

Analytische Meetkunde II

DOOR

Dr. J. BIJL

EN

Drs. W. J. H. SALET

ZESDE DRUK



0649

DE WITGEVERS MAATSCHAPPIJ N.V. DELFT 1970

1063330 / 1886656

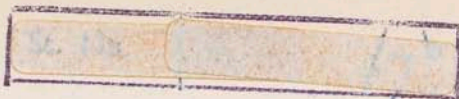
SN 498698

32

F

32343

F10a/28



ANALYTISCHE MEETKUNDE II

Bibliotheek TU Delft



C 3112272

0649

542

0

HANDLEIDINGEN BIJ HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE
HOGESCHOOL TE DELFT

ONDER REDACTIE VAN DE CENTRALE COMMISSIE VOOR STUDIEBELANGEN

ANALYTISCHE MEETKUNDE II

door

Dr. J. BIJL

en

Drs. W. J. H. SALET

Deel II

ZESDE DRUK

Technische Hogeschool
BIBLIOTHEEK
TECHNISCHE HOOGESCHOOL DELFT
Bibliotheek Biotechnologie
Van der Boerlaan 67 - 2628 BC DELFT
Tel. 015 - 78 23 50



1970

DELFTSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ N.V. - DELFT

ANALYTISCHE METEKUNDE II

Dr. J. BIJL

Dr. W. J. H. SALET

Deel II

DEEL II

Tekeningen
Gedrukt door
De Nederlandsche
Gedruksdrukkerij
van de
Koninklijke
Gedruksdrukkerij
van de
Koninklijke
Gedruksdrukkerij



DE NEDERLANDSCHE
GEDRUKSDRUKKERIJ
VAN DE
KONINKLIJKE
GEDRUKSDRUKKERIJ
VAN DE
KONINKLIJKE
GEDRUKSDRUKKERIJ

INHOUD

HOOFDSTUK XIV. Vectoren in een n-dimensionale ruimte (R_n)	9
§ 1. Vectoren in R_n	9
§ 2. Lineaire afhankelijkheid en lineaire onafhankelijkheid	10
§ 3. Lineaire vectorruimte; lineaire deelruimte	12
§ 4. Stellingen over lineaire vectorruimten	13
§ 5. Lineaire deelruimten	17
§ 6. Opgaven	21
HOOFDSTUK XV. Euclidische vectorruimten	22
§ 1. Euclidische vectorruimte	22
§ 2. Orthogonale en orthonormale stelsels vectoren in een euclidische vectorruimte	24
§ 3. Orthogonaal-complementaire deelruimten	28
§ 4. Opgaven	29
HOOFDSTUK XVI. Lineaire vergelijkingen	31
§ 1. Niet-homogene lineaire vergelijkingen	31
§ 2. Het bepalen van de rang van een matrix	34
§ 3. Het oplossen van niet-homogene lineaire vergelijkingen	39
§ 4. Homogene lineaire vergelijkingen	42
§ 5. Verband tussen de oplossingen van een stelsel niet-homogene lineaire vergelijkingen en van het daarbij behorende stelsel homogene lineaire vergelijkingen	47
§ 6. Opgaven	47
HOOFDSTUK XVII. Determinanten	50
§ 1. Determinanten van de n^{de} orde	50
§ 2. Eigenschappen van determinanten	51
§ 3. Regel van Cramer	57
§ 4. Produkt van twee determinanten	59
§ 5. Toepassingen	60

§ 6.	Opgaven	62
	HOOFDSTUK XVIII. Lineaire transformaties	65
§ 1.	Vectortransformaties	65
§ 2.	Lineaire vectortransformaties	66
§ 3.	Transformatiematrix	67
§ 4.	Beeldruimte en kern van een lineaire transformatie	69
§ 5.	Lineaire transformaties in affiene en euclidische ruimten	70
§ 6.	Toepassingen	71
§ 7.	Opgaven	74
§ 8.	Optelling van matrices; vermenigvuldiging van een matrix met een scalair	76
§ 9.	Vermenigvuldiging van matrices	77
§ 10.	Getransponeerde matrix; symmetrische matrix; nulmatrix	82
§ 11.	Inverse transformatie	83
§ 12.	Rang van een produktmatrix	86
§ 13.	Basistransformatie	88
§ 14.	Invloed van een basistransformatie op de matrix van een lineaire transformatie	89
§ 15.	Orthogonale transformatie	90
§ 16.	Orthonormale basistransformatie	95
§ 17.	Opgaven	96
	HOOFDSTUK XIX. Eigenwaarden en eigenvectoren van een lineaire transformatie	101
§ 1.	Eigenwaarden en eigenvectoren	101
§ 2.	Eigenschappen van eigenvectoren en eigenwaarden	103
§ 3.	Toepassingen	106
§ 4.	Eigenwaarden en eigenvectoren van symmetrische matrices	109
§ 5.	Opgaven	113
	HOOFDSTUK XX. Klassificatie van kwadratische oppervlakken in E_3	117
§ 1.	Herleiding van homogene kwadratische polynomen in x, y en z	117
§ 2.	Toepassingen	118
§ 3.	Klassificatie van kwadratische oppervlakken in E_3	120
§ 4.	Toepassingen	122
§ 5.	Opgaven	126

HOOFDSTUK XXI. Affiene transformaties en bewegingen	130
§ 1. Affiene transformaties	130
§ 2. Bewegingen	133
§ 3. Eigenlijke bewegingen	134
§ 4. Oneigenlijke bewegingen	135
§ 5. Opgaven	137
REGISTER	140

HOOFDSTUK XII. Aardrijkskunde en bewoning

121	1. Aardrijkskunde	1
122	2. Bewoning	2
123	3. Economische bewoning	3
124	4. Geografische bewoning	4
125	5. Overeenkomst	5
126	6. Aardrijkskunde	6
127	7. Bewoning	7
128	8. Economische bewoning	8
129	9. Geografische bewoning	9
130	10. Overeenkomst	10
131	11. Aardrijkskunde	11
132	12. Bewoning	12
133	13. Economische bewoning	13
134	14. Geografische bewoning	14
135	15. Overeenkomst	15
136	16. Aardrijkskunde	16
137	17. Bewoning	17
138	18. Economische bewoning	18
139	19. Geografische bewoning	19
140	20. Overeenkomst	20

HOOFDSTUK XIII. Aardrijkskunde en bewoning van de Indische Archipel

141	1. Aardrijkskunde	1
142	2. Bewoning	2
143	3. Economische bewoning	3
144	4. Geografische bewoning	4
145	5. Overeenkomst	5

HOOFDSTUK XIV. Aardrijkskunde en bewoning van de Indische Archipel

146	1. Aardrijkskunde	1
147	2. Bewoning	2
148	3. Economische bewoning	3
149	4. Geografische bewoning	4
150	5. Overeenkomst	5

HOOFDSTUK XIV

VECTOREN IN EEN n -DIMENSIONALE RUIMTE (R_n).

§ 1. Vectoren in R_n .

In R_2 wordt een vector aangegeven door twee kentallen, in R_3 door drie kentallen. Zo is $\underline{a} = (a_1, a_2)$ een vector in R_2 en $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ een vector in R_3 . Op analoge wijze noemen we een geordend rijtje van n getallen, waarbij het natuurlijke getal n vast is, een vector in een n -dimensionale ruimte R_n ; dus

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

is een vector in R_n . De getallen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ heten weer de *kentallen* van de vector \underline{a} . De nulvector is:

$$\underline{0} = (0, 0, 0, \dots, 0), \quad (n \text{ getallen } 0).$$

Op vectoren in R_n passen we twee bewerkingen toe, nl. *optelling van vectoren* en *vermenigvuldiging van een vector met een (scalair) getal*.

We definiëren deze bewerkingen als volgt:

Zijn $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ twee vectoren in R_n ,

dan is:

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n). \\ \lambda \underline{a} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n). \end{aligned}$$

De som $\underline{a} + \underline{b}$ en $\lambda \underline{a}$ zijn weer vectoren in R_n .

Gewoonlijk schrijven we $-1 \cdot \underline{a}$ als $-\underline{a}$.

Voor de vectoren en de bewerkingen van vectoren in R_n gelden de volgende **eigenschappen**:

1. $\underline{a} = \underline{b}$ dan en slechts dan, als $a_k = b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$, (commutatieve eigenschap).

3. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$, (associatieve eigenschap).

Hieruit volgt, dat we mogen schrijven: $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$.

4. Aan elk tweetal vectoren \underline{a} en \underline{b} in R_n is één en slechts één vector \underline{x} in R_n toegevoegd met de eigenschap:

$$\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}.$$

We schrijven meestal: $\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$ en noemen \underline{x} het *verschil* van \underline{b} en \underline{a} .

Is $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, dan is:

$$\underline{b} - \underline{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n).$$

5. Voor de scalaire vermenigvuldiging geldt:

- 1°. $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$, (distributieve eigenschap),
 2°. $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$, (distributieve eigenschap),
 3°. $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$, (associatieve eigenschap).

Opmerkingen.

1. In plaats van: \underline{a} is een vector in R_n , wordt wel geschreven: $\underline{a} \in R_n$.
 2. De vectoren $\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ heten de *eenheidsvectoren* in R_n .
 3. Uit het bovenstaande volgt, dat we voor $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ kunnen schrijven:

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n.$$

Verder is:

$$\begin{aligned} \underline{a} + (-\underline{a}) &= \underline{0}, \quad \text{dus} \quad \underline{a} = \underline{0} - (-\underline{a}) = -(-\underline{a}); \\ -(\underline{a} + \underline{b}) &= (-\underline{a}) + (-\underline{b}); \quad \underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} - \underline{b}. \end{aligned}$$

§ 2. Lineaire afhankelijkheid en lineaire onafhankelijkheid.

Gegeven zijn p vectoren in R_n : $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots$ en \underline{a}_p .

Definitie.

Een vector $\underline{b} \in R_n$ is lineair afhankelijk van deze p vectoren, als er p getallen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$, bestaan, zó dat:

$$\underline{b} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p.$$

Hierin mogen enkele getallen λ of alle getallen λ nul zijn.

Voorbeelden.

1. De vector $(-8, 7, 0, -3)$ is lineair afhankelijk van de vectoren $(1, 0, 2, 1)$, $(2, -1, 0, -1)$ en $(-1, 1, -1, -2)$. Immers:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. De nulvector in R_n is lineair afhankelijk van elk p -tal vectoren in R_n , immers:

$$\underline{0} = 0 \cdot \underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 + 0 \cdot \underline{a}_3 + \dots + 0 \cdot \underline{a}_p.$$

3. Elke vector $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ is lineair afhankelijk van de n eenheidsvectoren in R_n , immers (zie § 1): $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 + \dots + a_n \underline{e}_n$.

De betrekking:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p = \underline{0} \quad (1)$$

tussen de vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$ is in elk geval juist, als alle getallen λ nul zijn. Er zijn twee mogelijkheden:

1°. Betrekking (1) is **alleen** juist als $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_p = 0$; we noemen dan $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$ een *lineair-onafhankelijk stelsel*, of we zeggen dat deze vectoren *lineair onafhankelijk* zijn.

2°. Betrekking (1) geldt ook, als niet alle λ 's nul zijn; we noemen dan $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$ een *lineair-afhankelijk stelsel*, of we zeggen dat deze vectoren *lineair afhankelijk* zijn.

Gevolgen.

1. Vormen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$ een lineair-afhankelijk stelsel, dan is minstens één van deze vectoren lineair afhankelijk van de overige. Immers in

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \dots + \lambda_p \underline{a}_p = \underline{0}$$

zijn niet alle λ 's nul; stel bijv. $\lambda_k \neq 0$, dan is:

$$\underline{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \underline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \underline{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_k} \underline{a}_p.$$

De vector \underline{a}_k is dus lineair afhankelijk van de overige vectoren.

2. Is omgekeerd de vector \underline{a} lineair afhankelijk van de vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$, dan vormen de vectoren $\underline{a}, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ een lineair-afhankelijk stelsel. Uit

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p$$

volgt immers:

$$1 \cdot \underline{a} - \lambda_1 \underline{a}_1 - \lambda_2 \underline{a}_2 - \dots - \lambda_p \underline{a}_p = \underline{0}.$$

In deze betrekking is de eerste coëfficiënt gelijk aan 1, zodat niet alle coëfficiënten nul zijn.

3. Als onder enige vectoren de nulvector voorkomt, dan vormen deze vectoren een lineair-afhankelijk stelsel. We kunnen immers in de betrekking (1) de coëfficiënt van de nulvector ongelijk aan nul en, zo nodig, alle andere coëfficiënten gelijk aan nul nemen.

Voorbeelden.

1. De vectoren in R_4 :

$\underline{a}_1 = (0, 1, 2, -1)$, $\underline{a}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\underline{a}_3 = (0, 1, 0, -1)$ en $\underline{a}_4 = (0, 1, -4, -1)$ vormen een lineair-afhankelijk stelsel, want:

$$2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

of:

$$2\underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 - 3\underline{a}_3 + 1 \cdot \underline{a}_4 = \underline{0}.$$

Nu is \underline{a}_1 wel lineair afhankelijk van $\underline{a}_2, \underline{a}_3$ en \underline{a}_4 , maar \underline{a}_2 is niet lineair afhankelijk van $\underline{a}_1, \underline{a}_3$ en \underline{a}_4 . We noemen \underline{a}_2 *lineair onafhankelijk* van de overige vectoren.

2. De n eenheidsvectoren in R_n vormen een lineair-onafhankelijk stelsel. Uit

$$\lambda_1(1, 0, 0, \dots, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n(0, 0, \dots, 1) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

volgt:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0), \text{ dus is: } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

3. Hoewel men bij lineaire afhankelijkheid en lineaire onafhankelijkheid meestal denkt aan twee of meer factoren, zeggen we krachtens de definitie:

De nulvector is „lineair afhankelijk”, omdat $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ geldt voor elke $\lambda \neq 0$; elke vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ is „lineair onafhankelijk”, omdat $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ alleen geldt voor $\lambda = 0$.

§ 3. Lineaire vectorruimte; lineaire deelruimte.

Definitie.

Een lineaire vectorruimte V is een verzameling vectoren in R_n met de volgende twee eigenschappen:

1°. Behoren \underline{v} en \underline{w} tot V , dan behoort ook $\underline{v} + \underline{w}$ tot V .

2°. Behoort \underline{v} tot V , dan behoort voor elk getal λ ook $\lambda \underline{v}$ tot V .

Zijn \underline{v} en \underline{w} vectoren van een lineaire vectorruimte V , dan volgt uit bovenstaande definitie dat elke vector van de gedaante $\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ ook tot V behoort. In het bijzonder behoort $0 \cdot \underline{v} = \mathbf{0}$ tot V .

De verzameling van alle vectoren van R_n vormen een lineaire vectorruimte. Immers als \underline{v} en \underline{w} tot R_n behoren, dan behoren ook $\underline{v} + \underline{w}$ en $\lambda \underline{v}$ tot R_n . We noemen de verzameling van alle vectoren van R_n de lineaire vectorruimte R_n , kortweg aangeduid met R_n .

Niet elke verzameling vectoren in R_n vormt een lineaire vectorruimte. Zijn bijv. $\underline{a} (\neq \mathbf{0})$ en \underline{b} twee vectoren in R_n , dan is de verzameling:

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{b}$$

geen lineaire vectorruimte. Immers, als $\underline{v} = \underline{a} + \lambda_1 \underline{b}$ en $\underline{w} = \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}$ tot de verzameling behoren, dan behoort $\underline{v} + \underline{w} = 2\underline{a} + (\lambda_1 + \lambda_2)\underline{b}$ niet tot de verzameling.

Een verzameling vectoren in R_n die niet alle vectoren van R_n hoeft te bevatten, kan weer een lineaire vectorruimte vormen; deze vectoren vormen dan een lineaire deelruimte van R_n . In het bijzonder kunnen we R_n als een lineaire deelruimte van zichzelf beschouwen.

Stelling.

De verzameling D van alle vectoren die lineair afhankelijk zijn van een p -tal vectoren

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$$

in R_n , vormen een lineaire deelruimte van R_n .

Bewijs.

Zijn \underline{v} en \underline{w} twee vectoren van D , dan is:

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p$$

en

$$\underline{w} = \mu_1 \underline{a}_1 + \mu_2 \underline{a}_2 + \dots + \mu_p \underline{a}_p.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{v} + \underline{w} = (\lambda_1 + \mu_1) \underline{a}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \underline{a}_2 + \dots + (\lambda_p + \mu_p) \underline{a}_p$$

en

$$\lambda \underline{v} = \lambda \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda \lambda_p \underline{a}_p,$$

zodat $\underline{v} + \underline{w}$ en $\lambda \underline{v}$ ook tot D behoren.

D is dus een lineaire vectorruimte en wel een lineaire deelruimte van R_n .

Dat D een lineaire deelruimte is van R_n wordt aangegeven met $D \subset R_n$ of met $R_n \supset D$ (R_n omvat D).

We zeggen, dat bovenstaande lineaire deelruimte D door het p -tal vectoren:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p \tag{1}$$

wordt *opgespannen*.

Het stelsel (1) van p vectoren noemen we een *basis* van D . Vormen deze p vectoren een lineair-afhankelijk stelsel, dan spreken we van een *lineair-afhankelijke basis*; vormen de p vectoren een lineair-onafhankelijk stelsel, dan heeft men een *lineair-onafhankelijke basis*.

De lineaire vectorruimte R_n wordt opgespannen door de n eenheidsvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$. Deze n eenheidsvectoren vormen een lineair-onafhankelijke basis van R_n .

De verzameling die alleen de nulvector \underline{o} bevat, is een lineaire vectorruimte; we noemen deze de *nulruimte*. Is \underline{o} de nulvector van R_n , dan is de nulruimte een lineaire deelruimte van R_n .

Opmerking.

Uit bovenstaande stelling volgt, dat elke R_n met $n \geq 1$ (d.w.z. R_n is niet de nulruimte) een lineaire deelruimte heeft die niet R_n zelf is. Daar elke lineaire deelruimte van R_n een lineaire vectorruimte is, zijn er behalve de lineaire vectorruimten R_n nog oneindig veel andere lineaire vectorruimten.

§ 4. Stellingen over lineaire vectorruimten.**Stelling 1.**

Als van een lineaire vectorruimte V

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p \tag{1}$$

een basis is en

$$\underline{b} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \dots + \lambda_p \underline{a}_p \tag{2}$$

met $\lambda_k \neq 0$, dan is ook

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{k-1}, \underline{b}, \underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_p \quad (3)$$

een basis van V .

Bewijs.

Daar $\lambda_k \neq 0$, volgt uit (2):

$$\underline{a}_k = \frac{1}{\lambda_k} \underline{b} - \frac{1}{\lambda_k} (\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \underline{a}_{k-1} + \lambda_{k+1} \underline{a}_{k+1} + \dots + \lambda_p \underline{a}_p) \quad (4)$$

Is \underline{x} een willekeurige vector van V , dan is, omdat (1) een basis is van V :

$$\underline{x} = \mu_1 \underline{a}_1 + \mu_2 \underline{a}_2 + \dots + \mu_k \underline{a}_k + \dots + \mu_p \underline{a}_p.$$

Substitueren we hierin voor \underline{a}_k het rechterlid van (4), dan blijkt dat elke vector $\underline{x} \in V$ lineair afhankelijk is van de vectoren (3). Is omgekeerd \underline{x} lineair onafhankelijk van $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{k-1}, \underline{b}, \underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_p$, dan is $\underline{x} \in V$. Hiermede is bewezen dat het stelsel (3) ook een basis is van V .

Stelling 2. (Uitwisselingsstelling van Grassmann-Steinitz.)

Als van een lineaire vectorruimte V

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$$

een basis is en

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_q$$

een lineair-onafhankelijk stelsel vectoren is, dan is $q \leq p$ en dan heeft V een basis bestaande uit de vectoren $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_q$ en nog $p - q$ geschikt gekozen vectoren van $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$.

Bewijs.

Daar de vectoren $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_q$ een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, is geen van deze vectoren gelijk aan $\underline{0}$.

Daar $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$ een basis is, is:

$$\underline{b}_1 = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p.$$

Uit $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$ volgt, dat niet alle λ 's gelijk aan nul zijn. Stel $\lambda_1 \neq 0$, dan is volgens stelling 1:

$$\underline{b}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$$

ook een basis van V .

Hieruit volgt:

$$\underline{b}_2 = \mu_1 \underline{b}_1 + \mu_2 \underline{a}_2 + \mu_3 \underline{a}_3 + \dots + \mu_p \underline{a}_p.$$

Daar $\underline{b}_2 \neq \underline{0}$ en $\underline{b}_2 \neq \mu_1 \underline{b}_1$, zijn de coëfficiënten $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p$ niet alle gelijk aan nul. Stel $\mu_2 \neq 0$, dan is volgens stelling 1:

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$$

ook een basis van V .

Op deze wijze kunnen we telkens één van de vectoren \underline{a} uitwisselen tegen één van de vectoren \underline{b} . Was nu $q > p$, dan zou

b_1, b_2, \dots, b_p

een basis zijn van V , dus dan zouden de vectoren $b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_q$ hiervan lineair afhankelijk zijn. Daar dit volgens het gegeven niet mogelijk is, is $q \leq p$. Met behulp van de uitwisseling vinden we dus, dat V een basis heeft bestaande uit alle vectoren b en nog $p - q$ geschikt gekozen vectoren a .

Stelling 3.

Als van een lineaire vectorruimte een lineair-afhankelijke basis gegeven is, dan kan men van die basis een lineair-onafhankelijke basis maken door een aantal basisvectoren weg te laten.

Bewijs.

Stel $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$ is een lineair-afhankelijke basis van de lineaire vectorruimte V en a_1 is afhankelijk van de overige basisvectoren, dan is:

$$a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_p a_p. \quad (1)$$

Voor elke vector $x \in V$ geldt:

$$x = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_p a_p.$$

Substitueren we hierin voor a_1 het rechterlid van (1), dan vinden we:

$$x = (\mu_1 \lambda_2 + \mu_2) a_2 + (\mu_1 \lambda_3 + \mu_3) a_3 + \dots + (\mu_1 \lambda_p + \mu_p) a_p.$$

Elke vector $x \in V$ is dus lineair afhankelijk van a_2, a_3, \dots, a_p , waaruit volgt dat deze vectoren ook een basis vormen.

Als dus a_1 lineair afhankelijk is van de overige vectoren a , dan kunnen we a_1 uit de basis weglaten. Is a_1 lineair onafhankelijk van de overige vectoren a , dan laten we a_1 in de basis staan. Op dezelfde wijze beslissen we of we a_2 weglaten of dat a_2 blijft staan. Op deze wijze gaan we door. Tenslotte houden we een lineair-onafhankelijke basis over.

Stelling 4.

In een lineaire vectorruimte R_n ($n \geq 1$) vormt elk p -tal vectoren met $p > n$ een lineair-afhankelijk stelsel.

Bewijs.

In de lineaire vectorruimte R_n vormen de n eenheidsvectoren $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ een (lineair-onafhankelijke) basis. Zijn p vectoren in R_n lineair onafhankelijk, dan is $p \leq n$ (stelling 2). Als $p > n$, dan vormen deze p vectoren dus een lineair-afhankelijk stelsel.

Heeft een lineaire vectorruimte V meerdere lineair-onafhankelijke basissen, dan geldt de volgende stelling.

Stelling 5.

Het aantal vectoren van een lineair-onafhankelijke basis van een lineaire vector-

ruimte V is onafhankelijk van de keuze van de basis.

Bewijs.

Stel dat:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p \quad (1)$$

zowel als:

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_q \quad (2)$$

een lineair-onafhankelijke basis is van V .

Nu is (1) een basis van V , terwijl (2) een stel lineair-onafhankelijke vectoren van V is. Volgens stelling 2 is dan $q \leq p$.

Omgekeerd is (2) een basis van V , terwijl (1) een stel lineair-onafhankelijke vectoren van V is; dus $p \leq q$. Hieruit volgt: $p = q$.

Definitie.

*Het aantal vectoren van een lineair-onafhankelijke basis van een lineaire vectorruimte V heet de **dimensie** van V .*

Is de dimensie van V gelijk aan m ($m \geq 1$), dan heet V *m-dimensionaal*; we geven dit aan met V_m . De dimensie van R_n is n , immers R_n heeft een lineair-onafhankelijke basis bestaande uit de n eenheidsvectoren. We zeggen dat de nulruimte de dimensie 0 heeft.

Opmerkingen.

Uit het voorgaande volgt onmiddellijk:

1. Is $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ een basis van een m -dimensionale vectorruimte V_m , dan is deze basis een lineair-onafhankelijke basis.
2. In een m -dimensionale vectorruimte V_m vormt elk m -tal lineair-onafhankelijke vectoren een lineair-onafhankelijke basis.

Stelling 6.

Elke vector van een lineaire vectorruimte is op één en slechts één manier te schrijven als een lineaire combinatie van de vectoren van een lineair-onafhankelijke basis.

Bewijs.

Stel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ is een lineair-onafhankelijke basis van V_m en stel dat $\underline{x} \in V_m$ op twee manieren in deze basis lineair is uit te drukken; dus:

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_m \underline{a}_m$$

en

$$\underline{x} = \mu_1 \underline{a}_1 + \mu_2 \underline{a}_2 + \dots + \mu_m \underline{a}_m,$$

dan is:

$$\underline{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \underline{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \underline{a}_2 + \dots + (\lambda_m - \mu_m) \underline{a}_m.$$

Daar $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ een lineair-onafhankelijke basis is, is

$$\lambda_k = \mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

§ 5. Lineaire deelruimten.

In § 3 zagen we, dat in R_n een verzameling vectoren kan voorkomen die niet alle vectoren van R_n hoeft te bevatten en die weer een lineaire vectorruimte vormt; we noemden deze verzameling een *lineaire deelruimte* van R_n . In het bijzonder konden we elke lineaire vectorruimte R_n als een lineaire deelruimte van zichzelf beschouwen.

Van lineaire deelruimten behandelen we de volgende stellingen:

Stelling 1.

Elke lineaire deelruimte D van R_n (D is niet de nulruimte) heeft een lineair-onafhankelijke basis bestaande uit m vectoren met $1 \leq m \leq n$.

Bewijs.

Alle vectoren van D zijn ook vectoren van R_n . Zou D meer dan n lineair-onafhankelijke vectoren bevatten, dan zou ook R_n meer dan n lineair-onafhankelijke vectoren bevatten. Dit is onmogelijk volgens § 4, stelling 4. Hieruit volgt: $m \leq n$.

Daar D niet de nulruimte is, bevat D minstens één vector $\underline{a} \neq \mathbf{0}$.

Deze \underline{a} is „lineair-onafhankelijk”. D heeft dus minstens één en hoogstens n lineair onafhankelijke vectoren.

Er bestaat dus een getal m met $1 \leq m \leq n$, zó dat maximaal m vectoren van D lineair onafhankelijk zijn.

Stel dat

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m \tag{1}$$

een stel lineair onafhankelijke vectoren van D is. Is \underline{b} een willekeurige vector van D , dan is $\underline{b}, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ een stel lineair afhankelijke vectoren van D . De betrekking:

$$\lambda \underline{b} + \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_m \underline{a}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

is dus juist voor niet elke λ gelijk aan nul. Maar voor $\lambda = 0$ geldt betrekking (2) slechts voor elke $\lambda_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Betrekking (2) is dus juist voor $\lambda \neq 0$. Hieruit volgt dat elke vector $\underline{b} \in D$ lineair afhankelijk is van het stelsel (1). Dit stelsel vectoren is dus inderdaad een lineair-onafhankelijke basis van D . De dimensie van D is dus m met $1 \leq m \leq n$.

Opmerking.

Uit stelling 1 volgt, dat elke lineaire deelruimte D van R_n die niet de nulruimte is, minstens één lineair-onafhankelijke basis heeft. Volgens de uitwisselings-

stelling van Grassman-Steinitz heeft D dan ook oneindig veel lineair-onafhankelijke basissen. Volgens stelling 5 van § 4 is het aantal vectoren van deze basissen dezelfde. In het bijzonder heeft R_n ($n \geq 1$) oneindig veel lineair-onafhankelijke basissen.

De nulruimte heeft slechts één basis, n.l. de vector \mathfrak{o} ; daar \mathfrak{o} lineair-afhankelijk is, is deze basis een lineair-afhankelijke basis van de nulruimte.

Stelling 2.

Is D_m een lineaire deelruimte van een lineaire vectorruimte R_n , dan kan een lineair-onafhankelijke basis van D_m aangevuld worden tot een lineair-onafhankelijke basis van R_n .

Bewijs.

Zij $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ een lineair-onafhankelijke basis van D_m en $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ een lineair-onafhankelijke basis van R_n .

Is D_0 de nulruimte, dan is de basis van D_0 de vector \mathfrak{o} en dan is de stelling vanzelfsprekend.

Is D_m niet de nulruimte, dan is $1 \leq m \leq n$. Daar de vectoren \underline{a} een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, heeft R_n volgens de uitwisselingsstelling een basis bestaande uit alle m vectoren \underline{a} en nog $n - m$ geschikt gekozen vectoren \underline{b} . Daar deze basis van R_n uit n vectoren bestaat, is het een lineair-onafhankelijke basis.

Definitie.

De **doorsnede** van twee lineaire deelruimten D_p en D_q van R_n is de verzameling vectoren die zowel tot D_p als tot D_q behoren.

De doorsnede van D_p en D_q geven we aan met $D_p \cap D_q$.

Daar $\mathfrak{o} \in D_p$ en $\mathfrak{o} \in D_q$, behoort de nulvector ook tot $D_p \cap D_q$.

Stelling 3.

De **doorsnede** van twee lineaire deelruimten D_p en D_q van R_n is een lineaire deelruimte van D_p en van D_q , dus ook van R_n .

Bewijs.

We moeten aantonen dat, als de vectoren \underline{x} en \underline{y} tot $D_p \cap D_q$ behoren, dit ook het geval is met $\underline{x} + \underline{y}$ en $\lambda \underline{x}$.

Als \underline{x} en \underline{y} tot $D_p \cap D_q$ behoren, dan $\underline{x} \in D_p$ en $\underline{y} \in D_p$, dus $(\underline{x} + \underline{y}) \in D_p$ want D_p is een lineaire vectorruimte. Maar ook $\underline{x} \in D_q$, en $\underline{y} \in D_q$ dus $(\underline{x} + \underline{y}) \in D_q$. Hieruit volgt dat $\underline{x} + \underline{y}$ tot $D_p \cap D_q$ behoort.

Zo kunnen we ook aantonen, dat $\lambda \underline{x}$ behoort tot $D_p \cap D_q$.

Opmerking.

Uit de definitie van $D_p \cap D_q$ volgt:

$$\dim(D_p \cap D_q) \leq \dim D_p \quad \text{en} \quad \dim(D_p \cap D_q) \leq \dim D_q.$$

Definitie.

De verbinding, of directe som, van twee lineaire deelruimten D_p en D_q van R_n is de verzameling vectoren $\underline{x} + \underline{y}$, waarbij $\underline{x} \in D_p$ en $\underline{y} \in D_q$.

De verbinding van D_p en D_q geven we aan met $D_p + D_q$.

Merk op, dat elke vector van $D_p + D_q$ ook een vector is van R_n .

Stelling 4.

De verbinding van twee lineaire deelruimten D_p en D_q van R_n is een lineaire deelruimte van R_n .

Bewijs.

We moeten aantonen dat, als $\underline{x}_1 + \underline{y}_1$ en $\underline{x}_2 + \underline{y}_2$ tot $D_p + D_q$ behoren, (waarbij \underline{x}_1 en $\underline{x}_2 \in D_p$, \underline{y}_1 en $\underline{y}_2 \in D_q$), dit ook het geval is met $(\underline{x}_1 + \underline{y}_1) + (\underline{x}_2 + \underline{y}_2)$ en met $\lambda(\underline{x}_1 + \underline{y}_1)$.

Daar $\underline{x}_1 \in D_p$ en $\underline{x}_2 \in D_p$, is ook $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in D_p$; en daar $\underline{y}_1 \in D_q$ en $\underline{y}_2 \in D_q$, is ook $\underline{y}_1 + \underline{y}_2 \in D_q$. Hieruit volgt dat $(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) + (\underline{y}_1 + \underline{y}_2)$ behoort tot $D_p + D_q$. Verder is:

$$(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) + (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = (\underline{x}_1 + \underline{y}_1) + (\underline{x}_2 + \underline{y}_2),$$

waarmede is aangetoond dat $(\underline{x}_1 + \underline{y}_1) + (\underline{x}_2 + \underline{y}_2)$ behoort tot $D_p + D_q$.

Met behulp van:

$$\lambda \underline{x}_1 + \lambda \underline{y}_1 = \lambda(\underline{x}_1 + \underline{y}_1)$$

kunnen we aantonen dat ook $\lambda(\underline{x}_1 + \underline{y}_1)$ tot $D_p + D_q$ behoort.

$D_p + D_q$ is dus een lineaire vectorruimte; daar alle genoemde vectoren tot R_n behoren, is $D_p + D_q$ een lineaire deelruimte van R_n .

Stelling 5.

Zijn D_p en D_q twee lineaire deelruimten van R_n , dan is:

$$\dim(D_p + D_q) = \dim D_p + \dim D_q - \dim(D_p \cap D_q).$$

Bewijs.

De stelling is juist als D_p en/of D_q de nulruimte is. Stel nl. dat D_q de nulruimte is, dan is $D_p + D_q = D_p$, $\dim D_q = 0$ en dan is $D_p \cap D_q$ ook de nulruimte, dus $\dim(D_p \cap D_q) = 0$. De stelling luidt dan: $\dim D_p = \dim D_p$.

We nemen nu aan, dat D_p noch D_q de nulruimte is; $\dim D_p = p$, $\dim D_q = q$ en $\dim(D_p \cap D_q) = m$.

We kiezen een lineair-onafhankelijke basis van $D_p \cap D_q$, nl.:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m. \quad (1)$$

We vullen deze basis aan (zie stelling 2) tot een lineair-onafhankelijke basis van D_p :

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m, \quad \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{p-m}. \quad (2)$$

Ook vullen we basis (1) aan tot een lineair-onafhankelijke basis van D_q :

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m, \quad \underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_{q-m}. \quad (3)$$

Uit de definitie van $D_p + D_q$ volgt:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m, \quad \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{p-m}, \quad \underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_{q-m} \quad (4)$$

is een basis van $D_p + D_q$. Het aantal vectoren van deze basis is $p + q - m$. We bewijzen nu, dat basis (4) een lineair-onafhankelijke basis is, dus dat $\dim. (D_p + D_q) = p + q - m$.

We beschouwen de betrekking:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \underline{a}_k + \sum_{k=1}^{p-m} \mu_k \underline{b}_k + \sum_{k=1}^{q-m} \nu_k \underline{c}_k = \underline{0} \quad (5)$$

of:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \underline{a}_k + \sum_{k=1}^{p-m} \mu_k \underline{b}_k = - \sum_{k=1}^{q-m} \nu_k \underline{c}_k = \underline{x}.$$

Uit het eerste lid volgt: $\underline{x} \in D_p$ en uit het tweede lid volgt: $\underline{x} \in D_q$, dus \underline{x} behoort tot $D_p \cap D_q$.

Daar (1) een basis is van $D_p \cap D_q$ is

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^m \lambda'_k \underline{a}_k$$

en

$$\underline{x} = - \sum_{k=1}^{q-m} \nu_k \underline{c}_k,$$

waaruit volgt:

$$\sum_{k=1}^m \lambda'_k \underline{a}_k + \sum_{k=1}^{q-m} \nu_k \underline{c}_k = \underline{0}. \quad (6)$$

Het stelsel (3) is lineair-onafhankelijk; betrekking (6) is dus slechts juist voor $\nu_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, q - m$). Betrekking (5) wordt nu:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \underline{a}_k + \sum_{k=1}^{p-m} \mu_k \underline{b}_k = \underline{0}.$$

Daar stelsel (2) eveneens lineair-onafhankelijk is, is betrekking (5) slechts juist voor $\lambda_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) en $\mu_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p - m$).

