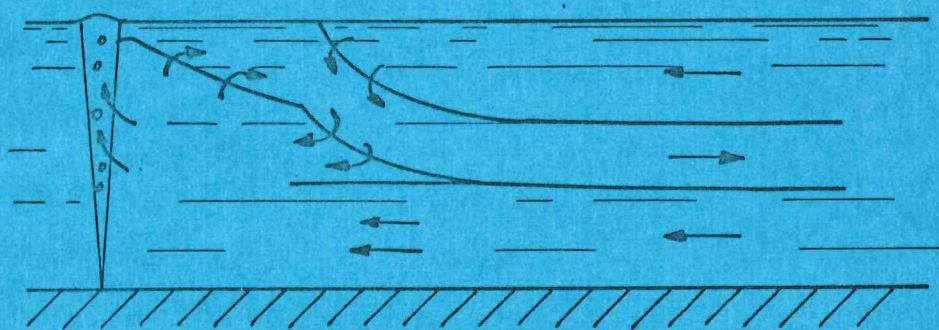
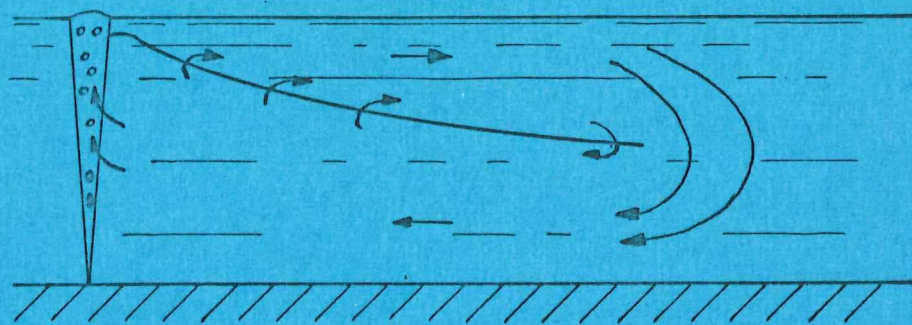


## TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

AFSTROMENDE LAAG VAN EEN BELLENZUIL ONDER  
ISOTHERME EN GESTRATIFICEERDE OMSTANDIGHEDEN

Afstudeerverslag:

J.A. v. Pagee.

Hoogleraar:

Prof. J.M. Smith M.Sc.

Goossens.

januari 1977.

Laboratorium voor Fysische-Technologie.

Prins Bernhardlaan 6.

Delft.

Technische Hogeschool Delft

Laboratorium voor Fysische Technologie

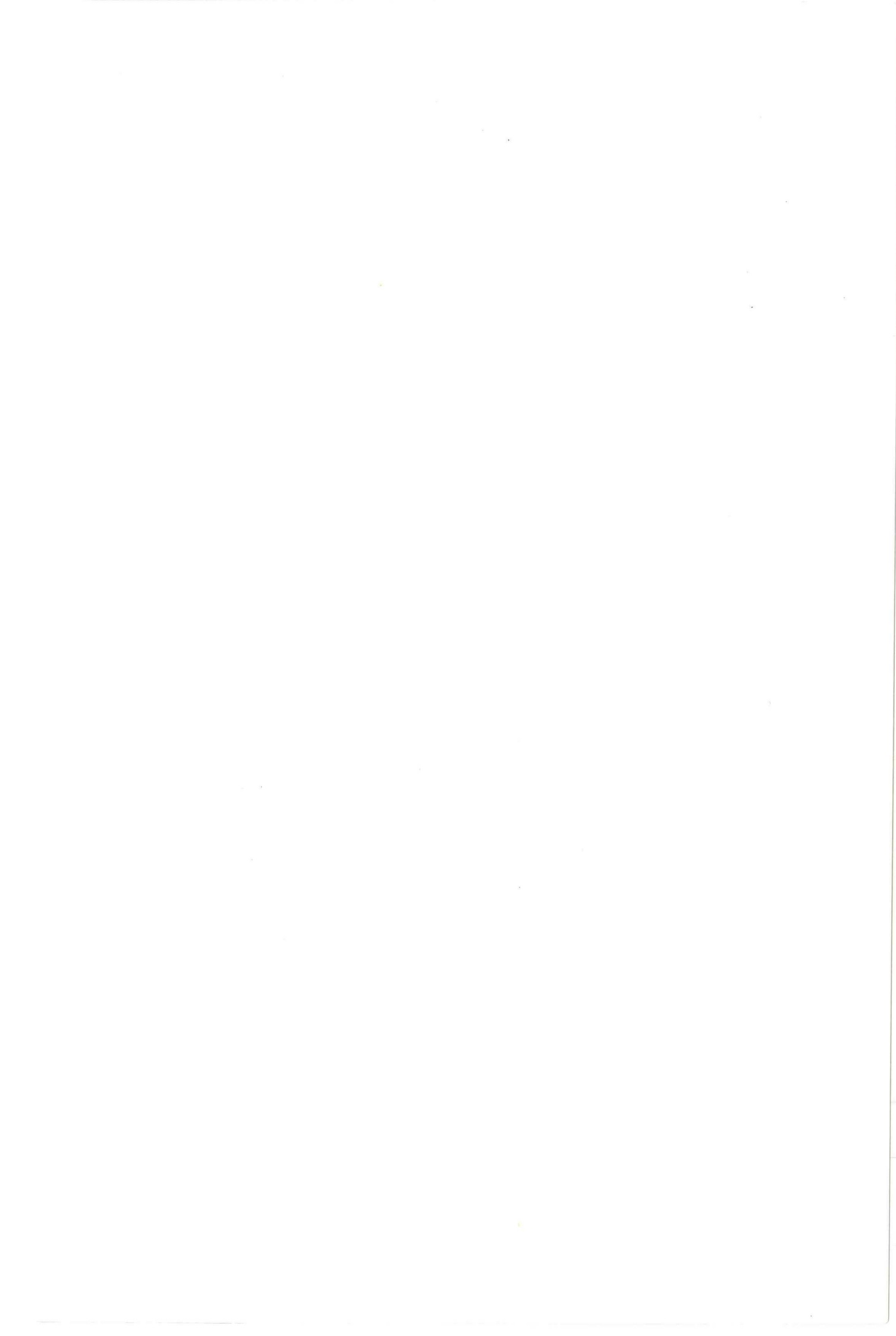
A F S T R O M E N D E   L A A G   V A N   E E N   B E L L E N Z U I L  
O N D E R   I S O T H E R M E   E N   G E S T R A T I F I C E E R D E  
O M S T A N D I G H E D E N

Afstudeerverslag van

Januari 1977

J.A. van Pagee





## Samenvatting.

Bellenzuilen zijn een middel om op kunstmatige wijze thermische stratifikatie in een waterbekken op te heffen.

In dit onderzoek is getracht de grootte van deze menging te berekenen.

Hiertoe is vooral de wijze van afstroming beschouwd, omdat deze bepalend is voor de werking van de bellenzuil onder verschillende omstandigheden.

Aan de hand van een afgeleide theorie voor een radiale jet is een theoretisch model opgesteld voor de afstroming van een bellenzuil onder isotherme omstandigheden. Dit model vertoont een vrij redelijke overeenkomst met de huidige experimentele gegevens.

Tevens vormt dit model de basis voor een mathematisch model voor de werking van de bellenzuil onder gestratificeerde omstandigheden. Aan dit model zijn met behulp van de computer enkele berekeningen gedaan, waarvan de eerste resultaten tendensen aangeven die fysisch interpreteerbaar zijn.

Een verdere verbetering van dit model kan mogelijk leiden tot het kwantificeren van de menging die de werking van de bellenzuil direkt veroorzaakt.





Voorwoord.

Dit verslag betreffende een onderzoek aan de afstromende laag van een bel-  
lenzuil is eigenlijk een deelonderzoek van een projekt dat als doel heeft  
de grootte van menging in drinkwaterbekkens te bepalen en de grootte van de  
eventueel benodigde kunstmatige menging te kwantificeren.

Dit onderzoek is dan ook tot stand gekomen in nauwe relatie met andere deel-  
onderzoeken. Voor adviezen en suggesties is derhalve veel dank verschuldigd  
aan de leden van de subgroep 'menging' van de LWBB, het laboratorium voor  
Vloeistofmechanica, alsmede het N.V. Waterwinningbedrijf 'Brabantse Bies-  
bosch' voor de geboden mogelijkheden om metingen te verrichten in de spaar-  
bekkens.

Tevens is veel dank verschuldigd aan mijn mede-student Nijs Nederveen, waar-  
mee een gedeelte van het onderzoek nauw is samengewerkt.

Naast de tekenkamer, voor de snelle verzorging van het tekenwerk voor dit  
verslag, de mechanische werkplaats en de elektronische werkplaats, voor het  
bouwen van opstellingen e.d., wil ik dankzeggen aan alle medewerkers en  
studenten van het laboratorium voor Fysische Technologie, die hebben bijge-  
dragen in de tot standkoming van dit onderzoek.

Prof. Smith zeg ik dank voor alle adviezen en suggesties.

Tot slot spreek ik mijn waardering uit voor de vruchtbare samenwerking met  
mijn mentor Louis Goossens, en de prettige wijze waarop hij zowel mijn kan-  
didataats als afstudeeronderzoek heeft begeleid, bedankt Louis.

14 januari 1977.

Hans 





Inhoudsopgave

blz.

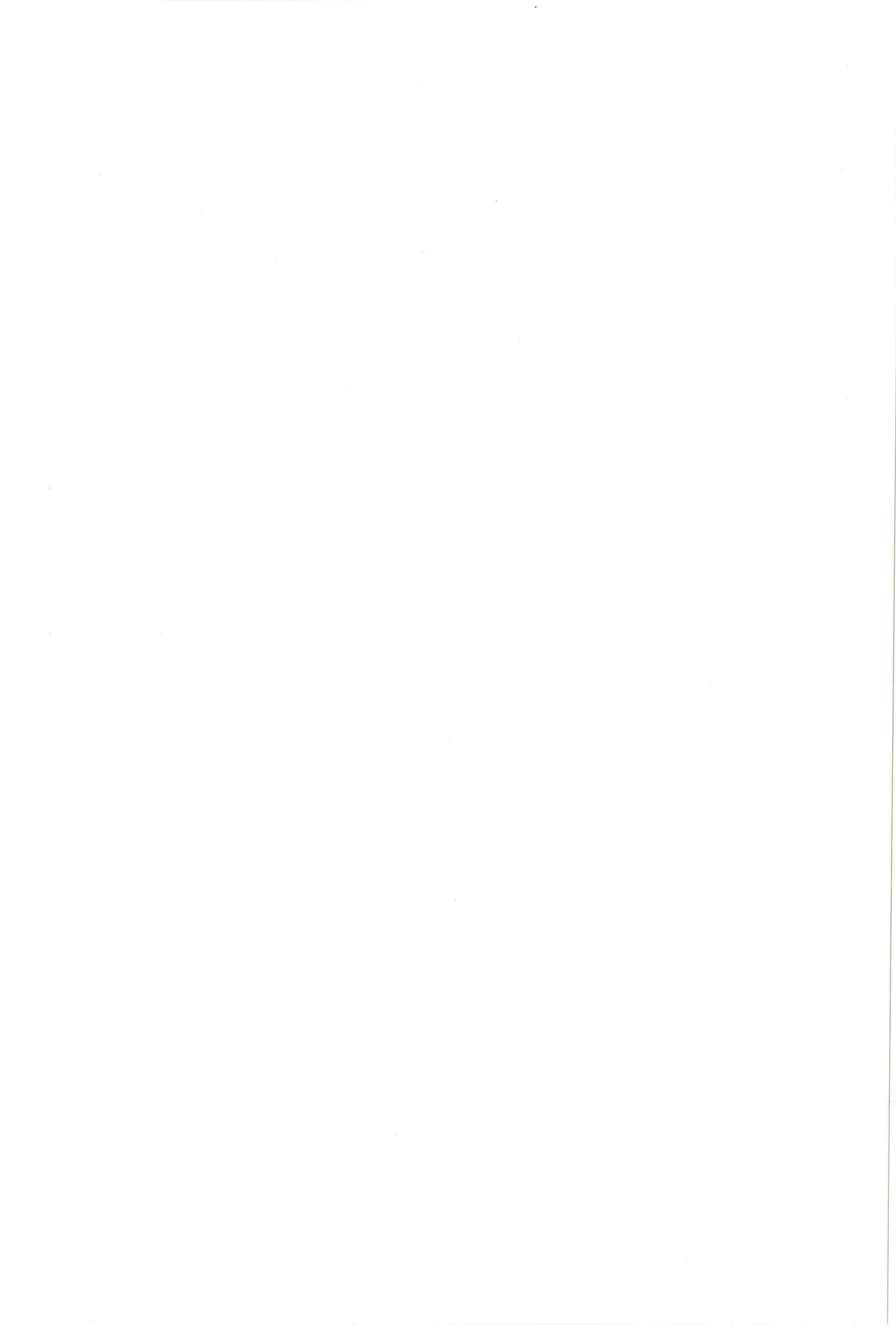
Samenvatting	
Inhoudsopgave	1
Symbolenlijst	3
1. INLEIDING	6
1.1. samenhang van dit onderzoek t.o.v. andere deelonderzoeken	7
1.2. doel van het onderzoek	10
2. THEORIE VOOR EEN RADIALE JET IN EEN ONEINDIG MEDIUM	11
2.1. vereenvoudiging van de vergelijkingen	11
2.2. het oplossen van de vergelijkingen	15
a. afleiding gelijkvormigheidscondities	15
b. invoering gelijkvormigheid	17
2.3. beschouwingen t.a.v. het resultaat	20
a. vergelijk met de 2-dimensionale jet	20
b. vergelijk met andere snelheidsprofielen	23
3. THEORETISCH MODEL VOOR DE AFSTROMENDE LAAG VAN EEN BELLENZUIL	24
3.1. aanpassing van de theorie voor de radiale jet aan de situatie voor de afstroming van de bellenzuil	24
3.2. koppeling van de afstroomtheorie aan de opstroming in de bellenzuil	30
3.3. beschouwingen t.a.v. de geldigheid van de theorie	34
a. behoud van impuls en het voldoen aan de bewegingsvergelijking	34
b. invloed van de aannamen	37
c. bepaling van de reikwijdte	39
4. MODEL VOOR DE WERKING VAN DE BELLENZUIL ONDER GESTRATIFICEERDE OMSTANDIGHEDEN	42
4.1. kwalitatief model	42
4.2. mathematisch model voor het nearfield	45
4.3. principe van het reken-model	52





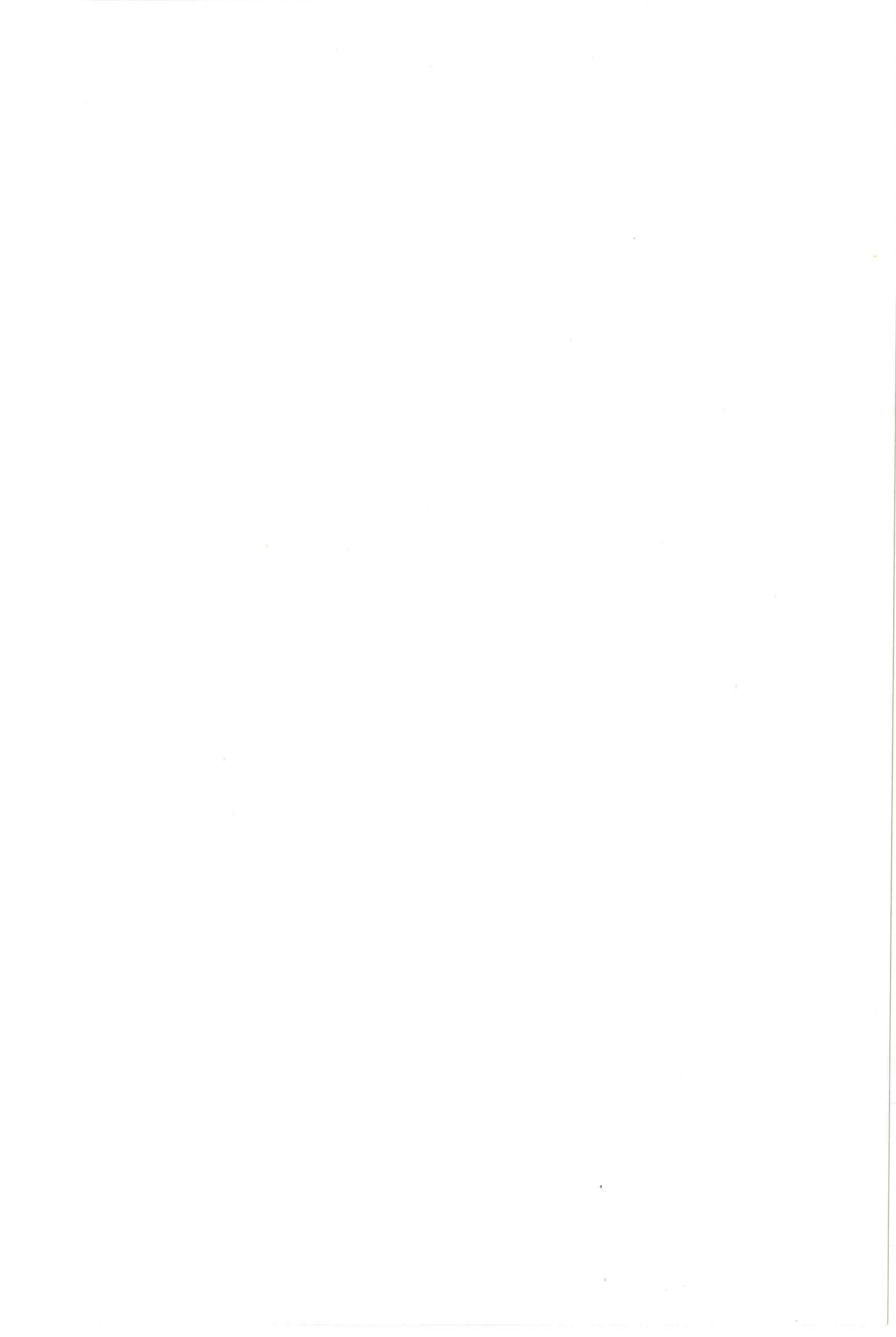
<u>Inhoudsopgave (vervolg)</u>	blz.
5. TOETSING VAN HET ISOTHERME MODEL AAN EXPERIMENTEN	53
5.1. toetsing aan reeds gedane laboratoriummetingen	53
5.2. toetsing aan metingen in het prototype (Petrusplaat)	55
5.3. toekomstige experimenten	56
6. RESULTATEN VAN BEREKENINGEN MET HET COMPUTERMODEL	57
6.1. gevoeligheids-analyse en tendensen	58
a. toetsing onbekende parameters	58
b. toetsing van enkele variabelen	59
6.2. berekeningen m.b.t. destratificatie-proeven van 1975 en 1976	62
6.3. enkele kanttekeningen	65
7. KONKLUSIES EN AANBEVELINGEN	67
7.1. konklusies t.a.v. het isotherme model	67
7.2. konklusies t.a.v. het gestratificeerde model	67
7.3. aanbevelingen	68
Literatuurlijst	69
Bijlage I (Navier-Stokes vgl. en orde afschatting)	71
Bijlage II (afleiding gelijkvormigheids-condities)	73
Bijlage III (metingen aan de afstromende laag van een bellenzuil in de Petrusplaat onder isotherme omstandigheden )	76
Bijlage IV (computermodel in CPS)	





Symbolenlijst:

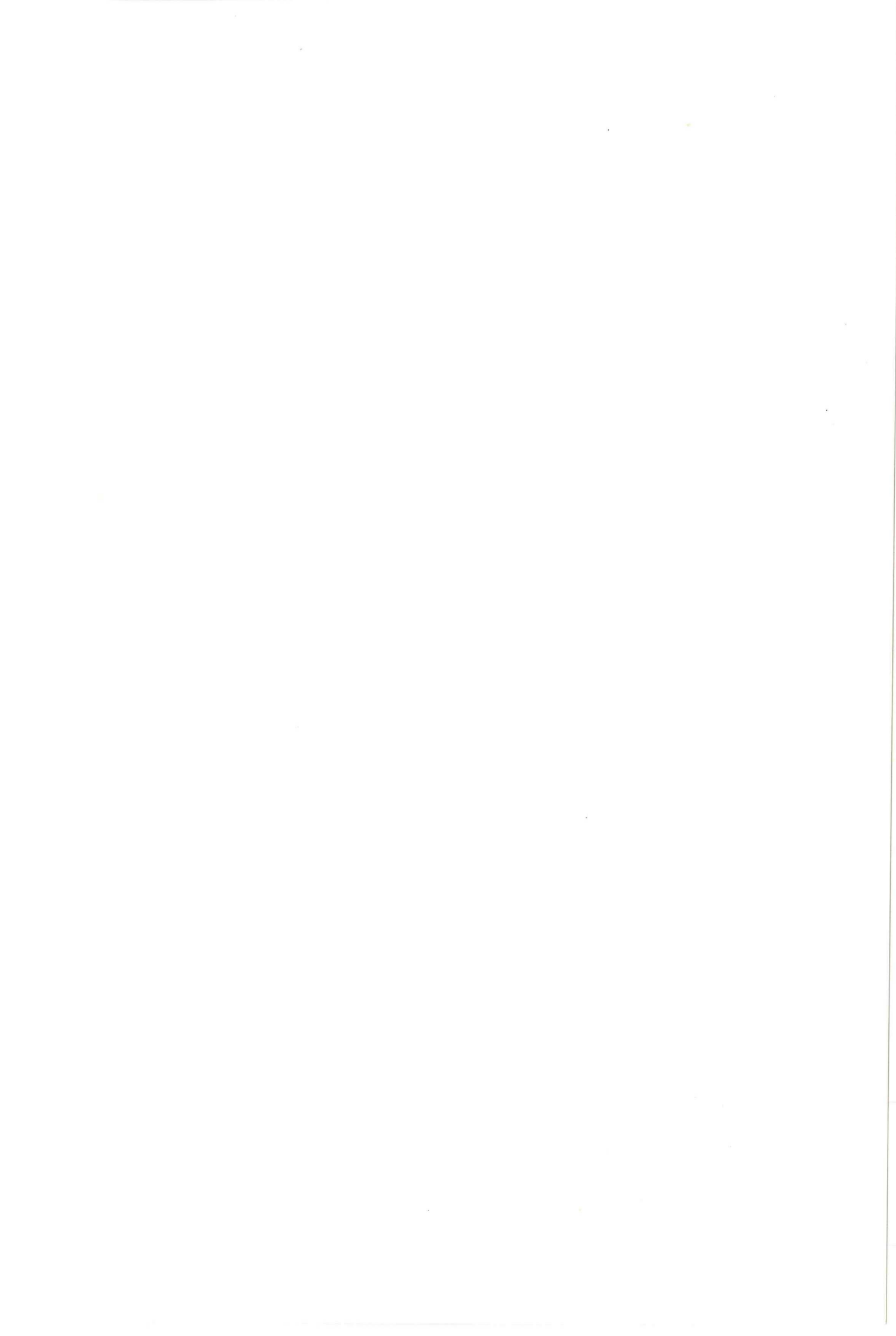
		eenh.
a	constante	-
b	constante	--
$b_{0,1,2}$	karakteristieke breedtemaat	m
C	integratie constante	$N/m^2$
$C_1$	constante	-
c	constante	-
d	constante	-
e	turbulente kinetische energie per massa-eenheid	$m^2/s^2$
$F_e$	kental van Froude voor het epilimnion $(\frac{V_e^2}{gH_e})$	-
$F_m$	kental van Froude voor de menglaag $(\frac{V_m^2}{gH_m})$	-
$F_h$	kental van Froude voor het hypolimnion $(\frac{V_h^2}{gH_h})$	-
f()	functie	
$f_o$	coriolisparameter	$s^{-1}$
g	zwaartekrachtversnelling	$m/s^2$
g()	functie	
H	diepte van het bekken	m
$H_{ep}$	dikte van het epilimnion (2-lagensysteem)	m
$H_e$	dikte van het epilimnion	m
$H_{hy}$	dikte van het hypolimnion (2-lagensysteem)	m
$H_h$	dikte van het hypolimnion	m
$H_m$	dikte van de menglaag	m
h	hoogte boven het uitstroompunt	m
h()	functie	
k	uitbreidingsconstante $(l = k \cdot r)$	-
L	karakteristieke lengteschaal in de r-ri.	m
$L_c$	constante	m
$\mathcal{L}$	karakteristieke lengteschaal in de z-ri.	m
$\mathcal{L}_{2c}$	karakteristieke lengteschaal in de z-ri. (2-dim.jet)	m
m	constante $(U_R = \frac{M}{\mathcal{L}})$	$m^2/s$
p	druk	$N/m^2$
$p_o$	statische druk	$N/m^2$
$\Delta p$	drukverhoging	$N/m^2$
$Q_{af}$	afstromende debiet	$m^3/s$
$Q'_{af}$	afstromende debiet zonder terugstroming	$m^3/s$
$Q_{af}(\max)$	maximaal afstromende debiet	$m^3/s$
$Q_{op}$	opstromende debiet	$m^3/s$



Symbolenlijst (vervolg)

		eenh.
$Q_{\text{lucht}}$	luchtdebiet	$\text{m}^3/\text{s}$
$Q_{\text{terug}}$	terugstromende debiet	$\text{m}^3/\text{s}$
$R$	reikwijdte	m
$Re_l$	gemodificeerd kental van Reynolds $(= \frac{u_t \ell}{\nu})$	-
$Re_t$	turbulent kental van Reynolds $(= \frac{u_t \ell}{\nu})$	-
$r$	radiale richting, tevens afstand tot de zuil	m
$r_e$	afstand van de begrenzing van het epilimnion tot de zuil	m
$r_o$	begrenzing van de bufferzône	m
$T$	dikte van de afstromende laag bij lineair snelheidsverdeling	m
$T'$	temperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$U_{\oplus}$	constante	m/s
$U_o$	oppervlakte snelheid	m/s
$U_R$	karateristieke snelheidsschaal voor de r-richting	m/s
$U_{\phi}$	karateristieke snelheidsschaal voor de $\phi$ -richting	m/s
$U_t$	karakterisatieke turbulentie snelheid	m/s
$U_s$	oppervlakte snelheid (2-dim.jet)	m/s
$u_{r,\phi,z}$	snelheid in de r, $\phi$ , z -richting (tijdgemiddeld)	m/s
$u'_{r,\phi,z}$	afwijking van de mentane snelheid t.o.v. de tijdgemiddelde snelheid	m/s
$u_{rt}$	terugstroom-snelheid	m/s
$u_x$	snelheid in de horizontale x-richting (2-dim.)	m/s
$V_e$	radiale snelheid in epilimnion (neg. r-ri.)	m/s
$V_m$	radiale snelheid in de menglaag	m/s
$V_h$	radiale snelheid in het hypolimnion (neg. r-ri.)	m/s
$w$	opstroom snelheid in de bellenzuil	m/s
$w_m$	opstroomsnelheid in het midden van de bellenzuil ( $r=0$ )	m/s
$Z_o$	dikte van de afstromende laag	m
$z$	vertikale richting, tevens afstand onder het wateroppervlak	m
$z_{0,42}$	karakteristieke waarde voor z op het snelheidsprofiel waarvoor geldt dat de snelheid $\text{sech}^2(1) \cdot (\text{max.snelh})$ is	m
$\alpha$	entrainmentcoëfficiënt	-
$\alpha_1$	'overall' entrainmentcoëfficiënt (=1)	-
$\alpha_o$	'overall' entrainmentcoëfficiënt voor de afstromende laag	-





Symbolenlijst (vervolg)

eenh.

$\alpha_e$	'overall' entrainmentcoëfficiënt epilimnion-water	-
$\alpha_h$	'overall' entrainmentcoëfficiënt hypolimnion-water	-
$\varphi$	tangentiële-richting	
$\underline{E}^{(af)}$	afstromende impulsstroom	N
$\underline{E}^{(op)}$	opstromende impulsstroom	N
$\nu$	moleculaire viscositeit van water ( $=10^{-6}$ )	$m^2/s$
$\nu_t$	turbulente viscositeit	$m^2/s$
$\theta$	dimensiloze variabele (vgl. 2.11d)	-
$\xi$	dimensieloze variabele $\xi = \frac{z}{l}$	-
$\lambda$	lengteschaal van turbulentie $\nu_t = \lambda \sqrt{e}$	m
$\rho$	dichtheid van water ( $=10^3$ )	$kg/m^3$
$\bar{\rho}$	gemiddelde dichtheid van het water in 'menggebied 1'	$kg/m^3$
$\rho_e$	dichtheid van het epilimnion-water	$kg/m^3$
$\rho_h$	dichtheid van het hypolimnion-water	$kg/m^3$
$\rho_m$	dichtheid van het water in de menglaag	$kg/m^3$
$\rho_o$	dichtheid van het water in de afstromende laag	$kg/m^3$
$O(\cdot)$	orde symbool van Landau	

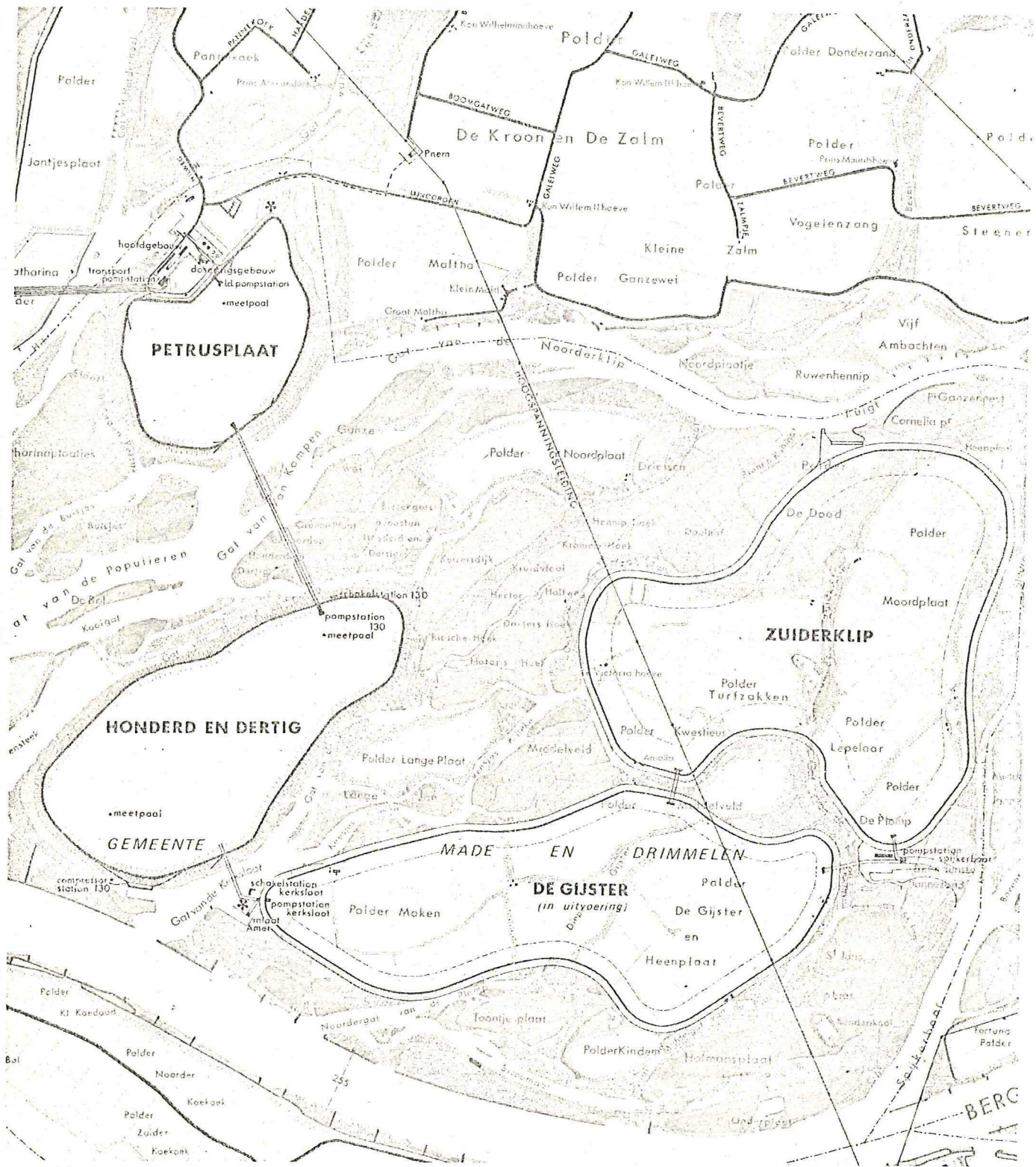


fig. 1 Drinkwaterbekkens in de Brabantse Biesbosch.



## 1. INLEIDING

Luchtinjectie in meren of bekkens is één van de methoden om op kunstmatige wijze de menging in een dergelijk waterreservoir te verbeteren. Vooral in meren met diepten groter dan ca. 10 meter is de menging tengevolge van wind veelal onvoldoende om het gehele bekken of meer door te mengen. Als gevolg hiervan kan vooral in een zomerperiode een stabiele gelaagdheid ontstaan, waarbij zich een lichtere warme bovenlaag bevindt op een koude onderlaag. Een dergelijke gelaagdheid wordt veelal stratifikatie genoemd.

Aangezien de menging tussen onder- en bovenlaag erg gering is, kan dit in bepaalde situaties leiden tot een verslechtering van de waterkwaliteit. Zo zal in de lichtrijke warme bovenlaag (epilimnion) veelal een sterke algengroei op kummen treden, terwijl de mogelijkheid bestaat dat in de onderlaag (hypolimnion) te weinig zuurstof doordringt, zodat daar mogelijk anaërobe processen kummen plaatsvinden.

Het behoeft geen betoog dat juist de kwaliteit van het water de basis is voor een evenwichtig watermilieu (geen massale vissterfte e.d.), zodat methoden, die kunnen leiden tot een verbetering van de waterkwaliteit steeds meer aandacht krijgen van die instanties, die zich inzetten voor een gezond milieu.

Dit geldt zeer zeker voor het Waterwinningsbedrijf 'Brabantse Biesbosch', dat oppervlakte-water inwint en opslaat als grondstof voor drinkwater.

Enkele jaren geleden zijn in de Brabantse Biesbosch namelijk twee grote drinkwaterreservoirs aangelegd ten behoeve van de drinkwatervoorziening van o.a. de stad Rotterdam (zie figuur 1). Sinds die tijd gebruikt Rotterdam in plaats van het sterk vervuilde Rijnwater, het kwalitatief betere Maaswater voor de bereiding van drinkwater.

Benevens de functie als voorraadbekkens voor tijden waarin de kwaliteit danwel kwantiteit van het aangevoerde rivierwater onvoldoende is, hebben de bekkens een gunstige invloed op de kwaliteit van het water vanwege hun biologische zelfreiniging.

Teneinde stratifikatie te voorkomen zijn in het bekken 'Petrusplaat' (diepte ca. 15 m) drie bellenzuilen geïnstalleerd met een luchtdebiet van





ca.  $5 \text{ m}^3/\text{min.}$ , terwijl in het bekken '130' (diepte 15-30 m) drie bellenzuilen zijn geplaatst waarvan het luchtdebiet varieert van 6 tot  $12 \text{ m}^3/\text{min.}$  Om tot een goede bedrijfsvoering te kunnen komen en in verband met het ontwerpen van nieuwe drinkwaterbekkens ('Gijster', 1980), wordt in het kader van de Limnologische Werkgroep Brabantse Biesboschbekkens (LWBB) onderzoek gedaan aan de algengroei en menging in bekkens.

Het is dan ook in dit kader, dat dit onderzoek aan de afstroming van bellenzuilen is verricht.

Het onderzoek is derhalve te beschouwen als een deelonderzoek voor wat betreft de werking van bellenzuilen, hetgeen naast onderzoeken als windinvloed en in- en uitlaatstroming deel uitmaakt van het onderzoekprogramma van de subgroep 'menging' van de LWBB.

Ten aanzien van het begrip stratifikatie dienen we eigenlijk onderscheid te maken tussen zgn. thermische en chemische stratifikatie.

In het eerste geval wordt het dichtheidsverschil tussen onder- en boven laag nl. veroorzaakt door een temperatuurverschil, terwijl in het tweede geval verschillen in concentraties van opgeloste stoffen de oorzaak zijn van een verschil in dichtheid (bijv. zoet-zout).

In dit onderzoek zal met stratifikatie over het algemeen thermische stratifikatie worden bedoeld, hetgeen echter niet betekent dat één en ander niet op chemische stratifikatie van toepassing zou zijn.

#### 1.1. Samenhang van dit onderzoek t.o.v. andere deelonderzoeken.

De werking van bellenzuilen berust op het principe dat luchtbellens in water bij het opstijgen water meesleuren. Een dergelijk meesleuringsverschijnsel wordt veelal aangeduid met de engelse term entrainment.

Het inpompen van lucht nabij de bodem van het bekken heeft derhalve tot gevolg dat water van onderuit het bekken omhoog wordt gebracht. Dit water stroomt aan het oppervlak af en zal zich vermengen met het water in de bovenlaag. Op deze wijze is het dus mogelijk een geforceerde menging tot stand te brengen tussen onder- en bovenlaag.

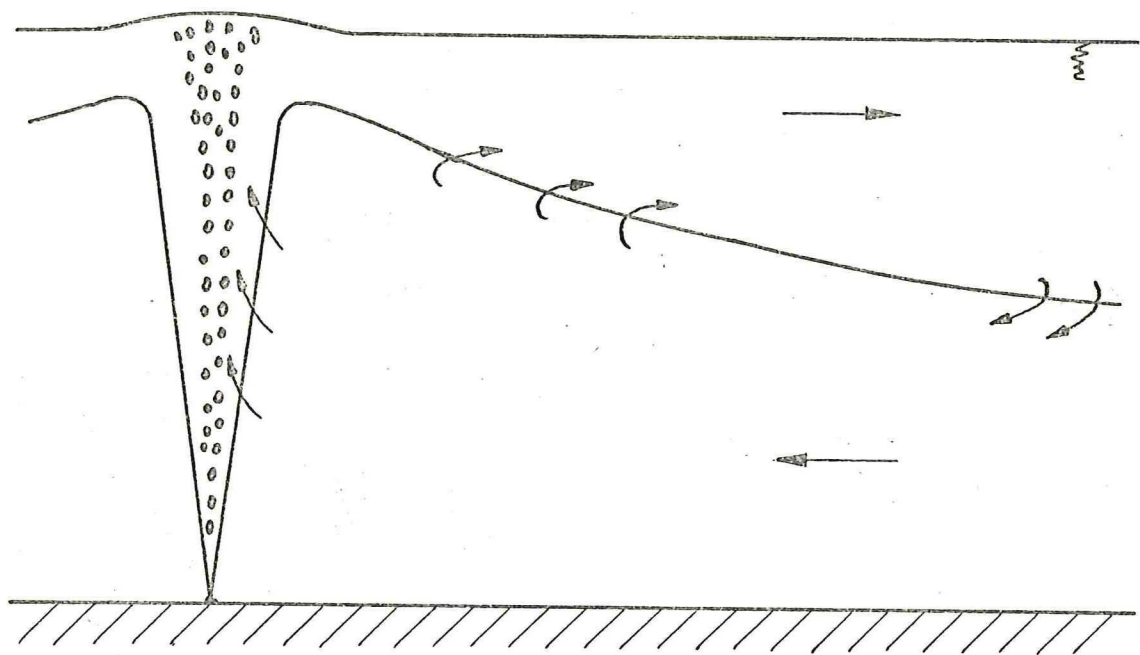


fig. 2 Eenvoudig stromingsbeeld van een bellenzuil.

In figuur 2 is globaal het stromingspatroon van een bellenzuil getekend, waarbij duidelijk onderscheid kan worden gemaakt tussen een opstromingsgebied en een gebied van afstroming en opmenging.

Op het gebied van bellenzuilen zijn sinds de oprichting van de subgroep 'menging' van de LWBB diverse onderzoeken gedaan.

