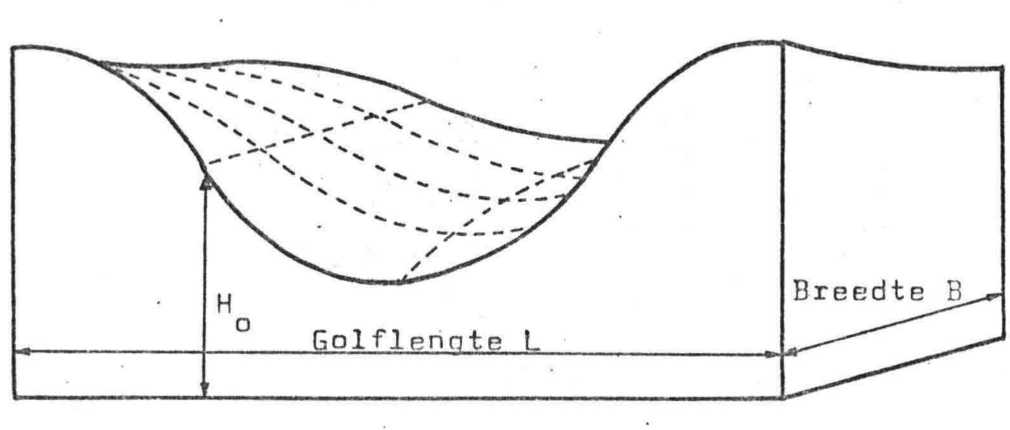


Fig.2.7. Ruimtelijke impressie verticaal getij Kelvin golf.

2.4. Stroomsnelheid u

2.4.1. Stroomsnelheid u als functie van X, Y en t

De stroomsnelheid in x-richting u is een functie van X, Y en t oftewel: u(X,Y,t).
De relaties u-X, u-Y en u-T zijn in de onderstaande grafieken weergegeven waarbij moet worden opgemerkt dat φ nul is verondersteld.

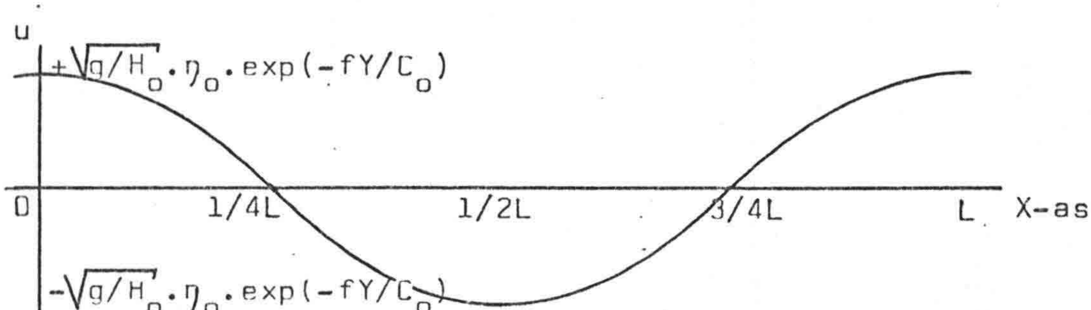


Fig.2.8. u(X;Y;t=0)

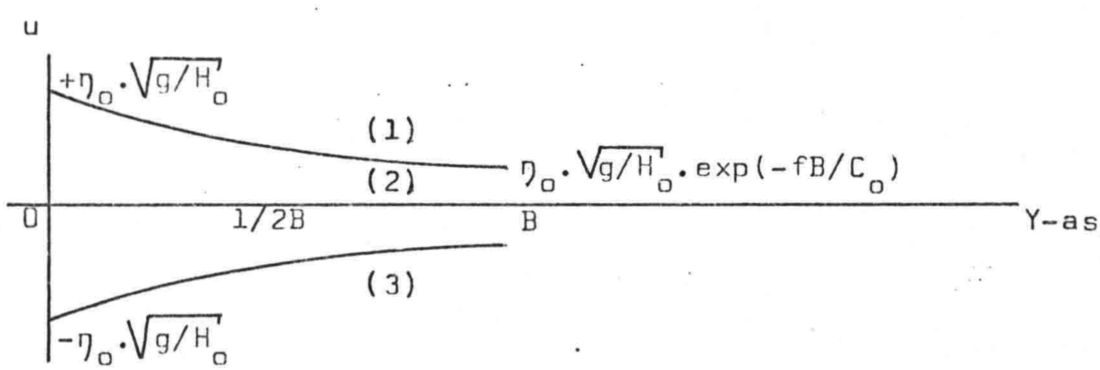


Fig.2.9. $u_{(1)}(X=0;Y;t=0)$, $u_{(2)}(X=\frac{1}{4}L;Y;t=0)$, $u_{(3)}(X=\frac{1}{2}L;Y;t=0)$

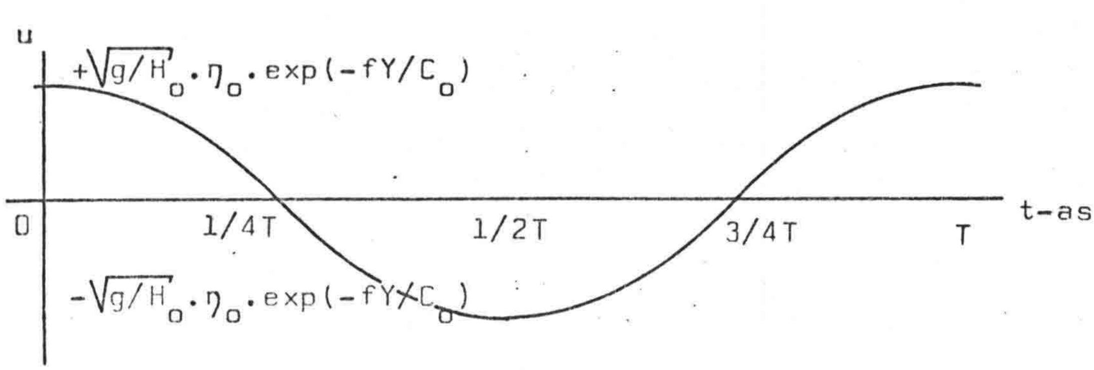


Fig.2.10. u(X=0;Y;t)

2.4.2. Fase-amplitude diagram stroomsnelheid u

a. Formule stroomsnelheid u : $u = |u| . \cos\Theta_u$

b. Polaire coördinaten : $(|u| , \Theta_u)$

Amplitude $|u|$: $u = \sqrt{g/H_o} . n_o . \exp(-fY/C_o)$

Fasehoek Θ_u : $\Theta_u = kX - \sigma t + \varphi$

c. Cartesische coördinaten : (x , y)

x, y : $x \neq X , y \neq Y$

x_u : $x_u = |u| . \cos\Theta_u$

y_u : $y_u = |u| . \sin\Theta_u$

d. Vector $\bar{r}_u$: $\bar{r}_u$ loopt van O naar (x_u , y_u).

r_u is de straal van de u-cirkel.

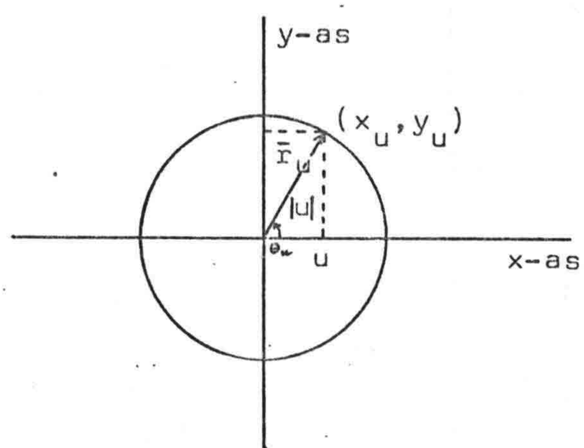


Fig.2.11. Fase-amplitude diagram u/stroomsnelheid-cirkel

(i) Invloed van X : Bij verandering van X verandert de fasehoek Θ_u. Daardoor ontstaat de stroomsnelheid-cirkel.

(ii) Invloed van Y : Bij verandering van Y verandert de grootte van de straal r_u. De u-cirkel wordt groter of kleiner.

(iii) Invloed van t : Bij verandering van t verandert de fasehoek Θ_u. (x_u, y_u) doorloopt de u-cirkel.

2.4.3. Relatie tussen η en u

De relatie tussen de golfhoogte η en de stroomsnelheid u zal in onderstaande grafiek worden geïllustreerd. Hieruit blijkt dat het enige verschil schuilt in de amplitude. De fase is voor beiden gelijk.

$$\Theta_\eta = \Theta_u$$

$$|u| = \sqrt{g/H_o}\cdot|\eta|$$

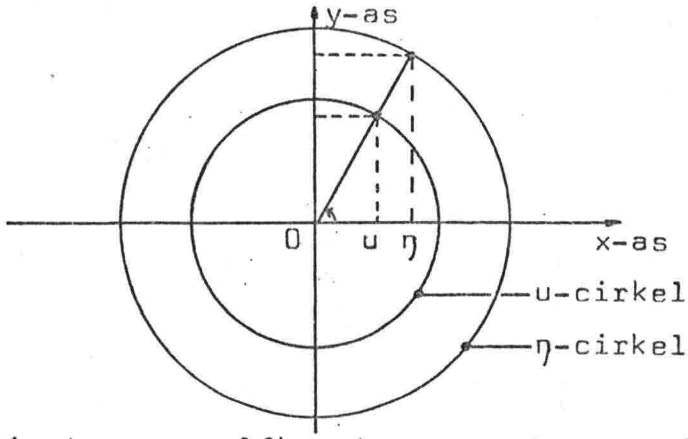


Fig.2.12. Relatie tussen golfhoogte η en stroomsnelheid u.

2.5. Fasesnelheid c

De fasesnelheid c van een lopende golf is de snelheid waarmee de golfvorm zich verplaatst, ofwel een punt van constante fase, zoals een golfkam.

Golfhoogte η : $\eta = \eta_o \cdot \exp(-fY/C_o) \cdot \cos(kX - \sigma t + \varphi)$

Voor golfkam geldt : $\delta\eta/\delta X = 0$

Daaruit volgt : $X = (\sigma/k) \cdot t$ + constante

Fasesnelheid c : $c = \delta X/\delta t$

$$= \sigma/k = L/T = \sqrt{gH_o}$$

3. Golfbeeld door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf

3.1. Inleiding

In dit hoofdstuk wordt het golfbeeld onderzocht dat ontstaat door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf. Elke getijcomponent heeft dus een getijgolf die opgebouwd wordt gedacht uit één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf. Dit golfbeeld zal moeten dienen als model voor de berekening van getijstroomsnelheden langs de kust.

De Kelvin golf wordt gekarakteriseerd door bewegingsrichting, amplitude η_o, golfgetal k, frequentie σ en beginfase φ.

Voor de inkomende Kelvin golf (golf 1) en de teruggekaatste Kelvin golf (golf 2) wordt verondersteld:

a. Bewegingsrichting:			tegengesteld
b. Amplitude	η_o	:	-
c. Golfgetal	k	:	gelijk
d. Frequentie	σ	:	gelijk
e. Beginfase	φ	:	-

De parameters die behoren bij golf 1 en 2 zijn voorzien van de index "1" respectievelijk "2". In geval de parameters voor beide golven gelijk zijn (σ en k) wordt afgezien van een index.

De golf die ontstaat door interferentie van golf 1 en 2 wordt de "samengestelde" of "totale golf" genoemd waarbij de parameters "tot" als index hebben.

Aangezien het fase-amplitude diagram van de totale golfhoogte en de totale stroomsnelheid ten grondslag liggen aan het op te zetten model, zal hieraan de meeste aandacht worden geschonken.

3.2. Situatieschets en formules

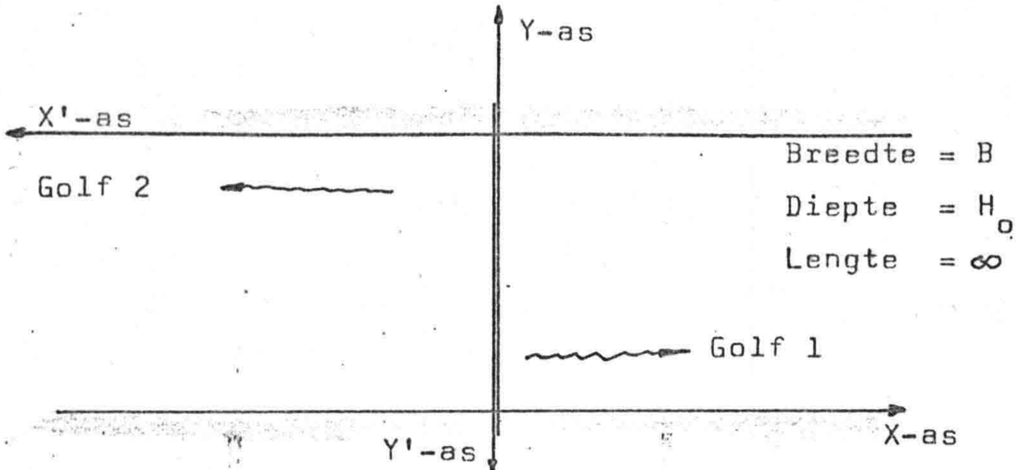


Fig.3.1. Bovenaanzicht oneindig lange bak met twee tegen elkaar inlopende Kelvin golven.

De formules voor golf 1 t.o.v. het XY-assenstelsel luiden:

$$\eta_1 = \eta_{o_1} . \exp(-fY/C_o) . \cos(kX - \sigma t + \varphi_1) \qquad (3\text{-}1)$$

$$u_1 = \sqrt{g/H_o} . \eta_{o_1} . \exp(-fY/C_o) . \cos(kX - \sigma t + \varphi_1) \qquad (3\text{-}2)$$

$$v_1 = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

De formules voor golf 2 t.o.v. het X'Y'-assenstelsel luiden:

$$\eta_2 = \eta_{o_2} . \exp(-fY'/C_o) . \cos(kX' - \sigma t + \varphi_2) \qquad (3\text{-}4)$$

$$u_2 = \sqrt{g/H_o} . \eta_{o_2} . \exp(-fY'/C_o) . \cos(kX' - \sigma t + \varphi_2) \qquad (3\text{-}5)$$

$$v_2 = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

De formules voor golf 2 zijn ook t.o.v. het XY-assenstelsel te geven met behulp van de volgende relaties:

$$X' = -X \qquad (3\text{-}7)$$

$$Y' = B - Y \qquad (3\text{-}8)$$

u_2' is positief indien deze de richting heeft van de positieve X'-as. Bij omzetting van u_2 naar het XY-assenstelsel treedt hier dus een tekenwisseling op!

De formules voor golf 2 t.o.v. het XY-assenstelsel luiden:

$$\eta_2 = \eta_{o_2} . \exp(-fB/C_o) . \exp(+fY/C_o) . \cos(-kX - \sigma t + \varphi_2) \qquad (3\text{-}9)$$

$$u_2 = -\sqrt{g/H_o} . \eta_{o_2} . \exp(-fB/C_o) . \exp(+fY/C_o) . \cos(-kX - \sigma t + \varphi_2) \qquad (3\text{-}10)$$

$$v_2 = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

3.3. De totale golfhoogte η_{tot}

3.3.1. Bepaling η_{tot}

$$\eta_1 = \eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\cos(kX - \sigma t + \varphi_1) \qquad (3\text{-}1)$$

$$\eta_2 = \eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o).\exp(+fY/C_o).\cos(-kX - \sigma t + \varphi_2) \qquad (3\text{-}9)$$

$$\eta_{tot} = \eta_1 + \eta_2 \qquad (3\text{-}12)$$

Door een geschikte keuze van X=0 en t=0 is het mogelijk de beginfases φ_1 en φ_2 te elimineren uit de vergelijkingen (3-1) en (3-9). Als verondersteld wordt dat t=0 op het moment dat beide golfhoogten maximaal zijn op X=0, geldt dat φ_1=0 en φ_2=0.

$$\eta_1 = \eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\cos(kX - \sigma t) \qquad (3\text{-}13)$$

$$\eta_2 = \eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o).\exp(+fY/C_o).\cos(kX + \sigma t) \qquad (3\text{-}14)$$

$$\eta_{tot} = \eta_1 + \eta_2 \qquad (3\text{-}15)$$

Voor de totale golfhoogte η_{tot} geldt dan:

(i)

$$\eta_{tot} = \eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\sqrt{1 + \gamma^2 + 2.\gamma.\cos(2kX)}\,.\cos(\sigma t - \delta) \qquad (3\text{-}16)$$

$$\gamma = (\eta_{o_2}/\eta_{o_1}).\exp(-fB/C_o).\exp(+2fY/C_o) \qquad (3\text{-}17)$$

$$\delta = \arctan((1-\gamma)/(1+\gamma)).\tan(kX) \qquad (3\text{-}18)$$

(ii)

$$\eta_{tot} = \eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\sqrt{1 + \gamma^2 + 2.\gamma.\cos(2\sigma t)}\,.\cos(kX - \varepsilon) \qquad (3\text{-}19)$$

$$\gamma = (\eta_{o_2}/\eta_{o_1}).\exp(-fB/C_o).\exp(+2fY/C_o) \qquad (3\text{-}20)$$

$$\varepsilon = \arctan((1-\gamma)/(1+\gamma)).\tan(\sigma t) \qquad (3\text{-}21)$$

Uit (i) en (ii) blijkt dat de formule voor de totale golfhoogte η_{tot} op vaste plaats als functie van de tijd dezelfde structuur heeft als de formule voor η_{tot} op vast tijdstip als functie van de plaats!

3.3.2. De totale golfhoogte η_{tot} als functie van t

Ter verduidelijking van het karakter van de totale golfhoogte η_{tot} zijn vele grafieken denkbaar. Om onnodige complexiteit te voorkomen is hier gekozen voor onderstaande grafiek. Hierin wordt de golfhoogte van de totale golf bepaald door twee tegen elkaar inlopende golven te superponeren. Zo wordt een redlijke indruk gegeven van het golfbeeld dat ontstaat in lengterichting.

Aantekeningen grafiek:
- a. X : een golflengte L, vanaf X=0.
- b. Y : constant
- c. t : een periode T met tijdstappen van 1/12.T.
- d. γ : $\frac{1}{2}$ (keuze is vrij)

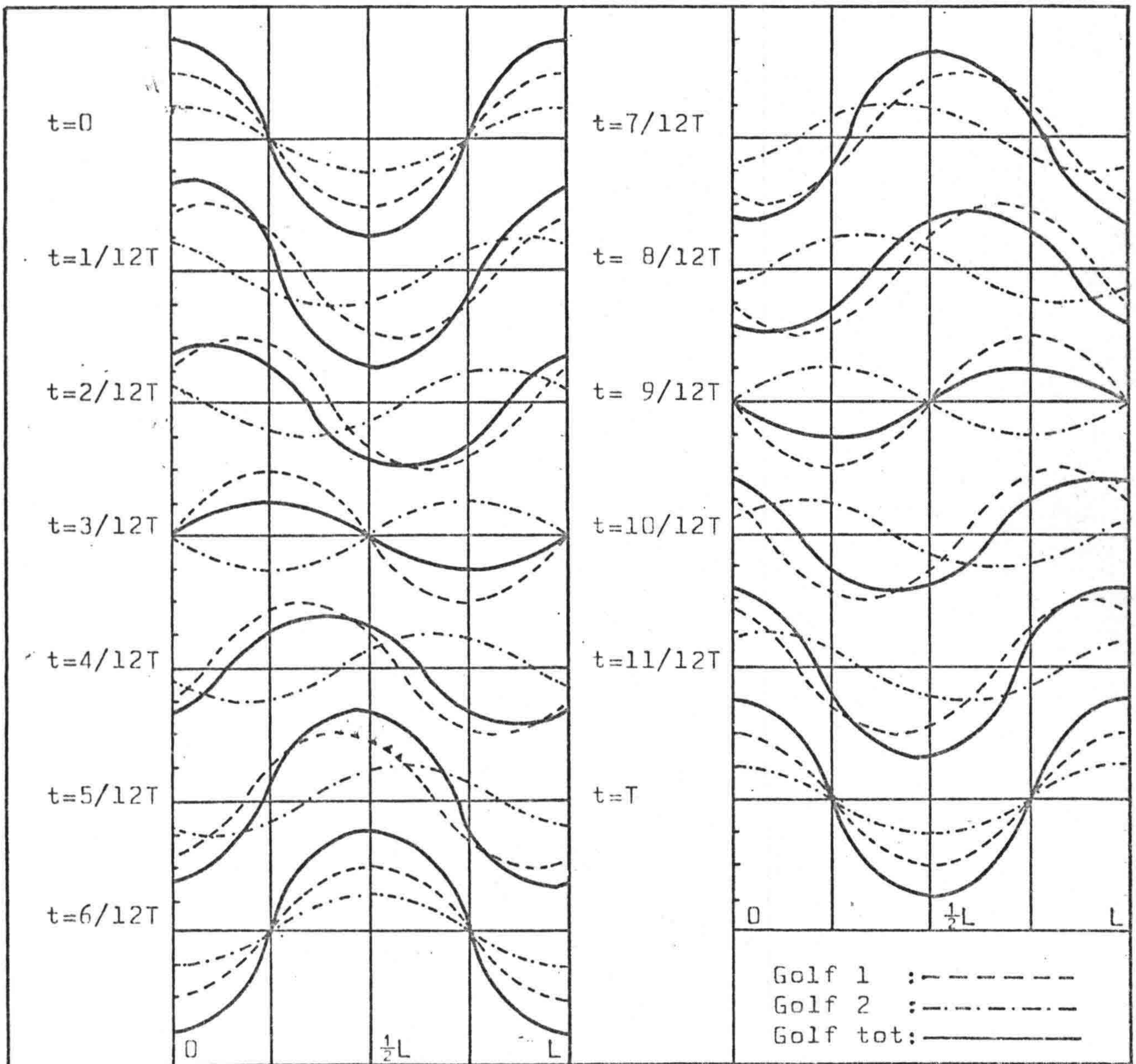


Fig.3.2. Totale golfhoogte door de golfhoogten van twee tegen elkaar inlopende golven te superponeren.

Uitgaande van de formules (3-16) t/m (3-21) en fig.3.2. ter illustratie kan nu geconcludeerd worden dat:

a. De totale golf verplaatst zich in dezelfde richting als de golf met de grootste amplitude.

b. De snelheid waarmee de golfvorm zich verplaatst, de fasesnelheid, is niet constant. Wel blijkt dat het gemiddelde van de fasesnelheid gelijk is aan die van de enkele golf.

c. De totale golf heeft een lopend karakter als golf 2 nul is. De totale golf heeft een lopend/staand karakter als de amplituden der samenstellende golven ongelijk zijn (maar ongelijk aan nul). De totale golf heeft een staand karakter bij gelijke amplituden van de samenstellende golven.

d. De totale golfhoogte η_{tot}, de som van golfhoogten 1 en 2, heeft een cosinus-vorm waarbij de amplitude varieert.

e. Beschouwd over de tijd t vertoont de amplitude van de totale golfhoogte een slingering met een frequentie die het dubbele is van die van de enkele Kelvin golf. De maximale waarde van de totale golfhoogte bedraagt $\eta_o . \sqrt{1 + \gamma^2 + 2.\gamma} = \eta_o .(1 + \gamma)$. De minimale waarde van de totale golfhoogte bedraagt $\eta_o(1 - \gamma)$.

f. Beschouwd over de lengterichting X (de kust) vertoont de amplitude van de totale golfhoogte een slingering met dubbel golfgetal (2k). De amplitude van de totale golfhoogte varieert van $\eta_o(1 + \gamma)$ voor de maxima (X=0, $\frac{1}{2}$L, L, ..) tot $\eta_o(1 - \gamma)$ voor de minima (X=$\frac{1}{4}$L, $\frac{3}{4}$L, ..).

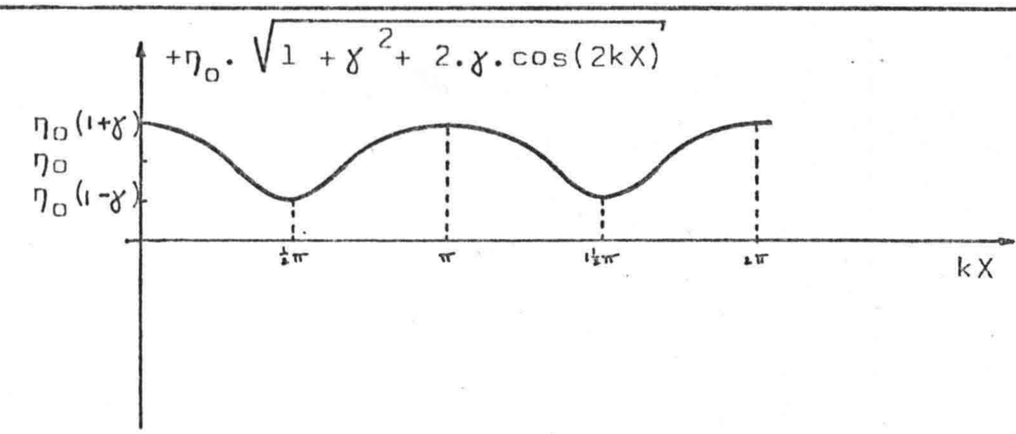


Fig.3.3. Amplitudeverloop totale golfhoogte langs X.

3.3.3. Fase-amplitude diagram totale golfhoogte η_{tot}

De totale golfhoogte η_{tot} kan worden bepaald door golfhoogte 1 (fig.3.4.) en golfhoogte 2 (fig.3.5.) te superponeren.

Het superponeren van deze twee golfhoogten gebeurt in eerste instantie voor vaste waarden van X, Y en t. Vervolgens wordt de invloed van elk der variabelen beschouwd.

Het pijltje bij de golfhoogte-cirkels (fig.3.4. en fig.3.5.) geeft de draairichting aan van de straal $\bar{r}$ bij toename van X.

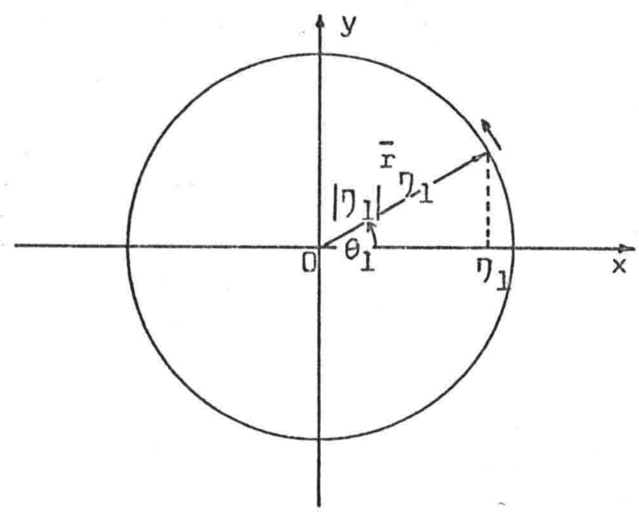


Fig.3.4. Fase-amplitude diagram golf 1/ golfhoogte-cirkel golf 1

Golf 1:

$\eta_1 = |\eta_1| \cdot \cos\theta_1$

$|\eta_1| = \eta_{o_1} \cdot \exp(-fY/C_o)$

$\theta_1 = kX - \sigma t + \varphi_1$

$\bar{r}_{\eta_1}$: $(|\eta_1| ; \theta_1)$

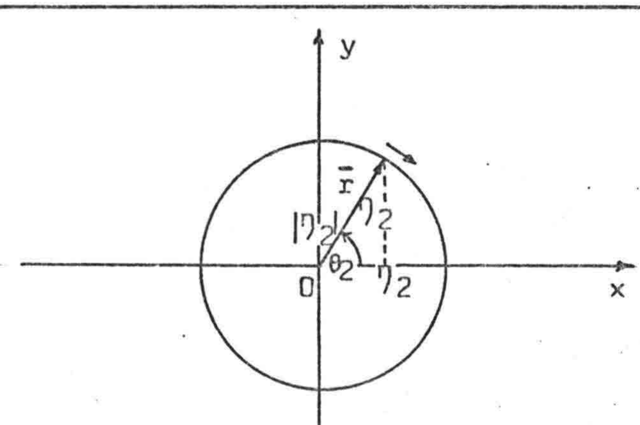


Fig.3.5. Fase-amplitude diagram golf 2/ golfhoogte-cirkel golf 2

Golf 2:

$\eta_2 = |\eta_2| \cdot \cos\theta_2$

$|\eta_2| = \eta_{o_2} \cdot \exp(-fY/C_o)$

$\theta_2 = -kX - \sigma t + \varphi_2$

$\bar{r}_{\eta_2}$: $(|\eta_2| ; \theta_2)$

De totale golfhoogte wordt verkregen door golfhoogte 1 en golfhoogte 2 te superponeren, zoals wordt aangegeven in fig.3.6..

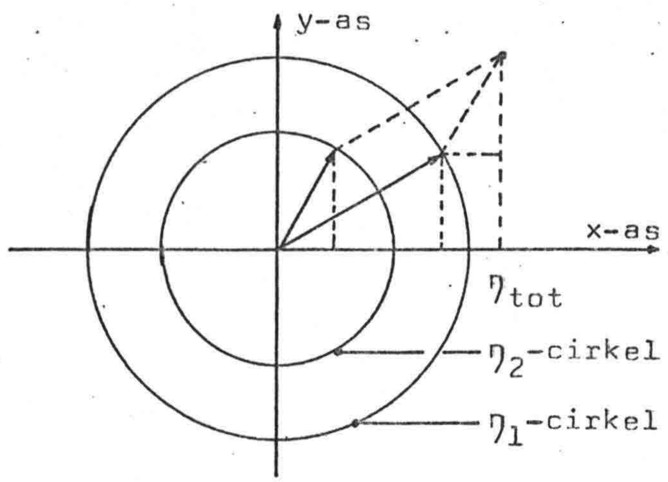


Fig.3.6. Totale golfhoogte η_{tot} voor één punt.

Totale golfhoogte:

$\eta_{tot} = \eta_1 + \eta_2$

$\eta_1 = |\eta_1| \cdot \cos\theta_1$

$\eta_2 = |\eta_2| \cdot \cos\theta_2$

$\bar{r}_{\eta_{tot}} : (\eta_{tot} ; \theta_{tot})$

(i) Invloed van X:

Door nu X te laten toenemen gaan de stralen van de cirkels 1 en 2, $\bar{r}_{\eta_1}$ resp. $\bar{r}_{\eta_2}$, met gelijke grootte van hoeksnelheid tegen elkaar inlopen. Door vectoriële sommatie van deze stralen ontstaat de goniometrische figuur zoals is aangegeven in fig.3.7..