Hiermede is aangetoond, dat de basis (4) van $D_p + D_q$ lineair-onafhankelijk is, waaruit volgt:

$$\dim. (D_p + D_q) = p + q - m.$$

We kunnen de stelling ook zo formuleren:

$$\dim. (D_p \cap D_q) + \dim. (D_p + D_q) = \dim. D_p + \dim. D_q.$$

§ 6. Opgaven.

1. Bewijs dat \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} dan en slechts dan een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, als $\underline{a} + 2\underline{b}$, $\underline{b} + 3\underline{c}$ en \underline{c} een lineair-onafhankelijk stelsel vormen.

2. Van een lineaire vectorruimte vormen \underline{a} , $2\underline{a} - \underline{b}$ en $\underline{b} + 2\underline{c}$ een basis. Bepaal de dimensie van deze lineaire vectorruimte:

1°. als \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} een lineair-onafhankelijk stelsel vormen;

2°. als \underline{a} lineair afhankelijk is van \underline{b} en \underline{c} , terwijl \underline{b} en \underline{c} een lineair-onafhankelijk stelsel vormen.

3. Toon aan dat de vectoren $(0, 1, 2, 3)$, $(3, 0, 1, 2)$, $(2, 3, 0, 1)$ en $(1, 2, 3, 0)$ een lineair-onafhankelijk stelsel vormen.

4. Van de vectoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ in R_4 voldoen de kentallen aan de vergelijkingen:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0.$$

Bepaal een lineair-onafhankelijke basis en de dimensie van de lineaire deelruimte die door deze vectoren wordt opgespannen.

Antw.: $(2, 1, 0, 0)$ en $(1, 0, 1, 0)$; 2.

5. Van de vectoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ in R_5 voldoen de kentallen aan de vergelijkingen:

$$x_1 - 2x_3 - x_5 = x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0.$$

Bepaal een lineair-onafhankelijke basis en de dimensie van de lineaire deelruimte die door deze vectoren wordt opgespannen.

Antw.: $(2, -3, 1, 0, 0)$, $(0, 2, 0, 1, 0)$ en $(1, 0, 0, 0, 1)$; 3.

6. D_1 en D_2 zijn twee lineaire deelruimten van R_n en $D_1 + D_2 = R_n$.

Te bewijzen: $\dim. D_1 + \dim. D_2 \geq n$.

7. D_1 en D_2 zijn twee lineaire deelruimten van R_n . De verzameling van alle vectoren die tot D_1 of tot D_2 of tot $D_1 \cap D_2$ behoren, heet de *vereniging* van D_1 en D_2 . De vereniging van D_1 en D_2 wordt aangegeven met $D_1 \cup D_2$.

Toon aan dat $D_1 \cup D_2$ in het algemeen geen lineaire vectorruimte is.

EUCLIDISCHE VECTORRUIMTEN

§ 1. Euclidische vectorruimte.

Van twee vectoren \underline{a} en \underline{b} in een lineaire vectorruimte definiëren we een inwendig produkt:

Definitie.

Onder een inwendig produkt $(\underline{a}, \underline{b})$ van de vectoren \underline{a} en \underline{b} verstaan we een scalair getal dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

1°. $(\underline{a}, \underline{a}) \geq 0$ (het gelijktteken geldt slechts voor $\underline{a} = \underline{0}$);

2°. $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$;

3°. $\lambda(\underline{a}, \underline{b}) = (\lambda\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a}, \lambda\underline{b})$;

4°. $(\underline{a}, \underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$.

Uit 3°. volgt: $(\underline{a}, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{a}) = (0 \cdot \underline{a}, \underline{a}) = 0 \cdot (\underline{a}, \underline{a}) = 0$.

Een lineaire vectorruimte waarin voor elk tweetal vectoren een dergelijk inwendig produkt gedefinieerd is, heet een *euclidische vectorruimte*.

Ongelijkheid van Schwartz.

Zijn \underline{a} en \underline{b} twee vectoren in een euclidische vectorruimte, dan is:

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq (\underline{a}, \underline{a}) \cdot (\underline{b}, \underline{b}). \quad (1)$$

Bewijs.

Is $\underline{a} = \underline{0}$, dan is $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ en $(\underline{a}, \underline{a}) = 0$, zodat (1) dan geldt.

Is $\underline{a} \neq \underline{0}$, dan is:

$$(\lambda\underline{a} + \underline{b}, \lambda\underline{a} + \underline{b}) \geq 0 \text{ voor elke } \lambda,$$

dus

$$(\lambda\underline{a}, \lambda\underline{a}) + (\lambda\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{b}, \lambda\underline{a}) + (\underline{b}, \underline{b}) \geq 0,$$

of

$$\lambda^2(\underline{a}, \underline{a}) + 2\lambda(\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{b}, \underline{b}) \geq 0 \text{ voor elke } \lambda \text{ en } (\underline{a}, \underline{a}) > 0.$$

Hieruit volgt:

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 - (\underline{a}, \underline{a}) \cdot (\underline{b}, \underline{b}) \leq 0,$$

of

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq (\underline{a}, \underline{a}) \cdot (\underline{b}, \underline{b}).$$

Definitie.

In een euclidische vectorruimte verstaan we onder de lengte $|\underline{a}|$ van een vector \underline{a} het getal:

$$|\underline{a}| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}.$$

De enige vector met de lengte 0 is dus de nulvector \underline{o} .

Is $\underline{a} \neq \underline{o}$, dan heeft de vector $\underline{a}/|\underline{a}|$ de lengte 1, immers:

$$\text{lengte } \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \sqrt{\left(\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}, \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\right)} = \sqrt{\frac{1}{|\underline{a}|^2} \cdot (\underline{a}, \underline{a})} = 1.$$

Toon zelf aan, dat $\frac{\underline{a}}{-|\underline{a}|}$ voor $\underline{a} \neq \underline{o}$ eveneens de lengte 1 heeft.

De ongelijkheid van Schwartz kunnen we als volgt schrijven:

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2$$

of:

$$-|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \leq (\underline{a}, \underline{b}) \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|.$$

Hieruit volgt: voor $\underline{a} \neq \underline{o}$ en $\underline{b} \neq \underline{o}$ is:

$$-1 \leq \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} \leq 1.$$

Zijn \underline{a} en \underline{b} beide ongelijk aan de nulvector, dan is er steeds één hoek φ met:

$$\cos \varphi = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

In een euclidische vectorruimte noemen we de op deze wijze gedefinieerde hoek φ de *hoek* tussen de vectoren \underline{a} en \underline{b} .

Is $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, $\underline{a} \neq \underline{o}$ en $\underline{b} \neq \underline{o}$, dan is $\varphi = \pi/2$, dus $\underline{a} \perp \underline{b}$. Omgekeerd: Is $\underline{a} \perp \underline{b}$, dan is $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

Voor $\underline{a} = \underline{o}$ of $\underline{b} = \underline{o}$ is $\cos \varphi$ dus ook hoek φ niet gedefinieerd.

Daar voor elke \underline{a} geldt $(\underline{a}, \underline{o}) = 0$, zeggen we dat de nulvector loodrecht staat op elke vector, dus ook loodrecht op zichzelf.

Zijn \underline{a} en \underline{b} twee vectoren in een euclidische vectorruimte, dan geldt de volgende „driehoeksongelijkheid“:

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|.$$

Bewijs. $|\underline{a} + \underline{b}|^2 = (\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{a}) + 2(\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{b}, \underline{b}).$

Volgens de ongelijkheid van Schwartz is $(\underline{a}, \underline{b}) \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$.

Hieruit volgt:

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 \leq |\underline{a}|^2 + 2|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| + |\underline{b}|^2 = (|\underline{a}| + |\underline{b}|)^2,$$

dus

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|.$$

Opmerkingen.

1. In de driehoeksongelijkheid geldt het gelijkteken slechts als $\underline{a} = \underline{o}$, of als $\underline{b} = \underline{o}$, of als de hoek tussen \underline{a} en \underline{b} gelijk is aan nul.

2. $|\underline{a} - \underline{b}| = |\underline{a} + (-\underline{b})| \leq |\underline{a}| + |-\underline{b}| = |\underline{a}| + |\underline{b}|.$

§ 2. Orthogonale en orthonormale stelsels vectoren in een euclidische vectorruimte.

Definitie.

Een stelsel vectoren in een euclidische vectorruimte E_n heet orthogonaal, als alle vectoren ongelijk zijn aan $\mathbf{0}$ en als alle vectoren twee aan twee loodrecht op elkaar staan.

Stelling 1.

In een euclidische vectorruimte E_n is elk orthogonaal stelsel vectoren een lineair-onafhankelijk stelsel.

Bewijs.

Stel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ is een orthogonaal stelsel vectoren in E_n , dus

$$\begin{aligned}(\underline{a}_k, \underline{a}_l) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad \text{en} \quad l = 1, 2, \dots, p \quad \text{en} \quad k \neq l; \\ (\underline{a}_k, \underline{a}_k) &= |\underline{a}_k|^2 \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.\end{aligned}$$

We moeten aantonen, dat uit:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \dots + \lambda_p \underline{a}_p = \mathbf{0} \quad (1)$$

volgt, dat elke $\lambda = 0$.

Voor $k = 1, 2, \dots, p$ is in verband met (1), het inwendig product

$$(\underline{a}_k, \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \dots + \lambda_p \underline{a}_p) = (\underline{a}_k, \mathbf{0}) = 0.$$

Daar het linker lid gelijk is aan $\lambda_k (\underline{a}_k, \underline{a}_k)$ en $(\underline{a}_k, \underline{a}_k) \neq 0$ is $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Definitie.

Een stelsel vectoren in een euclidische vectorruimte heet orthonormaal, als alle vectoren twee aan twee loodrecht op elkaar staan en als alle vectoren de lengte 1 hebben.

Daar een orthonormaal stelsel vectoren een lineair-onafhankelijk stelsel is, kan in een euclidische vectorruimte E_n of in een lineaire deelruimte van E_n een orthonormaal stelsel vectoren dienen als lineair-onafhankelijke basis; zo'n basis heet een *orthonormale basis*.

Een orthonormale basis van een euclidische vectorruimte E_n kan gevormd worden door de n eenheidsvectoren:

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Deze eenheidsvectoren hebben alle de lengte 1 en staan twee aan twee loodrecht op elkaar.

Zijn t.o.v. deze basis $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ twee vectoren in E_n , dan is:

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n \quad \text{en} \quad \underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + \dots + b_n \underline{e}_n.$$

Het inwendig produkt $(\underline{a}, \underline{b})$ is dan:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n, b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + \dots + b_n \underline{e}_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Conclusie:

Vormen in een euclidische vectorruimte E_n de n eenheidsvectoren de orthonormale basis, dan is van $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ in E_n het inwendig produkt

$$(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n; \quad (2)$$

de lengte van vector \underline{a} is dan:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (3)$$

Stelling 2.

Elke lineaire deelruimte van een euclidische vectorruimte E_n bezit een orthonormale basis.

Bewijs.

Zij D_p een p -dimensionale lineaire deelruimte van een euclidische vectorruimte E_n , met basis:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p.$$

Daar deze basis p vectoren bevat, is het een lineair-onafhankelijke basis en is elke vector $\neq \underline{0}$.

Om van deze basis een orthonormale basis te maken, gaan we als volgt te werk.

1°. Kies één van de vectoren, bijv. \underline{a}_1 . Daar $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$, kunnen we deze vector *normeren*, d.w.z. vervangen door:

$$\underline{c}_1 = \frac{\underline{a}_1}{|\underline{a}_1|}, \quad \text{dan is} \quad |\underline{c}_1| = 1.$$

De vectoren $\underline{c}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ vormen weer een lineair-onafhankelijke basis van D_p .

2°. Neem:

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - (\underline{a}_2, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1,$$

dan is $\underline{b}_2 \perp \underline{c}_1$, immers:

$$\underline{a}_2 \text{ en } \underline{c}_1 \text{ zijn lineair onafhankelijk en } (\underline{b}_2, \underline{c}_1) = (\underline{a}_2, \underline{c}_1) - (\underline{a}_2, \underline{c}_1) (\underline{c}_1, \underline{c}_1) = 0.$$

Normeer \underline{b}_2 , dan ontstaat:

$$\underline{c}_2 = \frac{\underline{b}_2}{|\underline{b}_2|}, \quad \text{dus} \quad \underline{c}_2 \perp \underline{c}_1 \quad \text{en} \quad |\underline{c}_2| = 1.$$

De vectoren $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p$ vormen weer een lineair-onafhankelijke basis van D_p .

3°. Neem:

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - (\underline{a}_3, \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_2 - (\underline{a}_3, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1,$$

dan is $\underline{b}_3 \neq \underline{0}$ en $\underline{b}_3 \perp \underline{c}_2$ en $\underline{b}_3 \perp \underline{c}_1$,

Normeer \underline{b}_3 , dan ontstaat:

$$\underline{c}_3 = \frac{\underline{b}_3}{|\underline{b}_3|}, \text{ dus } \underline{c}_3 \perp \underline{c}_2 \text{ en } \underline{c}_3 \perp \underline{c}_1 \text{ en } |\underline{c}_3| = 1.$$

De vectoren $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \underline{a}_4, \dots, \underline{a}_p$ vormen weer een lineair-onafhankelijke basis van D_p .

Op deze wijze door gaande, ontstaat tenslotte een orthonormale basis van D_p : $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_p$.

De werkwijze om van een gegeven lineair-onafhankelijke basis een orthonormale basis te maken, heet het *orthogonaliseren* van de basis.

Uit het bovenstaande volgt:

Elke lineaire deelruimte van een euclidische vectorruimte is een euclidische vectorruimte die een orthonormale basis bezit.

Voor $p \geq 2$ kunnen we, door van verschillende basissen van D_p uit te gaan, verschillende orthonormale basissen van D_p doen ontstaan.

In het bijzonder heeft elke n -dimensionale euclidische vectorruimte E_n ($n \geq 2$) verschillende orthonormale basissen.

Stelling 3.

In een euclidische vectorruimte E_n wordt het inwendig produkt van twee vectoren uit de kentallen van deze vectoren ten opzichte van elke orthonormale basis op dezelfde wijze gevormd.

Bewijs.

Zij $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ een orthonormale basis van een euclidische vectorruimte E_n . Zijn \underline{a} en \underline{b} twee vectoren in E_n en t.o.v. de orthonormale basis $\underline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ en $\underline{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, dan is:

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{c}_1 + \alpha_2 \underline{c}_2 + \dots + \alpha_n \underline{c}_n$$

en

$$\underline{b} = \beta_1 \underline{c}_1 + \beta_2 \underline{c}_2 + \dots + \beta_n \underline{c}_n.$$

Dan is het inwendig produkt van \underline{a} en \underline{b} :

$$(\underline{a}, \underline{b}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Vergelijken we deze uitdrukking met (2), dan zien we dat het inwendig produkt $(\underline{a}, \underline{b})$ ten opzichte van de orthonormale basis $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ op dezelfde wijze wordt gevormd als ten opzichte van de orthonormale basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$. De formule van $(\underline{a}, \underline{b})$ is dus *invariant* bij overgang op een andere orthonormale basis.

De lengte van vector $\underline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ is:

$$|\underline{a}| = \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)}.$$

Vergelijken we deze uitdrukking met (3), dan zien we dat ook de formule voor de lengte van een vector in een euclidische vectorruimte E_n met een orthonormale basis invariant is bij overgang op een andere orthonormale basis.

Opmerking.

Zijn $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ twee vectoren in R_n en is \underline{a} geschreven als een rijvector en \underline{b} als een kolomvector, dan noemen we:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

het *rij-kolom-product* van \underline{a} en \underline{b} , dus:

$$(\underline{a}_1 \underline{a}_2 \dots \underline{a}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Zijn \underline{a} en \underline{b} twee vectoren in een euclidische vectorruimte E_n met een orthonormale basis, dan is blijkbaar het rij-kolom-product hetzelfde als het inwendig product van \underline{a} en \underline{b} .

Voorbeeld.

In een euclidische vectorruimte E_4 wordt een drie-dimensionale lineaire deelruimte D_3 opgespannen door de lineair onafhankelijke vectoren:

$$\underline{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \quad \underline{a}_2 = (0, 1, 0, -1) \quad \text{en} \quad \underline{a}_3 = (0, 0, 1, -1).$$

Bepaal een orthonormale basis van D_3 .

Oplossing.

Kies

$$\underline{c}_1 = \frac{\underline{a}_1}{|\underline{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, -1);$$

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - (\underline{a}_2, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1 = \underline{a}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{c}_1 = \frac{1}{2} (-1, 2, 0, -1);$$

$$\underline{c}_2 = \frac{\underline{b}_2}{|\underline{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, 0, -1);$$

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - (\underline{a}_3, \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_2 - (\underline{a}_3, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1 = \underline{a}_3 - \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{c}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{c}_1 = \frac{1}{3} (-1, -1, 3, -1);$$

$$\underline{c}_3 = \frac{\underline{b}_3}{|\underline{b}_3|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (-1, -1, 3, -1).$$

Een orthonormale basis van D_3 is dus:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, 0, -1), \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} (-1, -1, 3, -1).$$

§ 3. Orthogonaal-complementaire deelruimten.

Definitie.

Zij D_p een lineaire deelruimte van een euclidische vectorruimte E_n en \underline{x} een vector in E_n . Als \underline{x} loodrecht staat op elke vector in D_p , dan zeggen we: \underline{x} staat loodrecht op D_p en schrijven: $\underline{x} \perp D_p$.

We sluiten hierbij de nulruimte uit, dus $p > 0$.

Toon aan, dat $\underline{x} \perp D_p$ dan en slechts dan als \underline{x} loodrecht staat op alle vectoren van een basis van D_p .

Toon ook aan dat, als $\underline{x} \perp D_p$ en $\underline{x} \neq \underline{0}$, vector \underline{x} niet in D_p ligt.

Zijn D_p en D_q twee lineaire deelruimten van een euclidische vectorruimte en staat elke vector in D_p loodrecht op elke vector in D_q , dan staat ook elke vector in D_q loodrecht op elke vector in D_p . We zeggen dan: D_p en D_q staan loodrecht op elkaar en schrijven: $D_p \perp D_q$.

Merk op: $D_p \cap D_q = \underline{0}$.

Stelling.

Is D_p een lineaire deelruimte van een euclidische vectorruimte E_n , dan vormen alle vectoren in E_n die loodrecht op D_p staan een $(n - p)$ dimensionale lineaire deelruimte D_{n-p} van E_n .

Elke vector $\underline{x} \in E_n$ is éénduidig te schrijven als: $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ met $\underline{x}_1 \in D_p$ en $\underline{x}_2 \in D_{n-p}$.

Bewijs.

Kies een orthonormale basis $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_p$ van D_p en vul deze aan tot een orthonormale basis $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_p, \underline{c}_{p+1}, \dots, \underline{c}_n$ van E_n .

Is D_{n-p} de lineaire deelruimte van E_n die $\underline{c}_{p+1}, \dots, \underline{c}_n$ tot basis heeft en is \underline{y} een vector die loodrecht op D_p staat, dan moeten we aantonen dat alle vectoren $\underline{y} \in D_{n-p}$ geheel opvullen.

Stel

$$\underline{y} = \lambda_1 \underline{c}_1 + \lambda_2 \underline{c}_2 + \dots + \lambda_p \underline{c}_p + \lambda_{p+1} \underline{c}_{p+1} + \dots + \lambda_n \underline{c}_n. \quad (1)$$

Daar $\underline{y} \perp D_p$, is $(\underline{y}, \underline{c}_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Dus

$$\lambda_1 (\underline{c}_1, \underline{c}_1) = \lambda_2 (\underline{c}_2, \underline{c}_2) = \dots = \lambda_p (\underline{c}_p, \underline{c}_p) = 0,$$

dus

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Hieruit volgt: $\underline{y} = \lambda_{p+1} \underline{c}_{p+1} + \dots + \lambda_n \underline{c}_n$, waarin de waarden van λ geheel willekeurig zijn.

Elke vector $\underline{y} \in E_n$ die loodrecht op D_p staat, ligt dus in D_{n-p} en elke vector $\underline{y} \in D_{n-p}$ staat loodrecht op D_p .

Voor elke $\underline{y} \in E_n$ is de schrijfwijze (1) éénduidig.

Stellen we

$$\underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_p \underline{c}_p \quad \text{en} \quad \underline{x}_2 = \lambda_{p+1} \underline{c}_{p+1} + \dots + \lambda_n \underline{c}_n,$$

dan is

$$\underline{y} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \quad \text{met} \quad \underline{x}_1 \in D_p \quad \text{en} \quad \underline{x}_2 \in D_{n-p}.$$

We noemen \underline{x}_1 de loodrechte projectie van \underline{y} op D_p en \underline{x}_2 de loodrechte projectie van \underline{y} op D_{n-p} .

We noemen D_p en D_{n-p} *orthogonaal-complementaire deelruimten*; we zeggen ook dat D_p en D_{n-p} elkaars *orthogonale complement* zijn.

Voorbeeld.

In een euclidische vectorruimte E_4 wordt de lineaire deelruimte D_3 opgespannen door de lineair onafhankelijke vectoren:

$$\underline{a} = (1, 2, 0, 0), \quad \underline{b} = (0, 1, 2, 1) \quad \text{en} \quad \underline{c} = (0, 0, 1, 2).$$

Bepaal de loodrechte projectie van $\underline{x} = (3, -5, 6, -5)$ op D_3 .

Oplossing.

Stel D_1 is het orthogonale complement van D_3 , dan is:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{p} + \underline{q} \quad \text{met} \quad \underline{p} \in D_3 \quad \text{en} \quad \underline{q} \in D_1; \\ \underline{p} &= \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = (\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + 2\lambda_3). \end{aligned}$$

Daar $\underline{x} - \underline{p} = \underline{q} \perp D_3$ is:

$$\begin{aligned} (\underline{x} - \underline{p}, \underline{a}) &= 0 \quad \text{of} \quad 5\lambda_1 + 2\lambda_2 = -7 \\ (\underline{x} - \underline{p}, \underline{b}) &= 0 \quad \text{of} \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ (\underline{x} - \underline{p}, \underline{c}) &= 0 \quad \text{of} \quad 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = -4. \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -4$.

De loodrechte projectie van \underline{x} op D_3 is dus $\underline{p} = (-3, -2, 4, -4)$.

§ 4. Opgaven.

1. Bepaal voor de euclidische vectorruimte E_3 een orthonormale basis $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ zo, dat \underline{v}_1 en \underline{v}_2 liggen in de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren $(1, 1, 4)$ en $(0, 1, 2)$, terwijl \underline{v}_1 bovendien ligt in de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren $(2, 1, 0)$ en $(1, 3, 2)$.

Antw.: $\frac{1}{3}(1, -2, -2)$, $\frac{1}{3}(2, -1, 2)$ en $\frac{1}{3}(2, 2, -1)$.

2. In een euclidische vectorruimte E_4 is een lineaire deelruimte D_3 opgespannen door de vectoren $(1, 1, 1, 1)$, $(5, -1, 5, -1)$ en $(2, 1, -8, 1)$.

Bepaal voor D_3 een orthonormale basis.

Antw.: $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$.

3. In een euclidische vectorruimte E_5 wordt een lineaire deelruimte D_3 opgespannen door de vectoren $(1, 2, 2, 0, 0)$, $(2, 6, 2, 1, 0)$ en $(4, 6, 1, -1, 1)$.
Bepaal voor D_3 een orthonormale basis.

Antw.: $\frac{1}{3}(1, 2, 2, 0, 0)$, $\frac{1}{3}(0, 2, -2, 1, 0)$ en $\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 0, -1, -2, 1)$.

4. In een euclidische vectorruimte E_3 wordt een lineaire deelruimte D_2 opgespannen door de vectoren $(2, -1, 0)$ en $(3, 0, 1)$.

Bepaal de loodrechte projectie van $(2, 0, -4)$ op D_2 .

Antw.: $(1, -2, -1)$.

5. In een euclidische vectorruimte E_4 wordt een lineaire deelruimte D_3 opgespannen door de vectoren $(1, 1, -1, 0)$, $(2, 1, -1, -1)$ en $(-1, 2, 0, -3)$.

Bepaal de loodrechte projectie van $(3, 6, 1, -3)$ op D_3 .

Antw.: $(2, 4, -2, -4)$.

§
Gr
x₁

De
ter
be
W
b
x
W
is t
(1)
x₁
W
ho
op
He

bes
het
ste
Elk

voegen waarvan die n getallen de kentallen zijn; dat is dus weer een vector uit een n -dimensionale vectorruimte R_n . Zo kunnen we aan de i^{de} rij de vector:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

toevoegen. We noemen deze vector de i^{de} rijvector.

Evenzo kunnen we aan elke kolom (die uit p getallen bestaat) een vector uit een p -dimensionale vectorruimte R_p toevoegen. De vector:

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj})$$

heet de j^{de} kolomvector.

Voegen we aan de bekende termen b_1, b_2, \dots, b_p de vector (b_1, b_2, \dots, b_p) toe, dan is het stelsel vergelijkingen (1) te schrijven als:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

Stellen we $\underline{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj})$ ($j = 1, 2, \dots, n$) en $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$, dan is het stelsel vergelijkingen (1) te schrijven als:

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_j \underline{a}_j + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}. \quad (4)$$

Het stelsel vergelijkingen (1) is nu omgezet in de *vectorvergelijking* (4.)

Hieruit volgt dat het stelsel vergelijkingen (1) dan en slechts dan oplosbaar is, als \underline{b} lineair afhankelijk is van de kolomvectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ van de matrix (2).

Voorbeelden.

1. Gegeven de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijkingen als volgt schrijven:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Noemen we

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{a}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{a}_2, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{a}_3 \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{b},$$

dan is het stelsel vergelijkingen te schrijven als:

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 = \underline{b}.$$

De vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ en \underline{b} zijn vectoren in R_2 .

We kiezen een willekeurige waarde voor de onbekende x_1 .

Daar \underline{a}_2 en \underline{a}_3 een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, vormen ze een lineair-onafhankelijke basis in R_2 .

De vector $\underline{b} - x_1 \underline{a}_1$ kan dus op één en slechts één manier een lineaire combinatie van \underline{a}_2 en \underline{a}_3 zijn. Bij *elke* waarde van x_1 vinden we dus één stel waarden voor x_2 en x_3 zó dat:

$$\underline{b} - x_1 \underline{a}_1 = x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3.$$

Het gegeven stel vergelijkingen heeft dus oneindig veel oplossingen.

2. Gegeven de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= b_1 \\ x_1 + 3x_2 &= b_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

Dit stelsel vergelijkingen is als volgt te schrijven:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

De vectoren $\underline{a}_1 = (2, 1, 3)$ en $\underline{a}_2 = (0, 3, 2)$ in R_3 vormen een lineair-onafhankelijk stelsel. Ze spannen dus een lineaire deelruimte D_2 van R_3 op.

Ligt nu de vector $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ niet in D_2 , dan is \underline{b} niet lineair afhankelijk van \underline{a}_1 en \underline{a}_2 . Het stelsel vergelijkingen heeft dan geen oplossing.

Ligt \underline{b} wel in D_2 , dan is \underline{b} op één en slechts één manier lineair uit te drukken in \underline{a}_1 en \underline{a}_2 , die een lineair-onafhankelijke basis van D_2 vormen. Het stelsel vergelijkingen heeft dan één oplossing.

In het algemeen zijn de n vectoren uit (4):

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n \quad (5)$$

vectoren uit een p -dimensionale vectorruimte R_p (elke vector heeft immers p kentallen). We veronderstellen dat het maximum aantal vectoren van (5) dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt, gelijk is aan k . De vectoren (5) spannen dan een deelruimte D_k van R_p op.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1°. \underline{b} ligt in D_k , dus \underline{b} is lineair afhankelijk van de vectoren (5). In dit geval is het stelsel (1) oplosbaar. De vectoren:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \quad (6)$$

spannen dan dezelfde deelruimte D_k op als de vectoren (5). Het maximum aantal vectoren van (6) dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt, is dan ook gelijk aan k .

2°. \underline{b} ligt niet in D_k , dus \underline{b} is lineair onafhankelijk van de vectoren (5). Het stelsel (1) is dus onoplosbaar. Het maximum aantal vectoren van (6) dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt, is nu gelijk aan $k + 1$.

Uit het bovenstaande volgt, dat het stelsel (1) dan en slechts dan oplosbaar is, als het maximum aantal vectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt van (5) en van (6) hetzelfde is.

Komen in een matrix *hoogstens* k kolomvectoren voor die een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, dan zeggen we dat de *rang van de matrix* gelijk is aan k .

Definitie.

De rang van een matrix is gelijk aan het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren.

De rang van een matrix is dus gelijk aan de dimensie van de deelruimte die door de kolomvectoren wordt opgespannen.

Behalve de matrix (2) beschouwen we ook de matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & b_p \end{pmatrix} \quad (7)$$

We noemen deze de *aangevulde matrix* die bij het stelsel (1) behoort.

Is de rang van de matrix (2) gelijk aan k , dan is de rang van de aangevulde matrix (7) gelijk aan k of $k + 1$.

Uit het vorenstaande volgt:

Het stelsel (1) van p niet-homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden is oplosbaar als de rang van de aangevulde matrix (7) gelijk is aan de rang van de matrix (2) en onoplosbaar als de rang van de aangevulde matrix (7) één hoger is dan de rang van de matrix (2).

§ 2. Het bepalen van de rang van een matrix

Stelling 1.

Zijn

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_p \quad (1)$$

vectoren in R_n , dan is het maximum aantal lineair-onafhankelijke vectoren van (1) hetzelfde als van:

$$a_1, a_2, \dots, \lambda a_k, \dots, a_l, \dots, a_p \quad (\lambda \neq 0) \quad (2)$$

en eveneens hetzelfde als van:

$$a_1, a_2, \dots, a_k + \lambda a_l, \dots, a_l, \dots, a_p. \quad (3)$$

Bewijs.

De vectoren (1) spannen een deelruimte D van R_n op met (1) als basis. Is $x \in D$, dan is:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + \dots + \lambda_p a_p. \quad (4)$$

Hieruit volgt:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} (\lambda a_k) + \dots + \lambda_p a_p. \quad (5)$$

Omgekeerd volgt uit (5) weer (4). Dus (2) is ook een basis van D .

Verder volgt uit (4):

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k (\underline{a}_k + \lambda \underline{a}_l) + \dots + (\lambda_l - \lambda_k \lambda) \underline{a}_l + \dots + \lambda_p \underline{a}_p.$$

Omgekeerd volgt uit deze laatste betrekking weer (4). Dus (3) is ook een basis van D .

Het maximum aantal lineair onafhankelijk vectoren van (1), van (2) en van (3) is de dimensie van D ; deze aantallen zijn dus gelijk.

We beschouwen de matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Als de rang van deze matrix gelijk is aan k , dan is k het maximum aantal kolomvectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt.

We noemen r het maximum aantal rijvectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt.

We bewijzen nu: $r = k$.

Daartoe bewijzen we eerst de volgende stellingen:

Stelling 2.

Het getal r verandert niet, als we:

- 1°. Alle elementen van een rij met $\lambda (\neq 0)$ vermenigvuldigen;
- 2°. Bij de elementen van een rij λ maal de overeenkomstige elementen van een andere rij optellen;
- 3°. Een rij waarvan alle elementen nul zijn, weglaten;
- 4°. Twee rijen verwisselen.

Noemen we de rijvectoren van (6) resp.

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_p,$$

dan volgt 1° en 2° onmiddellijk uit stelling 1.

Zijn alle elementen van een rij 0, dan is deze rij afhankelijk van de overige rijen. Laten we deze rij weg, dan verandert r dus niet.

Het is onmiddellijk duidelijk dat r eveneens onveranderd blijft, als we twee rijen verwisselen.

Stelling 3.

Het getal k verandert niet, als we op de rijen één van de bewerkingen uit stelling 2 toepassen.

Gemakshalve vermenigvuldigen we alle elementen van de eerste rij met $\lambda (\neq 0)$ en tellen we bij de elementen van de tweede rij λ maal de overeenkomstige elementen van de eerste rij op. We krijgen dan de volgende matrices:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad (7) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & \dots & a_{2n} + \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Veronderstel dat een kolomvector in (6), neem weer gemakshalve de eerste, lineair afhankelijk is van de overige. Er bestaan dan getallen $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ zó dat:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{p3} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dan is voor dezelfde getallen $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \lambda a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \lambda a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{p3} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} \lambda a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

en

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} + \lambda a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} + \lambda a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} + \lambda a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Omgekeerd volgt (9) uit (10) en ook uit (11).

Hieruit volgt dat de overeenkomstige kolomvector in (6), (7) en (8) òf lineair afhankelijk òf lineair onafhankelijk is van de overige kolomvectoren. Het getal k is dus in (6), (7) en (8) hetzelfde.

Stelling 4.

Het getal k verandert niet, als we op de kolommen van de matrix soortgelijke bewerkingen toepassen als op de rijen worden toegepast in stelling 2.

Het bewijs komt overeen met dat van stelling 2.

Stelling 5.

Het getal r verandert niet, als we op de kolommen de bewerkingen van stelling 4 toepassen.

Het bewijs verloopt als dat van stelling 3.

Nu bewijzen we dat $k = r$.

Met behulp van bovenstaande stellingen kunnen we, zonder dat k of r verandert, matrix (6) als volgt vereenvoudigen:

- 1°. Elke kolom en elke rij die uitsluitend uit nullen bestaat, wordt weggelaten.
 2°. Zo nodig worden de rijen zo verwisseld dat $a_{11} \neq 0$.
 3°. De elementen van de eerste rij worden door a_{11} gedeeld; dan is de nieuwe $a_{11} = 1$.
 4°. De elementen van de tweede rij worden verminderd met a_{21} maal de overeenkomstige elementen van de eerste rij; dan is de nieuwe $a_{21} = 0$. Op soortgelijke wijze worden de nieuwe $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{p1}$ gelijk aan nul gemaakt. De eerste kolom is nu:

$$(1, 0, 0, \dots, 0).$$

We zeggen dat de eerste kolom met behulp van de eerste rij is *schoongeveegd*.
 5°. Indien er nu een rij is ontstaan die uitsluitend uit nullen bestaat, dan wordt deze weggelaten.

Nadat de eerste kolom is schoongeveegd, gaan we de tweede kolom schoonvegen. Dit gebeurt als volgt:

- 6°. Zo nodig verwisselen we de tweede kolom met een volgende kolom zodat $a_{22} \neq 0$. Daarna delen we de elementen van de tweede rij door a_{22} , waarna de nieuwe $a_{22} = 1$ is. Tenslotte verminderen we de elementen van de eerste, de derde t.m. de laatste rij resp. met a_{12}, a_{32}, \dots maal de overeenkomstige elementen van de tweede rij. Door deze bewerkingen is de tweede kolom nu:

$$(0, 1, 0, \dots, 0).$$

Op deze wijze voortgaande krijgen we tenslotte een matrix van de gedaante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1, q+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{2, q+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{q, q+1} & \dots & b_{qn} \end{pmatrix} \quad (12)$$

waarvan, ondanks alle bewerkingen, het maximum aantal kolomvectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt, gelijk is aan k van matrix (6), terwijl ook het maximum aantal rijvectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt, gelijk is aan r van (6).

Van matrix (12) is het maximum aantal rijvectoren en ook het maximum aantal kolomvectoren, dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt gelijk aan q . Hieruit volgt dat voor matrix (6) geldt: $q = k = r$.