Zo hebben Gonneke Bakker (1) en Arie Bembaron (2) onderzoek gedaan aan de opstroming van de bellenzuil. De belangrijkste resultaten van deze onderzoeken zijn dat het snelheidsprofiel van de opstroming vrij goed te beschrijven is met een zgn. Gauss-functie. De midden-snelheid is daarbij evenredig met het lucht-debiet ( $Q_{\text{lucht}}$ ) en de hoogte (h) boven het uitstroompunt, terwijl de breedte van de Gauss-verdeling alleen van de afstand h blijkt af te hangen.

Bij deze onderzoeken dient te worden opgemerkt dat deze betrokken zijn op metingen in een waterbassin van 1 - 2 meter diepte, zodat bij het toepassen van deze resultaten voor grotere diepten dit met de nodige voorzichtigheid dient te geschieden.

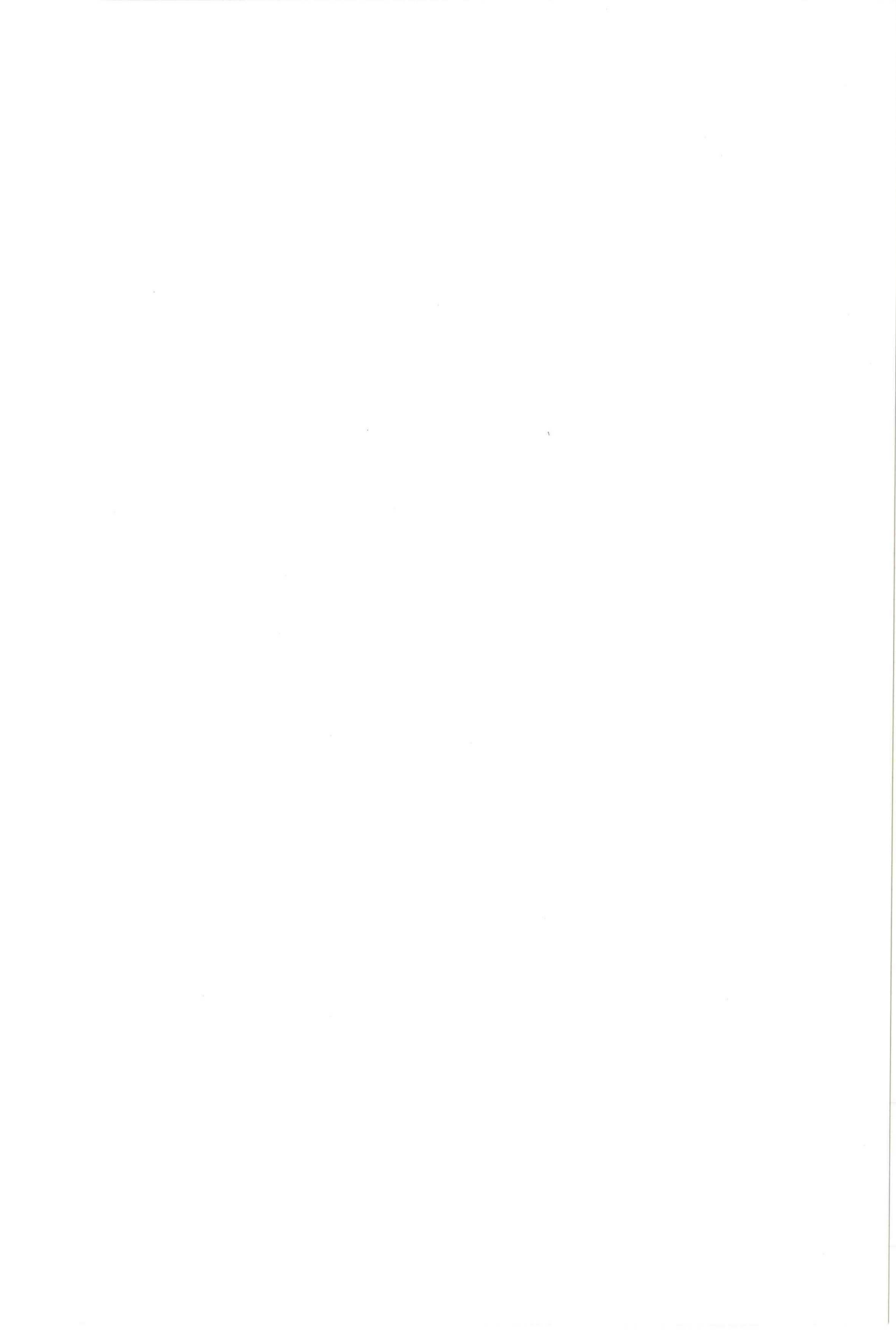
Simon Groot (3) heeft in dezelfde opstelling gemeten aan de afstromende laag van een bellenzuil. Hij kwam daarbij tot de konklusie dat de snelheidsverdeling in de afstromende laag vrij goed te beschrijven is met een lineair profiel. De sterkte van de stroming is daarbij een functie van de opstromende impuls.

Willem van de Bos (4) heeft in een soortgelijke opstelling (diepte 1-4 meter) eveneens metingen gedaan aan de afstromende laag. Bij zijn metingen bleek het snelheidsprofiel minder lineair te zijn als bij de metingen van Groot, terwijl het afstromend debiet bij grotere diepten minder was dan op grond van de resultaten van Bakker en Groot was voorspeld. Arie Bembaron heeft in een later stadium een verklaring voor dit verschil gegeven met behulp van een verbeterde opstroom-theorie.

Hans van der Straaten (5) heeft in een ondiepe bak (0,10-0,30 m) de afstromende laag onderzocht, waarbij hij konkludeerde dat de reikwijdte van de bellenzuil zich beperkt tot ca. 5 à 7 maal de waterdiepte.

Alle hierbovenvermelde onderzoeken beperken zich tot de situatie zonder gelaagdheid. Een eerste beschouwing over de werking van de bellenzuil in een gestratificeerde omgeving is gegeven door Simon Groot en Hubert





van de Heijden (6), die middels een onderzoek aan een bellenscherm konkludeerden dat de afstromende laag zich dringt tussen de boven- en onderlaag, waardoor de reikwijdte aanzienlijk wordt vergroot.

Verder bleek dat het snelheidsprofiel van de afstroming, in analogie met een 2-dimensionale jet (=vrije straal), goed te beschrijven is met een  $\text{sech}^2$ -functie.

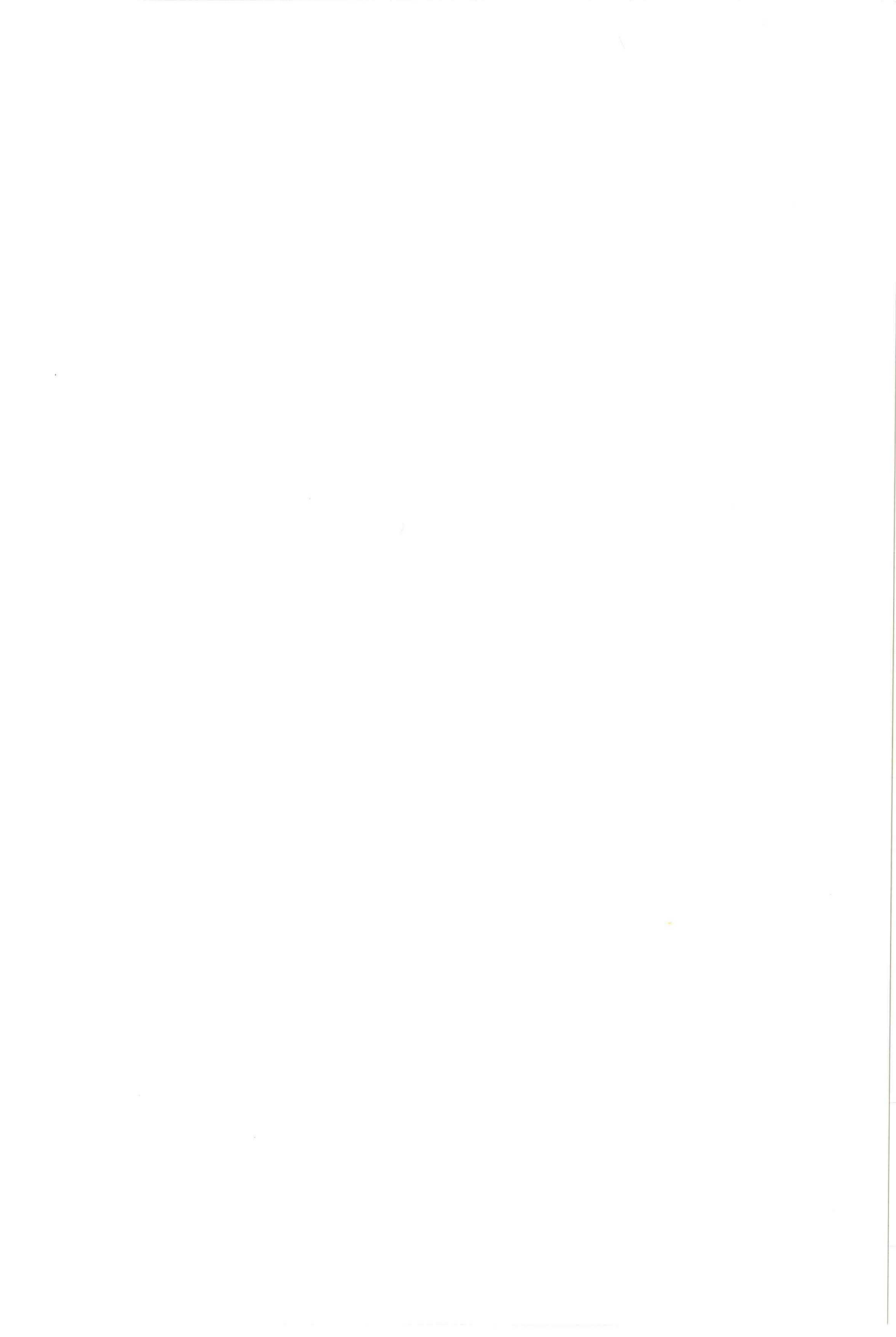
Uit een totaal beschouwing van deze onderzoeken m.b.t. de werking van bellenzuilen, blijkt dat vooral vraagtekens kunnen worden geplaatst t.a.v. het snelheidsprofiel in de afstromende laag (lineair,  $\text{sech}^2$  o.i.d. ?) en hoe deze laag zich ontwikkelt. Ook is onduidelijk waardoor de reikwijdte wordt bepaald en hoe de bellenzuil werkt onder gestratificeerde omstandigheden.

Naast het onderzoek aan bellenzuilen is er tevens een onderzoek gedaan naar het ontstaan van stratifikatie onder bepaalde weersomstandigheden. De resultaten van dit onderzoek zijn terug te vinden in de vorm van een 1-dimensionaal computermodel, zoals dat door Willem van de Bos (7) is opgesteld. Met dit model is het verloop van de temperatuur over de diepte te berekenen bij bepaalde weerssituaties.

In aansluiting op dit onderzoek, zou een onderzoek naar de invloed van een bellenzuil op het temperatuurverloop een beschouwing kunnen geven over de wijze waarop bellenzuilen stratifikatie kunnen opheffen, danwel het ontstaan daarvan kunnen voorkomen.

Teneinde aansluitingsmogelijkheden met voornoemd computermodel te kunnen verkrijgen is het noodzakelijk om te bestuderen of het mogelijk is een model voor de werking van de bellenzuil op te stellen, zodanig dat de resultaten hiervan kunnen worden ingevoerd in een computermodel.

Naar aanleiding van een totaal beschouwing van het voorgaand onderzoek, is het doel van dit onderzoek als volgt geformuleerd.



1.2. Doel van het onderzoek.

Getracht zal worden een mathematisch model voor de bellenzuil op te stellen, zodanig dat de mate van menging, die direkt door de werking van de bellenzuil wordt veroorzaakt, hiermee is te kwantificeren.

Vanzelfsprekend is het opstellen van een dergelijk model alleen zinvol cq. mogelijk, indien de werking van de bellenzuil onder verschillende omstandigheden bekend is, zodat eerst de nog onbekende mechanismen dienen te worden onderzocht, die bepalend zijn voor de werking van de zuil. Aangezien in de afstromende laag de menging van onder en bovenlaag plaatsvindt, staat deze in dit onderzoek centraal. Verder wordt over het algemeen verondersteld dat de opstrooming vrijwel niet wordt beïnvloed door al dan niet gestratificeerde omstandigheden, zodat vnl. de wijze van afstroming bepalend is voor de werking van de zuil onder verschillende omstandigheden.

Vanwege de in de vorige paragraaf opgesomde onduidelijkheden betreffende voorgaande onderzoeken, is het eerst noodzakelijk een beschrijving te vinden voor de volgende mechanismen of verschijnselen,

voor de isotherme situatie:

- beschrijving van het snelheidsprofiel in de afstromende laag.
- hoe ontwikkelt zich de afstromende laag met toenemende afstand ?
- waardoor wordt de reikwijdte bepaald ?
- hoeveel water wordt door de bellenzuil verpompt cq. vermengd ?

voor de gestratificeerde situatie:

- welke mechanismen zijn van belang ?
- hoeveel water wordt vermengd ?

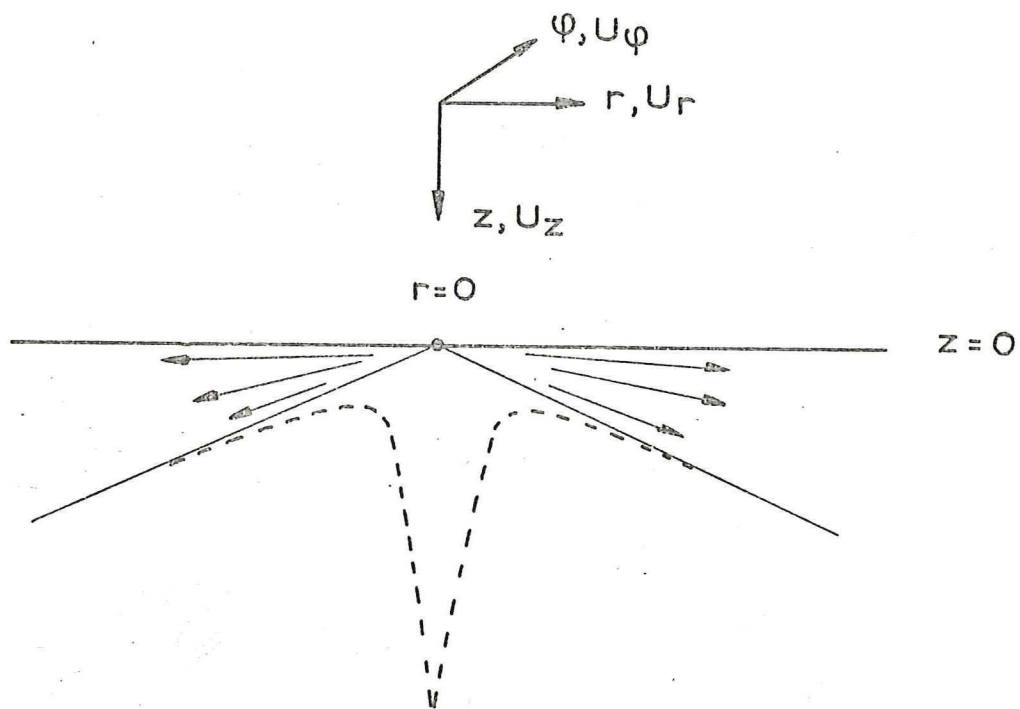


fig. 3 Overeenkomst van een radiale jet in een half-oneindig medium en de afstroming van een bellenzuil.



## 2. THEORIE VOOR EEN RADIALE JET IN EEN ONEINDIG MEDIUM

Bij het overzicht van het voorgaand onderzoek is reeds vermeld dat de door Groot en v.d. Heijden (6) gemeten snelheidsprofielen van de afstromende laag van een bellenscherm vrij goed te beschrijven zijn met een theoretisch profiel, zoals dat door Tennekes en Lumley (8) is afgeleid voor een 2-dimensionale jet. Te verwachten is dat voor de radiaal afstromende laag van een bellenzuil, eveneens een dergelijk theoretisch profiel is af te leiden.

Teneinde een analytische aanpak mogelijk te maken, is het noodzakelijk om eerst een zo eenvoudig mogelijke radiale afstroming te veronderstellen. We beperken ons daarom in deze paragraaf tot een radiaal uitstromende jet in een oneindig medium.

Figuur 3 illustreert de overeenkomst van de radiale jet en de afstroming van de bellenzuil.

opmerking:

In verband met de overzichtelijkheid van de afleiding zal worden volstaan met het vermelden van de belangrijkste stappen. Speciale aandacht is besteed aan de voor de afleiding noodzakelijke aannamen, opdat in een later stadium de geldigheid van de theorie kan worden getoetst.

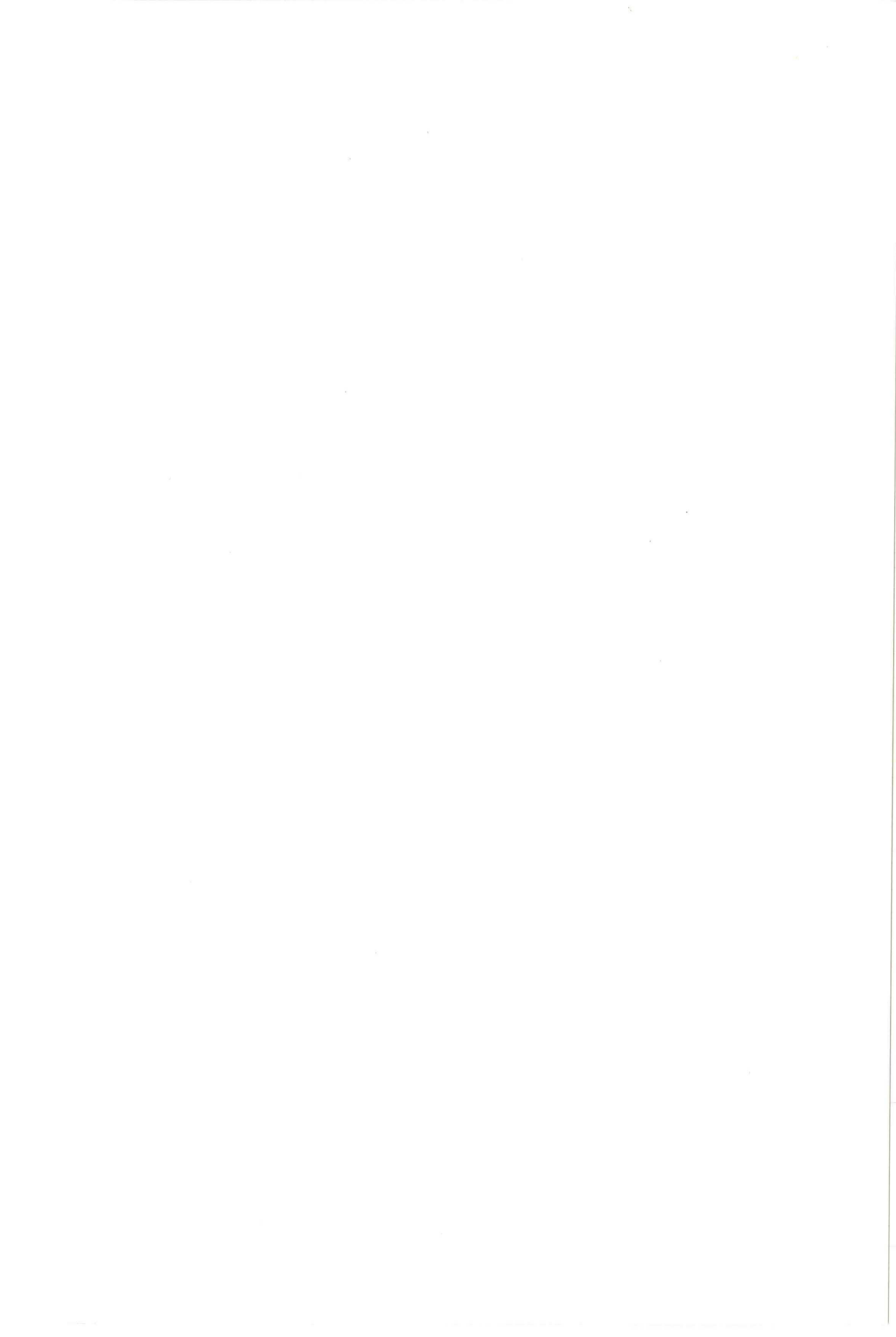
Om te voorkomen dat bepaalde stappen mogelijk onduidelijk worden, zijn enkele specifieke afleidingen opgenomen in de bijlagen I en II.

### 2.1. Vereenvoudiging van de vergelijkingen.

Bij de afleiding is uitgegaan van de volledige bewegingsvergelijking (Navier-Stokes) voor turbulente stroming, alsmede de continuïteitsvergelijking, beide in poolcoördinaten.

( zie voor een definitie van het coördinatenstelsel figuur 3 )

In bijlage I zijn deze vergelijkingen opgenomen nadat is verondersteld dat de stroming stationair is, terwijl ook dichtheidsvariaties buiten beschouwing worden gelaten (isothermie).



Gezien de omvang van de vergelijkingen zijn we genoodzaakt deze met behulp van een aantal aannamen sterk te vereenvoudigen, alvorens een analytische oplossing mogelijk is.

We veronderstellen hiertoe allereerst radiaalsymmetrie, waardoor alle termen met een afgeleide naar de  $\varphi$ -richting wegvallen.

Verdere vereenvoudigingen zijn mogelijk met behulp van orde afschattingen.

We stellen hiertoe:

- L is een karakteristieke lengteschaal voor de r-richting
- $\ell$  is een karakteristieke lengteschaal voor de z-richting
- $U_R$  is een karakteristieke snelheid voor de r-richting
- $U_\phi$  is een karakteristieke snelheid voor de  $\varphi$ -richting

Met behulp van de continuïteitsvergelijking vinden we dat de karakteristieke snelheid voor de z-richting van de orde  $\frac{\ell}{L} U_R$  moet zijn.

Verder stellen we:

- $U_t$  is een karakteristieke turbulentiesnelheid

Als we aannemen dat de afstromende laag zich vrij geleidelijk uitbreidt, (d.w.z.  $\ell \ll L$ ), dan kunnen we middels orde afschatting diverse termen uit de Navier-Stokes vgl. verwaarlozen (zie Bijlage I).

Nemen we verder aan dat de stroming voldoende turbulent is,

(d.w.z.  $\frac{1}{Re_\ell} \frac{U_R}{U_t} \ll O(1)$ ,  $Re_\ell = \frac{U_t \ell}{\nu}$ ), dan zijn tevens de visceuze termen te verwaarlozen.

(In verband met de verwaarlozing van de visceuze termen in de vergelijking voor de  $\varphi$ -richting, is het tevens noodzakelijk te veronderstellen dat  $U_\phi$  maximaal van de zelfde orde van grootte is als  $U_R$ )

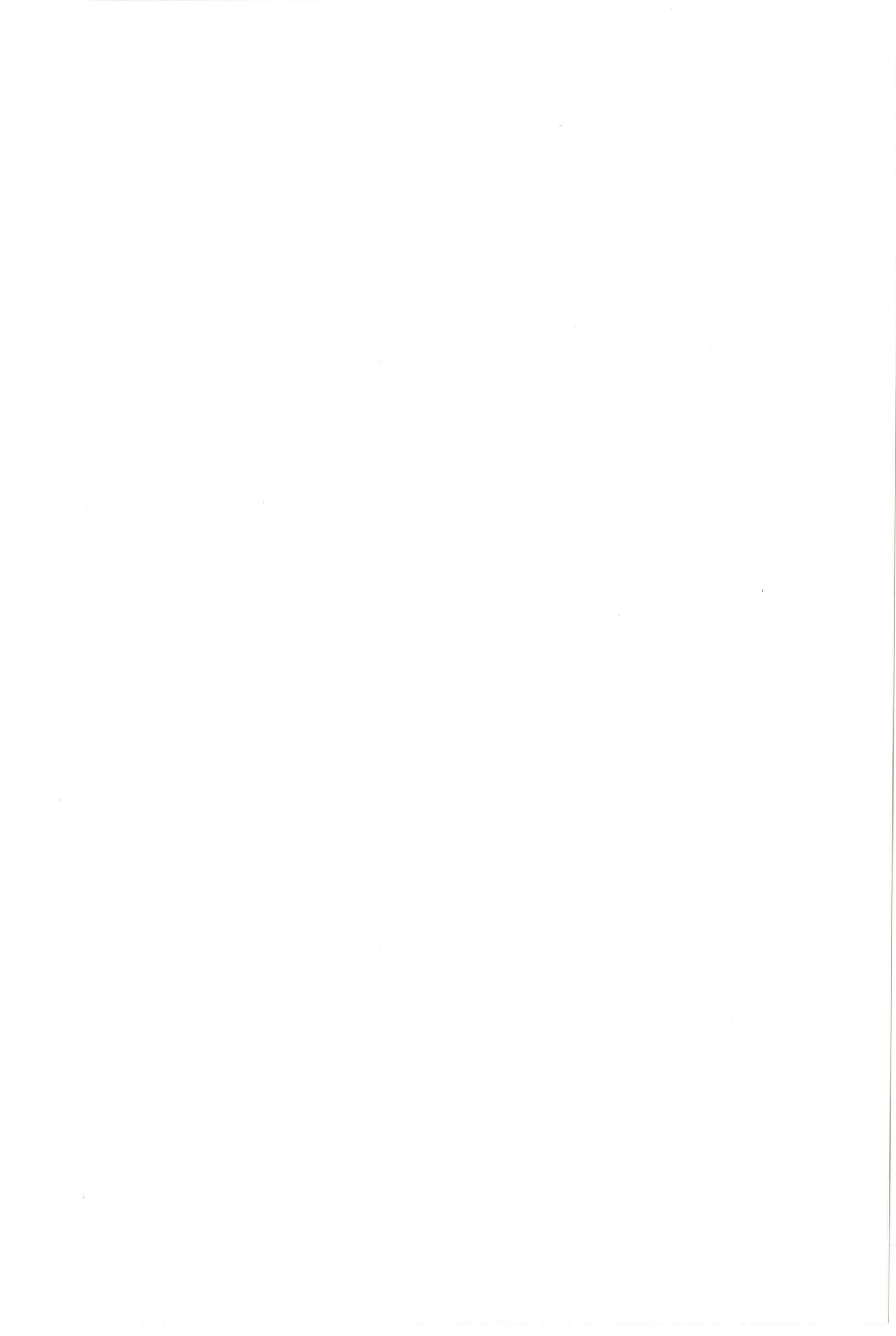
Na de gedane aannamen te weten,

1. radiaalsymmetrie
2. geleidelijke uitbreiding  $(\ell \ll L)$
3. verwaarlozing visceuze termen  $(\frac{1}{Re_\ell} \frac{U_R}{U_t} \ll O(1) \text{ en } \frac{U_\phi}{U_R} \leq O(1))$

houden we de volgende vergelijkingen over:

continuïteitsvergelijking,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r u_r + \frac{du_z}{dz} = 0 \quad (2.1)$$



bewegingsvergelijkingen (Navier-Stokes),

$$\text{r-ri.} \quad u_r \frac{du_r}{dr} + u_z \frac{du_z}{dz} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{d}{dz} \overline{u'_r u'_z} + f_0 u_\varphi \quad (2.2)$$

$$\varphi\text{-ri.} \quad u_r \frac{du_\varphi}{dr} + u_z \frac{du_\varphi}{dz} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = -\frac{d}{dz} \overline{u'_\varphi u'_z} - f_0 u_r \quad (2.3)$$

$$\text{z-ri.} \quad u_r \frac{du_z}{dr} + u_z \frac{du_z}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - \frac{d}{dz} \overline{u_z'^2} + g \quad (2.4)$$

$p$  is hierbij een drukterm,  $\rho$  is de dichtheid,  $g$  de zwaartekrachtversnelling en  $f_0$  is de coriolisparameter (op deze breedtegraad geldt,  $f_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ )

De vergelijking voor de z-richting is nog verder te vereenvoudigen als de convectie termen worden verwaarloosd, d.w.z.

aanname 4.  $\frac{L^2 u_r^2}{L^2 u_z^2} \ll O(1)$

De vergelijking (2.4) gaat daarmee over in,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - \frac{d}{dz} \overline{u_z'^2} + g \quad (2.5)$$

Tennekes en Lumley (8) gebruiken deze vergelijking om hiermee de horizontale drukgradiënt in de vergelijking voor de r-richting te kunnen berekenen. Deze bewerking gaat als volgt;

Integratie naar z van de vgl. (2.5) geeft,

$$\frac{p}{\rho} + \overline{u_z'^2} = gz + \frac{p_0}{\rho} \quad (2.6)$$

$p_0$  is een integratie konstante

Differentiatie naar r levert,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \overline{u_z'^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dr} \quad (2.7)$$

Tennekes en Lumley beweren dat de integratie konstante  $p_0$  niets anders is dan de hydrostatische druk, zodat bij differentiatie van de vgl. (2.6) naar r het rechterlid gelijk nul wordt.





Naar mijn mening kan echter niet zonder meer worden aangetoond dat  $p_0$  geen functie van  $r$  kan zijn, zodat een dergelijke stap formeel impliceert dat er geen horizontale drukgradiënt wordt verondersteld, hetgeen in een oneindig medium gerechtvaardigd lijkt.

Bepalen we met behulp van de vgl. (2.7) de term  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ , dan blijkt na substitutie in de vgl. (2.2) uit de aanname 2, dat deze term verwaarloosbaar is als  $p_0$  geen functie van  $r$  wordt verondersteld.

Met de aanname 5. geen horizontale drukgradiënt ( $\frac{dp_0}{dr} = 0$ ) gaat de vgl. (2.2) dus over in,

$$u_r \frac{du_r}{dr} + u_z \frac{du_z}{dz} + \frac{d}{dz} \overline{u_r' u_z'} = \frac{u_\varphi^2}{r} + \int_0 u_\varphi \quad (2.8)$$

Deze vergelijking komt nauw overeen met de bewegingsvgl. die Tennekes en Lumley gebruiken voor de afleiding voor een 2-dimensionale jet. Het rechterlid is bij hen echter gelijk nul.

Om tot een analytische oplossing te kunnen komen is in eerste instantie het rechterlid verwaarloosd, hetgeen neerkomt op de aanname

$$6. \quad \frac{u_\varphi^2}{r} + \int_0 u_\varphi \ll \mathcal{O}\left(\frac{u_R^2}{L}\right)$$

Met behulp van de vgl. (2.3) kunnen we <sup>de</sup> maximale waarde vinden voor de tangentiële snelheid  $u_\varphi$ . Stellen we namelijk dat de wrijving kan worden verwaarloosd, dan is ook  $\frac{du_\varphi}{dz}$  gelijk nul, zodat de vgl. over gaat in,

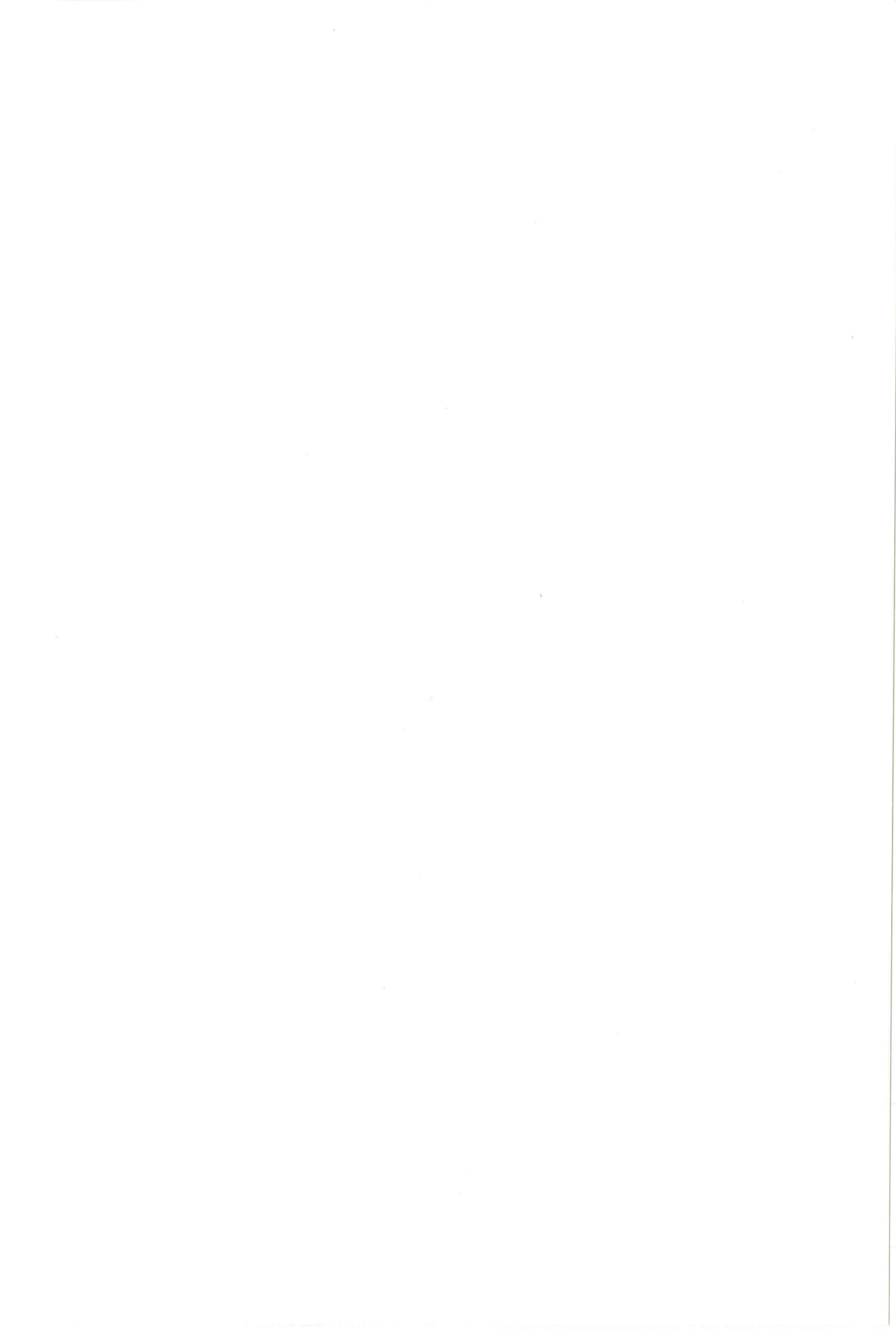
$$\frac{du_\varphi}{dr} + \frac{u_\varphi}{r} = -f_0$$

Met de randvoorwaarde  $u_\varphi = 0$  voor  $r=0$  vinden we als oplossing,

$$u_\varphi = -\frac{1}{2} f_0 r^2 \quad (2.9)$$

De eigenlijke aanname voor het verwaarlozen van het rechterlid van de vgl. (2.8) is dus,

$$6'. \quad \frac{u_R^2}{L^2} \gg \mathcal{O}\left(\frac{1}{4} f_0^2\right) \quad (f_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1})$$



Overgebleven zijn nu de volgende vergelijkingen,  
 continuïteitsvgl.,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r u_r + \frac{du_z}{dz} = 0 \quad (2.1)$$

bewegingsvgl.,

$$u_r \frac{du_r}{dr} + u_z \frac{du_z}{dz} + \frac{d}{dz} \overline{u'_r u'_z} = 0 \quad (2.10)$$

## 2.2 Het oplossen van de vergelijkingen.

In het onderstaande zal worden getracht de vgl. (2.1) en (2.10) op te lossen door aan te nemen dat de stroming zich volledig heeft ontwikkeld, zodat de snelheidsprofielen als gelijkvormig zijn te beschouwen.

Deze veronderstelling impliceert dat zowel de horizontale en de verticale snelheid, alsmede de turbulente schuifspanning te schrijven zijn als het produkt van een functie, die alleen van  $r$  afhangt en een functie, die alleen een dimensieloze verticale variabele bevat. Een dergelijke beschouwing berust in principe op scheiding van variabelen.

### 2.2.a. Afleiding gelijkvormigheidscondities.

Aangezien de verschillende functies niet onafhankelijk van elkaar zijn wordt in het onderstaande de specifieke afhankelijkheid van de  $r$ -coördinaat bepaald.

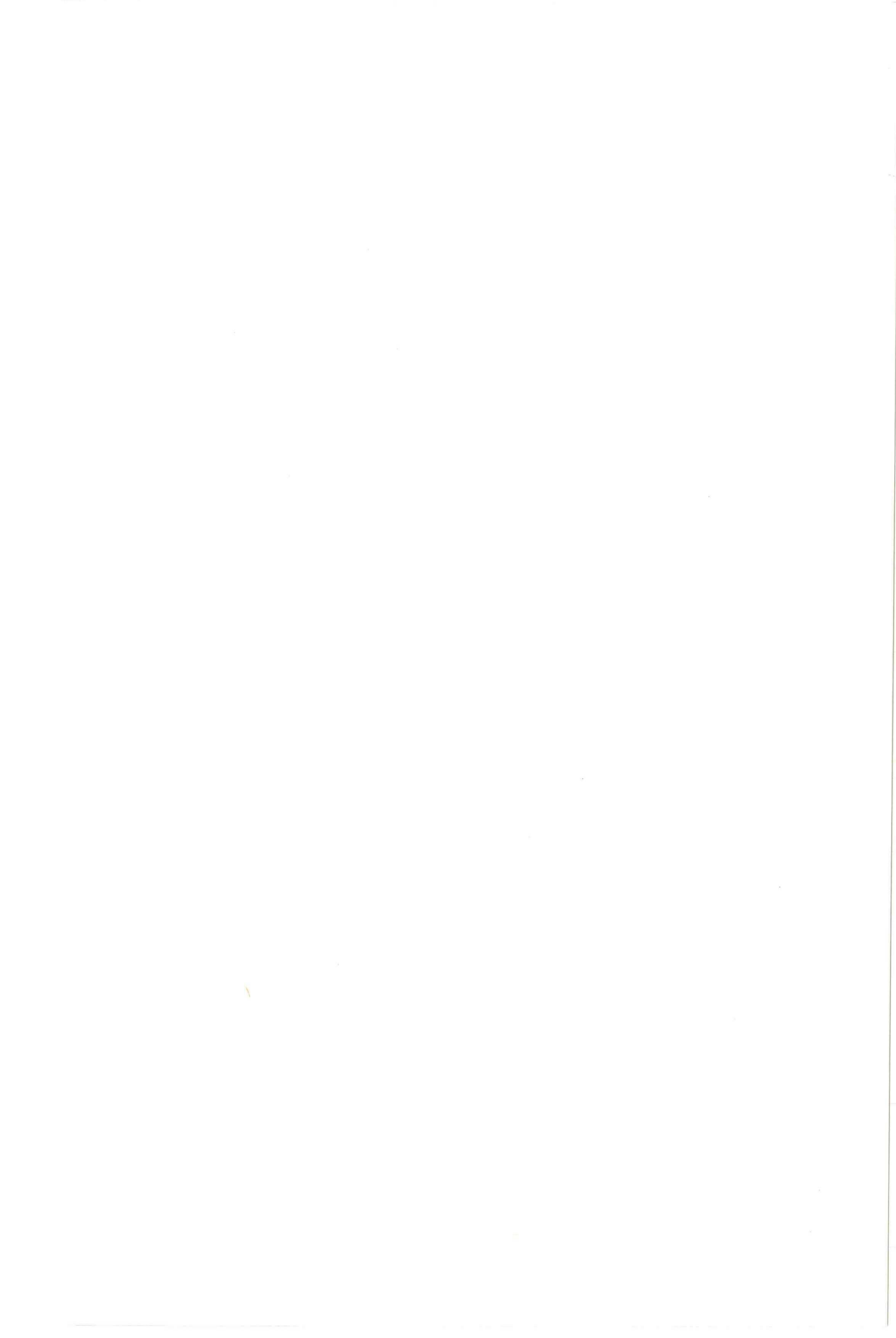
We stellen hiertoe in analogie van Hinze (9),

$$u_r = u_0 \left( \frac{r}{L_0} \right)^a f(\theta) \quad (2.11a)$$

$$u_z = u_0 \left( \frac{r}{L_0} \right)^b g(\theta) \quad (2.11b)$$

$$\overline{u'_r u'_z} = u_0^2 \left( \frac{r}{L_0} \right)^c h(\theta) \quad (2.11c)$$

$$\theta = \frac{z/L_0}{(r/L_0)^d} \quad (2.11d)$$



a, b, c en d zijn constanten,  $U_0$  is een constante met de dimensie van snelheid,  $L_0$  is een constante met de dimensie van lengte.