Deze goniometrische figuur is een ellips en geeft de totale golfhoogte η_{tot} weer als functie van X bij vaste Y en t.

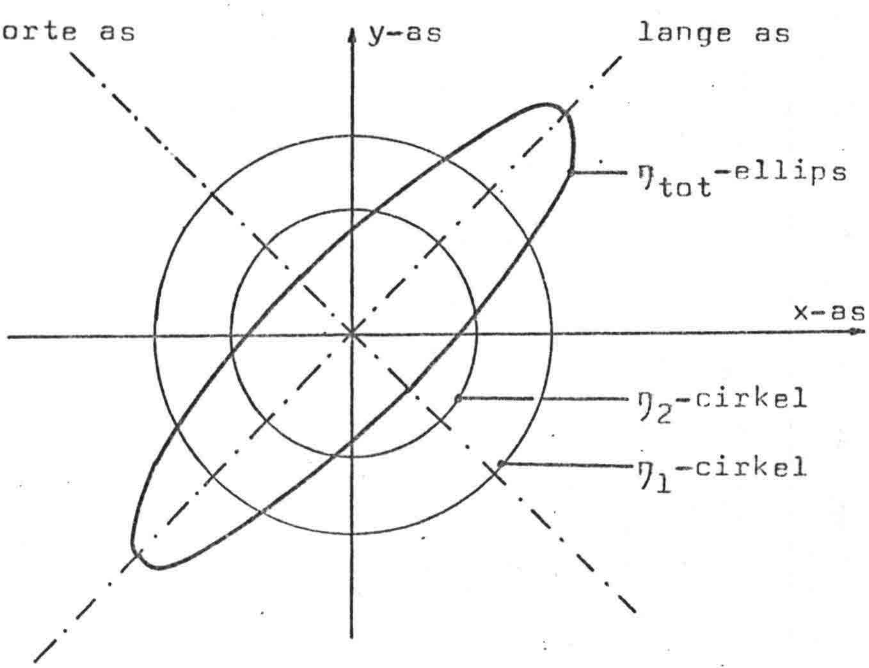


Fig.3.7. Fase-amplitude diagram η_{tot}/η_{tot}-ellips

Bij het fase-amplitude diagram van de enkele Kelvin golf wordt de term "straal $\bar{r}$" gebruikt aangezien hier sprake is van een cirkel.

Het fase-amplitude diagram van de samengestelde golf wordt echter gekenmerkt door een ellips, vandaar dat nu de term "radius vector $\bar{r}$" wordt gebruikt.

(ii) Invloed van Y:

Zoals is aangegeven in fig.3.8. beinvloedt Y de straalgrootte van de golfhoogte-cirkel. Aangezien de radius vector ontstaat door sommatie van de golfhoogte stralen verandert ook de grootte van de radius vector.

Er treedt wel een faseverschuiving op voor de radius vector maar dit wordt indirect veroorzaakt door de grootteverandering van de golfhoogte stralen. Y heeft geen rechtstreekse invloed op de fase aangezien Y niet in de fase-formule voorkomt!

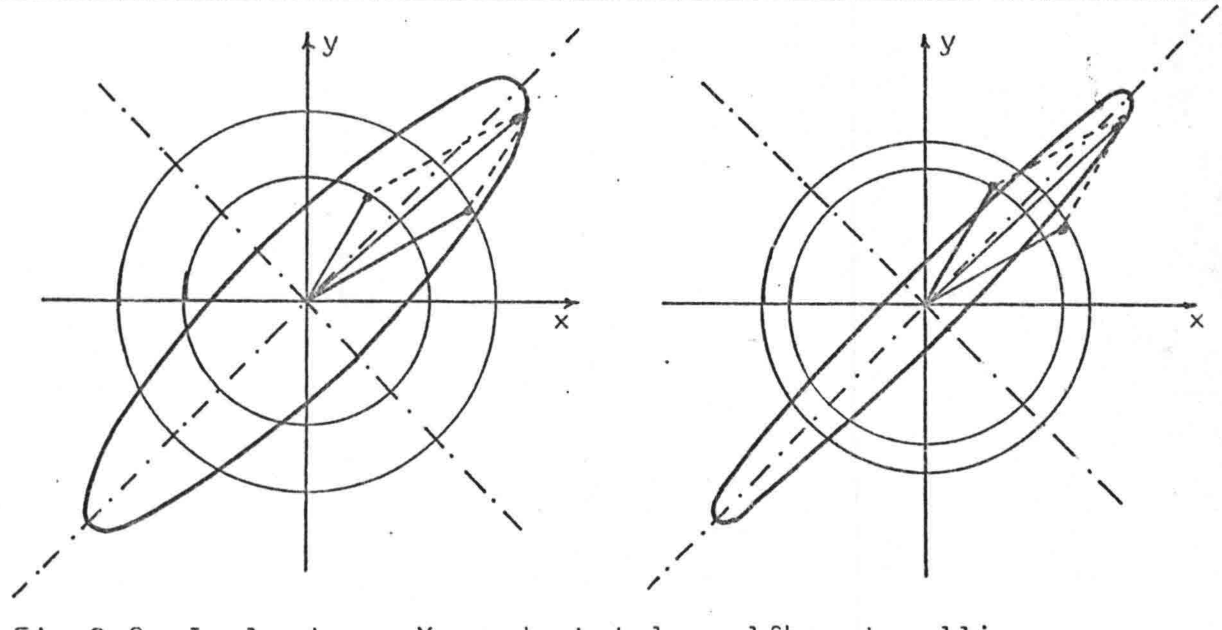


Fig.3.8. Invloed van Y op de totale golfhoogte ellips.

(iii) Invloed van t:

Bij een toename van t roteert de totale golfhoogte ellips in zijn totaliteit over de hoek $-\sigma t$.

3.3.4. Isolijnen bij interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf

Isolijnen zijn hier gedefinieerd als lijnen van gelijke fase.

In fig.3.9. zijn de isolijnen getekend die ontstaan bij interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf. Hierbij is verondersteld: $\eta_{o_1} = \eta_{o_2}$

Het hierdoor ontstane golfbeeld staat bekend als het amfidromisch systeem.

Amfidromie, amfidromisch punt of draaigetijde is het knoop- of draaipunt in isolijnen. Het is een punt waar de amplitude van het verticale getij (golfhoogte η) nul is.
In het amfidromisch punt treden wel degelijk getijdestromen op maar er is géén hoog- of laagwater.
Om dit amfidromisch punt draaien de lijnen van gelijk hoogwater (en laagwater) op het noordelijk halfrond tegen de wijzers van de klok in, op het zuidelijk halfrond met de wijzers van de klok mee.

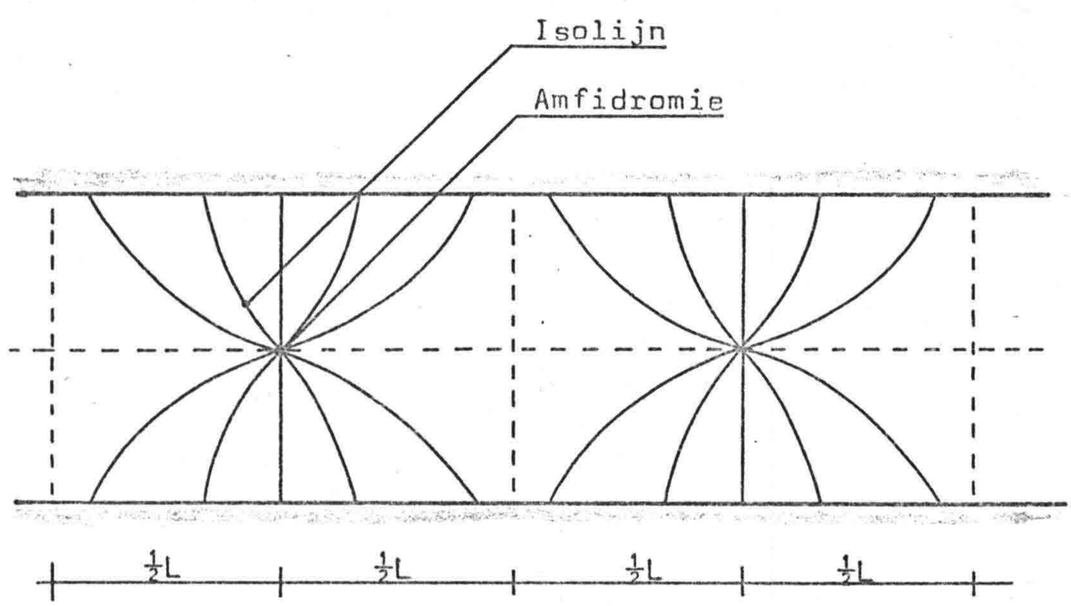


Fig.3.9. Het amfidromisch systeem bij interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf.

3.4. De totale stroomsnelheid u_{tot}

3.4.1. Bepaling u_{tot}

$$u_1 = +\sqrt{g/H_o}.\eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\cos(kX - \sigma t + \varphi_1) \tag{3-22}$$
$$u_2 = -\sqrt{g/H_o}.\eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o).\exp(+fY/C_o).\cos(-kX - \sigma t + \varphi_2) \tag{3-23}$$
$$u_{tot} = u_1 + u_2 \tag{3-24}$$

Door een geschikte keuze van X=0 en t=0 is het mogelijk de beginfasen φ_1 en φ_2 te elimineren uit de vergelijkingen (3-22) en (3-23). Als verondersteld wordt dat t=0 op het moment dat beide golfhoogten maximaal zijn op X=0 geldt dat φ_1=0 en φ_2=0.

$$u_1 = +\sqrt{g/H_o}.\eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\cos(kX - \sigma t) \tag{3-25}$$
$$u_2 = -\sqrt{g/H_o}.\eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o).\exp(+fY/C_o).\cos(kX + \sigma t) \tag{3-26}$$
$$u_{tot} = u_1 + u_2 \tag{3-27}$$

Voor de totale stroomsnelheid u_{tot} geldt dan:

(i)
$$u_{tot} = +\sqrt{g/H_o}.\eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\sqrt{1 + \gamma^2 - 2.\gamma.\cos(2kX)}.\cos(\sigma t - \mu) \tag{3-28}$$
$$\gamma = (\eta_{o_2}/\eta_{o_1}).\exp(-fB/C_o).\exp(+2fY/C_o) \tag{3-29}$$
$$\mu = \arctan((1+\gamma)/(1-\gamma).\tan(kX)) \tag{3-30}$$

(ii)
$$u_{tot} = +\sqrt{g/H_o}.\eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\sqrt{1 + \gamma^2 - 2.\gamma.\cos(2\sigma t)}.\cos(kX - \tau) \tag{3-31}$$
$$\gamma = (\eta_{o_2}/\eta_{o_1}).\exp(-fB/C_o).\exp(+2fY/C_o) \tag{3-32}$$
$$\tau = \arctan((1+\gamma)/(1-\gamma).\tan(\sigma t)) \tag{3-33}$$

Uit (i) en (ii) blijkt dat de formule voor de totale stroomsnelheid u_{tot} op vaste plaats als functie van de tijd dezelfde structuur heeft als de formule voor u_{tot} op vast tijdstip als functie van de plaats!

3.4.2. De totale stroomsnelheid u_{tot} als functie van t

Ter verduidelijking van het karakter van de totale stroomsnelheid u_{tot} zijn vele grafieken denkbaar. Om onnodige complexiteit te voorkomen is hier gekozen voor onderstaande grafiek. Hierin wordt de stroomsnelheid van de totale golf bepaald uitgaande van de golfhoogten van de samenstellende Kelvin golven.

Aantekeningen grafiek:
a. X : een golflengte L, vanaf X=0.
b. Y : constant
c. t : een periode T met tijdstappen van 1/12T.
d. γ : $\frac{1}{2}$ (keuze is vrij)

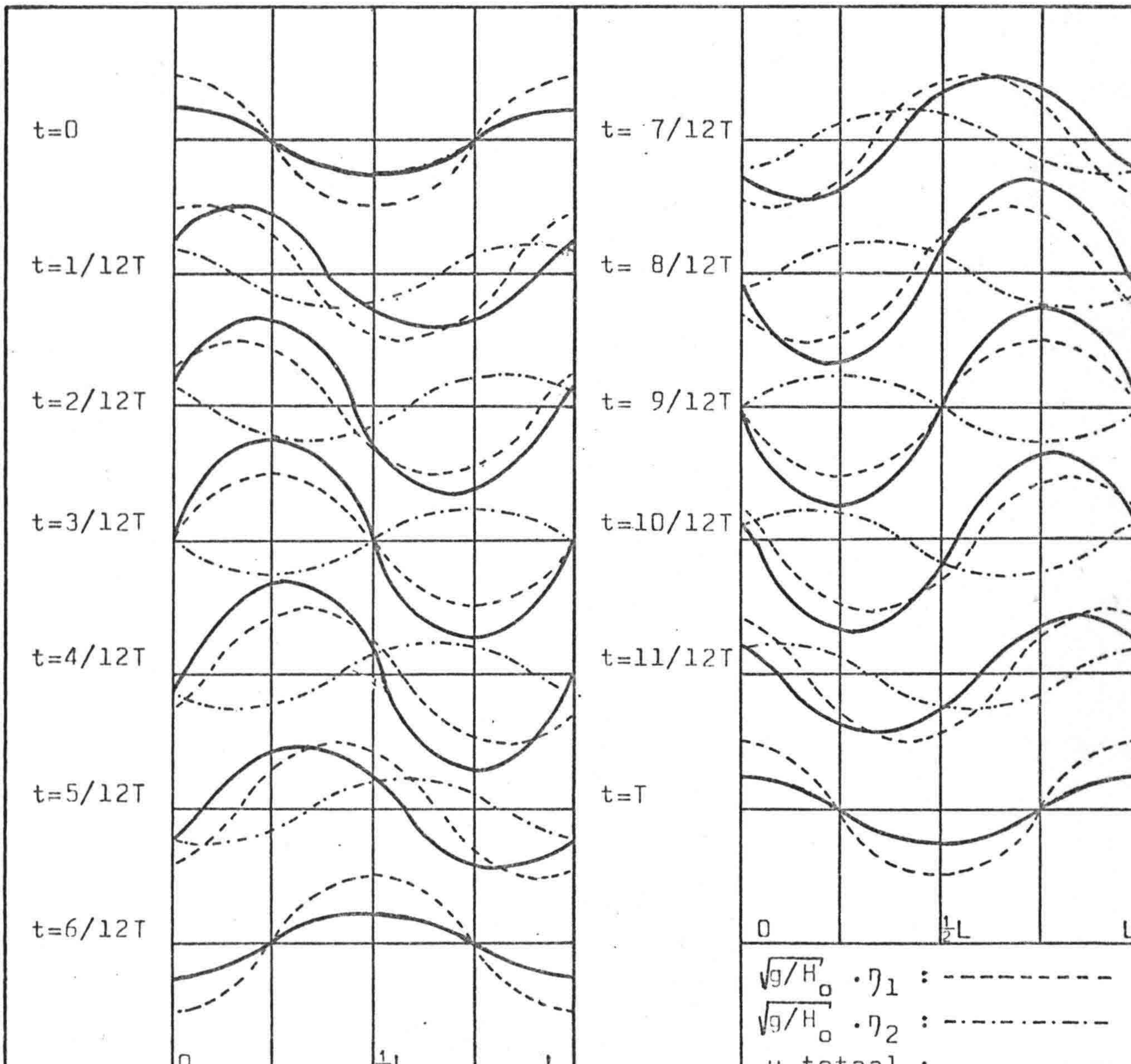


Fig.3.10. Totale stroomsnelheid u_{tot}.

Met behulp van (3-1) en (3-9) kunnen de formules (3-22), (3-23) en (3-24) als volgt worden geschreven:

$$u_1 = + \sqrt{g/H_o} \cdot \eta_1 \qquad (3\text{-}34)$$

$$u_2 = - \sqrt{g/H_o} \cdot \eta_2 \qquad (3\text{-}35)$$

$$u_{tot} = + \sqrt{g/H_o} \cdot (\eta_1 - \eta_2) \qquad (3\text{-}36)$$

Uit formule (3-36) blijkt dat de golfhoogte van de samengestelde golf bepaald kan worden als η_1 en η_2 bekend zijn.

3.4.3. Fase-amplitude diagram totale stroomsnelheid u_{tot}

Formule: $u_{tot} = + \sqrt{g/H_o} \cdot (\eta_1 - \eta_2)$

Uitgaande van de polaire vorm van η_1 en η_2 in het polaire coördinatenstelsel is op eenvoudige wijze u_{tot} te bepalen.

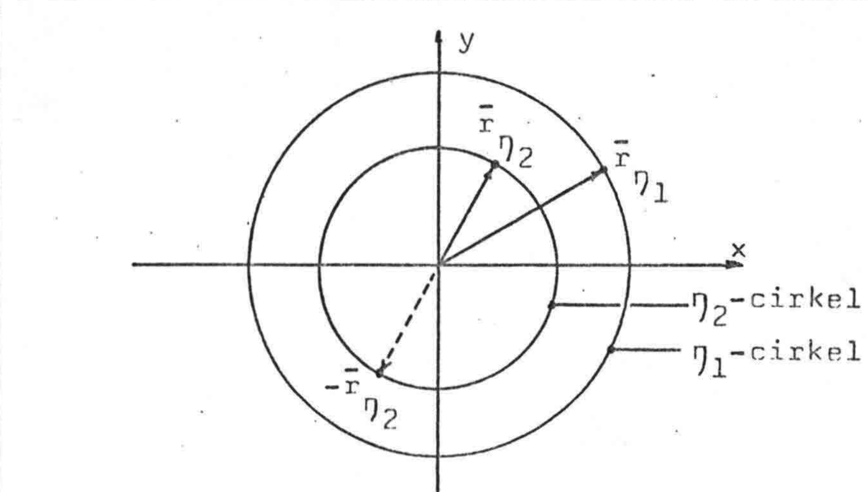


Fig.3.12. η_1- en η_2-cirkel.

$\bar{r}_{\eta_1}$: (η_1 ; θ_1)

$\bar{r}_{\eta_2}$: (η_2 ; θ_2)

$-\bar{r}_{\eta_2}$: (η_2 ; $\theta_2+\pi$)

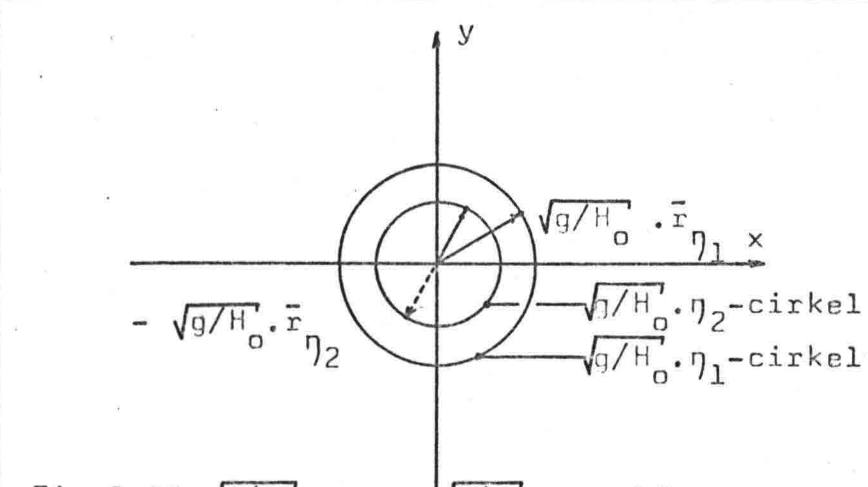


Fig.3.13. $\sqrt{g/H_o} \cdot \eta_1$- en $\sqrt{g/H_o} \cdot \eta_2$-cirkel.

Vermenigvuldiging van de twee golfhoogte-cirkels met de factor $\sqrt{g/H_o}$.

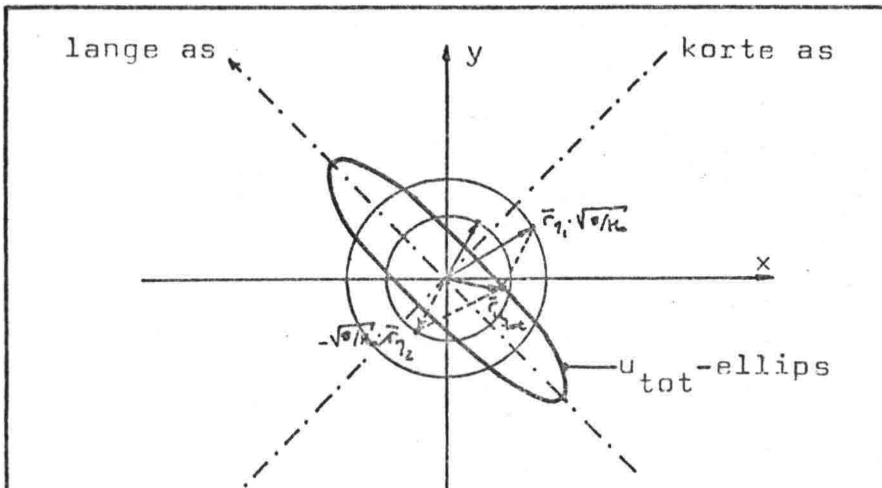


Fig.3.14. u_{tot}-ellips.

Door vectoriële sommatie van de stralen $\sqrt{g/H_o} \cdot \bar{r}_{\eta_1}$ en $-\sqrt{g/H_o} \cdot \bar{r}_{\eta_2}$ ontstaat de u_{tot}-ellips.

3.4.4. Relatie tussen η_{tot} en u_{tot}

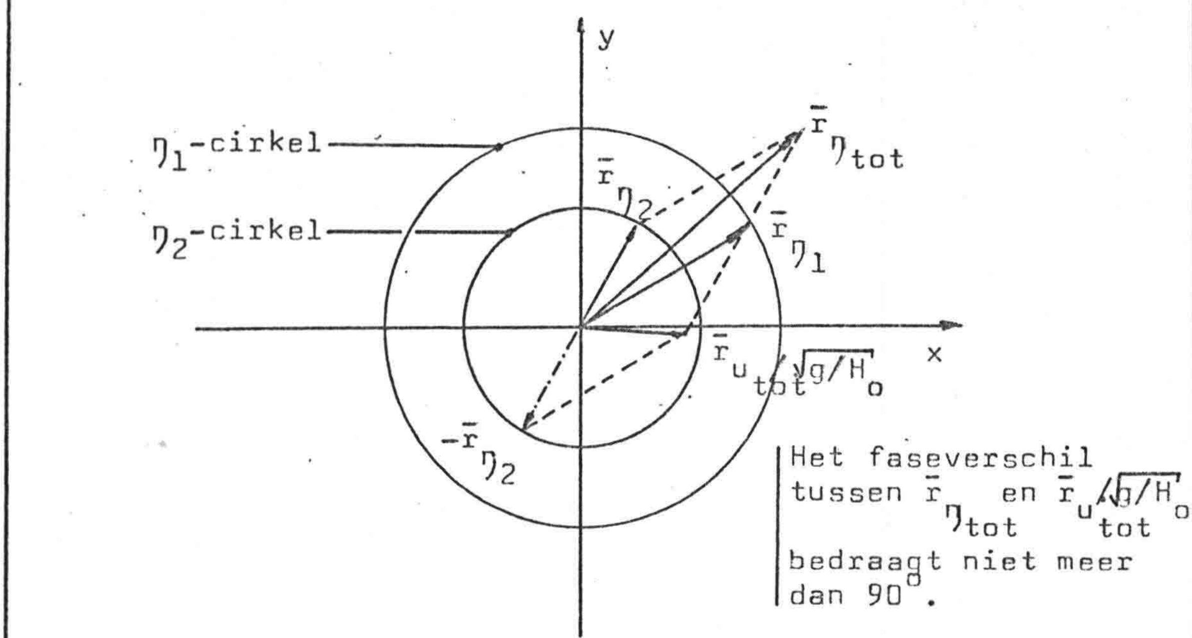


Fig.3.15. Relatie η_{tot} - u_{tot} voor één bepaald punt.

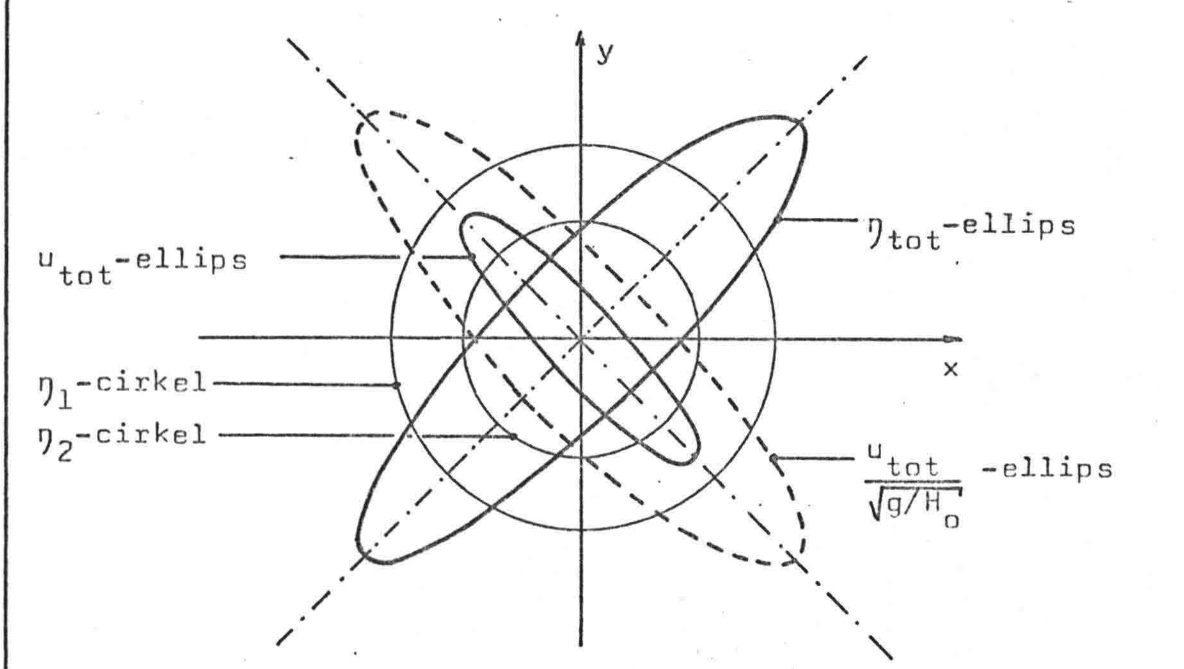


Fig.3.16. Relatie η_{tot} - u_{tot} bij variabele X.

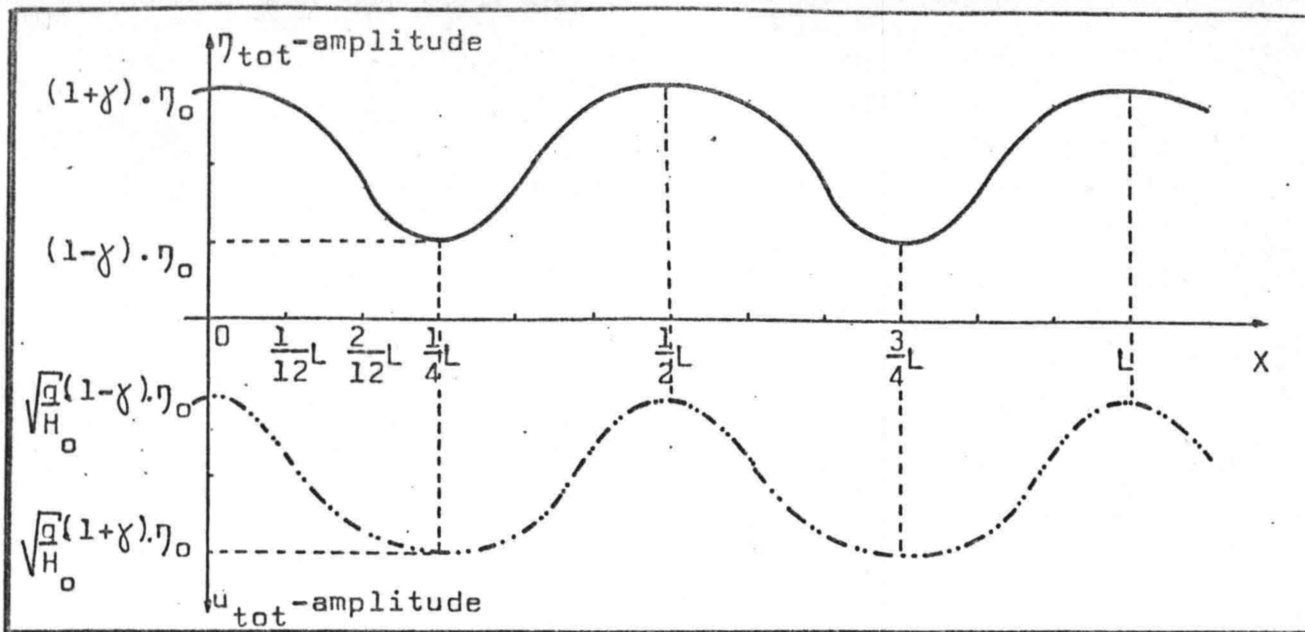


Fig.3.17. De relatie tussen η_{tot}- en u_{tot}-amplitude over een golflengte L.