De rang van een matrix is dus niet alleen gelijk aan het maximum aantal kolomvectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt, maar ook gelijk aan het maximum aantal rijvectoren dat een lineair-onafhankelijk stelsel vormt.

Opmerking.

In het voorgaande is de rang van de matrix bepaald door de kolommen schoon te vege; men kan volgens het bovenstaande de rang ook bepalen door de rijen schoon te vege.

Voorbeeld.

Bepaal de rang van de matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ S \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ S \\ \\ \end{matrix}$$

I II

$$\begin{matrix} S \\ \\ S \\ \\ S \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ S \\ \\ S \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ S \\ \\ S \end{matrix}$$

III IV

$$\begin{matrix} S \\ \\ S \\ \\ S \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ S \\ \\ S \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V VI

Verklaring.

II is verkregen door de eerste kolom van I schoon te vegen met behulp van de tweede rij.

III is verkregen door de tweede kolom van II schoon te vegen met behulp van de eerste rij.

IV is verkregen door de derde en vierde rij van III door 4 te delen.

V is verkregen door de derde kolom van IV schoon te vegen met behulp van de derde rij.

VI is verkregen door de laatste rij van V weg te laten.

Uit VI zien we dat de matrix drie rijen (en dus ook drie kolommen) heeft die een lineair-onafhankelijk stelsel vormen. De rang van de matrix is dus 3.

Om de matrix te vereenvoudigen is achtereenvolgens de eerste kolom schoongeveegd met de eerste rij, de tweede en tegelijk de vierde rij met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd, de derde kolom schoongeveegd met de tweede rij, de vierde rij weggelaten en tegelijk de vierde kolom schoongeveegd met de derde rij.

Het blijkt dat de matrix en ook de aangevulde matrix de rang = 3 hebben. Het stelsel is dus oplosbaar.

Om de oplossing te bepalen, schrijven we het stelsel vergelijkingen uit, waarbij de laatste matrix behoort en dat gelijkwaardig is met het oorspronkelijke stelsel, nl.:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ -2x_2 - x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Daar de matrix de rang 3 heeft en het aantal onbekenden 4 is, heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. We kunnen $4 - 3 = 1$ geschikt gekozen onbekenden een willekeurige waarde geven. Dat we niet elke onbekende een willekeurige waarde kunnen geven, blijkt uit de tweede vergelijking; immers hieruit volgt: $x_3 = 0$. Stellen we $x_1 = \lambda$, dan is $x_2 = \lambda$ en $x_4 = 2 - 2\lambda$.

Beschouwen we de getallen x_1, x_2, x_3 en x_4 als de kentallen van een vector in R_4 , dan is een vectorvoorstelling van de oplossing, of dan zijn de oplossingsvectoren:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda, \lambda, 0, 2 - 2\lambda) = (0, 0, 0, 2) + \lambda(1, 1, 0, -2).$$

Opmerkingen.

1. Deze vectoren (de zgn. oplossingsvectoren) vormen geen lineaire vectorruimte.
2. Als van de vierde vergelijking de bekende term $\neq 10$, dan is van de matrix de rang = 3 en van de aangevulde matrix de rang = 4. Het stelsel vergelijkingen heeft dan geen oplossing.

Voorbeeld 2.

Los voor verschillende waarden van a het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + (a-1)x_2 + 2x_3 + x_4 &= a \\ 2x_1 - 2x_2 + (a+3)x_3 + 2x_4 &= 3a-1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + (a-4)x_4 &= 2a-5. \end{aligned}$$

Oplossing.

De matrix en de aangevulde matrix zijn:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 & a \\ 2 & -2 & a+3 & 2 & 3a-1 \\ -3 & 3 & -6 & a-4 & 2a-5 \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 3a-3 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 2a-2 \end{array} \right).$$

De eerste kolom is met de eerste rij schoongeveegd.

Stel $a \neq 0$ en $a \neq 1$.

Na deling van de tweede rij door a en de derde en de vierde rij door $a - 1$ ontstaat:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a} \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6a+1}{a} \\ & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a} \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

De tweede kolom is met de tweede rij, de derde kolom met de derde rij en de vierde kolom met de vierde rij schoongeveegd.

Uit de laatste matrix blijkt dat de rang van de matrix en van de aangevulde matrix gelijk is aan 4. Voor $a \neq 0$ en $a \neq 1$ is het stelsel dus oplosbaar. Er blijkt één oplossing te zijn, nl.:

$$x_1 = -\frac{6a+1}{a}, \quad x_2 = \frac{a-1}{a}, \quad x_3 = 3 \quad \text{en} \quad x_4 = 2.$$

Voor $a = 0$ en voor $a = 1$ wordt de tweede matrix respectievelijk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \quad \text{en} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Voor $a = 0$ is van de matrix de rang 3, terwijl de aangevulde matrix de rang 4 heeft. Het stelsel heeft dus geen oplossing.

Voor $a = 1$ hebben de matrix en de aangevulde matrix de rang 2. Het stelsel is dus oplosbaar. Er zijn oneindig veel oplossingen, nl. de oplossingen van het gelijkwaardige stelsel:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \end{array}$$

We kunnen aan $4 - 2$ geschikt gekozen onbekenden een willekeurige waarde geven, terwijl $x_2 = 0$. Zij $x_3 = \lambda$ en $x_4 = \mu$, dan is $x_1 = 1 - 2\lambda - \mu$.

Beschouwen we de getallen x_1, x_2, x_3 en x_4 als de kentallen van een vector in R_4 , dan is een vectorvoorstelling van de oplossing:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 2\lambda - \mu, 0, \lambda, \mu),$$

of:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§ 4. Homogene lineaire vergelijkingen.

Gegeven is het stelsel van p homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \dots + a_{pn} x_n &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

De bijbehorende matrix van het stelsel is:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

We veronderstellen dat de rang van de matrix gelijk is aan q . Noemen we de kolomvectoren van de matrix:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \quad (3)$$

dan is (1) te schrijven als:

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}. \quad (4)$$

Er zijn nu twee gevallen te onderscheiden:

1°. $q = n$.

De kolomvectoren (3) vormen een lineair-onafhankelijk stelsel, zodat aan (4), dus aan (1), alleen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ voldoet.

Aan het stelsel homogene lineaire vergelijkingen voldoet dus alleen de *nuloplossing*.

2°. $q < n$.

De kolomvectoren (3) vormen een lineair-afhankelijk stelsel, zodat aan (4) ook voldaan wordt voor x_1, x_2, \dots, x_n niet alle $= 0$.

We bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling.

De oplossingsvectoren van een stelsel homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden vormen een $(n - q)$ dimensionale lineaire deelruimte van R_n , waarin q de rang van de matrix van het stelsel is.

Bewijs.

We nemen aan dat de rang van de matrix (2) van het stelsel (1) gelijk is aan q . Het maximum aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van (2) is dus gelijk aan q ; we nemen aan dat dit de eerste q kolomvectoren zijn.

Volgens de methode van § 2 stelling 5 kunnen we de matrix (2) herleiden tot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1,q+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{2,q+1} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & b_{q,q+1} & \dots & b_{qn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Deze matrix, die ook de rang q heeft, behoort bij een stelsel vergelijkingen dat gelijkwaardig is met (1).

Uit (5) blijkt, dat de $n - q$ onbekenden $x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n$ willekeurig gekozen kunnen worden en dat de overige onbekenden dan ondubbelzinnig bepaald zijn. Kieszen we achtereenvolgens:

$$x_{q+k} = -1, \quad x_{q+1} = x_{q+2} = \dots = x_{q+k-1} = x_{q+k+1} = \dots = x_n = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n - q,$$

dan zijn $(n - q)$ lineair onafhankelijk oplossingsvectoren van (1):

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 &= (b_{1,q+1}, b_{2,q+1}, \dots, b_{q,q+1}, -1, 0, \dots, 0) \\ \underline{y}_2 &= (b_{1,q+2}, b_{2,q+2}, \dots, b_{q,q+2}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \underline{y}_{n-q} &= (b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{qn}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

Alle vectoren \underline{x} van de gedaante:

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2 + \dots + \lambda_{n-q} \underline{y}_{n-q}$$

zijn oplossingsvectoren van (1). Omgekeerd volgt uit (5) dat elke oplossingsvector van (1) lineair afhankelijk is van $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_{n-q}$.

De oplossingsvectoren van (1) vormen dus een $(n - q)$ dimensionale lineaire deelruimte van R_n . We noemen deze deelruimte de *oplossingsruimte* van het gegeven stelsel lineaire vergelijkingen.

Voorbeelden.

1. De kentallen x_1, x_2, x_3 en x_4 van een vector $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ uit R_4 voldoen aan:

$$\begin{aligned} a^2 x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ a x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Bepaal voor verschillende waarden van a de dimensie en een lineair-onafhankelijke basis van de lineaire deelruimte der oplossingsvectoren.

Oplossing.

We herleiden de matrix van het stelsel als volgt:

$$\begin{pmatrix} a^2 & -4 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2 & -4 & 0 & 0 \\ a & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & -2 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eerst is de vierde kolom met de vierde rij schoongeveegd en daarna is de tweede kolom met de tweede rij schoongeveegd.

Voor $a \neq 2$ en $a \neq 0$ blijkt de matrix de rang 4 te hebben; in dit geval voldoet dus alleen de nuloplossing.

Voor $a = 2$ is de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De rang van de matrix is 3. De oplossingsruimte is dus een ééndimensionale lineaire deelruimte van R_4 .

Stellen we $x_1 = 2\lambda$, dan is $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$ en $x_4 = -\lambda$.

De lineaire deelruimte bestaat dus uit de vectoren $\underline{x} = \lambda(2, 1, -1, -1)$ en hiervan is $(2, 1, -1, -1)$ een basis.

Voor $a = 0$ is de matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De rang van de matrix is 2. De oplossingsruimte is dus een tweedimensionale lineaire deelruimte van R_4 .

Stellen we $x_1 = 2\lambda$ en $x_3 = \mu$, dan is $x_2 = -\lambda$ en $x_4 = -2\lambda - \mu$.

De lineaire deelruimte der oplossingsvectoren bestaat dus uit de vectoren:

$$\underline{x} = \lambda(2, -1, 0, -2) + \mu(0, 0, 1, -1);$$

hiervan is $(2, -1, 0, -2)$ en $(0, 0, 1, -1)$ een lineair-onafhankelijke basis.

2. In R_5 zijn twee lineaire deelruimten U en V gegeven, die bestaan uit de vectoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, waarvoor geldt:

$$U: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad V: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Bepaal van U en V de doorsnede $U \cap V$ en de verbinding $U + V$. Bepaal tevens de dimensie en een lineair-onafhankelijke basis van $U \cap V$ en van $U + V$.

Oplissing.

Is $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ een vector van $U \cap V$, dan voldoen de kentallen van \underline{x} aan de bovenstaande vijf vergelijkingen. De oplossing van deze vergelijkingen vinden we als volgt:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \simeq & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \simeq & & \simeq \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \simeq & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Stellen we $x_5 = 4\lambda$, dan is $x_4 = \lambda$, $x_3 = -2\lambda$, $x_2 = \lambda$ en $x_1 = -2\lambda$.

Dus is $U \cap V: \underline{x} = \lambda(-2, 1, -2, 1, 4)$.

De dimensie van $U \cap V$ is dus 1 en $(-2, 1, -2, 1, 4)$ is een basis.

Om $U + V$ te vinden bepalen we eerst een vectorvoorstelling van U en van V .

Een vectorvoorstelling van U is:

$$\underline{x} = \lambda_1(-2, 1, 1, 0, 0) + \lambda_2(2, -1, 0, 1, 0) + \lambda_3(-2, 1, 0, 0, 1).$$

De dimensie van U is gelijk aan 3.

Een vectorvoorstelling van V is:

$$\underline{x} = \mu_1(2, 1, 2, 1, 0) + \mu_2(-1, 0, -1, 0, 1).$$

V heeft de dimensie 2.

Een basis van $U + V$ is dus:

$(-2, 1, 1, 0, 0)$, $(2, -1, 0, 1, 0)$, $(-2, 1, 0, 0, 1)$, $(2, 1, 2, 1, 0)$ en $(-1, 0, -1, 0, 1)$.

De dimensie en een lineair-onafhankelijke basis vinden we als volgt:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \simeq & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \simeq & & \simeq \\
 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \simeq & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Hieruit blijkt dat de dimensie van $U + V$ gelijk is aan 4 en dat een lineair-onafhankelijke basis is:

$$(0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \text{ en } (1, 0, 0, 0, 0).$$

Merk op: $\dim. (U \cap V) + \dim. (U + V) = \dim. U + \dim. V$.

3. Gegeven zijn de vectoren: $\underline{a} = (2, 1, -3, -1)$, $\underline{b} = (3, 2, -1, 2)$, $\underline{c} = (1, 2, 3, 1)$ en $\underline{d} = (2, 2, -2, p)$ en de twee lineaire deelruimten:

$$U: \underline{x} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}; \quad V: \underline{x} = \mu_1 \underline{c} + \mu_2 \underline{d}.$$

Bepaal voor verschillende waarden van p de doorsnede $U \cap V$ en de verbinding $U + V$, alsmede van beide de dimensie en een lineair-onafhankelijke basis.

Oplossing.

De dimensie van U en V zijn beide gelijk aan 2; de som van de dimensies van $U \cap V$ en $U + V$ is dus gelijk aan 4.

Een basis van $U + V$ is: \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} en \underline{d} . De dimensie en een lineair-onafhankelijke basis vinden we als volgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & p \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 9 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & p+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & p-6 \end{pmatrix}$$

Voor $p \neq -3$ is dus $U + V$ de gehele R_4 ; voor $p = -3$ is de dimensie van $U + V$ gelijk aan 3, terwijl een lineair-onafhankelijke basis is:

$$(0, 1, 7, 7), (-1, 0, 5, 4) \text{ en } (0, 0, -6, -9).$$

Om $U \cap V$ te bepalen, zoeken we alle vectoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, waarvan de kentallen voldoen aan:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & & x_1 = \mu_1 + 2\mu_2 \\ x_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 & (6) \text{ en } & x_2 = 2\mu_1 + 2\mu_2 \\ x_3 = -3\lambda_1 - \lambda_2 & & x_3 = 3\mu_1 - 2\mu_2 \\ x_4 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 & & x_4 = \mu_1 + p\mu_2 \end{array} \quad (7)$$

Eliminatie van λ_1 en λ_2 uit (6) geeft:

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 - 7x_2 + x_3 & = & 0 \\ 7x_2 + 4x_3 - 5x_4 & = & 0. \end{array}$$

Substitueren we hierin de waarden van x_1 , x_2 , x_3 en x_4 uit (7), dan krijgen we:

$$\begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & 0 \\ 21\mu_1 + (6 - 5p)\mu_2 & = & 0. \end{array}$$

Is $p \neq -3$, dan voldoen alleen $\mu_1 = \mu_2 = 0$; de doorsnede $U \cap V$ is dan de nulruimte, die slechts de vector $\underline{0}$ bevat.

De dimensie van de doorsnede is dan 0.

Voor $p = -3$ is $\mu_1 + \mu_2 = 0$, de doorsnede $U \cap V$ bestaat dus uit de vectoren:

$$\underline{x} = \mu (-1, 0, 5, 4).$$

De dimensie van de doorsnede is dus 1 en een basis is $(-1, 0, 5, 4)$.

§ 5. Verband tussen de oplossingen van een stelsel niet-homogene lineaire vergelijkingen en van het daarbij behorende stelsel homogene lineaire vergelijkingen.

We beschouwen het stelsel van p niet-homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden en het daarbij behorend stelsel van p homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden:

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} x_l = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

en

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} x_l = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Stelling.

Zijn

$$\underline{y} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_{n-q} \underline{v}_{n-q} \quad (3)$$

alle oplossingsvectoren van (2) en is $\underline{x} = \underline{u}$ één oplossingsvector van (1), dan zijn alle oplossingsvectoren van (1):

$$\underline{x} = \underline{u} + \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_{n-q} \underline{v}_{n-q}. \quad (4)$$

Bewijs.

Daar de vectoren \underline{y} van (3) oplossingsvectoren zijn van (2) en $\underline{x} = \underline{u}$ één oplossingsvector is van (1), zijn alle vectoren \underline{x} van (4) oplossingsvectoren van (1). Stel dat (1) nog een andere oplossingsvector \underline{y} had, dus:

$$\underline{y} \neq \underline{u} + \mu_1 \underline{v}_1 + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_{n-q} \underline{v}_{n-q},$$

dan zou:

$$\underline{x} - \underline{y} \neq (\lambda_1 - \mu_1) \underline{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \underline{v}_2 + \dots + (\lambda_{n-q} - \mu_{n-q}) \underline{v}_{n-q}$$

een oplossingsvector zijn van (2). Dit is in strijd met onze veronderstelling dat (3) de volledige oplossing is van (2).

Hieruit volgt dat (4) de volledige oplossing is van (1).

We noemen $\underline{x} = \underline{u}$ wel een *particuliere oplossing* van (1).

Uit bovenstaande stelling volgt, dat we de algemene oplossing van (1) krijgen door bij de volledige oplossing van (2) een particuliere oplossing van (1) op te tellen.

§ 6. Opgaven.

1. Los voor verschillende waarden van a het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - & x_2 - & 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - & ax_2 - (a+2)x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - & x_2 - & 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + (a-1)x_2 + & & 4ax_3 + x_4 = 8. \end{array}$$

Antw.: $a = 0$, strijdig; $a = 1$, $\underline{x} = (2, 1, 0, 0) + \lambda(1, 4, -1, 0)$;

$$a \neq 0 \text{ en } a \neq 1, \quad x_1 = \frac{6a-1}{3a}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}a, \quad x_3 = \frac{1}{3}a, \quad x_4 = \frac{1-a}{a}.$$

2. Los voor verschillende waarden van a en b het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + bx_2 + x_3 + x_4 &= a \\ x_1 + ax_2 + x_3 + bx_4 &= 1 \\ x_2 + bx_3 &= 1. \end{aligned}$$

Antw.: $b = 1$, $a \neq 1$ of $b = 0$, $a \neq 0$ strijdig;

$$b = 1, a = 1, \quad \underline{x} = (0, 0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0, -1) + \mu(0, 1, -1, 0);$$

$$b \neq 0, b \neq 1, \quad x_1 = \frac{b^3 + a^2b - ab^2 - 2b^2 + 2b - a}{b(b-1)^2}, \quad x_2 = \frac{a-1}{b-1},$$

$$x_3 = \frac{-a+b}{b(b-1)}, \quad x_4 = -\left(\frac{a-1}{b-1}\right)^2;$$

$$a = b = 0, \quad \underline{x} = (0, 1, 1, -1) + \lambda(1, 0, -1, 0).$$

3. In R_5 zijn twee lineaire deelruimten U en V gegeven, die bestaan uit de vectoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ waarvoor geldt:

$$U: \begin{cases} 3x_1 + 5x_3 + x_5 = 0 \\ 6x_2 - 8x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \quad V: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Bepaal van U en V de doorsnede $U \cap V$ en de verbinding $U + V$. Bepaal tevens de dimensie en een lineair-onafhankelijke basis van $U \cap V$ en van $U + V$.

$$\text{Antw.: } U \cap V : \underline{x} = \lambda_1(1, -2, 0, 0, -3) + \lambda_2(0, -2, 1, 0, -5);$$

$$U + V : \underline{x} = \lambda_1(0, 1, 0, 0, -2) + \lambda_2(-1, 0, 0, 0, 7) + \lambda_3(1, 0, -1, 0, 2) + \lambda_4(0, 0, 0, 1, 1).$$

4. In R_4 is de lineaire deelruimte U bepaald door de basisvectoren

$$(3, 2, 3, -2), (-1, -2, 0, 3) \text{ en } (5, 2, 6, -1).$$

De lineaire deelruimte V is gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Bepaal van U en V de doorsnede $U \cap V$ en de verbinding $U + V$.

Bepaal tevens de dimensie en een lineair-onafhankelijke basis van $U \cap V$ en van $U + V$.

Antw.: $U \cap V : \underline{x} = \lambda(1, -2, 3, 4)$;

$U + V : \underline{x} = \lambda_1(0, 0, 5, 1) + \lambda_2(0, -4, 3, 7) + \lambda_3(-1, -2, 0, 3)$.

5. In R_4 is de lineaire deelruimte U bepaald door de basisvectoren $(0, 4, -1, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$ en $(2, 0, 1, 2)$; de lineaire deelruimte V is bepaald door de basisvectoren $(0, 3, 1, 2)$ en $(2, 3, 0, 1)$.

Bepaal $U \cap V$ en $U + V$.

Antw.: $U \cap V : \underline{x} = \underline{0}$; $U + V$ de gehele R_4 .

HOOFDSTUK XVII

DETERMINANTEN.

§ 1. Determinant van de n^{de} orde.

Een determinant van de n^{de} orde stellen we voor door:

$$D = D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Hieruit blijkt dat een determinant van de n^{de} orde bestaat uit n^2 getallen. Deze getallen, die we de *elementen* van de determinant noemen, zijn gerangschikt in n rijen en n kolommen; a_{rk} is het element uit de r^{de} rij en de k^{de} kolom.

De elementen van een rij of van een kolom kunnen we beschouwen als de kentallen van een vector uit R_n ; daarom spreken we van *rij-vectoren* en van *kolom-vectoren*.

In (1) bedoelen we met $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ de kolomvectoren van D .

Met M_{rk} bedoelen we de *onderdeterminant* of *minor* van het element a_{rk} ; dit is de determinant van de $(n-1)^{\text{de}}$ orde die ontstaat als we uit D de r^{de} rij en de k^{de} kolom weglaten.

In hoofdstuk IV is (1) gedefiniëerd voor $n = 2$ en $n = 3$.

De determinant van de eerste orde, die uit slechts één element bestaat, heeft de waarde van dit element.

Met behulp van volledige inductie definiëren we de determinant (1) voor $n \geq 4$ door de betrekking:

$$D = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}. \quad (2)$$

We zeggen dat we de determinant (1) ontwikkeld hebben naar de elementen van de eerste rij.

Uit deze definitie volgt (vergelijk Hfdst. IV § 5):

- 1°. Een determinant van de n^{de} orde is gelijk aan de som van $n!$ termen.
- 2°. Er zijn evenveel termen met een $+$ teken, als met een $-$ teken.
- 3°. Elke term is het produkt van n elementen en wel uit elke rij en elke kolom één element.

§ 2. Eigenschappen van determinanten.

De onderstaande eigenschappen zijn in hoofdstuk IV bewezen voor $n = 2$ en $n = 3$. We bewijzen nu deze eigenschappen voor $n \geq 4$.

Eigenschap 1.

Een determinant verandert niet van waarde, als de overeenkomstige kolommen en rijen worden verwisseld.

Opmerking.

Een gevolg van eigenschap 1 is, dat elke eigenschap van determinanten die voor rijen geldt ook voor kolommen geldt en omgekeerd.

Zo is in (2) de determinant gedefinieerd door ontwikkeling naar de elementen van de eerste rij. Het blijkt nu dat deze determinant ook ontwikkeld kan worden naar de elementen van de eerste kolom, dus:

$$D = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{r+1}a_{r1}M_{r1} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

Bewijs van eigenschap 1.

We nemen aan dat de eigenschap geldt voor determinanten van de orde $n - 1$ ($n \geq 4$) en tonen aan dat ze dan ook geldt voor determinanten van de orde n . Verwisselen we in (1) de overeenkomstige rijen en kolommen, dan ontstaat:

$$D^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \dots & a_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ontwikkelen we deze determinant naar de elementen van de eerste rij, dan is:

$$D^* = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2k} & \dots & a_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{3k} & \dots & a_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{4k} & \dots & a_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{n-1,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \dots & a_{n-1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (3)$$

Alle minoren van D^* zijn determinanten van de $(n - 1)^{\text{de}}$ orde, waarop volgens onze veronderstelling eigenschap 1 van toepassing is. We kunnen al deze minoren dus ook ontwikkelen naar de elementen van de eerste kolom.

De coëfficiënt van a_{11} in (3) is volgens de veronderstelling gelijk aan de minor M_{11} van de determinant D in (1).

Het element a_{1k} ($k = 2, 3, \dots, n$) komt in de eerste determinant van het rechterlid van (3) niet voor, in alle andere is a_{1k} het element van de eerste kolom en de $(k - 1)^{\text{de}}$ rij. Ontwikkelen we deze determinanten naar de elementen van de eerste kolom, dan is in D^* de coëfficiënt van $(-1)^{1+k} a_{1k}$ ($k = 2, 3, \dots, n$) gelijk aan:

$$\begin{aligned}
 & a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{3,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{31} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2,k-1} & a_{4,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{2,k+1} & a_{4,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\
 & + \dots + (-1)^n a_{n1} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{n-1,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2,k-1} & \dots & a_{n-1,k-1} \\ a_{2,k+1} & \dots & a_{n-1,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{2,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

De laatste twee determinanten in (4) zijn determinanten van de $(n - 1)^{\text{de}}$ orde, die volgens onze veronderstelling niet van waarde veranderen als we de overeenkomstige rijen en kolommen verwisselen.

De laatste determinant in (4) is de minor M_{1k} ($k = 2, 3, \dots, n$) van de determinant (2).

Uit bovenstaande volgt:

$$D^* = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}.$$

Volgens (2) is dus $D = D^*$, waarmee eigenschap 1 bewezen is.

Opmerking.

De eerste $n - 1$ determinanten in (4) moeten zo opgevat worden, dat voor

$k = 2$ de eerste rij die rij is welke begint met het element a_{33} resp. a_{23} .
 Voor $k = n$ is in deze determinanten de laatste rij de rij welke begint met het element $a_{3,n-1}$ resp. $a_{2,n-1}$.

In de laatste twee determinanten is voor $k = n$ de laatste rij resp. laatste kolom die rij resp. kolom welke begint met het element $a_{2,n-1}$.

Eigenschap 2.

Als men in een determinant twee kolommen (rijen) verwisselt, wordt de waarde van de determinant met -1 vermenigvuldigd.

Bewijs.

We nemen aan dat de eigenschap geldt voor determinanten van de orde $n - 1$ ($n \geq 4$) en tonen aan dat ze dan ook geldt voor determinanten van de orde n . Volgens de definitie is de determinant D in (1) gelijk aan:

$$D = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+k}a_{1,k}M_{1,k} + \\ + (-1)^{2+k}a_{1,k+1}M_{1,k+1} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}. \quad (5)$$

Verwisselen we in (1) de k^{de} en de $(k + 1)^{\text{de}}$ kolom, dan ontstaat de determinant:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k+1} & a_{1,k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k+1} & a_{2,k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k+1} & a_{n,k} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nu is:

$$D' = a_{11}M'_{11} - a_{12}M'_{12} + \dots + (-1)^{1+k}a_{1,k+1}M'_{1k} + \\ + (-1)^{2+k}a_{1,k}M'_{1,k+1} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M'_{1n}. \quad (6)$$

In (5) en (6) is $M_{1,k} = M'_{1,k+1}$ en $M_{1,k+1} = M'_{1,k}$.

Verder ontstaat $M'_{1,l}$ voor $l \neq k$ en $l \neq k + 1$ uit $M_{1,l}$ door twee kolommen te verwisselen. Daar $M'_{1,l}$ en $M_{1,l}$ twee determinanten van de orde $n - 1$ zijn, is volgens onze veronderstelling:

$$M'_{1,l} = -M_{1,l},$$

dus $D' = -D$.

Hiermee is eigenschap 2 bewezen voor het geval dat we twee naast elkaar liggende kolommen verwisselen.

Verwisselen we twee willekeurige kolommen, bijv. de p^{de} en de q^{de} kolom ($p < q$), dan kan deze verwisseling tot stand komen door achtereenvolgens $2(q - p) + 1$ naast elkaar liggende kolommen te verwisselen. De waarde van de determinant die na de verwisseling uit de oorspronkelijke determinant D is ontstaan, is dus:

$$(-1)^{2(q-p)+1} D = -D.$$

Hiermee is eigenschap 2 aangetoond voor kolommen. Volgens eigenschap 1 geldt dan eigenschap 2 ook voor rijen.

Gevolgen.

1. Elke determinant kan nu ontwikkeld worden naar de elementen van een willekeurige rij. Willen we bijv. de determinant D ontwikkelen naar de elementen van de r^{de} rij, dan zorgen we dat deze rij eerste rij wordt door haar achtereenvolgens te verwisselen met de onmiddellijk voorafgaande rij(en). Hiervoor zijn $r - 1$ rijverwisselingen nodig. Noemen we de daardoor verkregen determinant D' , dan is:

$$D' = (-1)^{r-1} D, \quad \text{dus} \quad D = (-1)^{r+1} D'.$$

Hieruit volgt:

$$D = (-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1} + (-1)^{r+2} a_{r2} M_{r2} + \dots + (-1)^{r+n} a_{rn} M_{rn}.$$

2. Elke determinant kan ontwikkeld worden naar de elementen van een willekeurige kolom. Willen we de determinant D ontwikkelen naar de elementen van de k^{de} kolom, dan zorgen we door verwisseling van overeenkomstige rijen en kolommen dat de k^{de} kolom in D de k^{de} rij in D^* wordt. Hieruit volgt:

$$D = D^* = (-1)^{1+k} a_{1k} M^*_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k} M^*_{2k} + \dots + (-1)^{n+k} a_{nk} M^*_{nk} = \\ = (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k} M_{2k} + \dots + (-1)^{n+k} a_{nk} M_{nk}.$$

De ontwikkeling van een determinant naar de elementen van een kolom geschiedt dus volgens dezelfde regels als de ontwikkeling naar de elementen van een rij.

3. Als één der kolommen (rijen) uitsluitend uit nullen bestaat, dan is de waarde van de determinant gelijk aan nul.

Dit blijkt onmiddellijk door ontwikkeling naar de elementen van de kolom (rij) die uitsluitend uit nullen bestaat.

4. Een determinant met twee gelijke kolommen (rijen) is gelijk aan nul. Verwisselt men immers twee gelijke kolommen (rijen), dan blijkt:

$$D = -D, \quad \text{dus} \quad D = 0.$$

Eigenschap 3.

Als men alle elementen van een kolom (rij) met λ vermenigvuldigt, wordt ook de waarde van de determinant met λ vermenigvuldigd.

Bewijs.

Ontwikkelt men de determinant naar de elementen van de kolom (rij) welke

met λ zijn vermenigvuldigd, dan blijkt onmiddellijk de juistheid van deze eigenschap.

Vermenigvuldigen we de elementen van de eerste kolom met λ , dan is deze eigenschap als volgt te schrijven:

$$D(\lambda \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \lambda D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n).$$

Eigenschap 4.

Als een kolomvector (rijvector) geschreven is als de som is van twee vectoren, dan is de determinant de som van twee determinanten.

Bewijs.

Stel $\underline{a}_k = \underline{p} + \underline{q}$, dan blijkt uit de ontwikkeling van $D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ naar de elementen van de k^{de} kolom:

$$\begin{aligned} D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \dots, \underline{a}_n) &= D(\underline{a}_1, \dots, \underline{p} + \underline{q}, \dots, \underline{a}_n) = \\ &= D(\underline{a}_1, \dots, \underline{p}, \dots, \underline{a}_n) + D(\underline{a}_1, \dots, \underline{q}, \dots, \underline{a}_n). \end{aligned}$$

Gevoig.

Is $\underline{a}_k = \lambda \underline{p} + \mu \underline{q}$, dan is:

$$D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \dots, \underline{a}_n) = \lambda D(\underline{a}_1, \dots, \underline{p}, \dots, \underline{a}_n) + \mu D(\underline{a}_1, \dots, \underline{q}, \dots, \underline{a}_n).$$

Eigenschap 5.

Een determinant verandert niet van waarde, als men een kolomvector (rijvector) vermeerderd met λ maal een andere kolomvector (rijvector).

Bewijs.

$$\begin{aligned} D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p + \lambda \underline{a}_q, \dots, \underline{a}_q, \dots, \underline{a}_n) &= \\ = D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p, \dots, \underline{a}_q, \dots, \underline{a}_n) + \lambda D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p, \dots, \underline{a}_q, \dots, \underline{a}_n) &= D + 0 = D. \end{aligned}$$

Eigenschap 6.

Als enige kolomvectoren (rijvectoren) een lineair-afhankelijk stelsel vormen, dan heeft de determinant de waarde nul.

Bewijs.

Stel er zijn p kolomvectoren, die een lineair-afhankelijk stelsel vormen. Zonder bezwaar kunnen we veronderstellen dat dit de eerste p kolomvectoren zijn en dat $\lambda_1 \neq 0$ in:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p = \underline{0}$$

Dan is:

$$\begin{aligned} D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p, \dots, \underline{a}_n) &= \frac{1}{\lambda_1} D(\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_p \underline{a}_p, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \\ &= \frac{1}{\lambda_1} D(\underline{0}, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = 0. \end{aligned}$$

Eigenschap 7.

Als de kolomvectoren (rijvectoren) een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, dan is de waarde van de determinant ongelijk aan nul.

Bewijs.

Daar de n kolomvectoren een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, vormen ze een lineair-onafhankelijke basis van R_n . Alle vectoren van R_n , ook de eenheidsvectoren, zijn dus op één en slechts één manier in deze basis uit te drukken. Zij:

$$\underline{e}_1 = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_r \underline{a}_r + \dots + \lambda_n \underline{a}_n,$$

dan zijn hierin niet alle λ 's gelijk aan nul, stel $\lambda_r \neq 0$.

Vervangen we de r^{de} kolomvector uit D door:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_r \underline{a}_r + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{e}_1,$$

dan blijkt:

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r, \dots, \underline{a}_n) = \frac{1}{\lambda_r} D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{e}_1, \dots, \underline{a}_n).$$

Op deze wijze kunnen we alle kolomvectoren van D vervangen door de eenheidsvectoren uit R_n . Door verwisseling van rijen blijkt tenslotte:

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = C \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = C,$$

waarin C een constante $\neq 0$ voorstelt, dus $D \neq 0$.

Gevolgen van eigenschappen 6 en 7.

1°. Een determinant is dan en alleen dan gelijk aan nul, als de kolomvectoren (rijvectoren) een lineair-afhankelijk stelsel vormen.

2°. Een determinant is dan en alleen dan ongelijk aan nul, als de kolomvectoren (rijvectoren) een lineair-onafhankelijk stelsel vormen.

Opmerking.

Is A een $(n \times n)$ matrix, d.w.z. een matrix met n rijen en n kolommen, dan geven we de determinant, die uit dezelfde elementen bestaat, aan met $\det. A$ of $|A|$.

Uit bovenstaande volgt dan:

1°. $|A|$ is dan en alleen dan gelijk aan nul, als $\text{rang } A < n$;

2°. $|A|$ is dan en alleen dan ongelijk aan nul, als $\text{rang } A = n$.

§ 3. Regel van Cramer.

Gegeven zijn n niet-homogene vergelijkingen met n onbekenden:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2m} x_m + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_m + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$(b_1, b_2, \dots, b_n \text{ niet alle nul}).$

Beschouwen we de coëfficiënten van x_m ($m = 1, 2, \dots, n$) als de kentallen van een vector:

$$\underline{a}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm})$$

en de bekende termen als de kentallen van de vector:

$$\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

dan is dit stelsel vergelijkingen te schrijven als:

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_m \underline{a}_m + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}. \quad (2)$$

Regel van Cramer.

Het stelsel vergelijkingen (1) heeft één en slechts één oplossing als

$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \neq 0$ en deze oplossing is:

$$x_m = \frac{D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{m-1}, \underline{b}, \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n)}{D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)}, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Bewijs.

Daar $D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \neq 0$, heeft de coëfficiënten-matrix A van het stelsel vergelijkingen (1) de rang n . De aangevulde matrix heeft dan ook de rang n .

De vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vormen dus een lineair-onafhankelijke basis van R_n .

De vector \underline{b} is derhalve slechts op één manier in deze basis uit te drukken.

Vergelijking (2) en dus ook het stelsel (1) heeft één en slechts één oplossing.

Om deze oplossing te vinden, schrijven we (2) als volgt:

$$x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_{m-1} \underline{a}_{m-1} + 1 \cdot (x_m \underline{a}_m - \underline{b}) + x_{m+1} \underline{a}_{m+1} + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}.$$

De vectoren

$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{m-1}, x_m \underline{a}_m - \underline{b}, \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n$$

vormen een lineair-afhankelijk stelsel, dus is:

$$D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{m-1}, x_m \underline{a}_m - \underline{b}, \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$x_m D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m) - D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{m-1}, \underline{b}, \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n) = 0,$$

waarmee (3) bewezen is.

In de praktijk zal de berekening van de determinanten zeer bewerkelijk zijn, zodat men meestal met de methode uit de vorige paragraaf het stelsel vergelijkingen (1) sneller kan oplossen.

Komen echter in de coëfficiënten of in de bekende termen van (1) variabele grootheden voor, dan levert de regel van Cramer zekere voordelen op, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Toepassing.

Los op voor alle waarden van a het stelsel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + ax_2 + 2x_3 &= 2 \\ ax_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Oplossing.

Stellen we

$$D = \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix},$$

dan blijkt: $D = (a - 3)(4 - a^2)$.

Voor $a \neq 3$, $a \neq 2$ en $a \neq -2$ is $D \neq 0$, zodat er dan slechts één oplossing is, n.l.

$$x_1 = \frac{2}{a+2}, \quad x_2 = 0 \quad \text{en} \quad x_3 = \frac{2}{a+2}.$$

Voor $a = 3$, is het stelsel vergelijkingen afhankelijk:

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

De oplossingsvectoren zijn:

$$\underline{x} = (0, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}) + \lambda(1, -1, 0).$$

Ook voor $a = 2$ is het stelsel vergelijkingen afhankelijk:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

De oplossingsvectoren zijn nu:

$$\underline{x} = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1).$$

Tenslotte gaan voor $a = -2$ de vergelijkingen over in:

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

In dit geval zijn de vergelijkingen strijdig; er is dan geen oplossing.

§ 4. Produkt van twee determinanten.

Stelling.

Zijn $|A|$ en $|B|$ twee determinanten van de n^{de} orde, dan is het produkt $|A| \cdot |B|$ weer een determinant $|C|$ van de n^{de} orde, waarvan het element c_{kl} gelijk is aan het rij-kolom-produkt van de k^{de} rij van A en de l^{de} kolom van B . (Zie opmerking hfdst. XV § 2.)

Bewijs.

We bewijzen de stelling voor $n = 3$; voor $n \geq 4$ verloopt het bewijs op dezelfde wijze.

Stel

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

en $|C| =$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix},$$

dan moeten we bewijzen:

$$|A| \cdot |B| = |C|.$$

Daartoe schrijven we $|A| \cdot |B|$ als volgt:

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Immers van de laatste determinant komt elke term die niet nul is, ook voor in $|A| \cdot |B|$ en omgekeerd komt elke term uit $|A| \cdot |B|$ ook voor in het rechterlid van (1).

We vermenigvuldigen in (1) de 4^{de} rij met a_{11} , de 5^{de} met a_{12} , de 6^{de} met a_{13} en tellen ze daarna bij de eerste rij op. Vervolgens vermenigvuldigen we de 4^{de} rij met a_{21} , de 5^{de} rij met a_{22} , de 6^{de} rij met a_{23} en tellen ze daarna bij de tweede rij op, enz.

Op deze wijze blijkt:

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Hierin is

$$c_{kl} = a_{k1}b_{1l} + a_{k2}b_{2l} + a_{k3}b_{3l}, \quad (k = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3),$$

dat is het rij-kolom-product van de k^{de} rij van $|A|$ en de l^{de} kolom van $|B|$.

Uit (2) blijkt:

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = |C|.$$

§ 5. Toepassingen.

1. Bereken:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Berekening.

Ontwikkel D naar de elementen van de tweede kolom:

$$D = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2D_1 + 3D_2.$$

Om D_1 te berekenen, verminderen we de tweede kolom met de eerste kolom en ontwikkelen daarna naar de derde rij:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 42 = 38.$$

Om D_2 te berekenen, trekken we 7 maal de derde kolom van de eerste kolom af, tellen de derde kolom bij de tweede kolom op en ontwikkelen daarna naar de eerste rij:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 45 & -5 & -6 \\ -16 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 45 & -5 \\ -16 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -16 & 7 \end{vmatrix} = 5(63 - 16) = 235.$$

$$D = -2 \cdot 38 + 3 \cdot 235 = 629.$$

2. Toon aan voor $a, b, c \neq 0$:

$$D = \begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ca & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

en ontbind D in factoren.

Oplossing.

Vermenigvuldig de rijen van de eerste determinant resp. met a , b en c en deel daarna de eerste kolom door abc .

Trek in de tweede determinant de derde rij af van de eerste en van de tweede rij en ontwikkel daarna naar de eerste kolom:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & a^2-c^2 \\ b-c & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a+c \\ 1 & b+c \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a).$$

3. Herleid de determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

zo, dat de elementen van de eerste rij alle 1 zijn.

Oplossing.

Vermenigvuldig de kolommen resp. met 4, 2, 12 en 3:

$$D = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3} \begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 \\ 16 & 4 & 36 & 0 \\ -28 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 24 & -9 \end{vmatrix}.$$

Na deling van de eerste rij door 12, (we delen tevens de tweede, derde en vierde rij resp. door 4, 2 en 3), vinden we:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ -14 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & -3 \end{vmatrix}.$$

4. Los met behulp van de regel van Cramer het volgende stelsel vergelijkingen op (a , b , c en d zijn ongelijk):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 + d^2x_4 = 0 \\ a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 + d^3x_4 = 1 \end{cases}$$

Oplossing.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 1 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = (b-c)(b-d)(c-d).$$

Hieruit volgt: $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & c & d \\ a^2 & 0 & c^2 & d^2 \\ a^3 & 1 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = -(a-c)(a-d)(c-d);$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{(b-c)(b-d)(b-a)}.$$

We hadden ook x_2 uit x_1 kunnen afleiden door cyclische letterverwisseling. Zo vinden we:

$$x_3 = \frac{1}{(c-d)(c-a)(c-b)} \quad \text{en} \quad x_4 = \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

§ 6. Opgaven.

1. Bereken:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 14 & 17 & 16 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 17 & 24 & 24 \\ 2 & 8 & 7 & 15 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & 3 \\ 2 & -10 & 1 & 4 \\ 3 & 11 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

Antw.: $D_1 = -784$; $D_2 = 5168$.

2. Schrijf het produkt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

als determinant van de derde orde.

Aanwijzing: Schrijf eerst de tweede determinant als

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Controleer tenslotte het antwoord door alle determinanten uit te rekenen.

$$\text{Antw.: } \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 7 & 12 & 3 \\ 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}; \text{ controle: } 6 \times 1 = 6.$$

3. Bereken:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$\text{Antw.: } (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \\ (ab+ac+ad+bc+bd+cd); (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

4. Toon aan:

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ a_1 & x & c_1 & c_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & x & d_1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \end{vmatrix} = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4).$$

5. Toon aan:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^2} \begin{vmatrix} |a_1 b_2| & |a_1 c_2| & |a_1 d_2| \\ |a_1 b_3| & |a_1 c_3| & |a_1 d_3| \\ |a_1 b_4| & |a_1 c_4| & |a_1 d_4| \end{vmatrix}.$$

als $a_1 \neq 0$ en $|a_1 p_k| = a_1 p_k - a_k p_1$, $k = 2, 3$ en 4 , $p = b, c$ en d .

6. Bepaal de wortels van:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 2 & x+2 \\ 1 & x-2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2-x \\ 1 & -4 & 3 & -x \end{vmatrix} = 4; \begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 & ab & b & 1 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d^2 & ad & d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Antw.: $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$;

$b = d$, of $a = b = 0$, of $a = c = 0$: elke waarde van x voldoet;

$$a \neq 0 \text{ en } b \neq d: x_1 = b, x_2 = d, x_3 = \frac{bc}{a};$$

$$a = 0, b \neq 0, c \neq 0 \text{ en } b \neq d: x_1 = b, x_2 = d.$$

7. Bereken x_1 , x_2 en x_3 als $a \neq b \neq c$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= a^4 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 &= b^4 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 &= c^4 \end{aligned} \right\}$$

Antw.: $x_1 = abc(a + b + c)$, $x_2 = -(a + b)(a + c)(b + c)$,
 $x_3 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc$.

8. Los op:

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 &= 1 \\ bx_1 + cx_2 + dx_3 + ax_4 &= 1 \\ cx_1 + dx_2 + ax_3 + bx_4 &= 1 \\ dx_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Antw.: 1°. $a + b + c + d \neq 0$, $a - b + c - d \neq 0$, terwijl niet gelijktijdig $a = c$ en $b = d$:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{a + b + c + d};$$

2°. $a + b + c + d = 0$: vergelijkingen strijdig;

3°. $a - b + c - d = 0$, a , b , c en d niet alle gelijk:

$$x_1 = x_3 = \frac{1}{a + c}, \quad x_2 = x_4;$$

4°. $a = c$, $b = d$ en $a^2 \neq b^2$: $x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = \frac{1}{a + b}$;

5°. $a = b = c = d \neq 0$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{a}$.

9. Bereken de onderstaande determinant van de n^{de} orde:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x^2 & x & 0 & \dots \\ x & 1 + x^2 & x & \dots \\ 0 & x & 1 + x^2 & \dots \\ 0 & 0 & x & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Antw.: $x^2 \neq 1$: $D_n = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}$; $x^2 = 1$: $D_n = n + 1$.

LINEAIRE TRANSFORMATIES.

§ 1. **Vectortransformaties.**

Zijn R_n en R_m twee lineaire vectorruimten, dan spreekt men van een *afbeelding of transformatie van R_n in R_m* , als aan elke vector $\underline{x} \in R_n$ door één of ander voorschrift één vector $\underline{x}' \in R_m$ wordt toegevoegd.

Men noemt \underline{x}' de *beeldvector* van \underline{x} of ook wel de *getransformeerde vector* \underline{x} . We schrijven dit als volgt:

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}', \quad \text{of} \quad A\underline{x} = \underline{x}';$$

lees: \underline{x} wordt afgebeeld op \underline{x}' , of: de getransformeerde vector \underline{x} is \underline{x}' , of: de beeldvector van \underline{x} is \underline{x}' .

De verzameling van alle beeldvectoren \underline{x}' heet de *beeldruimte* van de transformatie.

Voorbeelden.

1. We nemen zowel voor R_n als voor R_m de twee-dimensionale vectorruimte R_2 (met R_n en R_m bedoelen we in het vervolg steeds lineaire vectorruimten).

Elke vector $\underline{x} = (x, y)$ transformeren we in $\underline{x}' = (x, -y)$.

Elke vector $\underline{x} \in R_2$ heeft dus één beeldvector \underline{x}' ; omgekeerd is elke vector in R_2 het beeld van één en slechts één vector. De beeldruimte is dus de gehele R_2 .

Deze transformatie kunnen we als volgt schrijven:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

2. Zowel voor R_n als voor R_m nemen we weer R_2 . Aan elke vector $\underline{x} \in R_2$ wordt toegevoegd de vector $\underline{x}' = \underline{x} + \underline{e}_1$.

Ook hier heeft elke vector één beeldvector en is elke vector het beeld van één en slechts één vector. De beeldruimte is dus weer R_2 .

Deze transformatie kunnen we als volgt schrijven:

$$A\underline{x} = \underline{x} + \underline{e}_1 \quad \text{of als} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

3. Voor R_n kiezen we R_3 en voor R_m kiezen we R_2 . Elke vector $\underline{x} = (x, y, z)$ in R_3 wordt getransformeerd in $\underline{x}' = (x, y)$ in R_2 . Deze transformatie kan geschreven worden als:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Elke vector in R_3 heeft weer één beeldvector, maar elke vector in R_2 (dat is de beeldruimte) is nu het beeld van oneindig veel vectoren in R_3 .

§ 2. Lineaire vectortransformaties.

Definitie.

Een vectortransformatie A van een vectorruimte R_n in een vectorruimte R_m is een lineaire vectortransformatie, als voor elk tweetal vectoren \underline{x}_1 en \underline{x}_2 in R_n en elk getal λ geldt:

$$A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 \quad \text{en} \quad A(\lambda\underline{x}_1) = \lambda A(\underline{x}_1).$$

Merk op dat $A\underline{x}_1$, $A\underline{x}_2$, $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$ en $A(\lambda\underline{x}_1)$ vectoren in R_m zijn.

In de voorbeelden 1 en 3 van § 1 is aan deze definitie voldaan (ga zelf na). Deze transformaties zijn dus lineaire vectortransformaties.

In voorbeeld 2 is

$$A\underline{x} = \underline{x}_2 + \underline{e}_1, \quad A(\lambda\underline{x}) = \lambda\underline{x} + \underline{e}_1, \quad \text{dus} \quad A(\lambda\underline{x}) \neq \lambda A\underline{x};$$

$$A\underline{x}_1 = \underline{x}_1 + \underline{e}_1, \quad A\underline{x}_2 = \underline{x}_2 + \underline{e}_1, \quad A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{e}_1,$$

dus

$$A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) \neq A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2.$$

Deze transformatie is dus niet een lineaire vectortransformatie.

Opmerkingen.

1. Uit de definitie van een lineaire vectortransformatie volgt:

$$A(\lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2) = A(\lambda\underline{x}_1) + A(\mu\underline{x}_2) = \lambda A\underline{x}_1 + \mu A\underline{x}_2.$$

2. Uit $A(\lambda\underline{x}) = \lambda A\underline{x}$ volgt voor $\lambda = 0$:

$$A\underline{o} = \underline{o}'$$

waarin \underline{o} de nulvector in R_n en \underline{o}' de nulvector in R_m is. Hieruit volgt:

Bij elke lineaire vectortransformatie van R_n in R_m wordt de nulvector in R_n afgebeeld op de nulvector in R_m .

In het vervolg bedoelen we met een lineaire transformatie steeds een lineaire vectortransformatie.

3. Is $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$ een stelsel lineair onafhankelijke vectoren in R_n , dan vormen deze vectoren een lineair-onafhankelijke basis van R_n . Elke vector $\underline{x} \in R_n$ is dan slechts op één manier te schrijven als een lineaire combinatie van deze vectoren:

$$\underline{x} = x_1 \underline{p}_1 + x_2 \underline{p}_2 + \dots + x_n \underline{p}_n. \quad (1)$$

Bedoelen we met A een lineaire transformatie van R_n in R_m , dan is:

$$A\underline{x} = x_1 A\underline{p}_1 + x_2 A\underline{p}_2 + \dots + x_n A\underline{p}_n. \quad (2)$$

Hierin is Ap_k de beeldvector van p_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

De beeldvector van elke vector $\underline{x} \in R_n$ is dus te schrijven als dezelfde lineaire combinatie van de beeldvectoren van p_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Hieruit blijkt:

Een lineaire transformatie van R_n in R_m is ondubbelzinnig bepaald door de beeldvectoren van n lineair onafhankelijke vectoren in R_n , dus van een lineair-onafhankelijke basis van R_n .

§ 3. Transformatiematrix.

Stel: een lineaire transformatie A beeldt R_n af in R_m . In R_n en R_m kiezen we achtereenvolgens de (lineair-onafhankelijke) basissen p_1, p_2, \dots, p_n en q_1, q_2, \dots, q_m .

Stel voor $k = 1, 2, \dots, n$:

$$Ap_k = \underline{a}_k \in R_m$$

en

$$\underline{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}) = a_{1k}q_1 + a_{2k}q_2 + \dots + a_{mk}q_m.$$

Elke vector $\underline{x} \in R_n$ wordt door de lineaire transformatie A afgebeeld op een vector $\underline{x}' \in R_m$.

Stel: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$

en $\underline{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) = x'_1q_1 + x'_2q_2 + \dots + x'_mq_m$.

Ook is

$$\underline{x}' = A\underline{x} = x_1Ap_1 + x_2Ap_2 + \dots + x_nAp_n = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_n\underline{a}_n.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Deze vergelijking kan geschreven worden als een stelsel van m niet-homogene vergelijkingen met n onbekenden:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Deze vergelijkingen heten *transformatievergelijkingen*.

De matrix van het stelsel transformatievergelijkingen is:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

De matrix A is door de lineaire transformatie A ondubbelzinnig bepaald. We noemen deze matrix de *transformatiematrix* van de lineaire transformatie van R_n in R_m t.o.v. de gegeven basissen.

Uit het bovenstaande volgt:

Is gegeven een lineaire transformatie A van R_n in R_m en is in R_n en in R_m een lineair-onafhankelijke basis gekozen, dan is de k^{de} kolomvector van de transformatiematrix A de beeldvector in R_m van de k^{de} basisvector van R_n .

De matrix A heeft m rijen en n kolommen; we noemen A daarom een $m \times n$ matrix en geven dit soms aan met A_{mn} .

Is in R_n en in R_m een lineair-onafhankelijke basis gegeven, dan is elke $m \times n$ matrix A te beschouwen, als de transformatiematrix van een lineaire transformatie A van R_n in R_m t.o.v. de gegeven basissen.

De lineaire transformatie $\underline{x}' = A\underline{x}$ kunnen we ook als volgt aangeven:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Het rechterlid is het produkt van een $m \times n$ matrix met een kolomvector die n kentallen heeft. Om te zorgen dat (3) identiek is met (2), definiëren we:

Definitie.

Onder het produkt van een $m \times n$ matrix A en een kolomvector \underline{x} met n kentallen verstaan we een kolomvector met m kentallen, waarvan het k^{de} kental ($k = 1, 2, \dots, m$) gelijk is aan het rij-kolom-produkt van de k^{de} rij van A en de kolom(vector) \underline{x} . Zijn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

twee $m \times n$ matrices, dan is per definitie $A = B$ dan en slechts dan, als $a_{kl} = b_{kl}$, ($k = 1, 2, \dots, m$ en $l = 1, 2, \dots, n$).

Beschouwen we A en B als transformatiematrices, dan is het duidelijk dat, als $A = B$, elke vector $\underline{x} \in R_n$ door beide transformaties wordt afgebeeld op dezelfde vector $A\underline{x} = B\underline{x} \in R_m$.

Zijn omgekeerd twee transformaties A en B van R_n in R_m identiek, d.w.z. wordt elke vector $\underline{x} \in R_n$ door beide transformaties afgebeeld op dezelfde vector $A\underline{x} = B\underline{x} \in R_m$, dan geldt dit ook voor de basisvectoren in R_n .

De overeenkomstige kolomvectoren in de transformatiematrices A en B zijn dus gelijk, dus de overeenkomstige elementen in A en B zijn gelijk, of $A = B$. Hieruit volgt:

Als $A\underline{x} = B\underline{x}$ voor elke vector $\underline{x} \in R_n$, dan is $A = B$.

Opmerking.

Is gegeven $A\underline{x} = B\underline{x}$ voor één of meer vectoren $\underline{x} \in R_n$, dan kan $A \neq B$. Bijv. voor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

is:

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{en ook} \quad B\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Beeldruimte en kern van een lineaire transformatie.

Bij een lineaire transformatie van R_n in R_m wordt de verzameling van alle beeldvectoren in R_m de *beeldruimte* genoemd.

De verzameling van alle vectoren in R_n die worden afgebeeld op de nulvector in R_m , heet de *kern* van de lineaire transformatie.

Stelling 1.

De beeldruimte van een lineaire transformatie van R_n in R_m is een lineaire deelruimte van R_m ; de kern is een lineaire deelruimte van R_n .

Bewijs.

Zijn \underline{x}_1' en \underline{x}_2' twee vectoren van de beeldruimte, dan zijn er twee vectoren $\underline{x}_1 \in R_n$ en $\underline{x}_2 \in R_n$ zodat:

$$A\underline{x}_1 = \underline{x}_1' \quad \text{en} \quad A\underline{x}_2 = \underline{x}_2'.$$

Hieruit volgt:

$$A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = \underline{x}_1' + \underline{x}_2' \quad \text{en} \quad A(\lambda\underline{x}_1) = \lambda A\underline{x}_1 = \lambda\underline{x}_1'.$$

Met \underline{x}_1' en \underline{x}_2' behoren dus ook $\underline{x}_1' + \underline{x}_2'$ en $\lambda\underline{x}_1'$ tot de beeldruimte, dus is de beeldruimte een lineaire deelruimte van R_m .

Zijn \underline{x}_1 en \underline{x}_2 twee vectoren in R_n die op de nulvector $\underline{0}' \in R_m$ worden afgebeeld, dan is:

$$A\underline{x}_1 = \underline{0}' \quad \text{en} \quad A\underline{x}_2 = \underline{0}'.$$

Hieruit volgt:

$$A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = \underline{o}' \quad \text{en} \quad A(\lambda\underline{x}_1) = \lambda \cdot A\underline{x}_1 = \lambda \cdot \underline{o}' = \underline{o}'.$$

Met \underline{x}_1 en \underline{x}_2 behoren dus ook $\underline{x}_1 + \underline{x}_2$ en $\lambda\underline{x}_1$ tot de kern, dus is de kern een lineaire deelruimte van R_n .

Stelling 2.

**Bij een lineaire transformatie A van R_n in R_m is de dimensie van de beeldruimte gelijk aan de rang van de transformatiematrix A ;
de dimensie van de kern is gelijk aan de dimensie n van R_n verminderd met de rang van A .**

Bewijs.

Uit (1) van § 3 volgt, dat de beeldruimte opgespannen wordt door de kolomvectoren van A . De dimensie van de beeldruimte is dus gelijk aan het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van A , dat is de rang van A . De vectoren van de kern zijn die vectoren in R_n die voldoen aan:

$$A\underline{x} = \underline{o}',$$

dat zijn de oplossingsvectoren van het onderstaande stelsel van m homogene vergelijkingen met n onbekenden:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}.$$

Volgens hfdst. XVI § 4 vormen de oplossingsvectoren een $(n - q)$ dimensionale deelruimte van R_n , waarin q de rang van de matrix is. De dimensie van de oplossingsruimte van dit stelsel homogene vergelijkingen, dat is de kern in R_n , is dus gelijk aan de dimensie van R_n verminderd met de rang van A .

Uit stelling 2 volgt: $\dim.$ beeldruimte $+ \dim.$ kern $= \dim. R_n = n$.

§ 5. Lineaire transformatie in affiene en euclidische ruimten.

In hoofdstuk I hebben we in R_2 en in R_3 aan elke vector één punt en aan elk punt één vector toegevoegd. Uit de definities van optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren blijkt, dat deze vectoren lineaire vectorruimten R_2 en R_3 vormen.

De verzameling punten en vectoren in R_2 en in R_3 noemen we de twee- resp. drie-dimensionale *affiene ruimte*.

In hoofdstuk II is in R_2 en in R_3 een bepaalde metriek ingevoerd. De lineaire vectorruimten werden daardoor euclidische vectorruimten. De daarbij behorende affiene ruimten noemen we *euclidische ruimten*.

In het algemeen:

Voegen we aan elke vector (x_1, x_2, \dots, x_n) in een n -dimensionale lineaire vectorruimte R_n één punt (x_1, x_2, \dots, x_n) toe, en aan elk punt (x_1, x_2, \dots, x_n) één vector (x_1, x_2, \dots, x_n) in R_n , dan vormt de verzameling van deze punten en vectoren een n -dimensionale affiene ruimte.

Is in een affiene ruimte de bijbehorende lineaire vectorruimte een euclidische vectorruimte E_n , dan noemt men deze affiene ruimte een euclidische ruimte.

Wordt door een lineaire vectortransformatie van een lineaire vectorruimte R_n in een lineaire vectorruimte R_m een vector (x_1, x_2, \dots, x_n) in R_n afgebeeld op de vector $(x_1', x_2', \dots, x_m')$ in R_m , dan wordt in de bijbehorende affiene ruimten het punt (x_1, x_2, \dots, x_n) afgebeeld op het punt $(x_1', x_2', \dots, x_m')$. Men noemt het punt $(x_1', x_2', \dots, x_m')$ het *beeldpunt* van het punt (x_1, x_2, \dots, x_n) en spreekt dan ook wel van *puntransformatie*.

Evenzo kan men met een lineaire transformatie van een euclidische ruimte E_n in een euclidische ruimte E_m zowel een vectortransformatie als een punttransformatie bedoelen.

De lineaire transformatie van voorbeeld 1 § 1 kunnen we in een affiene ruimte E_2 opvatten als de spiegeling van elke vector (elk punt) t.o.v. de x -as in de richting van de y -as. De kolomvectoren van de transformatiematrix A zijn de beeldvectoren van e_1 en e_2 . Daar $(1, 0)$ overgaat in $(1, 0)$ en daar $(0, 1)$ overgaat in $(0, -1)$, is de transformatiematrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

De lineaire transformatie van voorbeeld 3 § 1 kunnen we opvatten als de projectie in de richting van de z -as van elke vector (elk punt) in de affiene ruimte E_3 op de affiene ruimte E_2 . Daar $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$ resp. overgaan in $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, 0)$ is de transformatiematrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

§ 6. Toepassingen.

1. Van een lineaire transformatie A van R_2 in zichzelf is gegeven:

$$\underline{a} = (2, 1) \rightarrow \underline{a}' = (5, 4) \quad \text{en} \quad \underline{b} = (3, 2) \rightarrow \underline{b}' = (8, 7).$$

Gevraagd de transformatiematrix en de beeldvector van $\underline{v} = (1, 3)$.

Oplissing.

We zagen dat de kolomvectoren van de transformatiematrix de beeldvectoren van e_1 en e_2 zijn.

Uit:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 \quad \text{en} \\ \underline{b} &= 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \end{aligned}$$

volgt:

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= 2\underline{a} - \underline{b} \quad \text{en} \\ \underline{e}_2 &= -3\underline{a} + 2\underline{b}, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} A\underline{e}_1 &= 2A\underline{a} - A\underline{b} = 2\underline{a}' - \underline{b}' = (2, 1) \quad \text{en} \\ A\underline{e}_2 &= -3A\underline{a} + 2A\underline{b} = -3\underline{a}' + 2\underline{b}' = (1, 2). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

We kunnen A ook als volgt bepalen:

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Hiermee wordt uitgedrukt dat de eerste en de tweede kolomvector in de linker uitgeschreven matrix worden getransformeerd in resp. de eerste en de tweede kolomvector van de matrix in het rechterlid.

We vormen nu in beide matrices dezelfde lineaire combinaties van de kolomvectoren zó, dat de kolomvectoren in de linker uitgeschreven matrix $(1, 0)$ en $(0, 1)$ worden.

Door in beide matrices 2 maal de eerste kolomvector te verminderen met de tweede kolomvector en daarna de tweede kolomvector te verminderen met 3 maal de eerste kolomvector, ontstaat achtereenvolgens:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}; \quad A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

dus

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De beeldvector van $\underline{y} = (1, 3)$ is:

$$A\underline{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

De beeldvector $A\underline{y}$ kunnen we ook als volgt bepalen:

$$\underline{y} = -7\underline{a} + 5\underline{b}, \quad \text{dus} \quad A\underline{y} = -7A\underline{a} + 5A\underline{b} = -7\underline{a}' + 5\underline{b}' = (5, 7).$$

2. Van een lineaire transformatie van \mathbb{R}_3 in \mathbb{R}_2 is gegeven:

$$(1, 2, 1) \rightarrow (2, 4), \quad (3, 1, 0) \rightarrow (3, 7) \quad \text{en} \quad (0, 3, 1) \rightarrow (1, 3).$$

Bepaal de transformatiematrix en de kern.

Oplossing.

We bepalen de transformatiematrix A uit:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Door geschikt gekozen lineaire combinaties van vectoren zorgen we, dat de kolomvectoren van de uitgeschreven matrix in het linkerlid de vectoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$ in \mathbb{R}_3 worden. De herleiding kan als volgt verlopen:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dus } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De kern wordt gevormd door de vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}_3$ met $A\underline{x} = \underline{0}'$ in \mathbb{R}_2 , dus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{array}$$

De kern is dus de één-dimensionale lineaire deelruimte $\underline{x} = \lambda(1, -2, -1)$.

3. Van een lineaire transformatie van de drie-dimensionale affiene ruimte in zichzelf is de transformatiematrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De lijn $l: x + y - z = x - y + z - 2 = 0$ is een lijn in deze ruimte.

1°. Bepaal het beeld van l .

2°. Toon aan, dat er een rechte n bestaat die l tot beeld heeft.

Oplossing.

1°. Een vectorvoorstelling van l is:

$$\underline{x} = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 1).$$

Alle punten $(1, \lambda, 1 + \lambda)$ worden getransformeerd in de punten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda \\ 1 \\ 1 + 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Het beeld van l is dus de rechte:

$$\underline{x} = (2, 1, 1) + \lambda (2, 0, 3).$$

2°. Is \underline{x}' het beeld van \underline{x} , dan zijn de transformatievergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= && 2z \\ y' &= x \\ z' &= 2y + z \end{aligned} \right\}$$

Schrijven we l als: $x' + y' - z' = x' - y' + z' - 2 = 0$,
dan blijkt dat l het beeld is van de rechte n :

$$x - 2y + z = -x + 2y + 3z - 2 = 0.$$

§ 7. Opgaven.

1. De vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ zijn lineair afhankelijke vectoren in R_n .
 A is een lineaire transformatie van R_n in R_m .
Toon aan, dat $A\underline{a}_1, A\underline{a}_2, \dots, A\underline{a}_r$ lineair afhankelijke vectoren in R_m zijn.

2. Een lineaire transformatie van R_2 in zichzelf is gegeven door:

$$(3, 2) \rightarrow (1, 8) \quad \text{en} \quad (1, 1) \rightarrow (-2, 1).$$

Bepaal de transformatiematrix en de beeldvector van $\underline{x} = (2, 3)$.

Antw.: $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}; (-11, -3)$.

3. Een lineaire transformatie van R_3 in zichzelf is gegeven door:

$$(2, 0, -1) \rightarrow (0, 2, -3), \quad (0, 1, 1) \rightarrow (2, 1, 4) \quad \text{en} \quad (1, 1, 0) \rightarrow (1, 2, 1).$$

Bepaal de transformatiematrix en de beeldvector van $\underline{x} = (-1, 2, 1)$.

Antw.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; (1, 1, 5)$.

4. Een lineaire transformatie van R_2 in zichzelf is gegeven door:

$$(1, 1) \rightarrow (3, 6) \quad \text{en} \quad (2, 1) \rightarrow (4, 8).$$

Bepaal de beeldruimte en de kern.

Antw.: $\underline{x} = \lambda (1, 2); \underline{x} = \lambda (2, -1)$.

5. Een lineaire transformatie van R_3 in zichzelf is gegeven door:

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1), \quad (1, 2, 0) \rightarrow (5, 2, 9) \quad \text{en} \quad (0, 2, -2) \rightarrow (0, -2, -4).$$

Bepaal de beeldruimte en de kern.

Antw.: $\underline{x} = \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 2)$; $\underline{x} = \lambda(2, -2, 1)$.

6. Van een lineaire transformatie van de twee-dimensionale affiene ruimte in zichzelf is de transformatiematrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Een lijn l in deze ruimte is gegeven door:

$$\underline{x} = (4, 1) + \lambda(2, 3) \quad \text{of door} \quad 3x - 2y = 10.$$

1°. Bepaal met behulp van beide voorstellingen van l het beeld van l .

2°. Bepaal eveneens op twee manieren de rechte waarvan l het beeld is.

Antw.: $\underline{x} = (6, -1) + \lambda(8, 7)$ of $7x - 8y = 50$; $\underline{x} = (2, 1) + \lambda(0, 1)$ of $x = 2$.

7. Van een lineaire transformatie van de twee-dimensionale affiene ruimte in zichzelf is de transformatiematrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Toon aan, dat het beeld van een rechte in deze ruimte weer een rechte is en dat elke rechte in deze ruimte het beeld is van een rechte.

8. Van een lineaire transformatie van de drie-dimensionale affiene ruimte in zichzelf is de determinant van de bijbehorende matrix ongelijk aan nul.

Toon aan, dat het beeld van een vlak in deze ruimte weer een vlak is en dat elk vlak in deze ruimte het beeld is van een vlak.

9. Van een lineaire transformatie van de drie-dimensionale affiene ruimte in zichzelf is de transformatiematrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Een rechte l in deze ruimte heeft tot vergelijkingen:

$$x + y + z + 4 = x - y + z = 0.$$

1°. Bepaal het beeld m van l .

2°. Bepaal de rechte n waarvan l het beeld is.

3°. Bepaal alle punten die in zichzelf worden afgebeeld en toon aan, dat l , m en n elkaar in één van deze punten snijden.

Antw.: $x - z - 4 = y + 2z + 8 = 0$; $x + z + 2 = 2x + y = 0$.

10. Een lineaire transformatie van R_4 in R_5 is gegeven door:

$$(1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 2), \quad (1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 3, 1, 3), \\ (0, 0, 1, 0) \rightarrow (1, -2, -3, -2, 0) \quad \text{en} \quad (0, 0, 1, 1) \rightarrow (3, -3, -3, -3, 3).$$

Bepaal de transformatiematrix, de beeldruimte en de kern.

$$\text{Antw.: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \underline{x} &= \lambda (1, 0, 1, 0, 2) + \mu (0, 1, 2, 1, 1) \\ \underline{x} &= \lambda (-1, 2, 1, 0) + \mu (-2, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

11. In een twee-dimensionale euclidische ruimte met orthonormale basis is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Toon aan, dat alle vectoren om de oorsprong gedraaid worden over hoek φ .

12. In een twee-dimensionale euclidische ruimte met orthonormale basis is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Toon aan, dat elke vector $A\underline{x}$ verkregen wordt door \underline{x} te spiegelen t.o.v. de x -as en daarna om de oorsprong over hoek φ te draaien.

13. In een twee-dimensionale euclidische ruimte met orthonormale basis is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Omschrijf hoe men de beeldvectoren meetkundig kan verkrijgen.

§ 8. Optelling van matrices; vermenigvuldiging van een matrix met een scalar.

Zijn A en B twee $m \times n$ matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

dan is:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definitie.

Twee $m \times n$ matrices worden opgeteld door de overeenkomstige elementen op te tellen.

Een matrix wordt met een scalair vermenigvuldigd door elk element van de matrix met het scalair te vermenigvuldigen.

De transformatie met matrix $A + B$ heet de *somtransformatie* van de transformaties met matrices A en B .

Is $\underline{x} \in R_n$, dan volgt uit het bovenstaande:

1°. $A\underline{x} + B\underline{x} = (A + B)\underline{x}$; de beeldruimte bij de transformatie van R_n in R_m met de matrix $A + B$ is de verbinding van de beeldruimten van de transformaties van R_n in R_m met de matrices A en B ;

2°. $A(\lambda\underline{x}) = (A\lambda)\underline{x} = (\lambda A)\underline{x} = \lambda(A\underline{x})$.

Opgaven.

1. A , B en C zijn drie $m \times n$ matrices. Bewijs:

1°. $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$;

2°. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$; $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

2. Bewijs dat de som van twee lineaire transformaties van R_n in R_m weer een lineaire transformatie van R_n in R_m is.

§ 9. Vermenigvuldiging van matrices.

We beschouwen een lineaire transformatie A van R_n in R_m en een lineaire transformatie B van R_p in R_n , met matrices t.o.v. gegeven lineair-onafhankelijke basissen van R_n , R_m en R_p :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Een vector $\underline{x} \in R_p$ gaat door transformatie B over in $\underline{y} = B\underline{x} \in R_n$ en $\underline{y} \in R_n$ gaat door transformatie A over in $\underline{z} = A\underline{y} = A(B\underline{x}) \in R_m$.