Door substitutie van de vgl. (2.11a,b,c,d) in de vgl. (2.1) en (2.10), is het mogelijk om met de eindigheidsvoorwaarde relaties te vinden voor a, b, c en d (zie uitwerking Bijlage II).

Uit de continuïteitsvgl. volgt,

$$a - b + d = 1 \quad (2.12a)$$

Uit de bewegingsvgl. volgt,

$$2a - c + d = 1 \quad (2.12b)$$

Integreren we vervolgens de bewegingsvgl. (2.10) over de gehele diepte dan vinden we de relatie,

$$2a + d = -1 \quad (2.12c)$$

We hebben nu 3 vgl. met 4 onbekenden, zodat er nog een extra vergelijking nodig is. Hiervoor zijn 2 mogelijkheden, te weten,

$\frac{\overline{u_r' u_z'}}{u_x^2}$  is geen functie van r  
 of de turbulente viscositeit,  $\nu_t = \frac{-\overline{u_r' u_z'}}{\frac{du_r}{dz}}$  is geen functie van r

Deze veronderstellingen geven resp. de relaties,

$$2a - c = 0 \quad (2.12d)$$

$$a - c - d = 0 \quad (2.12e)$$

De vergelijkingen (2.12d) en (2.12e) geven beide tesamen met de vgl. (2.12a,b,c) het volgende resultaat,

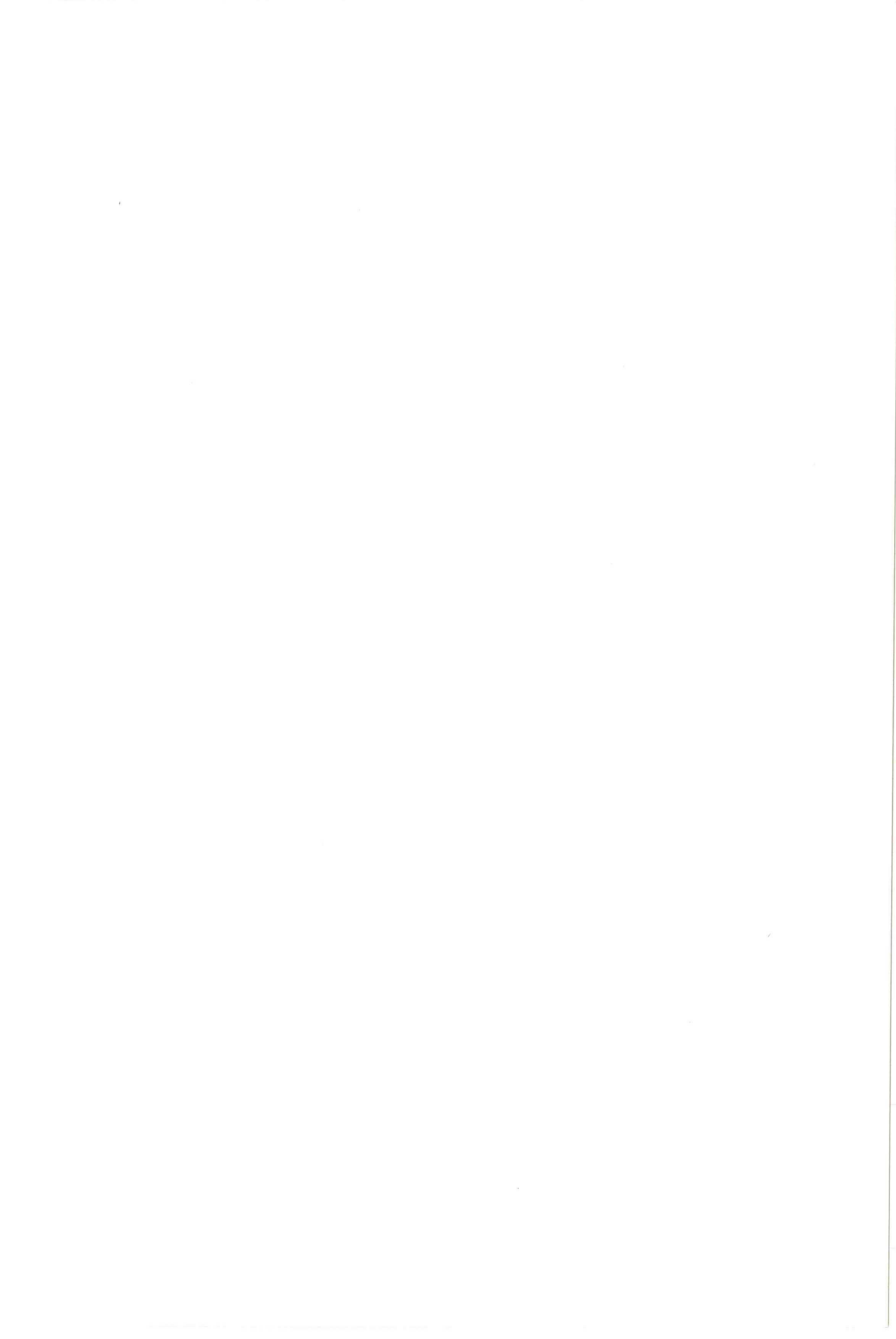
$$a = -1, \quad b = -1, \quad c = -2, \quad d = 1 \quad (2.13)$$

De specifieke r afhankelijkheid van de grootheden  $u_r$ ,  $u_z$  en  $\overline{u_r' u_z'}$  zijn hiermee dus bepaald.

Bij deze aanpak zijn de volgende aannamen gedaan,

7. volledig ontwikkelde stroming, (gelijkvormigheid)
8. de turbulente viscositeit is geen functie van r





2.2.b . Invoering gelijkvormigheid.

Naar aanleiding van de in de vorige paragraaf afgeleide gelijkvormigheidscondities kunnen we voor het oplossen van de vgl. (2.1) en (2.10) de volgende relaties veronderstellen t.a.v.  $u_r$  en  $\overline{u_r' u_z'}$ ,

$$u_r = u_R f(\xi) \quad (2.14a)$$

$$-\overline{u_r' u_z'} = u_R^2 h(\xi) \quad (2.14b)$$

waarbij  $\xi$  een dimensieloze breedtemaat is waarvoor geldt,

$$\xi = \frac{z}{l} \quad (2.14c)$$

Uit de vorige paragraaf volgt dat,

$$\begin{aligned} & u_R \div r^{-1} \\ \text{en} & \xi \div r^{-1} \\ \text{zodat,} & l \div r \end{aligned}$$

Eenvoudig is af te leiden dat,  $\frac{du_R}{dr} = -\frac{u_R}{r}$  en  $\frac{d\xi}{dz} = -\frac{\xi}{l}$

Substitutie van (2.14a,b,c) in de vgl. (2.1) geeft,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} r u_R f(\xi) + \frac{1}{l} \frac{du_z}{d\xi} = 0$$

$$\Rightarrow u_R f'(\xi) \frac{d\xi}{dr} + \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} u_z = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{u_R}{r} \xi f'(\xi) + \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} u_z = 0$$

Integratie naar  $\xi$  levert met de randvoorwaarde  $u_z = 0$  voor  $\xi = 0$ ,

$$u_z = l \frac{u_R}{r} \int_0^\xi \xi f'(\xi) d\xi \quad (2.15)$$

substitutie van (2.14a,b,c) en (2.15) in de vgl. (2.10) geeft,

$$-\frac{u_R^2}{r} f^2 + \frac{u_R^2}{r} \xi f f' + \frac{u_R^2}{r} \int_0^\xi \xi f' d\xi \frac{u_R}{l} f' - \frac{u_R^2}{l} h' = 0$$



Delen door  $\frac{u_R^2}{\nu}$  geeft,

$$f^2 - \xi f f' + f' \int_0^\xi f' d\xi - \frac{\nu}{l} h' = 0$$

aangezien

$$f' \int_0^\xi f' d\xi = \xi f f' - f \int_0^\xi f d\xi$$

gaat de vergelijking over in

$$f^2 - f' \int_0^\xi f d\xi + \frac{\nu}{l} h' = 0 \quad (2.16)$$

Indien we veronderstellen dat de turbulente viscositeit constant is over de diepte, dan is het mogelijk om de functie  $h$  te schrijven als een functie van  $f$ .

We maken hiertoe gebruik van de Boussinesq relatie,

$$\nu_t = \frac{-\overline{u'u_z'}}{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{u_R^2 h}{u_R f' l} = u_R l \frac{h}{f'}$$

zodat,

$$h = \frac{1}{Re_t} f' \quad , \quad Re_t \equiv \frac{u_R l}{\nu_t} \quad (2.17)$$

Met de aanname 9, dat  $\nu_t$  geen functie is van  $z$ , is  $Re_t$  constant, zodat differentiatie van (2.17) naar  $\xi$  geeft,

$$h' = \frac{1}{Re_t} f''$$

De vgl. (2.16) is dan te schrijven als,

$$f^2 + f' \int_0^\xi f d\xi + \frac{\nu}{l} \frac{1}{Re_t} f'' = 0 \quad (2.18)$$

Een eenvoudige oplossing van deze D.V. kan worden verkregen als we in navolging van Tennekes en Lumley (8)  $l$  zodanig kiezen dat,

$$\frac{\nu}{l} \frac{1}{Re_t} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2\nu}{Re_t} \quad (2.19)$$

De vgl. (2.18) gaat daarmee over in,

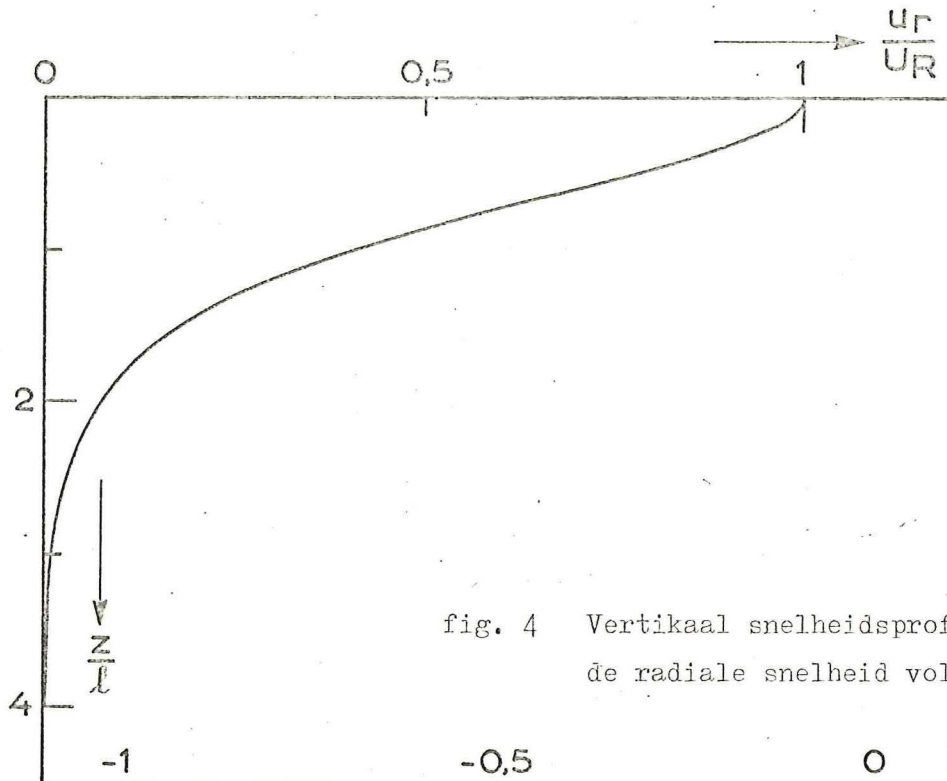


fig. 4 Vertikaal snelheidsprofiel van de radiale snelheid volgens vgl. (2.21)

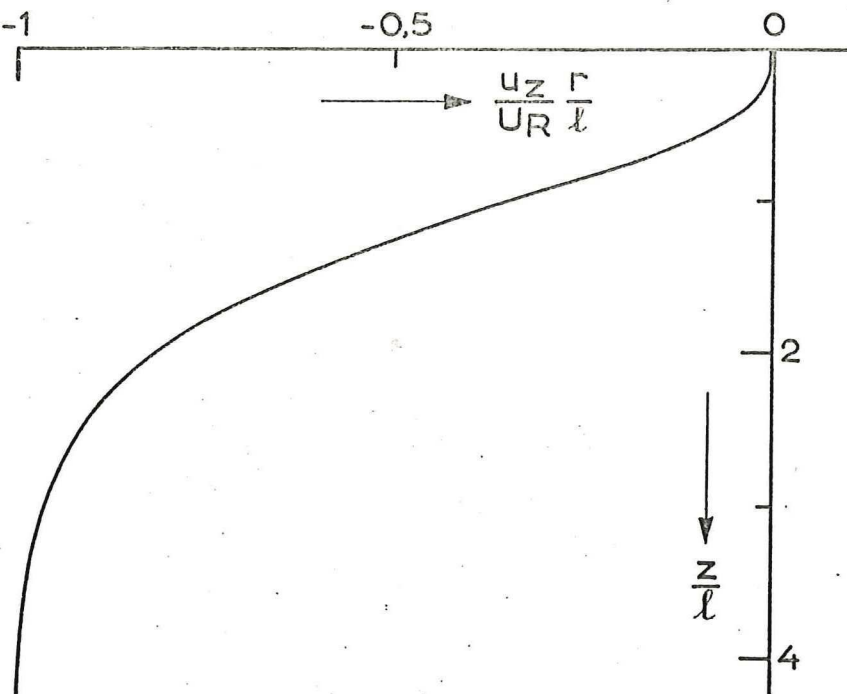


fig. 5 Vertikale snelheidsverdeling van de vertikale snelheid volgens vgl. (2.22)



$$f^2 + f' \int_0^z f d\zeta + \frac{1}{2} f'' = 0 \quad (2.20)$$

De oplossing van deze vergelijking is,

$$f = \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right)$$

Met behulp van de aannamen 1 t/m 9 en de keuze van  $l$  volgens vgl.(2.19), is de volgende oplossing verkregen voor de radiale snelheid van een radiale jet in een oneindig medium,

$$u_r = U_R \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) \quad (2.21)$$

Met behulp van de vgl.(2.15) vinden we voor de verticale snelheid,

$$u_z = -\frac{U_R l}{\nu} \left\{ \frac{z}{l} \tanh^2\left(\frac{z}{l}\right) - \frac{z}{l} + \tanh\left(\frac{z}{l}\right) \right\} \quad (2.22)$$

Met gebruikmaking van de vgln. (2.14b), (2.17) en (2.19), geldt voor de turbulente schuifspanningsterm,

$$-\overline{u_r' u_z'} = -\frac{U_R^2 l}{\nu} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) \tanh\left(\frac{z}{l}\right) \quad (2.23)$$

Verder kunnen we definiëren,

$$l = k \cdot r \quad (2.24)$$

$$\text{en } U_R = \frac{m}{l} \quad (2.25)$$

waarbij  $k$  en  $m$  constanten zijn.

De wijze van uitstroming van een radiale jet is dus volledig bepaald indien de constanten  $k$  en  $m$  bekend zijn. De grootte van de constanten zal onder meer afhangen van de door uitstroming geleverde impuls.

Het verloop van  $u_r$ ,  $u_z$  en  $\overline{u_r' u_z'}$  over de diepte, is dimensieloos uitgezet in de figuren 4, 5 en 6.

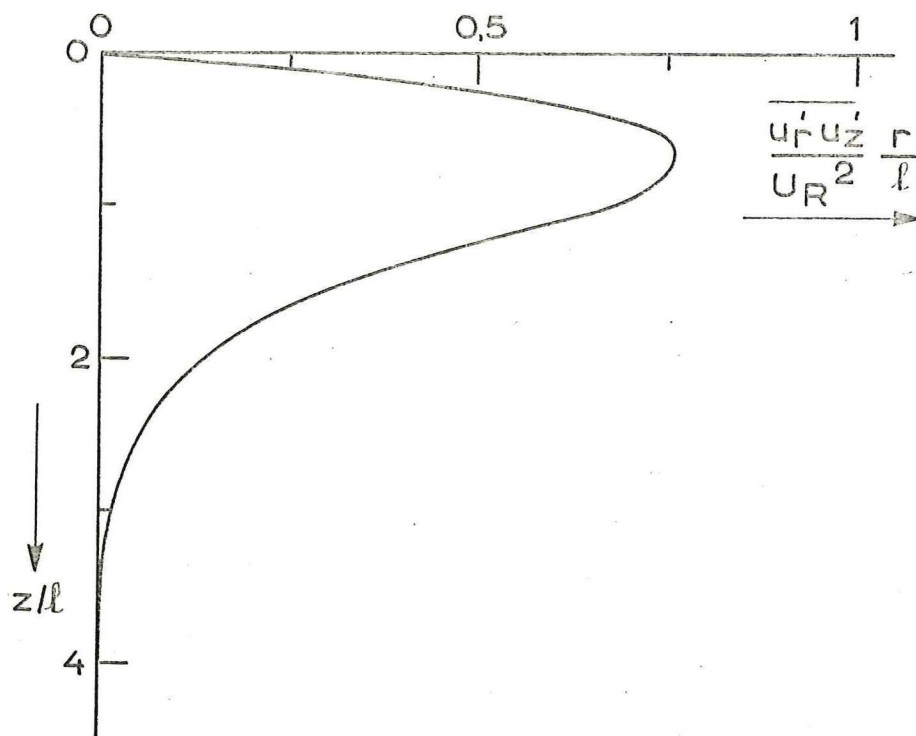


fig. 6 Het verloop van de schuifspanning over de diepte volgens vgl. (2.23).

2.3. Beschouwingen t.a.v. het resultaat.

Samenvattend kunnen we konkluderen dat in een oneindig medium te verwachten is dat, evenals bij een 2-dimensionale jet, het het snelheidsprofiel van een radiale jet te beschrijven is met een  $\text{sech}^2$ -functie. Voor de goede orde moet de afstroming voldoen aan de volgende voorwaarden,

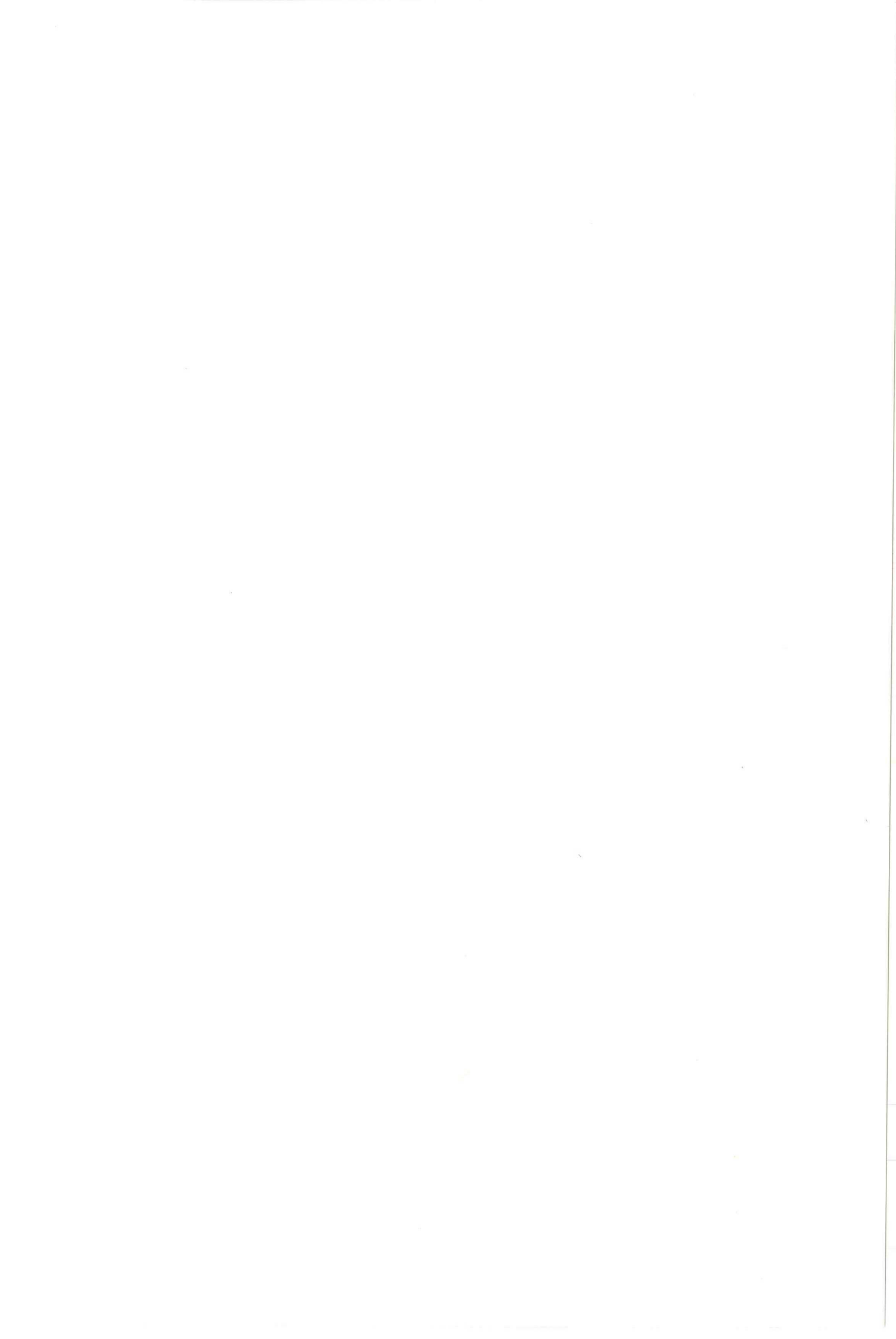
1. radiaalsymmetrie
2. geleidelijke uitbreiding ( $l \ll r$ )
3. verwaarlozing van viskeuze termen gerechtvaardigd, of wel stroming voldoende turbulent. ( $\frac{1}{Re} \frac{u_R}{u_t} \ll \mathcal{O}(1)$  en  $\frac{u_t^2}{u_R} \ll \mathcal{O}(1)$ )
4. het verticale impulstransport t.g.v. convectie is veel kleiner dan het turbulente impulstransport ( $\frac{l}{r} \frac{u_R^2}{u_t^2} \ll \mathcal{O}(1)$ )
5. geen horizontale drukgradiënt ( $\frac{\partial p_0}{\partial r} \approx 0$ )
6. geen coriolis invloed ( $\frac{u_R^2}{r^2} \gg \mathcal{O}(\frac{1}{4} f_0^2)$ )
7. volledig ontwikkelde stroming (gelijkvormigheid)
- 8/9. turbulente viscositeit constant, d.w.z geen  $f(r,z)$

Welke consequenties deze voorwaarden tot gevolg hebben zal in een later stadium aan de orde komen. Het is echter mogelijk dat geringe afwijkingen, zoals bijv. het niet constant zijn van de turbulente viscositeit of een kleine drukgradiënt, slechts geringe afwijkingen tot gevolg hebben.

Aande hand van een vergelijk met de theorie voor een 2-dimensionale jet, alsmede enkele experimentek gegevens, zal in het onderstaande nader worden ingegaan op de te verwachten uitbreiding van de radiale jet. Tevens zal het  $\text{sech}^2$ -profiel worden vergeleken met enkele andere profielen die vaak voor de beschrijving van jets worden gebruikt.

2.3.a. Vergelijk met de 2-dimensionale jet.

Vergelijken we de oplossing voor de radiale jet met de oplossing voor de 2-dimensionale jet, dan blijken deze op een constante na met elkaar overeen te stemmen.



Voor de 2-dimensionale jet hebben Tennekes en Lumley (8) namelijk afgeleid,

$$u_x = U_s \cdot \operatorname{sech}^2 \left( \frac{z}{l_x \sqrt{z}} \right)$$

met  $l_x = \frac{2x}{Re_t}$  ;  $Re_t = \frac{U_s l_x}{\nu}$

$u_x$  is hierbij de snelheid in de horizontale x-richting,  $U_s$  is de maximale cq. oppervlakte-snelheid, terwijl  $l_x$  een karakteristieke breedtemaat is.

Voor de radiale jet vonden we,

$$u_r = U_R \operatorname{sech}^2 \left( \frac{z}{l} \right)$$

met

$$l = \frac{2r}{Re_t} \quad , \quad Re_t = \frac{U_R l}{\nu}$$

Ondanks de gelijkkluidende definities voor  $l_x$  en  $l$  blijken beide breedtematen te corresponderen met een verschillende plaats op het snelheidsprofiel.

Beschouwen we de plaats  $z_{0,42}$  op het snelheidsprofiel, waarvoor geldt dat de snelheid op deze plaats gelijk is aan  $\operatorname{sech}^2(1) \cdot$  (de max. snelheid), dan is eenvoudig in te zien dat,

voor de 2-dimensionale jet,

$$z_{0,42}^{(2)} = l_x \sqrt{z} = \frac{2\sqrt{z}}{Re_t} x = k^{(2)} x$$

voor de radiale jet,

$$z_{0,42}^{(r)} = l = \frac{2r}{Re_t} = k \cdot r$$

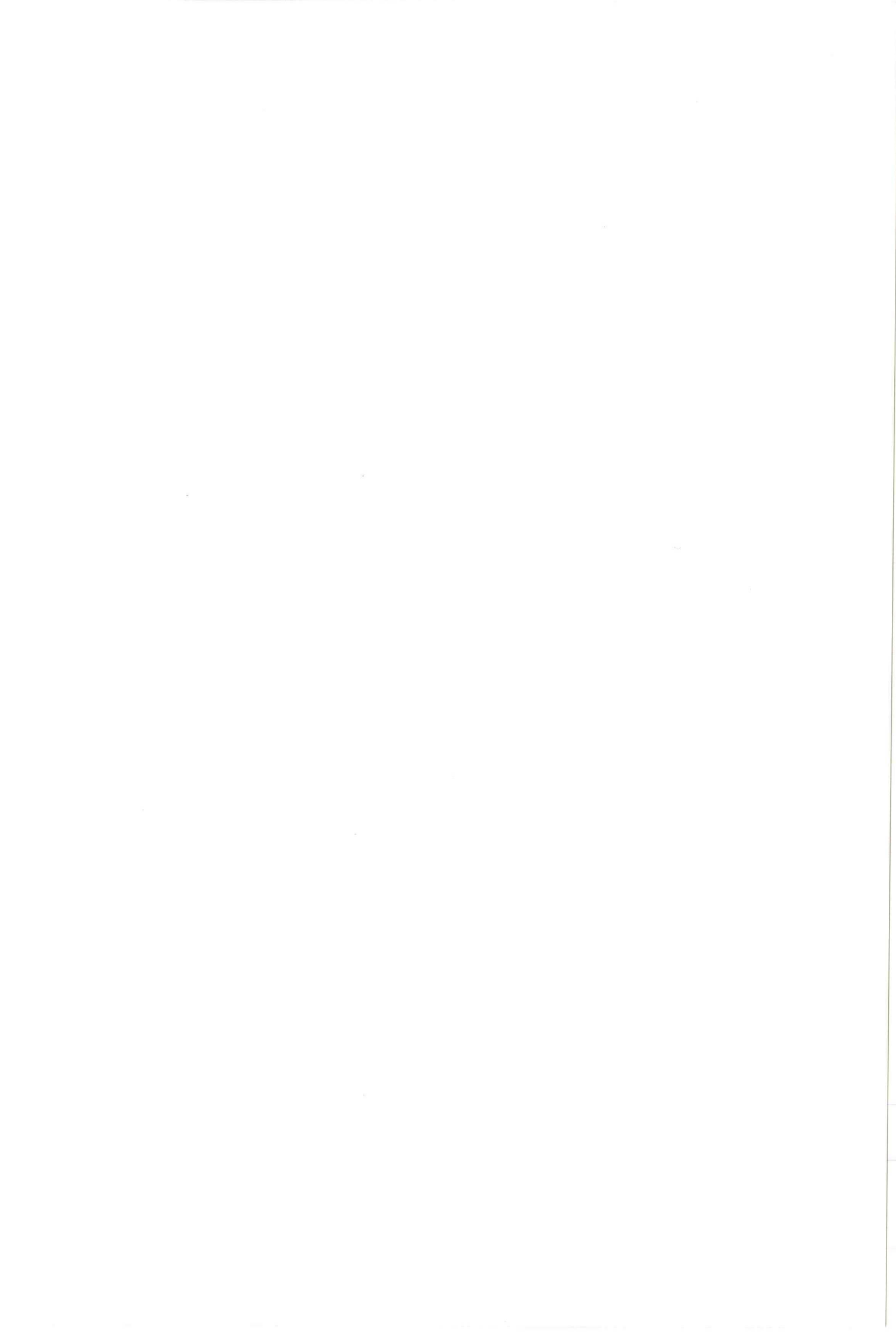
(opm.  $\operatorname{sech}^2(1) \approx 0,42$ )

Tennekes en Lumley geven voor de 2-dim. jet  $Re_t = 25,7$ , zodat  $k^{(2)} = \frac{2\sqrt{z}}{25,7} \approx 0,11$  terwijl voor een axi-symmetrische jet een waarde van  $Re_t = 32$  wordt gegeven. Stellen we dat voor de radiale jet de waarde van  $Re_t$  qua orde van grootte overeen komt met deze waarden dan is,

$$k = \frac{2}{25,7} \text{ à } \frac{2}{32} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0,068 \text{ à } 0,078$$

Te verwachten is dus dat de radiale jet zich minder sterk in verticale richting zal uitbreiden als de 2-dimensionale jet.





Opmerking:

Een ander verschil tussen de 2-dimensionale jet en de radiale jet is de verandering van de oppervlakte-snelheid als functie van de afstand.

Voor de 2-dimensionale jet geldt namelijk  $u_s \div x^{-0.5}$  en voor de radiale jet  $u_R \div r^{-1}$

Aangezien voor beide situaties op grond van zelfbehoud en gelijkvormigheid is afgeleid dat  $Re_t$  constant is, kunnen we de volgende afhankelijkheden met betrekking tot de turbulente viscositeit afleiden.

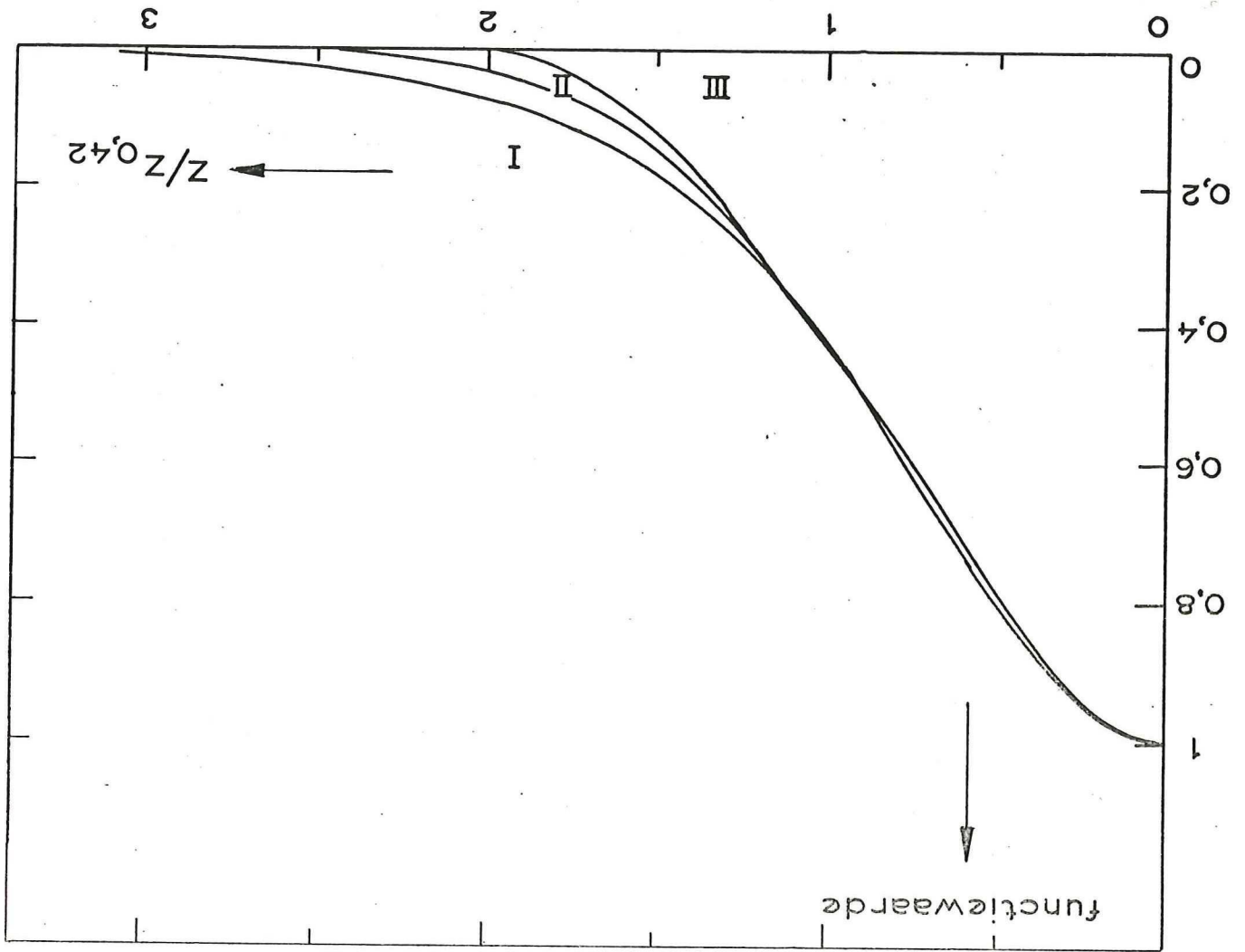
2-dim. jet	radiale jet
$Re_t = \frac{u_s l_x}{\nu_t} \quad (\text{constant})$	$Re_t = \frac{u_R l}{\nu_t} \quad (\text{constant})$
$u_s \div x^{-0.5}$	$u_R \div r^{-1}$
$l_x \div x$	$l \div r$
$\Rightarrow \nu_t \div x^{0.5}$	$\Rightarrow \nu_t = \text{constant.}$

Met behulp van de relatie,  $\nu_t = \lambda \sqrt{e}$ , waarbij  $\lambda$  een lengteschaal is en  $e (= \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  de turbulente kinetische energie/massa-eenheid voorstelt, kunnen we dit verschil in afhankelijkheid verklaren.

2-dim. jet	radiale jet
stel, $\lambda \div x$	$\lambda \div r$
$\Rightarrow \sqrt{e} \div x^{-0.5}$	$\Rightarrow \sqrt{e} \div r^{-1}$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{e}}{u_s} = \text{constant}$	$\Rightarrow \frac{\sqrt{e}}{u_R} = \text{constant}$

Voor beide jets lijkt dus middels de aanname van gelijkvormigheid tevens de aanname te zijn gedaan dat de relatieve turbulentie-intensiteit constant is, hetgeen geen onredelijke aanname lijkt.

Fig. 7 Verschillende functies voor het snelheidsprofiel (zie tabel)



Getabelleerde functiewaarden van

(I)  $\text{sech}^2\left(\frac{z}{z_{0,42}}\right)$

(II)  $e^{-\left(\frac{0,101z}{z_{0,42}}\right)^2}$

(III)  $\left(1 - \left(\frac{0,5z}{z_{0,42}}\right)^{3/2}\right)^2$

$z/z_{0,42}$	I	II	III
0,0	1,00	1,00	1,00
0,1	0,99	0,99	0,98
0,2	0,96	0,97	0,94
0,3	0,92	0,92	0,89
0,4	0,86	0,87	0,83
0,5	0,79	0,80	0,77
0,6	0,71	0,73	0,70
0,7	0,63	0,65	0,63
0,8	0,56	0,57	0,56
0,9	0,49	0,49	0,49
1,0	0,42	0,42	0,42
1,5	0,18	0,14	0,12
2,0	0,07	0,03	0,00
2,5	0,03	0,00	0,00
3,0	0,01	0,00	0,00

2.3.b. Vergelijk met andere snelheidsprofielen.

Uit de literatuur blijkt dat voor het snelheidsprofiel van jets verschillende functies worden gehanteerd. Zo wordt voor een axi-symmetrische jet veelal de normaal verdeling  $e^{-(z/b_1)^2}$  gebruikt (zie o.a. Hinze (9), Bembaron (2)) en maakt Abramovich (10) gebruik van functie  $(1 - (\frac{z}{z_2})^{3/2})^2$  voor de beschrijving van een 2-dimensionale jet.

$b_1$  en  $b_2$  zijn karakteristieke breedtematen, waarvoor resp. is gevonden,  $b_1 = 0,096 x$  en  $b_2 = 0,22 x$ .

Zowel Abramovich (10), als Bird et.al. (11) vinden, evenals Tennekes en Lumley (8), op theoretische gronden het  $\text{sech}^2$ -profiel, dat door eerstgenoemden weliswaar wordt gepresenteerd in de vorm  $(1 - \tanh^2)$

Beide profielen zijn gelijk vanwege de eigenschap  $\text{sech}^2 + \tanh^2 = 1$

Nagegaan is in welke mate de diverse functies van elkaar verschillen.

Hiertoe zijn de functies aan elkaar gelijk gesteld op  $z_{0,42}$ .

uit nevenstaande tabel blijkt dat de afwijkingen maximaal ca. 5 % van

de maximale snelheid zijn, zodat de verschillen derhalve gering zijn te noemen. De grootste verschillen treden op voor diepten groter dan  $z_{0,42}$ .

Eén en ander wordt geïllustreerd door figuur 7.

Uit het gelijkstellen van de functies op  $z_{0,42}$  volgt dat,

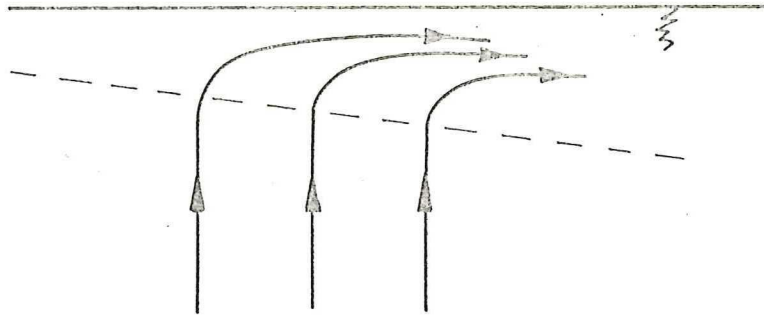
(Hinze)	$1,07 z_{0,42} = b_1 = 0,096 x$	$\Rightarrow z_{0,42} = 0,090 x$	axi-symm. jet
(Abramovich)	$2 z_{0,42} = b_2 = 0,22 x$	$\Rightarrow z_{0,42} = 0,11 x$	2-dim. jet

De door Abramovich gevonden waarde voor de 2-dimensionale jet komt dus overeen met de door Tennekes en Lumley gebruikte waarde (zie blz. 21)

Opmerking:

Uit figuur 7 blijkt tevens dat het profiel over een vrij groot gedeelte redelijk lineair is, zodat het niet onbegrijpelijk is waarom in het voorgaand onderzoek een lineair profiel is verondersteld voor de afstroming van een bellenzuil.

a.



b.

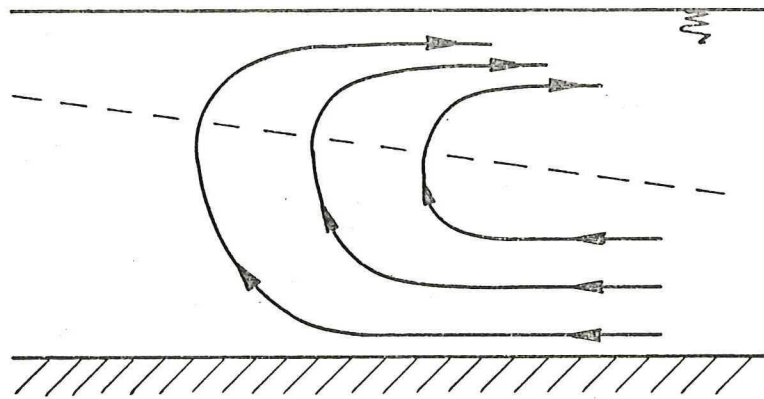


fig. 8 Stromingsbeeld van de radiale jet bij oneindige diepte (a) en eindige diepte (b).