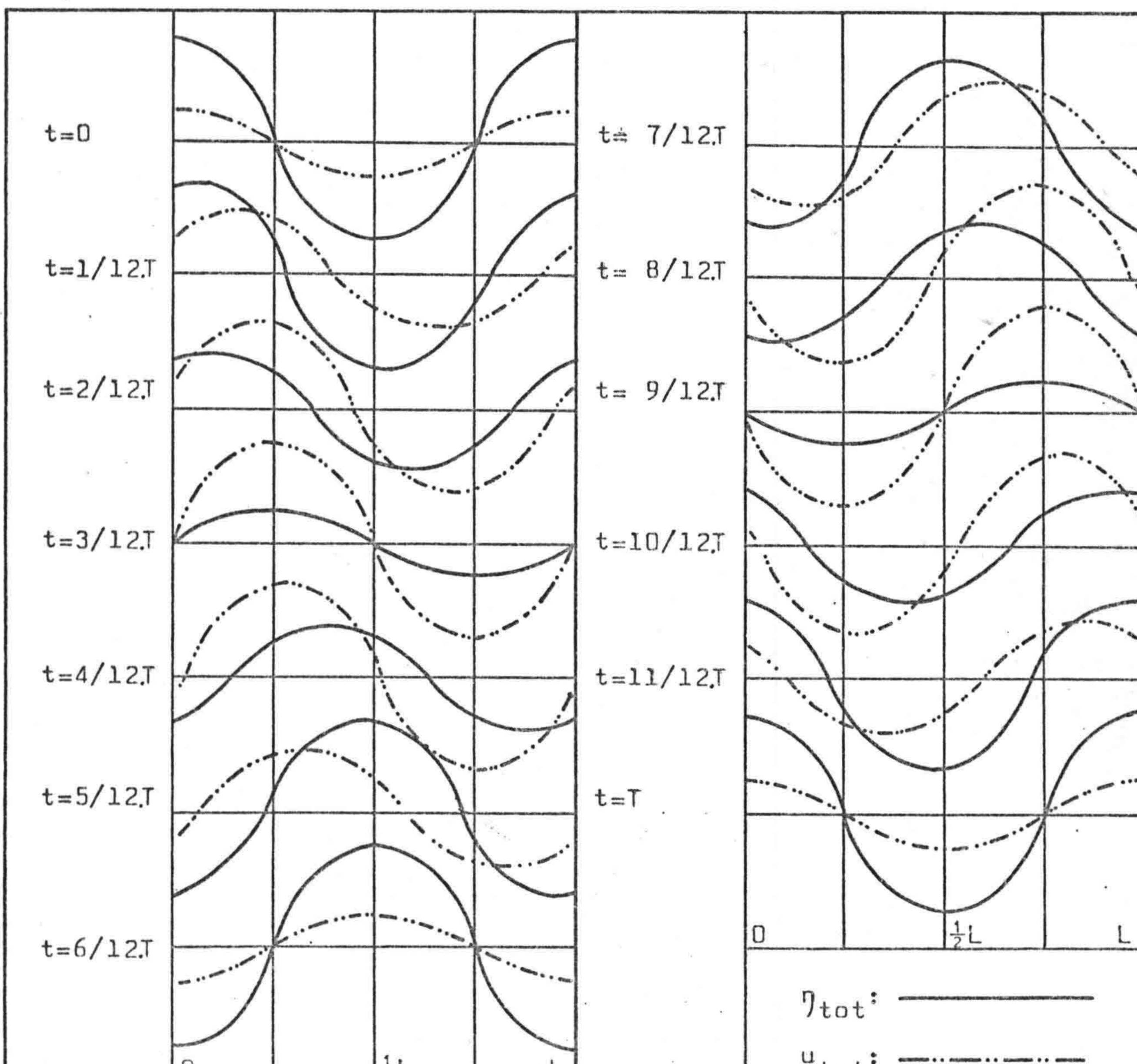


Fig.3.18. Dimensieloze weergave van de relatie tussen η_{tot} en u_{tot}.

3.5. De totale fasesnelheid c_{tot}

De fasesnelheid c van een enkele lopende golf is de snelheid waarmee de golvorm zich verplaatst, ofwel een punt van constante fase, zoals een golfkam.

Voor het golfbeeld dat ontstaat door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste golf kan deze definitie van de fasesnelheid gehandhaafd blijven. Wel moet daarbij in acht worden genomen dat de golfvorm steeds in grootte verandert.

Golfhoogte η_{tot} : $\eta_{tot}=\eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos(2\ t)}.\cos(kX-\varepsilon)$ (3-1

Voor golfkam geldt: $\delta\eta_{tot}/\delta X\Big|_{X=X_{gk}} = 0$ (3-37)

Daaruit volgt : $X_{gk} = \frac{1}{k}.\arctan((1-\gamma)/(1+\gamma)).\tan(\sigma t))$ (mod.L) (3-38)

Fasesnelheid c_{tot} : $c_{tot} = \delta X_{gk}/\delta t$ (3-39)

$= \sigma/k.(1-\gamma^2)/(1+\gamma^2+2.\gamma.\cos(2\sigma t)$ (3-40)

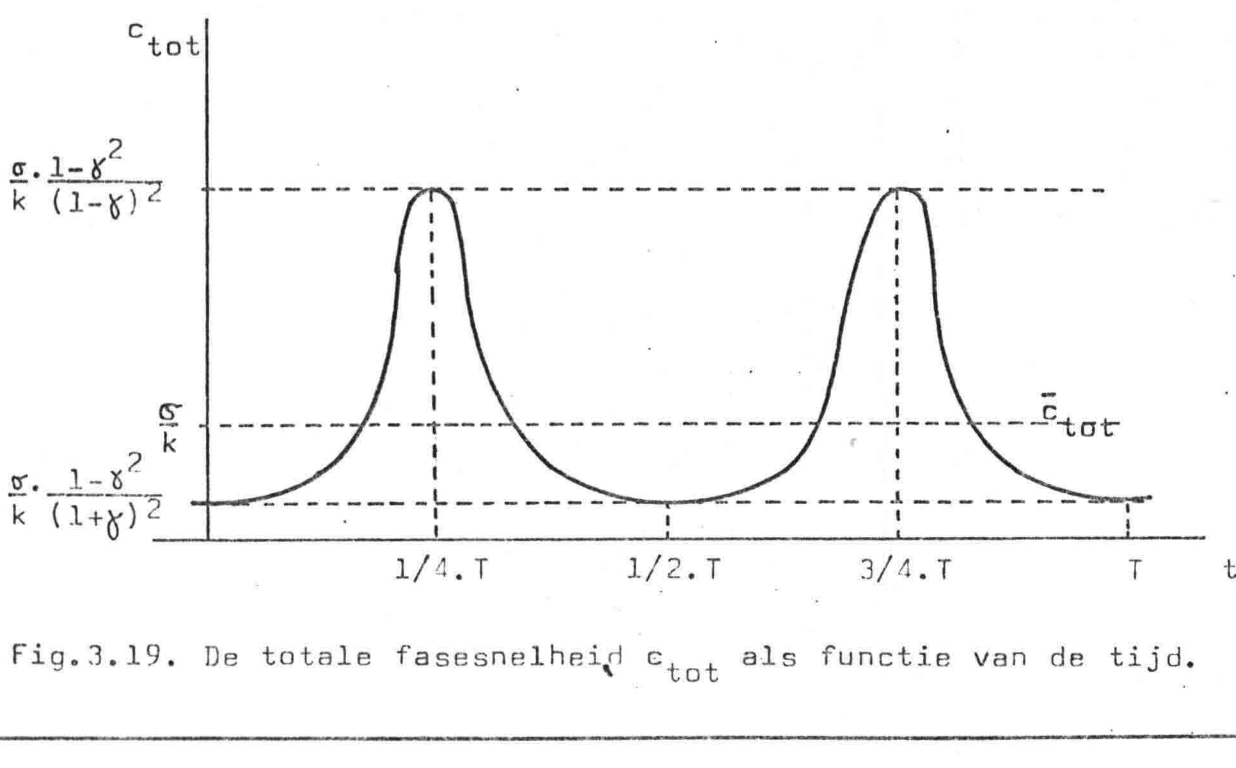


Fig.3.19. De totale fasesnelheid c_{tot} als functie van de tijd.

4. Stroomsnelheidsberekening

4.1. Inleiding

In dit hoofdstuk wordt op basis van de voorgaande theorie aangegeven hoe de berekening van de getijstroomsnelheid verloopt.

In paragraaf 4.2. wordt even ingegaan op de inhoud van de "British Admiralty Tide Tables" aangezien deze voor het verloop van de berekening belangrijk zijn.
In paragraaf 4.3. wordt de η_{tot}-basisellips bepaald uit de harmonische constanten van n registratiepunten.
In paragraaf 4.4. worden η_1 en η_2 uit deze η_{tot}-basisellips berekend.
De uiteindelijke totale golfhoogte η_{TOT} en totale stroomsnelheid u_{TOT} worden in paragraaf 4.5. bepaald.
Een puntsgewijze opsomming van de berekening staat in paragraaf 4.6..
Aan het eind van dit hoofdstuk volgt dan nog een opsomming van alle overwegingen, aannamen en eisen die ten grondslag liggen aan deze berekening. Dit gebeurt dus in paragraaf 4.7..

4.2. De Britse Admiraliteits getijdetafels

De "British Admiralty Tide Tables" worden jaarlijks door de Britse "Hydrographer of the Navy" uitgegeven. Deze bestaan uit drie volumes en bestrijken de gehele wereld. Elk volume is weer onderverdeeld in twee delen: "Part I" en "Part II".

Part I : Het eerste deel betreft getijdetafels, waarin voor dat bewuste jaar tijdstip en grootte van de opeenvolgende hoog- en laagwaters voor allerlei plaatsen zijn opgenomen. In deze berekenin zal dit enkel indirect worden gebruikt, namelijk als côntrôle.

Part II: Het tweede deel geeft voor een plaats de daar geldende harmonische constanten voor elk van de samenstellende getijden. In de Britse Admiraliteits getijdetafels zijn de samenstellende getijden tot vier beperkt en wel: M2, S2, K1 en O1 getij. Deze getijconstanten zijn de amplitude H en het kappa-getal g. Dit laatste geeft de vertraging van de getijgolf ten opzichte van de getijkracht. Kappa (g) is de hoek in lengtegraden die de"astre fictif" in het beschouwde punt op die golf voor is.

4.3. Bepaling η_{tot}-basisellips uit de harmonische constanten van n punten

4.3.1. Inleiding

Indien de getijstroomsnelheid van een willekeurig punt langs de kust op een willekeurig tijdstip wordt gevraagd is de werkwijze als volgt:

a. Zoek met behulp van de "Admiralty Tide Tables ; Part II" de nabijgelegen kuststations op waarvan de harmonische constanten gegeven zijn.

b. Leg de X-as zo goed mogelijk langs de kust waarbij de Y-as loodrecht de zee inwijst. Ligging van de oorsprong van het XY-assenstelsel is geheel vrij en verder niet ter zake doende.

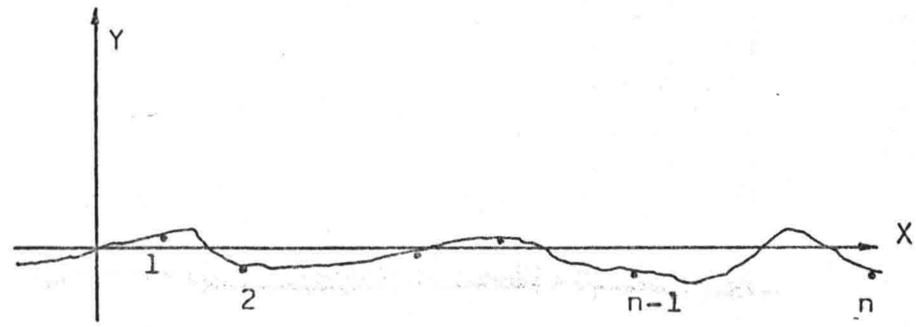


Fig.4.1. Kuststrook met n kuststations en XY-assenstelsel.

c. Zet per getij -M2, S2, K1 en O1- de harmonische constanten uit in een xy-assenstelsel. Dit voor n punten -kuststations-.

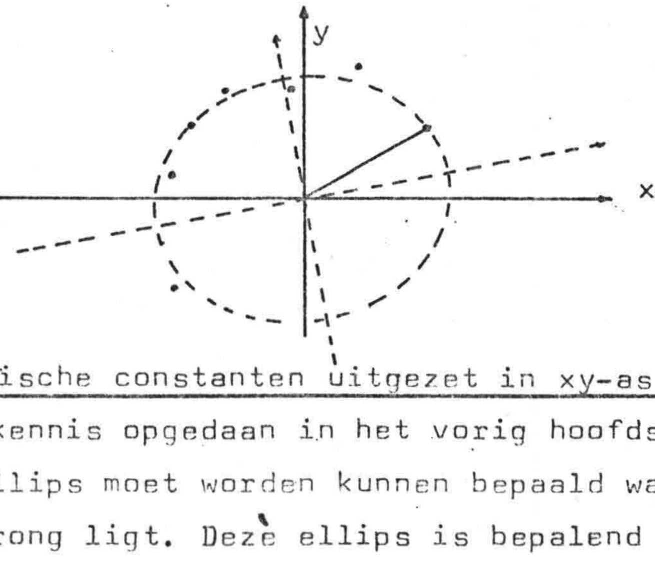


Fig.4.2. Harmonische constanten uitgezet in xy-assenstelsel.

d. Op grond van de kennis opgedaan in het vorig hoofdstuk kan nu gesteld worden dat een ellips moet worden kunnen bepaald waarvan het middelpunt in de oorsprong ligt. Deze ellips is bepalend voor de golfhoogte en noem ik de η_{tot}-basisellips. Het bijvoegsel "basis" wijst erop dat de ellips nog geen bewerkingen heeft ondergaan in verband met de grootte van X, Y en t.

4.3.2. De ellips

De ellips is de verzameling der punten, waarvoor de som der afstanden tot twee vaste punten -de brandpunten- constant is (en wel gelijk aan de lange as van de ellips).

Voor dit specifieke geval zijn we enkel geinteresseerd in een ellips waarvan het middelpunt in de oorsprong van het xy-assenstelsel ligt en waarbij de hoofdassen in principe niet samenvallen met de coördinaatassen.

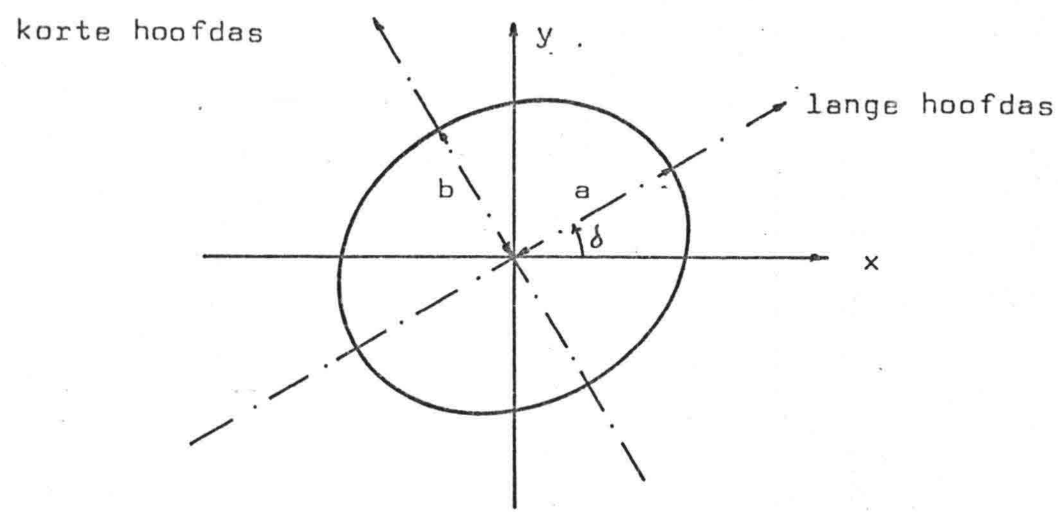


Fig.4.3. Ellips met middelpunt in de oorsprong en waarvan de hoofdassen niet samenvallen met de coördinaatassen.

De ellips wordt door drie parameters bepaald:

1. Grootte van de halve lange as: a.
2. Grootte van de halve korte as: b.
3. De hoek tussen hoofdas en de coördinaatas x: δ.

Met gebruikmaking van andere parameters -A, 2B en C- kan voor de middelpuntsvergelijking worden gesteld: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$.

De relatie tussen de parameters (A, 2B en C) en (a, b en δ) wordt op de volgende bladzijde gegeven.

$$A = \frac{\cos^2\delta}{a^2} + \frac{\sin^2\delta}{b^2} \quad (4\text{-}1)$$

$$2B = \frac{\cos\delta.\sin\delta}{a^2} - \frac{\cos\delta.\sin\delta}{b^2} \quad (4\text{-}2)$$

$$C = \frac{\sin^2\delta}{a^2} + \frac{\cos^2\delta}{b^2} \quad (4\text{-}3)$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (4\text{-}4)$$

$$a = \frac{\cos^4\delta - \sin^4\delta}{A\cos^2\delta - C\sin^2\delta} \quad (4\text{-}5)$$

$$b = \frac{\sin^4\delta - \cos^4\delta}{A\sin^2\delta - C\cos^2\delta} \quad (4\text{-}6)$$

$$\delta = \tfrac{1}{2}\arctan(2B/(A-C)) \quad (4\text{-}7)$$

4.3.3. De kleinste kwadraten methode van Gauss

Gevraagd : Op grond van n punten (H_i, g_i) uitgezet in het xy-assenstelsel moet een ellips -met middelpunt in de oorsprong- worden gevonden, zodanig dat deze ellips het puntenverloop optimaal benadert. Met andere woorden: "curve-fitting".

Gegeven : Voor elk kuststation -punt i- zijn de harmonische constanten -H_i en g_i- per getij gegeven. In plaats van de polaire coördinaten is het mogelijk de orthogonale coördinaten te geven: x_i en y_i.

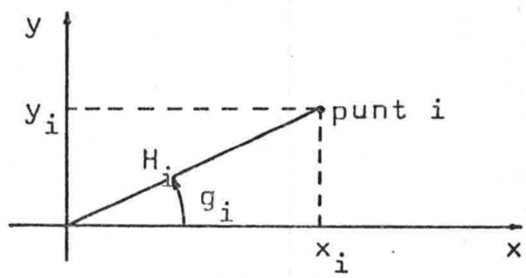


Fig.4.4. De harmonische constanten van het punt i voor een bepaald getij.

Oplossing : De kleinste kwadraten methode van Gauss toegepast op de middelpuntsvergelijking van de ellips.

Middelpuntsvergelijking : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ (4-4)

Voor punt i (x_i, y_i) geldt: $Ax_i^2 + 2Bx_iy_i + Cy_i^2 - 1 = r_i$ (4-8)

Residuwaarde voor punt i : r_i

Veronderstel dat : $\varphi(A, B, C) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2$ (4-9)

Eis : φ minimaal

Daaruit volgt : $\frac{\delta\varphi}{\delta A} = 0$; $\frac{\delta\varphi}{\delta B} = 0$; $\frac{\delta\varphi}{\delta C} = 0$ (4-10

Stel : (1) = kolom van determinant, matrix of vector.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}11)$$

(2) = kolom van determinant, matrix of vector.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^3 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}12)$$

(3) = kolom van determinant, matrix of vector.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i^4 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}13)$$

(4) = kolom van determinant, matrix of vector.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}14)$$

Een vector wordt als volgt aangegeven: (i)

Een matrix wordt als volgt aangegeven: ((i)(ii)(iii))

Een determinant als volgt aangegeven: $\left[(i)(ii)(iii)\right]$

Dan geldt :
$$\begin{bmatrix} A \\ 2B \\ C \end{bmatrix} * ((1)(2)(3)) = (4) \qquad (4\text{-}15)$$

Mbv. regel van Kramer :

$$A = \frac{\left[(4)(2)(3)\right]}{\left[(1)(2)(3)\right]} \qquad (4\text{-}16)$$

$$2B = \frac{\left[(1)(4)(3)\right]}{\left[(1)(2)(3)\right]} \qquad (4\text{-}17)$$

$$C = \frac{\left[(1)(2)(4)\right]}{\left[(1)(2)(3)\right]} \qquad (4\text{-}18)$$

Conclusie : Op deze manier kan uit n punten -n minimaal 3- de best passende ellips worden bepaald met parameters A, 2B en C.
Let wel: Hyperbolische vgl. als antwoord is mogelijk bij "rare" ligging van de n punten.

Onder een "rare" ligging van de n registratiepunten wordt verstaan:

a. Kleine n

b. Faseverschil tussen punt 1 en punt n klein.

c. Buitenste punten een grotere amplitude dan de meer naar binnen gelegen punten.

In dit (zeldzame) geval geeft de gevolgde methode een hyperbolische vergelijking als eindresultaat.

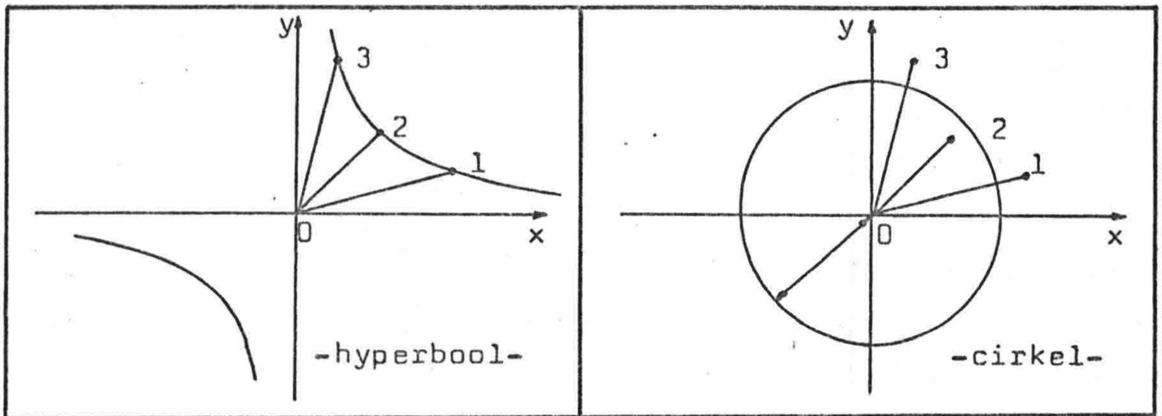


Fig.4.4A. Cirkelaanname in geval van hyperbol. oplossing.

Aangezien de hyperbool als oplossing fysisch onmogelijk is moet deze oplossing worden verworpen. Dan kan het best worden aangenomen dat er slechts één enkele Kelvin golf loopt.
In het vlak wordt dit weergegeven door een cirkel.
Voor de straal geldt dan: $r = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} H_i$.

4.4. Berekening η_1 en η_2 uitgaande van de η_{tot}-basisellips

Gegeven : η_{tot}-basisellips geconstrueerd aan de hand van n punten (H_i, g_i) via de kleinste kwadraten methode.

Gevraagd : De golfhoogte van de samenstellende golven η_1 resp. η_2 als functie van X, Y en t.

Uitwerking: De η_{tot}-basisellips die nu gegeven is, is gevonden op grond van n kuststations, dus: Y=0.
Zoals in hoofdstuk 3 is aangegeven kan een ellips uit twee cirkels opgebouwd worden gedacht.
Voor de stralen van de twee cirkels, waaruit de η_{tot}-basisellips opgebouwd kan worden gedacht, geldt:

$$\text{Straal cirkel 1} = a_1 = \eta_{o_1} = (a + b)/2 \qquad (4\text{-}19)$$

$$\text{Straal cirkel 2} = a_2 = \eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o) = (a - b)/2 \qquad (4\text{-}20)$$

De η_{tot}-basisellips kan nu op drie manieren worden gegeven:
1. A, B en C
2. a, b en δ
3. a_1, a_2 en δ

Vervolgens wordt voor alle n punten (H_i, g_i) de amplitude H_i gelijk gemaakt aan de vector-radius, die behoort bij de poolhoek g_i (kappa-getal) van de η_{tot}-basisellips.

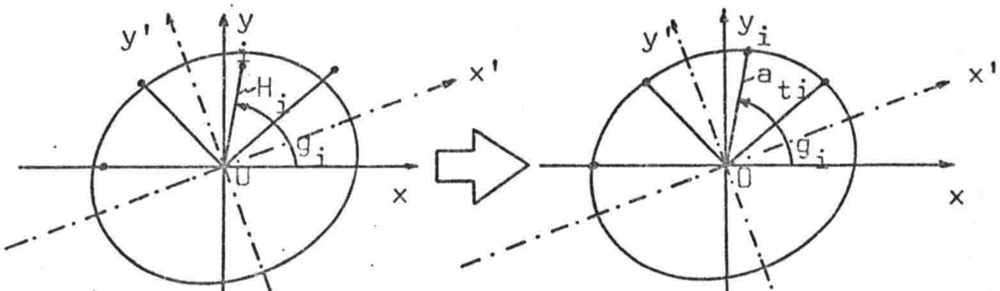


Fig.4.5. η_{tot}-basisellips met n punten zoals gegeven (a) en nadat ze zijn "bijgesteld" (b).

a_{ti} = de vector-radius behorende bij de poolhoek g_i en de η_{tot}-basisellips.

Middelpuntsvergelijking: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ (4-4)

Coördinaten punt i : $\left| \begin{array}{l} x = a_{ti}.\cos(g_i) \quad (4\text{-}21) \\ y = a_{ti}.\sin(g_i) \quad (4\text{-}22) \end{array} \right.$

Vector-radius punt i : $a_{ti} = (A\cos^2 g_i + 2B\cos g_i \sin g_i + C\sin^2 g_i)^{-\frac{1}{2}}$ (4-23)

Opbouw punt i : Het punt i (a_{ti}, g_i) kan opgebouwd worden gedacht uit de punten (a_1, θ_{1i}) en (a_2, θ_{2i}).

De stralen a_1 en a_2 zijn reeds berekend in (4-19) en (4-20).

De hoeken θ_{1i} en θ_{2i} moeten nog worden berekend. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van het feit dat de hoeken spiegelsymmetrisch zijn ten opzichte van de x'-as.

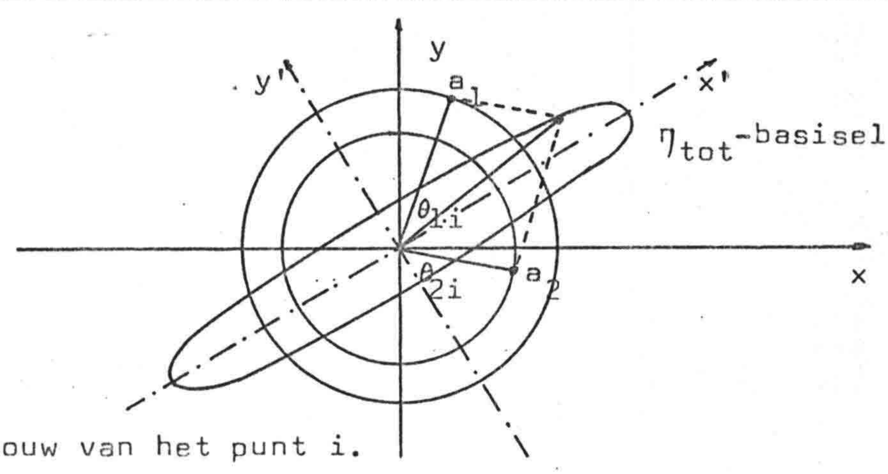


Fig.4.6. Opbouw van het punt i.

Na berekening : $\alpha = \arctan\left[\dfrac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}.\tan(g_i - \delta)\right]$ (4-24)

Als geldt dat : $(a_1 + a_2).\cos(\alpha) = a_{ti}.\cos(g_i - \delta)$ (4-25)

dan geldt tevens : $\left| \begin{array}{l} \theta_{1i} = \alpha + \delta \quad (4\text{-}26) \\ \theta_{2i} = -\alpha + \delta \quad (4\text{-}27) \end{array} \right.$

anders : $\left| \begin{array}{l} \theta_{1i} = \alpha + \delta + 180^0 \quad (4\text{-}28) \\ \theta_{2i} = -\alpha + \delta + 180^0 \quad (4\text{-}29) \end{array} \right.$

Voor het punt i kan worden gesteld dat:

$$\eta_1 = \eta_{o_1}.\exp(-fY/C_o).\cos(kX - \sigma t + \varphi_1) \qquad (4\text{-}30)$$

$$\eta_2 = \eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o).\exp(+fY/C_o).\cos(kX + \sigma t + \varphi_2) \qquad (4\text{-}31)$$

Uitgaande van het moment waarop de η_{tot}-basisellips berust, geldt:

$$a_1 = \eta_{o_1} \qquad (4\text{-}32)$$

$$a_2 = \eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o) \qquad (4\text{-}33)$$

$$\theta_{1i} = kX - \sigma t + \varphi_1 \qquad (4\text{-}34)$$

$$\theta_{2i} = kX + \sigma t + \varphi_2 \qquad (4\text{-}35)$$

Voor de golfhoogten van golf 1 en golf 2, η_1 respectievelijk η_2, kan nu worden geschreven:

$$\eta_1 = a_1.\exp(-fY/C_o).\cos(\theta_{1i}) \qquad (4\text{-}36)$$

$$\eta_2 = a_2.\exp(+fY/C_o).\cos(\theta_{2i}) \qquad (4\text{-}37)$$

Hieruit blijkt dat a_1, a_2, θ_{1i}, θ_{2i} en de twee exponentiële termen de golfhoogte bepalen.

Vervolgens moeten de waarden van η_1 en η_2 worden bepaald voor een willekeurige keuze van X, Y en t. Daartoe zal eerst de invloed van t worden bepaald, vervolgens Y en ten slotte X.

De invloed van t, Y en X worden in de volgende subparagraafjes behandeld.

(i) Keuze tijdstip t:

a. In de berekening zijn enkel plaatselijke tijden gebruikt. Als tijden ten opzichte van Greenwich Mean Time gewenst zijn, kunnen de plaatselijke tiiden met behulp van (4-38) omgerekend worden. De tijden worden ingevoerd in uren en minuten.

Plaatselijke tijd: t_{pl}
Tijdzône : $t_{zône}$
Tijd tov GMT : $t_{GMT} = t_{pl} + t_{zône}$ (4-38)

b. In "Table VII; Tidal angles and factors" van de "British Admiralty Tide Tables" worden per getijde (M2, S2, K1 en O1) de getijhoek A en de getijfactor F gegeven voor het begin en eind van elke dag.

Getijhoek A voor het begin van de dag (t_{pl} = 00.00): A_1
Getijhoek A voor het einde van de dag (t_{pl} = 24.00): A_2

Getijhoeksnelheid σ : σ = 29.0 (deg/hr) voor M2
σ = 30.0 (deg/hr) voor S2
σ = 15.0 (deg/hr) voor K1
σ = 13.9 (deg/hr) voor O1

Getijfactor F voor het begin van de dag (t_{pl} = 00.00): F_1
Getijfactor F voor het einde van de dag (t_{pl} = 24.00): F_2

Factorverandering q: $q = (F_2 - F_1)/24$ (4-40)

c. Hier van uitgaande kan gesteld worden dat:

$$\theta'_{1i} = \theta_{1i} + A_1 - \sigma.t_{pl} \qquad (4\text{-}41)$$

$$\theta'_{2i} = \theta_{2i} + A_1 - \sigma.t_{pl} \qquad (4\text{-}42)$$

$$a'_1 = (F_1 + q.t_{pl}).a_1 \qquad (4\text{-}43)$$

$$a'_2 = (F_1 + q.t_{pl}).a_2 \qquad (4\text{-}44)$$

(ii) Keuze breedtecoördinaat Y:

Y wordt enkel ingevoerd in de volgende termen: $\exp(-fY/C_o)$ en $\exp(+fY/C_o)$
Y heeft geen invloed op a_1, a_2, Θ_{1i} en Θ_{2i}.