Door eerst de transformatie B en daarna de transformatie A uit te voeren, wordt dus elke vector $\underline{x} \in R_p$ getransformeerd in een vector $\underline{z} \in R_m$. We noemen deze transformatie de *produkttransformatie* van A en B . We stellen deze produkttransformatie voor door AB . Deze produkttransformatie AB van R_p in R_m is weer een lineaire transformatie; voor elk tweetal vectoren \underline{x}_1 en \underline{x}_2 in R_p geldt immers:

$$AB(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\{B(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)\} = A(B\underline{x}_1 + B\underline{x}_2) = A(B\underline{x}_1) + A(B\underline{x}_2) = AB\underline{x}_1 + AB\underline{x}_2$$

en

$$AB(\lambda\underline{x}) = A\{B(\lambda\underline{x})\} = A\{\lambda(B\underline{x})\} = \lambda A(B\underline{x}) = \lambda AB\underline{x}.$$

Stellen we $z = A(Bx) = Cx$, dan is C een $m \times p$ matrix, dus:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kl} & \dots & c_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{ml} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

De kolomvectoren van C zijn de getransformeerde eenheidsvectoren van R_p . Is e_l de l^{de} eenheidsvector van R_p , dan is dus:

$$C e_l = \begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{kl} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}.$$

Verder is:

$$B e_l = \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{kl} \\ \vdots \\ b_{nl} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A(B e_l) = \begin{pmatrix} a_{11} b_{1l} + a_{12} b_{2l} + \dots + a_{1n} b_{nl} \\ \vdots \\ a_{k1} b_{1l} + a_{k2} b_{2l} + \dots + a_{kn} b_{nl} \\ \vdots \\ a_{m1} b_{1l} + a_{m2} b_{2l} + \dots + a_{mn} b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Daar $C e_l = A(B e_l)$ voor $l = 1, 2, \dots, p$ is:

$c_{kl} = a_{k1} b_{1l} + a_{k2} b_{2l} + \dots + a_{kn} b_{nl}$ voor $k = 1, 2, \dots, m$ en $l = 1, 2, \dots, p$.

Het element c_{kl} uit de k^{de} rij en de l^{de} kolom van C is dus gelijk aan het rij-kolom-product van de k^{de} rij van A en de l^{de} kolom van B .

We krijgen zo de volgende definitie van het produkt van twee matrices:

Definitie.

Is A een $m \times n$ matrix en B een $n \times p$ matrix, dan is AB een $m \times p$ matrix. Het element van de k^{de} rij en de l^{de} kolom van AB is het rij-kolom-product van de k^{de} rij van A en de l^{de} kolom van B .

Voor het produkt van drie matrices geldt (indien dit produkt mogelijk is) de associatieve eigenschap:

$$(AB)C = A(BC).$$

Bewijs.

Zij A een $m \times n$ matrix, B een $n \times p$ matrix en C een $p \times q$ matrix, dan bestaat zowel $(AB)C$ als $A(BC)$.

Zij x een vector in R_q , $y = Cx$, $z = By$ en $u = Az$.

Dan is:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= A(B\underline{y}) = (AB)\underline{y} = (AB)(C\underline{x}) = \{(AB)C\}\underline{x} \text{ en} \\ \underline{z} &= B(C\underline{x}) = (BC)\underline{x} \text{ dus } \underline{u} = A\{(BC)\underline{x}\} = \{A(BC)\}\underline{x}. \end{aligned}$$

Voor iedere vector $\underline{x} \in R_q$ geldt dus:

$$\{(AB)C\}\underline{x} = \{A(BC)\}\underline{x}$$

dus

$$(AB)C = A(BC) = ABC.$$

Toon aan (indien de sommen en de produkten van de matrices mogelijk zijn):

$$A(B + C) = AB + AC$$

en

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Opmerkingen.

1. De produktmatrix AB bestaat alleen, als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B .

2. Uit de definitie van het produkt van een matrix A_{mn} en een kolomvector \underline{x} met n kentallen in §3 blijkt, dat dit een bijzonder geval is van het produkt van twee matrices. We kunnen daarbij de kolomvector \underline{x} opvatten als een $n \times 1$ matrix.

Het produkt van een rijvector \underline{y} met m kentallen en een matrix A_{mn} kunnen we opvatten als het produkt van een $1 \times m$ matrix en de matrix A_{mn} .

3. Bij een transformatie van R_n in zichzelf heeft de transformatiematrix A n rijen en n kolommen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Een matrix die evenveel rijen als kolommen bevat, heet *vierkante matrix*. De elementen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ vormen de *hoofddiagonaal*; de elementen $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1}$ vormen de *nevendiagonaal* van de vierkante matrix.

Met de bij een vierkante matrix A behorende determinant $|A|$ bedoelen we:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

We noemen $|A|$ de *transformatiedeterminant*.

Als bij een transformatie A van R_n in zichzelf iedere vector in R_n op zichzelf wordt afgebeeld, dus als voor iedere $\underline{x} \in R_n$ geldt: $A\underline{x} = \underline{x}$, dan heet de transformatie een *eenheidstransformatie*. De daarbij behorende (vierkante) transformatiematrix wordt voorgesteld door E_{nn} of kortweg door E . Daar ook de eenheidsvectoren in R_n op zichzelf worden afgebeeld, zijn de elementen van E_{nn} op de hoofddiagonaal alle 1, terwijl alle andere elementen nul zijn:

$$E_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Voor elke eenheidsmatrix geldt: $|E_{nn}| = 1$.

Toon aan:

1°. Is A_{mn} een $m \times n$ matrix en E_{nn} een eenheidsmatrix, dan is de produktmatrix:

$$A_{mn}E_{nn} = A_{mn}.$$

2°. Is A_{mn} een $m \times n$ matrix en E_{mm} een eenheidsmatrix, dan is:

$$E_{mm}A_{mn} = A_{mn}.$$

3°. Is A_{nn} een $n \times n$ matrix en E_{nn} een eenheidsmatrix, dan is:

$$E_{nn}A_{nn} = A_{nn}E_{nn} = A_{nn}.$$

4°. Is A_{mn} een $m \times n$ matrix en zijn E_{mm} en E_{nn} eenheidsmatrices, dan is:

$$\lambda A_{mn} = (\lambda E_{mm})A_{mn} \quad \text{en} \quad A_{mn}\lambda = A_{mn}(\lambda E_{nn}).$$

Het produkt van een matrix met een scalair kan dus beschouwd worden als een bijzonder geval van het produkt van twee matrices.

4. Is A een $m \times n$ matrix en B een $n \times p$ matrix, dan is AB een $m \times p$ matrix, terwijl BA voor $m \neq p$ niet bestaat.

Is A een $m \times n$ matrix en B een $n \times m$ matrix, dan is AB een $m \times m$ matrix en BA een $n \times n$ matrix. Voor $m \neq n$ is dus $AB \neq BA$.

Ook als A en B twee $n \times n$ matrices zijn, is in het algemeen $AB \neq BA$.

Stel bijv.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

dan is

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

Voor het produkt van twee matrices geldt de commutatieve eigenschap niet.

In bijzondere gevallen kan de commutatieve eigenschap wel gelden; we zagen dit reeds bij $E_{nn}A_{nn} = A_{nn}E_{nn} = A_{nn}$.

Zo is ook voor

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} :$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Toon dit ook aan, door in R_2 een orthonormale basis te kiezen en dan de lineaire transformaties met A en B als matrices meetkundig te beschouwen.

5. Noemen we de kolomvectoren van B \underline{b}_l ($l = 1, 2, \dots, p$) en de rijvectoren van A \underline{a}_k ($k = 1, 2, \dots, m$), dan is volgens de definitie van $AB = C$:

1°. $A \cdot$ (l^{de} kolomvector van B) = l^{de} kolomvector van C,

2°. (k^{de} rijvector van A) \cdot B = k^{de} rijvector van C.

Toepassing.

In een euclidische vectorruimte E_4 is een lineaire deelruimte D_2 opgespannen door de vectoren $\underline{a} = (1, 1, 0, 0)$ en $\underline{b} = (0, 2, 1, 1)$.

Men projecteert alle vectoren in E_4 loodrecht op D_2 .

Bepaal van de lineaire transformatie de matrix A en de kern.

Toon aan: $A^2 = A$.

Oplossing.

(zie hfdst. XV § 3)

Van de transformatiematrix A zijn de kolomvectoren achtereenvolgens $A\underline{e}_1, A\underline{e}_2, A\underline{e}_3$ en $A\underline{e}_4$.

Deze vectoren liggen in D_2 , dus:

$$A\underline{e}_k = \lambda_k \underline{a} + \mu_k \underline{b} = (\lambda_k, \lambda_k + 2\mu_k, \mu_k, \mu_k), \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Verder is $\underline{e}_k - A\underline{e}_k \perp D_2$, dus $\perp \underline{a}$ en $\perp \underline{b}$.

Hierdoor ontstaan vergelijkingen waaruit we de waarden voor λ en μ kunnen bepalen. We vinden:

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}, \mu_1 = -\frac{1}{4}; \quad \lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{4}; \quad \lambda_3 = -\frac{1}{4}, \mu_3 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4}, \mu_4 = \frac{1}{4}.$$

De transformatiematrix is:

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De kern van de transformatie is het orthogonale complement van D_2 . Hieruit volgt, dat een basis van de kern is: $(1, -1, 1, 1)$ en $(1, -1, 3, -1)$.

Uit de kwadratering van A blijkt: $A^2 = A$. Dit is ook als volgt te zien. De loodrechte projectie van $\underline{x} \in E_4$ op D_2 is $A\underline{x}$. De loodrechte projectie van $A\underline{x} \in E_4$ op D_2 is weer $A\underline{x}$, maar ook $A(A\underline{x}) = A^2\underline{x}$. Voor elke vector $\underline{x} \in E_4$ geldt dus $A^2\underline{x} = A\underline{x}$, dus $A^2 = A$.

§ 10. Getransponeerde matrix; symmetrische matrix; nulmatrix.

De matrix die ontstaat door van een matrix A de overeenkomstige rijen en kolommen te verwisselen, heet de *getransponeerde matrix* van A . We geven de getransponeerde matrix van A aan met A^T , dus als:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ dan is } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Uit de definitie van getransponeerde matrix volgt onmiddellijk:

Zijn A en B twee $n \times n$ matrices, dan is:

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T.$$

Daar de waarde van een determinant niet verandert als we de overeenkomstige rijen en kolommen verwisselen, geldt voor een vierkante matrix:

$$|A| = |A^T|.$$

Toon aan:

1°. Zijn A en B twee $m \times n$ matrices, dan is:

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

2° Voor elke matrix geldt: de rang van $A^T =$ de rang van A .

Een *symmetrische* matrix is een matrix waarvan de elementen a_{kl} en a_{lk} aan elkaar gelijk zijn.

Een symmetrische matrix is dus een vierkante matrix. Voor een symmetrische matrix A volgt uit de definitie: $A^T = A$; in het bijzonder is $E_{nn}^T = E_{nn}$.

Onder een *nulmatrix* verstaan we een matrix waarvan alle elementen nul zijn. Een nulmatrix wordt aangegeven met O . Is de nulmatrix een $m \times n$ matrix, dan worden alle vectoren in R_n door de transformatie met de matrix O afgebeeld op de nulvector in R_m . De nulvector in R_m is dan de beeldruimte, terwijl de gehele R_n de kern van deze transformatie is.

Toon aan:

Is A symmetrisch, dan is $(A\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, A\underline{y})$ en omgekeerd.

§ 11. Inverse transformatie.

Definitie.

Een vierkante matrix A heet regulier, als $|A| \neq 0$.

Is $|A| = 0$, dan heet A singulier.

Uit deze definitie volgt:

Van een reguliere $n \times n$ matrix is de rang $= n$; van een singuliere $n \times n$ matrix is de rang $< n$.

Van een lineaire transformatie van R_n in zichzelf is de reguliere transformatie-matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

Een vector $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in R_n wordt getransformeerd in een vector $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ in R_n , dus $A\underline{x} = \underline{y}$. Met behulp van de transformatie-vergelijkingen:

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} x_l = y_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

zijn de kentallen van de beeldvector $\underline{y} = A\underline{x}$ uit de kentallen van \underline{x} te bepalen. We kunnen omgekeerd naar de kentallen x_1, x_2, \dots, x_n van de vector \underline{x} vragen, als de kentallen y_1, y_2, \dots, y_n van de beeldvector \underline{y} gegeven zijn. We vragen dan naar de vector $\underline{x} \in R_n$ waarvan de gegeven vector $\underline{y} \in R_n$ de beeldvector is. Hiertoe moeten we uit het stelsel van n niet-homogene vergelijkingen (1) bij gegeven y_1, y_2, \dots, y_n de n onbekenden x_1, x_2, \dots, x_n oplossen. Daar $|A| \neq 0$, vinden we uit (1) met behulp van de regel van Cramer bij elke $\underline{y} \in R_n$ één vector $\underline{x} \in R_n$.

De oplossing is:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|A|} \left(\begin{array}{cccc} M_{11} y_1 & & & -M_{21} y_2 + \dots + (-1)^{n+1} M_{n1} y_n \end{array} \right) \\ x_2 &= \frac{1}{|A|} \left(\begin{array}{cccc} & -M_{12} y_1 & & +M_{22} y_2 + \dots + (-1)^{n+2} M_{n2} y_n \end{array} \right) \\ \vdots & \\ x_n &= \frac{1}{|A|} \left((-1)^{1+n} M_{1n} y_1 + (-1)^{2+n} M_{2n} y_2 + \dots + (-1)^{2n} M_{nn} y_n \right) \end{aligned} \right\} (2)$$

Hierin is M_{kl} de minor van het element a_{kl} van de determinant $|A|$.

We kunnen de vergelijkingen (2) beschouwen als vergelijkingen van een transformatie die een beeldvector (y_1, y_2, \dots, y_n) tot de oorspronkelijke vector (x_1, x_2, \dots, x_n) terug transformeert. Deze lineaire transformatie noemen we de *inverse* van de oorspronkelijke transformatie A ; we stellen haar voor door A^{-1} .

De inverse transformatiematrix van A is:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} \dots (-1)^{n+1} M_{n1} \\ -M_{12} & +M_{22} \dots (-1)^{n+2} M_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ (-1)^{1+n} M_{1n} & (-1)^{2+n} M_{2n} \dots (-1)^{2n} M_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Merk op: Als $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, dan is $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

Uit $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ en $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ volgt:

$$E_{nn}\mathbf{y} = A\mathbf{x} = AA^{-1}\mathbf{y} \text{ en } E_{nn}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = A^{-1}A\mathbf{x}.$$

Daar dit geldt voor elke $\mathbf{x} \in R_n$ en elke $\mathbf{y} \in R_n$ is:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Uit het bovenstaande volgt, dat elke reguliere matrix minstens één inverse matrix heeft.

Stelling.

Elke reguliere matrix heeft één en slechts één inverse matrix.

Bewijs.

Stel dat B en C twee inverse matrices van matrix A zijn, dan is $BA = AB = CA = AC = E$.

Uit $BA = AC = E$, volgt: $B = BE = BAC = EC = C$, dus $B = C$.

Voor een lineaire transformatiematrix en de inverse matrix gelden nog de volgende eigenschappen:

Eigenschap 1.

Is A een reguliere matrix, dan is:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Bewijs.

Daar A regulier is, is $|A| \neq 0$.

Uit $A^{-1}A = E$ volgt:

$$|A^{-1}| \cdot |A| = |A^{-1}A| = |E| = 1, \text{ dus } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Is A regulier, dan is dus ook A^{-1} regulier.

Eigenschap 2.

Zijn A en B twee reguliere $n \times n$ matrices, dan is

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Bewijs.

Daar A en B regulier zijn, is $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ en $|AB| \neq 0$, zodat A^{-1} , B^{-1} en $(AB)^{-1}$ bestaan.

Daar $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, is $B^{-1}A^{-1}$ de inverse van AB .

Merk op: De inverse van E is weer E . Hieruit volgt: $AA^{-1} = E = (AA^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1}$. De inverse van A^{-1} is dus $(A^{-1})^{-1} = A$.

Opmerking.

Uit formule (3) voor A^{-1} blijkt, dat A^{-1} op de volgende wijze kan worden bepaald:

1°. Vervang elk element van A door de bij dat element behorende minor uit de transformatiedeterminant;

2°. Geef elke minor het passende teken;

3°. Verwissel de rijen met de overeenkomstige kolommen;

4°. Deel elk element van de aldus verkregen matrix door $|A|$.

Voorbeeld.

1. Bepaal de inverse matrix van:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1^{ste} manier. Daar $|A| = 2$ bestaat A^{-1} . De minoren van $|A|$ zijn:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1. \end{array}$$

De van het juiste teken voorziene minoren zijn:

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1. \end{array}$$

Door verwisseling van rijen en kolommen en deling door $|A| = 2$, ontstaat:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Controle.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2^{de} manier. Voor de inverse matrix A^{-1} geldt:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We vormen in beide matrices dezelfde lineaire combinaties van de kolomvectoren z_0 , dat de kolomvectoren in de linker matrix de eenheidsvectoren e_1, e_2 en e_3 worden. We krijgen dan achtereenvolgens:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

dus is:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

§ 12. Rang van een produktmatrix.

Stelling 1.

Zijn v_1, v_2, \dots, v_p vectoren in R_n en is A een reguliere $n \times n$ matrix, dan is het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren van Av_1, Av_2, \dots, Av_p gelijk aan het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren van v_1, v_2, \dots, v_p .

Bewijs.

Stel het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren van v_1, v_2, \dots, v_p gelijk aan r .

Voor $r < k \leq p$ vormen v_1, v_2, \dots, v_k dan een lineair-afhankelijk stelsel; er bestaan dus k getallen λ die niet alle nul zijn waarvoor:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

Voor dezelfde waarden van λ is dan ook:

$$A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \dots + \lambda_k Av_k = A0 = 0.$$

Voor elke A (regulier of singulier) en $r < k \leq p$ vormen de vectoren Av_1, Av_2, \dots, Av_k dus een lineair-afhankelijk stelsel.

Het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren van Av_1, Av_2, \dots, Av_p is dus niet groter dan r .

Is A regulier, dan bestaat A^{-1} . Is k niet groter dan r en vormen v_1, v_2, \dots, v_k een lineair-onafhankelijk stelsel, dan volgt uit:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \dots + \lambda_k Av_k = 0$$

dat

$$A^{-1}(\lambda_1 A\mathbf{v}_1 + \lambda_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k A\mathbf{v}_k) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

of

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Daar dit laatste slechts geldt als elke λ gelijk is aan nul, is ook

$$\lambda_1 A\mathbf{v}_1 + \lambda_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k A\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

dan en slechts dan, als elke λ gelijk is aan nul.

De vectoren $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_k$ vormen dan dus ook een lineair-onafhankelijk stelsel.

Voor A regulier is dus het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren van $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_p$ gelijk aan het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$.

Stelling 2.

Zijn A en B twee $n \times n$ matrices en is A regulier, dan is de rang $AB =$ de rang van $BA =$ de rang van B .

Bewijs.

De rang van $B =$ het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van B . We noemen de kolomvectoren van B : $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$.

De kolomvectoren van AB zijn dan: $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n$.

De rang van $AB =$ het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van AB . Volgens stelling 1 zijn deze maxima aan elkaar gelijk, dus:

$$\text{rang } AB = \text{rang } B.$$

Verder is: $\text{rang } BA = \text{rang } (BA)^T = \text{rang } A^T B^T$.

Daar A regulier is, is A^T ook regulier; dus $\text{rang } A^T B^T = \text{rang } B^T = \text{rang } B$.

Hieruit volgt:

$$\text{rang } BA = \text{rang } B.$$

Stelling 3.

Zijn A en B twee singuliere $n \times n$ matrices, dan is:

$$\text{rang } AB \leq \text{minimum}(\text{rang } A, \text{rang } B).$$

Bewijs.

We noemen de kolomvectoren van B : $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$.

De kolomvectoren van AB zijn dan: $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n$.

In het bewijs van stelling 1 blijkt, dat het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van AB niet groter is dan het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van B , dus $\text{rang } AB \leq \text{rang } B$.

Verder volgt uit: $\text{rang } AB = \text{rang } (AB)^T = \text{rang } B^T A^T \leq \text{rang } A^T = \text{rang } A$,
dat $\text{rang } AB \leq \text{rang } A$.

Zo hebben bijv. de singuliere matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beide de rang 1.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{heeft de rang 0 en} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{heeft de rang 1.}$$

Opmerking.

Uit het bovenstaande volgt voor $n \times n$ matrices:

Is A of B singulier, of zijn beide singulier, dan is AB ook singulier.

Zijn A en B beide regulier, dan is ook AB regulier.

Dit kan men ook inzien in verband met: $|AB| = |A| \cdot |B|$ en A is dan en slechts dan regulier als $|A| \neq 0$.

§ 13. Basistransformatie.

Voor elke vector $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in R_n geldt:

$$\underline{x} = x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n. \quad (1)$$

Hierin vormt het stelsel vectoren $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ een lineair-onafhankelijke basis in R_n .

Kiezen we in R_n een andere lineair-onafhankelijke basis, gevormd door de vectoren $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ zo dat:

$$\underline{c}_k = c_{1k} \underline{b}_1 + c_{2k} \underline{b}_2 + \dots + c_{nk} \underline{b}_n, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

dan is de vector $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ op één manier lineair in de nieuwe basisvectoren uit te drukken.

Zijn de kentallen van \underline{x} ten opzichte van de nieuwe basis: x_1', x_2', \dots, x_n' , dan is:

$$\underline{x} = x_1' \underline{c}_1 + x_2' \underline{c}_2 + \dots + x_n' \underline{c}_n.$$

Substitueren we hierin voor $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ de uitdrukkingen (2) dan vinden we na enige herleiding:

$$\underline{x} = \underline{b}_1 \sum_1^n c_{1k} x_k' + \underline{b}_2 \sum_1^n c_{2k} x_k' + \dots + \underline{b}_n \sum_1^n c_{nk} x_k'.$$

In verband met (1) volgen hieruit de betrekkingen tussen de kentallen x_1, x_2, \dots, x_n van een vector t.o.v. de oude basis en de kentallen x_1', x_2', \dots, x_n' van die zelfde vector t.o.v. de nieuwe basis:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sum_1^n c_{1k} x_k' = c_{11} x_1' + c_{12} x_2' + \dots + c_{1n} x_n' \\ x_2 &= \sum_1^n c_{2k} x_k' = c_{21} x_1' + c_{22} x_2' + \dots + c_{2n} x_n' \\ &\vdots \\ x_n &= \sum_1^n c_{nk} x_k' = c_{n1} x_1' + c_{n2} x_2' + \dots + c_{nn} x_n' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Deze betrekkingen heten *transformatieformules*, niet van een vectortransformatie, maar van een basistransformatie, d.w.z. bij overgang van een lineair-onafhankelijke basis op een andere lineair-onafhankelijke basis.

Het blijkt, dat de oude kentallen lineair in de nieuwe kentallen worden uitgedrukt.

De matrix:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

die de basistransformatie bepaalt, heet de *matrix van de basistransformatie*. Hieruit volgt:

De kolomvectoren van de matrix van een basistransformatie zijn de vectoren van de nieuwe basis met kentallen t.o.v. de oude basis.

Daar de kolomvectoren een lineair-onafhankelijk stelsel vormen, is bij overgang van een lineair-onafhankelijke basis op een andere lineair-onafhankelijke basis de matrix van de basistransformatie een reguliere matrix.

Met behulp van de matrix C zijn de transformatieformules aldus te schrijven:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \underline{x} = C\underline{x}'.$$

Merk op, dat \underline{x} en \underline{x}' hier dezelfde vector voorstellen. Bij \underline{x} behoren de kentallen van een vector t.o.v. de oude basis, bij \underline{x}' de kentallen van dezelfde vector t.o.v. de nieuwe basis.

§ 14. Invloed van een basistransformatie op de matrix van een lineaire vectortransformatie.

Zij A de matrix van een lineaire vectortransformatie van R_n in zichzelf. Elke vector $\underline{x} \in R_n$ wordt dan afgebeeld op één vector $\underline{y} \in R_n$ zo, dat $\underline{y} = A\underline{x}$. We kiezen nu in R_n de nieuwe basis (2) van § 13 en noemen de vectoren \underline{x} en \underline{y} , maar nu t.o.v. de nieuwe basis, \underline{x}' en \underline{y}' .

Daar $\underline{x} = C\underline{x}'$ en $\underline{y} = C\underline{y}'$, volgt uit $\underline{y} = A\underline{x}$:

$$C\underline{y}' = AC\underline{x}' .$$

Daar C regulier is, bestaat C^{-1} . Hieruit volgt:

$$\underline{y}' = C^{-1}AC\underline{x}' = B\underline{x}' , \quad \text{met } B = C^{-1}AC .$$

Met B bedoelen we de matrix van dezelfde lineaire vectortransformatie als die met matrix A , maar nu t.o.v. de nieuwe basis. We noemen B *gelijkwaardig* of *equivalent* met A en schrijven $B \sim A$.

Definitie.

Een $n \times n$ matrix B is *gelijkwaardig* of *equivalent* met een $n \times n$ matrix A , als er een reguliere $n \times n$ matrix C bestaat zo, dat $B = C^{-1}AC$.

Is C regulier en is $B = C^{-1}AC$, dan is de rang van B gelijk aan de rang van A . Twee gelijkwaardige matrices hebben dus dezelfde rang.

Uit de definitie van gelijkwaardigheid van twee matrices volgt:

1°. Gelijkwaardigheid van twee matrices is een *reflexieve* relatie, d.w.z. $A \sim A$, immers $A = E^{-1}AE$.

2°. Gelijkwaardigheid van matrices is een *symmetrische* relatie, d.w.z. uit $A \sim B$ volgt $B \sim A$, immers:

Uit $A \sim B$ volgt, dat er een reguliere matrix C bestaat zo, dat $A = C^{-1}BC$. Hieruit volgt: $B = CAC^{-1}$. Noemen we $C^{-1} = C_1$, dan is $C = C_1^{-1}$, dus $B = C_1^{-1}AC_1$ of $B \sim A$.

3°. Gelijkwaardigheid van matrices is een *transitieve* relatie, d.w.z. uit $A_1 \sim A_2$ en $A_2 \sim A_3$ volgt $A_1 \sim A_3$, immers:

Er bestaan twee reguliere matrices C_1 en C_2 zo, dat $A_1 = C_1^{-1}A_2C_1$ en $A_2 = C_2^{-1}A_3C_2$.

Hieruit volgt: $A_1 = C_1^{-1}C_2^{-1}A_3C_2C_1 = (C_2C_1)^{-1}A_3(C_2C_1)$, dus $A_1 \sim A_3$.

Elke betrekking die zowel reflexief, symmetrisch als transitief is, heet een *equivalente* relatie.

Gelijkwaardigheid van matrices is dus een equivalente relatie.

§ 15. Orthogonale transformaties.

In deze paragraaf gaan we uit van een euclidische vectorruimte E_n met een orthonormale basis.

Definitie.

Een lineaire transformatie van een euclidische vectorruimte E_n in zichzelf heet *orthogonaal*, als de eenheidsvectoren van E_n , die een orthonormale basis vormen, getransformeerd worden in vectoren in E_n die weer een orthonormaal stelsel vormen.

De matrix die bij een orthogonale transformatie behoort, noemen we een *orthogonale matrix*.

De kolomvectoren van een orthogonale matrix hebben dus alle de lengte één en staan twee aan twee loodrecht op elkaar.

Zo is bijv.:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

de orthogonale matrix die hoort bij een orthogonale transformatie van E_3 in zichzelf.

Is

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

de matrix van een orthogonale transformatie van de euclidische vectorruimte E_n in zichzelf, dan is:

$$\text{en } \left. \begin{aligned} a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \dots + a_{nk}^2 &= 1, & (k = 1, 2, \dots, n) \\ a_{1k}a_{1l} + a_{2k}a_{2l} + \dots + a_{nk}a_{nl} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

voor $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n$ en $k \neq l$.

Uit bovenstaande volgt: Is A orthogonaal, dan is A^T . $A = E$ en omgekeerd.

Stelling 1.

Bij een orthogonale transformatie A van een euclidische vectorruimte E_n in zichzelf is:

- 1°. de lengte van elke vector $\underline{x} \in E_n$ gelijk aan de lengte van de beeldvector $A\underline{x}$;
- 2°. de hoek tussen de vectoren $\underline{x} \in E_n$ en $\underline{y} \in E_n$ gelijk aan de hoek tussen de beeldvectoren $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$.

Bewijs.

1°. Zij $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $A\underline{x} = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ en zij (1) de orthogonale transformatiematrix A , dan is:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right\}$$

Dus

$$|A\underline{x}|^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2 + \dots + (x_n')^2 = \sum_{k=1}^n (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n)^2.$$

Herleiden we het rechter lid, dan volgt uit (2) dat de coëfficiënten van x_k^2 alle gelijk zijn aan 1 en dat de coëfficiënten van $x_k x_l$ ($k \neq l$) alle nul zijn.

Hieruit volgt:

$$|A\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = |\underline{x}|^2,$$

dus:

$$|A\underline{x}| = |\underline{x}|, \text{ of: } (A\underline{x}, A\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{x}).$$

2°. Zij $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en $A\underline{y} = (y_1', y_2', \dots, y_n')$, dan is:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \right\}$$

Dus het inwendig produkt

$$(A\underline{x}, A\underline{y}) = \sum_{k=1}^n (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n) (a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kn}y_n).$$

Uit (2) volgt weer na herleiding van het rechter lid, dat de coëfficiënten van $x_k y_k$ alle gelijk zijn aan 1 en dat de coëfficiënten van $x_k y_l$ ($k \neq l$) alle nul zijn. Hieruit volgt:

$$(A\underline{x}, A\underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (\underline{x}, \underline{y}).$$

Zij φ de hoek tussen de vectoren \underline{x} en \underline{y} en φ' de hoek tussen de beeldvectoren $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$, dan volgt uit

$$\cos \varphi = \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{|\underline{x}| \cdot |\underline{y}|} \quad \text{en} \quad \cos \varphi' = \frac{(A\underline{x}, A\underline{y})}{|A\underline{x}| \cdot |A\underline{y}|}$$

dat de hoek tussen de beeldvectoren $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$ gelijk is aan de hoek tussen de vectoren \underline{x} en \underline{y} .

Stelling 2.

Als bij een lineaire transformatie A van een euclidische vectorruimte E_n in zichzelf elke vector $\underline{x} \in E_n$ dezelfde lengte heeft als de beeldvector $A\underline{x}$, dus als $(\underline{x}, \underline{x}) = (A\underline{x}, A\underline{x})$, dan is de transformatie orthogonaal.

Bewijs.

Zijn $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ de eenheidsvectoren in E_n dan is, daar $|A\underline{x}| = |\underline{x}|$ voor elke $\underline{x} \in E_n$ ook $|A\underline{e}_k| = |\underline{e}_k| = 1$ voor $k = 1, 2, \dots, n$.

We moeten nu nog aantonen dat de beeldvectoren van de eenheidsvectoren in E_n twee aan twee loodrecht op elkaar staan. Daartoe tonen we aan, dat de hoek tussen elk tweetal vectoren \underline{x} en \underline{y} in E_n gelijk is aan de hoek tussen de beeldvectoren $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$.

Uit $|\underline{x} + \underline{y}| = |A\underline{x} + A\underline{y}|$ volgt:

$$(\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) = (A\underline{x} + A\underline{y}, A\underline{x} + A\underline{y})$$

of

$$(\underline{x}, \underline{x}) + (\underline{y}, \underline{y}) + 2(\underline{x}, \underline{y}) = (A\underline{x}, A\underline{x}) + (A\underline{y}, A\underline{y}) + 2(A\underline{x}, A\underline{y})$$

en daar

$$(\underline{x}, \underline{x}) = (A\underline{x}, A\underline{x}) \text{ en } (\underline{y}, \underline{y}) = (A\underline{y}, A\underline{y})$$

is:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (A\underline{x}, A\underline{y}).$$

Hieruit volgt:

Als bij een lineaire transformatie A van E_n in zichzelf elke vector even lang is als de beeldvector, dan is het inwendig produkt van $\underline{x} \in E_n$ en $\underline{y} \in E_n$ gelijk aan het inwendig produkt van $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$; uit het bovengenoemde volgt dan weer, dat de hoek tussen $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$ gelijk is aan de hoek tussen \underline{x} en \underline{y} .

Opmerking.

Uit het bovenstaande volgt:

Opdat een lineaire transformatie A van een euclidische vectorruimte E_n in zichzelf orthogonaal is, is het nodig en voldoende dat elke vector $\underline{x} \in R_n$ dezelfde lengte heeft als zijn beeldvector $A\underline{x}$, dus dat:

$$(\underline{x}, \underline{x}) = (A\underline{x}, A\underline{x}).$$

Stelling 3.

De determinant van een orthogonale matrix is gelijk aan ± 1 .

Bewijs.

$$\text{Is } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ dan is } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Is A een orthogonale matrix, dan volgt uit (2):

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Hieruit volgt:

$$|A^T A| = |A^T| \cdot |A| = 1 \text{ en daar } |A^T| = |A|, \text{ is:}$$

$$|A|^2 = 1, \text{ dus } |A| = \pm 1.$$

Is $|A| = 1$, dan heet A *direct orthogonaal*; is $|A| = -1$, dan heet A *gespiegeld orthogonaal*.

Stelling 4.

Voor een orthogonale matrix geldt: $A^{-1} = A^T$.

Bewijs.

Daar A orthogonaal is, is $|A| \neq 0$. Elke orthogonale matrix A heeft dus een inverse A^{-1} . Nu is:

$$A^{-1} = EA^{-1} = (A^T A)A^{-1} = A^T (AA^{-1}) = A^T E = A^T.$$

Opmerkingen.

1. Uit deze stelling volgt:

$$AA^T = AA^{-1} = E.$$

Ook de rijvectoren van een orthogonale matrix hebben dus de lengte 1 en staan twee aan twee loodrecht op elkaar.

2. Omgekeerd volgt uit $A^{-1} = A^T$, dat A een orthogonale matrix is.

Stelling 5.

Het produkt van twee orthogonale matrices is weer een orthogonale matrix.

Bewijs.

Zijn A en B twee orthogonale matrices, dan is:

$$A^T A = E \quad \text{en} \quad B^T B = E.$$

Is $C = AB$, dan is $C^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1}$, dus:

$$C^T C = (B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1} (A^{-1} A) B = B^{-1} B = E$$

Hieruit volgt, dat $C = AB$ weer een orthogonale matrix is.

Als eenvoudige toepassing stellen we ons nu de vraag welke orthogonale 2×2 matrices er bestaan.

Stel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

is een orthogonale transformatiematrix van E_2 in zichzelf.

De beeldvectoren $Ae_{11} = (a_{11}, a_{21})$ en $Ae_{22} = (a_{12}, a_{22})$ hebben de lengte 1, dus

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \quad \text{en} \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1.$$

We kunnen dus stellen:

$$a_{11} = \cos \varphi, \quad a_{21} = \sin \varphi, \quad a_{12} = \cos \psi \quad \text{en} \quad a_{22} = \sin \psi.$$

Uit $Ae_{11} \perp Ae_{22}$ volgt:

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0$$

dus:

$$\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = 0 \quad \text{of} \quad \cos(\varphi - \psi) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\varphi - \psi = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

dus:

$$\cos \varphi = -\sin \psi \text{ en } \sin \varphi = \cos \psi \text{ òf: } \cos \psi = \sin \varphi \text{ en } \sin \psi = -\cos \varphi.$$

De matrix heeft dus de vorm:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ òf } A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

In het eerste geval is $|A| = 1$; de transformatie is dan direct orthogonaal.