### 3. THEORETISCH MODEL VOOR DE AFSTROMENDE LAAG VAN EEN BELLENZUIL

#### 3.1. Aanpassing van de theorie voor de radiale jet aan de situatie voor de afstroming van de bellenzuil.

Met behulp van de theorie voor de radiale jet in een oneindig medium kunnen we een theoretisch model opstellen voor de afstroming van de bellenzuil. Beschouwen we eerst de radiale jet bij een eindige diepte, dan zal het duidelijk zijn dat het in figuur 5 geschetste verloop voor de verticale snelheid niet meer geldig kan zijn, omdat in deze situatie de verticale snelheid ter plaatse van de bodem nul moet zijn. Dit heeft tot gevolg dat het stromingsbeeld enigszins verandert, hetgeen moge blijken uit de figuren 8a en b.

Het zal duidelijk zijn dat in plaats van alleen verticale opstroming en horizontale afstroming, er een combinatie zal ontstaan van opstroming, afstroming en terugstroming. De terugstroming zal in versterkte mate plaatsvinden als de radiale jet wordt vervangen door een bellenzuil. Een bellenzuil neemt namelijk water op, hetgeen een extra toestroming veroorzaakt.

Aangezien een bellenzuil zelf geen water toevoert, moet derhalve in een stationaire situatie het afstromende debiet gelijk zijn aan het toestromende debiet. Voor het geval er geen terugstroming zou zijn, kunnen we het totale debiet van het over de diepte H afstromende water berekenen middels,

$$Q'_{af} = \int_0^{2\pi} \int_0^H u_r r d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \int_0^H U_R \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) r d\varphi dz$$

$$Q'_{af} = 2\pi r U_R l \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \quad (3.1)$$

Voor het over de gehele diepte terugstromende debiet, zonder beschouwing van de afstroming, kunnen we schrijven,

$$Q'_{terug} = \int_0^{2\pi} \int_0^H u_{rt} r d\varphi dz = 2\pi r \int_0^H u_{rt} dz$$

$u_{rt}$  is daarbij de terugstroomsnelheid.



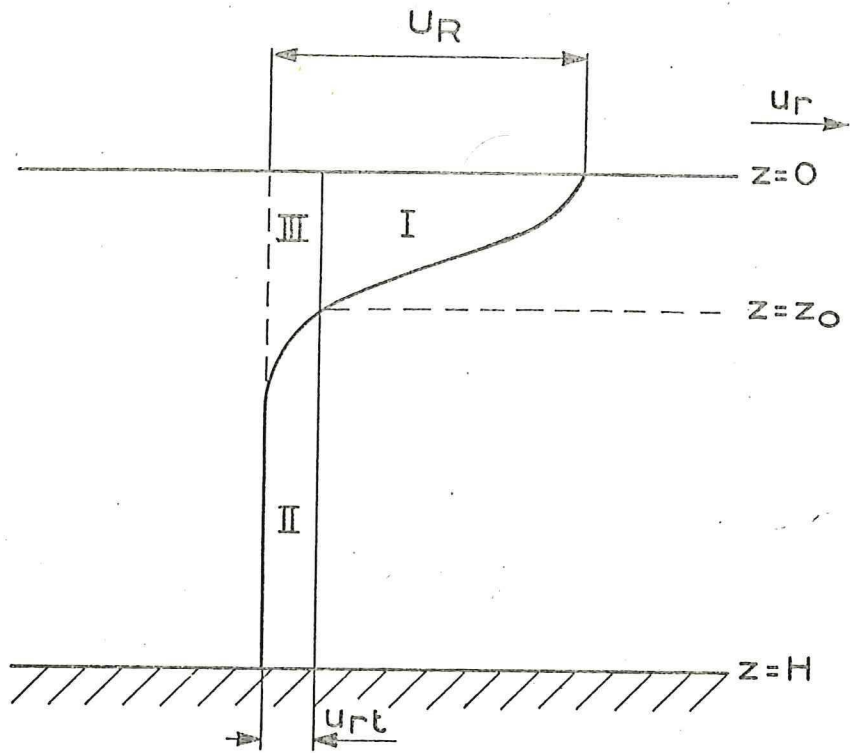


fig. 9 Verloop van de radiale snelheid over de diepte vgl.(3.3).

Aangezien zowel uit metingen aan een bellenscherm (Groot en v.d. Heyden (6)), als uit metingen aan een 2-dimensionale jet (Abramovich(10)) is gebleken dat het snelheidsprofiel van de afstroming vrijwel niet wordt aangetast door de terugstroming, is te verwachten dat  $u_{rt}$  min of meer constant is over de diepte.

We stellen daarom  $u_{rt} = U_{rt}(z)$  waarmee,

$$Q'_{terug} = 2\pi r U_{rt} H = Q'_{af} = 2\pi r U_R l \tanh\left(\frac{H}{l}\right)$$

zodat,

$$U_{rt} = \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \quad (3.2)$$

Passen we vervolgens superpositie toe van heen- en terugstroming, dan vinden we voor de horizontale 'afstroom'-snelheid van de bellenzuil,

$$u_x = U_R \left\{ \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \quad (3.3)$$

In figuur 9 is het verloop van  $u_x$  uitgezet als functie van  $z$ . Het zal duidelijk zijn dat het werkelijk afstromende debiet gelijk is aan het werkelijk toestromende debiet, aangezien het gelijkstellen van  $Q'_{af}$  en  $Q'_{terug}$  in feite het gelijkstellen is van oppervlak I + oppervlak III = oppervlak II + oppervlak III, oftewel oppervlak I = oppervlak II

Met behulp van de continuïteitsvgl. (2.1) kan door substitutie van vgl. (3.3) de verticale snelheid worden berekend volgens,

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dz} &= -\frac{1}{l} \frac{d}{dz} U_R \left\{ \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \\ &= -\frac{U_R}{l} \left\{ 2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) \tanh\left(\frac{z}{l}\right) \frac{z}{l} - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \end{aligned}$$

met  $\xi = \frac{z}{l}$ ,

$$u_z = -\frac{U_R l}{l} \int_0^{\xi} \left\{ 2 \operatorname{sech}^2(\xi) \tanh(\xi) \right\} - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{H}{l}\right) d\xi$$

$$\Rightarrow u_z = -\frac{U_R l}{l} \left\{ \frac{z}{l} \tanh^2\left(\frac{z}{l}\right) - \frac{z}{l} + \tanh\left(\frac{z}{l}\right) - \frac{z}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) + \frac{z}{l} \operatorname{sech}^2\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \quad (3.4)$$

Veronderstellen we dat de turbulente viscositeit onveranderd blijft, dan zal de schuifspanningsverdeling dezelfde zijn als bij de oneindige diepte en dus gelijk aan,

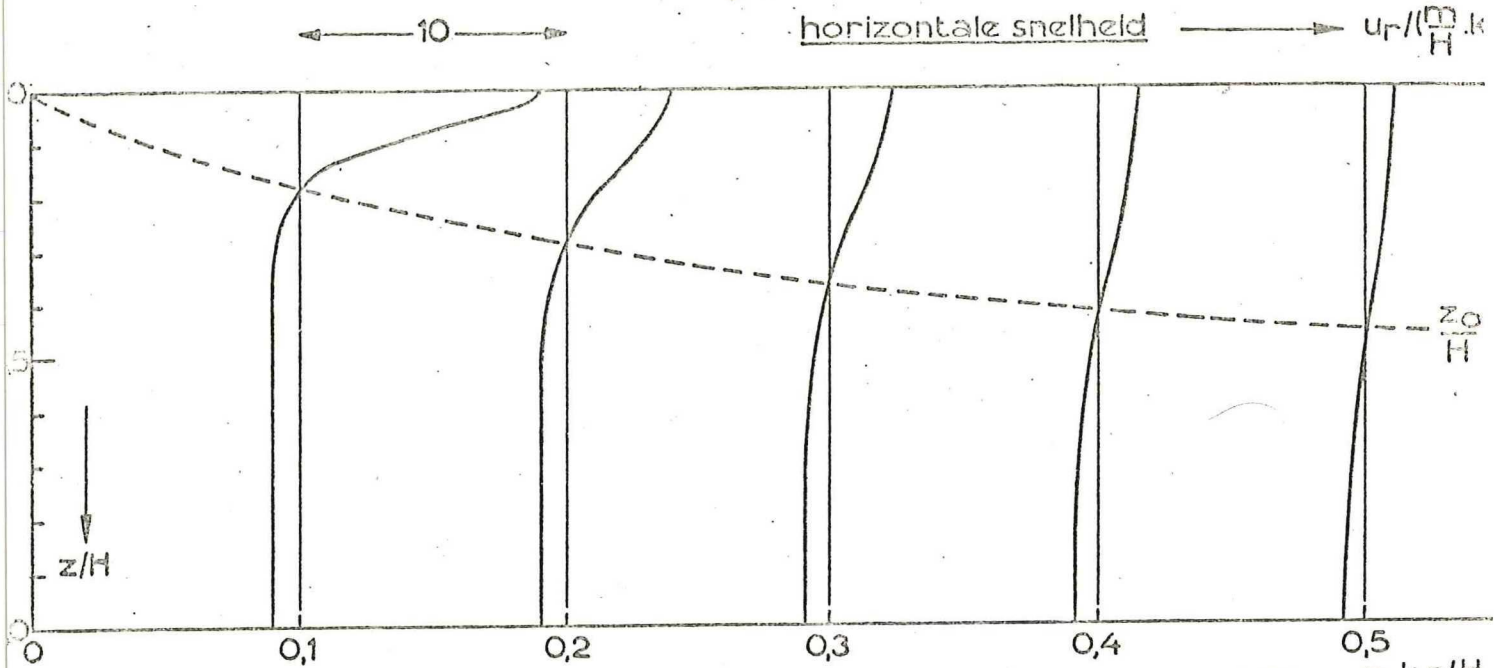


fig. 10 Verloop van de radiale snelheid volgens vgl. (3.3).

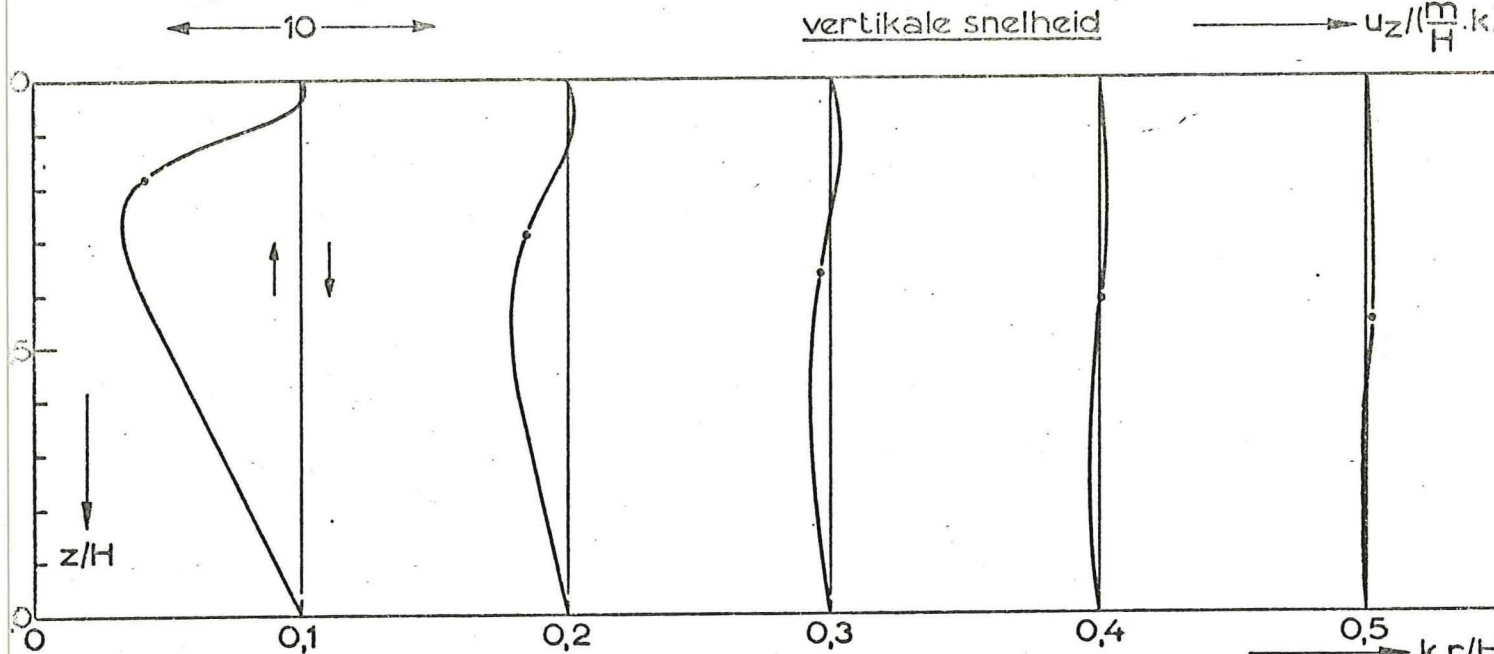


fig. 11 Verloop van de verticale snelheid volgens vgl. (3.4).

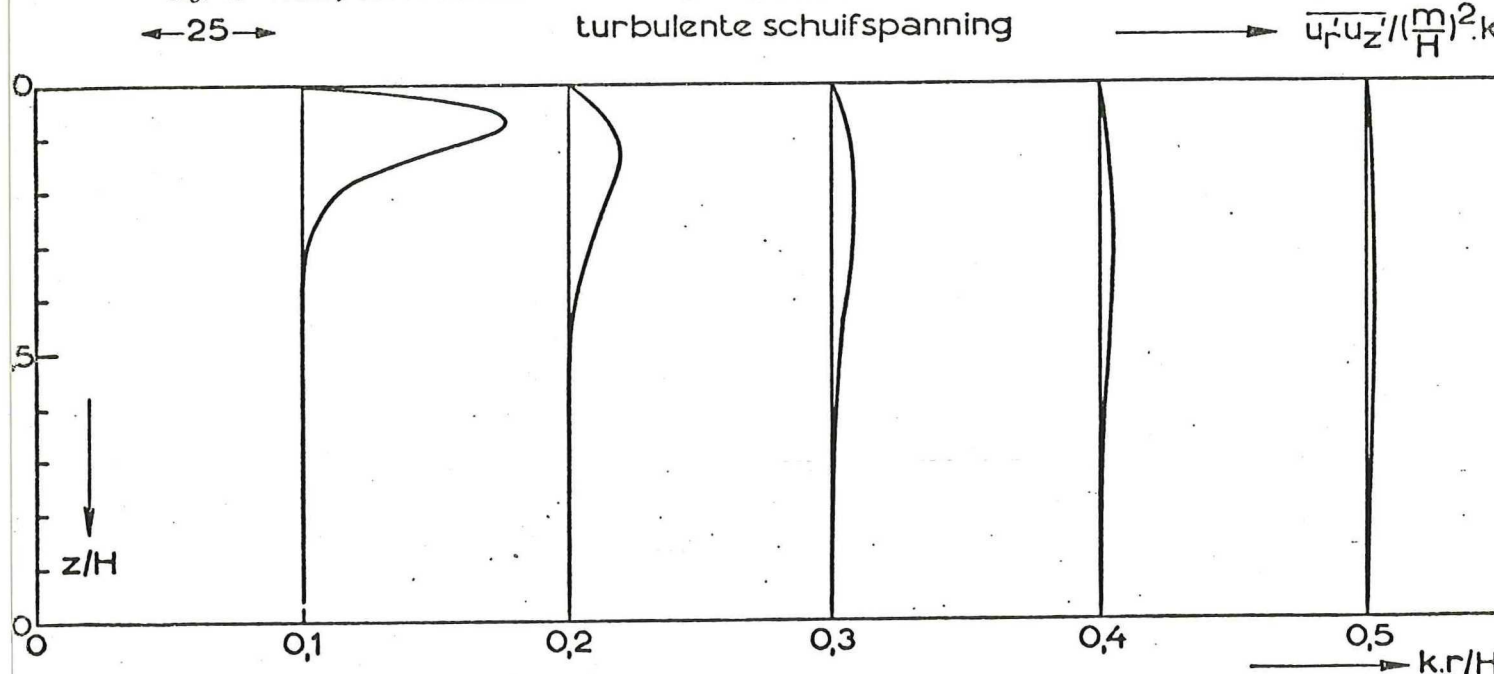


fig. 12 Verloop van de schuifspanningsterm volgens vgl. (2.23).

$$-\overline{u'_r u'_z} = -\frac{u_R^2 l}{4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{l}\right) \operatorname{tanh}\left(\frac{z}{l}\right) \quad (2.23)$$

Aangezien  $l = k \cdot r$  (2.24)

en  $u_R = \frac{m}{l}$  (2.25)

en  $m$  en  $k$  daarbij constanten zijn, kunnen we de vgl. (3.3), (3.4) en (3.5) dimensieloos uitzetten als functie van  $z$  voor verschillende waarden van  $r$ , zie resp. de figuren 10, 11 en 12.

Uit figuur 10 blijkt dat de snelheid aan de bodem niet voldoet aan de randvoorwaarde  $u_r = 0$ . Dit is echter niet zo belangrijk, omdat over het algemeen de bodem-invloed op het snelheidsprofiel zich beperkt tot een vrij kleine laag dicht bij de bodem.

Definiëren we de dikte van de afstromende laag gelijk aan  $Z_0$  dan blijkt, integenstelling tot hetgeen in voorgaand onderzoek is beweerd, dat deze dikte niet lineair van  $r$  afhangt, maar dat de uitbreiding van de werkelijk afstromende laag veel geleidelijker gaat.

Opmerkelijk is verder dat de maximale terugstroomsnelheid vrijwel constant van grootte is voor verschillende waarden van  $r$ . Ook lijkt het alsof het afstromende cq. terugstromende debiet afneemt voor grotere  $r$ -waarden. Men moet zich hierbij echter realiseren dat het oppervlak waardoor de stroming plaatsvindt evenredig is met  $2\pi r$ , zodat alleen een werkelijke berekening van het debiet hierin meer inzicht kan verschaffen.

Uit figuur 11 blijkt dat de verticale snelheid voldoet aan de randvoorwaarde  $u_z = 0$  voor  $z = H$ . Dit is een rechtstreeks gevolg van het gelijkstellen van het terugstromend debiet aan het afstromend debiet.

Een ander opmerkelijk feit is dat de verticale snelheid dichtbij het oppervlak positief (d.w.z. naar beneden gericht) is. Eén en ander wordt veroorzaakt doordat de oppervlakte-snelheid ( $U_0 = U_R - u_{rt}$ ) relatief sneller afneemt dan  $U_R$ .

Uit figuur 12 blijkt dat het verloop van de turbulente schuifspanningsterm, zowel aan het oppervlak als aan de bodem lijkt te voldoen aan de noodzakelijke randvoorwaarde  $\overline{u'_r u'_z} = 0$ . Aan de bodem is dit echter niet

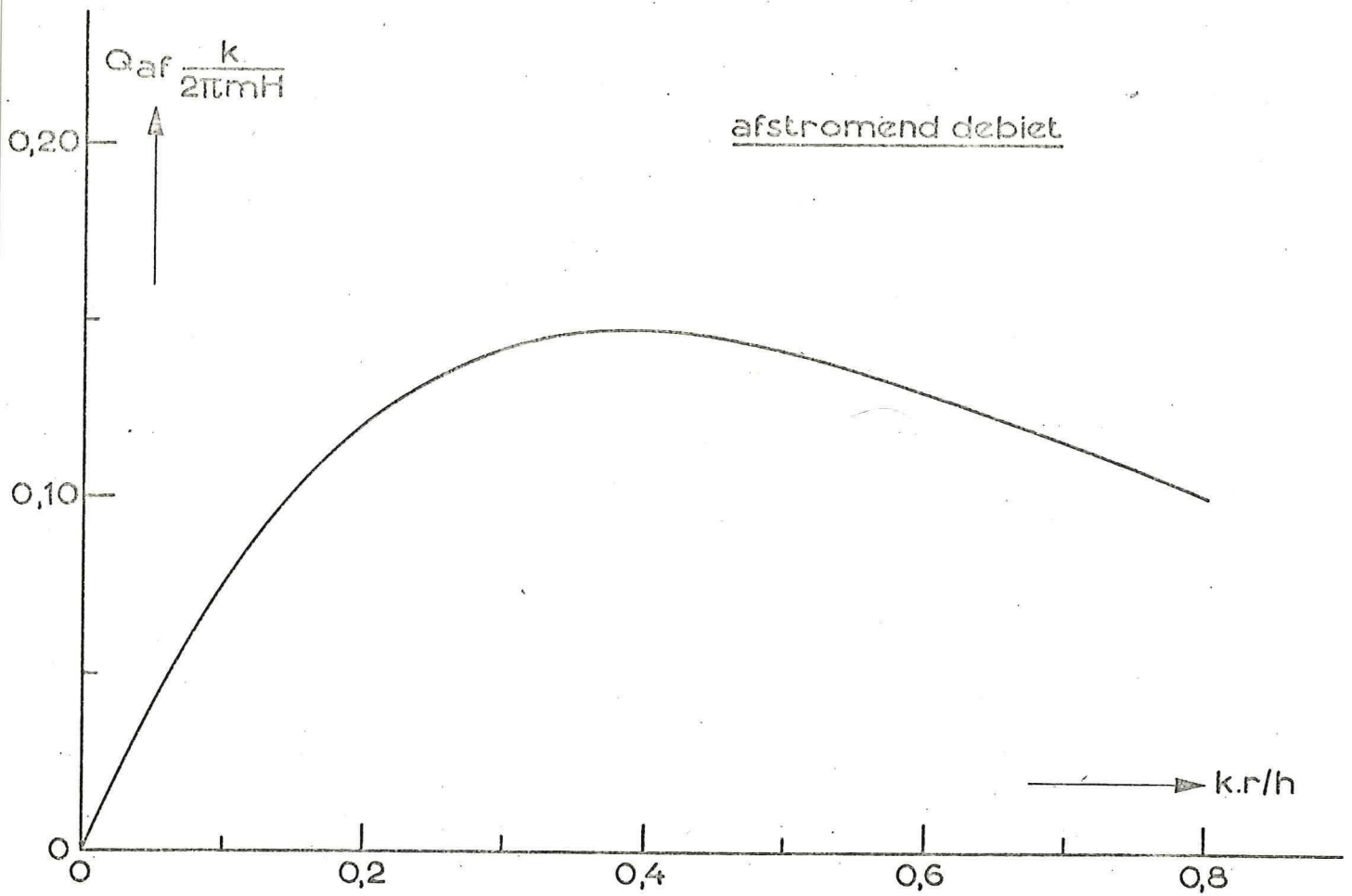


fig. 13 Het afstromende debiet als functie van de afstand tot de bellenzuil vgl. (3.6)

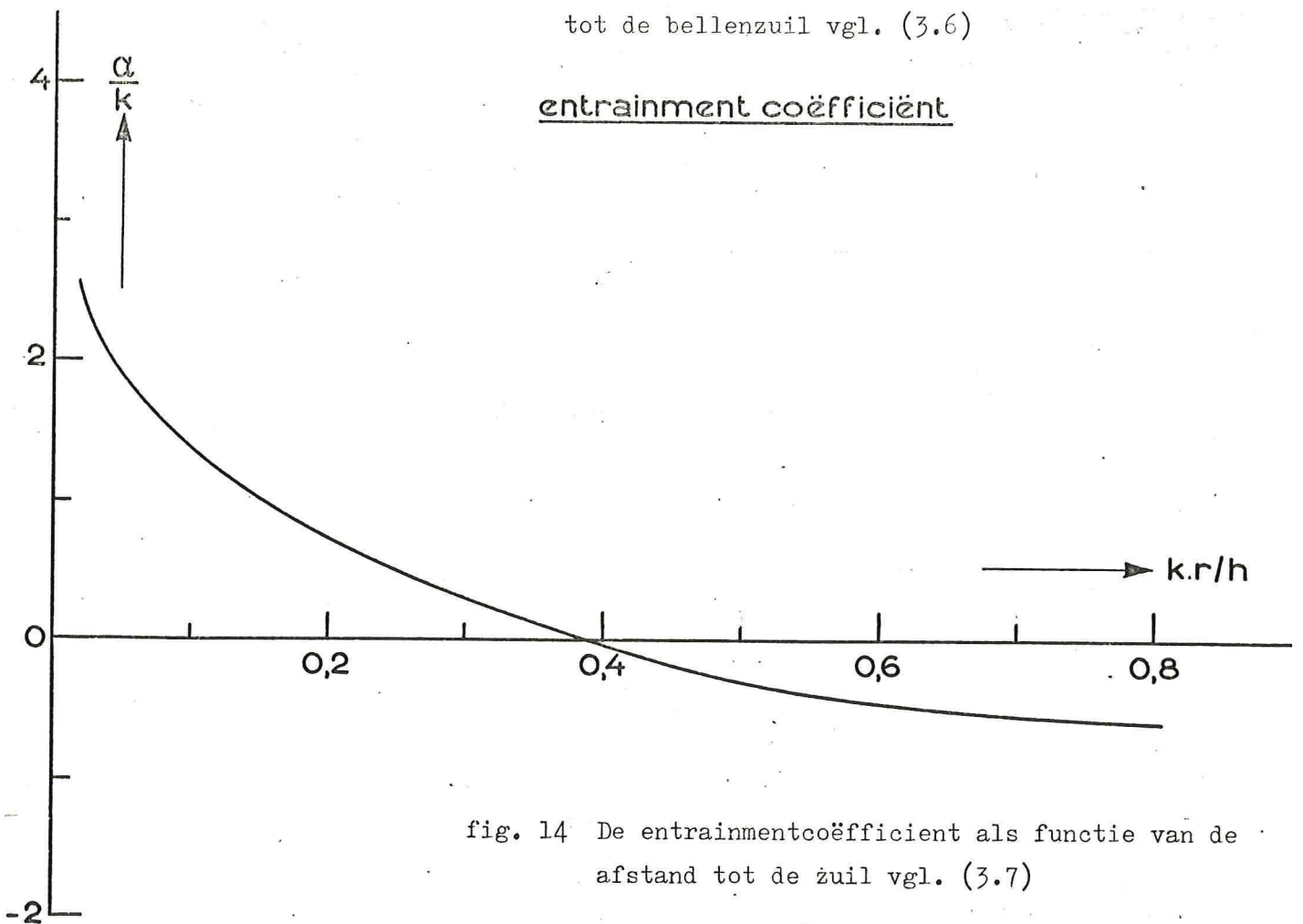


fig. 14 De entrainmentcoëfficiënt als functie van de afstand tot de zuil vgl. (3.7)



geheel juist en blijkt de afwijking zelfs toe te nemen met de afstand  $r$ . Deze afwijking kan tot gevolg hebben dat de theorie slechts voor een beperkt gebied geldt. Hier wordt in par. 3.3 verder op ingegaan.

Andere grootheden die berekend kunnen worden zijn o.a.

i. dikte van de afstromende laag.

Aangezien de dikte van de afstromende laag gelijk is aan  $Z_0$  en voor  $z=Z_0$  geldt dat  $u_r=0$ , volgt hieruit met de vgl. (3.3)

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{z_0}{l}\right) - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) = 0$$

$$\Rightarrow z_0 = l \tanh^{-1} \left\{ \sqrt{1 - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right)} \right\} \quad (3.5)$$

(opm.  $\tanh^{-1}$  is de inverse functie van  $\tanh$ , hiervoor geldt,

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad )$$

In figuur 10 is te zien hoe de dikte van de afstromende laag toeneemt met de afstand tot de zuil.

ii. afstromend debiet.

Het werkelijk afstromende debiet is te berekenen middels,

$$Q_{af} = \int_0^{2\pi} \int_0^{z_0} u_r r \, d\varphi \, dz$$

vgl. (3.3)

$$\Rightarrow Q_{af} = 2\pi r u_R l \left\{ \tanh\left(\frac{z_0}{l}\right) - \frac{z_0}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \quad (3.6)$$

In figuur 13 is dimensieloos de grootte van het afstromend debiet uitgezet als functie van  $r$ .

Uit de figuur blijkt dat het debiet toeneemt tot een bepaalde maximale waarde bij  $\frac{kr}{H} \approx 0,40$  en vervolgens afneemt voor nog grotere waarden van  $r$ .

We kunnen hieruit dus konkluderen dat op een bepaalde afstand van de belenzuil de afstroming als het ware geleidelijk aan omkeert.

Deze omkering is bij eerdere onderzoeken (zie bijv. v.d. Straaten (5))

duidelijk aangetoond, met dit verschil dat daar de omkering veel minder geleidelijk plaatsvond als op grond van deze theorie zou worden verwacht.

In par. 3.3.c wordt hier nader op ingegaan.





iii. entrainment.

De mate van entrainment (meesleuring) wordt veelal uitgedrukt in de vorm van een zgn. entrainmentcoëfficiënt. Deze is per definitie gelijk aan de verhouding van de verticale snelheid op de rand van de afstromende laag t.o.v. een karakteristieke snelheid in de afstromende laag, waarvoor we in dit geval de gemiddelde afstroomsnelheid zullen nemen.

De entrainmentcoëfficiënt is dan gelijk aan,

$$\alpha = \frac{-u_z(z_0)}{u_v(\text{gemiddelt})} = \frac{-u_z(z_0)}{Q_{af}/2\pi r z_0} \quad (3.7)$$

Met behulp van de vgl. (3.4), (3.5) en (3.6) kan  $\alpha$  worden berekend.

Het resultaat is dimensieloos uitgezet in figuur 14.

Uit de figuur blijkt dat de entrainment afneemt tot de waarde nul bij  $\frac{k \cdot r}{H} \approx 0,40$ . Bij grotere waarden van  $r$  neemt de afstromende laag geen water meer op, maar staat de laag zelfs water af aan de terugstromende onderlaag. De entrainment is dan dus negatief, hetgeen tevens betekent dat de verticale snelheid ter plaatse naar beneden gericht moet zijn. Uit figuur 11 blijkt eveneens dat in dit gebied de verticale snelheid op  $z=Z_0$  inderdaad positief (d.w.z. naar beneden gericht) is.

Voor de hand ligt de correlatie met het afstromend debiet, als de entrainment positief is neemt het debiet toe en is de entrainment negatief, dan zal het debiet afnemen. Vergelijk hiertoe de figuren 13 en 14.

Opmerking 1:

Het zal duidelijk zijn dat aan de hand van de in deze paragraaf afgeleide theorie in principe de gehele afstroming kan worden doorgerekend, mits de konstanten  $m$  en  $k$  bekend zijn (zie echter ook opm. 2).

Voor de konstante  $k$  is in par. 2.3.a, middels een vergelijk met metingen aan andere jets, de waarde hiervoor geschat op  $k \approx 0,063 \approx 0,078$

Berekenen we hiermee de plaats, waarvoor geldt dat daar de afstroming omkeert, dan vinden we aldus,  $\frac{k \cdot r}{H} \geq 0,40 \Rightarrow \frac{r}{H} \geq 5,265 \Rightarrow r \geq 5H \approx 6,5H$

Deze afstand komt qua orde van grootte aardig overeen met de metingen van v.d. Straaten (5), zodat, oppervlakkig beschouwd, een dergelijke waarde voor  $k$  vrij redelijk lijkt.

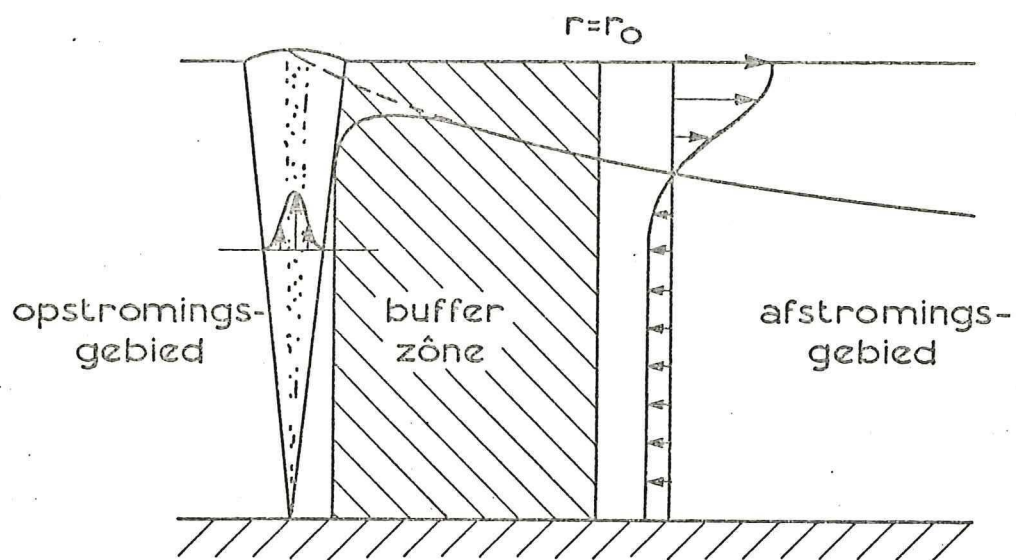


fig. 15 Bufferzône bij de koppeling van opstroming en afstroming.

De konstante  $m$ , die bepalend is voor de grootte van de snelheden in de afstromende laag, zal afhangen van de door de bellenzuil geleverde impulsstroom. In de volgende paragraaf zal dit verder ter sprake komen.

Opmerking 2:

Berekenen we de grootheden als horizontale snelheid en verticale snelheid voor kleine waarden van  $r$ , dan blijkt dat deze oneindig groot kunnen worden. Aangezien dit in een fysisch model onmogelijk is, moet worden gesteld dat de theorie slechts vanaf een bepaalde afstand van de zuil geldig zal kunnen zijn.

Tevens zal blijken dat de theorie niet geldig kan zijn voor grote waarden van  $r$ .

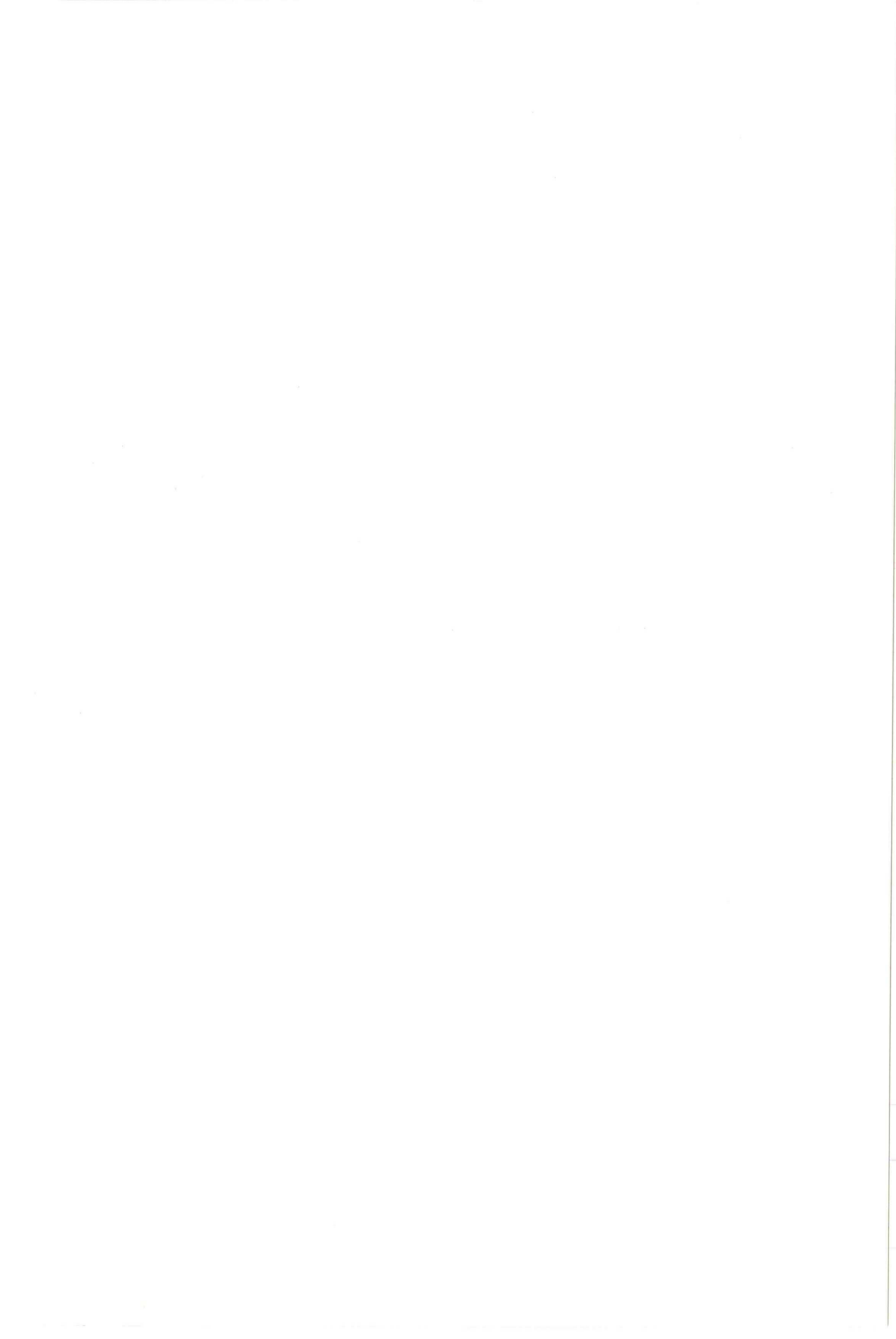
### 3.2. Koppeling van de afstroomtheorie aan de opstrooming in de bellenzuil.

In de inleiding is reeds opgemerkt dat het mechanisme van de opstrooming in de bellenzuil betrekkelijk los te zien is van het mechanisme van de afstromende laag. De mate waarin afstroming plaatsvindt zal echter worden bepaald door de mate van opstrooming. Op de één of andere manier zal de opstrooming in de bellenzuil dus een soort randvoorwaarde geven voor de afstromende laag.

Stellen we voor de eenvoud dat de opstrooming volledig onafhankelijk is van de afstroming, dan kunnen we op grond van voorgaand onderzoek grootheden berekenen als het opstromend debiet, alsmede de door de opstrooming geleverde impulsstroom.

Principieel wordt dus verondersteld dat er geen interactie is tussen de bellenzuil zelf en de afstromende laag. We kunnen dit voorstellen als het invoeren van een soort bufferzone tussen de eigenlijke bellenzuil en het gebied van afstroming (zie figuur 15).

Door Bembaron (2) zijn de onderstaande betrekkingen afgeleid met betrekking tot de opstrooming (de vgl. zijn betrokken op een afstand  $h$  boven



het uitstroompunt),

$$w = w_m e^{-\left(\frac{r}{b_0}\right)^2} \quad (3.7)$$

$$b_0 = 0,14 h^{0,85} \quad (3.8)$$

$$w_m = 5,3 Q_{lucht}^{1/3} h^{-0,25} \quad (3.9)$$

w is de opstroomsnelheid,  $w_m$  is de maximale opstroomsnelheid en  $b_0$  is een karakteristieke breedtemaat.

Aangezien de impulsoverdracht van de opstijgende bellen aan het water tot dichtbij het wateroppervlak plaatsvindt, zal voor het berekenen van de totale impulsstroom voor h de waterdiepte H worden genomen.

We berekenen op de wijze voor de opstromende impuls per tijdseenheid,

$$\begin{aligned} \Phi^{(op)} &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} w^2 r d\varphi dr = 2\pi w_m^2 \rho \int_0^{\infty} r e^{-2\left(\frac{r}{b_0}\right)^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \pi w_m b_0^2 \rho \\ \Rightarrow \Phi^{(op)} &= 0,86 H^{1,20} Q_{lucht}^{2/3} \rho \quad (3.10) \end{aligned}$$

Tevens kan met de vgl. (3.7), (3.8) en (3.9) het opstromend debiet van de bellenzuil worden berekend,

$$\begin{aligned} Q^{(op)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} w r d\varphi dr = \pi w_m b_0^2 \\ \Rightarrow Q^{(op)} &= 0,34 Q_{lucht}^{1/3} H^{1,45} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Uit de vorige paragraaf is gebleken dat het debiet van de afstromende laag afhangt van de plaats tot de bellenzuil. Op grond hiervan is het dus niet mogelijk de sterkte van de stroming in de laag te berekenen d.m.v. het gelijkstellen van het opstromend debiet aan het afstromende debiet. Behalve de onbekende constante m is dan namelijk ook de plaats van koppeling onbekend.