(iii) Keuze lengtecoördinaat X:

Voor de n registratiepunten zijn de harmonische constanten bekend. Van elk punt i is dus gegeven de poolhoek g_i (kappa-getal).

In plaats van X met behulp van het golfgetal k in te voeren in de formule voor Θ_{1i} en Θ_{2i} wordt hier een lineaire interpolatie toegepast voor de poolhoek g.

Met andere woorden: Ipv X wordt de poolhoek g_j ingevoerd voor het bewuste punt (voor Y=0). Deze zal in het algemeen niet bekend zijn en moet dan gevonden worden door lineaire interpolatie van twee omliggende punten:

Waarom voor deze werkwijze in verband met X is gekozen zal in de volgende paragraaf 4.7. worden aangegeven.

De termen a_1, a_2 en de exponentiële termen worden niet door X (g) beinvloedt! Wel de grootten van Θ_{1i} en Θ_{2i}.

(iv) Berekening η_1 en η_2

De golfhoogten η_1 en η_2 zijn nu met behulp van de formules (4-36) en (4-37) te berekenen. Voor a_1, a_2, Θ_{1i} en Θ_{2i} wel met de veranderde waarden door de invloed van X en t.

Bij de berekening wordt éénmalig de η_{tot}-basisellips berekend. Hiervan uitgaande kan dan met beperkt rekenwerk voor variabele waarden van X, Y en t de totale golfhoogte en de totale stroomsnelheid worden berekend.

4.5. Berekening van η_{TOT} en u_{TOT}

Uitgaande van de berekende waarden van η_1 en η_2 kunnen dan met behulp van de formules (3-12) en (3-36) de totale golfhoogte η_{tot} en de totale stroomsnelheid u_{tot} worden berekend.

Let wel: De index "tot" is gebruikt om aan te geven dat het hier de sommatie betreft van de inkomende en de teruggekaatste Kelvin golf.

Er moet echter nog worden gesommeerd over de vier getijden (M2-, S2-, K1- en O1-getij). Dan hebben we pas de werkelijk gevraagde golfhoogte of stroomsnelheid. Ter onderscheid worden de golfhoogte en stroomsnelheid gesommeerd over deze vier getijden aangegeven met de index "TOT".

$$\eta_{tot} = \eta_1 + \eta_2 \qquad (3\text{-}12)$$
$$u_{tot} = \sqrt{g/H_o} \cdot (\eta_1 - \eta_2) \qquad (3\text{-}36)$$

; Sommatie van één inkomende en één teruggekaatste golf.

$$\eta_{TOT} = \sum \eta_{tot} \qquad (4\text{-}45)$$
$$u_{TOT} = \sum u_{tot} \qquad (4\text{-}46)$$

; Sommatie over de vier getijden: M2, S2, K1 en O1.

Let wel: Het verloop van het kappa-getal langs de positieve X-as moet worden beschouwd!
Bij de berekening is er namelijk van uitgegaan dat de grootste golf naar rechts liep!
Indien dit zo is zullen de kappa-getallen qua fase oplopen langs de positieve X-as en blijft het resultaat onveranderd.
Neemt de fase echter af langs de positieve X-as dan zal het teken van de getijstroomsnelheid moeten veranderen!
Door deze aanpak maakt het niet uit of de grootste golf naar links of rechts loopt!

4.6. Overzicht berekeningswijze

In deze paragraaf zal een puntsgewijze opsomming worden gegeven van de gevolgde berekeningswijze.

1. Zee-/landkaart van het betreffende gebied hebben.
2. "British Admiralty Tide Tables" voor betreffende jaar en gebied.
3. Kuststrook specificeren waar de stroomsnelheden worden gevraagd.

Voor elk getij -M2, S2, K1 en O1- afzonderlijk het volgende doen:

4. Voor de n registratiepunten van de betreffende kuststrook een lijst maken van de harmonische constanten.
5. Beschouw of de fase toe- of afneemt langs de positieve X-as, dit in verband met het teken van de stroomsnelheid.
6. De polaire coördinaten (de harmonische constanten H en g) omzetten naar carthesisch assenstelsel: x en y.
7. Voor elk punt i van de n registratiepunten, moet uitgaande van x_i en y_i de volgende waarden worden berekend:
   x_i^2, x_iy_i, y_i^2, x_i^4, $x_i^3y_i$, $x_i^2y_i^2$, $x_iy_i^3$ en y_i^4.
8. Berekening van A, 2B en C en tevens van a, b en δ .

* De η_{tot}-basisellips is nu voor het betreffende getijde berekend. Deze dient als basis voor verdere berekeningen. Indien de parameters die deze ellips bepalen, worden bewaard kunnen de overige voorafgaande parameters worden weggelaten.

9. Invoeren van kappa-getal g_j voor het te berekenen punt j.
10. Berekenen a_1, a_2, a_{ti}, α, θ_{1i} en θ_{2i}.
11. Invoeren van A_1, A_2, F_1 en F_2.
12. Berekenen van q en invoeren van σ .

13. Gewenste plaatselijke tijd t_{pl} invoeren.

14. Met behulp van t_{pl}, A_1, σ, F_1 en q de nieuwe waarden voor a_1, a_2, Θ_{1i} en Θ_{2i} berekenen.

15. Y-coördinaat invoeren.

16. Diepte H_o invoeren.

17. De waarde van $C_o = \sqrt{g.H_o}$ berekenen.

18. Breedtegraad Θ van punt j invoeren.

19. Coriolis-parameter $f=2.\Omega.\sin\Theta$ berekenen.

20. η_1 en η_2 berekenen.

21. η_{tot} en u_{tot} berekenen.

Voor alle getijden gezamenlijk:

22. η_{TOT} en u_{TOT} berekenen.

In sommige gevallen is het nuttig de waarden van η_{TOT} en u_{TOT} ten opzichte van Greenwich Mean Time (GMT) te krijgen.
In dat geval dient tevens de tijdzône ingevoerd te worden.

Resumerend: In de voorgaande hoofdstukken is een gedetailleerde beschrijving gegeven van de stroomsnelheidsberekening.

In deze paragraaf is puntsgewijs de hele berekening nog eens doorgenomen.

In bijlage I wordt het gehele computerprogramma gegeven die afgestemd is op een Hewlett Packard 41 CV.
Met behulp van dit programma zijn alle antwoorden berekend.
Wel dient hierbij te worden opgemerkt dat het programma is geijkt door vooraf alles met de hand te berekenen.

4.7. Overwegingen, aannamen en eisen

4.7.1. Overwegingen

* In de berekening wordt enkel gesproken over het M2-, S2-, K1- en O1-getijde. Dit geeft wellicht de schijn dat de overige getijden geheel niet zijn meegenomen in de berekening. Dat is niet zo! Ter verduidelijking volgt hier een citaat uit de "Tide Tables":

  "The table gives values of the Tidal Angles in degrees and the Factors for M2, S2, K1 and O1 which are amended to include the effects of 2N2, μ2, N2, ν2, λ2, L2, T2, R2, K2, 2Q1, σ1, Q1, ρ1, M1, π1, P1, φ1, ϕ1, θ1, J1, and SO1."

* De berekening is toegespitst op vier getijden doch is bruikbaar voor elk willekeurig aantal getijden!

* Doordat de X-coördinaat via het kappa-getal g_j van het punt j wordt ingevoerd en daarbij van lineaire interpolatie gebruik wordt gemaakt is het lengtebereik beperkt tot die strook die door de registratiepunten wordt bestreken.
  Aan deze beperking kan worden ontkomen door gebruik te maken van het golfgetal k en X.

* Y-bereik theoretisch oneindig. Daarbij moet dan wel gelden dat er géén scherpe overgang in diepte H_o is. Het Y-bereik zal het best aan de hand van berekeningen kunnen worden bepaald.

* In verband met de aanname dat er géén bodemwrijving optreedt moet de diepte goed in de gaten worden gehouden! Bij te kleine diepte (proefondervindelijk te bepalen) zal een te groot faseverschil gaan optreden.

* Berekening berust volledig op de aanname dat er sprake is van een golfbeeld door interferentie van één heengaande golf en één teruggekaatste golf.

* Elk tijdstip is mogelijk.

4.7.2. Aannamen

* Géén bodemwrijving.

* Vloeistoflaag heeft een constante en uniforme dichtheid.

* De druk op de waterspiegel is constant.

* De vloeistof is niet visceus, dat wil zeggen dat enkel bewegingen worden bekeken waarbij de viscositeit onbelangrijk is.

* Vloeistof is niet-samendrukbaar.

* De convectieve term is verwaarloosbaar ten opzichte van de locale afgeleide.

* De golfhoogte is klein ten opzichte van de waterdiepte.

* De snelheid in Y-richting is nul voor de randen (Y=0, B).

* Diepte H_o is constant.

4.7.3. Eisen

* Het aantal registratiepunten n moet gelijk of groter zijn dan drie.

* De kust moet "redelijk" glad zijn.

* De diepte moet vrij constant zijn dus géén grillige dieptewisselingen.

* Uit de n punten (harmonische constanten) moet redelijkerwijs een ellips kunnen worden geconstrueerd zoals aangegeven in de theoretische uitwerking.

* Het faseverschil tussen laatste en eerste registratiepunt moet niet te klein zijn, dit in verband met een betrouwbare toepassing van de kleinste kwadraten methode bij het bepalen van de η_{tot}-basisellips.

* Het faseverloop moet vrij regelmatig verlopen.

5. Toepassing stroomsnelheidsberekening

5.1. Inleiding

De stroomsnelheidsberekening wordt voor de volgende kusten toegepast:
1. De Nederlandse kust
2. De Engelse zuid-oostkust
3. De Engelse oostkust

Elke stroomsnelheidsberekening bestaat uit de volgende 5 punten:
a. Trajectbeschrijving
b. Invoer
c. Uitvoer
d. Verwerking uitvoer
e. Bespreking resultaten

ad a: Het tijdsinterval voor de trajecten 1 en 2 komt overeen met -00.35 GMT tot 11.35 GMT (8 juni 1981). De keuze van de dag is willekeurig. De keuze van het tijdsinterval heeft betrekking op het feit dat voor die bewuste dag hoog water (HW) op 05.35 GMT valt in Hoek van Holland. Door deze keuze van het tijdsinterval is het gemakkelijker de berekende stroomsnelheidscurve te relateren aan de echte waarden, gevonden met behulp van de stroomatlas van de Noordzee.
De gebruikte stroomatlas (voor traject 1 en 2) geeft namelijk per uur een overzicht van de stroomsnelheden waarbij wordt uitgegaan van 6 uur voor HW te Hoek van Holland tot 6 uur na HW.
Een gelijke redenering geldt voor traject 3, met dien verstande dat de kromme is gerelateerd aan HW te Dover.

ad b: De harm. constanten zijn gehaald uit de "Admiralty Tide Tables".

ad c: Uitvoer wordt rechtstreeks gegeven. Wel dient worden opgemerkt dat voor traject 1 en traject 2 de berekening eerst met de hand is gedaan ter côntrôle van het computerprogramma.

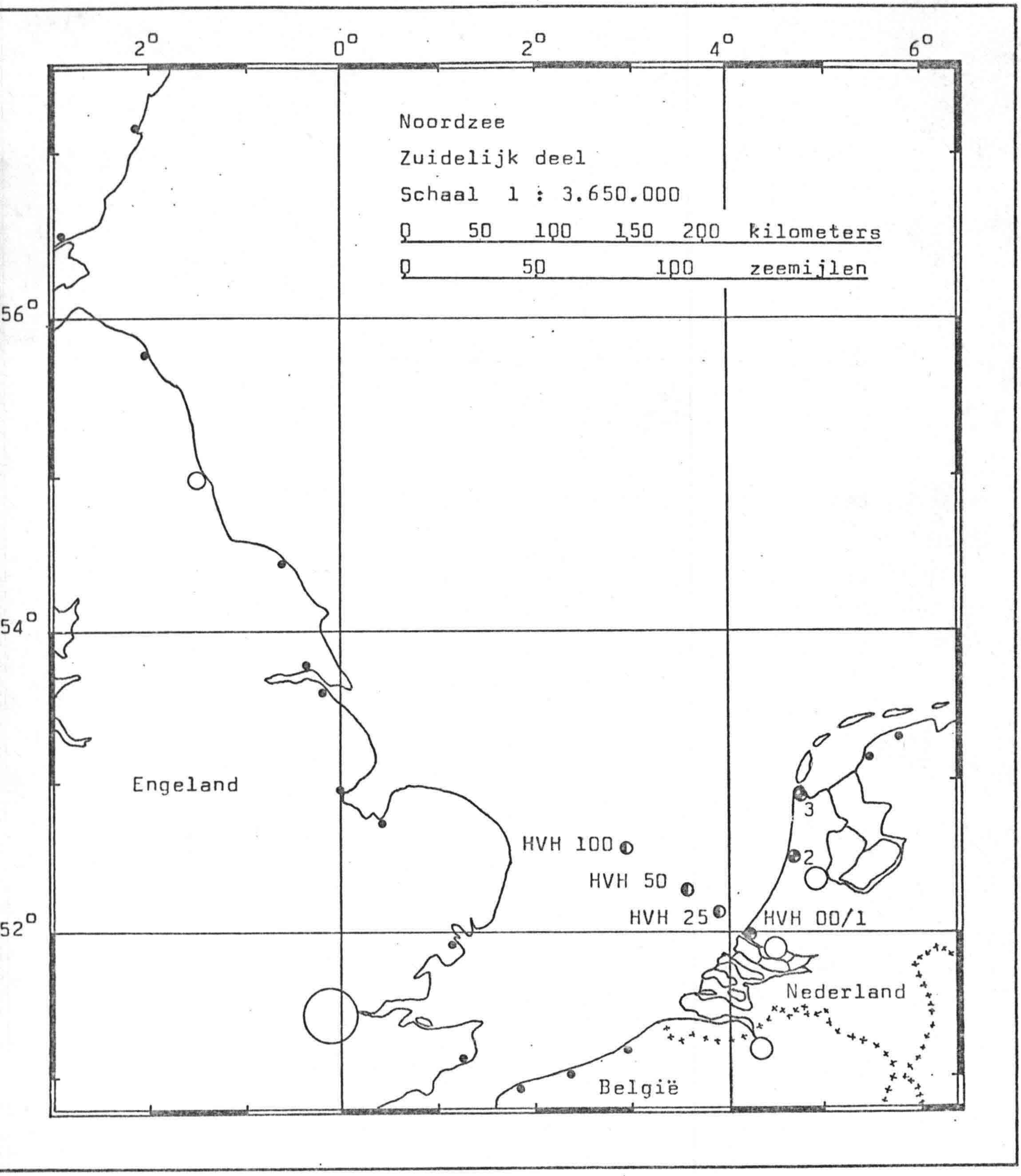
ad d: Bij de stroomsnelheidscurven geeft de doorgetrokken lijn de berekende kromme weer. De onderbroken lijnen met daartussen het gearceerde gebied zijn gebaseerd op gegevens van de stroomatlas.
De bovengrens geeft de stroomsnelheid aan bij gemiddeld springtij.
De ondergrens geeft de stroomsnelheid aan bij gemiddeld doodtij.
Het gearceerde gebied geeft aan waar de berekende kromme behoort te liggen.

5.2. De Nederlandse kust

5.2.1. Trajectbeschrijving

Traject	: De Nederlandse kust van Den Helder tot Hoek van Holland.
Trajectnummer	: 1
Aantal reg. punten	: 3
Lijst reg. punten	: 1-1 Hoek van Holland 1-2 Ymuiden 1-3 Den Helder
Gewenste datum	: 8 juni 1981
Tijdsinterval	: 00.35 - 12.35
Te berekenen punt	: HVH 00 HVH 25 HVH 50 HVH 100
Opmerkingen	: Het nummer van een registratiepunt bestaat uit het trajectnummer, een streep en een volgnummer. Volgnummering langs de positieve X-as. De te berekenen punten worden aangegeven met één of meer letters ter aanduiding van de plaats gevolgd door een cijfer die het aantal kilometers uit de kust aangeeft.

Fig.5.1. Situatieschets traject 1.



• Plaats	Registratiepunt
○ Grote plaats	Te berekenen punt
++++++ Landsgrens	Registratiepunt/te berekenen punt

5.2.2. Invoer

1. Aantal registratiepunten : 3

2. Faseverloop langs pos.X-as: Toename

3. Harmonische constanten :

Nr.reg. punt	Registr. punt	M2		S2		K1		O1	
		g	H	g	H	g	H	g	H
1-1	HVH	090	0.76	151	0.19	002	*0.07	190	0.11
1-2	YM	135	0.69	204	0.17	001	0.08	194	0.12
1-3	DH	194	0.63	262	0.18	009	0.08	207	0.10

4. Diepte : 25 M

5. Breedtegraad : 52 deg

6. Hoek M2/S2/K1/O1: 090/151/002/190 deg

7. Y-afstand : 00/25/50/100 kM

8. Tijdzône : -01.00 hm

9. Begintijd : 00.35 hm

10. Eindtijd : 12.35 hm

11. Tijdstap : 01.00 hm

12. A M2/S2/K1/O1 : 150/351/194/304 deg

13. F1/F2 M2 : 1.04/0.99 -

F1/F2 S2 : 0.80/0.79 -

F1/F2 K1 : 1.18/1.16 -

F1/F2 O1 : 0.93/0.88 -

Opmerkingen : deg: graden met 360 graden in een cirkel

hm : hours minutes, hier dient dus het aantal uren en minuten ingevuld te worden.

Plaatselijke tijden!

5.2.3. Uitvoer

Tabel 5.1.	M2	S2	K1	O1
(deg)	92.8	127.9	81.3	17.0
a (m)	.76	.19	.08	.12
b (m)	.63	.17	.08	.03

Tabel 5.2.	Y = 0 kM		Y = 25 kM		Y = 50 kM		Y = 100 kM	
t_{pl}	h (m)	u(m/s)	h	u	h	u	h	u
00.35	-.81	-.40	-.71	-.32	-.63	-.24	-.52	-.11
01.35	-.90	-.45	-.79	-.35	-.70	-.27	-.58	-.12
02.35	-.79	-.39	-.69	-.30	-.61	-.23	-.52	-.10
03.35	-.50	-.23	-.44	-.18	-.40	-.13	-.34	-.05
04.35	-.10	-.02	-.09	-.01	-.09	.00	-.10	+.02
05.35	+.32	+.19	+.27	+.16	+.23	+.13	+.17	+.08
06.35	+.66	+.35	+.57	+.28	+.49	+.22	+.39	+.12
07.35	+.84	+.44	+.73	+.35	+.64	+.27	+.53	+.13
08.35	+.83	+.41	+.73	+.32	+.64	+.25	+.54	+.11
09.35	+.64	+.30	+.57	+.23	+.51	+.17	+.44	+.06
10.35	+.32	+.12	+.29	+.08	+.27	+.05	+.26	-.01
11.35	-.05	-.08	-.02	-.07	.00	-.07	+.04	-.08
12.35	-.36	-.24	-.30	-.21	-.24	-.17	-.16	-.13

5.2.4. Verwerking uitvoer

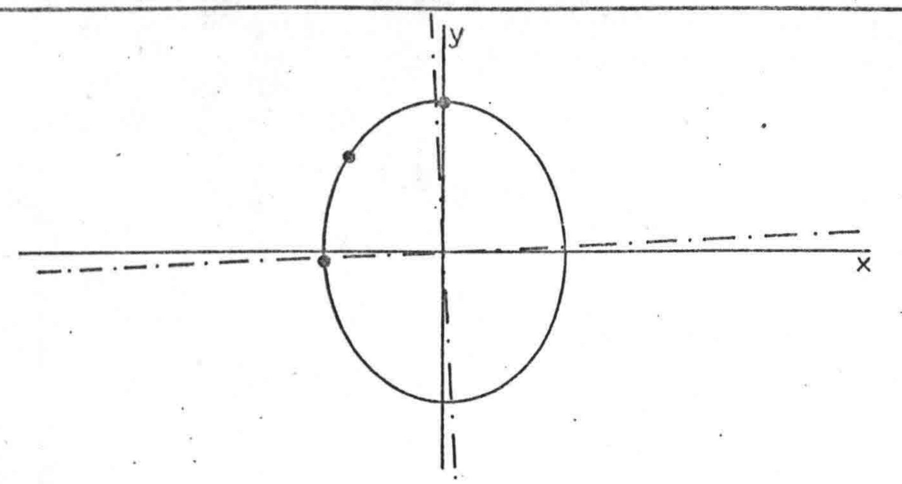


Fig. 5.2. M2-Ellips

Traject: 1

Schaal : 1 : 40

δ : 92.8 deg

a : 0.76 m

b : 0.63 m

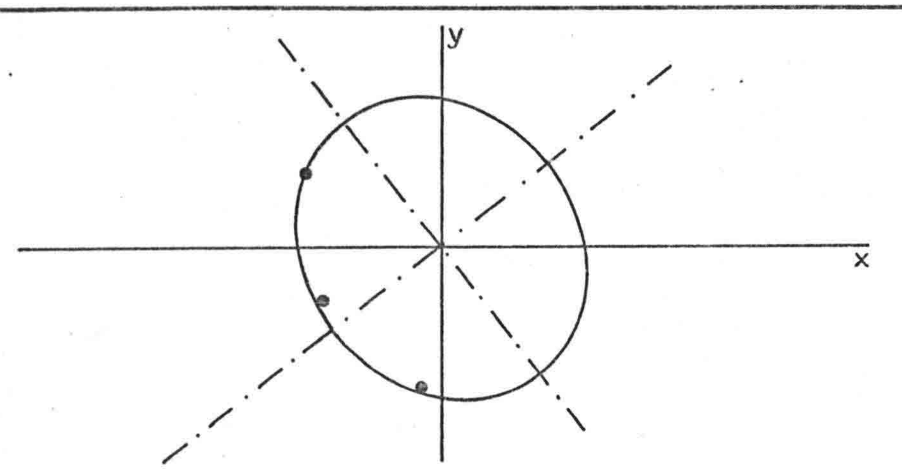


Fig. 5.3. S2-Ellips

Traject: 1

Schaal : 1 : 10

δ : 127.9 deg

a : 0.20 m

b : 0.17 m

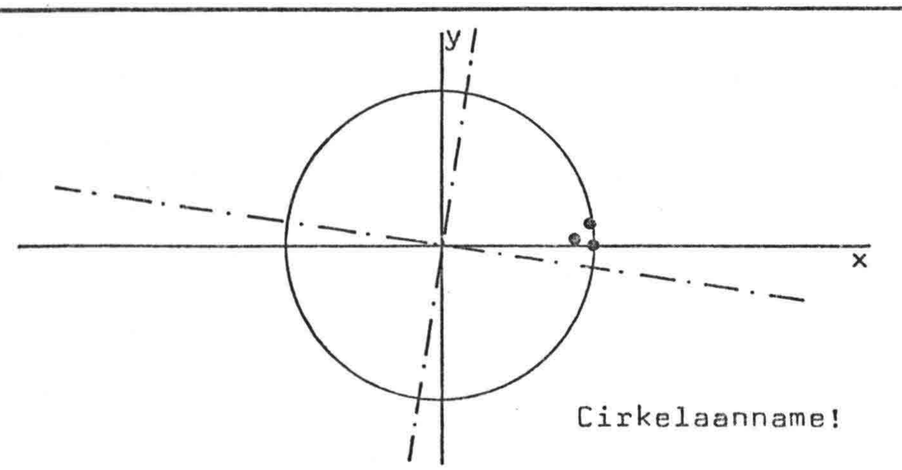


Fig. 5.4. K1-Ellips

Traject: 1

Schaal : 1 : 4

δ : 81.3 deg

a : 0.08 m

b : 0.08 m

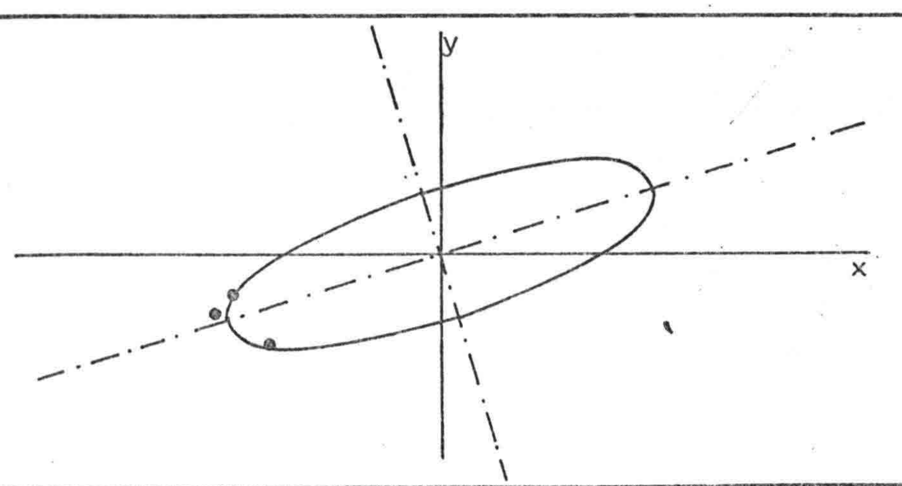


Fig. 5.5. O1-Ellips

Traject: 1

Schaal : 1 : 4

δ : 17.0 deg

a : 0.12 m

b : 0.03 m

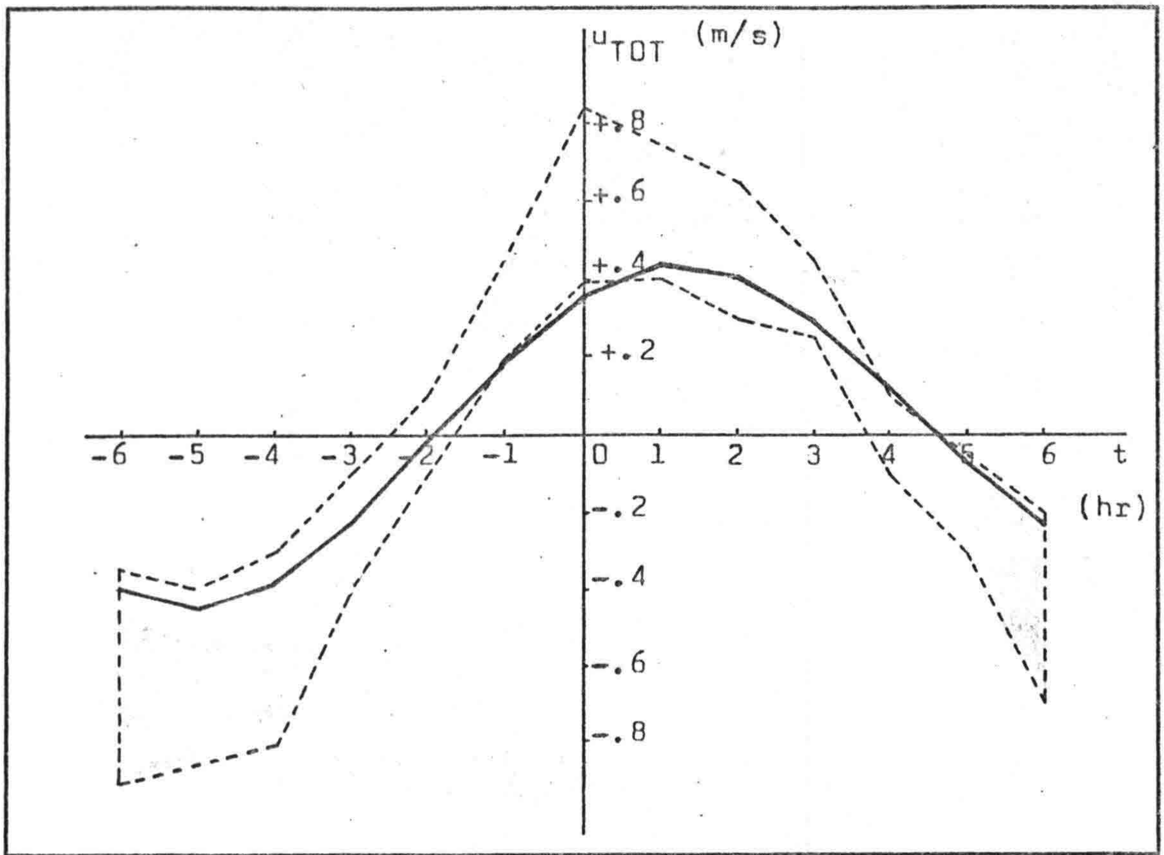


Fig.5.6. Getijstroomsnelheidscurve te HVH voor Y = 0 kM.