In het tweede geval is $|A| = -1$; de transformatie is dan gespiegeld orthogonaal.

§16. Orthonormale basistransformatie.

Wordt een euclidische vectorruimte E_n opgespannen door een orthonormale basis en gaan we over op een nieuwe orthonormale basis, dan spreken we van een *orthonormale basistransformatie*.

Zijn x_1, x_2, \dots, x_n de kentallen van een vector $\underline{x} \in E_n$ ten opzichte van de oorspronkelijke basis en zijn x_1', x_2', \dots, x_n' de kentallen van dezelfde vector \underline{x} , die we \underline{x}' noemen, ten opzichte van de nieuwe basis, dan volgt uit § 13:

$$\underline{x} = C\underline{x}'.$$

Hierin is C de matrix van een orthonormale basistransformatie.

De kolomvectoren van de matrix C zijn de vectoren van de nieuwe basis met kentallen t.o.v. de oude basis. Daar de nieuwe basisvectoren een orthonormaal stelsel vormen, is C een orthogonale matrix.

Is A de matrix van een lineaire transformatie van E_n in zichzelf t.o.v. de oorspronkelijke basis en is B de matrix van dezelfde transformatie t.o.v. de nieuwe basis, dan is volgens § 14:

$$B = C^{-1}AC.$$

Daar C en C^{-1} orthogonaal zijn, is $|C| = |C^{-1}| = 1$ òf $|C| = |C^{-1}| = -1$.

Hieruit volgt:

$$|B| = |C^{-1}AC| = |C^{-1}| \cdot |A| \cdot |C| = |A|.$$

Is A orthogonaal, dan is $A^T A = E$; daar C orthogonaal is, is $C^{-1} = C^T$; dus $B^T B = (C^{-1}AC)^T(C^{-1}AC) = (AC)^T(C^{-1})^T(C^{-1}AC) = C^{-1}A^T C C^{-1}AC = C^{-1}A^T AC = E$.

We zien dus:

Bij overgang van een orthonormale basis van E_n op een nieuwe orthonormale basis gaat een orthogonale transformatiematrix A over in een met A equivalente transformatiematrix B die ook orthogonaal is.

§ 17. Opgaven.

We nemen aan, dat in elke euclidische vectorruimte die in de opgaven ter sprake komt, een orthonormale basis is gekozen.

1. Bepaal de inverse van elk der onderstaande matrices en controleer het antwoord:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Van een lineaire transformatie van R_3 in zichzelf met transformatiematrix A is gegeven:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Toon aan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. Voor welke waarden van a heeft de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ a^2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

een inverse?

Antw.: $a \neq -1$ en $a \neq -4 \pm 3\sqrt{3}$.

4. Door een lineaire transformatie van R_3 in zichzelf gaan de vectoren:

$$\underline{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{u}_2 = (1, 0, 1) \quad \text{en} \quad \underline{u}_3 = (3, 1, 0)$$

respectievelijk over in:

$$\underline{v}_1 = (3, 2, 0), \quad \underline{v}_2 = (-1, 2, -2) \quad \text{en} \quad \underline{v}_3 = (7, 6, -1).$$

a. Bepaal de transformatiematrix A en onderzoek of deze een inverse heeft.

b. Bepaal de kern en de beeldruimte van de transformatie.

$$\text{Antw.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{geen } A^{-1}; \quad \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bewijs voor $|A| \neq 0$:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

6. Bewijs, als A , B en C reguliere $n \times n$ matrices zijn:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

7. Bewijs dat, als A een $m \times n$ matrix is, AA^T en $A^T A$ symmetrische matrices zijn.

8. Bewijs dat, als A en B symmetrische $n \times n$ matrices zijn, AB dan en slechts dan symmetrisch is als $AB = BA$.

9. Bewijs dat, als A en B twee $n \times n$ matrices zijn en als B regulier is:

$$(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^n B.$$

10. Bewijs dat, als A regulier is en $AB = AC$, hieruit volgt: $B = C$.

11. Bewijs: Als $A^2 = A$ (dus A is een vierkante matrix) en $A \neq E$ en A is niet een nulmatrix, dan is A singulier.

12. Van een lineaire transformatie A van een R_3 in zichzelf is gegeven dat $A^2 = O$ (met O bedoelen we de nulmatrix), $A \neq O$.

a. Bewijs:

1°. De dimensie van de kern van A is gelijk aan 2.

2°. Er bestaat een basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ van R_3 zo, dat

$$A\underline{e}_1 = A\underline{e}_2 = \underline{0} \quad \text{en} \quad A\underline{e}_3 = \underline{e}_2.$$

3°. In 2° is \underline{e}_2 op een factor na éénduidig bepaald.

b. Bepaal t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ de matrix van de transformatie A .

13. Een lineaire transformatie van R_2 (met basis $(1,0)$ en $(0,1)$) in zichzelf is gegeven door:

$$(1,1) \rightarrow (6,9) \quad \text{en} \quad (3,-2) \rightarrow (8,-8).$$

In R_2 kiest men een nieuwe basis met $\underline{c}_1 = (1,2)$ en $\underline{c}_2 = (-2,1)$ als basisvectoren.

Bepaal de matrix van de transformatie t.o.v. de oude basis en t.o.v. de nieuwe basis.

Antw.: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

14. Een lineaire transformatie van R_3 (met basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$) in zichzelf is gegeven door:

$$(1,-1,1) \rightarrow (5,4,-4), \quad (2,-1,1) \rightarrow (6,2,-2) \quad \text{en} \quad (1,1,2) \rightarrow (3,4,2).$$

In R_3 kiest men een nieuwe basis met $\underline{c}_1 = (1,2,-2)$, $\underline{c}_2 = (-2,1,0)$ en $\underline{c}_3 = (2,4,5)$ als basisvectoren.

Bepaal de matrix van de transformatie t.o.v. de oude basis en t.o.v. de nieuwe basis.

$$\text{Antw.: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Als A en B twee $n \times n$ matrices zijn en E de eenheidsmatrix is met n rijen en n kolommen, bewijs dan:

$$(E + A)^{-1}(A + B)(E + AB)^{-1}(E + A) = (E - A)(E + BA)^{-1}(A + B)(E - A)^{-1},$$

indien verondersteld wordt, dat de voorkomende inverse matrices bestaan.

16. Voor welke waarde(n) van a is de volgende matrix A orthogonaal en welke soort van orthogonaliteit treedt daarbij op?

$$A = \begin{pmatrix} -a & -a + \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & a \end{pmatrix}.$$

Antw.: $a = -\frac{3}{5}$; gespiegeld orthogonaal.

17. In een euclidische vectorruimte E_3 wordt een lineaire deelruimte D_2 opgespannen door de vectoren $(1, 1, 1)$ en $(2, 1, 2)$. Alle vectoren in E_3 worden loodrecht op D_2 geprojecteerd. Bepaal van deze lineaire transformatie de matrix en de kern.

$$\text{Antw.: } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda(1, 0, -1).$$

18. In een euclidische vectorruimte E_4 wordt een lineaire deelruimte D_2 opgespannen door de vectoren $(1, 2, 1, 0)$ en $(0, 2, 1, 1)$. Alle vectoren in E_4 worden loodrecht geprojecteerd op D_2 . Bepaal van deze lineaire transformatie de matrix en de kern.

$$\text{Antw.: } \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad \lambda(0, 1, -2, 0) + \mu(1, 0, -1, 1).$$

19. In de euclidische ruimte E_3 is een orthogonale transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Toon aan:

1°. Alle punten die op zichzelf worden afgebeeld, liggen op een lijn l door de oorsprong O .

2°. Is m' het beeld van een lijn m door O , dan maken m en m' gelijke hoeken met l .

3°. Is n' het beeld van een lijn n door O loodrecht op l , dan is de hoek tussen n en n' constant.

4°. Het beeld van elk punt P ontstaat door P over een constante hoek om l als as te wentelen.

20. In de euclidische ruimte E_3 zijn gegeven:

1°. de lineaire deelruimte U bestaande uit de vectoren waarvan de kentallen x_1, x_2 en x_3 voldoen aan de vergelijking: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$;

2°. de lineaire deelruimte V die alle vectoren bevat welke loodrecht staan op de lineaire deelruimte U .

a. Bepaal van U en van V een lineair-onafhankelijke basis.

Door een lineaire transformatie met matrix A gaan de vectoren van U in zichzelf over, terwijl de vectoren van V overgaan in vectoren met tegengestelde kentallen.

b. Bereken A en toon aan, dat A orthogonaal is.

c. Verklaar zonder berekening, dat $A^2 = E$.

Antw.: $(1, -1, 0)$ en $(2, 0, 1)$; $(1, 1, -2)$; $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

21. In een euclidische ruimte E_2 is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Men kiest een nieuw coördinatenstelsel met eenheidsvectoren $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ en $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Bepaal de transformatiematrix t.o.v. het nieuwe coördinatenstelsel en verklaar het antwoord meetkundig.

22. In een euclidische ruimte E_2 is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

1°. Toon aan, dat de punten die samenvallen met hun beeldpunten, op een lijn l liggen.

2°. Kies een nieuw orthonormaal coördinatenstelsel met l als x' -as.

Bepaal de matrix van dezelfde transformatie t.o.v. het nieuwe coördinatenstelsel.

Antw.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

23. In een euclidische ruimte E_2 is een lineaire transformatie gegeven waarvan de matrix A orthogonaal is en $|A| = -1$.

Toon aan, dat deze transformatie een spiegeling is t.o.v. een lijn.

24. A en B zijn twee orthogonale $n \times n$ matrices; $|A| = |B|$.

1°. Bewijs: $B^T - A^T = A^T(A - B)B^T$.

2°. Bewijs, als n oneven is: $|A - B| = 0$.

25. Van een vector $\underline{x} \in R_n$ zijn de kentallen: x_1, x_2, \dots, x_n .

Schrijven we deze vector als een kolomvector, dan kunnen we deze notatie beschouwen als een $n \times 1$ matrix. Deze matrix geven we aan met \underline{x} . De getransponeerde matrix van \underline{x} is dan een $1 \times n$ matrix, die we aanduiden met \underline{x}^T .

Van een vector $\underline{y} \in R_n$ zijn de kentallen: y_1, y_2, \dots, y_n .

Bepaal nu $\underline{x}^T \cdot \underline{y}$ en $\underline{x} \cdot \underline{y}^T$.

26. In een euclidische ruimte E_3 is een orthonormale basis gekozen; verder zij $\underline{n}^T = (n_1, n_2, n_3)$ een eenheidsvector en $\underline{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ een willekeurige vector, waarvan we het eindpunt met P aangeven. De vector die tot eindpunt heeft het voetpunt van de loodlijn uit P neergelaten op de drager van \underline{n} geven we aan met $A\underline{x}$.

Bewijs: $A = \underline{n} \cdot \underline{n}^T$, $A^2 = A$ en $|A| = 0$.

HOOFDSTUK XIX

EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN VAN EEN LINEAIRE TRANSFORMATIE

§ 1. Eigenwaarden en eigenvectoren.

Definitie.

Als bij een lineaire transformatie A van R_n in zichzelf voor $\underline{x} \in R_n$ en $\underline{x} \neq \underline{0}$ geldt:

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

dan heet \underline{x} een *eigenvector* van A ; het getal λ heet de bij \underline{x} behorende *eigenwaarde*.
In een lineaire vectorruimte R_n is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Is $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ een vector in R_n zo dat $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, dan is:

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Deze n homogene vergelijkingen met n onbekenden x_1, x_2, \dots, x_n hebben dan en slechts dan oplossingen ongelijk aan de nuloplossing, als:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = |A - \lambda E| = 0 \quad (2)$$

Bij een lineaire transformatie A van R_n in zichzelf zijn de eigenwaarden van A de wortels van de n^{de} graadsvergelijking in λ :

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (3)$$

We noemen de waarden van λ die aan deze vergelijking voldoen, de *eigenwaarden van de matrix A* .

Vergelijking (3) heet de *karacteristieke vergelijking* van A ; het linker lid van de

karacteristieke vergelijking van A heet het *karacteristieke polynoom* van A . Zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de n al of niet verschillende wortels van de karakteristieke vergelijking, dan is:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Uit (2) volgt ook:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + |A|.$$

Hieruit volgt:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \text{ en } \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|.$$

We noemen $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ het *spoor* van A .

Uit het bovenstaande volgt:

De som van de eigenwaarden van een matrix A is gelijk aan het spoor van A ; het produkt van de eigenwaarden is gelijk aan $|A|$.

Is $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, dan noemt men λ_1 een *m-voudige eigenwaarde* van A ; het getal m heet de *multipliciteit* van de eigenwaarde λ_1 . Is $m = 1$, dan is λ_1 een *enkelvoudige eigenwaarde* van A .

Alle oplossingsvectoren (x_1, x_2, \dots, x_n) van het stelsel vergelijkingen (1) die behoren bij één eigenwaarde λ_k (dus ook de nulvector), vormen de *eigenruimte* van A behorende bij de eigenwaarde λ_k . Deze eigenruimte is een lineaire deelruimte van R_n .

Alle vectoren van deze eigenruimte, uitgezonderd de nulvector, zijn dus eigenvectoren van A behorende bij de eigenwaarde λ_k .

Uit bovenstaande volgt dat de eigenruimte van A behorende bij de eigenwaarde λ_k de kern is van de lineaire transformatie met matrix $A - \lambda_k E$.

Opmerking.

Daar we slechts matrices met reële elementen beschouwen, heeft elke karakteristieke vergelijking reële coëfficiënten. Is λ een complexe eigenwaarde van een matrix A , dan is dus ook de toegevoegd complexe waarde $\bar{\lambda}$ een eigenwaarde van A . Is \underline{x} een eigenvector behorende bij een complexe eigenwaarde λ , dan zijn de kentallen van \underline{x} niet alle reël. Van de vector $\bar{\underline{x}}$ behorende bij de eigenwaarde $\bar{\lambda}$, zijn de kentallen dan toegevoegd complex met de kentallen van \underline{x} . Is dus $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, dan is ook $A\bar{\underline{x}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{x}}$.

Stelling.

Van een lineaire transformatie van R_n in zichzelf zijn de eigenwaarden onafhankelijk van de lineair-onafhankelijke basis die R_n opspant.

Bewijs.

In hoofdstuk XVIII § 14 zagen we dat, bij overgang van een lineair-onaf-

hankelijke basis van R_n op een andere lineair-onafhankelijke basis, de matrix A van een lineaire transformatie overgaat in de gelijkwaardige matrix B zo, dat $B = C^{-1}AC$. Hierin is C de reguliere matrix van de basistransformatie.

Daar $C^{-1}C = E$, is $|C^{-1}| \cdot |C| = 1$. Voor elke waarde van λ is:

$$B - \lambda E = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C = C^{-1}(A - \lambda E)C.$$

Hieruit volgt:

$$|B - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

De matrices A en B hebben dus dezelfde karakteristieke vergelijking en dus ook dezelfde eigenwaarden.

Gelijkwaardige matrices hebben dus dezelfde eigenwaarden en gelijke sporen.

§ 2. Eigenschappen van eigenvectoren en eigenwaarden.

Stelling 1.

Van een lineaire transformatie A vormen de eigenvectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ behorende bij de verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ een lineair-onafhankelijk stelsel.

Bewijs.

We bewijzen deze stelling met behulp van volledige inductie.

Daar de eigenvectoren $\neq \underline{0}$ zijn, is de stelling juist voor $p = 1$.

Neem aan, dat de stelling geldt voor k eigenvectoren ($1 \leq k \leq p - 1$), dus dat:

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \underline{a}_k = \underline{0} \text{ dan en slechts dan als elke } \alpha = 0. \quad (1)$$

We tonen aan, dat de stelling dan ook geldt voor $k + 1$ eigenvectoren, of dat uit:

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \underline{a}_k + \alpha_{k+1} \underline{a}_{k+1} = \underline{0} \quad (2)$$

volgt dat elke $\alpha = 0$, dus ook $\alpha_{k+1} = 0$.

Is $\alpha_{k+1} = 0$, dan volgt uit (1) dat ook elke andere α nul is.

Veronderstel $\alpha_{k+1} \neq 0$; dan is:

$$\alpha_{k+1} \underline{a}_{k+1} = -(\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \underline{a}_k). \quad (3)$$

Daar \underline{a}_k een eigenvector is die behoort bij de eigenwaarde λ_k , is

$$A \underline{a}_k = \lambda_k \underline{a}_k \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Hieruit en uit (2) volgt:

$$A(\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \underline{a}_k + \alpha_{k+1} \underline{a}_{k+1}) = \underline{0}$$

dus

$$\lambda_1 \alpha_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k \underline{a}_k + \lambda_{k+1} \alpha_{k+1} \underline{a}_{k+1} = \underline{0}.$$

Substitueren we hierin de uitdrukking (3) voor $\alpha_{k+1} \underline{a}_{k+1}$, dan vinden we:

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 \underline{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda_{k+1})\alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k \underline{a}_k = 0.$$

Daar alle λ 's verschillend zijn, volgt uit (1) dat $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Maar volgens (3) is dan ook $\alpha_{k+1} = 0$, hetgeen in strijd is met de onderstelling.

Betrekking (2) is dus alleen juist voor elke $\alpha = 0$.

Zijn dus $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ ($1 \leq k \leq p-1$) lineair onafhankelijke eigenvectoren, dan zijn ook $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \underline{a}_{k+1}$ lineair onafhankelijke eigenvectoren.

Daar de stelling juist is voor $p=1$, geldt de stelling voor elk p -tal eigenvectoren die bij verschillende eigenwaarden behoren.

Stelling 2.

Is van een lineaire transformatie van R_n in zichzelf de matrix A gelijkwaardig met de diagonaalmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dan zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A .

Is $B = C^{-1}AC$, dan zijn de kolomvectoren van C eigenvectoren van A die respectievelijk bij de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ behoren.

Bewijs.

Daar A en B gelijkwaardige matrices zijn, zijn de eigenwaarden van A dezelfde als de eigenwaarden van B en deze zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Is

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \text{ dan is } CB = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \dots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \dots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \dots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Duiden we de kolomvectoren van C aan met $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ dan zijn

$\lambda_1 \underline{c}_1, \lambda_2 \underline{c}_2, \dots, \lambda_n \underline{c}_n$ de kolomvectoren van CB .

Uit hfdst. XVIII § 9 blijkt, dat de kolomvectoren van AC dan zijn:

$$A\underline{c}_1, A\underline{c}_2, \dots, A\underline{c}_n.$$

Uit $C^{-1}AC = B$ volgt $AC = CB$. De kolomvectoren van AC zijn dus gelijk aan de overeenkomstige kolomvectoren van CB of:

$$A\underline{c}_k = \lambda_k \underline{c}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

De k^{de} kolomvector van C is dus een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde λ_k .

Opmerking.

Daar C regulier is, zijn de kolomvectoren van C lineair onafhankelijk.

Uit stelling 2 volgt dus:

Als een $n \times n$ matrix A gelijkwaardig is met een diagonaalmatrix, dan bezit de lineaire transformatie die door A bepaald is, n lineair onafhankelijke eigenvectoren.

Stelling 3.

Bezit een lineaire transformatie van R_n in zichzelf n lineair onafhankelijke eigenvectoren, dan is de bijbehorende matrix A gelijkwaardig met een diagonaalmatrix. De elementen van de hoofddiagonaal van de diagonaalmatrix zijn dan de eigenwaarden van A .

Bewijs.

We gaan uit van een gegeven lineair-onafhankelijke basis van R_n .

Zijn $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ de lineair onafhankelijke eigenvectoren van A , dan bestaan er n getallen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dat zijn de eigenwaarden van A , zo dat

$$A\underline{c}_k = \lambda_k \underline{c}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

We gaan nu over op een nieuwe lineair-onafhankelijke basis van R_n , die gevormd wordt door de eigenvectoren van A : $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$.

Is t.o.v. de oorspronkelijke basis:

$$\underline{c}_k = (c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk}) \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, n$$

dan is de matrix van de basistransformatie:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Uit } \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{c}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

volgt in verband met (1):

$$A\underline{c}_1 = \lambda_1 \underline{c}_1 = C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\underline{c}_2 = \lambda_2 \underline{c}_2 = C \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad A\underline{c}_n = \lambda_n \underline{c}_n = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$AC = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Daar C regulier is, bestaat C^{-1} . Dan is:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

We hebben dus gezien: De matrix van een lineaire transformatie van R_n in zichzelf met n lineair onafhankelijke eigenvectoren is gelijkwaardig met de diagonaalmatrix $C^{-1}AC$ waarin de elementen van de hoofddiagonaal de eigenwaarden van A zijn. Hierin is C de matrix van de basistransformatie bij overgang van de gegeven lineair-onafhankelijke basis van R_n op de basis die gevormd wordt door de lineair onafhankelijke eigenvectoren van A .

Uit de stellingen 2 en 3 volgt onmiddellijk:

Stelling 4.

De $n \times n$ matrix van een lineaire transformatie van R_n in zichzelf is dan en alleen dan gelijkwaardig met een diagonaalmatrix, als de transformatie n lineair onafhankelijke eigenvectoren bezit.

Opmerkingen.

1. Is A een $n \times n$ matrix met reële elementen, dan behoeven de eigenwaarden van A niet alle reëel te zijn. Ook de kentallen van de eigenvectoren, dat zijn de kentallen van de nieuwe basisvectoren t.o.v. de gegeven basis, behoeven dus niet alle reëel te zijn. Alleen als alle eigenwaarden van A reëel zijn, bestaat er een matrix C met reële elementen zo, dat $C^{-1}AC$ een diagonaalmatrix is waarvan de elementen van de hoofddiagonaal reëel zijn.

2. In de volgende toepassingen zullen we zien, dat er matrices bestaan die niet gelijkwaardig kunnen zijn met een diagonaalmatrix. In zo'n geval spreekt men van een *defecte matrix*.

§ 3. Toepassingen.

1. In een lineaire vectorruimte R_2 is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en de daarbij behorende eigenvectoren van A .

Oplossing.

De karakteristieke vergelijking van A is:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

of:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 1 + 2i$ en $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Substitueren we $\lambda = 1 + 2i$ in

$$(A - \lambda E) \underline{x} = 0,$$

dan ontstaan de vergelijkingen:

$$\begin{cases} (1 - 2i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 - (1 + 2i)x_2 = 0 \end{cases}.$$

De bij $\lambda_1 = 1 + 2i$ behorende eigenvectoren zijn $\underline{x} = \alpha_1 (5, 1 - 2i)$, ($\alpha_1 \neq 0$).

We vinden dat $\underline{x} = \alpha_2 (5, 1 + 2i)$ de eigenvectoren zijn die behoren bij $\lambda_2 = 1 - 2i$, ($\alpha_2 \neq 0$).

2. In een euclidische ruimte E_3 is een lineaire transformatie gegeven door de symmetrische matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1°. Bepaal de eigenwaarden van A en de daarbij behorende eigenruimten.

2°. Toon aan, dat er een orthonormaal stel eigenvectoren bestaat.

3°. Bepaal een matrix C zo, dat $C^{-1}AC$ een diagonaalmatrix is.

Oplossing.

1°. De karakteristieke vergelijking van A is:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2 - \lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Hieruit volgt, dat de eigenwaarden zijn: $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

De bij $\lambda = -7$ behorende eigenruimte vinden we uit:

$$(A + 7E) \underline{x} = 0$$

of uit:

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Hieruit volgt, dat $\underline{v} = \alpha (1, 2, -2)$ de eigenruimte is die behoort bij de eigenwaarde -7 .

Substitueren we $\lambda = 2$ in $(A - \lambda E) \underline{x} = 0$, dan blijken deze eigenvectoren te voldoen aan:

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

De eigenruimte die behoort bij de tweevoudige eigenwaarde 2, is dus

$$\underline{w} = \beta (2, 0, 1) + \gamma (-2, 1, 0).$$

Het blijkt, dat de eigenvectoren \underline{v} loodrecht staan op de eigenvectoren \underline{w} .
2°. We bepalen nu een orthonormaal stel eigenvectoren.

Twee loodrecht op elkaar staande eigenvectoren met lengte 1 zijn:

$$\underline{c}_1 = \frac{1}{3} (1, 2, -2) \quad \text{en} \quad \underline{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1, 0).$$

We kiezen $\underline{w}_1 = (2, 0, 1)$ en $\underline{b} = \underline{w}_1 - (\underline{w}_1, \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_2 = (2, 0, 1) + \frac{4}{5} (-2, 1, 0) = \frac{1}{5} (2, 4, 5)$.

Normaliseren we \underline{b} , dan vinden we

$$\underline{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} (2, 4, 5).$$

We vinden zo het volgende orthonormale stelsel eigenvectoren:

$$\underline{c}_1 = \frac{1}{3} (1, 2, -2), \quad \underline{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1, 0) \quad \text{en} \quad \underline{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} (2, 4, 5).$$

3°. De vectoren $(1, 2, -2)$, $(-2, 1, 0)$ en $(2, 4, 5)$ vormen een lineair-onafhankelijk stelsel eigenvectoren. Kieszen we deze als nieuwe basisvectoren, dan is de matrix van de basistransformatie:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad C^{-1} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ -18 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

De diagonaalmatrix die gelijkwaardig is met A, is:

$$\frac{1}{45} \begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ -18 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opmerkingen.

1. Het blijkt, dat bij de enkelvoudige eigenwaarde $\lambda = 7$ een ééndimensionale eigenruimte behoort en dat bij de tweevoudige eigenwaarde $\lambda = 2$ een tweedimensionale eigenruimte behoort.

2. Daar we hier verschillende stelsels lineair onafhankelijke eigenvectoren kunnen kiezen, zijn er ook verschillende basistransformaties.

3. In een lineaire vectorruimte R_3 is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en de daarbij behorende eigenruimten.

Toon aan, dat deze matrix niet gelijkwaardig kan zijn met een diagonaalmatrix.

Oplossing.

De karakteristieke vergelijking van A is:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ of } (2 - \lambda)^3 = 0.$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Door substitutie van $\lambda = 2$ in $(A - \lambda E) \underline{x} = \underline{0}$, vinden we dat $\underline{x} = \alpha (0, 0, 1)$ de eigenruimte is. Bij de drievoudige eigenwaarde 2 behoort een ééndimensionale eigenruimte. Er bestaan dus geen drie lineair onafhankelijke eigenvectoren. De matrix A kan dus niet gelijkwaardig zijn met een diagonaalmatrix. Deze matrix A is defect.

§ 4. Eigenwaarden en eigenvectoren van symmetrische matrices.

We nemen in deze paragraaf aan, dat in elke euclidische ruimte een orthonormale basis is gekozen.

Stelling 1.

Is van een lineaire transformatie van een euclidische vectorruimte in zichzelf de (reële) matrix symmetrisch, dan staan twee eigenvectoren die bij verschillende eigenwaarden van A behoren, loodrecht op elkaar.

Bewijs.

Zij

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

een symmetrische matrix, dus $a_{kl} = a_{lk}$ ($k = 1, 2, \dots, n$ en $l = 1, 2, \dots, n$) en zijn \underline{v} en \underline{w} twee eigenvectoren van A die respectievelijk behoren bij de eigenwaarden λ_1 en λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), dan is

$$A\underline{v} = \lambda_1 \underline{v} \quad \text{en} \quad A\underline{w} = \lambda_2 \underline{w}.$$

We beschouwen nu de inwendige produkten:

$$(A\underline{v}, \underline{w}) = \lambda_1 (\underline{v}, \underline{w}) \quad \text{en} \quad (A\underline{w}, \underline{v}) = \lambda_2 (\underline{v}, \underline{w}).$$

Is ten opzichte van de gegeven orthonormale basis van de euclidische vectorruimte $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en $\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, dan zijn de kentallen van $A\underline{v}$:

$$\sum_{k=1}^n a_{1k} v_k, \sum_{k=1}^n a_{2k} v_k, \dots \text{ en } \sum_{k=1}^n a_{nk} v_k$$

en de kentallen van $A\mathbf{w}$:

$$\sum_{k=1}^n a_{1k} w_k, \sum_{k=1}^n a_{2k} w_k, \dots \text{ en } \sum_{k=1}^n a_{nk} w_k.$$

Hieruit volgt:

$$(A\mathbf{y}, \mathbf{w}) = w_1 \sum_{k=1}^n a_{1k} v_k + w_2 \sum_{k=1}^n a_{2k} v_k + \dots + w_n \sum_{k=1}^n a_{nk} v_k$$

en

$$(A\mathbf{w}, \mathbf{y}) = v_1 \sum_{k=1}^n a_{1k} w_k + v_2 \sum_{k=1}^n a_{2k} w_k + \dots + v_n \sum_{k=1}^n a_{nk} w_k.$$

Uit de symmetrie van A volgt:

$$(A\mathbf{y}, \mathbf{w}) = (A\mathbf{w}, \mathbf{y}) \quad \text{dus} \quad \lambda_1 (\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \lambda_2 (\mathbf{y}, \mathbf{w}) \quad \text{of} \quad (\lambda_1 - \lambda_2) (\mathbf{y}, \mathbf{w}) = 0$$

en daar $\lambda_1 \neq \lambda_2$ is $(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = 0$ of $\mathbf{y} \perp \mathbf{w}$.

Opmerkingen

1. Ook als volgt kunnen we aantonen dat $(A\mathbf{y}, \mathbf{w}) = (A\mathbf{w}, \mathbf{y})$.

Het inwendig produkt $(A\mathbf{y}, \mathbf{w})$ is te schrijven als het produkt van de $1 \times n$ en $n \times 1$ matrices \mathbf{w}^T en $A\mathbf{y}$, dus ook als het produkt van de matrices \mathbf{w}^T , A en \mathbf{y} . Daar $(A\mathbf{y}, \mathbf{w})$ een getal is en A symmetrisch is, geldt:

$$(A\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T A\mathbf{y} = (\mathbf{w}^T A\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{w} = \mathbf{y}^T A\mathbf{w} = (A\mathbf{w}, \mathbf{y}).$$

2. Uit deze stelling volgt, dat de eigenruimten die bij verschillende eigenwaarden van een (reële) symmetrische matrix behoren, loodrecht op elkaar staan.

Stelling 2.

De eigenwaarden van een reële symmetrische matrix zijn reëel.

Bewijs.

Is A een $n \times n$ matrix, dan kunnen we A beschouwen als de matrix van een lineaire transformatie van de euclidische vectorruimte E_n in zichzelf. Daar A reëel is, heeft het karakteristieke polynoom $|A - \lambda E|$ reële coëfficiënten. Veronderstel dat $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ($\lambda_2 \neq 0$) een complexe eigenwaarde is van A , dan is ook de toegevoegd complexe waarde $\bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$ een eigenwaarde van A . Zij \mathbf{y} een eigenvector behorende bij λ , dan is $\bar{\mathbf{y}}$ een eigenvector behorende bij $\bar{\lambda}$ (zie opmerking § 1).

Daar $\lambda \neq \bar{\lambda}$, is volgens Stelling 1: $(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$.

Daar A reëel en λ complex is, zijn de kentallen van \mathbf{y} niet alle reëel.

We kunnen \mathbf{y} dus voorstellen door:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2.$$

Hierin hebben \mathbf{y}_1 en \mathbf{y}_2 reële kentallen en is $\mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$.

Dan is:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_1 - i\mathbf{y}_2.$$

Nu is:

$$(\underline{y}, \bar{\underline{y}}) = (\underline{y}_1 + i\underline{y}_2, \underline{y}_1 - i\underline{y}_2) = (\underline{y}_1, \underline{y}_1) + (\underline{y}_2, \underline{y}_2)$$

en daar $(\underline{y}, \bar{\underline{y}}) = 0$, is $(\underline{y}_1, \underline{y}_1) + (\underline{y}_2, \underline{y}_2) = 0$.

In verband met $\underline{y}_2 \neq 0$ is dit onmogelijk. Onze onderstelling, dat één van de eigenwaarden van A complex is, is dus onjuist.

Stelling 3.

Is A een reële symmetrische $n \times n$ matrix, dan bestaat er een orthogonale matrix C zo, dat $C^{-1}AC$ een diagonaalmatrix is.

Bewijs.

In de euclidische vectorruimte E_n , waarin de eenheidsvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ een orthonormale basis vormen, bepaalt A een lineaire transformatie. De (reële) eigenwaarden van A , die niet alle verschillend behoeven te zijn, noemen we $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

De eigenvector met lengte 1 die behoort bij λ_1 , noemen we \underline{c}_1 , dus:

$$A\underline{c}_1 = \lambda_1 \underline{c}_1. \quad (1)$$

We gaan nu in E_n over op een nieuwe orthonormale basis en zorgen, dat \underline{c}_1 de eerste vector is van de nieuwe basis. Noemen we de orthogonale matrix van deze basistransformatie C , dan is:

$$\underline{c}_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

en in verband met (1):

$$AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dus} \quad C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$C^{-1}AC$ heeft dus de gedaante:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

A is symmetrisch en C is orthogonaal, dus:

$$(C^{-1}AC)^T = C^T A^T (C^{-1})^T = C^{-1}AC.$$

Hieruit blijkt, dat de matrix $C^{-1}AC$ ook symmetrisch is, dus in verband met (2) is:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ met } \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ symmetrisch.}$$

Voor $n = 2$ is dus:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Volgens § 2 stelling 2 heeft deze matrix dezelfde eigenwaarden als A , waaruit volgt: $b_{22} = \lambda_2$. We hebben de stelling nu bewezen voor $n = 2$.

Het volledige bewijs kan gegeven worden door middel van volledige inductie. Ter wille van de overzichtelijkheid tonen we de overgang van $n = 2$ op $n = 3$ aan; de overgang van $n = k$ op $n = k + 1$ ($k < n$) verloopt op analoge wijze.

$$\text{Voor } n = 3 \text{ is } C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ met } B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

De eigenwaarden van A en dus ook van $C^{-1}AC$ zijn λ_1, λ_2 en λ_3 ; de eigenwaarden van de symmetrische matrix B zijn dus λ_2 en λ_3 .

Er bestaat dus een orthogonale matrix:

$$D = \begin{pmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

zodat:

$$D^{-1}BD = \begin{pmatrix} d_{22} & d_{32} \\ d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Zij

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix},$$

dan is, daar D orthogonaal is, D_1 ook orthogonaal. Uit (3) en (4) volgt dan:

$$D_1^{-1}C^{-1}ACD_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{32} \\ 0 & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Daar C en D_1 orthogonale matrices zijn, is ook CD_1 orthogonaal.

Verder is $D_1^{-1}C^{-1}ACD_1 = (CD_1)^{-1}A(CD_1)$.

Als de stelling geldt voor $n = 2$, bestaat er dus ook voor $n = 3$ een orthogonale matrix CD_1 zo, dat $(CD_1)^{-1}A(CD_1)$ een diagonaalmatrix is.

Opmerking.

De kolomvectoren van C vormen de nieuwe orthonormale basis van de euclidische vectorruimte E_n .

Uit

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

volgt:

$$AC \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Zijn c_1, c_2, \dots, c_n de kolomvectoren van C , dan is dus:

$$AC_k = \lambda_k c_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

We zien dus:

1°. De kolomvectoren van C vormen een orthonormaal stel eigenvectoren van A ; deze eigenvectoren behoren respectievelijk bij de eigenwaarden die voorkomen in de hoofddiagonaal van de met A gelijkwaardige diagonaalmatrix $C^{-1}AC$.

2°. Is in een euclidische ruimte E_n met orthonormale basis de bij een lineaire transformatie behorende $n \times n$ matrix symmetrisch, dan bezit deze transformatie n verschillende eigenvectoren die een orthonormaal stelsel vormen.