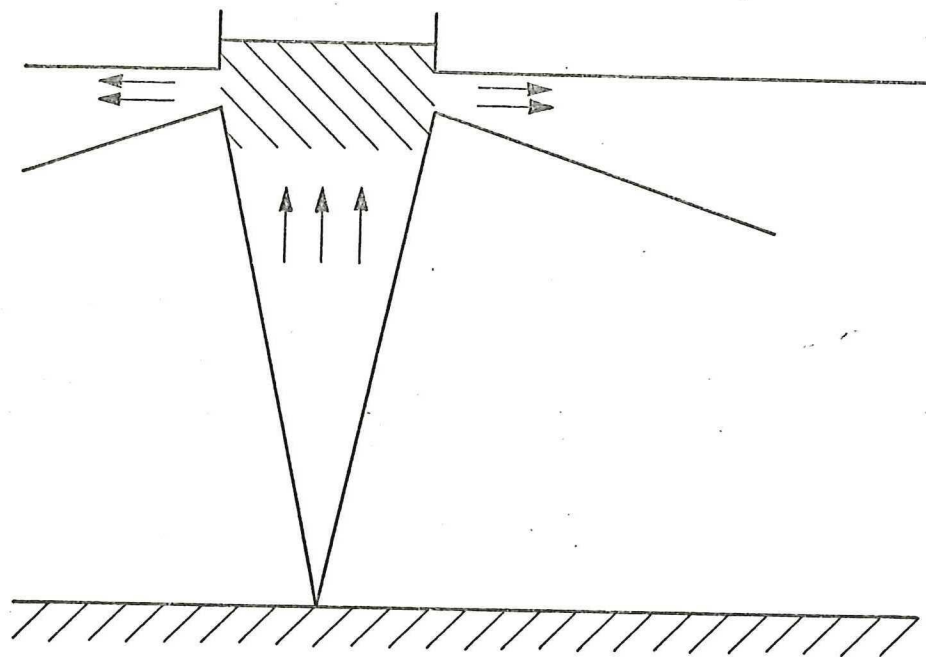


fig. 16 Gebied van drukverhoging tengevolge van de opstroming.

Aangezien voor de afstromende laag, in een oneindig medium althans, behoud van impuls geldt, ligt het dus veel meer voor de hand om deze grootte te gebruiken voor de koppeling. In figuur 16 is in beeld gebracht hoe het tot stand komen van de afstroming kan worden voorgesteld. De opstroming veroorzaakt dicht bij het oppervlak een drukverhoging, met als gevolg dat het water horizontaal afstroomt. De afstroming ontstaat volgens deze gedachtengang alsgevolg van een drukgradient, terwijl buiten de bufferzone wordt aangenomen dat het drukverschil volledig is omgezet in impuls. Indien verliezen worden verwaarloosd, zijn bij een dergelijk mechanisme de beide impulsstromen aan elkaar gelijk.

De impulsstroom van de afstroming is gelijk aan,

$$\Phi^{(a)} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^H u_r^2 r d\varphi dz = \rho 2\pi r u_r \int_0^H \left( \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{\ell}\right) - \frac{\ell}{H} \operatorname{tanh}\left(\frac{H}{\ell}\right) \right)^2 dz$$

Het uitwerken van deze integraal geeft,

$$\Phi^{(a)} = \rho \frac{4}{3} \pi r u_r^2 \ell \left\{ 1 - \frac{\ell}{H} \operatorname{tanh}\left(\frac{H}{\ell}\right) \right\} \operatorname{tanh}\left(\frac{H}{\ell}\right) \quad (3.12)$$

Opmerkelijk hierbij is dat de impulsinhoud van de afstromende laag niet meer constant is, maar enigszins afneemt met de afstand tot de zuil. Deze afname is dichtbij de zuil echter vrij gering, zodat voor deze vergelijking kan worden benaderd door een constante impulsstroom, gelijk aan die van de radiale jet in een oneindig medium,

$$\Phi^{(a)} \approx \rho \frac{4}{3} \pi r u_r^2 \ell \quad (3.13)$$

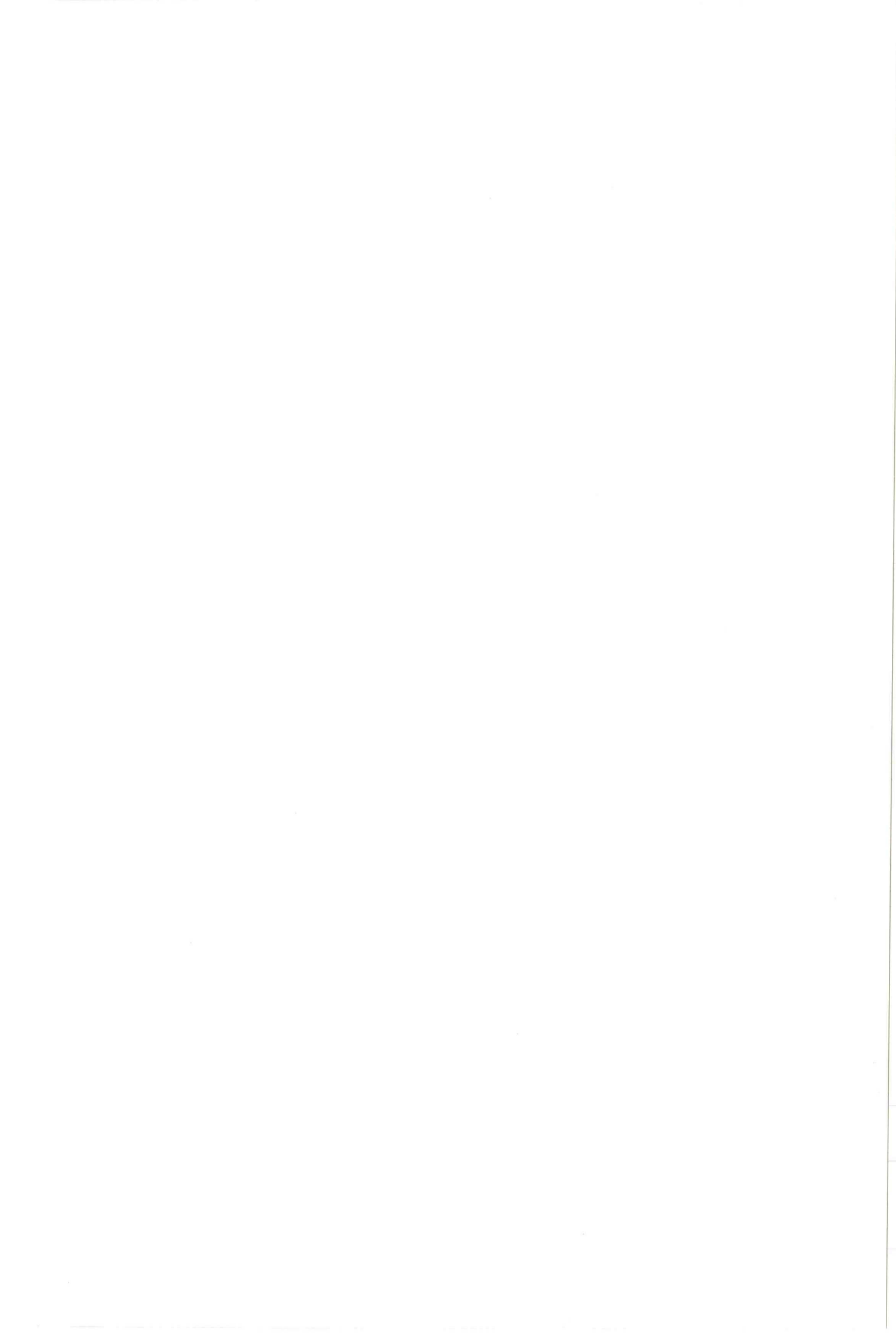
Stellen we vervolgens  $\Phi^{(a)} = \Phi^{(e)}$  (vgl. (3.10)) dan volgt hieruit,

$$\rho \frac{4}{3} \pi r u_r^2 \ell = 0,86 H^{1,20} Q_{\text{sluicht}}^{2/3} \rho$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{k} = 0,21 H^{1,20} Q_{\text{sluicht}}^{2/3}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{H \sqrt{k}} = 0,45 H^{-0,40} Q_{\text{sluicht}}^{1/3} \quad (3.14)$$

De term  $\frac{m}{H}$  heeft de dimensie van snelheid en is bepalend voor de grootte van de snelheden in de afstromende laag.



Teneinde de plaats van koppeling te vinden uit het gelijkstellen van de beide debieten, moet eerst de vergelijking voor het afstromend debiet sterk worden vereenvoudigd. Het eenvoudigste is om dit grafisch te doen met behulp van figuur 13. We vinden dan voor  $\frac{l}{H} \leq 0,05$ ,

$$Q_{af} = 0,78 \frac{2\pi m H}{k} \frac{l}{H} = 4,9 m r_0 \quad (3.15)$$

Stellen we dat de bufferzône wordt begrensd door  $r=r_0$ , dan volgt uit het gelijkstellen van de vgl. (3.11) en (3.12) dat voor deze plaats geldt,

$$4,9 m r_0 = 0,34 Q_{lucht}^{1/3} H^{4/5}$$

$$\Rightarrow \frac{k r_0}{H} = 0,069 \left( \frac{m \cdot l}{H \sqrt{k}} \right)^{-1} Q_{lucht}^{1/3} H^{-0,55} \sqrt{k}$$

Substitutie van vgl. (3.14) geeft,

$$\frac{k r_0}{H} = 0,15 H^{-0,15} \sqrt{k} \quad (3.16)$$

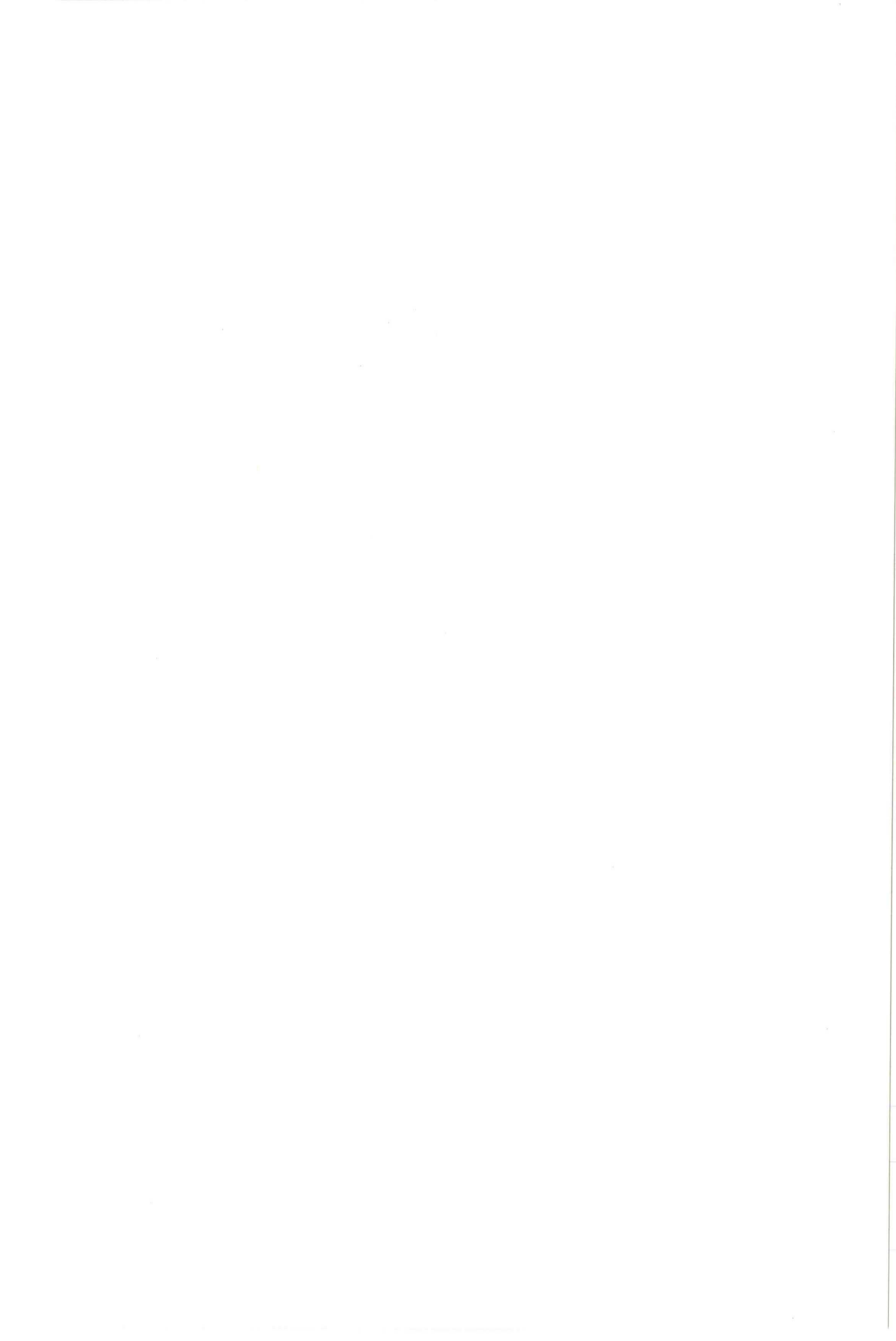
De begrenzing van de bufferzône cq. koppelingsplaats is dus onafhankelijk van het luchtdebiet.

In onderstaand tabelletje zijn een aantal waarden voor  $\frac{k r_0}{H}$  berekend met  $k=0,078$ ,

$H(m)$	$\frac{k r_0}{H}$
0,30	0,048
1	0,040
2	0,036
15	0,026
25	0,024

Uit het bovenstaande kunnen we konkluderen dat de theorie voor de afstromende laag alleen geldig kan zijn voor die waarden van  $\frac{k r_0}{H}$ , die groter zijn dan de waarde op de rand van de bufferzône. Voor kleinere waarden is namelijk het theoretisch afstromende debiet kleiner dan het debiet van de opstroming, zodat de afstroomtheorie voor dit gebied niet kan worden toegepast.

Het is overigens mogelijk dat vanwege het instellen van de stroming de bufferzône groter moet worden gekozen.



Opmerking:

Met de in deze paragraaf afgeleide relatie voor de konstante  $m$  is het mogelijk de grootte van het maximale debiet te berekenen dat onder isotherme omstandigheden wordt verpompt.

Uit figuur 13 blijkt dat voor het maximale debiet geldt,

$$Q_{af}^{(max)} \cdot \frac{k}{2\pi m H} = 0,148$$

zodat,

$$Q_{af}^{(max)} = 0,148 \frac{2\pi m H}{k} = 0,93 \left( \frac{m}{H\sqrt{k}} \right) \frac{H^2}{\sqrt{k}}$$

Substitutie van de vgl.(3.14) geeft,

$$Q_{af}^{(max)} = 0,42 H^{1,6} Q_{slucht}^{1/3} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (3.17)$$

Vergelijken we dit resultaat met het opstromende debiet (vgl.(3.11)), dan is de verhouding van deze debieten gelijk aan,

$$\frac{Q_{af}^{(max)}}{Q_{op}} = 1,24 H^{0,15} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (3.18)$$

Voor de Biesbosch Bekkens ( $H=15$  à  $25$  m) is deze verhouding met  $k=0,07$  gelijk aan  $7$  à  $7,7$ .

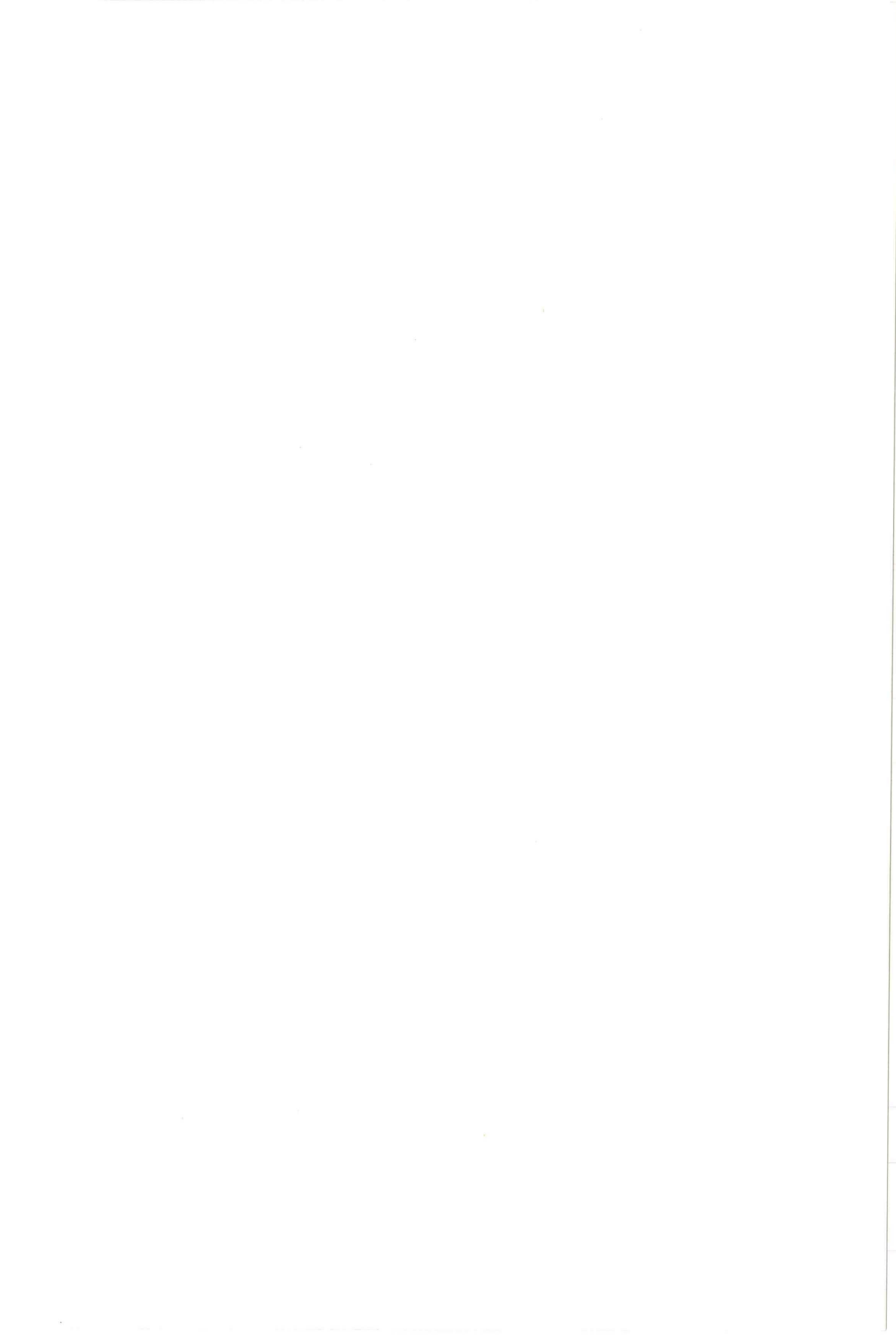
### 3.3. Beschouwingen t.a.v. de geldigheid van de theorie.

#### 3.3.a. Behoud van impuls en het voldoen aan de bewegingsvergelijking.

In de vorige paragraaf is ten behoeve van de koppeling van de afstroming aan de verticale opstroming, de impulsstroom berekend voor de afstromende laag (vgl. 3.12). In tegenstelling tot de radiale jet in het oneindige medium blijkt de grootte hiervan af te nemen met de afstand tot de zuil. Dit niet konstant zijn van de impulsstroom kan 3 oorzaken hebben, te weten,

1. Het wegvallen van een deel van het snelheidsprofiel.
2. Het <sup>w</sup>veraarlozen van de schuifspanningsterm aan de bodem.
3. Invoering van de terugstroming d.m.v. superpositie.





Om na te gaan welke oorzaak in deze van belang is zal eerst het verlies aan impuls worden beschouwd voor de radiale jet, indien de grootte van de impulsstroom wordt bepaald over een diepte H van het snelheidsprofiel. We berekenen hiertoe,

$$\begin{aligned} \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} u_r^2 r d\varphi dz &= \rho 2\pi r u_R^2 \int_0^H \operatorname{sech}^4\left(\frac{z}{l}\right) dz \\ &= \rho \frac{4}{3} \pi r u_R^2 l \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{H}{l}\right) + 1 \right\}}_{= 1,00 \text{ voor } \frac{l}{H} \leq 0,6} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \end{aligned}$$

Aangezien voor het aangegeven gebied van enig wezenlijk verlies geen sprake is, kan worden gesteld dat het weglaten van een deel van het snelheidsprofiel voor het beschouwde gebied ( $\frac{l}{H} \leq 0,6$ ) geen invloed heeft op de grootte van de totale impulsstroom.

Teneinde na te gaan of de schuifspanning aan de bodem mogelijk van invloed is op de impulsafname, is de grootte van deze term vergeleken met de impulsstroom verandering.

In bijlage II is reeds afgeleid dat door substitutie van de continuïteitsvergelijking (2.1) in de bewegingsvergelijking (2.10) deze te schrijven is als,

$$\frac{1}{r} \frac{dr u_r^2}{dr} + \frac{d}{dz} u_r u_z + \frac{d}{dz} \overline{u_r' u_z'} = 0 \quad (3.19)$$

Geïntegreerd geeft dit,

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} r u_r^2 d\varphi dz + 2\pi r u_r u_z \Big|_0^H + 2\pi r \overline{u_r' u_z'} \Big|_0^H = 0$$

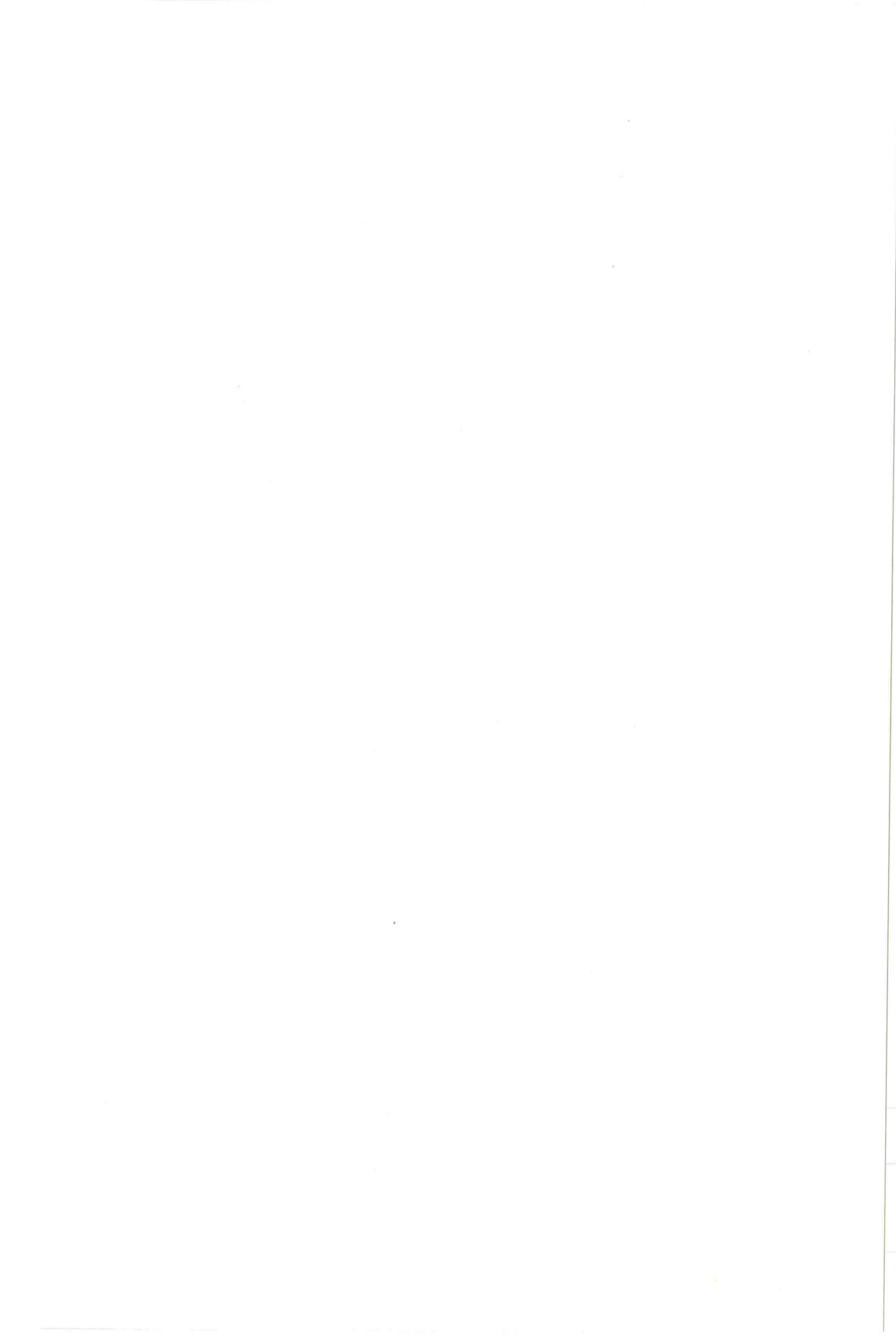
Het invullen van de randvoorwaarden  $u_z=0$  voor  $z=0$  en  $z=H$ , alsmede  $\overline{u_r' u_z'}=0$  voor  $z=0$  levert,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \overline{\Phi^{(2)}} + 2\pi r \overline{u_r' u_z'} \Big|_0^H = 0$$

Substitutie van de vgl. (2.23) geeft,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \overline{\Phi^{(2)}} + 2\pi u_R^2 l \operatorname{sech}^2\left(\frac{H}{l}\right) \tanh\left(\frac{H}{l}\right) = 0 \quad (3.20)$$

Voor  $\frac{l}{H} \leq 0,6$  is de vgl. (3.12) te vereenvoudigen tot,



$$\Phi^{(2)} = \rho \frac{4}{3} \pi r u_R^2 l \left\{ 1 - \frac{l}{H} \right\}$$

differentiatie naar r geeft,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{dr} = -\rho \frac{4}{3} \pi r u_R^2 \frac{l^2}{H} \quad (3.21)$$

Vergelijken we vervolgens de beide termen van de vgl.(3.20), dan blijkt hieruit dat de schuifspanningsterm in het beschouwde gebied ( $\frac{l}{H} \ll 0,6$ ) veel kleiner is dan de afname van de impulsstroom.

Dit houdt tevens in dat de vgl.(3.20) geen juiste vergelijking is, zodat moet worden gekonkludeerd dat de theorie voor de afstroming van de belenzuil geen oplossing is van de bewegingsvergelijking (3.19).

De invoering van de terugstroming d.m.v. superpositie van het oorspronkelijke snelheidsprofiel op een uniforme terugstroming is met betrekking tot de bewegingsvergelijking niet zonder meer toegestaan en heeft tevens tot gevolg dat de impulsstroom niet meer constant is.

Aangezien bijv. bij wind-waterstroming de terugstroming plaatsvindt onder invloed van een drukgradiënt, lijkt het voor de hand liggend om door invoering van een drukterm het impulsverlies te verklaren.

Invoering van de drukterm in vgl. (3.19) geeft,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} u_r u_r^2 + \frac{d}{dz} u_r u_z + \frac{d}{dz} \overline{u_r' u_z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \quad (3.22)$$

Analoog aan het voorgaande is te schrijven,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \Phi^{(2)} = -\frac{1}{\rho} \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{dp}{dz} r d\varphi dz$$

zodat met de vgl.(3.21) en de aanname  $\frac{dp}{dz} = f(z)$  (zie blz. 13) geldt,

$$-\frac{4}{3} \pi u_R^2 \frac{l^2}{H} = -\frac{1}{\rho} 2\pi r H \frac{dp_0}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{dp_0}{dz} = \frac{2}{3} \rho \left( \frac{u_R}{H} \right)^2 \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{2}{3} \rho \left( \frac{u_R}{H} \right)^2 \ln r + C \quad (3.23)$$

C is een integratie konstante die kan worden berekend als de druk op een bepaalde plaats bekend wordt verondersteld.



Het afgeleide drukverloop zorgt er weliswaar<sup>s</sup> voordat de oplossing voldoet aan de geïntegreerde bewegingsvergelijking, maar er blijven afwijkingen in de gewone bewegingsvergelijking (3.22). Deze afwijkingen zijn weliswaar betrekkelijk gering, maar duidelijk dient te worden gesteld dat de in par. 3.1. opgestelde theorie voor de afstromende laag niet is verkregen d.m.v. het oplossen van de bewegingsvergelijking, maar d.m.v. superpositie van de oplossing voor een radiale jet op een uniforme terugstroming.

Het is om deze reden dat de opgestelde theorie voor de wijze van afstroming slechts een benadering kan zijn van de werkelijkheid. Uit experimenten zal moeten blijken in welke mate de theorie hiermee in overeenstemming is.

### 3.3.b. Invloed van de aannamen.

Zowel bij de afleiding van de theorie voor de radiale jet als bij het opstellen van het theoretisch model voor de afstroming van de bellenzuil, zijn diverse aannamen gedaan die nader dienen te worden geverifieerd. In deze paragraaf zal, voor zover mogelijk, worden nagegaan in hoeverre deze aannamen gerechtvaardigd zijn, danwel aan welke voorwaarden de stroming moet voldoen opdat het theoretisch model hierop van toepassing kan zijn.

i. Verificatie van de aanname 2., met betrekking tot geleidelijke uitbreiding, d.w.z.  $l \ll r$

Aangezien  $l = k \cdot r = 0,07 r$  lijkt deze aanname gerechtvaardigd.

ii. Verificatie van de aanname 3., met betrekking tot de verwaarlozing van de viskeuze termen.

$$\frac{1}{Re_l} \frac{u_R}{u_t} \ll \mathcal{O}(1) \quad Re_l = \frac{u_t l}{\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu}{u_t l} \frac{u_R}{u_t} = \frac{\nu}{u_R l} \frac{u_R^2}{u_t^2} = \frac{\nu}{m} \frac{u_R^2}{u_t^2} \ll \mathcal{O}(1)$$

Aangezien de turbulentie-intensiteit veelal in de orde van ca. 10 % is, (zie bijv. v.d. Straaten (5)), zullen we stellen  $\frac{u_t}{u_R} \approx 0,1$

Dit leidt tot de eis:

$$m \gg 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$





iii. Verificatie van de aanname 4., m.b.t. het verwaarlozen van de verticale convectie-termen.

$$\frac{l^2}{L^2} \frac{u_R^2}{u_t^2} \ll \mathcal{O}(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_R^2}{u_t^2} \gg \frac{l^2}{L^2} = (0,07)^2$$

Stellen we dat 'veel groter dan' ( $\ll$ ) betekend '10 keer zo groot dan', dan moeten we eisen,  $\frac{u_R^2}{u_t^2} \geq 10 \cdot 0,005 \Rightarrow \frac{u_R}{u_t} \geq 0,2$

Deze waarde voor de turbulentie-intensiteit is vrij groot zodat hieraan mogelijk niet altijd wordt voldaan. De aanname is echter alleen gebruikt voor de bewegingsvgl. voor de z-ri., waar verder geen gebruik van is gemaakt.

iv. Verificatie van aanname 6. m.b.t. de invloed van het coriolis-effekt.

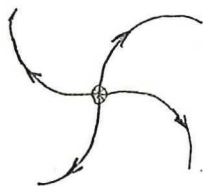
$$\frac{u_R^2}{\Omega^2} \gg \mathcal{O}\left(\frac{1}{4} \nu_0^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{k^2 \nu_0^2} \gg \frac{1}{4} \nu_0^2$$

$$\Omega^4 \ll \frac{m^2}{\frac{1}{4} \nu_0^2 k^2}$$

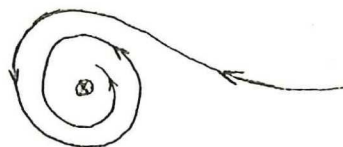
Stellen we ook in dit geval dat ' $\ll$ ' betekend ' $\leq 10 \times$ ' dan moeten we eisen,

$$\Omega^4 \leq 10 \cdot \frac{m^2}{\frac{1}{4} \nu_0^2 k^2} \quad \Rightarrow \quad \Omega \leq 250 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ook de toestroming zal worden beïnvloed door coriolis. Volgens een intern rapport van Kranenburg (12), Laboratorium voor Vloeistofmechanica, is met name de invloed van coriolis in de toestroming aanzienlijk sterker, waardoor vooral dichtbij de zuil de tangentiële snelheden vrij hoog kunnen zijn. Kwalitatief is het horizontale stromingsbeeld als volgt,



afstroming

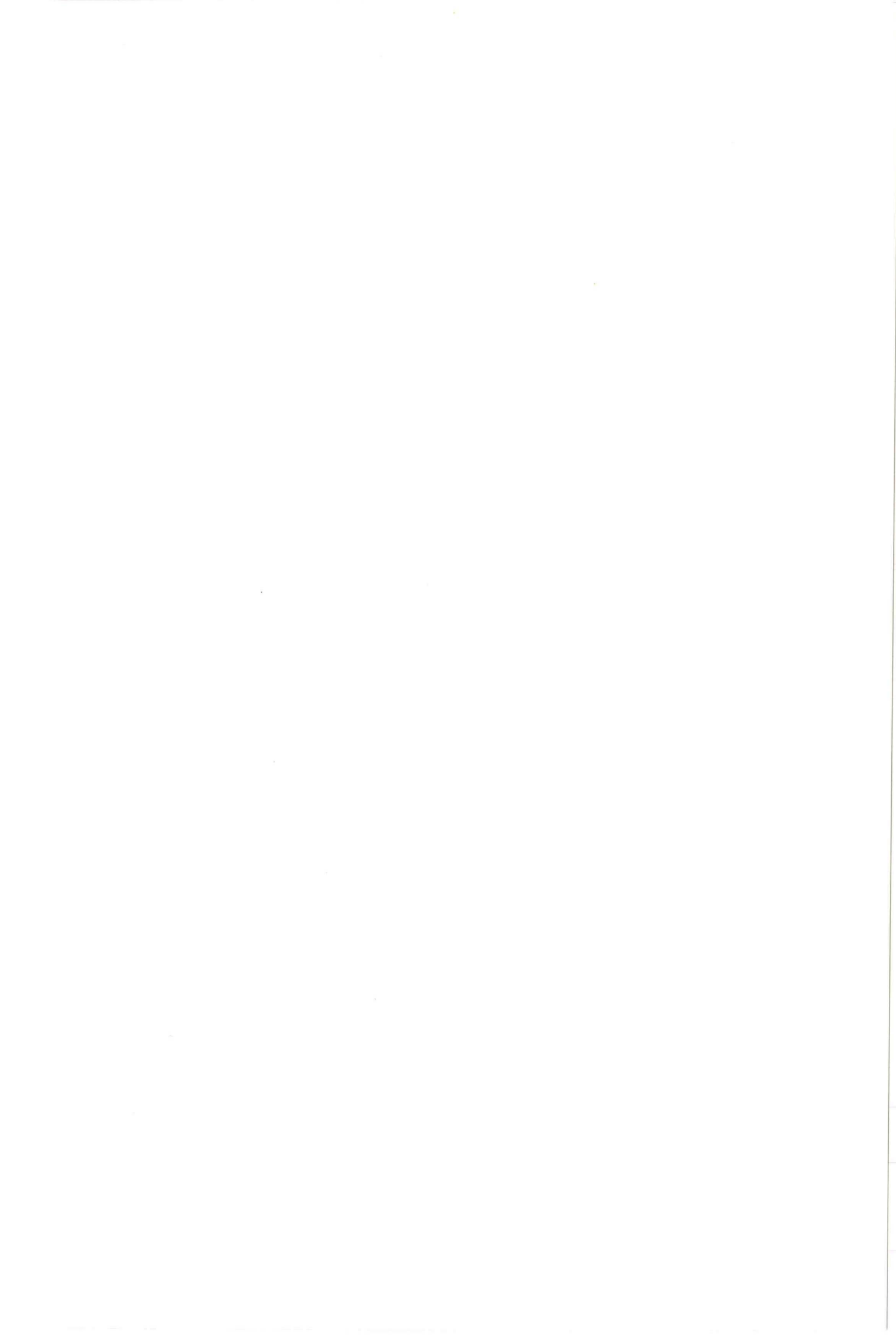


toestroming

De invloed die deze tangentiële snelheden op de radiale afstroming hebben is moeilijk te voorspellen.

v. De schuifspanningsterm aan de bodem.

Als we de schuifspanningsterm ter plaatse van de bodem berekenen met de vgl. (2.23) dan blijkt deze ongelijk nul te zijn, terwijl de grootte van deze term toeneemt met de afstand tot de zuil. Daar eigenlijk



Vanwege de terugstroming deze schuifspanningsterm zelfs tegengesteld moet zijn vanwege wrijving aan de bodem, zullen we moeten eisen dat deze term niet te groot wordt. Nemen we hiervoor de betrekkelijk willekeurige eis dat de grootte van deze term niet groter mag zijn dan van de maximale schuifspanning op deze afstand, dan moeten we eisen,

$$\frac{kR}{H} < 0,42$$

vi. De turbulentie verdeling.

Bij de overgang van de radiale jet in een oneindig medium naar de situatie voor de afstroming in een eindig medium is stilzwijgend aangenomen dat ook in dit geval de turbulente viscositeit konstant is. Door de grootte van de lengteschaal van turbulentie te berekenen en deze te vergelijken met de diepte is nagegaan of deze aanname gerechtvaardigd is. Voor de lengteschaal geldt (zie ook blz. 22),

$$\lambda = \frac{\nu_t}{\bar{v}_e}$$

Stellen we  $\bar{v}_e = u_t$  met  $u_t \approx 0,1 u_R$  dan volgt hieruit,

$$\lambda = \frac{\nu}{0,1 u_R} = \frac{l}{0,1} \frac{\nu_t}{u_R l} = \frac{l}{0,1 Re l} \approx \frac{l}{2,57}$$

Stellen we dat moet gelden  $\lambda < \frac{1}{4} H$  dan volgt hieruit de eis,

$$\frac{kR}{H} < 0,64$$

Deze eis voldoet aan de gestelde eis in punt v..

3.3.c. Bepaling van de reikwijdte.

Uit laboratorium experimenten van v.d. Straaten (5) en uit waarnemingen aan de bellenzuilen in de Biesbosch Bekkens is gebleken dat de reikwijdte van de bellenzuil wordt beperkt tot ca. 5 à 7 keer de diepte. Op deze plaats neemt de oppervlakte snelheid plotseling af tot orde nul terwijl ook de snelheden op grotere diepten nihil zijn.