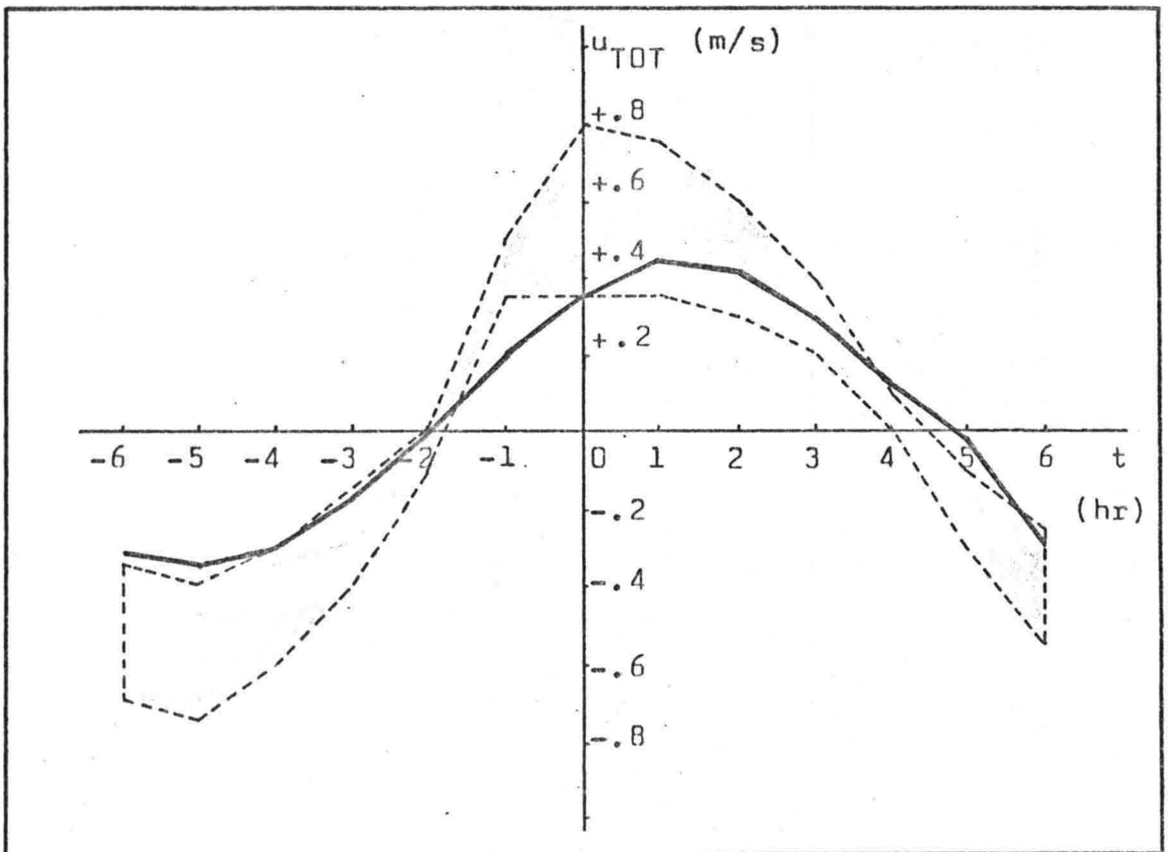


Fig.5.7. Getijstroomsnelheidscurve te HVH voor Y = 25 kM.

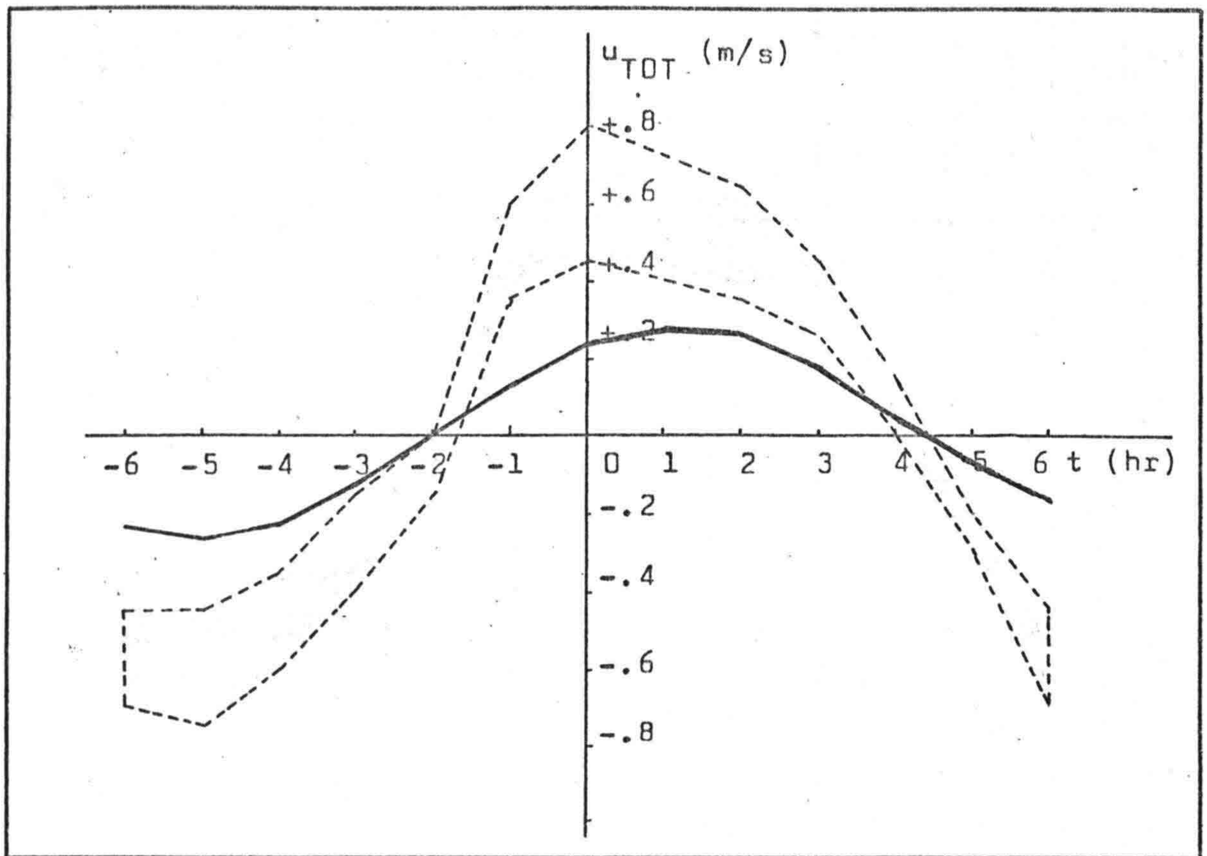


Fig.5.8. Getijstroomsnelheidscurve te HVH voor Y = 50 kM.

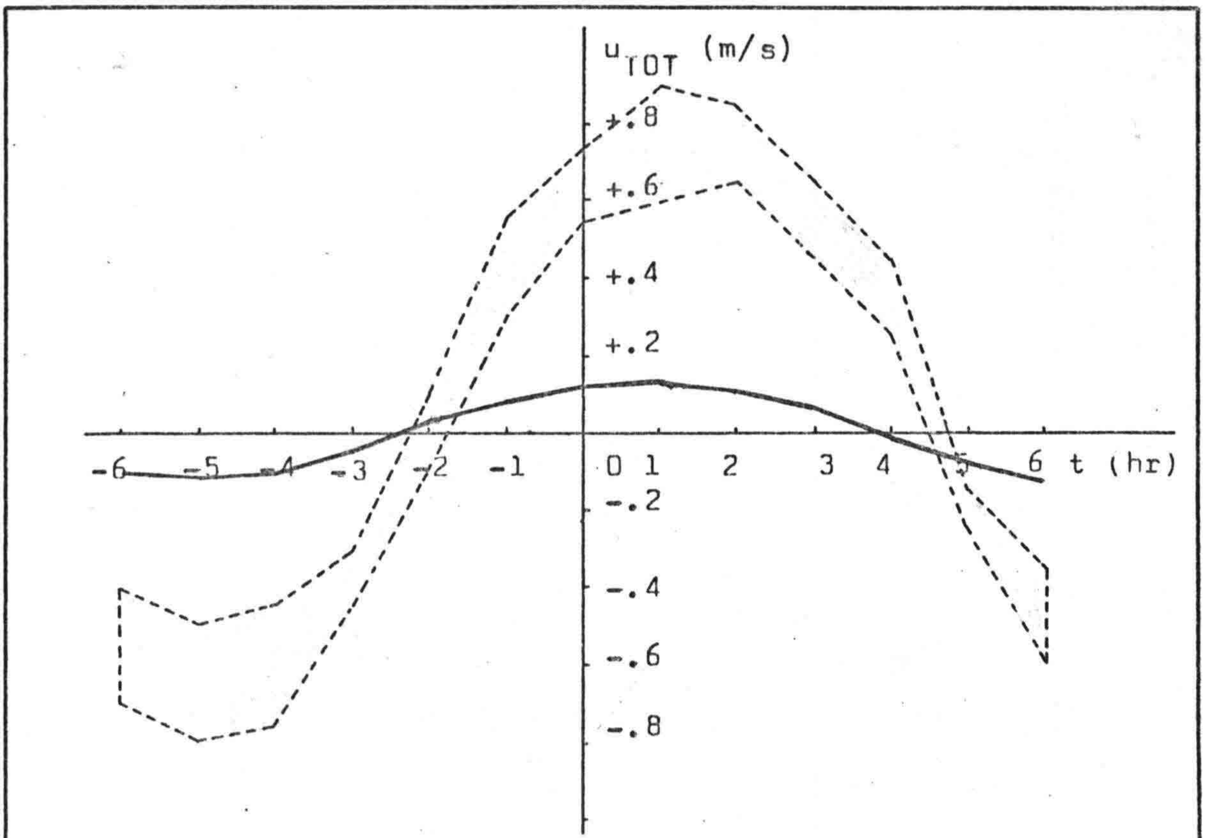


Fig.5.9. Getijstroomsnelheidscurve te HVH voor Y = 100 kM.

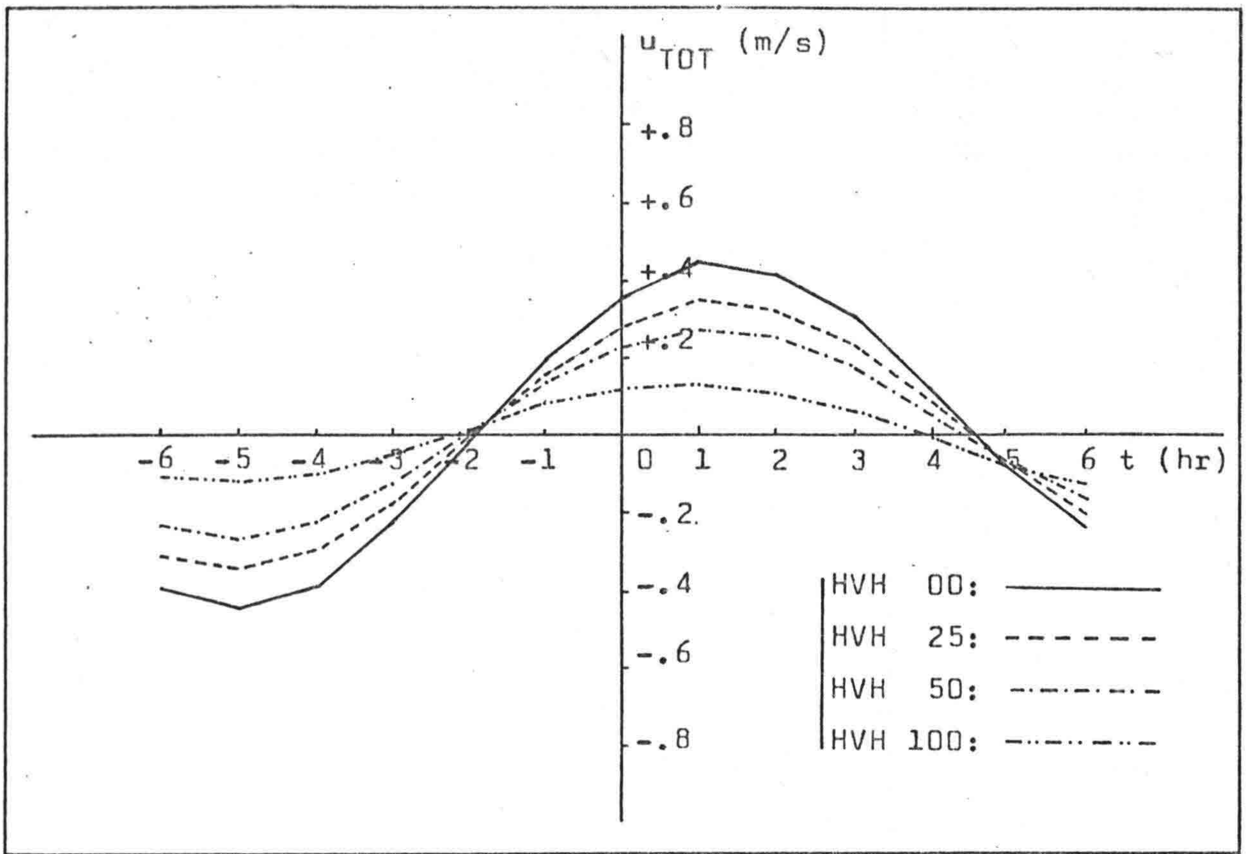


Fig.5.10. Overzicht getijstroomsnelheidscurves

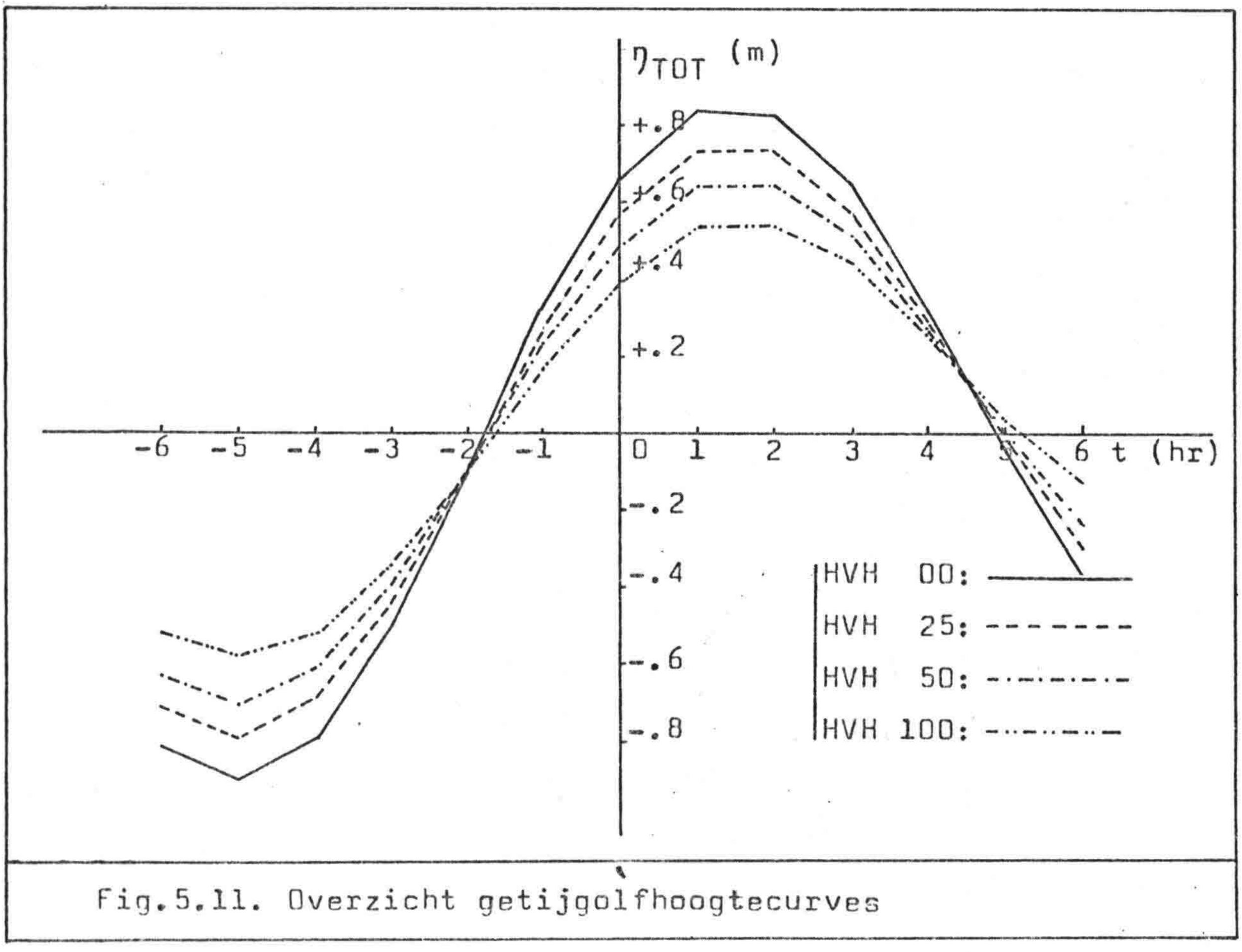


Fig.5.11. Overzicht getijgolfhoogtecurves

5.2.5. Bespreking resultaten

a. Totale golfhoogte η_{TOT}:

(i) Amplitude : De amplitude van de totale golfhoogte neemt af naarmate het punt verder van de kust afligt. Deze bedraagt voor Y=0 kM ongeveer 0.8 M en neemt af tot 0.4 M voor Y=100 kM.

(ii) Faseverschil: De enige mogelijkheid tot côntrôle is die langs de kust (Y=0 kM).
Hier bedraagt het faseverschil één uur.
Dit is een groot faseverschil.

b. Totale stroomsnelheid u_{TOT}:

(i) Amplitude : Correct tot 25 kM uit de kust. Daarna is deze veel te klein, zeker voor Y = 100 kM.

(ii) Faseverschil: Voor alle vier punten geldt een faseverschil van ongeveer twintig minuten.
In paragraaf 5.2.6. wordt de oorzaak en invloed van dit faseverschil besproken.

c. Opmerkingen:

Drie punten (HVH, YM en DH), het minimaal vereiste aantal punten, geven dichtbij de kust nog wel een aardig resultaat. Bij enige tientallen kilometers uit de kust blijkt uit het slechte resultaat dat drie punten géén basis vormen voor een getijberekening ver uit de kust.

d. Conclusie:

Matig resultaat

5.2.6. Oorzaak en invloed faseverschil stroomsnelheidscurve

Onder faseverschil wordt verstaan het verschil in uren tussen de berekende stroomsnelheidscurve u_{TOT} en het grijs gearceerde gebied zoals volgt uit de stroomatlas. In het geval van traject 1 bedraagt deze $\approx \frac{1}{2}$ uur.

Oorzaak: a. In de berekening is de invloed van de bodemwrijving niet meegenomen! In geval van niet al te grote diepte (zoals hier 25M) kan dit echter fysisch wel degelijk van belang zijn. Dit zou een reden kunnen zijn voor het faseverschil met name omdat de berekende kromme in alle gevallen voorloopt op de theoretische kromme (het grijs gearceerde gebied).

b. Op grond van de harmonische constanten van het getij (amplitude H uitgezet tegen g) worden de grootten van de heengaande en teruggekaatste golf bepaald. Als er echter een andere reden is voor het amplitudeverloop -zoals de diepte- dan wordt dit niet in de berekening als zodanig onderkend. Dit wordt dan gewoon verhaald op de grootten van de hééngaande golf en de teruggekaatste golf.

Invloed: Voor de berekening van de stroomsnelheid u_{TOT} op één tijdstip is de berekening niet geschikt aangezien een klein faseverschil voor een groot verschil in waarde zorgt.

Bij een tijdsperiode van meerdere dagen zal van dit faseverschil niets meer te merken zijn aangezien de invloed van het faseverschil afneemt met de tijdsperiode.

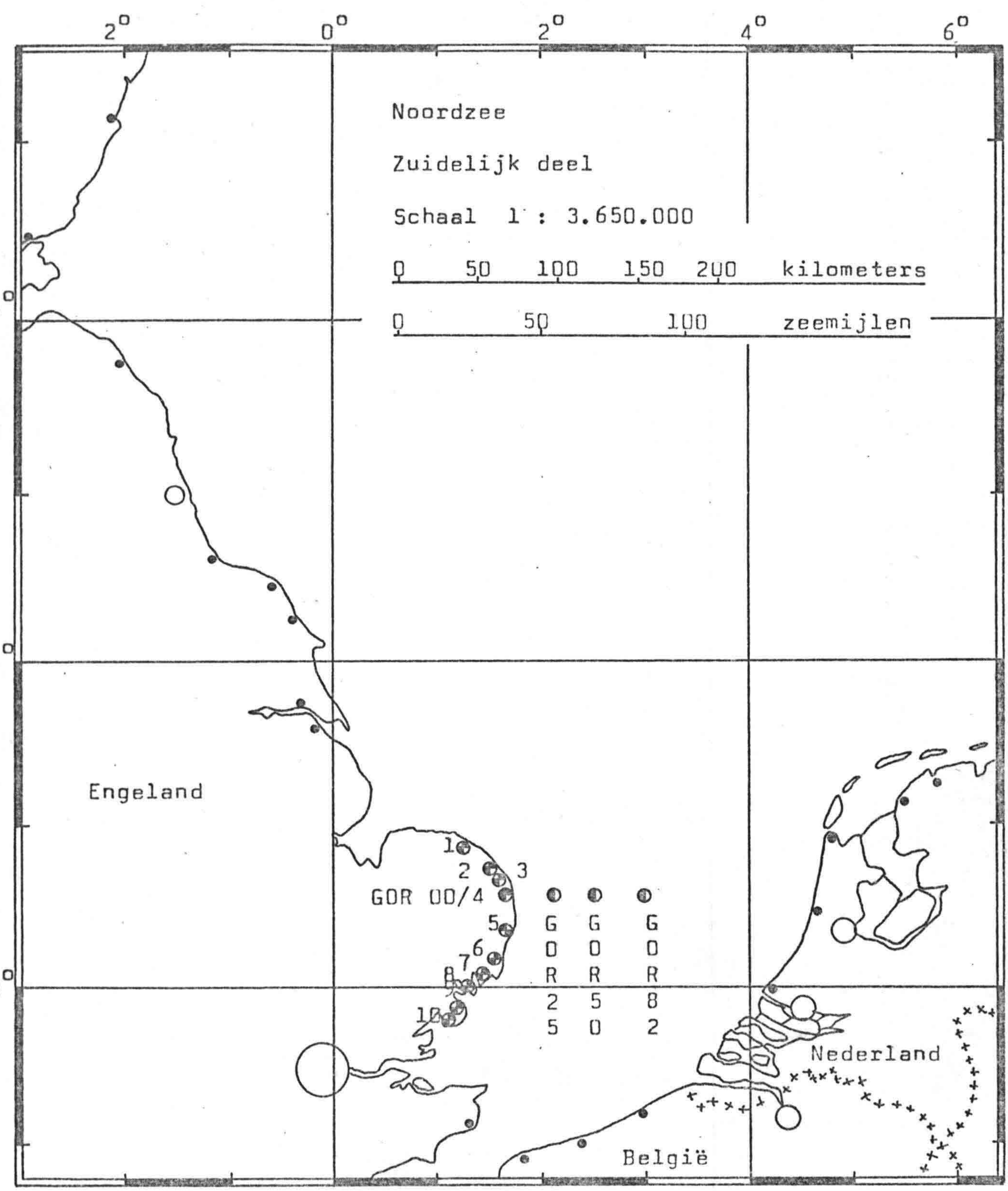
Aangezien het gebruik is gericht op langere tijdsperioden is dit beperkte faseverschil niet bezwaarlijk.

5.3. De Engelse zuid-oost kust

5.3.1. Trajectbeschrijving

Traject	:	De Engelse zuid-oost kust van Cromer tot Clacton.
Trajectnummer	:	2
Aantal reg. punten	:	10
Lijst reg. punten	:	2-1 Cromer 2-2 Winterton Ness 2-3 Caister 2-4 Gorleston 2-5 Sothwold 2-6 Aldeburgh 2-7 Bawdsey 2-8 Felixstowe Pier 2-9 Sunk Head Tower 2-10Clacton
Gewenste datum	:	8 juni 1981
Tijdsinterval	:	-00.25 * 11.35 (GMT)
Te berekenen punten	:	GOR 00 GOR 25 GOR 50 GOR 83
Opmerkingen	:	Het nummer van een registratiepunt bestaat uit het trajectnummer, een streep en een volgnummer. Volgnummering langs de positieve X-as. De te berekenen punten worden aangegeven met één of meer letters ter aanduiding van de plaats gevolgd door een cijfer die het aantal kilometers uit de kust aangeeft.

Fig. 5.12. Situatieschets traject 2.



•	Plaats		Registratiepunt
◯	Grote plaats		Te berekenen punt
++++++	Landsgrens		Registratiepunt/te berekenen punt

5.3.2. Invoer

1. Aantal registratiepunten : 10
2. Faseverloop langs pos.X-as: Toename
3. Harmonische constanten :

Nr.reg. punt	Registr. punt	M2		S2		K1		O1	
		g	H	g	H	g	H	g	H
2-1	CRO	188	1.56	235	0.54	307	0.15	136	0.12
2-2	WN	211	1.02	269	0.38	304	0.13	140	0.14
2-3	CST	225	0.89	274	0.32	312	0.12	143	0.15
2-4	GOR	241	0.74	283	0.25	326	0.11	162	0.12
2-5	SOT	283	0.77	334	0.24	327	0.11	167	0.13
2-6	ALD	306	0.87	007	0.23	331	0.18	170	0.11
2-7	BAW	317	1.11	013	0.32	335	0.11	160	0.11
2-8	FEL	321	1.22	017	0.36	333	0.10	160	0.10
2-9	SHT	331	1.34	027	0.38	347	0.07	167	0.11
2-10	CLA	335	1.53	034	0.45	352	0.11	175	0.11

4.	Diepte	: 25	M
5.	Breedtegraad	: 52	deg
6.	Hoek M2/S2/K1/O1	: 241/283/326/162	deg
7.	Y-afstand	: 00/25/50/83	kM
8.	Tijdzône	: 00.00	hm
9.	Begintijd	: -00.25	hm
10.	Eindtijd	: 11.35	hm
11.	Tijdstap	: 01.00	hm
12.	A M2/S2/K1/O1	: 150/351/194/304	deg
13.	F1/F2 M2	: 1.04/0.99	-
	F1/F2 S2	: 0.80/0.79	-
	F1/F2 K1	: 1.18/1.16	-
	F1/F2 O1	: 0.93/0.88	-

5.3.3. Uitvoer

Tabel 5.3.	M2	S2	K1	O1
δ (deg)	-7.7	54.6	-40.1	132.1
a (m)	1.86	0.56	0.15	0.14
b (m)	0.72	0.23	0.07	0.09

Tabel 5.4.	Y = 0 kM		Y = 25 kM		Y = 50 kM		Y = 83 kM	
$t_{pl}=t_{GMT}$	h (m)	u(m/s)	h	u	h	u	h	u
-00.25	+.43	+0.68	+.24	+0.64	+.06	+0.62	-.18	+0.63
00.35	+.55	+1.01	+.26	+0.97	-.02	+0.95	-.40	+0.99
01.35	+.49	+1.07	+.18	+1.04	-.12	+1.03	-.52	+1.08
02.35	+.29	+0.85	+.05	+0.83	-.20	+0.84	-.53	+0.90
03.35	+.02	+0.41	-.10	+0.42	-.23	+0.44	-.40	+0.48
04.35	-.25	-0.13	-.22	-0.10	-.19	-0.08	-.17	-0.05
05.35	-.44	-0.63	-.26	-0.59	-.09	-0.57	+.13	-0.57
06.35	-.49	-0.96	-.22	-0.92	+.05	-0.91	+.41	-0.94
07.35	-.38	-1.04	-.08	-1.01	+.21	-1.02	+.61	-1.08
08.35	-.14	-0.84	+.10	-0.84	+.35	-0.86	+.70	-0.94
09.35	+.18	-0.41	+.31	-0.44	+.44	-0.48	+.64	-0.57
10.35	+.50	+0.13	+.47	+0.07	+.46	+0.02	+.46	-0.05
11.35	+.73	+0.65	+.56	+0.58	+.40	+0.52	+.20	+0.48