3°. Is λ_1 een p -voudige eigenwaarde van de reële symmetrische matrix A , dan volgt uit (5), dat de rang van $C^{-1}AC - \lambda_1 E$, dus ook de rang van $A - \lambda_1 E$ gelijk is aan $n - p$. De oplossingsvectoren van $(A - \lambda_1 E)\underline{x} = \underline{0}$ vormen dus een p -dimensionale deelruimte van de euclidische ruimte.

Hieruit volgt:

Bij elke p -voudige eigenwaarde van een reële symmetrische $n \times n$ matrix behoort een p -dimensionale eigenruimte van de euclidische ruimte E_n .

Een symmetrische matrix is dus niet defect.

§ 5. Opgaven.

1. Bij een lineaire transformatie van R_3 in zichzelf is:

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1°. Bepaal de transformatiematrix A .

2°. Bepaal, zonder gebruikmaking van de karakteristieke vergelijking, één eigenwaarde en het stel daarbij behorende eigenvectoren.

3°. Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren.

4°. Bepaal een matrix C zo, dat $C^{-1}AC$ een diagonaalmatrix is.

Antw.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

eigenwaarden: $-2, 2$ en 4 ; eigenvectoren: $\alpha(1, 1, 1)$, $\beta(1, 0, -1)$ en $\gamma(1, -2, 1)$ (α, β en γ ongelijk 0).

2. In een euclidische ruimte E_3 met een orthonormale basis geldt voor een lineaire transformatie:

1°. De beeldruimte U is tweedimensionaal.

2°. De kern V staat loodrecht op U .

3°. De vector $(1, 1, 0)$ is een eigenvector behorende bij de eigenwaarde 3 .

4°. Bij de eigenwaarde 6 behoort de eigenvector $(-1, 0, 1)$.

Bepaal:

a. de beeldruimte U .

b. de kern V .

c. de transformatiematrix.

d. de derde eigenwaarde en het bijbehorende stelsel eigenvectoren.

Antw.:

$$\lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1); \nu(1, -1, 1); \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; 0, \alpha(1, -1, 1), \\ \alpha \neq 0.$$

3. In een euclidische ruimte E_4 met een orthonormale basis is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en een orthonormaal stel eigenvectoren.

Toon aan, dat A gelijkwaardig is met een diagonaalmatrix.

Antw.:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -8, \lambda_3 = \lambda_4 = 4; \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

4. Gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Toon aan dat A defect is.

5. Gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bepaal de eigenwaarden van A en bepaal een matrix C zo, dat $C^{-1}AC$ een diagonaalmatrix is.

Antw.:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

6. In een euclidische ruimte E_4 met een orthonormale basis is een lineaire transformatie gegeven door de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en een orthonormaal stel eigenvectoren.

Antw.:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 6; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 0, -1), \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, -3, 1), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

7. A is een lineaire transformatie van een euclidische vectorruimte E_3 in zichzelf, die t.o.v. een orthonormale basis e_1, e_2, e_3 tot matrix heeft:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Toon aan, dat A een projectie is op een tweedimensionale lineaire deelruimte, gevolgd door een spiegeling t.o.v. de lineaire deelruimte opgespannen door e_1 en e_2 .

Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A, alsmede de kern en de beeldruimte van A.

Antw.: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -7$; $\alpha_1 (2, 2, -3)$, $\alpha_2 (1, -1, 0)$, $\alpha_3 (1, 1, 2)$;
 $\beta (2, 2, -3)$; $\beta_1 (1, 2, 3) + \beta_2 (2, 1, 3)$.

8. Bewijs, dat een $n \times n$ matrix A dan en slechts dan een eigenwaarde nul heeft, als A singulier is.

9. Bewijs, dat de eigenwaarden van A^2 de kwadraten zijn van de eigenwaarden van de vierkante matrix A .

10. Gegeven is, dat de eigenwaarden van een lineaire transformatie van R_n in zichzelf alle verschillend zijn. Bewijs, dat alle eigenruimten ééndimensionaal zijn.

11. Gegeven is, dat de vierkante matrix A niet een nulmatrix en niet een eenheidsmatrix is en dat $A^2 = A$.

Toon aan, dat A een eigenwaarde 0 heeft.

12. Ten opzichte van een orthonormale basis is in een euclidische ruimte E_n een lineaire transformatie gegeven door een $n \times n$ matrix A .

a. Bewijs, dat A en A^T dezelfde eigenwaarden hebben.

b. Van A is \underline{x} een eigenvector behorende bij de eigenwaarde λ_1 ;
 van A^T is \underline{y} een eigenvector behorende bij de eigenwaarde λ_2 .

Bewijs dat $\underline{x} \perp \underline{y}$, als $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

HOOFDSTUK XX

KLASSIFICATIE VAN KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN IN E_3 .

De oppervlakken die we willen klassificeren, zijn gegeven door kwadratische vergelijkingen in x , y en z :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

De vergelijkingen van deze oppervlakken zijn gegeven t.o.v. een orthonormaal coördinatenstelsel in de euclidische ruimte E_3 . We hebben daartoe in E_3 een orthonormale basis gekozen, gevormd door de eenheidsvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ en \underline{e}_3 . De dragers van $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ en \underline{e}_3 , waaraan we als positieve richting die van $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ en \underline{e}_3 toevoegen, noemen we resp. de x -as, de y -as en de z -as van het orthonormale coördinatenstelsel.

Van een vector $\underline{x} \in E_3$ noemen we de kentallen x, y en z . Schrijven we deze vector als een kolomvector, dan kunnen we deze notatie beschouwen als een 3×1 matrix. Deze matrix geven we aan met \underline{x} . Schrijven we vector \underline{x} als een rijvector, dan kunnen we deze notatie beschouwen als een 1×3 matrix die de getransponeerde is van matrix \underline{x} ; deze geven we aan met \underline{x}^T .

Dus:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{x}^T = (x \ y \ z).$$

De 1×3 matrix $(x \ y \ z)$ schrijven we ook wel met komma's: (x, y, z) .

Met (x, y, z) kunnen we dus bedoelen de vector \underline{x}^T , die dezelfde is als vector \underline{x} , maar we kunnen er ook mee bedoelen de matrix $(x \ y \ z)$.

§ 1. Herleiding van homogene kwadratische polynomen in x, y en z .

Een homogeen kwadratisch polynoom in x, y en z heeft de gedaante:

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \quad (1)$$

Uit

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi_x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{1}{2}\varphi_y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{1}{2}\varphi_z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

volgt:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x\varphi_x' + y\varphi_y' + z\varphi_z'). \quad (3)$$

De matrix van de rechterleden van het stelsel vergelijkingen (2) noemen we A , dus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{x}^T A = \frac{1}{2} (\varphi_{x'}, \varphi_{y'}, \varphi_{z'}) \text{ en } \underline{x}^T A \underline{x} = \frac{1}{2} (x\varphi_{x'} + y\varphi_{y'} + z\varphi_{z'}).$$

In verband met (3) is dus:

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \varphi(x, y, z). \quad (4)$$

Daar A symmetrisch is, heeft A drie reële eigenwaarden λ_1, λ_2 en λ_3 en een daarbij behorend orthonormaal stel eigenvectoren $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ en \underline{c}_3 .

We kiezen nu in E_3 een nieuw orthonormaal coördinatenstelsel met $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ en \underline{c}_3 als nieuwe eenheidsvectoren. Als we de orthogonale matrix van deze coördinatentransformatie of basistransformatie C noemen, dan zijn $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ en \underline{c}_3 de kolomvectoren van C en dan is:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Een vector \underline{x} , die t.o.v. het oorspronkelijke coördinatenstelsel de kentallen x, y en z heeft, geven we t.o.v. het nieuwe coördinatenstelsel de kentallen x', y' en z' . Ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel duiden we deze vector aan met \underline{x}' . Voor dezelfde vector geldt dus $\underline{x}^T = (x, y, z)$ en $\underline{x}'^T = (x', y', z')$. Daar $\underline{x} = C\underline{x}'$ is $\underline{x}^T = (C\underline{x}')^T = \underline{x}'^T C^T = \underline{x}'^T C^{-1}$.

Hieruit volgt in verband met (5):

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}'^T C^{-1} A C \underline{x}' = (x' y' z') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

In verband met (4) heeft $\varphi(x, y, z)$ ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel de gedaante:

$$\varphi^*(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Deze vorm noemen we de *eenvoudigste gedaante* van $\varphi(x, y, z)$.

§ 2. Toepassingen.

1. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 - 4xy + 4xz - 2y^2 + 8yz - 2z^2$$

en bepaal de vergelijkingen van de coördinatenformaties.

Oplossing.

$$\varphi(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke vergelijking van A:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2 - \lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

heeft $\lambda_1 = -7$ en $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ tot wortels. Hieruit volgt dat de eenvoudigste gedaante van $\varphi(x, y, z)$ is:

$$\varphi^*(x', y', z') = -7x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2.$$

Een orthonormaal stel eigenvectoren van A is (zie hfdst. XIX § 3, toepassing 2):

$$\underline{c}_1 = 1/3 (1, 2, -2), \quad \underline{c}_2 = \sqrt{5}/5 (-2, 1, 0) \quad \text{en} \quad \underline{c}_3 = \sqrt{5}/15 (2, 4, 5).$$

De vergelijkingen van de coördinatentransformaties zijn:

$$\underline{x} = C\underline{x}' \quad \text{en} \quad \underline{x}' = C^{-1}\underline{x}.$$

Daar $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ en \underline{c}_3 de kolomvectoren van C zijn, is

$$\left. \begin{aligned} x &= 1/3 x' - 2\sqrt{5}/5 y' + 2\sqrt{5}/15 z' \\ y &= 2/3 y' + \sqrt{5}/5 y' + 4\sqrt{5}/15 z' \\ z &= -2/3 z' \quad \quad \quad + \sqrt{5}/3 z' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Daar $C^{-1} = C^T$, zijn de vergelijkingen van de inverse coördinatentransformatie, waarbij we dus terug gaan van het nieuwe naar het oorspronkelijke coördinatenstelsel:

$$\left. \begin{aligned} x' &= 1/3 x + 2/3 y - 2/3 z \\ y' &= -2\sqrt{5}/5 x + \sqrt{5}/5 y \\ z' &= 2\sqrt{5}/15 x + 4\sqrt{5}/15 y + \sqrt{5}/3 z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitueren we (1) in $\varphi(x, y, z)$ dan ontstaat $\varphi^*(x', y', z')$; substitueren we (2) in $\varphi^*(x', y', z')$ dan krijgen we $\varphi(x, y, z)$ terug.

2. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 4xz + 4y^2 + 8yz + 4z^2$$

en bepaal de vergelijkingen van de coördinatentransformaties.

Oplossing.

De symmetrische matrix van $\varphi(x, y, z)$ is:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 4 \\ 2 & 4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

heeft tot wortels: $\lambda_1 = 9$ en $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

De eenvoudigste gedaante van $\varphi(x, y, z)$ is dus:

$$\varphi^*(x', y', z') = 9x'^2.$$

Een bij de eigenwaarden behorend orthonormaal stel eigenvectoren is:

$$\frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad \frac{1}{3}(-2, -1, 2) \quad \text{en} \quad \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

De vergelijkingen van de coördinatentransformaties zijn dus:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z') \\ y &= \frac{1}{3}(2x' - y' - 2z') \\ z &= \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z') \end{aligned} \right\} \quad \text{en} \quad \left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) \\ y' &= \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) \\ z' &= \frac{1}{3}(2x - 2y + z) \end{aligned} \right\}.$$

§ 3. Klassificatie van kwadratische oppervlakken in E_3 .

Een kwadratisch oppervlak in E_3 heeft tot vergelijking:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

Het homogene kwadratische deel hiervan is:

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

We kiezen een nieuw orthonormaal coördinatenstelsel zo, dat $\varphi(x, y, z)$ t.o.v. dat coördinatenstelsel van de eenvoudigste gedaante wordt. In § 1 zagen we het volgende:

De bij $\varphi(x, y, z)$ behorende matrix is:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Zijn λ_1, λ_2 en λ_3 de eigenwaarden van A en is $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ een bijbehorend orthonormaal stel eigenvectoren, dan worden deze vectoren de eenheidsvectoren van het nieuwe coördinatenstelsel. De vectoren $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ en \underline{c}_3 met kentallen t.o.v. het oorspronkelijke coördinatenstelsel zijn de kolomvectoren van de matrix C die behoort bij de transformatie van het oude naar het nieuwe coördinatenstelsel.

Door de transformatie $\underline{x} = C\underline{x}'$ gaat (1) over in:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44} = 0. \quad (3)$$

We onderscheiden drie gevallen:

I. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0.$

II. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0.$

III. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$

I. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0.$

We kunnen (2) als volgt herleiden:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a_{14}'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{24}'}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{a_{34}'}{\lambda_3} \right)^2 + d = 0$$

met

$$d = a_{44} - \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{24}'^2}{\lambda_2} - \frac{a_{34}'^2}{\lambda_3}.$$

Door een translatie van het assenstelsel zo, dat het punt

$$\left(-\frac{a_{14}'}{\lambda_1}, -\frac{a_{24}'}{\lambda_2}, -\frac{a_{34}'}{\lambda_3} \right)$$

de nieuwe oorsprong wordt, gaat de vergelijking tenslotte over in:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 + d = 0. \quad (3)$$

In het geval II onderscheiden we de gevallen: II₁: $a_{34}' \neq 0$ en II₂: $a_{34}' = 0$.

II₁. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ en $a_{34}' \neq 0$.

Door een translatie van het assenstelsel is (2) te herleiden tot:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + 2d\bar{z} = 0. \quad (4)$$

II₂. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ en $a_{34}' = 0$.

De vergelijking (2) is te herleiden tot:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + d = 0. \quad (5)$$

Het geval III splitsen we ook in twee gevallen, nl.: III₁: a_{24}' en a_{34}' niet beide nul en III₂: $a_{24}' = a_{34}' = 0$.

III₁. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, a_{24}'$ en a_{34}' niet beide nul.

De vergelijking (2) is te herleiden tot:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + 2d\bar{y} = 0. \quad (7)$$

III₂. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, a_{24}' = a_{34}' = 0$.

De vergelijking (2) is te herleiden tot:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + d = 0. \quad (8)$$

De soort van het oppervlak wordt bepaald door de tekens van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en d . Nemen we voor α, β, γ en p positieve getallen, dan kunnen we de vergelijkingen (3) t/m (8) in een enigszins andere vorm schrijven. We krijgen dan de volgende indeling van de kwadratische oppervlakken (zie hfdst. XII):

I	a	$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$	reële ellipsoïde.
	b	$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = -1$	imaginaire ellipsoïde.
	c	$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$	éénbladige hyperboloïde.
	d	$\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$	tweebladige hyperboloïde.
	e	$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$	imaginaire kegel.
	f	$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 0$	reële kegel.
II ₁	a	$\alpha x^2 + \beta y^2 = \pm 2pz$	elliptische paraboloiden.
	b	$\alpha x^2 - \beta y^2 = \pm 2pz$	hyperbolische paraboloiden.
II ₂	a	$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	reële elliptische cilinder.
	b	$\alpha x^2 + \beta y^2 = -1$	imaginaire cilinder.
	c	$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	hyperbolische cilinder.
	d	$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$	twee imaginaire snijdende vlakken.
	e	$\alpha x^2 - \beta y^2 = 0$	twee reële snijdende vlakken.
III ₁		$\alpha x^2 = \pm 2py$	parabolische cilinder.
III ₂	a	$\alpha x^2 = 1$	twee reële evenwijdige vlakken.
	b	$\alpha x^2 = -1$	twee imaginaire evenwijdige vlakken.
	c	$\alpha x^2 = 0$	twee samenvallende vlakken.

§ 4. Toepassingen.

1. Gegeven het oppervlak met vergelijking: $f(x, y, z) =$

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 4xz - 8yz + 5z^2 - 16x + 4y + 4z - 136 = 0. \quad (1)$$

Bepaal:

- de eenvoudigste vergelijking van het oppervlak;
- de soort van het oppervlak;
- de transformatievergelijkingen.

Oplossing.

Volgens hfdst. XIII § 3 volgen de coördinaten van het eventuele middelpunt uit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} &= 8x - 2y - 2z - 8 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x + 5y - 4z + 2 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} &= -2x - 4y + 5z + 2 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Het blijkt, dat er oneindig veel middelpunten zijn die liggen op de lijn:

$$x = (1, 0, 0) + \lambda (1, 2, 2).$$

We kiezen één van deze middelpunten, bijv. $(1, 0, 0)$ en verschuiven het assensstelsel zo, dat $(1, 0, 0)$ de nieuwe oorsprong wordt. De transformatieverge-

lijkingen zijn dan:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + 1 \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \right\}.$$

Ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel is de vergelijking van het oppervlak:

$$8x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 - 4x'z' - 8y'z' + 5z'^2 - 144 = 0. \quad (2)$$

Om tot de eenvoudigste vergelijking te komen, bepalen we de eigenwaarden van de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Deze eigenwaarden zijn $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ en $\lambda_3 = 0$. De eenvoudigste vergelijking van het oppervlak is dus:

$$9\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 - 144 = 0 \quad \text{of} \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 16. \quad (3)$$

Het blijkt, dat het oppervlak een omwentelingscilinder is met straal 4 en as van omwenteling: $\underline{x} = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, 2)$.

Om tot de transformatievergelijkingen te komen, bepalen we eerst een ortho-normaal stel eigenvectoren van A die behoren bij de eigenwaarden $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9$ en $\lambda_3 = 0$, dat zijn:

$$\frac{1}{3}(2, -2, 1), \quad \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad \frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

De transformatievergelijkingen voor de overgang van (2) naar (3) zijn dus:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}(2\bar{x} + 2\bar{y} + \bar{z}) \\ y' &= \frac{1}{3}(-2\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z}) \\ z' &= \frac{1}{3}(\bar{x} - 2\bar{y} + 2\bar{z}) \end{aligned} \right\}.$$

De transformatievergelijkingen voor de overgang van (1) naar (3) zijn dus:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(2\bar{x} + 2\bar{y} + \bar{z} + 3) \\ y &= \frac{1}{3}(-2\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z}) \\ z &= \frac{1}{3}(\bar{x} + 2\bar{y} + 2\bar{z}) \end{aligned} \right\}.$$

2. Gegeven het oppervlak met vergelijking:

$$f(x, y, z) = 4xy - 4xz + y^2 - z^2 - 6x + 4y + 2z + 8 = 0.$$

Bepaal:

- de eenvoudigste vergelijking van het oppervlak;
- de soort van het oppervlak;
- de transformatievergelijkingen.

Oplossing.

Uit

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2z - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + y + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = -2x - z + 1 = 0$$

volgt, dat het oppervlak geen middelpunt heeft.

We bepalen nu eerst een nieuw orthonormaal coördinatenstelsel ten opzichte waarvan het homogene kwadratische deel van $f(x, y, z)$ de eenvoudigste gedaante heeft. Daartoe bepalen we de eigenwaarden van de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$ en $\lambda_3 = 0$. Een orthonormaal stel eigenvectoren behorende bij deze eigenwaarden zijn:

$$\frac{1}{3}(2, 2, -1), \quad \frac{1}{3}(2, -1, 2), \quad \frac{1}{3}(1, -2, -2).$$

De transformatievergelijkingen bij overgang naar het coördinatenstelsel met deze eigenvectoren als eenheidsvectoren, zijn:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z') \\ y &= \frac{1}{3}(2x' - y' - 2z') \\ z &= \frac{1}{3}(-x' + 2y' - 2z') \end{aligned} \right\}.$$

Ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel is de vergelijking van het oppervlak:

$$3x'^2 - 3y'^2 - 2x' - 4y' - 6z' + 8 = 0.$$

of:

$$3(x' - \frac{1}{3})^2 - 3(y' + \frac{2}{3})^2 = 6(z' - \frac{2}{3}).$$

We stellen:

$$x' - \frac{1}{3} = \bar{x}, \quad y' + \frac{2}{3} = \bar{y}, \quad z' - \frac{2}{3} = \bar{z};$$

d.w.z. we verschuiven het assenstelsel zo, dat het punt $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ de nieuwe oorsprong wordt; dan ontstaat de eenvoudigste vergelijking:

$$\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 2\bar{z}.$$

Het oppervlak blijkt een hyperbolische paraboloid te zijn.

Voor de overgang van de gegeven vergelijking van het oppervlak naar de eenvoudigste vergelijking dienen de volgende transformatievergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1/3(2\bar{x} + 2\bar{y} + \bar{z} + 5/6) \\ y &= 1/3(2\bar{x} - \bar{y} - 2\bar{z} - 5/3) \\ z &= 1/3(-\bar{x} + 2\bar{y} - 2\bar{z} - 14/3) \end{aligned} \right\}.$$

Opmerking.

Het onderzoek van kwadratische krommen in de euclidische ruimte E_2 waarvan de vergelijking gegeven is t.o.v. een op de eenheidsvectoren \underline{e}_1 en \underline{e}_2 gebaseerd orthonormaal coördinatenstelsel, kan op analoge wijze geschieden als het onderzoek van kwadratische oppervlakken in E_3 .

We volstaan met enkele voorbeelden (zie hfdst. VII § 10).

Voorbeelden.

$$1. f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} &= x - \frac{1}{2}y - 2\frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{middelpunt } M(3, 1).$$

$$\text{Assentranslatie: } \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

$$\text{Nieuwe vergelijking: } x'^2 - x'y' + y'^2 - 9 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristieke vergelijking van A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Eigenwaarden van A: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

Eenvoudigste vergelijking van de kromme:

$$\frac{1}{2}\bar{x}^2 + \frac{3}{2}\bar{y}^2 - 9 = 0 \quad \text{of} \quad \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 18.$$

De kromme is een (reële) ellips.

Een orthonormaal stel eigenvectoren, resp. behorende bij de eigenwaarden $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ en $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, is:

$$\underline{c}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, 1), \quad \underline{c}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1, 1).$$

$$\text{Transformatievergelijkingen: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{x} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{y} + 3 \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{y} + 1 \end{cases}$$

$$2. f(x, y) = 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 14x - 23y + 26 = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} &= 9x - 12y - 7 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} &= -12x + 16y - 11\frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{geen middelpunt.}$$

Karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -12 \\ -12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = 25$; orthonormaal stel eigenvectoren:

$$c_1 = 1/5 (4, 3) \text{ en } c_2 = 1/5 (-3, 4).$$

Transformatievergelijkingen: $\begin{cases} x = 4/5x' - 3/5y' \\ y = 3/5x' + 4/5y' \end{cases}$.

Nieuwe vergelijking:

$$25y'^2 - 25x' - 10y' + 26 = 0 \text{ of } (y' - 1/5)^2 = x' - 1.$$

Assentranslatie: $\begin{cases} x' = \bar{x} + 1 \\ y' = \bar{y} + 1/5 \end{cases}$.

Eenvoudigste vergelijking: $\bar{y}^2 = x$.

De kromme is een parabool.

§ 5. Opgaven.

Bepaal van de onderstaande krommen:

- Het middelpunt of de lijn van middelpunten.
- De eenvoudigste vergelijking.
- De soort.
- De transformatievergelijkingen.
- De as(sen) van symmetrie.
- Eventueel de vergelijkingen van de asymptoten of van de lijnen waarin de kromme ontaard is.

1. $3x^2 - 4xy + 6y^2 + 2x - 20y + 5 = 0$.

2. $3x^2 + 4xy - 16x - 8y + 16 = 0$.

3. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x = 0$.

4. $x^2 + xy + y^2 - 5x - 7y + 14 = 0$.

5. $2x^2 - xy - 3y^2 - 2x + 13y - 12 = 0$.

6. $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$.

7. $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 6 = 0$.

8. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + 8y + 13 = 0$.

Antwoorden.

1. Middelpunt M (1, 2); $x = x' + 1$, $y = y' + 2$: $3x'^2 - 4x'y' + 6y'^2 = 14$; $\lambda = 2$, $\lambda = 7$; $x' = 1/\sqrt{5} (2\bar{x} + \bar{y})$, $y' = 1/\sqrt{5} (\bar{x} - 2\bar{y})$: $2\bar{x}^2 + 7\bar{y}^2 = 14$; reële ellips; symm. assen $x - 2y + 3 = 0$ en $2x + y - 4 = 0$.

2. M (2, 1); $x = x' + 2$, $y = y' + 1$: $3x'^2 + 4x'y' = 4$; $\lambda = 4$, $\lambda = -1$: $x' = 1/\sqrt{5} (2\bar{x} + \bar{y})$, $y' = 1/\sqrt{5} (\bar{x} - 2\bar{y})$: $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 4$; hyperbool; asymptoten $x = 2$ en $3x + 4y = 10$; symm. assen $x - 2y = 0$ en $2x + y - 5 = 0$.

3. parabool ; $\lambda = 0, \lambda = 2 : x = 1/\sqrt{2} (x' + y'), y = 1/\sqrt{2} (-x' + y') :$
 $y'^2 + 2\sqrt{2} x' + 2\sqrt{2} y' = 0 ; x' = \bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, y' = \bar{y} - \sqrt{2} :$
 $\bar{y}^2 = -2\sqrt{2} \bar{x} ; \text{top } (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) ; \text{as } x + y + 2 = 0 .$

4. M (1,3) ; $x = x' + 1, y = y' + 3 : x'^2 + x'y' + y'^2 + 1 = 0 ; \lambda =$
 $= \frac{1}{2}, \lambda = \frac{3}{2} : x' = 1/\sqrt{2} (\bar{x} + \bar{y}), y' = 1/\sqrt{2} (-\bar{x} + \bar{y}) : \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = -2 ;$
 imaginaire ellips ; symm. assen $x - y + 2 = 0$ en $x + y - 4 = 0 .$

5. M (1,2) ; $x = x' + 1, y = y' + 2 : 2x'^2 - x'y' - 3y'^2 = 0 ,$ twee el-
 kaar snijdende lijnen $2x - 3y + 4 = 0$ en $x + y - 3 = 0 .$

6. M (2,1) ; $x = x' + 2, y = y' + 1 : 5x'^2 - 6x'y' + 2y'^2 = 0 ; \lambda =$
 $= \frac{1}{2} (7 + 3\sqrt{5})$ en $\lambda = \frac{1}{2} (7 - 3\sqrt{5}) ;$ twee imaginaire snijdende lijnen ; symm.
 assen $(-1 + \sqrt{5}) x + 2y - 2\sqrt{5} = 0$ en $(1 + \sqrt{5}) x - 2y - 2\sqrt{5} = 0 .$

7. lijn van middelpunten $2x + 4y - 1 = 0 ; \lambda = 0, \lambda = 5 :$
 $x = 1/\sqrt{5} (2x' + y'), y = 1/\sqrt{5} (-x' + 2y') : 5y'^2 + \sqrt{5} y' - 6 = 0 ;$ twee reële
 evenwijdige lijnen $x + 2y - 3 = 0$ en $x + 2y + 2 = 0 ;$ as $x + 2y - \frac{1}{2} = 0 .$

8. twee imaginaire evenwijdige lijnen $x + 2y + 2 \pm 3i = 0 ;$
 as $x + 2y + 2 = 0 .$

Bepaal van de onderstaande oppervlakken:

- Het middelpunt of de middelpunten.
- De eenvoudigste vergelijking.
- De soort.
- De assen van symmetrie of de vlakken van symmetrie.
- De transformatievergelijkingen.
- Eventueel de stelsels rechte lijnen die op het oppervlak liggen.

9. $x^2 + y^2 + yz + z^2 - 2x - 3 = 0 .$

10. $8xy - 6y^2 - z^2 + 4y - 4z - 3 = 0 .$

11. $3x^2 + 12xy + 4xz + 8y^2 + 6yz - 13z = 0 .$

12. $x^2 - 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + z^2 - 2z = 0 .$

13. $x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 + y = 0 .$

14. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 4z - 1 = 0 .$

15. $2x^2 + xy + 5xz - y^2 - yz + 2z^2 - 8x + y - 7z + 6 = 0 .$

16. $17x^2 - 28xy - 20xz + 20y^2 + 8yz + 8z^2 - 28x + 40y + 8z - 16 = 0 .$

17. $x^2 + 4xy - 2xz + 4y^2 - 4yz + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0 .$

18. $5x^2 - 12xy - 4xz + 4y^2 + 8yz - 4x - 2y - 4z - 18 = 0 .$

Antwoorden.

9. Middelpunt M (1,0,0) ; $x = x' + 1, y = y', z = z' : x'^2 + y'^2 + y'z' +$
 $+ z'^2 = 4 ; \lambda = 1, \lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{3}{2} : x' = \bar{x}, y' = 1/\sqrt{2} (\bar{y} + \bar{z}), z' = 1/\sqrt{2}$
 $(-\bar{y} + \bar{z}) : \bar{x}^2 + \frac{1}{2}\bar{y}^2 + \frac{3}{2}\bar{z}^2 = 4 ;$ reële ellipsoïde ; symm. assen $\underline{x} = \lambda (1,0,0),$
 $\underline{x} = (1,0,0) + \lambda (0,1,-1)$ en $\underline{x} = (1,0,0) + \lambda (0,1,1) .$

10. M $(-\frac{1}{2}, 0, -2)$; $8x'y' - 6y'^2 - z'^2 + 1 = 0$; $\lambda = -8, \lambda = 2, \lambda = -1$: $x' = 1/\sqrt{5}(\bar{x} + 2\bar{y}), y' = 1/\sqrt{5}(-2\bar{x} + \bar{y}), z' = \bar{z}$: $8\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1$; eenbladige hyperboloïde; symm. assen $\underline{x} = (-\frac{1}{2}, 0, -2) + \lambda(1, -2, 0)$, $\underline{x} = (-\frac{1}{2}, 0, -2) + \lambda(2, 1, 0)$ en $\underline{x} = (-\frac{1}{2}, 0, -2) + \lambda(0, 0, 1)$; lijnenstelsels $\begin{cases} 2\alpha y = \beta(z+1) \\ \beta(4x-3y+2) = \alpha(z+3) \end{cases}$ en $\begin{cases} 2\lambda y = \mu(z+3) \\ \mu(4x-3y+2) = \lambda(z+1) \end{cases}$.

11. M $(1, \frac{3}{2}, -6)$; $3x'^2 + 12x'y' + 4x'z' + 8y'^2 + 6y'z' + 39 = 0$; $\lambda = -1, \lambda = -1, \lambda = 13$:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{6}{\sqrt{70}}\bar{y} + \frac{2}{\sqrt{14}}\bar{z}, y' = -\frac{5}{\sqrt{70}}\bar{y} + \frac{3}{\sqrt{14}}\bar{z}, z' = -\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{3}{\sqrt{70}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{14}}\bar{z}:$$

$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 13\bar{z}^2 = 39$; eenbladige omwentelingshyperboloïde; omw. as $\underline{x} = (1, \frac{3}{2}, -6) + \lambda(2, 3, 1)$, symm. vlak $2x + 3y + z = \frac{1}{2}$;

lijnenstelsels $\begin{cases} \alpha(3x + 6y + 2\sqrt{3}y) = \beta z \\ \beta(x + 2y - \frac{2}{\sqrt{3}}y) = \alpha(-4x - 6y + 13) \end{cases}$

en $\begin{cases} \lambda(3x + 6y + 2\sqrt{3}y) = \mu(-4x - 6y + 13) \\ \mu(x + 2y - \frac{2}{\sqrt{3}}y) = \lambda z \end{cases}$.

12. M $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$; $x'^2 - 2x'y' - 2x'z' + y'^2 - 2y'z' + z'^2 = 0$; $\lambda = 2, \lambda = 2, \lambda = -1$: $x' = 1/\sqrt{2}\bar{x} + 1/\sqrt{6}\bar{y} + 1/\sqrt{3}\bar{z}, y' = -2/\sqrt{6}\bar{y} + 1/\sqrt{3}\bar{z}, z' = -1/\sqrt{2}\bar{x} + 1/\sqrt{6}\bar{y} + 1/\sqrt{3}\bar{z}$: $2\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - \bar{z}^2 = 0$; reële omwentelingskegel; omw. as $\underline{x} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, 1, 1)$, symm. vlak $x + y + z = -1$;

lijnenstelsel $\begin{cases} \lambda\{(1 + \sqrt{3})x + y + (1 - \sqrt{3})z + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\} = \mu(x - 2y + z - \frac{1}{2}) \\ \mu\{(-1 + \sqrt{3})x - y - (1 + \sqrt{3})z - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\} = \lambda(-x + 2y - z + \frac{1}{2}) \end{cases}$.

13. Geen eigenlijk middelpunt, een lijn van oneigenlijke middelpunten nl. de oneigenlijke rechte van $x + y + z = 0$; $\lambda = 3, \lambda = 0, \lambda = 0$: $x = 1/\sqrt{3}x' + 1/\sqrt{6}y' + 1/\sqrt{2}z', y = 1/\sqrt{3}x' - 2/\sqrt{6}y', z = 1/\sqrt{3}x' + 1/\sqrt{6}y' - 1/\sqrt{2}z'$: $3x'^2 + 1/\sqrt{3}x' - 2/\sqrt{6}y' = 0$; $x' = \bar{x} - 1/6\sqrt{3}$, $y' = \bar{y} - 1/12\sqrt{6}$; $3\bar{x}^2 = 2/\sqrt{6}\bar{y}$; parabolische cilinder; symm. vlak $x + y + z = -\frac{1}{6}$; lijnenstelsel t.o.v. $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$: $\underline{x} = (2\lambda, 6\sqrt{6}\lambda^2, 0) + \mu(0, 0, 1)$.

14. Geen eigenlijk middelpunt, een oneigenlijk middelpunt nl. het oneigenlijke punt van de lijn $\underline{x} = \lambda(0, 0, 1)$; $\lambda = 3, \lambda = 1, \lambda = 0$; $x = 1/\sqrt{2}(x' + y')$, $x = 1/\sqrt{2}(x' - y')$, $z = z'$:

$$3x'^2 + y'^2 + \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 4z' - 1 = 0; x' = \bar{x} - \sqrt{2}/6, y' = \bar{y} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, z' = \bar{z} + 5/12: 3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = -4\bar{z};$$

elliptische paraboloiden; symm. vlakken $x + y = -\frac{1}{3}$ en $x - y = 1$; top $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 5/12)$.

15. Lijn van middelpunten $\underline{x} = (1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) + \lambda(1, 1, -1)$; $\lambda = 4\frac{1}{2}$, $\lambda = -1\frac{1}{2}$, $\lambda = 0$: $x = 1/\sqrt{2} x' - 1/\sqrt{6} y' + 1/\sqrt{3} z'$, $y = 2/\sqrt{6} y' + 1/\sqrt{3} z'$, $z = -1/\sqrt{2} x' + 1/\sqrt{6} y' - 1/\sqrt{3} z'$: $4\frac{1}{2}x'^2 - 1\frac{1}{2}y'^2 - 15/\sqrt{2}x' + 3/\sqrt{6}y' + 6 = 0$; $x' = \bar{x} + 5/3\sqrt{2}$, $y' = \bar{y} + 1/\sqrt{6}$, $z' = \bar{z}$: $4\frac{1}{2}\bar{x}^2 - 1\frac{1}{2}\bar{y}^2 = 0$ twee elkaar snij-dende vlakken $2x - y + z - 2 = 0$ en $x + y + 2z - 3 = 0$.

16. Lijn van middelpunten $\underline{x} = (0, -1, 0) + \lambda(2, 1, 2)$; $\lambda = 9$, $\lambda = 36$, $\lambda = 0$: $x = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z')$, $y = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + 2z')$, $z = \frac{1}{3}(-2x' + y' + 2z')$: $9x'^2 + 36y'^2 + 12x' + 48y' - 16 = 0$; $x' = \bar{x} - \frac{2}{3}$, $y' = \bar{y} - \frac{2}{3}$: $\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 4$; elliptische cilinder;

symm. vlakken $x + 2y - 2z + 2 = 0$ en $2x - 2y - z - 2 = 0$;

lijnenstelsel $\underline{x} = (\frac{2}{3} \cos \varphi - \frac{2}{3} \sin \varphi, \frac{4}{3} \cos \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi - 1, -\frac{4}{3} \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi) + \lambda(2, 1, 2)$.