Abramovich (10) vindt dat ook een 2-dimensionale jet in een eindig medium op een bepaalde afstand plotseling omkeert, waarbij hij konkludeert dat dit gebeurt als de dikte van de afstromende laag gelijk is aan de helft van de diepte. De konklusie berust op het feit dat op de plaats waar

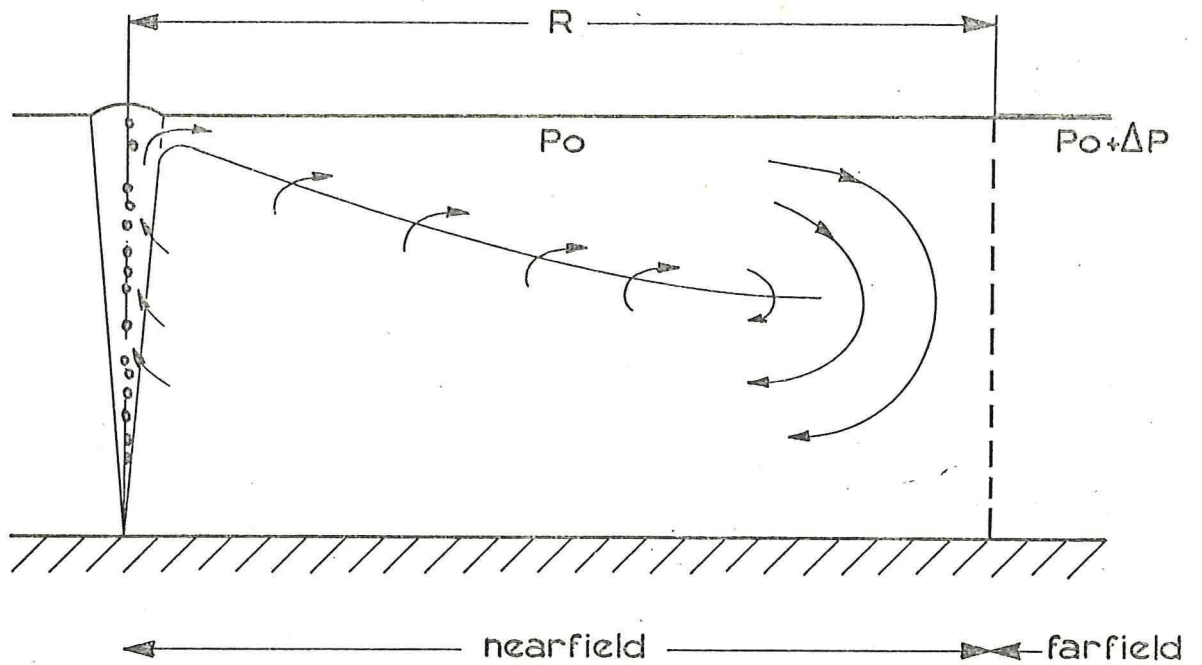


fig. 17 Volledige omkering ter plaatse van de reikwijdte.

afstromende debiet maximaal is min of meer correspondeert met de plaats waar de dikte van de afstromende laag de waarde  $0,5 H$  bereikt. Met behulp van een theorie voor potentiaal stroming heeft hij vervolgens de omkering doorgerekend. Het feit echter dat de plaats van volledige omkering wordt bepaald door de plaats waar de dikte van de afstromende laag  $0,5 H$  is, geldt mijnsinziens niet algemeen, maar is een toevalligheid die behoort bij het door hem gebruikte snelheidsprofiel.

Getracht is daarom een meer algemenere beschouwing op te stellen, waarmee inzicht kan worden verkregen in waardoor en op welke plaats de stroming volledig omkeert.

Als oorzaak van de volledige omkering (dus niet de geleidelijke omkering op grond van de afstroomtheorie) is gedacht aan de turbulentie, die van nature, bijv. tengevolge van wind, in het bekken aanwezig is, doch dit geeft geen verklaring voor de omkering in het laboratoriummodel.

Een andere mogelijkheid lijkt de vervuiling aan het oppervlak. Een dergelijke laag wil zich vanwege de geringere oppervlakte-spanning uitbreiden over het gehele water-oppervlak (evenals bijv. een olielaag). Door de afstroming wordt deze laag als het ware weggeduwd tot een bepaalde afstand die dan de reikwijdte bepaald.

Een andere oorzaak is mogelijk een zeer lichte vorm van stratifikatie, waardoor de afstromende laag op een bepaalde plaats onder het 'epilimnion' duikt.

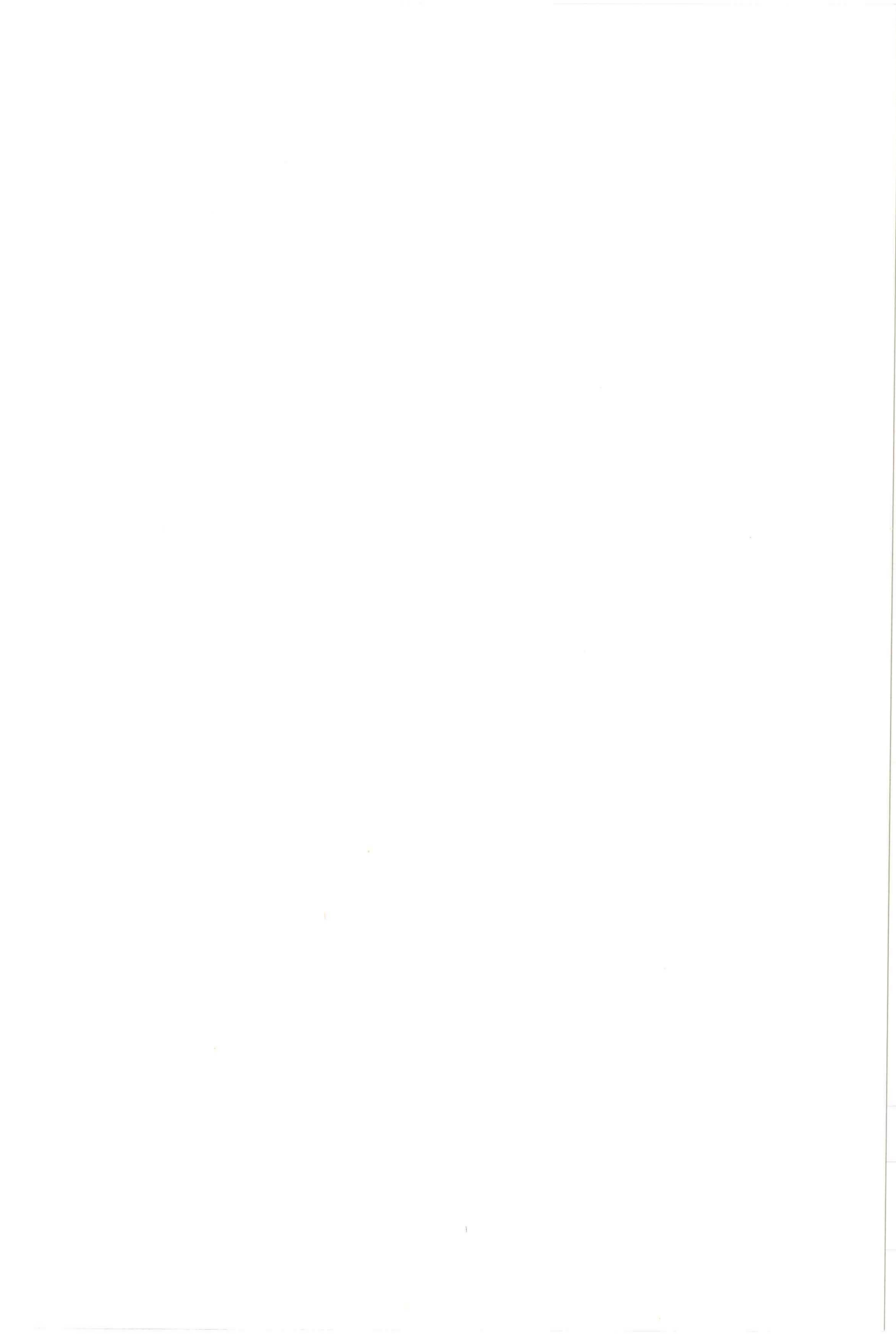
Mede inverband met een mogelijke aansluiting op een gestratificeerd model is eenzelfde berekening toegepast als waarmee bijv. de plaats van zoutwigen en zoete tongen kan worden bepaald (zie Collegediktaat Dichtheidsstromen en Interne Golven (13)). Hierbij wordt een geïntegreerde impulsbalans opgesteld voor een punt links en rechts van de plaats van reikwijdte ( $r=R$ ). In fig.17 is het stromingsbeeld getekend. Aangenomen wordt dat de snelheden in het 'farfield' nihil zijn.

Voor deze situatie luidt de impulsbalans,

$$\rho \int_0^H \int_0^{2\pi} u_r^2 r d\varphi dz + \frac{1}{2} \rho g H^2 2\pi r = 0 + \left( \frac{1}{2} \rho g H + \Delta p \right) H 2\pi r$$

$$\Rightarrow \int_0^H (2\pi) = \rho \frac{4}{3} \pi r^2 u_r^2 L \left\{ 1 - \frac{1}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) = \Delta p H 2\pi r \quad (3.24)$$





$\Delta p$  is een verhoging van de druk in het farfield, waarvoor middels toepassing van Bernouilli langs het oppervlak te berekenen is.

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{p_0 + \Delta p}{\rho} + 0$$

$U_0$  is hierbij de oppervlakte snelheid die kan worden bepaald uit vgl.(3.3), zodat,

$$\Delta p = \rho \frac{u_0^2}{2} = \frac{1}{2} \rho U_R^2 \left\{ 1 - \frac{\ell}{H} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) \right\}^2 \quad (3.25)$$

Substitutie van de vgl.(3.25) in (3.24) geeft.

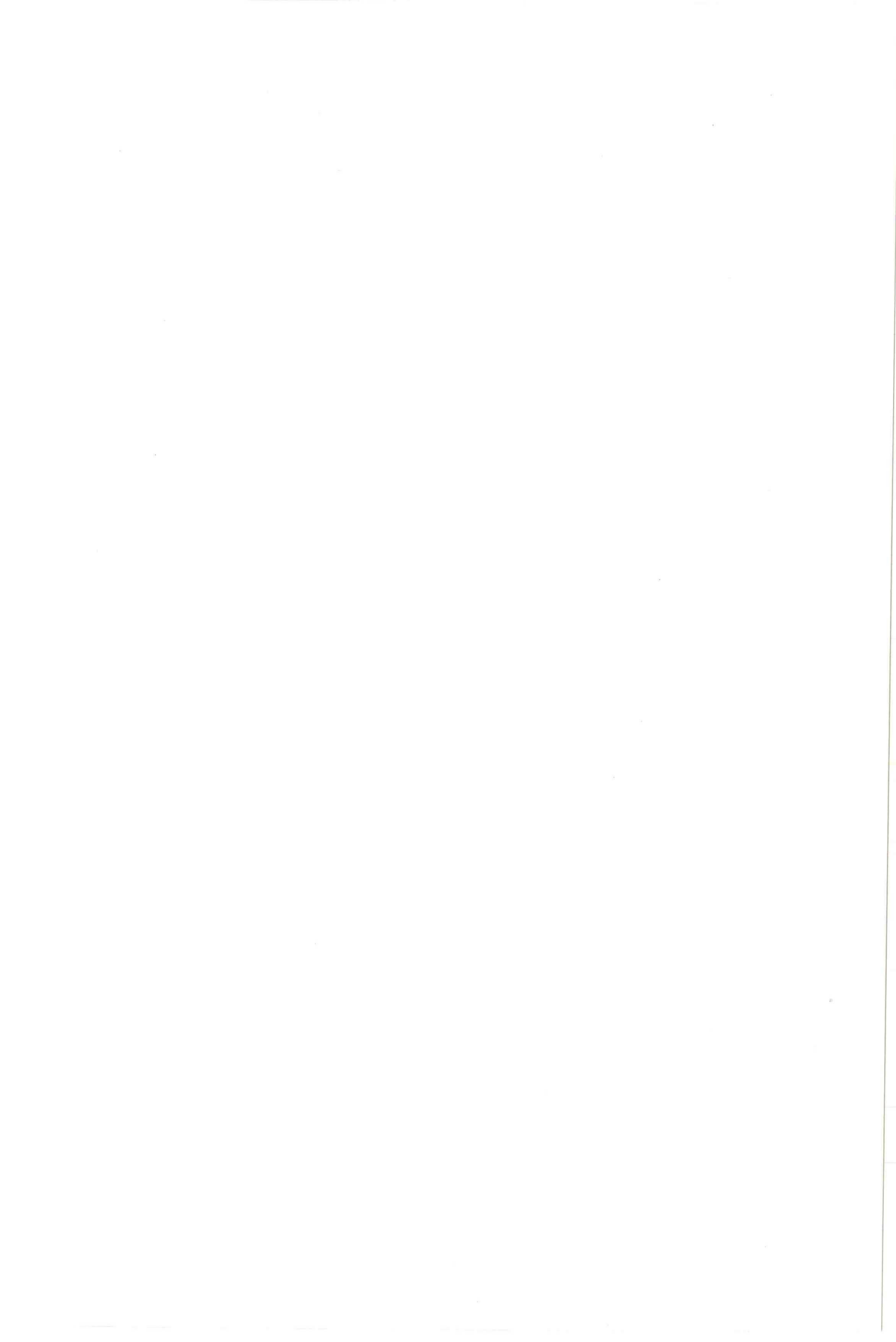
$$\frac{2}{3} \ell \left\{ 1 - \frac{\ell}{H} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) \right\} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\ell}{H} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) \right\}^2 H$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{H} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) = \frac{16}{4} \quad \text{of} \quad \frac{\ell}{H} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) = 1.$$

Aangezien de berekening betrokken is op  $r=R$  geven de beide oplossingen resp. als resultaat,

$$\frac{kR}{H} = 0,43 \quad \text{of} \quad \frac{kR}{H} = \infty$$

Met de veronderstelling dat  $k = 0,063$  à  $0,078$  (zie blz. 21) volgt hieruit  $R = 5$  à  $7 H$ . Dit resultaat is dus in overeenstemming met de waarnemingen. Op grond van dit resultaat is derhalve te verwachten dat de stroming tussen  $\frac{kR}{H} = 0,40$  en  $\frac{kR}{H} = 0,43$  omkeert. Tevens blijkt hieruit dat aan punt v. van de vorige paragraaf juist is voldaan.



#### 4. MODEL VOOR DE WERKING VAN DE BELLENZUIL ONDER GESTRATIFICEERDE OMSTANDIGHEDEN

In de literatuur is erg weinig bekend over de werking van bellenzuilen of bellenschermen onder gestratificeerde omstandigheden. Vandaar dat eerst een kwalitatief model is opgesteld aan de hand van voorgaand onderzoek (Groot en v.d. Heyden (6), Römgers (14)) en huidige ideeën binnen de subgroep 'menging' van de LWBB. Tevens zijn enkele kwalitatieve experimenten verricht in een laboratoriummodel (diameter ca. 1 m, diepte ca. 15 cm), die eveneens hebben bijgedragen tot een kwalitatieve beschrijving van de werking van de bellenzuil in een gelaagde omgeving. Naar aanleiding van het kwalitatieve model is vervolgens een mathematisch model opgesteld, waarmee mogelijk de grootte van de menging kan worden berekend die direct door de werking van de bellenzuil tot stand wordt gebracht. Een eventuele extra menging tengevolge van stromingen in het farfield wordt hierbij buiten beschouwing gelaten.

##### 4.1. Kwalitatief model.

Indien de bellenzuil werkt in een gestratificeerde omgeving, dan wordt water met een grotere dichtheid uit het epilimnion omhoog gebracht. Dit zwaardere water stroomt af en zal op zijn weg het lichtere epilimnion-water ontmoeten. Het gevolg is dat de afstroming als het ware onder het epilimnion duikt. Door menging met epilimnion-water zal de grootte van de dichtheid van de menglaag liggen tussen die van het epilimnion-water en die van het hypolimnion-water. Vandaar dat het afstromende water na vermenging met epilimnion-water zich tussen het epilimnion en het hypolimnion indringt. Aangezien de turbulentie op de begrenzing van de lagen wordt onderdrukt vanwege het dichtheidsverschil, is een dergelijke situatie meestal stabiel. Door de zeer hoge turbulentie op de plaats waar de afstromende laag als het ware botst met het epilimnion zal in dit gebied een goede menging plaatsvinden.

Alvorens nader in te gaan op het stromingsbeeld van de gestratificeerde

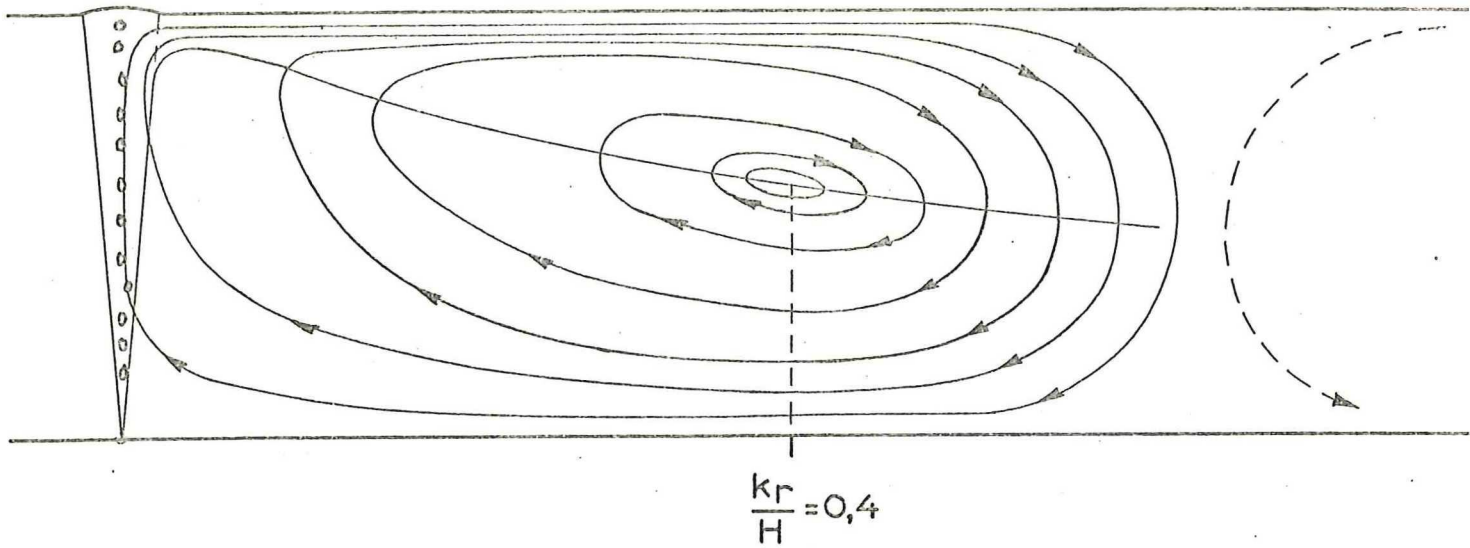


fig. 18 Stromingsbeeld voor de bellenzuil onder isotherme omstandigheden.

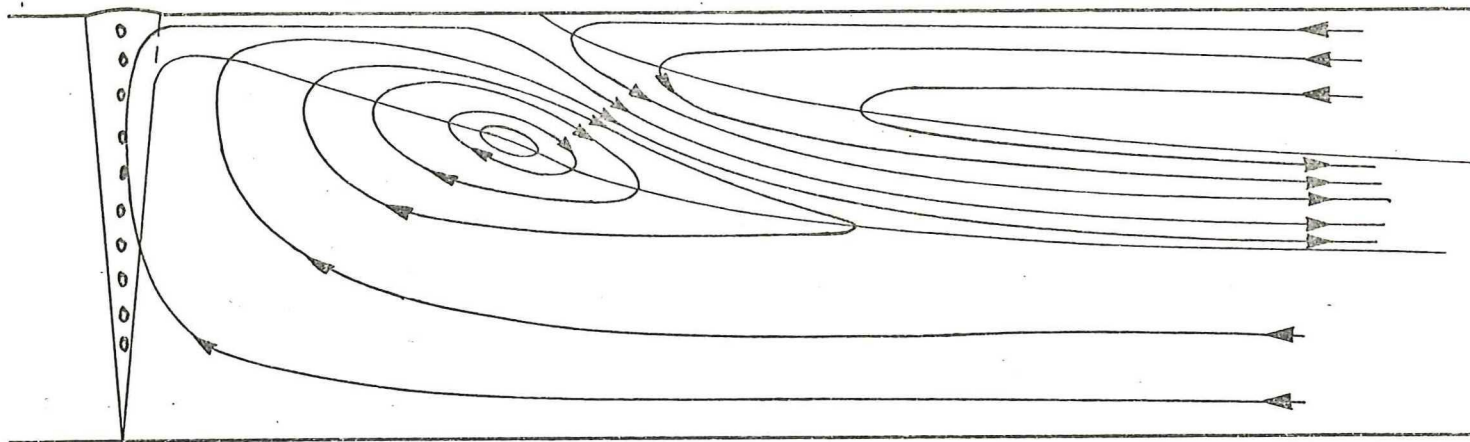


fig. 19 Stromingsbeeld voor de bellenzuil onder gestratificeerde omstandigheden.

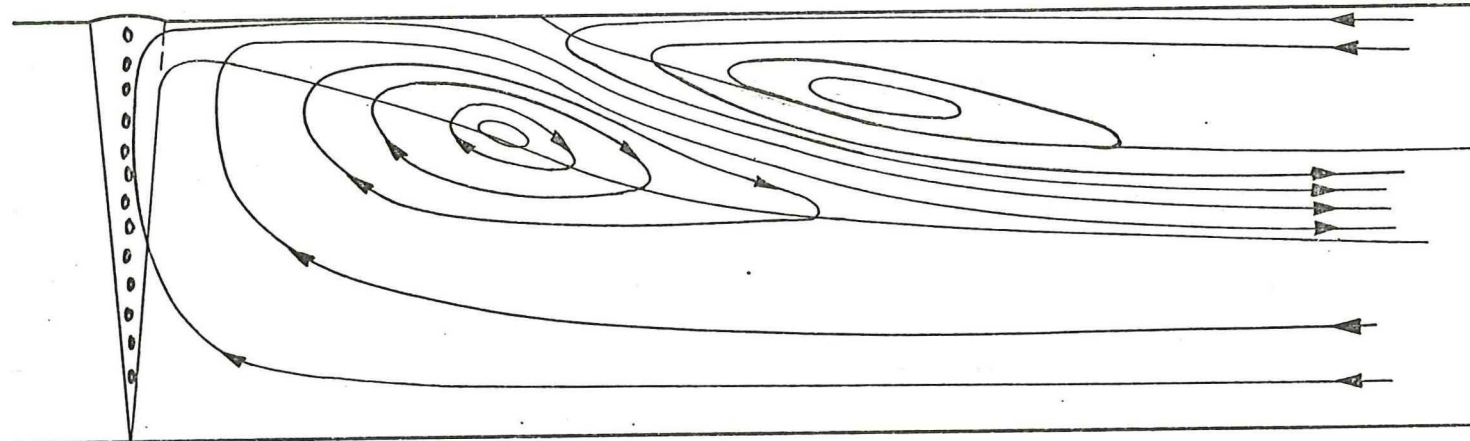


fig. 20 Wervel in het epilimnion.



situatie is eerst het stromingsbeeld getekend voor de bellenzuil onder isotherme omstandigheden (figuur 18). De in de figuur getekende 'stroomlijnen' zijn eigenlijk lijnen waarlangs de gemiddelde stroming plaatsvindt, aangezien bij een turbulente stroming geen sprake kan zijn van 'echte' stroomlijnen.

Zoals uit de figuur blijkt is de gemiddelde stroming, die onder isotherme omstandigheden door de bellenzuil ontstaat, als het ware te beschouwen als één grote schaal wervel, waarvan het wervelcentrum zich bevindt op een afstand van de zuil van ca. 5 à 6 maal de diepte.

Te verwachten is dat onder gestratificeerde omstandigheden het stromingsbeeld dicht bij de zuil nauwelijks zal veranderen. Op de plaats waar de afstroming het epilimnion ontmoet zal het stromingsbeeld echter aanzienlijk verschillen van dat voor de isotherme situatie. Het epilimnion duwt op deze plaats namelijk de afstroming (met zwaar water) als het ware naar beneden, waarbij het door middel van opmenging water afstaat aan de afstromende laag.

Het ligt voor de hand dat de afstromende laag door deze toename van het debiet, alsmede het effect van het naar beneden duwen door het epilimnion, geen water meer op zal kunnen nemen uit het onderliggende gebied van terugstroming en toestroming. Het is waarschijnlijker dat op deze plaats de afstromende laag zelfs water afstaat aan de terugstroming, zodat deze als het ware voortijdig om zal keren. Voor zover er nog sprake zal zijn van een grote schaal wervel, zoals bij de isotherme situatie, zal het wervelcentrum zich dus veel dichterbij de zuil bevinden.

Een globaal stromingsbeeld voor de afstroming onder gestratificeerde omstandigheden zou kunnen zijn zoals is getekend in figuur 19.

De vorm van het epilimnion vertoont veel overeenkomst met die van een zoete tong in zout water. In een dergelijke tong ontstaat tengevolge van wrijvingsverschijnselen veelal een wervel. Het stromingsbeeld met een dergelijke wervel is geschets in figuur 20, waarbij kan worden opgemerkt dat het belangrijkste verschil t.o.v. het vorige stromingsbeeld voornamelijk de grootte van het oppervlak betreft, waardoor het epilimnionwater wordt opgenomen in de afstromende laag.

De grootte van het dichtheidsverschil tussen epilimnion en hypolimnion zal verschillende invloeden hebben op het stromingsbeeld. Zo zal bij een



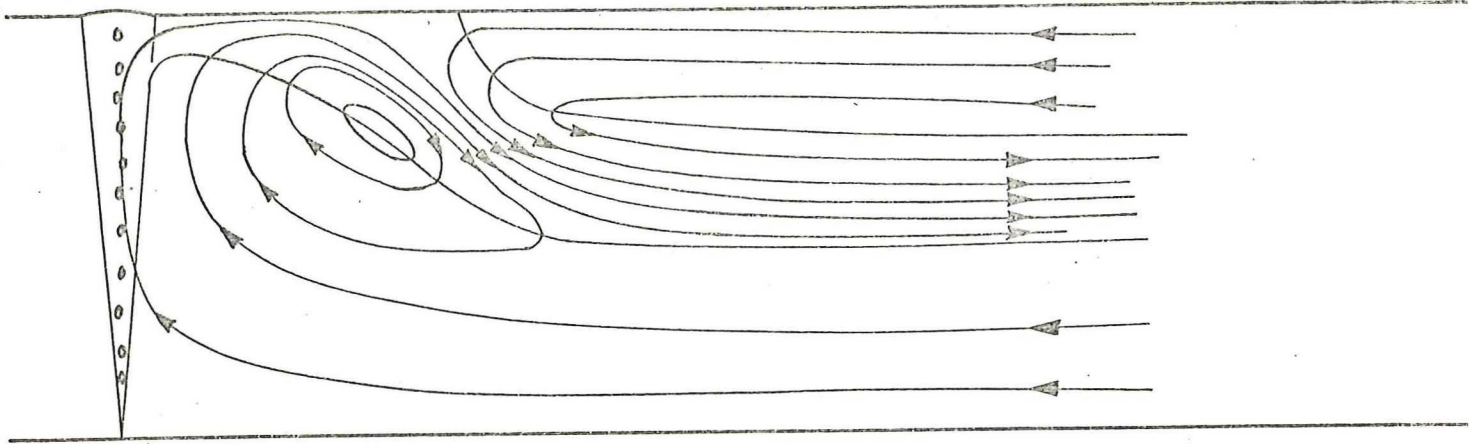


fig. 21 Epilimnion dichtter bij de bellenszuil bij groter dichtheidsverschil.

groter dichtheidsverschil de kracht waarmee het epilimnion zich in de richting van de zuil wil verplaatsen groter zijn alsgevolg van een groter drukverschil. Het zwaardere water van de afstroming zal verder sneller naar beneden zakken. De plaats waar de afstromende laag het epilimnion ontmoet zal in dit geval dus dicht bij de zuil liggen.

Een dergelijk stromingsbeeld is getekend in figuur 21

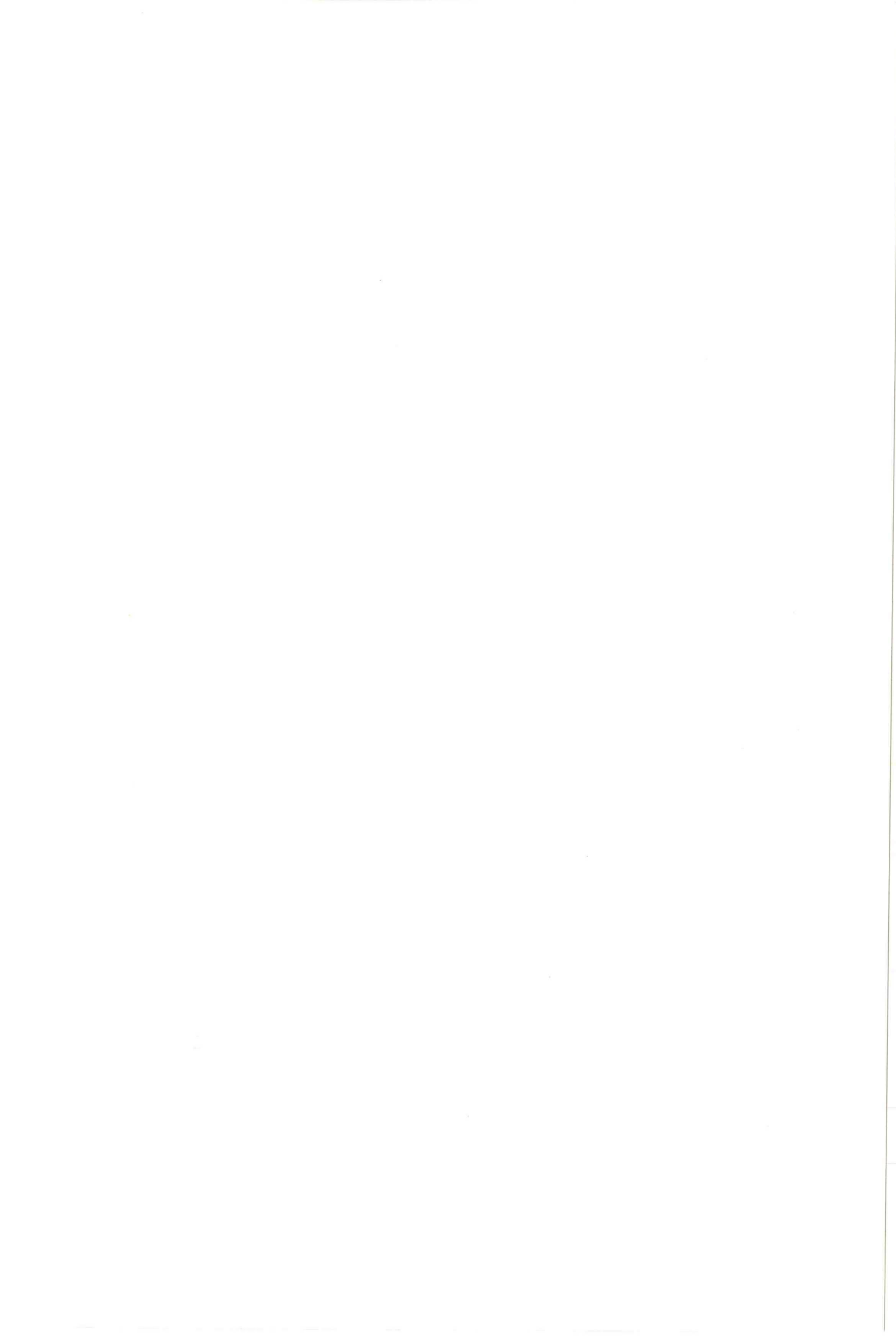
Bij een heel klein dichtheidsverschil zal het epilimnion ver van de zuil komen te liggen. Het gevolg is dat de dikte van de afstromende laag dan groter is en aangezien te verwachten is dat de dikte van de menglaag niet dunner is dan die van de afstromende laag, zal ook de dikte van de menglaag toenemen.

De dikte van de menglaag zal ook toenemen indien deze de rand van het bekken heeft bereikt en zich vervolgens op gaat vullen. In dit onderzoek is dit niet-stationaire verschijnsel buiten beschouwing gelaten.

Een groter lucht-debiet zal tot gevolg hebben dat de snelheden waarmee het afstromende water botst tegen het epilimnion groter zijn, zodat dit als het ware door een grotere stuwdruk en wrijving verder weggeduwd zal worden.

Aangezien te verwachten is dat de hoeveelheid opgenomen epilimnion-water af zal hangen van de grootte van het uitwisselingsoppervlak met de afstromende laag, zal bij een grotere dikte van het epilimnion hieruit dus meer water worden opgemengt. Eenzelfde afhankelijkheid zal de opname van hypolimnion-water vertonen met betrekking tot de dikte van het hypolimnion. Dit heeft tot gevolg dat bij een relatief kleine dikte van het epilimnion, de dichtheid van het water in de menglaag dicht bij die van het hypolimnion-water zal liggen als bij een grotere dikte van deze laag. Aangezien er bij stromende lagen altijd enige menging optreedt en deze menging groter is naar mate het dichtheidsverschil klein is, kan dit tot gevolg hebben dat bij een kleine epilimnion dikte het menglaag water beter mengt met het hypolimnion-water als bij grotere dikten voor het epilimnion. Een dergelijk verschil is waargenomen bij een vergelijk van een tweetal destratificatie proeven in de Biesbosch Bekkens ('75 en '76).

Zoals reeds is opgemerkt, zal een dergelijke indirecte menging in het farfield verder buiten beschouwing worden gelaten (zie opm.). In de volgende paragraaf zullen we ons derhalve beperken tot het opstellen



van een mathematisch model voor de direkte menging die de werking van de bellenzuil tot gevolg heeft, waarbij ook effecten als het opvullen van de menglaag buiten beschouwing worden gelaten.

Opmerking:

Aangezien de indirecte menging in het farfield zeker van belang zal zijn voor de gehele opmenging van een bekken is dit één van de aspecten van het onderzoek zoals dat op het Laboratorium van Vloeistofmechanica (Civiele Techniek, T.H. Delft) wordt verricht met betrekking tot een beschrijving van het farfield. Dit onderzoek tesamen met de onderzoeken op het Lab. v. Fysische Technologie (Techn. Natk., T.H. Delft) op het gebied van bellenzuilen, vormen het belangrijkste deel van het huidige onderzoek-programma van de subgroep 'menging' van de LWBB.

#### 4.2. Mathematisch model voor het nearfield.

Uit de vorige paragraaf zal duidelijk zijn geworden dat het erg moeilijk, zo niet onmogelijk, is een analytisch model op te stellen voor een volledige beschrijving van de stromingen, die tengevolge van de werking van een bellenzuil in een gestratificeerde omgeving ontstaan. Vandaar dat gezocht is naar een grovere beschouwing, waaruit orde van grootte, danwel bepaalde tendensen kunnen worden afgeleid.

Hiertoe is aan de hand van het in de vorige paragraaf veronderstelde kwalitatieve model, een gesimplificeerd stromingsmodel opgesteld dat is weergegeven in figuur 22.

Uit de figuur blijkt dat 5 'mechanismen' bepalend zijn voor de grootte van de verpompte debieten, te weten,

1. entrainment in de bellenzuil zelf ( $\alpha_1$ )
2. entrainment in de afstromende laag ( $\alpha_2$ )
3. opname van water uit het epilimnion ( $\alpha_3$ )
4. terugstroming van gemengd water
5. toestroming van water uit het hypolimnion ( $\alpha_4$ )

De grootte van de debieten die hierdoor aan het stromen worden gebracht kunnen worden uitgedrukt in verschillende coëfficiënten,  $\alpha$ 's, die

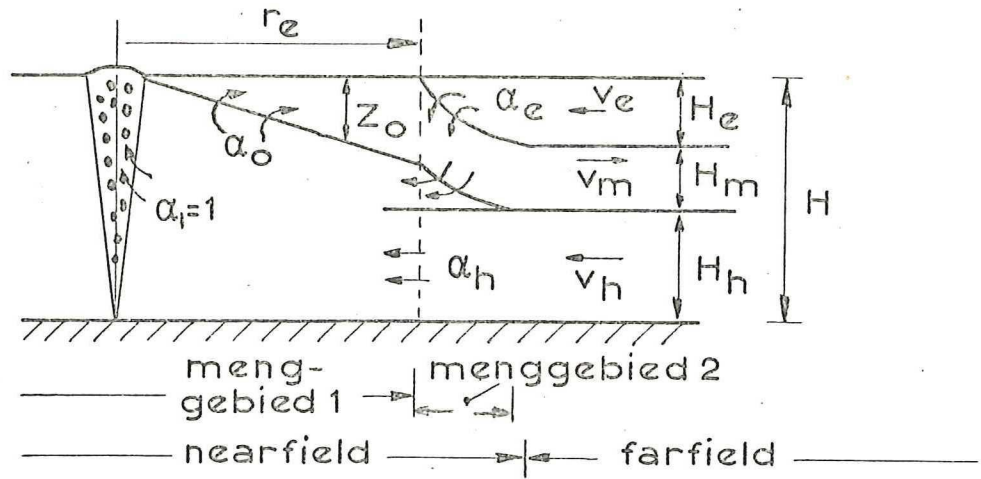


fig. 22 Gesimplificeerd stromingsmodel van het nearfield van de bellenzuil onder gestratificeerde omstandigheden.

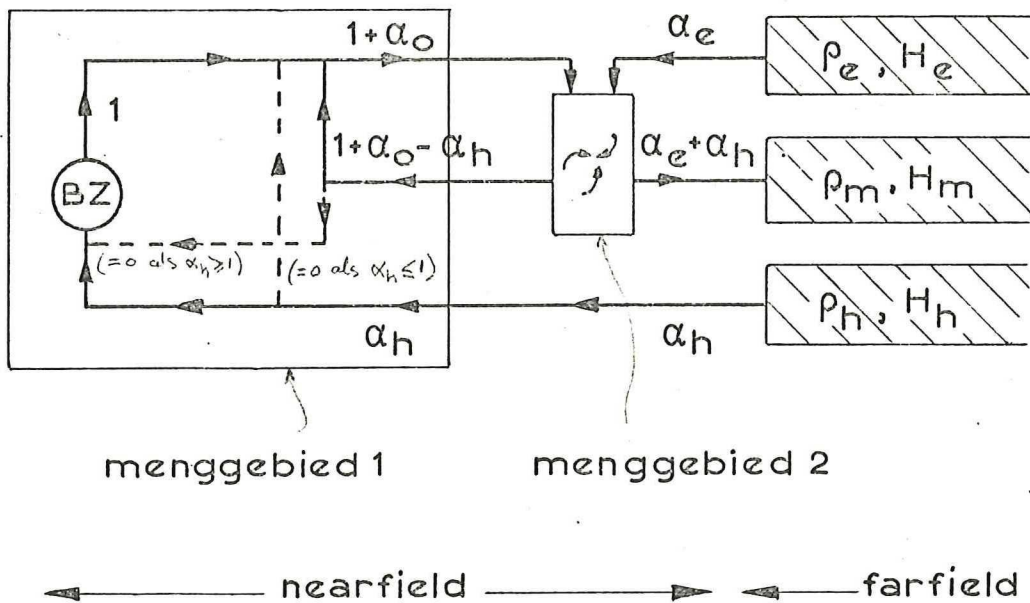


fig. 23 Stroomschema voor de werking van de bellenzuil onder gestratificeerde omstandigheden.



de verhouding aangeven van het betreffende debiet t.o.v. het omhoog gepompte debiet van de bellenzuil (d.w.z.  $\alpha_1 = 1$ ).

In het stroomschema (figuur 23) zijn twee gebieden aangegeven waarvoor de uitgaande stroming als ideaal gemengd wordt beschouwd. Onderscheid wordt gemaakt tussen het zgn. 'menggebied 1', waarin hypolimnion-water wordt gemengd met terugstromend water en het 'menggebied 2', waarin het water van de afstromende laag gemengd wordt met het epilimnion water.

Teneinde een eenvoudige mathematische beschouwing mogelijk te maken, is het eerst noodzakelijk diverse aannamen te doen. De belangrijkste zijn,

1. de werking van de bellenzuil wordt niet beïnvloed door dichtheidsverschillen.
2. de werking van de afstromende laag wordt in het 'menggebied 1' niet beïnvloed door dichtheidsverschillen.
3. geen ophoping van massa en/of volume in het nearfield, d.w.z. de grootte van het nearfield is quasi-stationair.
4. scherpe gelaagdheid in het farfield en begintoestand 2-lagensysteem.
5. geen indirecte menging in het farfield.
6. snelheidsprofielen in het farfield zijn te idealiseren door een uniforme snelheidsverdeling.
7. de dikte van de lagen zijn geen functie van de tijd.
8. geen invloed van coriolis.
9. geen door het farfield opgelegd criterium t.a.v. het mechanisme van het opnemen van water uit het epilimnion en hypolimnion.