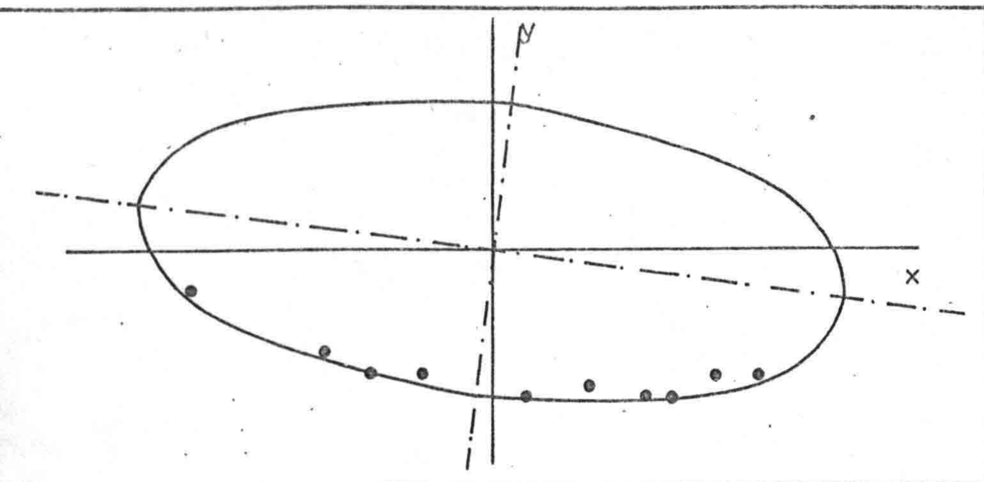


Fig.5.13. M2-Ellips

Traject: 2

Schaal : 1 : 40

δ : − 7.7 deg

a : 1.86 m

b : 0.72 m

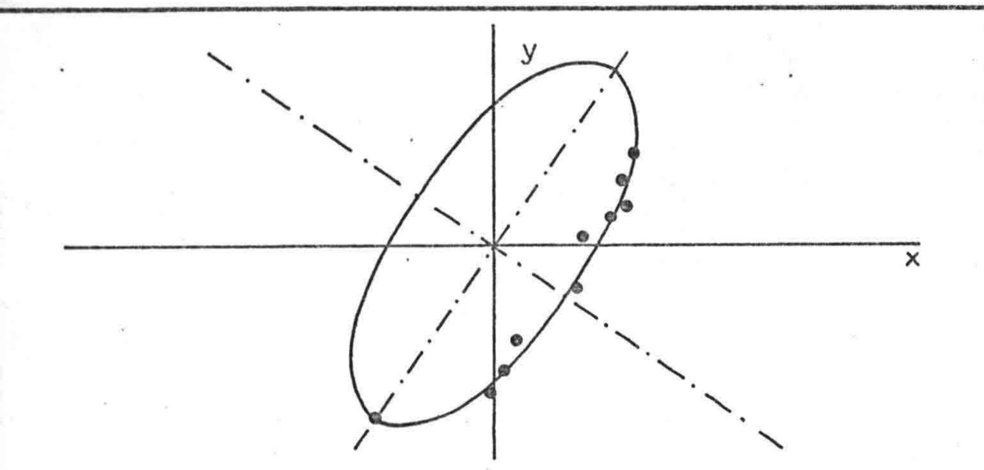


Fig.5.14. S2-Ellips

Traject: 2

Schaal : 1 : 20

δ : 54.6 deg

a : 0.56 m

b : 0.23 m

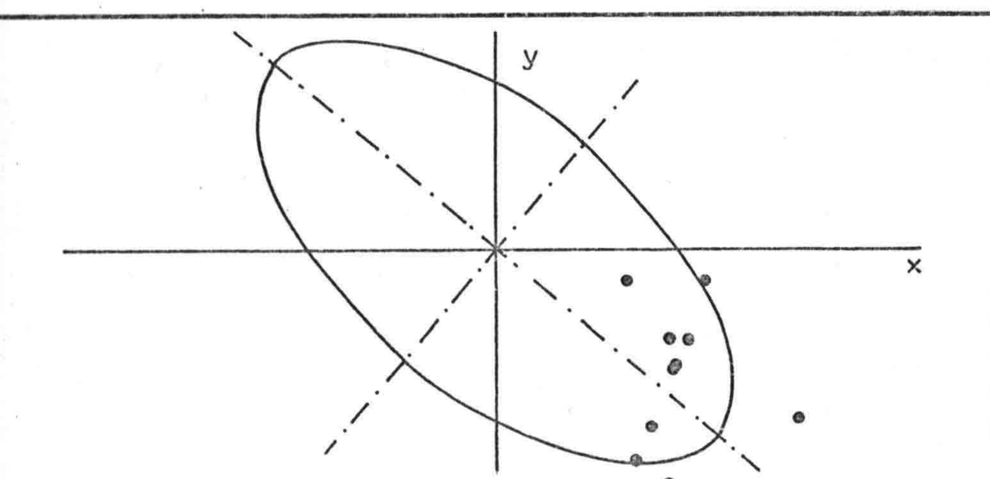


Fig.5.15. K1-Ellips

Traject: 2

Schaal : 1 : 4

δ : − 40.1 deg

a : 0.15 m

b : 0.07 m

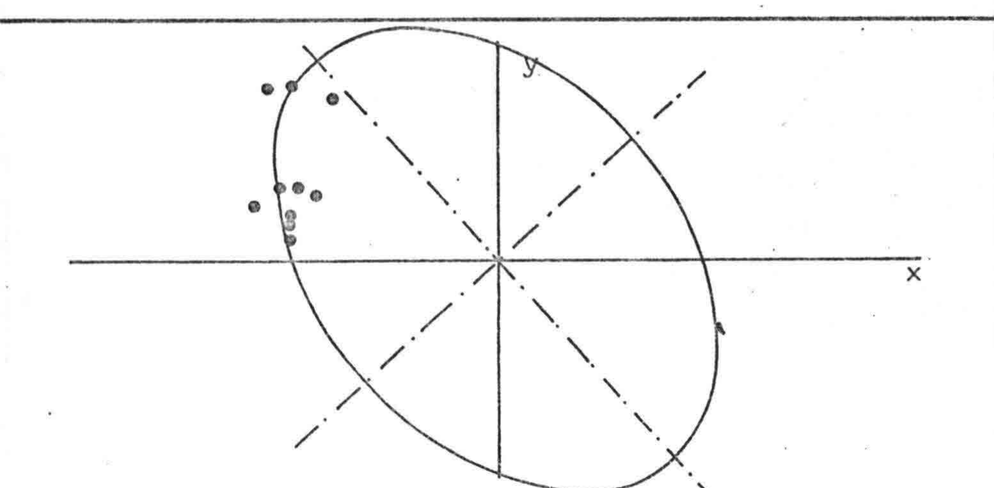


Fig.5.16. O1-Ellips

Traject: 2

Schaal : 1 : 4

δ : 132.1 deg

a : 0.14 m

b : 0.09 m

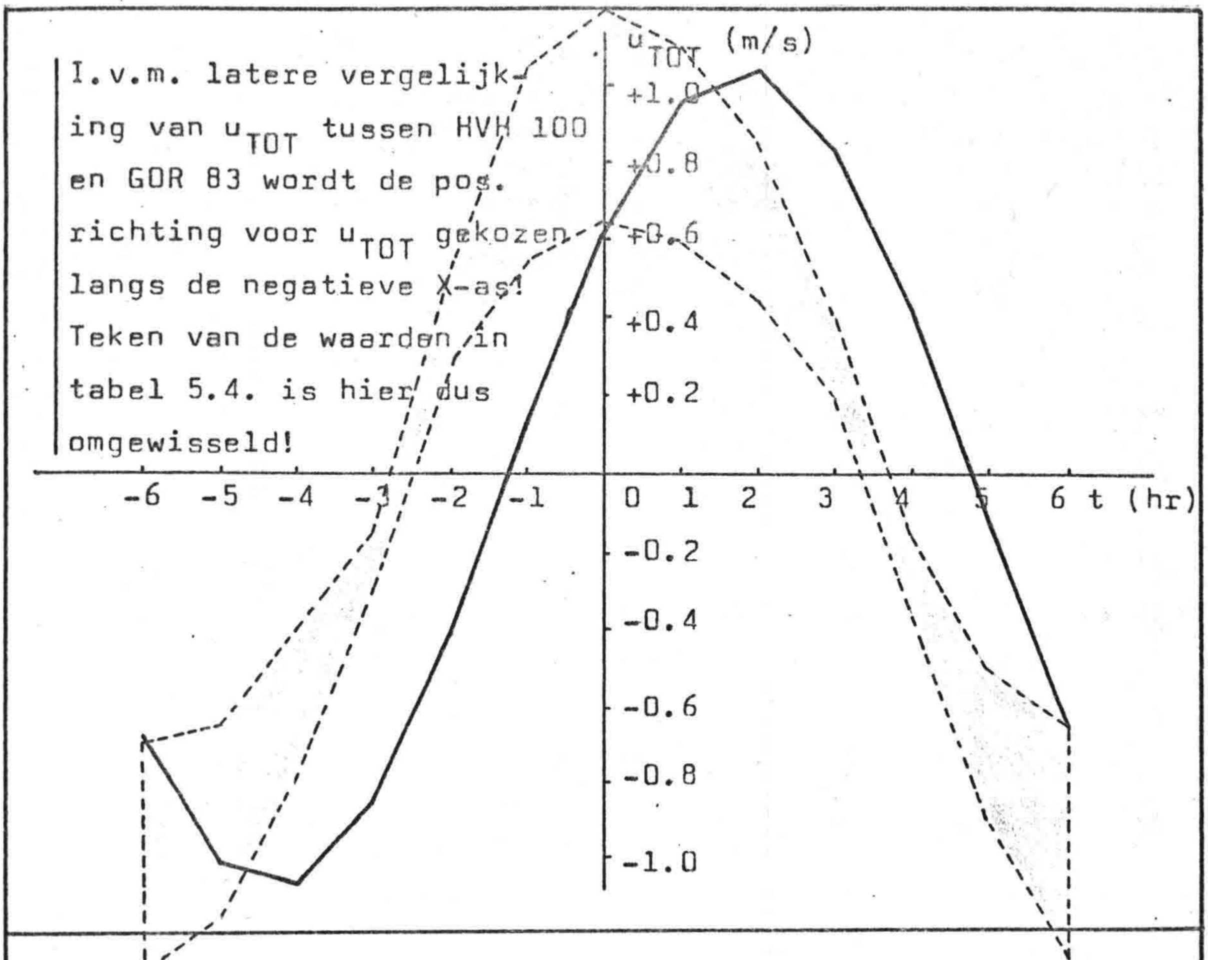


Fig.5.17.Getijstroomsnelheidscurve te GOR voor Y = 0 kM.

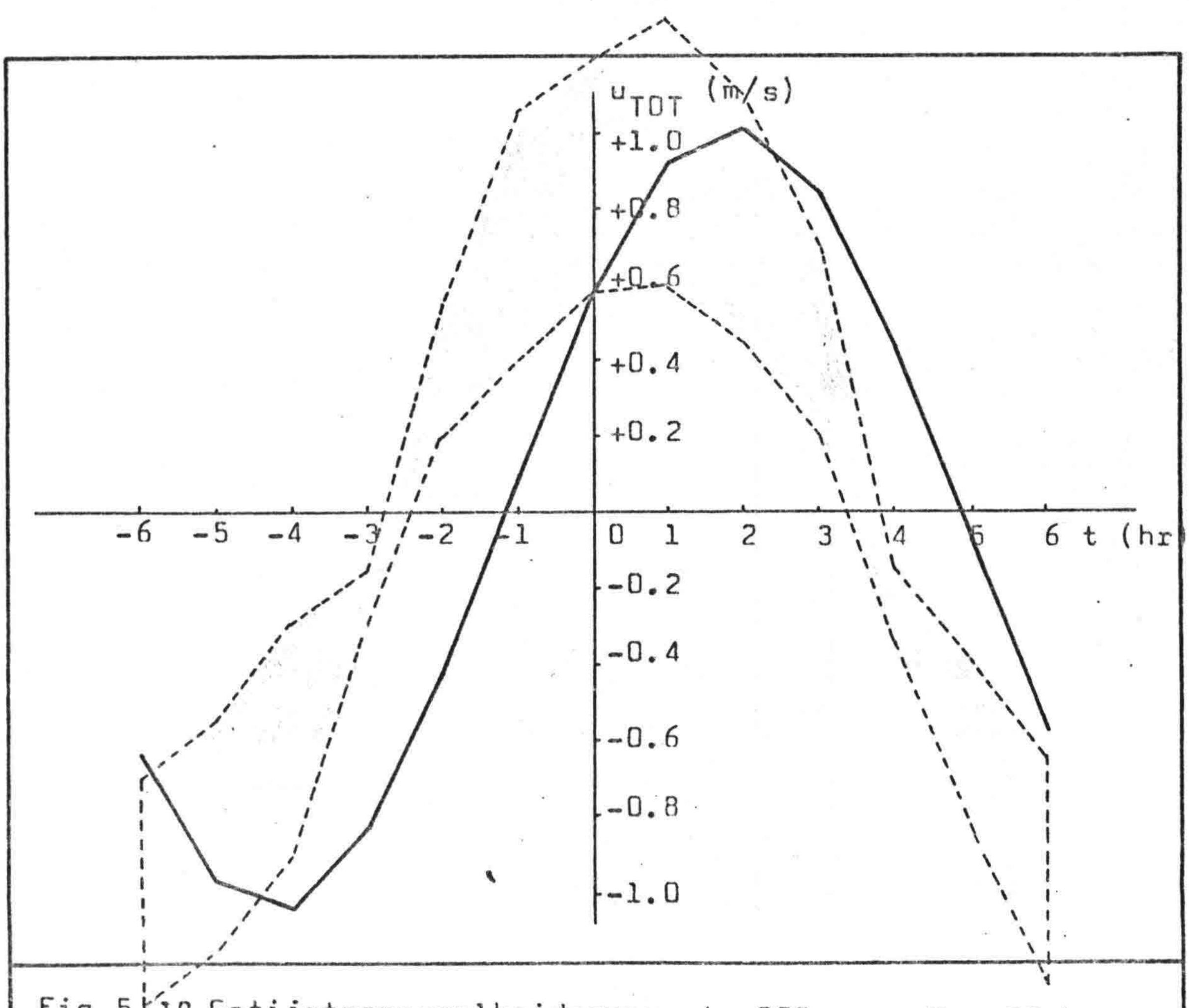


Fig.5.18.Getijstroomsnelheidscurve te GOR voor Y = 25 kM.

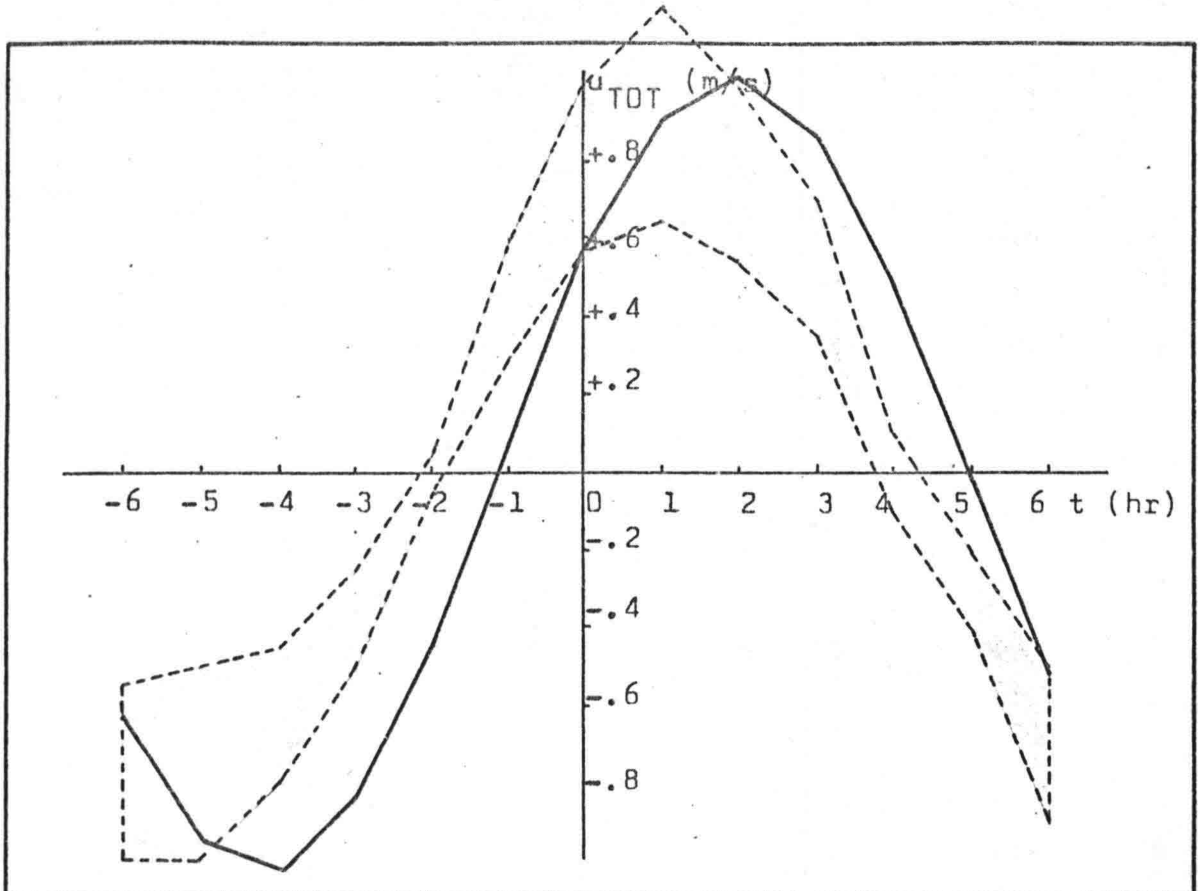


Fig.5.19.Getijstroomsnelheidscurve te GOR voor Y = 50 kM.

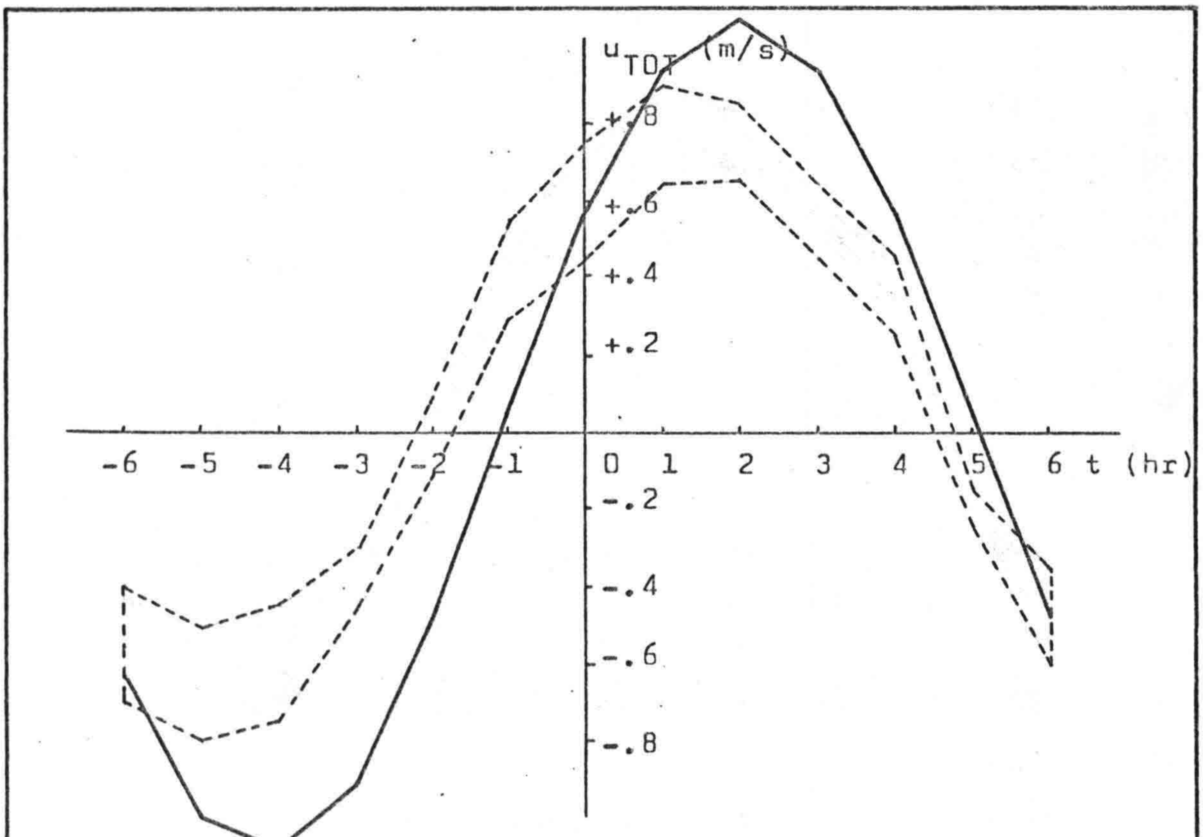


Fig.5.20. Getijstroomsnelheidscurve te GOR voor Y = 83 kM.

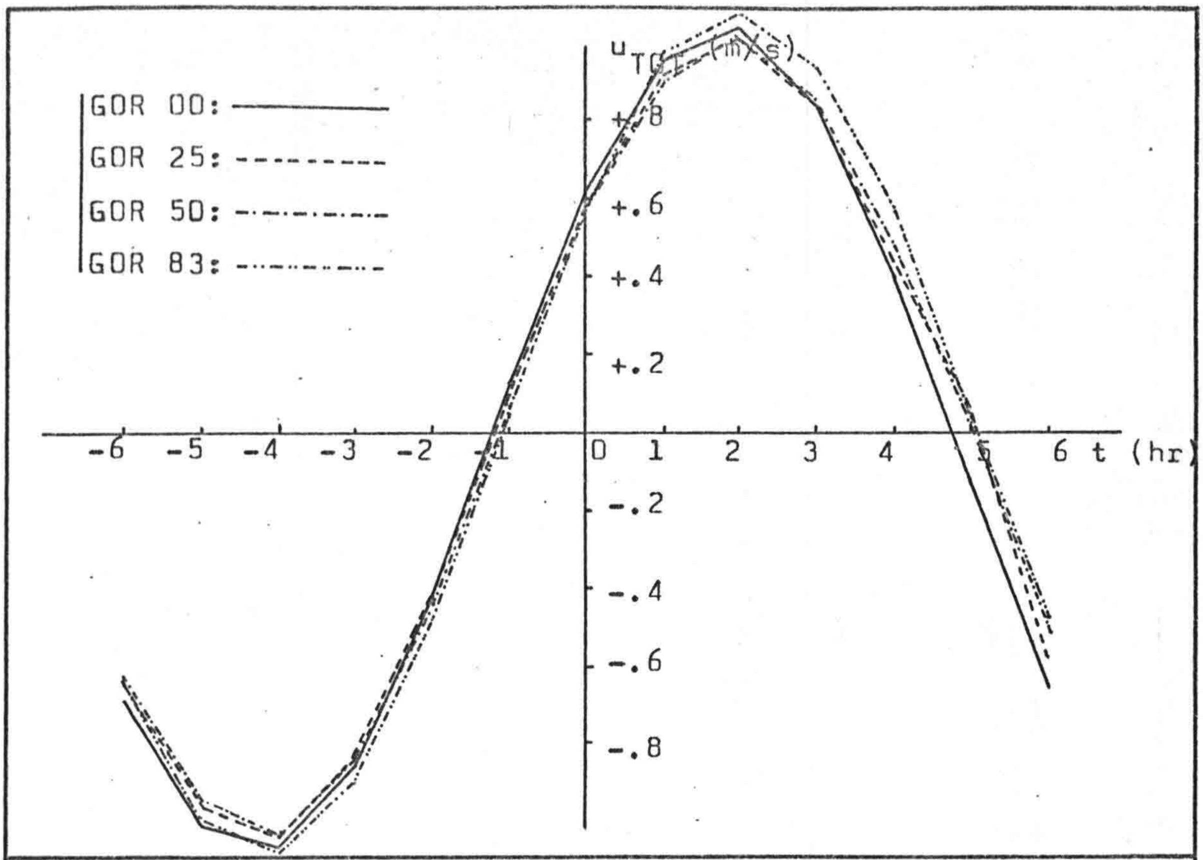


Fig.5.21. Overzicht getijstroomsnelheidscurves.

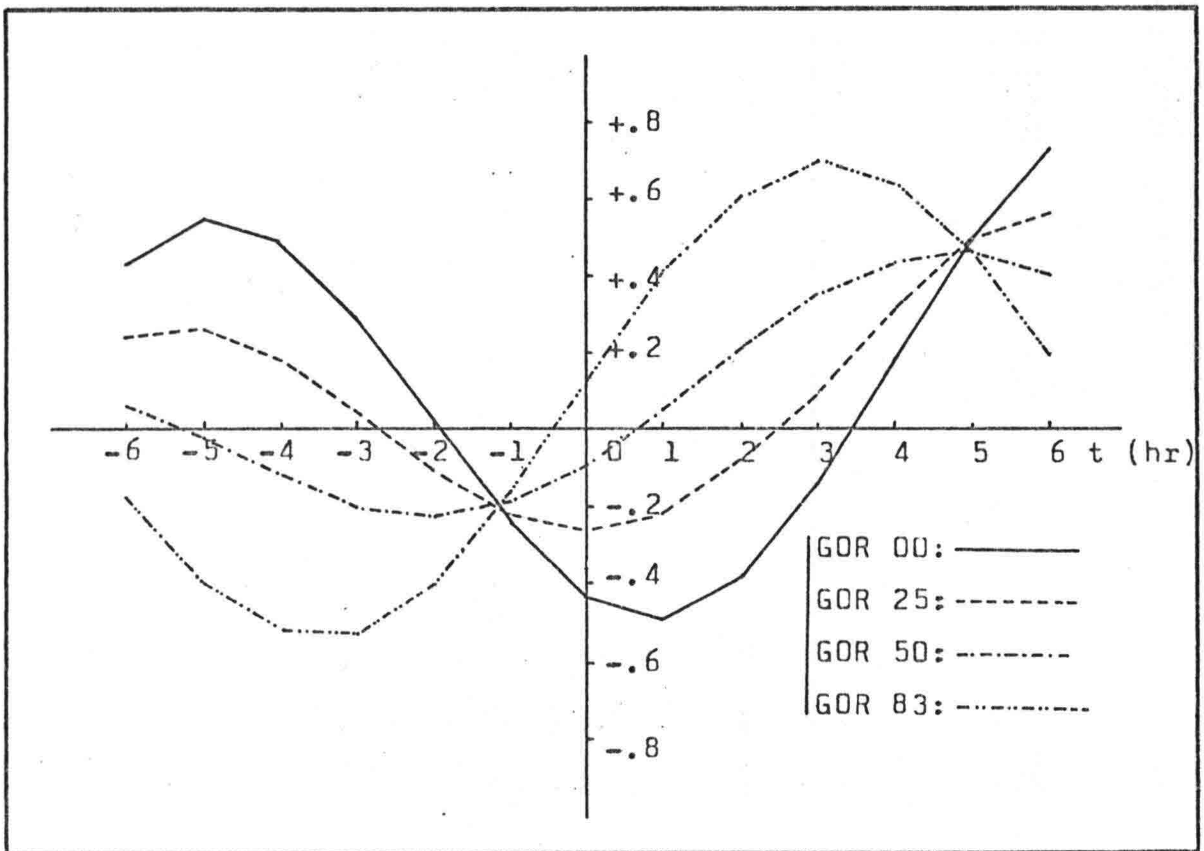


Fig.5.22. Overzicht getijgolfhoogtecurves.

5.3.5. Bespreking resultaten

a. Totale golfhoogte η_{TOT}:

(i) Amplitude : De amplitude van η_{TOT} daalt van GOR 00 tot GOR 50 om daarna weer te stijgen bij GOR 83. In theorie is dit zeer wel mogelijk.

(ii) Faseverschil: De enige mogelijkheid tot cöntrôle is die langs de kust (Y=0 kM). Hier bedraagt het verschil nul.

b. Totale stroomsnelheid u_{TOT}:

(i) Amplitude : Tot GOR 50 uitstekend. Van GOR 50 tot GOR 83 is de amplitude iets te groot. Bij GOR 83 is de berekende amplitude een factor 1.5 te groot.

(ii) Faseverschil: Voor alle vier de berekende punten bedraagt het faseverschil $\approx$ 1 uur. Evenals bij traject 1 lopen de berekende krommes vóór op de werkelijke krommes.

c. Opmerkingen:

10 punten over een dergelijke korte kustlengte is zeer gunstig doch in het algemeen wel zeldzaam.

d. Conclusie:

Matig resultaat.

5.3.6. Mate van overéénstemming tussen HVH 100 en GOR 83

Het punt HVH 100 is identiek aan GOR 83. Het enigste verschil bestaat uit de kust waarvan is gerekend. Door dit te doen over dezelfde tijdsperiode (-00.25GMT * +11.35GMT) is het mogelijk om de resultaten te vergelijken.

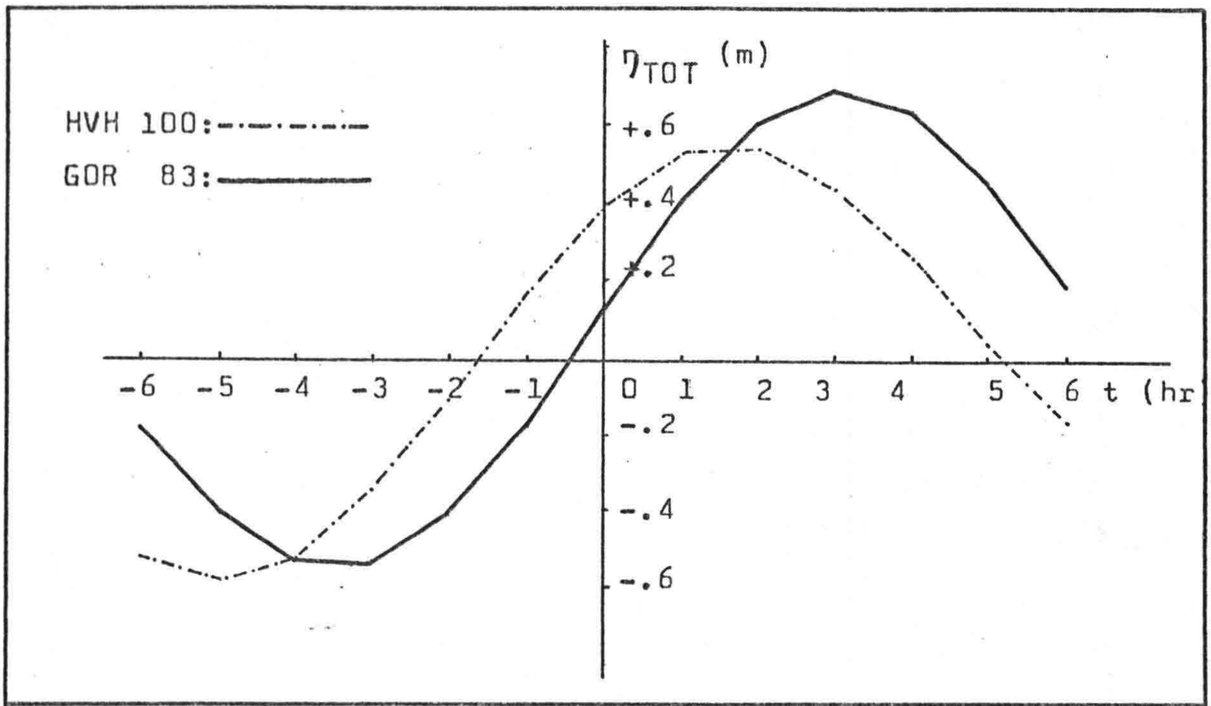


Fig.5.23. Mate van overéénstemming tussen HVH 100 en GOR 83.

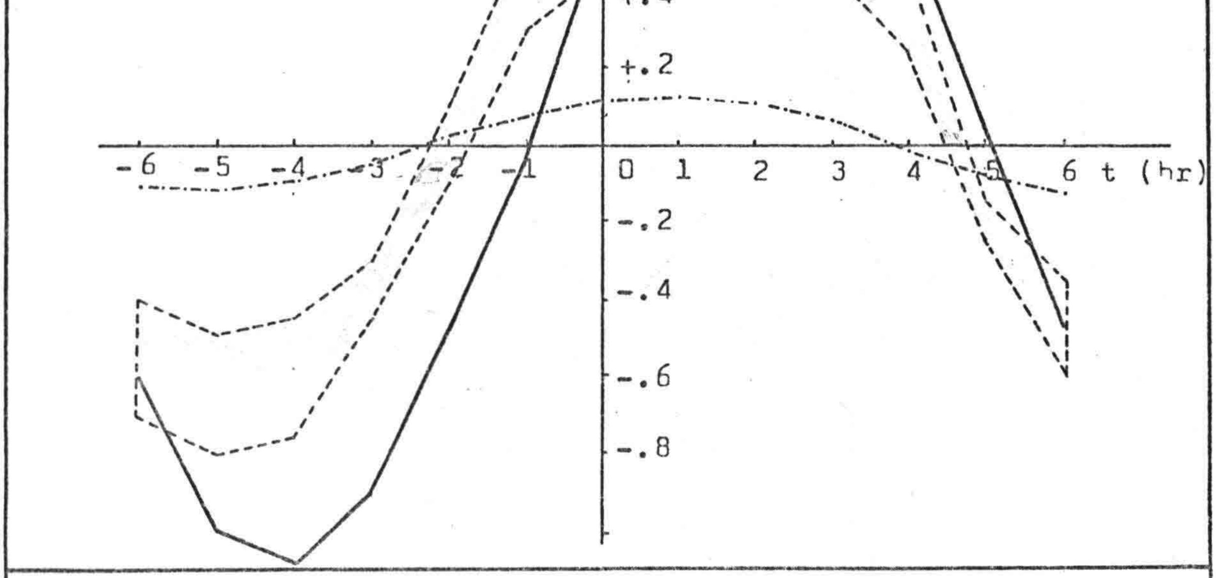


Fig.5.24. Mate van overéénstemming tussen HVH 100 en GOR 83.