17. Vlak van middelpunten $x + 2y - z = 1$; twee evenwijdige vlakken $x + 2y - z - 1 = \pm 2$.

18. Geen eigenlijk middelpunt, een oneigenlijk middelpunt nl. het oneigenlijke punt van de lijn $\underline{x} = \lambda(2, 1, 2)$; $\lambda = 12$, $\lambda = -3$, $\lambda = 0$: $x = \frac{1}{3}(-2x' + y' + 2z')$, $y = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z')$, $z = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z')$: $12x'^2 - 3y'^2 - 6z' - 18 = 0$; $z' = \bar{z} - 3$: $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 2\bar{z}$; hyperbolische paraboloid; assen $\underline{x} = (-2, -1, -2) + \lambda(-2, 2, 1)$, $\underline{x} = (-2, -1, -2) + \lambda(1, 2, -2)$, $\underline{x} = \lambda(2, 1, 2)$; symm. vlakken $2x - 2y - z = 0$ en $x + 2y - 2z = 0$;

lijnenstelsels $\begin{cases} \alpha(-x + 2y) = 2\beta \\ \beta(-5x + 2y + 4z) = \alpha(2x + y + 2z + 9) \end{cases}$

en $\begin{cases} \lambda(-x + 2y) = \mu(2x + y + 2z + 9) \\ \mu(-5x + 2y + 4z) = 2\lambda. \end{cases}$

AFFIENE TRANSFORMATIES EN BEWEGINGEN

§ 1. Affiene transformaties.

In een tweedimensionale affiene ruimte R_2 kiezen we een (scheefhoekig) assenstelsel. Aan elk punt $P(x, y)$ in R_2 voegen we een punt $P'(x', y')$ in R_2 toe met behulp van de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases} \quad (1)$$

Deze vergelijkingen kunnen we ook als volgt schrijven:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{a} \quad (2)$$

met

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Door de vergelijkingen (1) of (2) wordt elk punt P in R_2 afgebeeld op één punt P' in R_2 ; elke vector $\underline{x} \in R_2$ wordt afgebeeld op één vector $\underline{x}' \in R_2$. We beschouwen alleen afbeeldingen met $|A| \neq 0$; dan heeft A een inverse A^{-1} . Dergelijke afbeeldingen van R_2 in zichzelf noemen we *affiene transformaties* in R_2 . Voor $\underline{a} \neq \underline{0}$ zijn deze affiene transformaties niet lineair.

Uit (2) volgt:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{x}' - A^{-1}\underline{a}. \quad (3)$$

Elk punt (x', y') in R_2 is dus het beeld van één en slechts één punt (x, y) in R_2 . Hieruit volgt:

Door een affiene transformatie van R_2 in zichzelf worden de punten in R_2 één-éénduidig aan elkaar toegevoegd.

Stelling 1.

Bij een affiene transformatie van R_2 in zichzelf is het beeld van een rechte weer een rechte; elke rechte is het beeld van één en slechts één rechte.

Bewijs.

Zij de vectorvoorstelling van een rechte l :

$$\underline{x} = \underline{b} + \lambda \underline{c} \quad (\underline{c} \neq \underline{0}) \quad (4)$$

dan heeft volgens (2) rechte l tot beeld:

$$\underline{x}' = A(\underline{b} + \lambda \underline{c}) + \underline{a} = A\underline{b} + \underline{a} + \lambda(A\underline{c}). \quad (5)$$

Uit $|A| \neq 0$ en $\underline{c} \neq \underline{o}$ volgt $A\underline{c} \neq \underline{o}$, dus (5) is de vectorvoorstelling van een rechte. Het beeld van l is dus weer een rechte.

Met behulp van (3) kunnen we op analoge wijze aantonen, dat de rechte m' :

$$\underline{x}' = \underline{b}' + \lambda \underline{c}' \quad (\underline{c}' \neq \underline{o})$$

het beeld is van één rechte.

Is lijn m evenwijdig met lijn l en is (4) de vectorvoorstelling van l , dan hebben l en m beide vector \underline{c} tot richtingsvector. Volgens (5) hebben dan de beeldrechten l' en m' van l en m beide $A\underline{c}$ tot richtingsvector.

Hieruit volgt:

Door een affine transformatie van R_2 in zichzelf worden evenwijdige rechten op evenwijdige rechten afgebeeld.

Zij P' het beeldpunt van P en Q' het beeldpunt van Q . De punten P, Q, P' en Q' zijn respectievelijk de eindpunten van de vectoren $\underline{p}, \underline{q}, \underline{p}'$ en \underline{q}' .

Volgens (2) is dan:

$$\underline{p}' = A\underline{p} + \underline{a} \quad \text{en} \quad \underline{q}' = A\underline{q} + \underline{a}$$

dus

$$\underline{q}' - \underline{p}' = A(\underline{q} - \underline{p}). \quad (6)$$

Hieruit volgt:

Bij een affine transformatie van R_2 in zichzelf is de transformatie van alle verschilvectoren $\underline{q} - \underline{p}$ een lineaire transformatie.

Stelling 2.

Bij een affine transformatie van R_2 in zichzelf is de verhouding van de lengten van twee evenwijdige lijnsegmenten invariant.

Bewijs.

Veronderstel dat \overrightarrow{PQ} en \overrightarrow{RS} evenwijdige, gerichte lijnstukken zijn en dat

$$\overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{PQ}, \quad (\lambda \neq 0).$$

Zijn P en Q respectievelijk de eindpunten van \underline{p} en \underline{q} , dan is:

$$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} \quad \text{en} \quad \overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{PQ} = \lambda(\underline{q} - \underline{p}).$$

Volgens (6) geldt voor de beelden van \overrightarrow{PQ} en \overrightarrow{RS} , dat zijn $\overrightarrow{P'Q'}$ en $\overrightarrow{R'S'}$:

$$\overrightarrow{P'Q'} = A(\underline{q} - \underline{p}) \quad \text{en} \quad \overrightarrow{R'S'} = A\{\lambda(\underline{q} - \underline{p})\} = \lambda A(\underline{q} - \underline{p}).$$

Hieruit volgt:

$$\overrightarrow{R'S'} = \lambda \overrightarrow{P'Q'}.$$

De beelden van de evenwijdige, gerichte lijnstukken \overrightarrow{PQ} en \overrightarrow{RS} zijn dus weer evenwijdige en gerichte lijnstukken waarvan de lengten zich verhouden als die van \overrightarrow{PQ} en \overrightarrow{RS} .

Hieruit volgt, dat het beeld van het midden van een lijnstuk \overline{PQ} het midden is van het beeld van \overline{PQ} .

Willen we bij een affine transformatie van R_2 in zichzelf ook de oneigenlijke punten in R_2 bij de afbeelding betrekken, dan voeren we homogene coördinaten in. De transformatievergelijkingen of afbeeldingsvergelijkingen (1), die slechts voor eigenlijke punten gelden, worden dan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'}{T'} &= a_{11} \frac{X}{T} + a_{12} \frac{Y}{T} + a_1 \\ \frac{Y'}{T'} &= a_{21} \frac{X}{T} + a_{22} \frac{Y}{T} + a_2 \end{aligned} \right\} (T \neq 0, T' \neq 0) \quad (7)$$

of

$$\left. \begin{aligned} X' &= a_{11} X + a_{12} Y + a_1 T \\ Y' &= a_{21} X + a_{22} Y + a_2 T \\ T' &= T \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Voor oneigenlijke punten ($T = 0, T' = 0$) zijn de vergelijkingen (7) niet bruikbaar, maar de vergelijkingen (8) gelden dan wel. Uit $T = 0$ volgt $T' = 0$ en omgekeerd; het beeldpunt van een oneigenlijk punt is dus weer een oneigenlijk punt en daar $|A| \neq 0$, is elk oneigenlijk punt het beeld van één en slechts één oneigenlijk punt.

Door een affine transformatie van R_2 in zichzelf worden de oneigenlijke punten in R_2 dus één-éénduidig aan elkaar toegevoegd.

Daar evenwijdige lijnen hetzelfde oneigenlijke punt hebben, blijkt ook op deze wijze dat evenwijdige lijnen op evenwijdige lijnen worden afgebeeld.

In een euclidische ruimte met een orthonormaal coördinatenstelsel is de vergelijking van een kwadratische kromme k :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Door een affine transformatie wordt de vergelijking van het beeld van k , dat is k' :

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Hierin kunnen A' , B' en C' niet alle nul zijn; immers, waren A' , B' en C' alle nul, dan zou k' een rechte zijn maar dan was k ook een rechte. Het beeld van een kwadratische kromme is dus weer een kwadratische kromme.

Daar bij een affine transformatie van E_2 in zichzelf de oneigenlijke punten in E_2 één-éénduidig aan elkaar zijn toegevoegd, is bij een affine transformatie de soort van een kwadratische kromme invariant. Ellipsen, parabolen en hyperbolen worden dus respectievelijk weer op ellipsen, parabolen en hyperbolen afgebeeld. Heeft de kwadratische kromme k een middelpunt M en is AB een middellijn van k , dan is $\overline{AM} = \overline{MB}$. Voor de afbeelding k' geldt dan $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$. Het beeld van het middelpunt van k is dus het middelpunt van k' .

Is k ontaard, dan ligt het middelpunt van k op k ; maar dan ligt ook het beeld van het middelpunt, dat is het middelpunt van k' , op k' ; dan is dus ook k' ontaard.

Evenwijdige lijnstukken worden op evenwijdige lijnstukken afgebeeld en het midden van een lijnstuk wordt afgebeeld op het midden van het beeld van dat lijnstuk; in verband met de definitie van twee toegevoegde middellijnen van een kwadratische kromme volgt hieruit, dat twee toegevoegde middellijnen van k worden afgebeeld op twee toegevoegde middellijnen van k' .

Voor de op één rechte gelegen punten A , B , P en Q geldt, dat bij een affiene transformatie de dubbelverhouding $(ABPQ)$ invariant is.

In verband met de definitie van pool en poollijn t.o.v. een kwadratische kromme (hfdst. VIII § 5) volgt hieruit, dat bij een affiene transformatie pool en poollijn ten opzichte van k worden afgebeeld op pool en poollijn ten opzichte van k' .

§ 2. Bewegingen.

Ten opzichte van een orthonormaal coördinatenstelsel wordt een affiene transformatie van de euclidische ruimte E_2 in zichzelf bepaald door de vergelijking:

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{a}.$$

Is de matrix A orthogonaal, dan noemen we deze transformatie een *beweging*. In hfdst. XVIII § 15 zagen we, dat er twee orthogonale 2×2 matrices bestaan, nl.:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

In het eerste geval is $|A| = 1$; we noemen de beweging dan een *eigenlijke beweging*. In het tweede geval is $|A| = -1$; de beweging heet dan een *oneigenlijke beweging* of een *spiegeling*.

Stelling.

Opdat een affiene transformatie van een euclidische ruimte E_2 in zichzelf een beweging is, is het nodig en voldoende dat de afstand van elk tweetal punten in E_2 gelijk is aan de afstand van hun beeldpunten.

Bewijs.

Ten opzichte van een orthonormaal coördinatenstelsel is de vergelijking van een affiene transformatie van E_2 in zichzelf:

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{a}.$$

Zijn p' en q' de beeldvectoren van p en q in E_2 , dan is:

$$q' - p' = A(q - p).$$

De transformatie van alle verschilvectoren in E_2 is dus een lineaire transformatie.

Volgens de stellingen 1 en 2 van hfdst. XVIII § 15 is $|q' - p'| = |q - p|$ als A een orthogonale matrix is en omgekeerd: A is orthogonaal als elke $|q' - p'| = |q - p|$.

Zijn P en Q de eindpunten van p en q en zijn P' en Q' de eindpunten van p' en q' , dan is:

$$\overline{PQ} = |q - p| \quad \text{en} \quad \overline{P'Q'} = |q' - p'|.$$

Een nodige en voldoende voorwaarde dat A orthogonaal is, m.a.w. dat de affiene transformatie een beweging is, is dat voor elk lijnstuk \overline{PQ} geldt:

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'}.$$

Uit deze stelling volgt:

Bij een beweging van E_2 in zichzelf wordt elke cirkel afgebeeld op een cirkel; het beeldpunt van het middelpunt van een cirkel is het middelpunt van de beeldcirkel.

§ 3. Eigenlijke bewegingen.

Een eigenlijke beweging wordt gegeven door de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a_1 \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + a_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Een punt dat samenvalt met zijn beeldpunt, noemen we een *dekpunt*.

Bij een eigenlijke beweging voldoen de coördinaten van een dekpunt aan de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \cos \varphi) x + \sin \varphi \cdot y &= a_1 \\ -\sin \varphi \cdot x + (1 - \cos \varphi) y &= a_2 \end{aligned} \right\}.$$

Nu is:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 1 - \cos \varphi \end{array} \right| = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi.$$

Voor $\varphi = 0$ zijn er dus geen dekpunten. De bewegingsvergelijkingen (1) zijn dan:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a_1 \\ y' &= y + a_2 \end{aligned} \right\}.$$

Deze beweging heet een *translatie*. Elk punt $P(x, y)$ wordt dan verschoven naar het punt $P'(x', y')$ zo, dat $\overline{OP'} = \overline{OP} + \underline{a}$, waarin $\underline{a} = (a_1, a_2)$.

Is $\varphi \neq 0$, dan heeft de eigenlijke beweging één dekpunt. Noemen we de coördinaten van het dekpunt $\bar{O}(b_1, b_2)$, dan is:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_1 \cos \varphi - b_2 \sin \varphi + a_1 \\ b_2 &= b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi + a_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

We verschuiven het coördinatenstelsel zo, dat \bar{O} de nieuwe oorsprong wordt. Voor de overgang van het oorspronkelijke XOY -stelsel naar het nieuwe $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ -stelsel dienen de transformatievergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} + b_1 \\ y &= \bar{y} + b_2 \end{aligned} \right\}.$$

Uit (1) volgt, dat ten opzichte van het $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ -stelsel de bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}' + b_1 &= \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi + b_1 \cos \varphi - b_2 \sin \varphi + a_1 \\ \bar{y}' + b_2 &= \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi + a_2 \end{aligned} \right\},$$

of, in verband met (2):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi \\ \bar{y}' &= \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi \end{aligned} \right\}.$$

Elk lijnstuk $\bar{O}\bar{P}$ wordt dus om \bar{O} over een hoek φ in positieve richting gedraaid. Uit het bovenstaande volgt:

Elke eigenlijke beweging van E_2 in zichzelf is òf een translatie òf een draaiing om een vast punt over een constante hoek.

§ 4. Oneigenlijke bewegingen.

Voor een oneigenlijke beweging zijn de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi + a_1 \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi + a_2 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

We schrijven deze bewegingsvergelijkingen als volgt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Stellen we:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{aligned} x &= x'' \\ y &= -y'' \end{aligned}, \quad (2)$$

dan is:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{aligned} x' &= x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi + a_1 \\ y' &= x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi + a_2 \end{aligned}. \quad (3)$$

Door (2) wordt elke punt $P(x, y)$ in E_2 gespiegeld t.o.v. de x -as, waardoor het punt $P''(x'', y'')$ ontstaat. Daarna ondergaat P'' (zie vorige paragraaf) volgens (3) een eigenlijke beweging, waardoor het beeldpunt van P dat is $P'(x', y')$ ontstaat.

Hieruit volgt:

Elke oneigenlijke beweging van E_2 in zichzelf met vergelijkingen (1) is een spiegeling t.o.v. de x -as gevolgd door òf een translatie òf een draaiing om een vast punt over een constante hoek.

Bij een oneigenlijke beweging voldoen de coördinaten van eventuele dekpunten aan de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \cos \varphi) x - \sin \varphi \cdot y = a_1 \\ - \sin \varphi \cdot x + (1 + \cos \varphi) y = a_2 \end{aligned} \right\} \text{ of } \left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2} \varphi (\sin \frac{1}{2} \varphi \cdot x - \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot y) = a_1 \\ - 2 \cos \frac{1}{2} \varphi (\sin \frac{1}{2} \varphi \cdot x - \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot y) = a_2 \end{aligned} \right\}.$$

Hieruit blijkt, dat er bij een oneigenlijke beweging in het algemeen geen dekpunten zijn. Alleen in het bijzondere geval:

$$\varphi \neq 0, \quad \varphi \neq \pi, \quad a_1 = 2\lambda \sin \frac{1}{2} \varphi \quad \text{en} \quad a_2 = -2\lambda \cos \frac{1}{2} \varphi$$

zijn er oneindig veel dekpunten, die alle liggen op de lijn:

$$\sin \frac{1}{2} \varphi \cdot x - \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot y = \lambda.$$

We kunnen een oneigenlijke beweging met vergelijkingen (1) ook nog op een andere wijze beschouwen. Daartoe schrijven we deze vergelijkingen als volgt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

We kiezen nu een nieuw orthonormaal coördinatenstelsel $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ met \bar{O} (x_0, y_0) als oorsprong en zo, dat de hoek die de as $\bar{O}\bar{X}$ maakt met de x -as, gelijk is aan $\frac{1}{2}\varphi$. Voor de overgang van het XOY -stelsel naar het $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ -stelsel dienen de transformatievergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{met} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \varphi & -\sin \frac{1}{2} \varphi \\ \sin \frac{1}{2} \varphi & \cos \frac{1}{2} \varphi \end{pmatrix}.$$

Door deze coördinatentransformatie gaan de bewegingsvergelijkingen (4) over in:

$$B \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

of:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = B^{-1}AB \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + B^{-1}A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + B^{-1} \begin{pmatrix} a_1 - x_0 \\ a_2 - y_0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Nu is:

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \varphi & \sin \frac{1}{2} \varphi \\ -\sin \frac{1}{2} \varphi & \cos \frac{1}{2} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \varphi & \sin \frac{1}{2} \varphi \\ \sin \frac{1}{2} \varphi & -\cos \frac{1}{2} \varphi \end{pmatrix},$$

dus:

$$B^{-1}A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + B^{-1} \begin{pmatrix} a_1 - x_0 \\ a_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \frac{1}{2} \varphi + a_2 \sin \frac{1}{2} \varphi \\ (2x_0 - a_1) \sin \frac{1}{2} \varphi - (2y_0 - a_2) \cos \frac{1}{2} \varphi \end{pmatrix}.$$

Nu noemen we $a_1 \cos \frac{1}{2} \varphi + a_2 \sin \frac{1}{2} \varphi$ kortweg a en kiezen (x_0, y_0) zo, dat $(2x_0 - a_1) \sin \frac{1}{2} \varphi - (2y_0 - a_2) \cos \frac{1}{2} \varphi = 0$, d.w.z. we kiezen \bar{O} (x_0, y_0) op de lijn l met vergelijking:

$$(2x - a_1) \sin \frac{1}{2} \varphi - (2y - a_2) \cos \frac{1}{2} \varphi = 0.$$

Deze lijn loopt evenwijdig met de nieuwe as $\bar{O}\bar{X}$.

Daar

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\varphi & \sin \frac{1}{2}\varphi \\ \sin \frac{1}{2}\varphi & -\cos \frac{1}{2}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\varphi & -\sin \frac{1}{2}\varphi \\ \sin \frac{1}{2}\varphi & \cos \frac{1}{2}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

gaat de bewegingsvergelijking (5) t.o.v. het $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ -stelsel tenslotte over in:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{matrix} \bar{x}' = \bar{x} + a \\ \bar{y}' = -\bar{y} \end{matrix}.$$

Hieruit volgt:

Elke oneigenlijke beweging van E_2 in zichzelf is een translatie over een vaste afstand en evenwijdig aan een vaste lijn, gevolgd door een spiegeling ten opzichte van die lijn.

§ 5. Opgaven.

In deze opgaven wordt aangenomen, dat in elke euclidische ruimte E_2 een orthonormaal coördinatenstelsel is gekozen.

1. In een affiene ruimte R_2 is van een afbeelding gegeven:

Voor elk viertal punten P, Q, R en S en hun beeldpunten resp. P', Q', R' en S'

geldt, dat met $\overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ tevens $\overrightarrow{R'S'} = \lambda \overrightarrow{P'Q'}$ voor elke $\lambda \neq 0$.

Toon aan, dat de afbeelding een affiene transformatie is.

2. Toon aan:

1°. Bij een eigenlijke beweging van de euclidische ruimte E_2 in zichzelf worden de isotrope punten in E_2 op zichzelf afgebeeld.

2°. Bij een oneigenlijke beweging van E_2 in zichzelf worden de isotrope punten in E_2 op elkaar afgebeeld.

3. Toon aan dat, als bij een affiene transformatie met transformatiedeterminant gelijk aan ± 1 van E_2 in zichzelf de isotrope punten in E_2 op deze punten worden afgebeeld, deze transformatie een beweging is.

4. Toon aan dat, als bij een affiene transformatie met transformatie determinant gelijk aan ± 1 van E_2 in zichzelf elke cirkel op een cirkel wordt afgebeeld, deze transformatie een beweging is.

5. In de euclidische ruimte E_2 is een affiene transformatie gegeven door:

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{a},$$

$$\text{met } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het beeld van het punt $P(1, 1)$.

b. Toon aan, dat het punt $(1, 0)$ een dekpunt is.

c. Toon aan, dat elke rechte l door het punt $(1, 0)$ wordt afgebeeld op een rechte l' door $(1, 0)$ en dat de hoek tussen l en l' constant is.

d. Toon aan, dat deze affine transformatie ook verkregen wordt door een lineaire transformatie t.o.v. een geschikt gekozen nieuw orthonormaal coördinatenstelsel.

6. In de euclidische ruimte E_2 is een beweging gegeven door:

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{a},$$

$$\text{met } A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ en } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a. Toon aan, dat alle dekpunten op een rechte l liggen.

b. Als m' het beeld is van de rechte m , toon dan aan dat l , m en m' door één punt gaan en dat l de bissectrice is van een hoek tussen m en m' .

7. In de euclidische ruimte E_2 is van een affine transformatie gegeven, dat de beeldpunten van de punten $A(1,0)$, $B(7,0)$ en $C(4,4)$ respectievelijk $A'(4,3)$, $B'(4,9)$ en

Toon aan, dat de afbeelding een eigenlijke beweging is.

8. In de euclidische ruimte E_2 stelt A de draaiing voor om het punt $(0,0)$ over een hoek van 60° , terwijl B de draaiing voorstelt om het punt $(2,0)$ over een hoek van 90° ; beide draaiingen in positieve richting.

a. Toon aan, dat AB en BA twee eigenlijke bewegingen zijn.

b. Bepaal van AB en van BA het dekpunt en tevens de hoek van draaiing om het dekpunt.

Antw.: $(3 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$, 150° ; $(3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$, 150° .

12 11
 13 12
 14 13
 15 14

16 15
 17 16
 18 17
 19 18
 20 19
 21 20
 22 21
 23 22
 24 23
 25 24
 26 25
 27 26
 28 27
 29 28
 30 29
 31 30
 32 31
 33 32
 34 33
 35 34
 36 35
 37 36
 38 37
 39 38
 40 39
 41 40
 42 41
 43 42
 44 43
 45 44
 46 45
 47 46
 48 47
 49 48
 50 49
 51 50
 52 51
 53 52
 54 53
 55 54
 56 55
 57 56
 58 57
 59 58
 60 59
 61 60
 62 61
 63 62
 64 63
 65 64
 66 65
 67 66
 68 67
 69 68
 70 69
 71 70
 72 71
 73 72
 74 73
 75 74
 76 75
 77 76
 78 77
 79 78
 80 79
 81 80
 82 81
 83 82
 84 83
 85 84
 86 85
 87 86
 88 87
 89 88
 90 89
 91 90
 92 91
 93 92
 94 93
 95 94
 96 95
 97 96
 98 97
 99 98
 100 99

REGISTER

101 100
 102 101
 103 102
 104 103
 105 104
 106 105
 107 106
 108 107
 109 108
 110 109
 111 110
 112 111
 113 112
 114 113
 115 114
 116 115
 117 116
 118 117
 119 118
 120 119
 121 120
 122 121
 123 122
 124 123
 125 124
 126 125
 127 126
 128 127
 129 128
 130 129
 131 130
 132 131
 133 132
 134 133
 135 134
 136 135
 137 136
 138 137
 139 138
 140 139
 141 140
 142 141
 143 142
 144 143
 145 144
 146 145
 147 146
 148 147
 149 148
 150 149
 151 150
 152 151
 153 152
 154 153
 155 154
 156 155
 157 156
 158 157
 159 158
 160 159
 161 160
 162 161
 163 162
 164 163
 165 164
 166 165
 167 166
 168 167
 169 168
 170 169
 171 170
 172 171
 173 172
 174 173
 175 174
 176 175
 177 176
 178 177
 179 178
 180 179
 181 180
 182 181
 183 182
 184 183
 185 184
 186 185
 187 186
 188 187
 189 188
 190 189
 191 190
 192 191
 193 192
 194 193
 195 194
 196 195
 197 196
 198 197
 199 198
 200 199

REGISTER

afbeelding	65	eenheidstransformatie	80
affiene ruimte	70	eenheidsvectoren	10
affiene transformatie	130	eigenlijke beweging	134
associatieve eigenschap	9	eigenruimte	102
basis, lineair-afhankelijke	13	eigenschap, associatieve	9
—, lineair-onafhankelijke	13	—, commutatieve	9
basistransformatie	88	—, distributieve	10
beeldpunt	71	eigenvector	101
beeldruimte	65, 69	eigenwaarde	101
beeldvector	65	equivalente matrices	90
beweging	133	euclidische ruimte	70
—, eigenlijke	134	euclidische vectorruimte	22
—, oneigenlijke	135	gelijkwaardige matrices	90
Cramer	57	gespiegeld orthogonaal	93
commutatieve eigenschap	9	getransponeerde matrix	82
deelruimte, lineaire	12, 17	Grassmann-Steinitz	14
deelruimten, orthogonaal-com- plementaire	28	homogene lineaire vergelijking	42
defecte matrix	106	hoofddiagonaal	79
dekpunt	134	inverse matrix	84
determinant	50	inverse transformatie	83
determinanten, produkt van twee	59	inwendig produkt	22
diagonaalmatrix	104	karakteristiek polynoom	102
dimensie	16	karakteristieke vergelijking	101
direct orthogonaal	93	kentallen	9
distributieve eigenschap	10	kern	69
doorsnede van twee lineaire deelruimten	18	kolomvector	32, 50
driehoeksongelijkheid	23	lineaire afhankelijkheid	10
eenheidsmatrix	80	— onafhankelijkheid	10
		lineair-afhankelijk stelsel	11
		linear-onafhankelijk stelsel	11

lineaire deelruimte	12, 17	orthonormale basis	24
lineaire vectorruimte	12	orthonormale basistransforma- tie	95
lineaire vectortransformatie	66	orthonormaal stelsel vectoren	24
lineaire vergelijkingen	31		
matrix	31	particuliere oplossing	47
—, aangevulde	34	produkt-transformatie	77
—, diagonaal-	104	produkt van een matrix en een kolomvector	68
—, rang van een	34	produkt van twee determinan- ten	59
—, defecte	106	produkt van twee matrices	77
—, eenheids-	80	punttransformatie	71
—, getransponeerde	82		
—, inverse	84	rang van een matrix	34
—, nul-	82	rang van een produktmatrix	86
—, orthogonale	91	regel van Cramer	57
—, rang van een	34	relatie, equivalente	90
—, reguliere	83	—, reflexieve	90
—, singuliere	83	—, symmetrische	90
—, symmetrische	82	—, transitieve	90
—, transformatie-	68	rij-kolom-produkt	27
matrices, optelling van	76	rijvector	32, 50
—, vermenigvuldiging van	77		
minor	50	Schwarz	22
		som-transformatie	77
nevendiagonaal	79	som van twee matrices	77
normeren	25	spiegeling	133
nulmatrix	82	spoor	102
nuloplossing	42	Steinitz	14
nulruimte	13	symmetrische matrix	82
onderdeterminant	50	transformatie, affiene	130
oneigenlijke beweging	135	—, basis-	88
ongelijkheid van Schwarz	22	transformatie, eenheids-	80
oplossingsruimte	43	—, inverse	83
oplossingsvector	31	—, orthogonale	90
orthogonaal complement	28	—, produkt-	77
orthogonaal-complementaire deelruimten	28	—, punt-	71
orthogonale matrix	91	—, som-	77
orthogonaal stelsel vectoren	24	—, vector-	65
orthogonale transformatie	90	transformatiedeterminant	79
orthogonaliseren	26		

transformatiematrix	68	vectoren, verschil van	9
vector	9	vectorruimte, lineaire	12
vector, kentallen van een	9	vectortransformatie	65
—, beeld-	65	vectorvergelijking	32
—, lengte van een	22	verbinding van twee lineaire deelruimten	19
vectoren, optelling van	9		

HANDLEIDINGEN BIJ HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE
HOGESCHOOL TE DELFT — ONDER REDACTIE VAN
DE VERENIGING VOOR STUDIE- EN STUDENTENBELANGEN
TE DELFT

Theoretische Mechanica

a-10 Kinematica van het platte vlak door H. J. C. A. Nunnink	<i>f</i> 10.—*	<i>f</i> 17.50
72 Repetitiedictaat Theoretische Mechanica, door Ir W. J. Vollewens en Dr Ir Joh. H. M. Manders, 3e druk, 274 pag., 120 fig.	<i>f</i> 5.—*	<i>f</i> 10.—
81 Vraagstukken Theoretische Mechanica, I: Beweging van het stoffelijk punt, door Prof. Dr F. Schuh en Ir W. J. Vollewens, 140 pag., 3 fig.	<i>f</i> 4.10*	<i>f</i> 5.20
82 Vraagstukken Theoretische Mechanica, II: Beweging van vaste lichamen, door Prof. Dr F. Schuh en Ir W. J. Vollewens, 212 pag., 5 fig.	<i>f</i> 4.95*	<i>f</i> 6.20
a-5 Vraagstukken Theoretische Mechanica door Dr W. J. Claas en Dr P. A. I. Scheelbeek	<i>f</i> 5.—*	<i>f</i> 10.—

Analytische Meetkunde.

a-4 Vraagstukken over Analytische Meetkunde en Lineaire Algebra, door B. W. Steggerda e. a. 6e druk. Alle studierichtingen.	<i>f</i> 5.—*	<i>f</i> 10.—
a-8 Collegedictaat Analytische Meetkunde I, door Dr J. Bijl en W. J. H. Salet, 5e druk, 208 pag., 88 fig.	<i>f</i> 7.—*	<i>f</i> 13.—
a-11 Collegedictaat Analytische Meetkunde II door Dr J. Bijl en W. J. H. Salet 2e druk	<i>f</i> 6.—*	<i>f</i> 12.—
a-12 Vectoranalyse door Prof. Dr R. Timman 2e druk	<i>f</i> 6.75*	<i>f</i> 13.50

Analyse.

a-7 Repetitiedictaat Analyse I, door Ir W. J. Vollewens, 10e herz. druk,	<i>f</i> 9.—*	<i>f</i> 15.—
a-3 Repetitiedictaat Analyse II, 6e herziene druk	<i>f</i> 9.—*	<i>f</i> 15.—
70 Repetitiedictaat Differentiaal-vergelijkingen, door Ir W. J. Vollewens, 6e druk, 132 pag., met 330 vraagstukken en antwoorden.	<i>f</i> 5.—*	<i>f</i> 9.—
a-6 Wiskundige Vraagstukken. ontleend aan de propaedeutische examens van de Technische Hogeschool, verzameld en van antwoorden voorzien door Prof. Dr O. Bottema, herzien door Dr J. H. J. Almering, 2e druk, 304 pag., 1 fig.	<i>f</i> 5.—*	<i>f</i> 14.—
a-9 Vraagstukken bij Vector Analyse en differentiaal meetkunde door Dr. G. W. M. Kallenberg en Dr R. J. Wille 2e druk	<i>f</i> 3.75*	<i>f</i> 7.50

Statistiek

a-13 Toegepaste Statistiek A door Prof ir. J. W. Sieben	<i>f</i> 7.50*	<i>f</i> 15.—
---	----------------	---------------

Experimenteel Spanningsonderzoek.

b-2 De Methode-Cross, door Ir F. A. Marinkelle 2e druk.	<i>f</i> 7.—*	<i>f</i> 12.—
---	---------------	---------------

Natuurkunde.

C-p Practicum-instructies Natuurkunde, samengesteld door de Sub-afdeling enz. Natuurkunde		
---	--	--

Voor N1	<i>f</i> 8.75;	Voor N2	<i>f</i> 11.25	Voor C2	<i>f</i> 6.75;
Voor T1 Y1	<i>f</i> 9.75;	Voor T2 Y2	<i>f</i> 8.75;	Voor WVS2	<i>f</i> 5.50;
Voor E1	<i>f</i> 6.—;			Voor M2	<i>f</i> 6.25;
Voor M1	<i>f</i> 8.50			Voor G1	<i>f</i> 4.25

c-1	Inleiding in de Mechanica door Drs A. N. Borghouts	f 12.50*	f 20.—
c-2	Prof. ir C. W. Kosten, electriciteit	f 3.75*	f 7.50
c-4	Warmteleer en Kinetische Gastheorie door Drs A. N. Borghouts	f 12.50*	f 20.—
c-5	Elementaire deeltjes, Atomen en Moleculen, door Prof. Dr H. B. Dorgelo, 8e druk.	f 9.—*	f 15.—
c-6	Natuurkundige Vraagstukken, samengesteld door de afdeling voor Technische Natuurkunde aan de T.H., 6e druk, herzien door Drs A. N. Borghouts en Dr H. Swiers.	f 6.25*	f 12.50
c-7	Bouwfysica door Prof. Dr. ir. C. W. Kosten	f 7.—*	f 14.—

Werktuigkunde.

x-4	Leergang Technologie en constructie van Kernreactoren 1956. dl I en II.	f 16.—*	f 25.—*
i-7	Tandwielen door Ir. A. J. Donkersloot	f 19.—*	f 32.50*

Scheikunde.

d-1	Fysische Transportverschijnselen, door prof. Ir. H. Kramers	f 4.—*	f 8.—
d-3	Verzameling van vraagstukken over Analytische Scheikunde, bijeengebracht door E. H. P. Cordfunke 3e druk.	f 4.75*	f 9/50
d-4	Technisch-Physische Scheidingsmethoden, door Ir J. Nijman, naar het college van Prof. Dr Ir P. M. Heertjes 3e druk.	f 12.50*	f 20.—
d-5	Anorganische Analyse door Ir. K. J. Metman en Drs H. F. W. Kleyn	f 14.50*	f 25.—
d-6	Ir K. J. Metman, kwalitatieve anorg. analyse	f 6.—*	f 12.—
d-7	Theoretische organische chemie door Ir. A. P. M. Eker	f 8.75*	f 15.—

Mechanische Technologie.

m-1	Kennis der Metalen I, door Prof. Dr Ir P. Jongenburger 7e druk	f 4.—*	f 8.—
m-2	Kennis der Metalen II, door Prof. Dr Ir P. Jongenburger 3e druk	f 5.50*	f 11.—

Staats-, Administratief- en Handelsrecht.

64	Schema college Arbeidsrecht, door Prof. Dr J. A. Veraart, 44 pag., doorschoten, 3e druk.	f 2.—*	f 4.—
65	Schema college Staatsrecht, door Prof. Mr A. C. Josephus Jitta, 75 pag., wit doorschoten, 3e druk.	f 3.—*	f 6.—