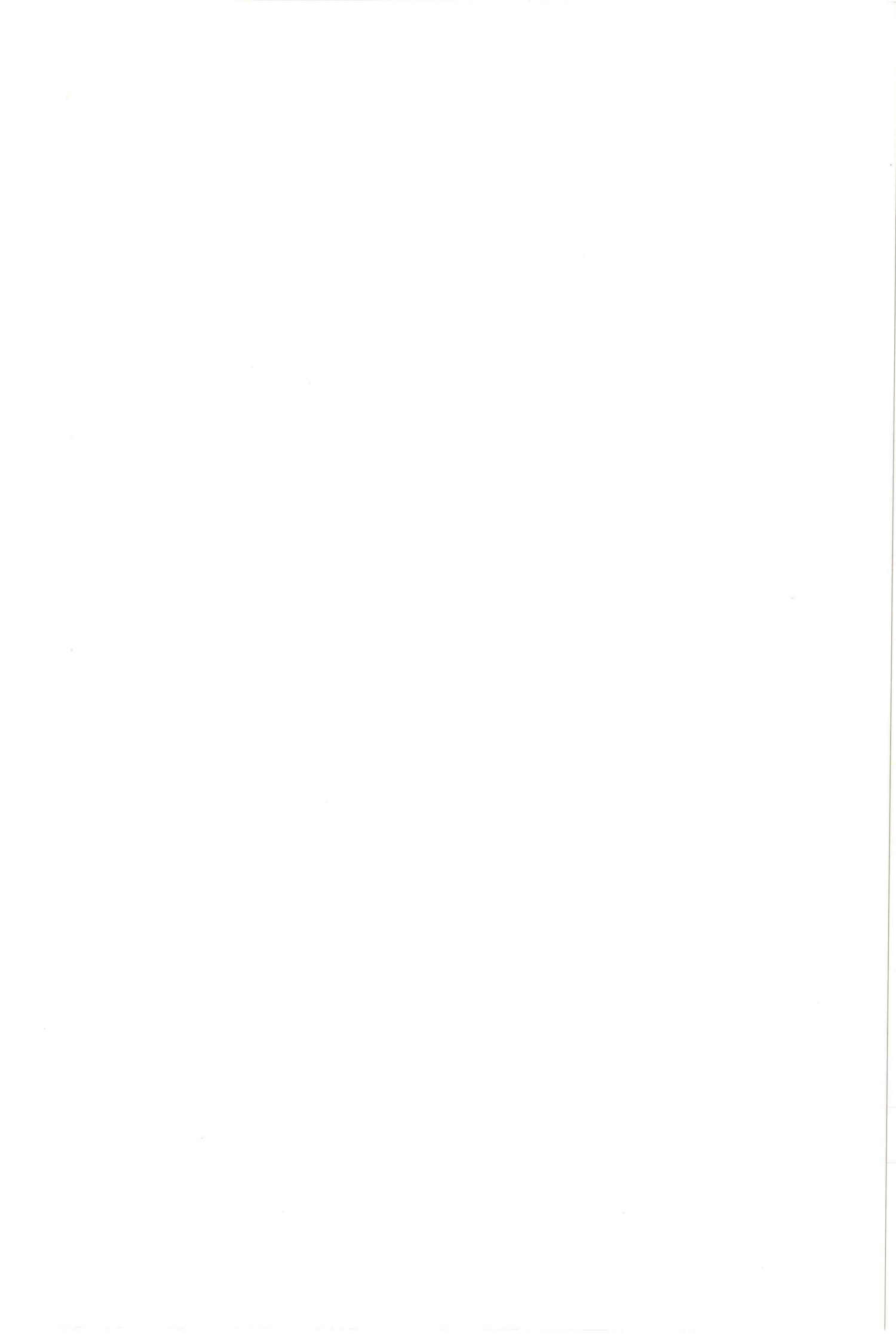
ad. 1 en 2. Dit impliceert dat de werking van de bellenzuil en de afstromende laag, binnen het menggebied 1, kan worden beschreven met het in hoofdstuk 2 opgestelde theoretische model, waarbij de begrenzing van het geldigheidsgebied wordt bepaald door de plaats waar de afstromende laag botst tegen het epilimnion ( $r=r_e$ ).

ad. 3. Deze aanname heeft tot gevolg dat voor het menggebied 1 en 2, zowel een volume balans als een massabalans is op te stellen.

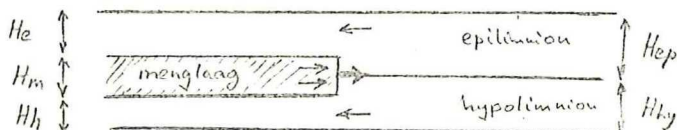
ad. 4. Deze aanname is noodzakelijk opdat er sprake is van een uniforme dichtheid in de afzonderlijke lagen.

ad. 5. In het farfield wordt geen menging verondersteld opdat de dichtheid in epilimnion en hypolimnion konstant kan worden beschouwd.





ad. 7. Voor de berekening van de wijze van afstroming wordt in eerste instantie verondersteld dat de menglaag nog niet de rand van het bekken heeft bereikt, zodat er geen ophoping van volume in deze laag plaatsvindt, maar dat het volume alleen toeneemt als gevolg van uitbreiding. In onderstaande figuur is een dergelijke indringing van de menglaag getekend.



ad. 9. Deze aanname is noodzakelijk opdat de mechanismen die zorgen voor de opname van epilimnion-water en hypolimnion water, tevens bepalen hoeveel water wordt opgenomen. Verondersteld wordt dat de menglaag zich wel aanpast aan een eventueel door het farfield opgelegde voorwaarde, zodat op deze wijze wel indirect het toestromende debiet wordt gekoppeld aan het farfield.

Door het opstellen van een volume balans over het 'menggebied 1' en het 'menggebied 2' of het nearfield, is het mogelijk om de grootte van het terugstromende debiet, alsmede het debiet dat in de menglaag wordt gepompt, uit te drukken in  $\alpha_o$ ,  $\alpha_e$  en  $\alpha_h$  ('overall' entrainmentcoëfficiënten). De gevonden betrekkingen zijn,  $1 + \alpha_o - \alpha_h$  voor het relatieve debiet van de terugstroming en  $\alpha_e + \alpha_h$  voor het relatieve debiet van de menglaag.

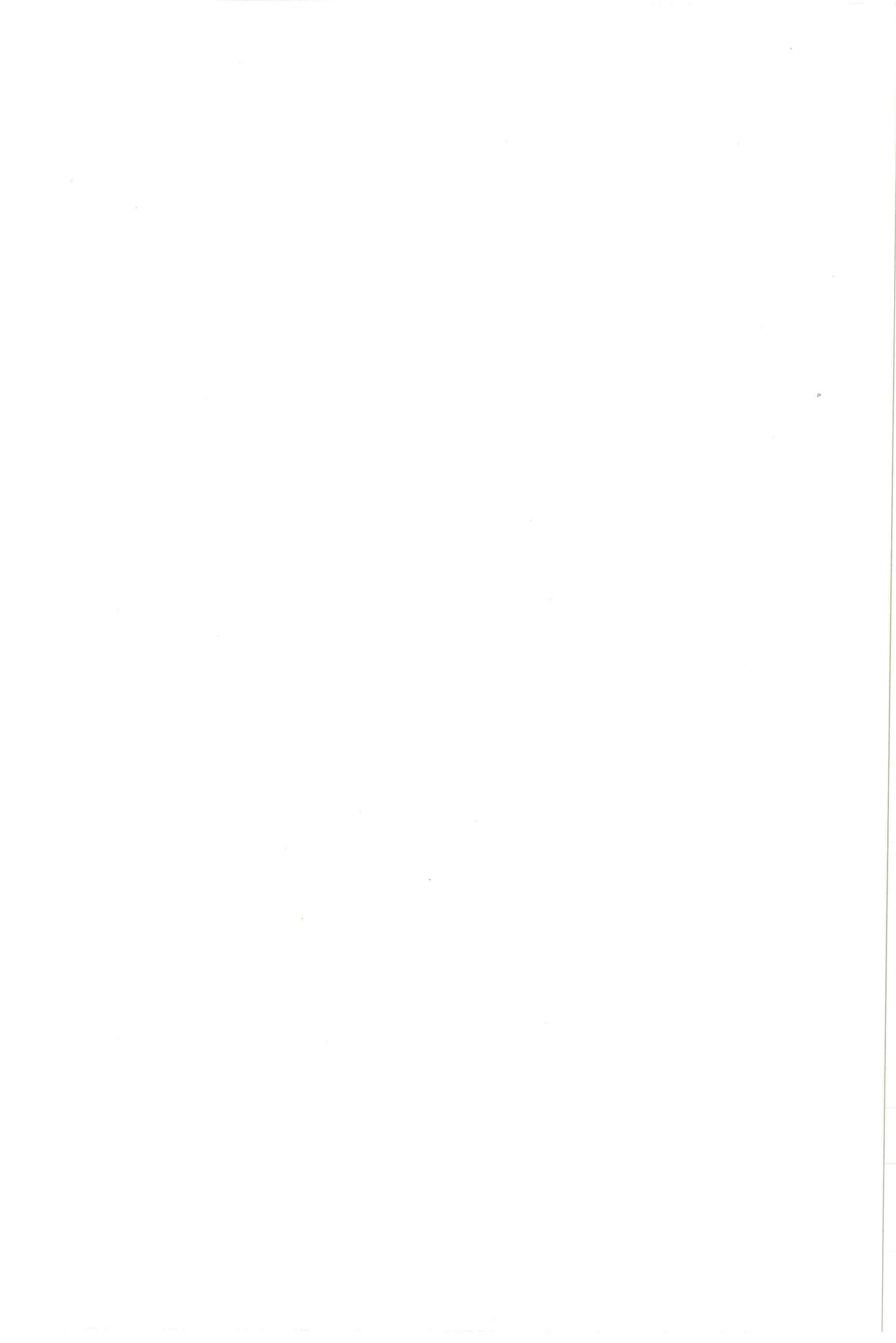
Het opstellen van de massabalansen over de verschillende gebieden geeft als resultaat dat zowel de dichtheid ( $\rho_o$ ) van de afstromende laag, als de dichtheid ( $\rho_m$ ) van de menglaag, uit te drukken zijn in de verschillende  $\alpha$ 's, de dichtheid ( $\rho_e$ ) van het epilimnion-water en de dichtheid ( $\rho_h$ ) van het hypolimnion-water. We vinden hiervoor de relaties;

$$\rho_m = \frac{(1 + \alpha_o)\rho_o + \alpha_e \rho_e}{1 + \alpha_o + \alpha_e} \quad (4.1)$$

$$\rho_o = \frac{(1 + \alpha_o - \alpha_h)\rho_m + \alpha_h \rho_h}{1 + \alpha_o} \quad (4.2)$$

Substitutie van de vgl. (4.2) in (4.1) geeft,

$$\rho_m = \frac{\alpha_e \rho_e + \alpha_h \rho_h}{\alpha_e + \alpha_h} \quad (4.3)$$



Wat is bekend ?

Door de aanname dat voor het 'menggebied 1' het isotherme model kan worden toegepast, is het mogelijk een uitdrukking te vinden voor  $\alpha_o$  en  $\alpha_h$ .

$\alpha_o Q_{op}$  is het debiet dat middels entrainment is opgenomen in de afstromende laag op plaats  $r=r_e$ . Samen met het debiet van de opstroming is dit gelijk aan het debiet van de afstromende laag.

We kunnen dus stellen dat,

$$\begin{aligned} (\alpha_o + 1) Q_{op} &= Q_{af} \\ \Rightarrow \alpha_o &= \frac{Q_{af}}{Q_{op}} - 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Met behulp van hetgeen in hoofdstuk 3 is afgeleid, is de grootte hiervan te berekenen als  $r_e$  bekend is.

Aangezien het terugstromende debiet tesamen met het toestromende debiet uit het epilimnion gelijk is aan het debiet van de afstromende laag, is, met de aanname<sup>dat</sup> de debieten van terug- en toestroming zich verhouden als de dikten van hun lagen<sup>†</sup>, de waarde van  $\alpha_h$  te berekenen volgens,

$$\begin{aligned} \alpha_h &= \frac{H_h}{H - Z_o} \cdot \frac{Q_{af}}{Q_{op}} \\ \text{vgl. (44)} \Rightarrow \alpha_h &= \frac{H_h}{H - Z_o} (\alpha_o + 1) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$H_h$  is de dikte van het hypolimnion.

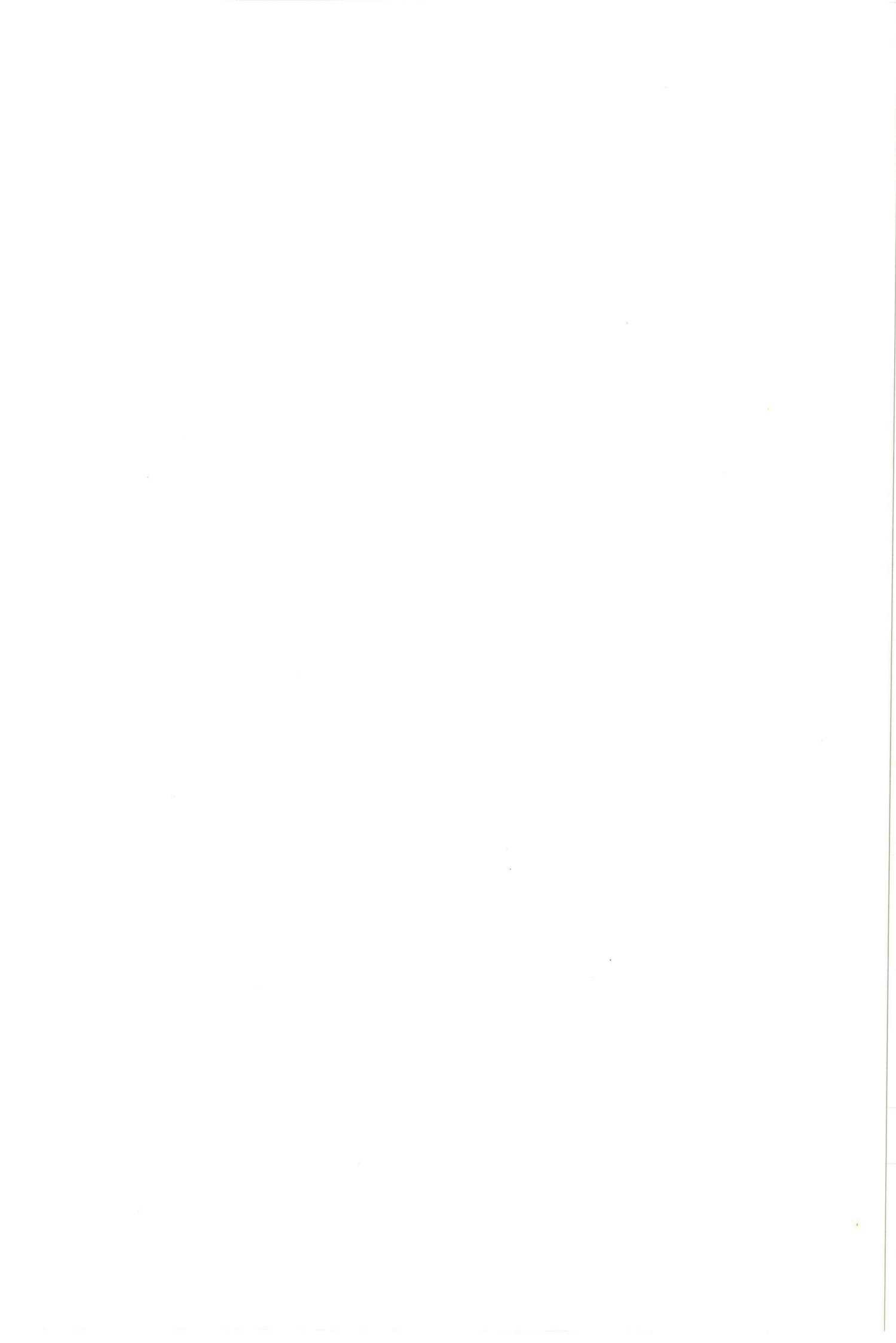
<sup>†</sup> opm. Een dergelijke aanname berust eigenlijk op de veronderstelling dat de snelheidsverdeling van de onderstroming als uniform kan worden beschouwd, hetgeen bij benadering zo is.

Een schatting voor  $\alpha_e$  is te maken indien wordt verondersteld dat de opname van epilimnion-water plaatsvindt als gevolg van turbulentie. De grootte van deze turbulentie zal worden bepaald door de snelheid waarmee de afstromende laag botst tegen het epilimnion. Het ligt daarom voor de hand om de toestroomsnelheid ( $V_e$ ) in het epilimnion te koppelen aan de oppervlakte-snelheid ( $U_o$ ) van de afstromende laag.

We stellen,

$$V_e = C_1 \cdot U_o \quad (4.6)$$

$C_1$  is een constante (0,1 à 0,2 ?)



Voor het opgenomen debiet uit het epilimnion geldt,

$$\alpha_e Q_{op} = 2\pi r_e H_e V_e$$

zodat,

$$\alpha_e = \frac{2\pi r_e H_e V_e}{Q_{op}} \quad (4.7)$$

Door middel van een keuze voor  $C_1$  kan dus een schatting worden gemaakt voor  $\alpha_e$  mits  $U_0$  en  $r_e$  bekend zijn.

Uit vgl. (3.3) is eenvoudig af te leiden dat,

$$U_0 = U_R \left\{ 1 - \frac{l}{H} \tanh\left(\frac{H}{l}\right) \right\} \quad (4.8)$$

Uit het bovenstaande zal duidelijk zijn geworden dat de afstand  $r_e$  een sleutel-variabele is die de grootte van  $\alpha_0$ ,  $\alpha_h$  en  $\alpha_e$  bepaald.

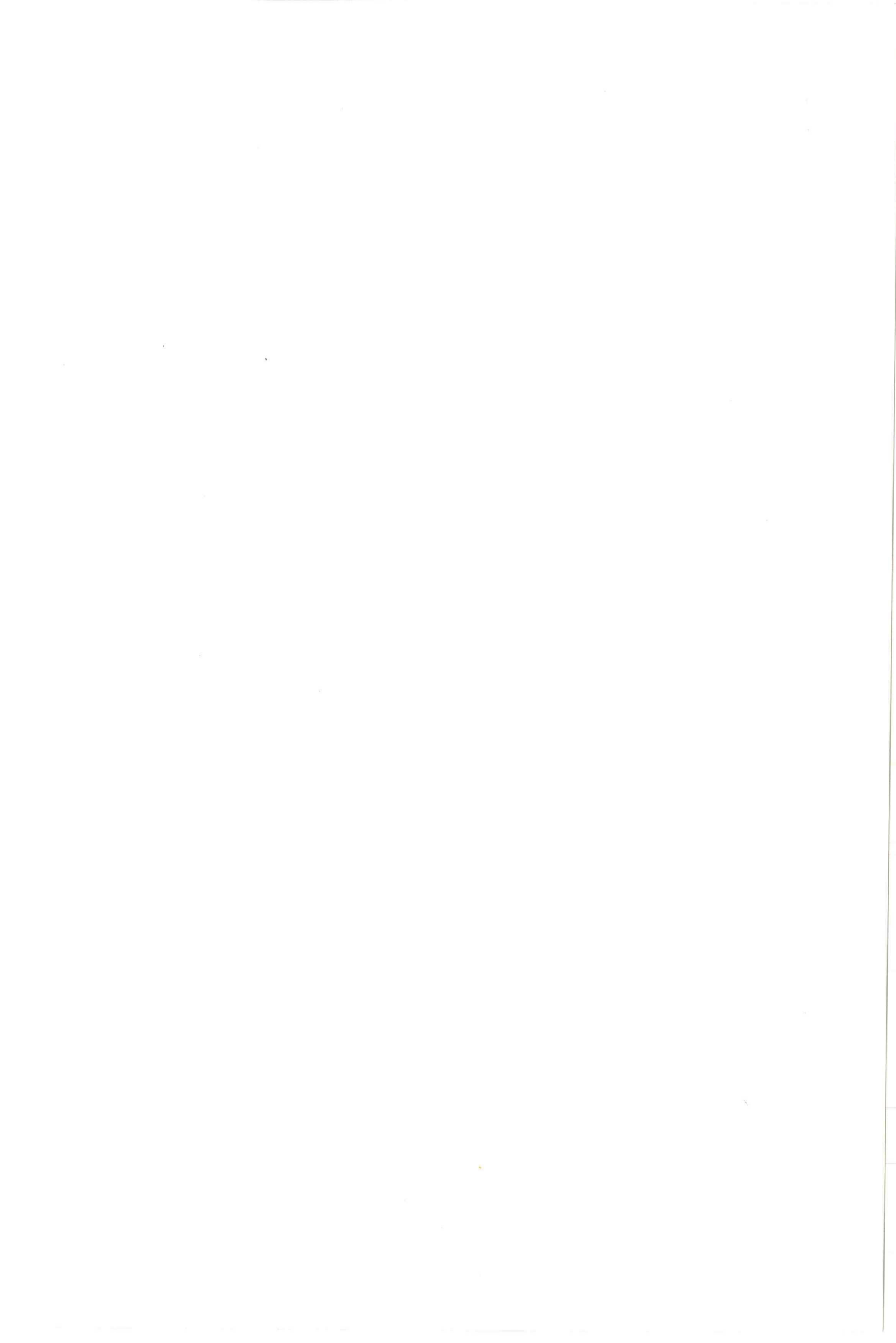
Van de zijde van Vloeistofmechanica is door middel van een interne notitie van Kranenburg geopperd dat  $r_e$  mogelijk kan worden berekend via het opstellen van een impulsbalans voor de overgang van het 'menggebied 1' naar het farfield. Het 'menggebied 2' wordt hierbij als het ware overgeslagen omdat voor dit gebied geen eenvoudige mathematische beschrijving mogelijk is. Indien we veronderstellen dat voor het farfield de snelheidsprofielen te benaderen zijn door uniforme snelheidsverdelingen, dan kan aan de hand van de in figuur 22 gedefinieerde grootheden de volgende impulsbalans worden opgesteld, waarbij alle grootheden betrokken zijn op  $r=r_e$ .

$$\begin{aligned} & \bar{\Phi}^{(4)} + \frac{1}{2} \rho_0 g z_0^2 + \left\{ \rho_0 g z_0 + \frac{1}{2} \rho_m g (H - H_h - z_0) \right\} (H - H_h - z_0) + \\ & \left\{ \rho_0 g z_0 + \rho_m g (H - H_h - z_0) + \frac{1}{2} \rho_h g H_h \right\} H_h = \\ & - \rho_e H_e V_e^2 + \rho_m H_m V_m^2 - \rho_h H_h V_h^2 + \Delta p H + \frac{1}{2} \rho_e g H_e^2 + \\ & (\rho_e g H_e + \frac{1}{2} \rho_m g H_m) H_m + (\rho_e g H_e + \rho_m g H_m + \frac{1}{2} \rho_h g H_h) H_h \end{aligned} \quad (4.9)$$

Zijn alle grootheden te berekenen ?

- De impulsstroom  $\bar{\Phi}^{(4)}$  is bepaald door de vgl.(3.12), waarbij voor de dichtheid eigenlijk de gemiddelde dichtheid op plaats  $r_e$  moet worden genomen.





Voor deze gemiddelde dichtheid is eenvoudig af te leiden,

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 z_0 + \rho_m (H - z_0 - H_h) + \rho_h H_h}{H} \quad (4.10)$$

- $\rho_0$  is vastgelegd door vgl. (4.2)
- $z_0$  is vastgelegd door vgl. (3.5)
- $\rho_m$  is vastgelegd door vgl. (4.3)
- $H_e$  en  $H_h$  zijn onbekend, aangezien we uitgaan van een 2-lagensysteem zijn alleen de hierbij behorende oorspronkelijke dikten van het epilimnion ( $H_{ep}$ ) en het hypolimnion ( $H_{hy}$ ) bekend. Indien de dikte van  $H_m$  bekend is, is het mogelijk om bijvoorbeeld de volgende relaties te veronderstellen,

$$H_e = H_{ep} - \frac{H_{ep}}{H} H_m \quad (4.10a)$$

$$H_h = H_{hy} - \frac{H_{hy}}{H} H_m \quad (4.11a)$$

of,

$$H_e = H_{ep} - \frac{\rho_h - \rho_m}{\rho_h - \rho_e} H_m \quad (4.10b)$$

$$H_h = H_{hy} - \frac{\rho_m - \rho_e}{\rho_h - \rho_e} H_m \quad (4.11b)$$

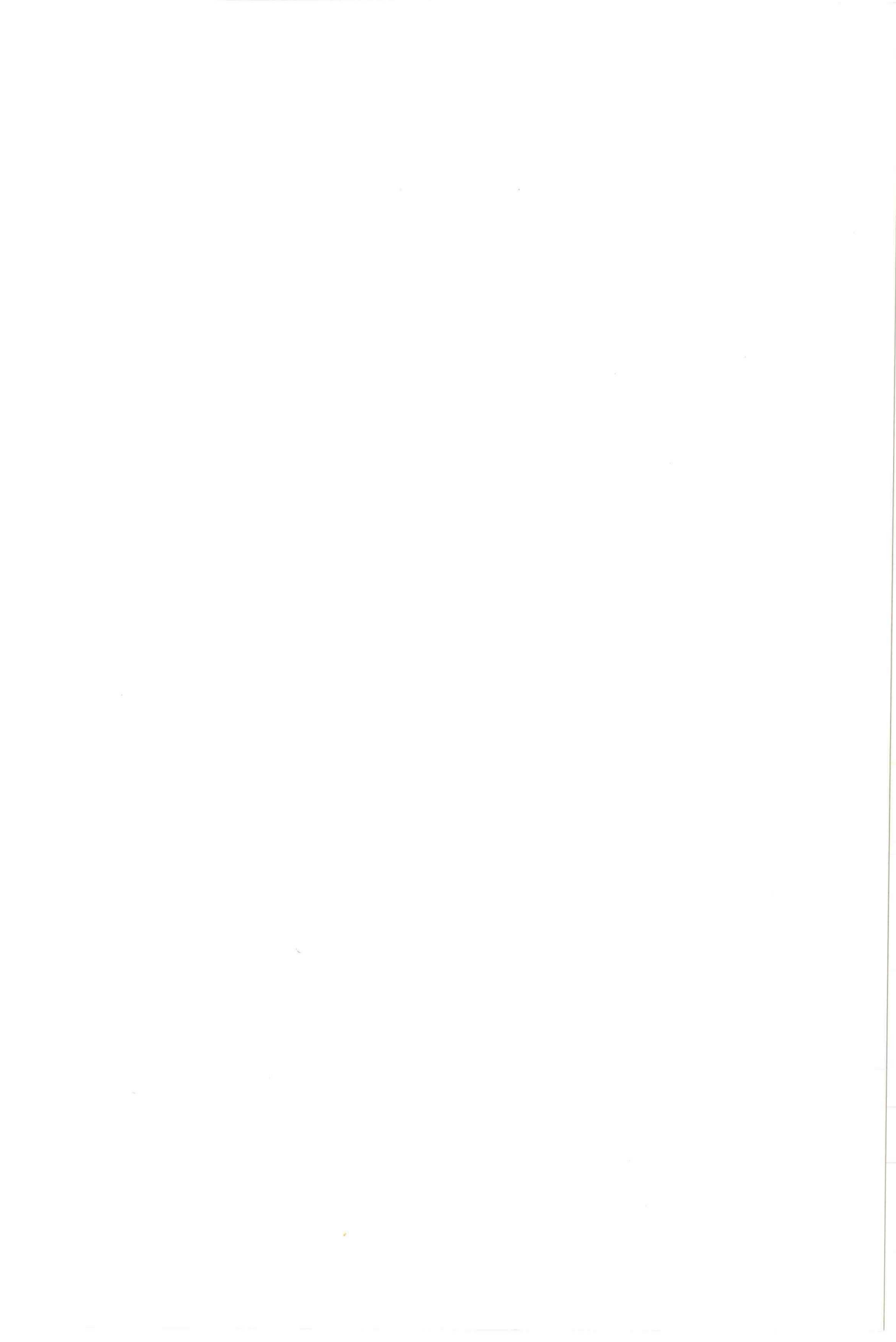
Bij deze laatste vergelijkingen is verondersteld dat de menglaag, aan de hand van zijn eigen dichtheid, zijn positie zò kiest dat de dichtheid van de menglaag gelijk is aan de dichtheid die zou worden verkregen indien de aan de menglaag afgestane gedeelten van epilimnion en hypolimnion rechtstreeks zouden opmengen.

- Voor de snelheid  $V_m$  in de menglaag kan op eenvoudige wijze de volgende betrekking worden afgeleid,

$$V_m = \frac{(\alpha_e + \alpha_h) Q_{op}}{2\pi r_e H_m} \quad (4.12)$$

- Eenzelfde betrekking geldt voor de snelheid in het hypolimnion,

$$V_h = \frac{\alpha_h Q_{op}}{2\pi r_e H_h} \quad (4.13)$$



- $\Delta p$  kan evenals bij de bepaling van de reikwijdte (par. 3.3.c) worden bepaald door toepassing van de Bernoulli relatie langs het oppervlak.

We vinden aldus,

$$\rho_0 + \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 = \rho_0 + \Delta p + \frac{1}{2} \rho_e v_e^2$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 - \frac{1}{2} \rho_e v_e^2 \quad (4.14)$$

- De dikte van de menglaag ( $H_m$ ) is naast de waarde voor  $r_e$  de enige onbekende waarvoor geen eenvoudige relatie kan worden opgesteld.

Om  $H_m$  te kunnen berekenen moet gebruik worden gemaakt van een relatie die wordt opgelegd door het farfield. Door Kranenburg (Vloeistofmechanica, 15) is naar aanleiding van een artikel van Rigter (16) de stroming, die in het farfield ontstaat, beschouwd als kritische stroming. Dit komt neer op de gedachte dat de begrenzing van het epilimnion, ter plaatse van  $r=r_e$  kan worden gezien als een zgn. interne sprong, die alleen kan blijven bestaan indien de voortplantingssnelheden van de verstoringen in het grensvlak tussen de lagen gelijk aan nul zijn. Een dergelijke voorwaarde kan worden afgeleid uit de continuïteitsvgl. en de impulsvergelijking voor de lagen met de karakteristieke methode. Kranenburg vindt dat aan de voorwaarde voor kritische stroming is voldaan als de volgende relatie geldt,

$$(1-F_e)(1-F_m)(1-F_h) - \frac{\rho_m}{\rho_h} (1-F_e) + \frac{\rho_e}{\rho_h} (1+F_m) - \frac{\rho_e}{\rho_m} (1-F_h) = 0 \quad (4.15)$$

waarbij,

$$F_e = \frac{v_e^2}{gH_e} \quad (4.16a)$$

$$F_m = \frac{v_m^2}{gH_m} \quad (4.16b)$$

$$F_h = \frac{v_h^2}{gH_h} \quad (4.16c)$$

Met deze relatie is het mogelijk de dikte van  $H_m$  te bepalen.

Konkluderend kan worden gesteld dat er hiermee voldoende vergelijkingen zijn om het geheel door te rekenen. Vanwege de gecompliceerdheid van de betrekkingen is dit echter alleen mogelijk met behulp van de computer.

HET REKENMODEL

bekend zijn:  $H, H_{ep}, H_{hy}, \rho_e, \rho_h, Q_{lucht}$

parameters:  $k, C_1$

$r_e$  (start)

$$Q_{op} = f(H, Q_{lucht}) \quad (3.11)$$

$$m = f(H, Q_{lucht}, k) \quad (3.14)$$

$$Z_0 = f(H, k, r_e) \quad (3.5)$$

$$\alpha_0 = f(H, k, Q_{op}, m, Z_0, r_e) \quad (3.6)(3.11)(4.1)$$

$\rho_m$  (start)

$$U_0 = f(H, k, m, r_e) \quad (4.8)$$

$H_m$  (start)

$$V_e = f(C_1, U_0) \quad (4.6)$$

$$H_h = f(H, H_{hy}, \rho_e, \rho_h, \rho_m, H_m) \quad \text{of} \quad f(H, H_{hy}, H_m) \quad \text{†} \quad (4.11a, b)$$

$$H_e = f(H, H_{ep}, \rho_e, \rho_h, \rho_m, H_m) \quad \text{of} \quad f(H, H_{ep}, H_m) \quad \text{†} \quad (4.10a, b)$$

$$\alpha_h = f(H, Z_0, \alpha_0, H_h) \quad (4.5)$$

$$\alpha_e = f(Q_{op}, V_e, H_e, r_e) \quad (4.7)$$

wijzig:  $H_m$

$$\rho_m = f(\rho_e, \rho_h, \alpha_h, \alpha_e) \quad (4.1)$$

$$V_m = f(Q_{op}, \alpha_h, \alpha_e, H_m, r_e) \quad (4.12)$$

$$V_h = f(Q_{op}, H_h, \alpha_h, r_e) \quad (4.13)$$

'farfield' vgl.  $0 = f(\rho_e, \rho_h, V_e, H_h, H_e, \rho_m, V_m, V_h, H_m) \quad (4.15)$

$$\rho_0 = f(\rho_h, \alpha_0, \alpha_h, \rho_m) \quad (4.2)$$

$$\Delta p = f(\rho_e, U_0, V_e) \quad (4.14)$$

wijzig:  $r_e$

$$\Phi^{(e)} = f(H, \rho_h, k, m, Z_0, H_h, \rho_m, \rho_0, r_e) \quad (3.12)$$

'impuls vgl.'  $0 = f(H, \rho_e, \rho_h, Z_0, V_e, H_h, H_e, \rho_m, V_m, V_h, H_m, \rho_0, \Delta p, \Phi^{(e)}) \quad (4.9)$

† Tenzij anders is vermeld, is gebruik gemaakt van de vgl. (4.10b) en (4.11b).

#### 4.3. Principe van het reken-model.

Als we de balans opmaken, dan blijkt dat in dit model 24 variabelen bepalend zijn voor de werking van de zuil. Van deze variabelen zijn er 6 bekend te weten,  $H$ ,  $H_{ep}$ ,  $H_{hy}$ ,  $\rho_e$ ,  $\rho_h$ ,  $Q_{lucht}$ .

Er zijn dus 18 onafhankelijke vergelijkingen nodig om het geheel door te kunnen rekenen. Op de bladzijde hiernaast zijn de variabelen in een volgorde gezet, zodanig dat een betreffende variabele kan worden berekend met hetgeen bekend is of reeds is berekend in het bovenstaande.

(opm. de volgorde van de variabelen in de functie-afhankelijkheid heeft dezelfde volgorde als de volgorde van berekenen)

Achter de functie-afhankelijkheid zijn de nummers vermeld van de vergelijkingen waardoor de functie is bepaald, danwel op eenvoudige wijze hieruit kan worden afgeleid (opm. de vgl'n.  $\ell = k \cdot v$  en  $u_k = \frac{m}{\ell}$  zijn hierbij niet vermeld).

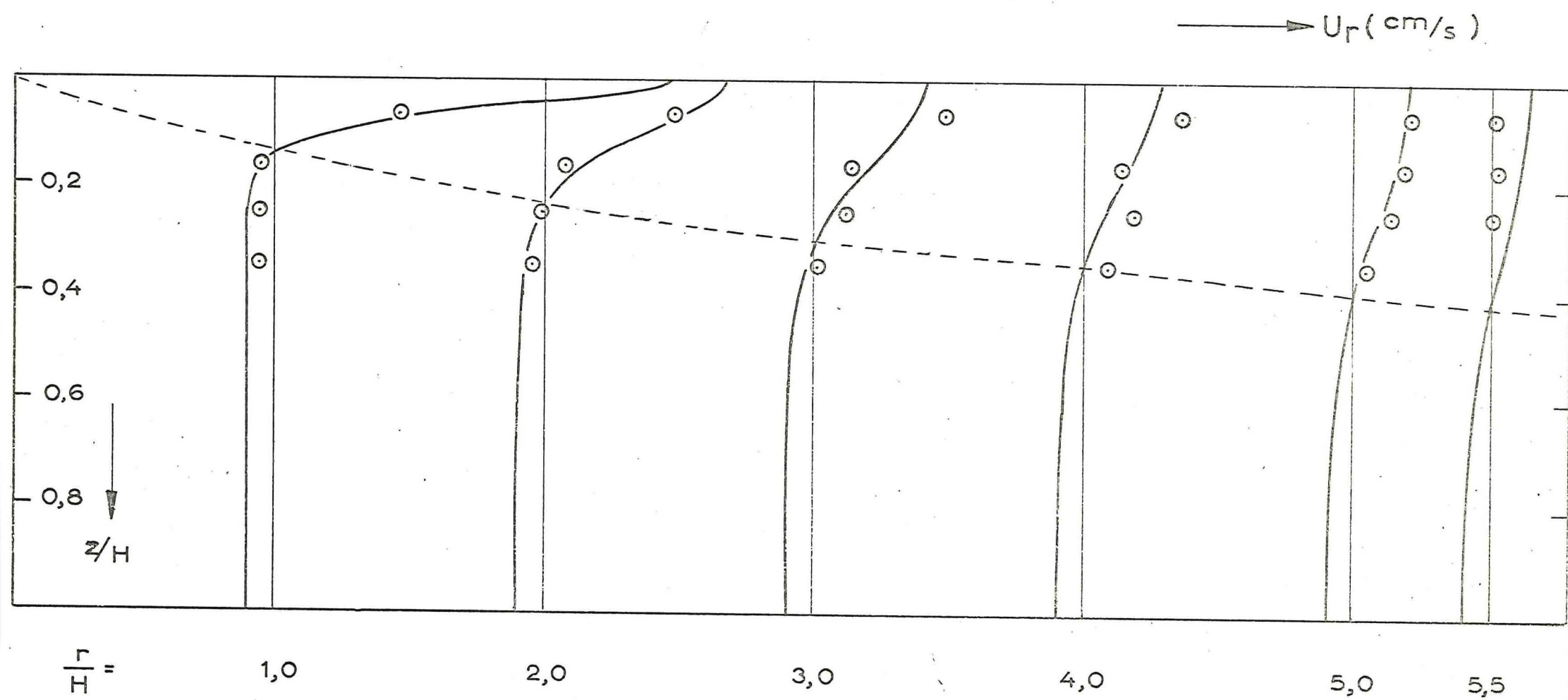
Het zal duidelijk zijn dat met behulp van de computer het geheel is door te rekenen. Het eenvoudigste is om dit te doen door een dusdanige waarde voor  $r_e$  te laten opzoeken, dat bij benadering wordt voldaan aan de impulsvergelijking (4.9). Dit komt dus neer op het opzoeken van het nulpunt van de impulsvergelijking, hetgeen met de 'halveringsmethode' op doeltreffende wijze kan geschieden.

Een moeilijkheid is echter dat de waarde van  $H_m$  en  $\rho_m$  niet rechtstreeks kunnen worden berekend. Vandaar dat eerst een interne iteratie noodzakelijk is om  $H_m$  en  $\rho_m$  te bepalen. Als voorwaarde geldt hiervoor dat moet worden voldaan aan de 'farfieldvergelijking' (4.15). Ook deze iteratie is uitgevoerd door een waarde voor  $H_m$  te laten opzoeken zodanig dat aan deze voorwaarde wordt voldaan. Door het iteratie proces wordt tevens de waarde van  $\rho_m$  bepaald.

De beide 'loops' zijn in het nevenstaande aangegeven.

Voor het rekenmodel is een computerprogramma geschreven in CPS (zie Bijlage IV), waarvan de resultaten zijn vermeld in hoofdstuk 6.





$\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{K}} = 0,042$
$K = 0,07$

$Q_{\text{lucht}} = 0,12 \text{ l/sec}$   
 $H = 21,5 \text{ cm}$

fig. 24 Meting aan de afstromende laag van een hollenguil en laboratoriumschaal (5)

## 5. TOETSING VAN HET ISOTHERME MODEL AAN EXPERIMENTEN

### 5.1. Toetsing aan reeds gedane laboratorium-metingen.

Een toetsing van het theoretisch model aan reeds gedane metingen blijkt slechts in beperkte mate mogelijk vanwege het niet voldoen aan bepaalde meetcondities. Dit wordt zowel veroorzaakt door de geometrie van de betreffende opstellingen, als door de onnauwkeurigheid van de snelheidsmetingen. Om toch een indruk te krijgen hoe deze metingen 'passen' in het opgestelde theoretische model, zullen enkele resultaten van deze onderzoeken hieronder worden besproken.