Bespreking mate van overéénstemming tussen HVH 100 en GOR 83

a. Totale golfhoogte η_{TOT}:

(i) Amplitude : ≈ 25% verschil

(ii) Faseverschil: Het faseverschil tussen de kromme van HVH 100 en GOR 83 bedraagt ongeveer 1 uur.

b. Totale stroomsnelheid u_{TOT}:

(i) Amplitude : Dit is een uitermate groot verschil! De oorzaak dient hier bij HVH 100 gezocht te worden aangezien deze veel te klein is.

(ii) Faseverschil: Onderling faseverschil bedraagt 1 uur. Het faseverschil met de "echte" kromme ongeveer een half uur.

c. Opmerkingen:

Het moet worden vermeld dat de Noordzee qua getijstromingen niet één van de eenvoudigste gebieden is.

d. Conclusie:

De golfhoogtecurven (HVH 100 - GOR 83) komen niet goed overéén.

De stroomsnelheidscurven (HVH 100 - GOR 83) komen helemaal niet overéén.

5.4. De oostkust van Groot-Brittannië

5.4.1. Trajectbeschrijving

Traject

Trajectnummer

Aantal reg. punten: 17

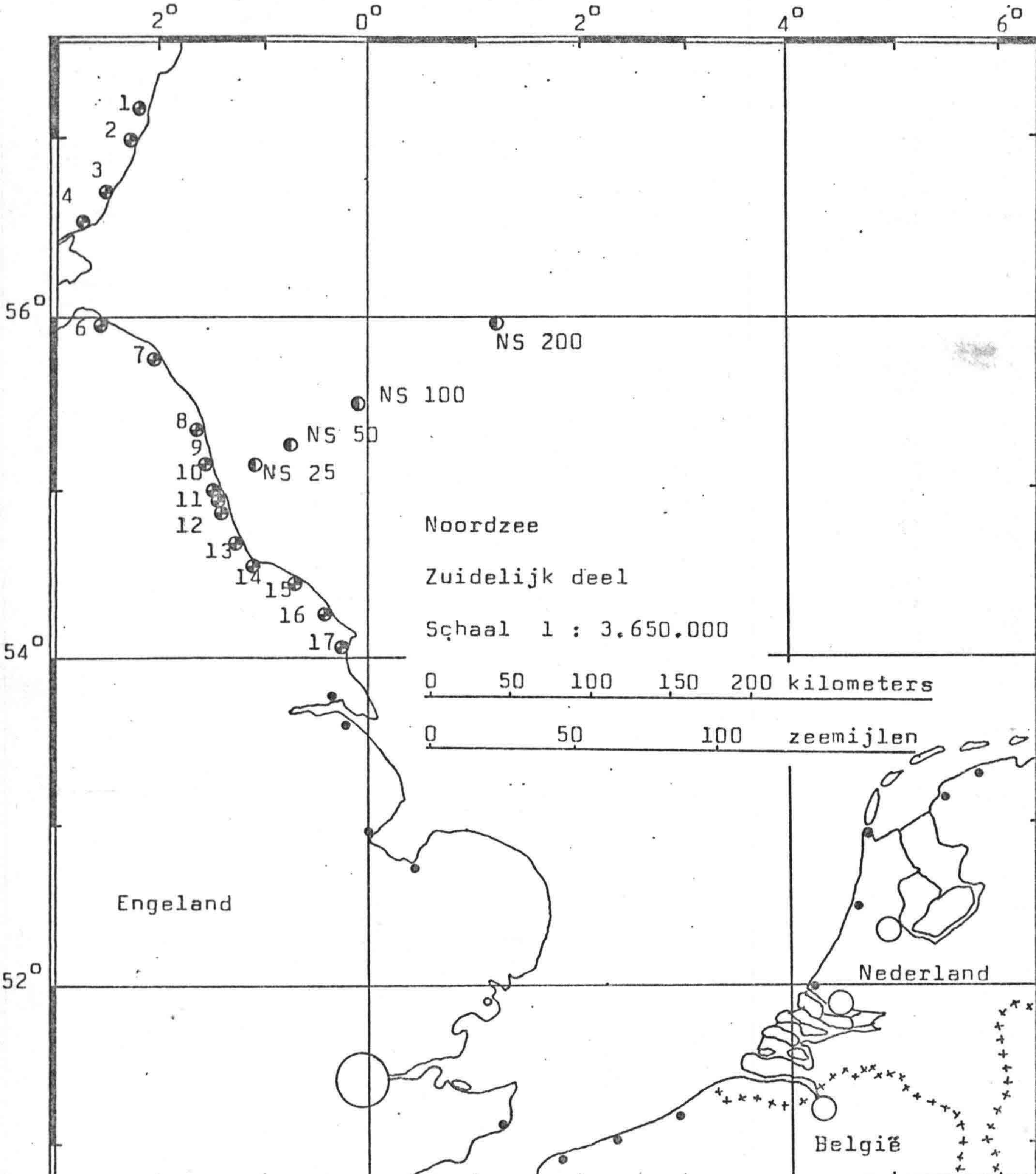
Lijst reg. punten : 3-1 Aberdeen
3-2 Stonehaven
3-3 Montrose
3-4 Arbroath
3-5 Fidra
3-6 Dunbar
3-7 Berwick
3-8 Amble
3-9 Blyth
3-10 North Shields
3-11 River Tyne Entrance
3-12 Sunderland, Durham
3-13 Hartlepool
3-14 River Tees Entrance
3-15 Whitby
3-16 Scarborough
3-17 Bridlington

Gewenste datum : 19 september 1982

Tijdsinterval : 06.00 * 18.00 (plaatselijke tijd = GMT)

Te berekenen punt : NS 25 ; NS = North Shields
NS 50
NS 100
NS 200

Fig.5.25. Situatieschets traject 3.



•	Plaats	◍	Registratiepunt
○	Grote plaats	◐	Te berekenen punt
++++++	Landsgrens	●	Registratiepunt/te berek. punt

5.4.2. Invoer

1. Aantal registratiepunten : 17

2. Faseverloop langs pos.X-as: Toename

3. Harmonische constanten :

Nr.reg. punt	Registr. punt	M2		S2		K1		O1	
		g	H	g	H	g	H	g	H
3-1	ABD	023	1.33	060	0.44	204	0.11	048	0.14
3-2	STH	032	1.35	074	0.47	206	0.12	053	0.13
3-3	MON	047	1.47	090	0.50	233	0.13	059	0.12
3-4	ARB	044	1.54	085	0.53	207	0.12	045	0.13
3-5	FID	057	1.67	100	0.54	211	0.12	063	0.12
3-6	DUN	055	1.61	096	0.56	219	0.11	067	0.13
3-7	BER	057	1.60	118	0.51	202	0.04	088	0.07
3-8	AMB	077	1.49	127	0.46	235	0.13	065	0.12
3-9	BLY	087	1.60	126	0.55	234	0.13	081	0.14
3-10	NS	089	1.62	130	0.53	240	0.11	081	0.14
3-11	TYE	090	1.59	131	0.54	241	0.12	081	0.14
3-12	SUN	090	1.57	139	0.54	238	0.11	068	0.13
3-13	HAR	094	1.56	139	0.53	248	0.08	081	0.15
3-14	TEE	098	1.69	138	0.57	248	0.13	087	0.14
3-15	WH	103	1.65	147	0.52	254	0.11	103	0.12
3-16	SCA	111	1.71	153	0.58	254	0.12	088	0.15
3-17	BRI	125	1.77	168	0.63	176	0.11	108	0.10

4. Diepte	:	80	M
5. Breedtegraad	:	55	deg
6. Hoek M2/S2/K1/O1	:	089/130/240/081	deg
7. Y-afstand	:	25/50/100/200	kM
8. Tijdzône	:	00.00	hm
9. Begintijd	:	06.00	hm
10. Eindtijd	:	18.00	hm
11. Tijdstap	:	01.00	hm
12. A M2/S2/K1/O1	:	032/002/111/287	deg
13. F1/F2 M2	:	1.04/0.99	-
F1/F2 S2	:	1.23/1.23	-
F1/F2 K1	:	0.73/0.70	-
F1/F2 O1	:	1.03/0.98	-

Opmerkingen : deg: graden met 360 graden in een cirkel

hm : hours, minutes. Hier dient het aantal uren en minuten ingevuld te worden. Plaatselijke tijden!

5.4.3. Uitvoer

Tabel 5.5.	M2	S2	K1	O1
δ (deg)	113.2	- 6.9	49.8	73.1
a (m)	1.68	0.58	0.12	0.14
b (m)	1.47	0.50	0.10	0.10

Tabel 5.6.	Y = 25 kM		Y = 50 kM		Y = 100 kM		Y = 200 kM	
$t_{pl} = t_{GMT}$	h (m)	u($\frac{m}{s}$)	h	u	h	u	h	u
06.00	+1.36	+0.37	+1.25	+0.32	+1.08	+0.24	+0.89	+0.09
07.00	+0.33	+0.02	+0.33	+0.01	+0.33	-0.02	+0.38	-0.07
08.00	-0.79	-0.34	-0.69	-0.31	-0.52	-0.27	-0.23	-0.21
09.00	-1.72	-0.61	-1.54	-0.55	-1.24	-0.45	-0.80	-0.30
10.00	-2.23	-0.73	-2.02	-0.65	-1.67	-0.51	-1.18	-0.31
11.00	-2.20	-0.67	-2.01	-0.59	-1.69	-0.45	-1.28	-0.24
12.00	-1.65	-0.45	-1.52	-0.39	-1.32	-0.28	-1.09	-0.11
13.00	-0.71	-0.12	-0.68	-0.09	-0.64	-0.05	-0.64	+0.05
14.00	+0.36	+0.23	+0.29	+0.21	+0.17	+0.20	-0.06	+0.19
15.00	+1.30	+0.51	+1.16	+0.46	+0.90	+0.38	+0.51	+0.28
16.00	+1.88	+0.65	+1.69	+0.58	+1.38	+0.47	+0.92	+0.30
17.00	+1.95	+0.61	+1.77	+0.54	+1.48	+0.42	+1.09	+0.24
18.00	+1.50	+0.42	+1.38	+0.37	+1.19	+0.27	+0.96	+0.11

5.4.4. Verwerking uitvoer

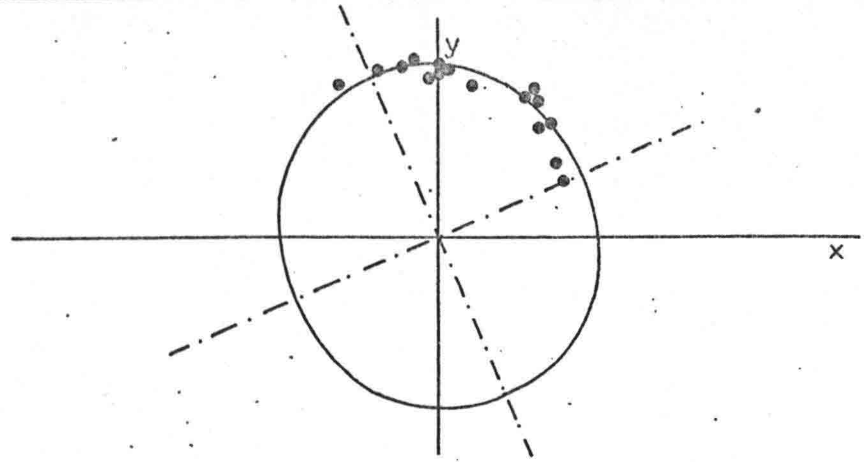


Fig. 5.26. M2-Ellips

Traject: 3

Schaal : 1 : 75

δ : 113.2 deg

a : 1.68 m

b : 1.47 m

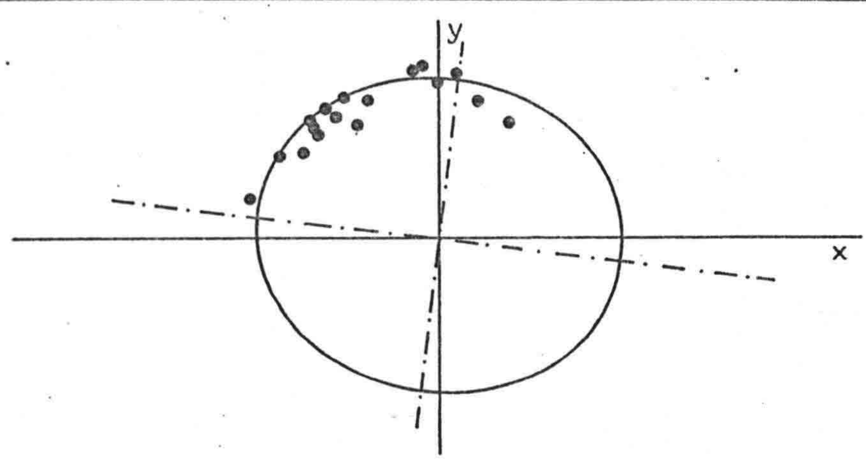


Fig. 5.27. S2-Ellips

Traject: 3

Schaal : 1 : 25

δ : - 6.9 deg

a : 0.58 m

b : 0.50 m

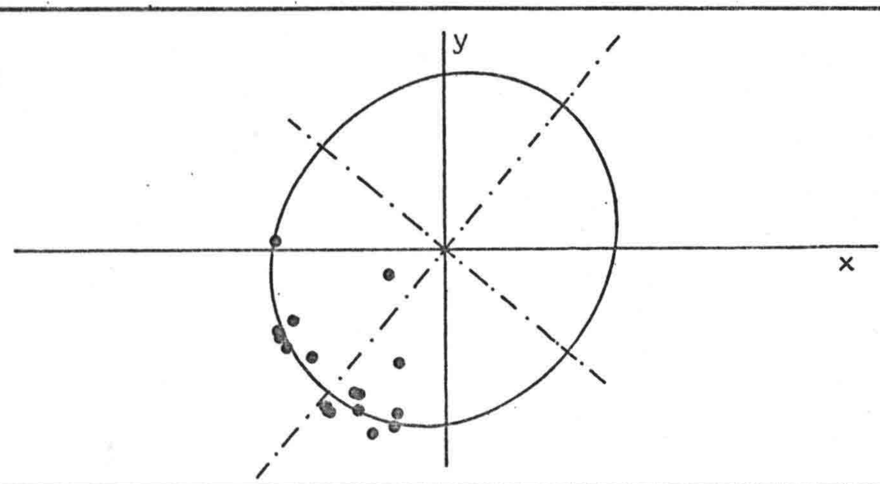


Fig. 5.28. K1-Ellips

Traject: 3

Schaal : 1 : 5

δ : 49.8 deg

a : 0.12 m

b : 0.10 m

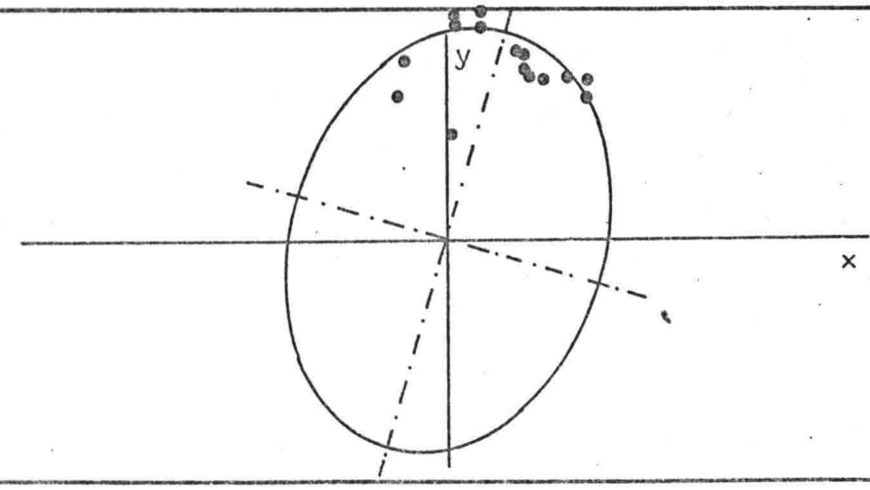


Fig. 5.29. O1-Ellips

Traject: 3

Schaal : 1 : 5

δ : 73.1 deg

a : 0.14 m

b : 0.10 m

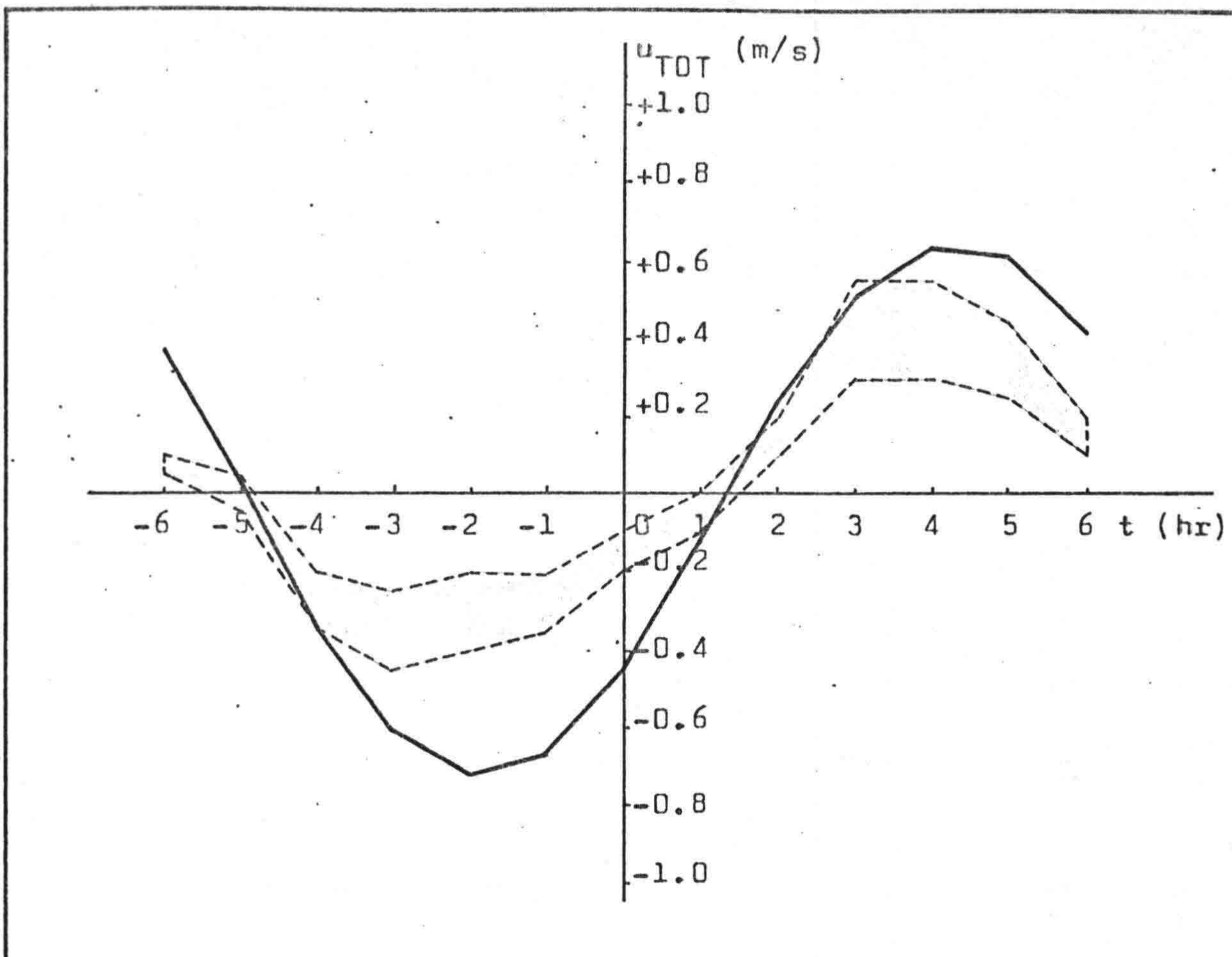


Fig.5.30. Getijstroomsnelheidscurve te NS voor Y = 25 kM.

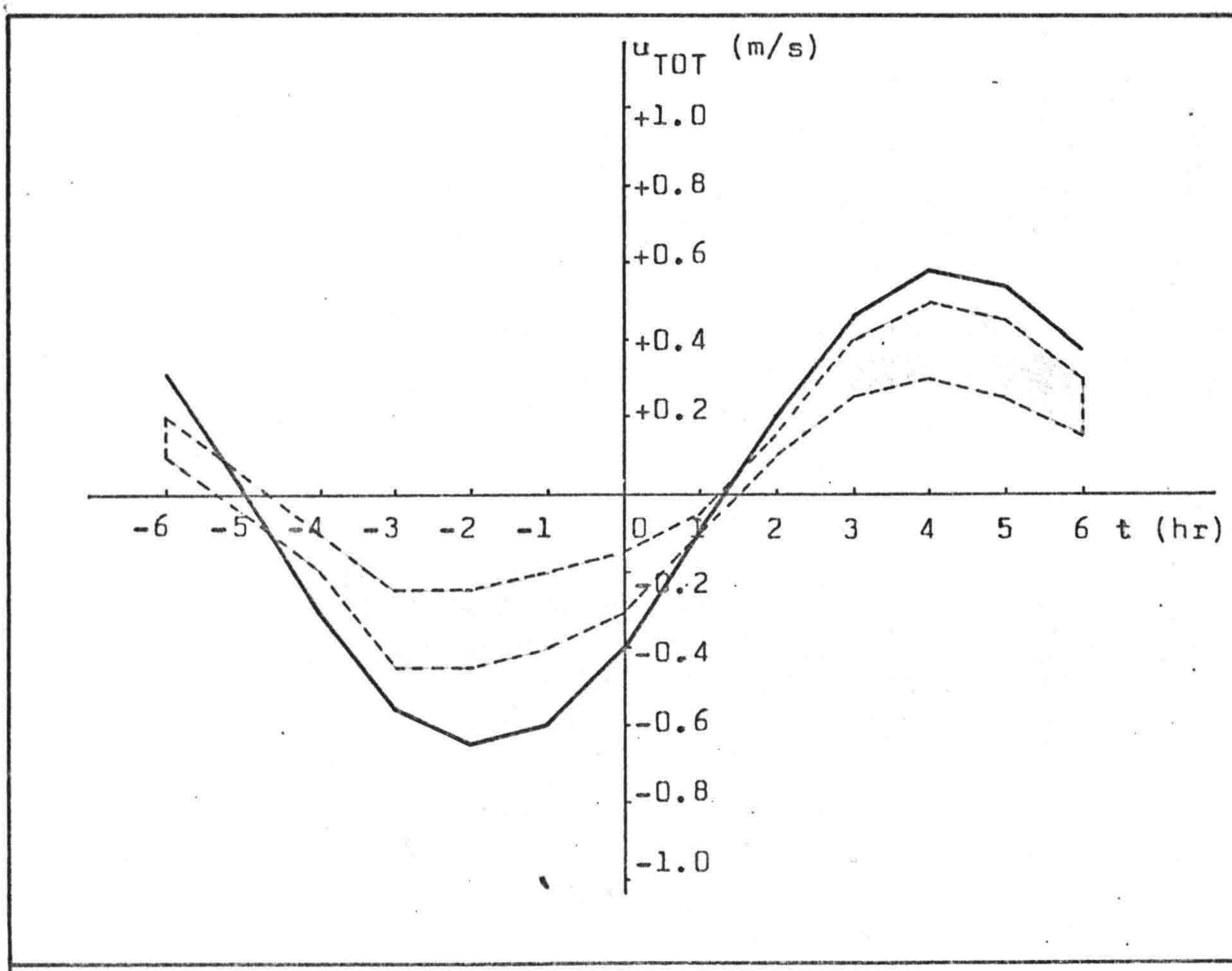


Fig.5.31. Getijstroomsnelheidscurve te NS voor Y = 50 kM.

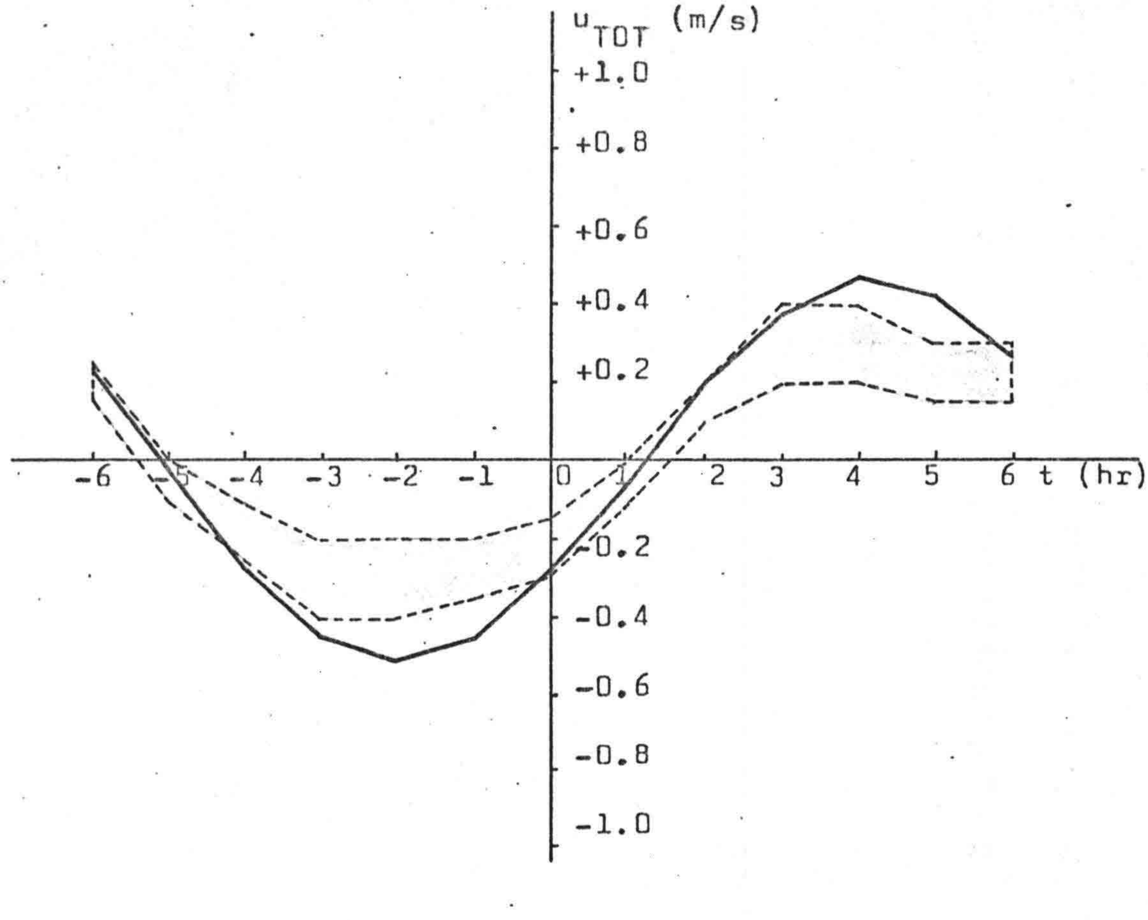


Fig.5.32. Getijstroomsnelheidscurve te NS voor Y = 100 kM.

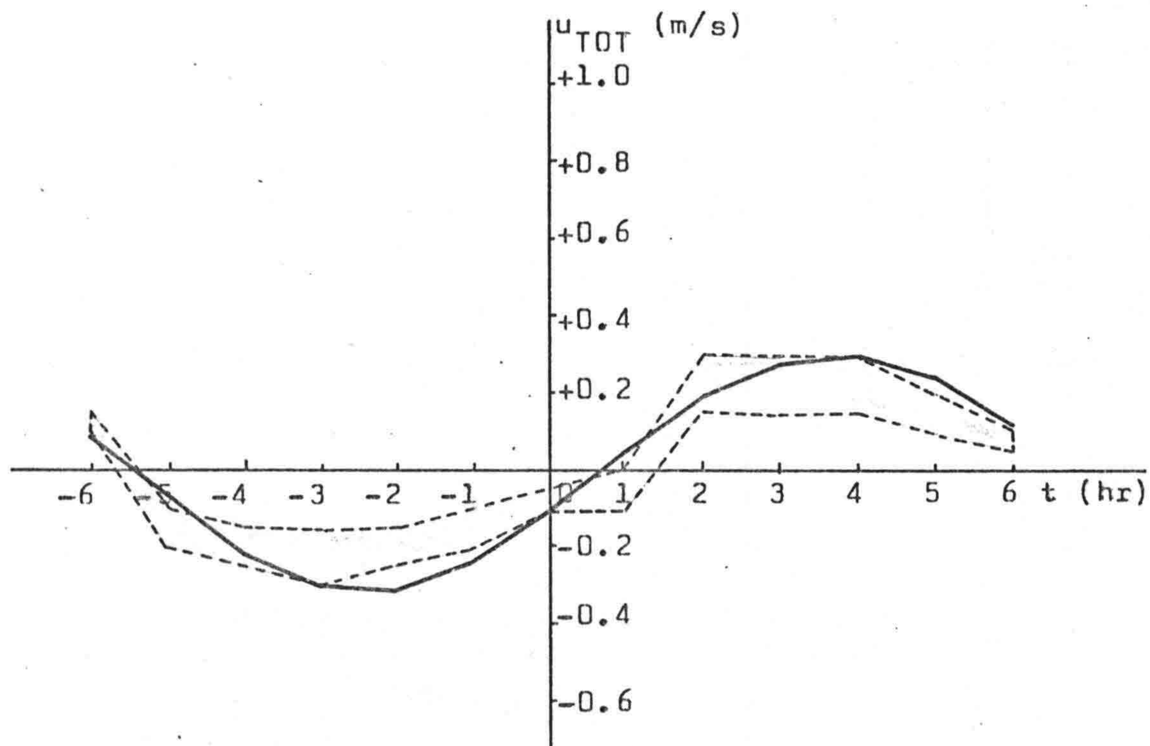


Fig.5.33. Getijstroomsnelheidscurve te NS voor Y = 200 kM.

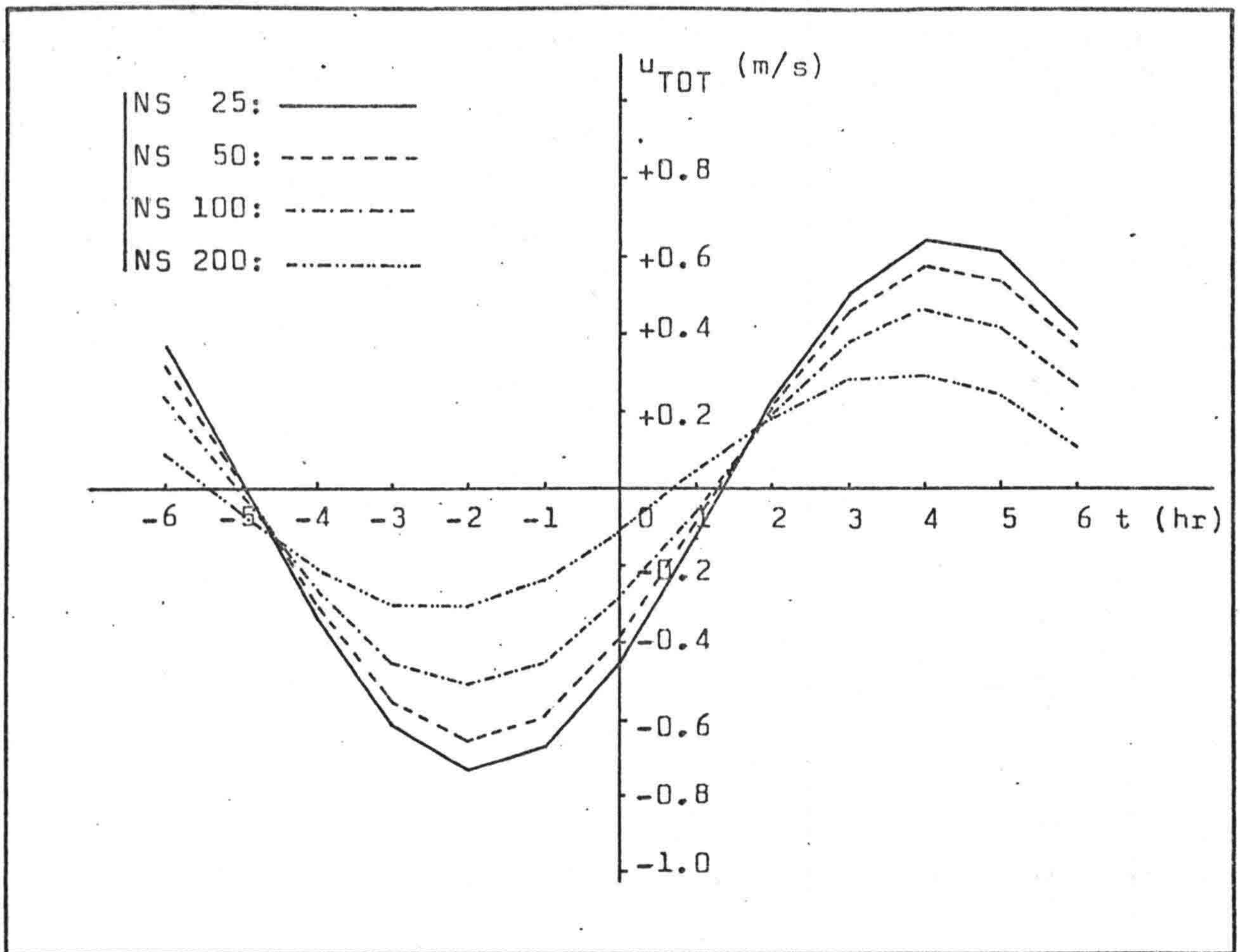


Fig. 5.34. Overzicht getijstroomsnelheidscurves.

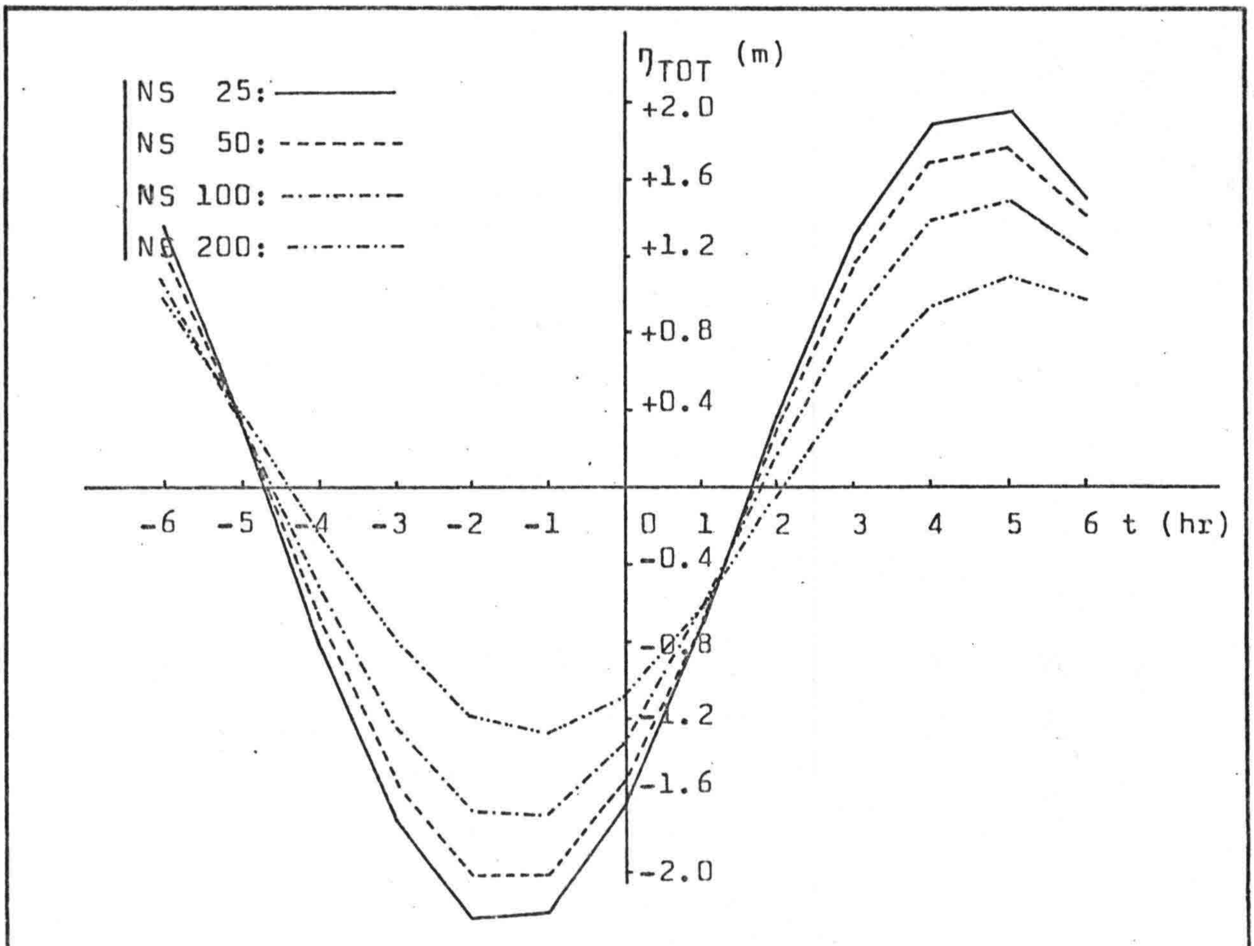


Fig. 5.35. Overzicht getijgolfhoogtecurves.

5.4.5. Bespreking resultaten

a. Totale golfhoogte η_{TOT}:

(i) Amplitude : Correct voor Y=0 kM.

(ii) Faseverschil: Het verschil bedraagt nul.

b. Totale stroomsnelheid u_{TOT}:

(i) Amplitude : Voor Y = 25 kM en Y = 50 kM is de berekende amplitude een factor 1.5 à 2 te groot.
Voor Y = 100 kM een factor 1.2 te groot.
Voor Y = 200 kM correct.

(ii) Faseverschil: Het verschil bedraagt voor alle vier punten nul.

c. Opmerkingen:

In principe niet te ver uit de kust gaan met de berekening aangezien de richting van de stroom zou kunnen gaan afwijken van de richting van de kustlijn.
Op grond van gegevens in dit traject is het raadzaam niet verder te gaan dan ongeveer 150 kM uit de kust.

d. Conclusie:

Tot 100 kM uit de kust matig resultaat.
Bij 100 tot 200 kM uit de kust goed resultaat.

6. Samenvatting en conclusies

6.1. Samenvatting

De samenvatting heeft achtereenvolgens betrekking op inhoud, toepassing en resultaten van het wiskundig model ter bepaling van getijstroomsnelheden langs de kust.

Inhoud: In hoofdstuk 1 zijn drie soorten lange golven afgeleid waarbij de Kelvin golf het best bleek te voldoen ter beschrijving van een getijgolf langs de kust.

In hoofdstuk 2 is het gedrag van één inkomende Kelvin golf uitgewerkt in formules en grafieken.

In hoofdstuk 3 is het golfbeeld onderzocht dat ontstaat door interferentie van één inkomende en één teruggekaatste Kelvin golf.
Dit golfbeeld dient vervolgens als model voor de berekening van getijstroomsnelheden langs de kust.

In hoofdstuk 4 is, op grond van de voorgaande theorie, de berekeningswijze van de getijstroomsnelheid afgeleid.

In hoofdstuk 5 is de stroomsnelheidsberekening toegepast op drie kusten aan de zuidelijke Noordzee, namelijk: De Nederlandse kust, de Engelse zuid-oost kust en de oostkust van Groot-Brittannië.

In hoofdstuk 6 wordt het deelontwerp besloten met samenvatting en conclusies betreffende het getijmodel.

Toepassing: Bij toepassing van het getijmodel moeten de volgende dertien punten worden ingevoerd.

1. Aantal registratiepunten (minimaal 3)
2. Faseverloop langs positieve X-as
3. Harmonische constanten

Deze drie punten zijn te halen uit de Britse Admiraliteitstafels (of een soortgelijk exemplaar).

4. Diepte
5. Breedtegraad

Met behulp van een zeekaart voor de betreffende kust zijn deze twee waarden gemakkelijk te vinden. Voor de diepte moet de gemiddelde waarde worden genomen van de gehele kuststrook.

6. Hoek M2/S2/K1/O1
7. Y-afstand

Punt 6 geeft in versluierde vorm de X-afstand aan. In plaats van X wordt namelijk het kappa-getal g ingevoerd, verkregen uit de lijst van harmonische constanten. Nadere uitleg hierover op bladzijde 48. Punt 7 spreekt voor zich.

8. Tijdzône

Afhankelijk van geografische ligging kust.

9. Begintijd
10. Eindtijd
11. Tijdstap

De punten 9, 10 en 11 geven de tijdspanne aan waarover de getijstroomsnelheid moet worden berekend en met welke tijdstap dit moet geschieden.

12. A M2/S2/K1/O1
13. F1/F2 M2/S2/K1/O1

Worden bepaald door datum.
Te vinden in Britse Admiraliteitstafels.

Resultaten: De getijberekening is toegepast op drie kusten:

1. De Nederlandse kust
2. De Engelse zuid-oost kust
3. De oostkust van Groot-Brittannië

Het resultaat was als volgt:

1. Matig resultaat
2. Matig resultaat
3. Matig/goed resultaat

Hierbij moet wel de kanttekening worden geplaatst dat de berekening voor de Nederlandse kust berust op het minimum van drie registratiepunten.

Op grond van het voorgaande moet het getijmodel als matig worden gekwalificeerd.

6.2. Conclusies

De benodigde gegevens voor toepassing van het getijmodel zijn gemakkelijk verkrijgbaar.

Bij gebruik van het getijmodel moet worden nagegaan of het kustgedeelte, waar de stroomsnelheden moeten worden berekend, voldoet aan de volgende vier punten:

a. Regelmatig kustverloop
b. Vrij constante diepte
c. Voldoende aantal registratiepunten langs de betreffende kust
d. Regelmatig verloop van het kappa-getal over de kustlengte

Indien nu aan alle vier punten redelijkerwijs wordt voldaan, kan toepassing van het getijmodel zeker worden overwogen. Niettemin blijft een kritische blik op zijn plaats.

Wordt aan één van deze vier punten niet voldaan dan zal toepassing van het getijmodel hoogstwaarschijnlijk foute resultaten tot gevolg hebben.

De nauwkeurigheid van het getijmodel is matig, de toepassing in aanmerking nemend. Deze waardering is gebaseerd op resultaten van hoofdstuk 5.

Indien géén stroomsnelheden bekend zijn, kan het getijmodel wellicht enige uitkomst bieden.

Wiskundige symbolen

Symbool	Betekenis
$=$	Gelijk aan
$\neq$	Niet gelijk aan
$\approx$	Bij benadering gelijk aan
$\ll$	Veel kleiner dan
$\gg$	Veel groter dan
$\lvert\eta\rvert$	Absolute waarde van η
Σ	Som
$\sqrt{}$	Machtswortel
π	Pi = 3.14159...
d	Differentiaal
δ	Partiële differentiaal
exp	Exponentiële functie
∇	Divergentie
i	Imaginair getal
J	Jacobiaan
O(s)	Restterm in orde van grootte s
$\sin\alpha$	Sinus van α
$\cos\alpha$	Cosinus van α
$\tan\alpha$	Tangens van α
$\arcsin\alpha$	Arcsinus van α
$\arccos\alpha$	Arccosinus van α
$\arctan\alpha$	Arctangens van α
Re	Reële gedeelte van
$\bar{r}$	Vector r

Toegepaste symbolen

Symbool	Betekenis	Grootheid
a	Grootte halve lange as	M
a_1	Straal cirkel 1 (η_{o_1})	M
a_2	Straal cirkel 2 ($\eta_{o_2}.\exp(-fB/C_o)$)	M
a_{ti}	Vector-radius behorende bij poolhoek g_i en de η_{tot}-basisellips	M
A	Parameter middelpuntsvgl. ellips	M^{-1}
	Getijhoek	deg
A'	Constante	-
b	Grootte halve korte as ellips	M
2B	Parameter middelpuntsvgl. ellips	M^{-1}
B'	Constante	-
c	Fasesnelheid	M/s
C	Parameter middelpuntsvgl. ellips	M^{-1}
C_o	Fasesnelheid in ondiep water	M/s
C_x	Fasesnelheid ($=\sigma/k$)	M/s
f	Coriolis-parameter	rad/s
F	Getijfactor	-
g	Zwaartekrachtsversnelling	M/s^2
	Kappa-getal (harmonische constante)	deg
h	Hoogte waterspiegel	M
h_b	Hoogte bodem	M
H	Amplitude (harmonische constante)	M
H_o	Diepte	M
i	Willekeurig registratiepunt	-
j	Specifiek registratiepunt	-
k	Golfgetal	M^{-1}

Symbool	Betekenis	Grootheid
L	Golflengte	M
n	Aantal registratiepunten	-
p	Druk	$kg/M.s^2$
p_o	Druk aan de waterspiegel	$kg/M.s^2$
q	Getijfactorverandering	hr^{-1}
r_i	Residuwaarde voor punt i	-
r	Straal cirkel	M of M/s
s	Hellingfactor	-
t	Tijd	hr of s
T	Golfperiode	s
u	Stroomsnelheid in X-richting	M/s
U	$u.H_o$	M^2/s
v	Stroomsnelheid in Y-richting	M/s
V	$v.H_o$	M^2/s
w	Stroomsnelheid in Z-richting	M/s
x	Coördinaatas orthogonaal assenstelsel	M of M/s
X	Coördinaatas gericht langs de kust	kM of M
y	Coördinaatas orthogonaal assenstelsel	M of M/s
Y	Coördinaatas loodrecht de zee in gericht	kM of M
Z	Coördinaatas loodrecht op XY-vlak en recht omhoog gericht	kM of M

Symbool	Betekenis	Grootheid
α	$\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - f^2}{C_o^2} - k^2}$	M^{-1}
	$\arctan\left[\dfrac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \cdot \tan(g_i - \delta)\right]$	deg
γ	$\dfrac{\eta_{o_2}}{\eta_{o_1}} \cdot \exp(-fB/C_o) . \exp(+2fY/C_o)$	-
δ	Kleinste positieve hoek tussen positieve X-as en de hoofdas van de ellips	deg
	$\arctan\left[\dfrac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \cdot \tan(kX)\right]$	deg
ε	$\arctan\left[\dfrac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \cdot \tan(\sigma t)\right]$	deg
η	Golfhoogte	M
Θ	Breedtegraad	deg
	Fase $(=kX - \sigma t + \varphi)$	rad
$\Theta_{1i(2i)}$	Hoek behorend bij straal 1 (of 2) voor i	deg
μ	Dynamische viscositeitscoëfficiënt	$kg.M^{-1}.s^{-1}$
	$\arctan\left[\dfrac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \tan(kX)\right]$	deg
ν	Kinematische viscositeitscoëfficiënt	$M^2.s^{-1}$
ρ	Dichtheid	$kg.M^{-3}$
σ	Frequentie	s^{-1}
τ	$\arctan\left[\dfrac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \tan(\sigma t)\right]$	deg
φ	Minimaliseringsfunctie	-
	Fasehoek	rad
Ω	Hoeksnelheid aarde	$rad.s^{-1}$

Indices

Index	Betekenis
'	Na verandering (van grootte of hoek)
	Hulpassenstelsel (X'Y')
1	Inkomende golf 1
	Begin dag: t_{GMT} = 00.00
2	Teruggekaatste Kelvin golf 2
	Einde dag: t_{GMT} = 24.00
gk	Golfkam
GMT	Greenwich Mean Time
i	Willekeurig registratiepunt
j	Specifiek registratiepunt
pl	Plaatselijk
tot	Totaal van 1 en 2
TOT	Totaal van 1 en 2 gesommeerd over alle getijden
u	Stroomsnelheid in X-richting
zône	Tijdzône
n	Golfhoogte (uitwijking van de waterspiegel)

Literatuur

a. De analyse van getijden	Prof.dr.ir.J.P.Th.Kalkwijk Delft September 1976
b. Lange golven I en II Handleiding b73A	C.Verspuy en M.de Vries Technische Hogeschool Delft
c. Geophysical Fluid Dynamics	Joseph Pedlosky Springer Verlag New York Heidelberg Berlin 1979
d. Handbook of fluid dynamics	Victor L. Streeter Editor-in-chief 1961
e. Waves in the ocean	P.H.Le Blond and L.A.Mysak Elsevier Scientific Publ. Comp. Amsterdam Oxford New York 1978
f. Overzicht der getijleer ten dienste der hydrografische dienst	Staatsdrukkerij 's-Gravenhage 1949
g. Admiralty Tide Tables Volume 1, 2 and 3	Published by the hydrographer of the Navy
h. Admiralty Tidal Stream Atlas North sea, northern portion NP 252	Published by the Hydrographic Department
i. Stroomatlas Noordzee, zuidelijk deel	Chef der hydrografie 's-Gravenhage

Bijlage I: Computerprogramma in HPL voor de HP-41 CV

Het computerprogramma is geschreven in Hewlett-Packard Language (HPL) en is daarbij afgestemd voor gebruik op de programmeerbare calculator HP-41 CV zonder gebruik van verdere randapparatuur.

Het programma heeft de naam "STROOM" en bestaat uit 649 programmaregels en maakt gebruik van 90 gegevensregisters.

Uiteraard kan de programmalengte worden ingekort of vergroot al naar gelang van gebruikerseisen op het gebied van rekennauwkeurigheid en bedieningsgemak.

Deze bijlage bevat naast de programmainhoud tevens de lijst waarin staat aangegeven welke gegevens zijn opgeslagen in de geheugenregisters.

A. <u>PROGRAMMAINHOUD</u>

```
LBL STROOM
NIEUWE BER.?
AVIEW
PSE
JA=0 NEE=1
PROMPT
X=0?
GTO 00
VERANDERING:
AVIEW
PSE
PLEK/DIEPTE?
PROMPT
X=0?
GTO 08
AFST.Y/TIJD?
PROMPT
X=0?
GTO 13
GTO 17
LBL 00
CLRG
PUNTENTAL=?
PROMPT
.00001
+
STO 00
STO 37
2.1
-
X>0?
GTO 01
EIS: N=>3
AVIEW
PSE
PSE
GTO 00
LBL 01
FASETOENAME?
AVIEW
PSE
POS=1 NEG=-1
PROMPT
STO 06
30
STO 30
M2 TY
ASTO 31
S2 TY
ASTO 32
K1 TY
ASTO 33
O1 TY
ASTO 34
40
STO 40
41
STO 41
42
STO 42
43
STO 43
44
STO 44
45
STO 45
LBL 02
1
ST+ 30
10
ST+ 40
ST+ 41
ST+ 42
ST+ 43
ST+ 44
ST+ 45
0
STO 12
STO 13
STO 14
STO 15
STO 16
STO 17
STO 18
STO 19
STO 35
STO 36
RCL 00
STO 37
CLA
ARCL IND 30
AVIEW
PSE
PSE
LBL 03
1
ST+ 35
CF 28
CF 29
FIX 0
HOEK
ARCL 35
⊦=?
PROMPT
ENTER
AMPLITUDE
ARCL 35
⊦=?
PROMPT
ST+ 36
P-R
STO 10
X⇄Y
STO 11
X↑2
ST+ 14
X↑2
ST+ 19
RCL 10
X↑2
ST+ 12
X↑2
ST+ 15
RCL 10
RCL 11
*
ST+ 13
X↑2
ST+ 17
RCL 10
3
Y↑X
RCL 11
*
ST+ 16
RCL 11
3
Y↑X
RCL 10
*
ST+ 18
DSE 37
GTO 03
LBL 04
RCL 15
STO 21
RCL 16
STO 22
STO 24
RCL 17
```

```
STO 23
STO 25
STO 27
RCL 18
STO 26
STO 28
RCL 19
STO 29
XEQ 05
STO 46
RCL 12
STO 21
RCL 13
STO 22
RCL 14
STO 23
XEQ 05
STO 47
RCL 12
STO 24
RCL 13
STO 25
RCL 14
STO 26
RCL 15
STO 21
RCL 16
STO 22
RCL 17
STO 23
XEQ 05
STO 48
RCL 12
STO 27
RCL 13
STO 28
RCL 14
STO 29
RCL 16
STO 24
RCL 17
STO 25
RCL 18
STO 26
XEQ 05
STO 49
RCL 48
RCL 46
/
STO IND 41
RCL 47
RCL 46
/
STO IND 40
RCL 49
RCL 46
/
STO IND 42
-
1/X
*
ATAN
2
/
STO IND 43
ENTER
COS
X↑2
STO 38
X↑2
X⇄Y
SIN
X↑2
STO 39
X↑2
-
STO 20
RCL IND 40
RCL 38
*
RCL IND 42
RCL 39
*
-
1/X
RCL 20
*
SQRT
STO IND 44
RCL IND 40
RCL 39
*
RCL IND 42
RCL 38
*
-
1/X
RCL 20
*
CHS
SQRT
STO IND 45
X⇄Y
X>Y?
GTO 07
STO IND 45
X⇄Y
STO IND 44
RCL IND 43
90
+
STO IND 43
LBL 07
FIX 1
SF 28
BEEP
DELTA=
ARCL IND 43
AVIEW
PSE
PSE
FIX 2
A=
ARCL IND 44
AVIEW
PSE
PSE
B=
ARCL IND 45
AVIEW
PSE
PSE
RCL 84
X>0?
GTO 08
GTO 02
LBL 05
RCL 25
RCL 29
*
RCL 26
RCL 28
*
-
RCL 21
*
RCL 24
RCL 29
*
RCL 26
```

```
RCL 27
*
-
RCL 22
*
-
RCL 24
RCL 28
*
RCL 25
RCL 27
*
-
RCL 23
*
+
RTN
LBL 08
DIEPTE=?
PROMPT
STO 02
9.81
*
SQRT
STO 03
BREEDTEGR=?
PROMPT
SIN
14.54 E-05
*
STO 04
HOEK M2 = ?
PROMPT
STO 36
HOEK S2 = ?
PROMPT
STO 37
HOEK K1 = ?
PROMPT
STO 38
HOEK O1 = ?
PROMPT
STO 39
LBL 09
43
STO 43
44
STO 44
45
STO 45
46
STO 46
47
STO 47
48
STO 48
49
STO 49
35
STO 35
LBL 10
1
ST+ 35
10
ST+ 43
ST+ 44
ST+ 45
ST+ 46
ST+ 47
ST+ 48
ST+ 49
RCL IND 44
RCL IND 45
+
2
/
STO IND 46
RCL IND 44
RCL IND 45
-
2
/
STO IND 47
RCL IND 35
RCL IND 43
-
STO 34
TAN
RCL IND 44
*
RCL IND 45
/
ATAN
STO 33
COS
RCL 34
COS
*
X>0?
GTO 11
RCL IND 43
180
+
RCL 33
+
STO IND 48
RCL IND 43
180
+
RCL 33
-
STO IND 49
GTO 12
LBL 11
RCL IND 43
RCL 33
+
STO IND 48
RCL IND 43
RCL 33
-
STO IND 49
GTO 12
LBL 12
RCL 35
38.2
-
X>0?
GTO 13
GTO 10
LBL 13
Y-AFSTAND=?
PROMPT
STO 05
TIJDZONE=?
PROMPT
HR
STO 01
BEGINTIJD=?
PROMPT
HR
STO 07
EINDTIJD=?
PROMPT
HR
STO 08
TIJDSTAP=?
PROMPT
HR
STO 09
```

```
29
STO 15
30
STO 19
15
STO 23
13.9
STO 27
A M2 = ?
PROMPT
STO 14
A S2 = ?
PROMPT
STO 18
A K1 = ?
PROMPT
STO 22
A O1 = ?
PROMPT
STO 26
F1 M2 = ?
PROMPT
STO 16
CHS
F2 M2 =?
PROMPT
+
24
/
STO 17
F1 S2 = ?
PROMPT
STO 20
CHS
F2 S2 = ?
PROMPT
+
24
/
STO 21
F1 K1 = ?
PROMPT
STO 24
CHS
F2 K1 = ?
PROMPT
+
24
/
STO 25
F1 O1 = ?
PROMPT
STO 28
CHS
F2 O1 = ?
PROMPT
+
24
/
STO 29
RCL 08
RCL 07
-
RCL 09
/
1.00001
+
STO 40
RCL 07
STO 41
RCL 04
RCL 05
*
1000
*
RCL 03
/
ENTER
E↑X
STO 43
X≷Y
CHS
E↑X
STO 44
LBL 14
0
STO 33
STO 34
14
STO 10
15
STO 11
16
STO 12
17
STO 13
56
STO 46
57
STO 47
58
STO 48
59
STO 49
RCL 41
HMS
STO 30
LBL 15
RCL IND 46
RCL 44
*
RCL IND 13
RCL 41
*
RCL IND 12
+
STO 45
*
RCL IND 11
RCL 41
*
CHS
RCL IND 10
+
STO 42
RCL IND 48
+
COS
*
STO 31
RCL IND 47
RCL 43
*
RCL 45
*
RCL IND 49
RCL 42
+
COS
*
STO 32
RCL 31
+
ST+ 33
RCL 31
RCL 32
-
RCL 03
RCL 02
/
```

```
*
ST+ 34
4
ST+ 10
ST+ 11
ST+ 12
ST+ 13
10
ST+ 46
ST+ 47
ST+ 48
ST+ 49
RCL 49
98
-
X>0?
GTO 16
GTO 15
LBL 16
RCL 33
RCL 06
*
STO 33
FIX 2
TONE 6
H:
⊢
ARCL 30
⊢=
ARCL 33
AVIEW
PSE
PSE
U:
ARCL 30
⊢=
ARCL 34
AVIEW
PSE
PSE
RCL 09
ST+ 41
DSE 40
GTO 14
GTO STROOM
LBL 17
EINDE
AVIEW
END
```

B. GEHEUGENREGISTERS

00	n + 0.00001	
01	TIJDZONE	
02	DIEPTE H_o	
03	C_o	
04	f	
05	Y-AFSTAND	
06	FASEVERLOOP +1/-1	
07	BEGINTIJD	
08	EINDTIJD	
09	TIJDSTAP	
10	x	IND.OP. A
11	y	IND.OP. σ
12	Σx^2	IND.OP. F1
13	Σxy	IND.OP. q
14	Σy^2	A M2
15	Σx^4	σ M2
16	$\Sigma x^3 y$	F1 M2
17	$\Sigma x^2 . y^2$	q M2
18	$\Sigma x . y^3$	A S2
19	Σy^4	σ S2
20	-	F1 S2
21	D1	q S2
22	D2	A K1
23	D3	σ K1
24	D4	F1 K1
25	D5	q K1
26	D6	A O1
27	D7	σ O1
28	D8	F1 O1
29	D9	q O1
30	IND.OP.TY	t PLAATSELIJK
31	M2 TY	η_1
32	S2 TY	η_2
33	K1 TY	$\Sigma(\eta_1 + \eta_2)$
34	O1 TY	$\Sigma\sqrt{g/H_o}.(\eta_1 - \eta_2)$
35	TELLER	IND.OP.HOEK
36	SOM VAN H_i	HOEK M2
37	TELLER	HOEK S2
38		HOEK K1
39		HOEK O1
40	IND.OP. A	AANTAL TIJDSTAPPEN
41	IND.OP. 2B	t PLAATSELIJK
42	IND.OP. C	$A - \sigma t$
43	IND.OP. δ	$\exp(+fY/C_o)$
44	IND.OP. a	$\exp(-fY/C_o)$
45	IND.OP. b	$F1 + qt_{GMT}$
46	IND.OP. a_1	
47	IND.OP. a_2	
48	IND.OP. θ_{1i}	
49	IND.OP. θ_{2i}	

50	A	M2
51	2B	M2
52	C	M2
53	δ	M2
54	a	M2
55	b	M2
56	a_1	M2
57	a_2	M2
58	θ_{1i}	M2
59	θ_{2i}	M2
60	A	S2
61	2B	S2
62	C	S2
63	δ	S2
64	a	S2
65	b	S2
66	a_1	S2
67	a_2	S2
68	θ_{1i}	S2
69	θ_{2i}	S2
70	A	K1
71	2B	K1
72	C	K1
73	δ	K1
74	a	K1
75	b	K1
76	a_1	K1
77	a_2	K1
78	θ_{1i}	K1
79	θ_{2i}	K1
80	A	O1
81	2B	O1
82	C	O1
83	δ	O1
84	a	O1
85	b	O1
86	a_1	O1
87	a_2	O1
88	θ_{1i}	O1
89	θ_{2i}	O1