#### metingen v.d. Straaten (5).

Deze metingen zijn verricht in een bak van 25m x 2,5m en een diepte variërend van 10-30cm. Gemeten zijn de snelheden van de afstromende laag voor verschillende diepten en luchtdebieten (0,06-0,24 l/s). De snelheidsmetingen zijn verricht met een laser doppler snelheidsmeter waarvan de nauwkeurigheid bij deze metingen ca. 1 cm/s bedroeg.

De metingen bij diepte 21,5cm en luchtdebiet 0,12 l/s zijn opgenomen in figuur 24.

Door middel van grafische 'curve-fitting' zijn de waarden voor k en m bepaald. De hierbij behorende theoretische profielen zijn eveneens in de figuur opgenomen.

De gevonden waarde voor m ( $=0,024 \text{ m}^2/\text{s}$ ) blijkt te voldoen aan de voorwaarde van punt ii. (par. 3.3.b). Verder blijkt de gevonden waarde voor k ( $=0,07$ ) goed in overeenstemming te zijn met de verwachte waarde.

Ondanks de onnauwkeurigheid van de metingen blijken de tendensen redelijk goed overeen te stemmen met hetgeen op grond van het theoretisch model wordt verwacht. Opmerkelijk is dat bij  $\frac{v}{H} \approx 5,5$  de snelheden vrijwel nul zijn. Aangezien ook de metingen op grotere afstand een waarde nul opleveren, kan worden aangenomen dat dit de reikwijdte betreft. We berekenen hiervoor  $\frac{kR}{H} \approx 0,39$ . In par. 3.3.c is hiervoor afgeleid  $\frac{kR}{H} \approx 0,43$ , zodat kan worden gesteld dat dit vrij goed met elkaar in overeenstemming is. Een vergelijk van de waarde voor  $\frac{m}{H \sqrt{k}}$  met de theorie is weinig zinvol, omdat deze theorie is afgeleid voor diepten groter dan ca. 1 meter.

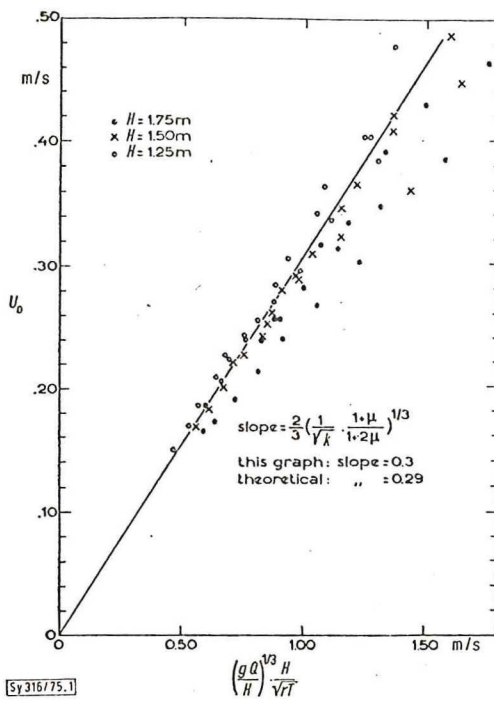


Fig. 1. Determination of the relationship between the experimental surface velocity,  $u_0$ , and the theoretically determined dimensionless group from Eq. (4).

fig. 25 De door Groot (3) gemeten oppervlakte-snelheid uitgezet tegen een dimensiloze groep.

metingen Groot (3).

Deze metingen zijn verricht in een ronde bak met een doorsnede van ca. 2,5m en een diepte variërend van 1,25-1,75m. Het luchtdebiet kon worden ingesteld in de range van 0,22-0,89 l/s. De snelheidsmetingen zijn verricht met een micromolen waarvan de nauwkeurigheid ca. 0,5 cm/s bedraagt. Met deze snelheidsmeter kunnen alleen positieve snelheden worden gemeten.

Vanwege de geometrie bleek er geen horizontale terugstroming op te treden zoals op grond van het theoretisch model zou worden verwacht, omdat bij de rand van de opstelling het water als het ware naar beneden werd geduwd.

Een dergelijke afstroming komt dus eigenlijk het meest overeen met de uitstroming van een radiale jet in een oneindig medium.

Nagegaan is of de betrekking die gevonden is voor de oppervlakte-snelheid in overeenstemming te brengen is met hetgeen voor een dergelijke afstroming kan worden afgeleid.

Groot vond de volgende relatie (zie figuur 25),

$$u_0 = 0,3 \left( \frac{gQ}{H} \right)^{1/3} \frac{H}{\sqrt{2T}} \quad (4.17)$$

T is de dikte van de afstromende laag die is bepaald door extrapolatie van een veronderstelde lineaire snelheidsverdeling.

Voor de radiale jet is de oppervlakesnelheid gelijk aan  $u_R = \frac{m}{\rho}$

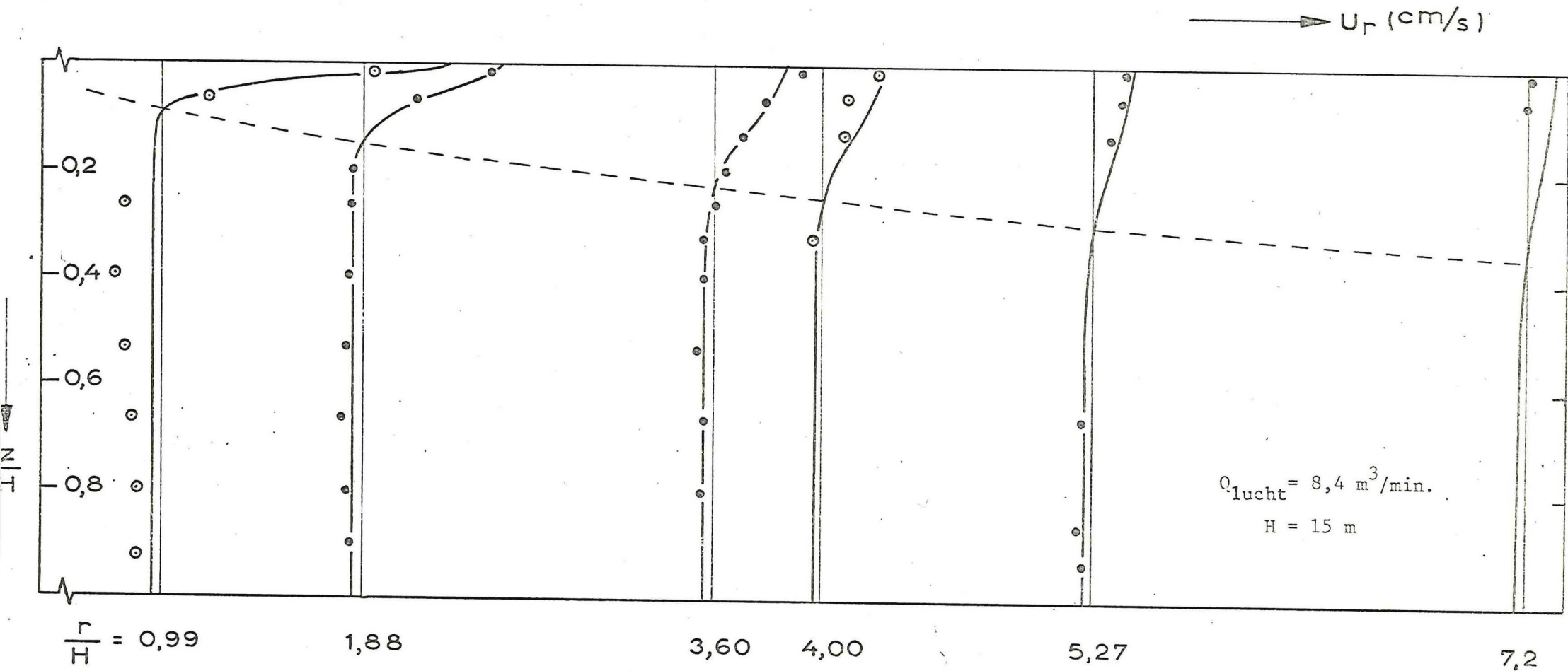
Met behulp van de vgl.(3.14) is af te leiden,

$$\begin{aligned} u_R &= 0,40 H^{-0,40} Q_{lucht}^{1/3} \frac{H \sqrt{k}}{e} \\ \Rightarrow u_R &= 0,40 H^{0,60} Q_{lucht}^{1/3} \frac{1}{\sqrt{2l}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Stellen we de vgln.(4.17) en (4.18) aan elkaar gelijk, dan is af te leiden,

$$\begin{aligned} 0,65 H^{0,6} \frac{1}{\sqrt{T}} &= 0,40 \frac{1}{\sqrt{l}} \\ \Rightarrow T &= 2,0 H^{0,12} l \end{aligned}$$

Linearisatie van het  $\text{sech}^2$ -profiel (zie bijv. figuur 4) geeft de relatie  $T = 2l$ , zodat uit dit vergelijk kan worden gekonkludeerd dat de koppeling van opstroming en afstroming op basis van het gelijkstellen van de impulsstromen gerechtvaardigd lijkt.



$\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{K}} = 0,105$
$k = 0,040$

fig. 26 Meting van de radiale snelheden van de afstroming van een bellenzuil in de Petrusplaat (1974), (5).



metingen v.d. Bos (4).

Deze metingen zijn gedaan in een soortgelijke opstelling als die van Groot. Afmetingen van de gebruikte bak zijn, doorsnede ca. 4m en diepten variërend van 1,4-4,9m. De resultaten van de metingen zijn om dezelfde reden als bij Groot niet te gebruiken voor de toetsing van de afstroomtheorie voor de bellenzuil. Het verloop van de oppervlakte snelheid is voor kleinere diepten gelijk aan hetgeen door Groot is gevonden.

### 5.2. Metingen in het prototype (Petrusplaat).

In 1974 zijn in het bekken Petrusplaat (zie fig. 1) metingen verricht aan de afstroming van een bellenzuil (luchtdebiet  $8,4 \text{ m}^3/\text{min.}$ ).

De snelheidsmetingen zijn gedaan met een zgn. 'Ott-molen' waarvan de nauwkeurigheid vanwege het aanslagniveau (ca. 2 cm/s) en de omvang van het instrument ca. 1 à 2 cm/s bedraagt.

De meetresultaten zijn uitgezet in figuur 26, alsmede de middels grafische curve-fitting bepaalde theoretische snelheidsprofielen.

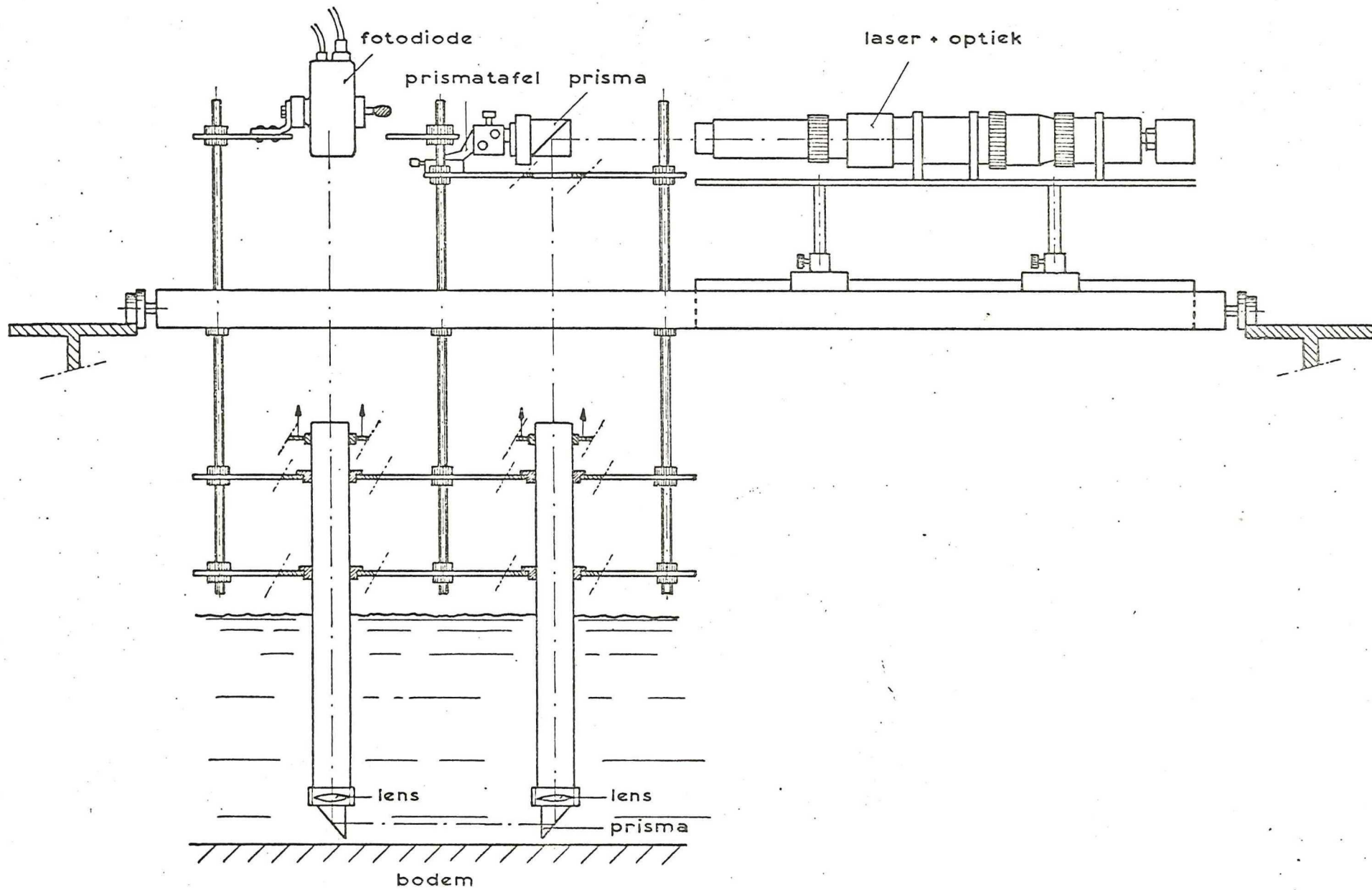
Opmerkelijk is de kleine waarde voor  $k$  ( $\approx 0,04$ ). De plaats van de reikwijdte ( $\frac{R}{H} \approx 6,27$ ) blijkt daardoor niet in overeenstemming te zijn met hetgeen naar aanleiding van par. 3.3.c. zou worden verwacht.

In oktober 1976 zijn deze metingen opnieuw uitgevoerd met behulp van een door de Technisch Fysische Dienst (T.P.D)-Delft ontwikkelde akoestische snelheidsmeter. Deze meter is in het voorjaar van 1976 reeds gebruikt voor snelheidsmetingen bij een destratifikatie proef, waarbij bleek dat de meter redelijk geschikt was voor het meten van zowel de richting als de grootte van de horizontale snelheden (zie verslag Römgers (14)).

De meetserie was bedoeld om na te gaan of het opgestelde theoretische model in overeenstemming was met de werkelijkheid. De bedoeling was om metingen te doen bij 3 verschillende luchtdebieten. Dit in verband met een mogelijke verificatie van de afgeleide betrekking voor  $\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}}$ , alsmede om na te gaan in hoeverre de waarde voor  $k$  mogelijk een functie is van het luchtdebiet. Vanwege weersomstandigheden e.d. zijn uiteindelijk metingen gedaan bij twee luchtdebieten ( $5,1$  en  $10,2 \text{ m}^3/\text{min.}$ ).

Naar aanleiding van deze metingen is een meetrapport geschreven dat is opgenomen in Bijlage III. Voor de resultaten van deze metingen alsmede een vergelijk met de metingen van 1974 wordt verwezen naar dit rapport.





### 5.3. Toekomstige experimenten.

Teneinde het theoretisch model voor de afstroming goed te kunnen toetsen en vooral ook om onderzoek te doen naar de parameter  $k$  (grootte en afhankelijkheid) zijn metingen gepland op laboratoriumschaal.

Op het Lab. v. Vloeistofmechanica is een opstelling gebouwd voor destratificatie proeven m.b.v. een bellenzuil. Aangezien deze opstelling eveneens geschikt lijkt voor metingen aan het isotherme model, is in overleg met Vloeistofmechanica besloten hierin de experimenten te verrichten.

De opstelling betreft een ronde bak van ca. 5m doorsnede en een diepte van ca. 30cm.

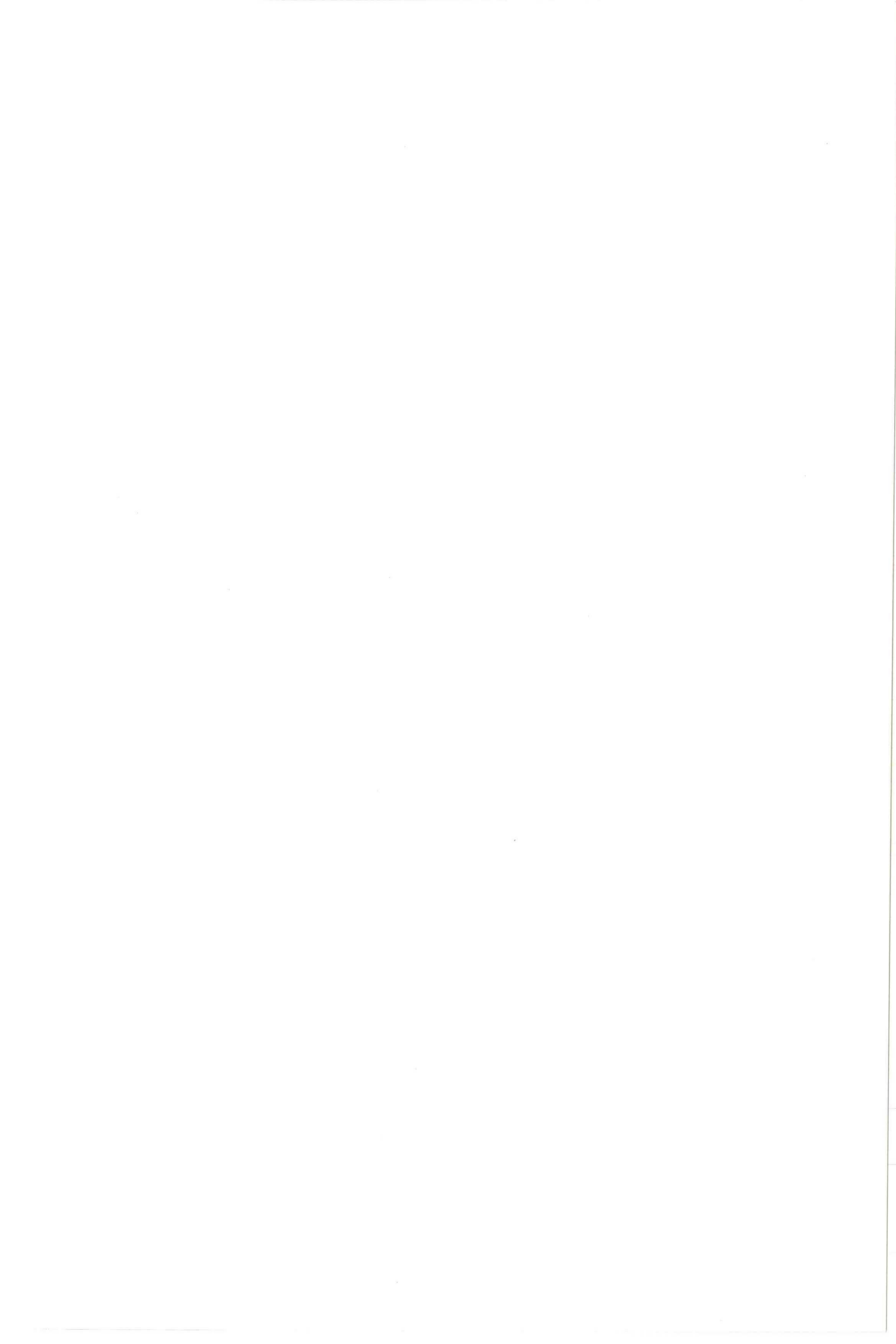
In verband met het bouwen van een meetopstelling en het onderzoekprogramma van Vloeistofmechanica zullen de metingen in februari a.s. plaatsvinden. Deze metingen zullen worden verricht door Nijs Nederveen, waarmee naast het laten bouwen van de meetopstelling tevens is samengewerkt betreffende de metingen in de Petrusplaat en het gestratificeerde model. Zijn afstudeerverslag zal vermoedelijk medio 1977 verschijnen.

De snelheids- en turbulentie-metingen zullen worden verricht met een laser doppler snelheidsmeter, een optische methode waarmee eigenlijk de snelheid van kleine deeltjes ( $< 1\mu m$ ) in een fluïdum wordt bepaald.

Deze methode, die ook voor eerder onderzoek is gebruikt (o.a. v.d. Straaten (5)), is door het aanbrengen van een wijziging in de signaalverwerking (zie Goossens en v. Pagee (17)) aanzienlijk verbeterd, waardoor turbulente snelheden kunnen worden gemeten met een nauwkeurigheid van ca. 1 mm/s.

Voor een beschrijving van het principe van de laser doppler snelheidsmeter wordt verwezen naar het rapport over het meten met een laser doppler snelheidsmeter (18).

De voor de snelheidsmeter ontworpen meetopstelling is hiernaast afgebeeld. De voor detectie noodzakelijke laserbundels worden via een prisma en een periscopisch stelsel onder het wateroppervlak geleid. De buizen voor het onder water brengen van de laserbundel zijn van perspex, opdat kan worden waargenomen dat de bundels op de juiste wijze door het stelsel gaan. De snelheid wordt gemeten in een punt midden tussen de pijpen, waarbij het mogelijk is om zowel horizontale als verticale snelheden te meten. Metingen kunnen worden verricht tot een diepte van ca. 35 cm.



## 6. RESULTATEN VAN BEREKENINGEN MET HET COMPUTERMODEL

In dit hoofdstuk worden de resultaten van de eerste berekeningen uit het rekenmodel van par. 4.3. besproken. Het doel van deze berekeningen is meer om aan te geven dat het mogelijk is de werking van de bellenzuil op deze wijze door te rekenen, als dat hiermee wordt beoogd een betrouwbaar resultaat te berekenen t.a.v. de grootte van de mengdebiet.<sup>1)</sup> Tevens kunnen hierbij mogelijk bepaalde tendensen naar voren komen die van belang kunnen zijn voor de menging onder verschillende omstandigheden.

Interpretatie van de resultaten dient echter met de nodige voorzichtigheid te geschieden.

Met de verschillende mengdebieten wordt veelal bedoeld het relatieve debiet t.o.v. het debiet van de opstroming.

We onderscheiden,

$\alpha_e$	rel. debiet opgenomen uit het epilimnion
$\alpha_h$	" " " " hypolimnion
$\alpha_e + \alpha_h$	" " in de menglaag.

Teneinde de berekeningen van toepassing te kunnen laten zijn op thermische stratificatie, is eerst het dichtheidsverschil bepaald dat veelal bij thermische stratificatie ontstaat.

Uit het handbook of Chemistry and Physics (19) is de volgende tabel overgenomen met betrekking tot de dichtheid van water bij verschillende temperaturen.

$T^1$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
0	999,87
3,98	1000,00
5	999,99
10	999,73
15	999,13
20	998,23
25	997,07
30	995,67

Onder natuurlijke omstandigheden treedt thermische stratificatie meestal op in het gebied van ca. 10 - 20  $^{\circ}\text{C}$ , waarbij veelal een temperatuursprong van ca. 5  $^{\circ}\text{C}$  wordt opgebouwd (zie o.a. v.d. Bos (7)).

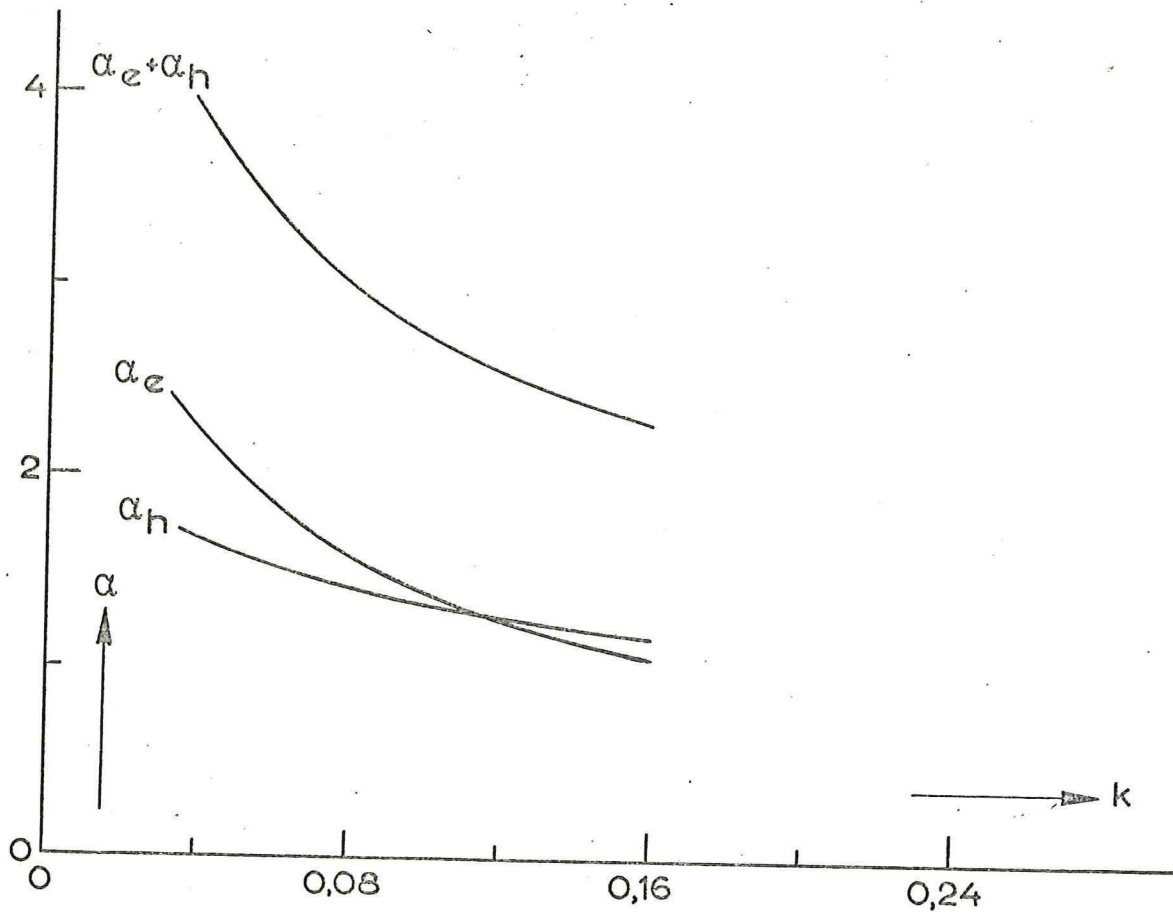


fig. 27 Verandering van de debieten tengevolge van  $k$  (stand.aardsituatie)

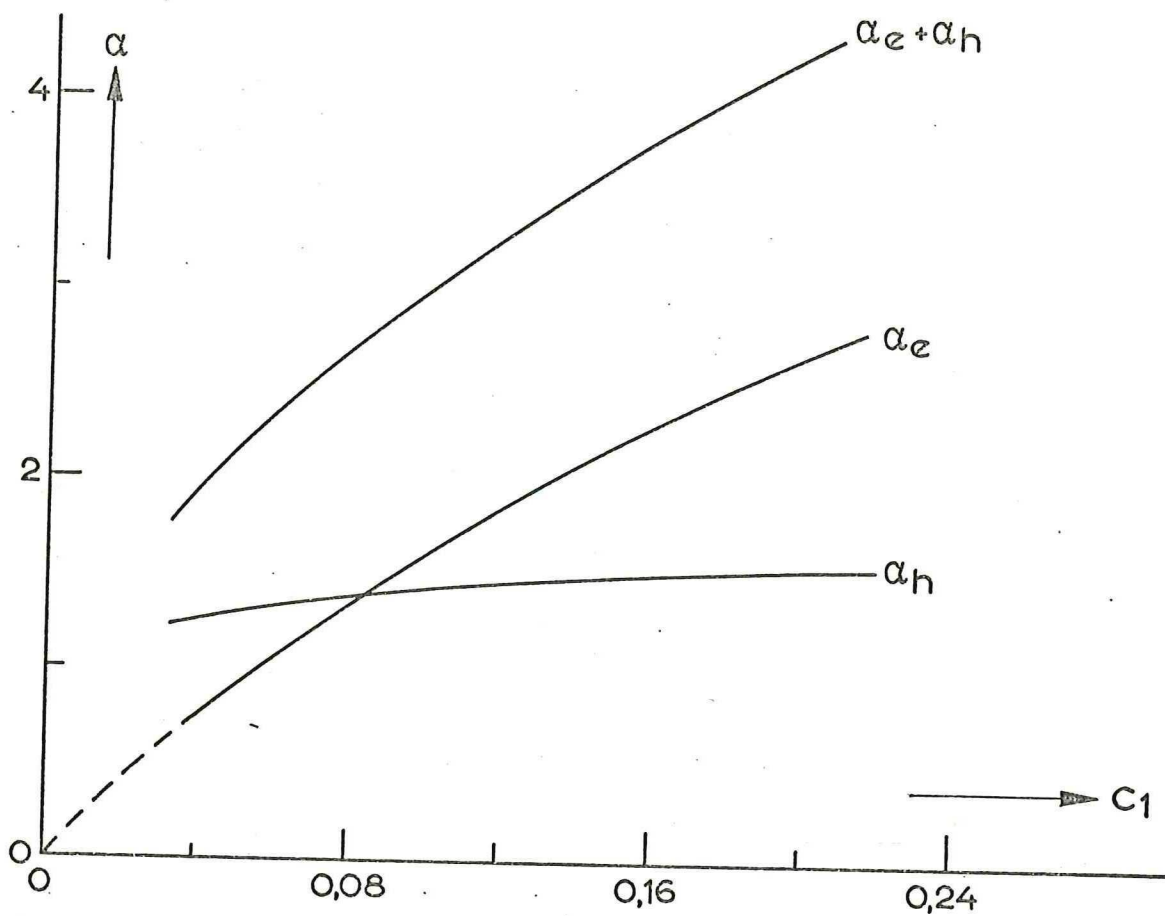


fig. 28 Verandering van de debieten tengevolge van  $C_1$  (stand.aardsituatie)



Een karakteristiek dichtheidsverschil is derhalve  $0,8 \text{ kg/m}^3$

Verder dient nog te worden vermeld dat voor de berekening van de dikten van het epilimnion en het hypolimnion gebruik is gemaakt van de vgl. (4.10b) en (4.11b), tenzij anders is vermeld.

6.1. Gevoeligheids-analyse en tendensen.

6.1.a. Toetsing onbekende parameters.

Zoals in het rekenmodel is aangegeven zijn er in principe 2 onbekende parameters  $k$  en  $C_1$ . Voor  $k$  weten we dat de waarde ca.  $0,07$  à  $0,08$  bedraagt.  $C_1$  is echter veel moeilijker te kwantificeren. Een eerste schatting van deze parameter op basis van entrainment tengevolge van turbulentie geeft,  $C_1 \approx 0,1$ . Teneinde deze parameters op gevoeligheid te kunnen toetsen is een standaard beginsituatie verondersteld.

Hiervoor is gekozen,

$H = 15 \text{ m}$	parameters:
$H_{ep} = 1,5 \text{ m}$	$k = 0,08$
$H_{hy} = 1,5 \text{ m}$	$C_1 = 0,1$
$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$	
$\rho_h = 1000,8 \text{ kg/m}^3$	
$Q_{\text{slucht}} = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$	$= (6 \text{ m}^3/\text{min})$

In figuur 27 zijn de resultaten uitgezet voor variatie van de  $k$ -waarde, waaruit blijkt dat voor kleine  $k$ -waarden vooral de invloed op  $\alpha_e$  vrij groot is en daarmee dus ook de invloed op  $\alpha_e + v_h$ .

In figuur 28 zijn de resultaten uitgezet voor variatie van de  $C_1$ -waarde. Zoals te verwachten is heeft deze parameter een sterke invloed op de grootte van  $\alpha_e$ . De waarde van  $\alpha_h$  blijkt vrij ongevoelig te zijn voor deze parameter.

Konkluderend kan worden gesteld dat beide parameters een behoorlijke invloed hebben op de grootte van de debieten die worden gemengd.

De invloed van de waarde voor  $k$  lijkt hierbij van minder belang omdat deze betrekkelijk nauwkeurig is bepaald, hoewel de beïnvloeding van de  $k$ -waarde voor niet volledig isotherme omstandigheden moeilijk valt te kwantificeren. De invloed van de volledig onbekende parameter  $C_1$  is voor wat betreft het opgenomen debiet uit het epilimnion vrij groot, zodat de grootte hiervan dient te worden getoetst aan experimentele resultaten.



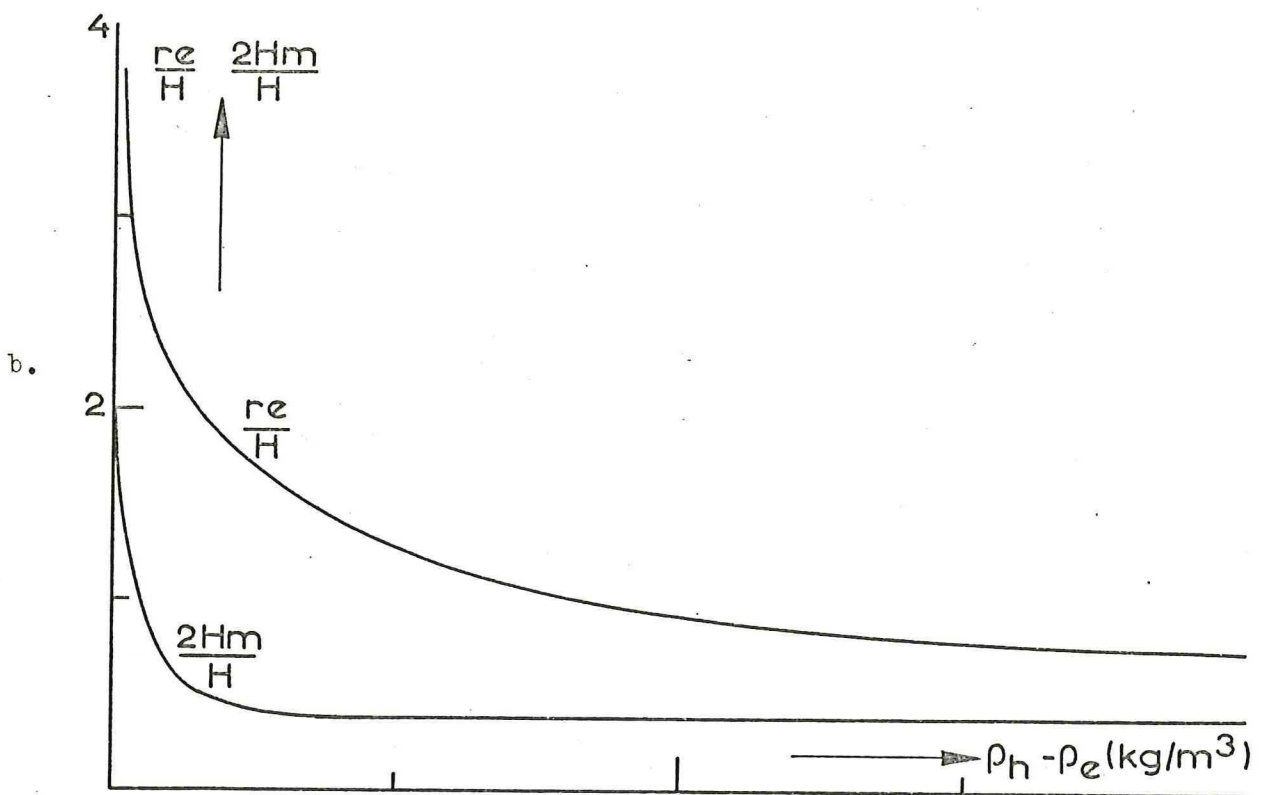
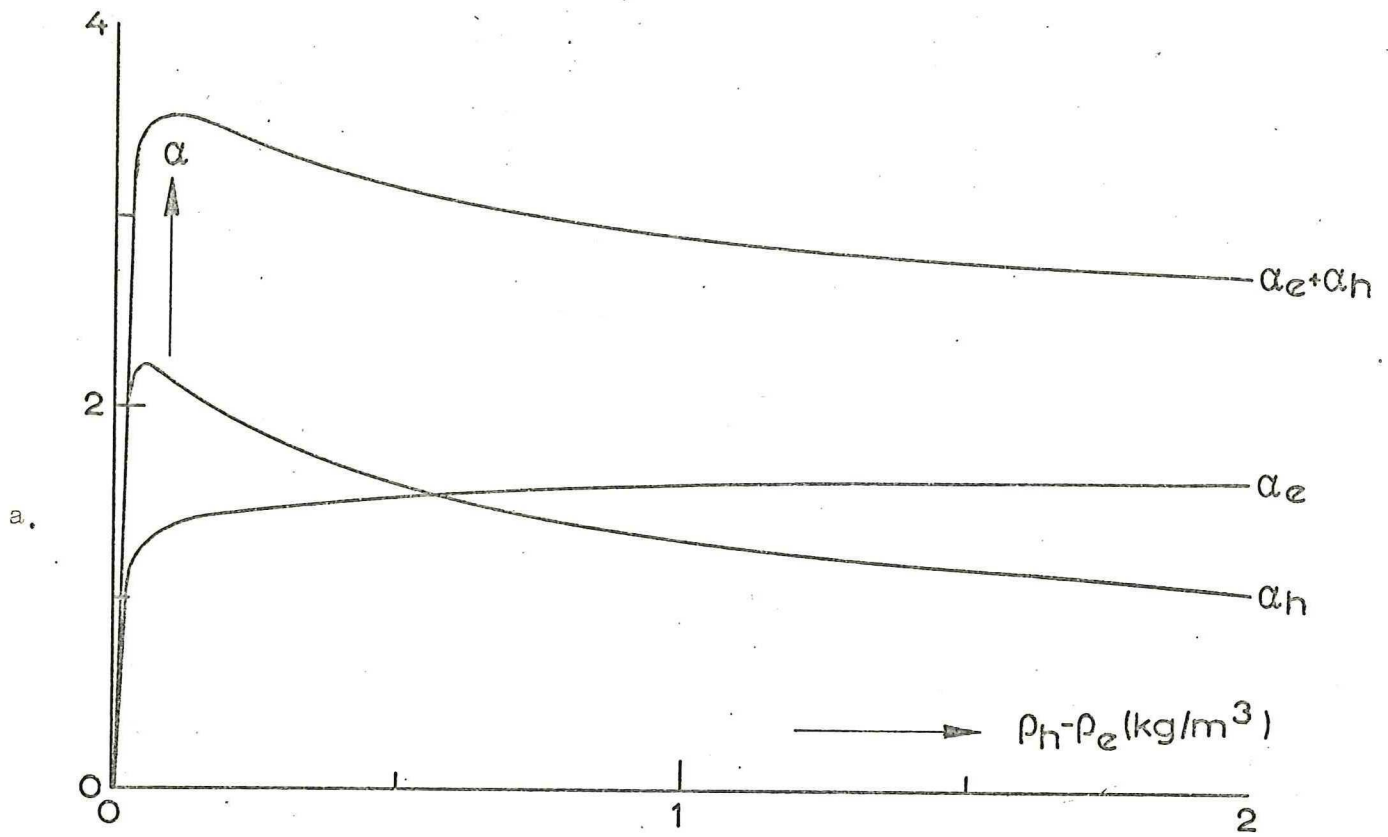


fig. 29a,b Verandering van debieten (a), plaats van het epilimnion en dikte van de menglaag tengevolge van het dichtheidsverschil (standaardsituatie).

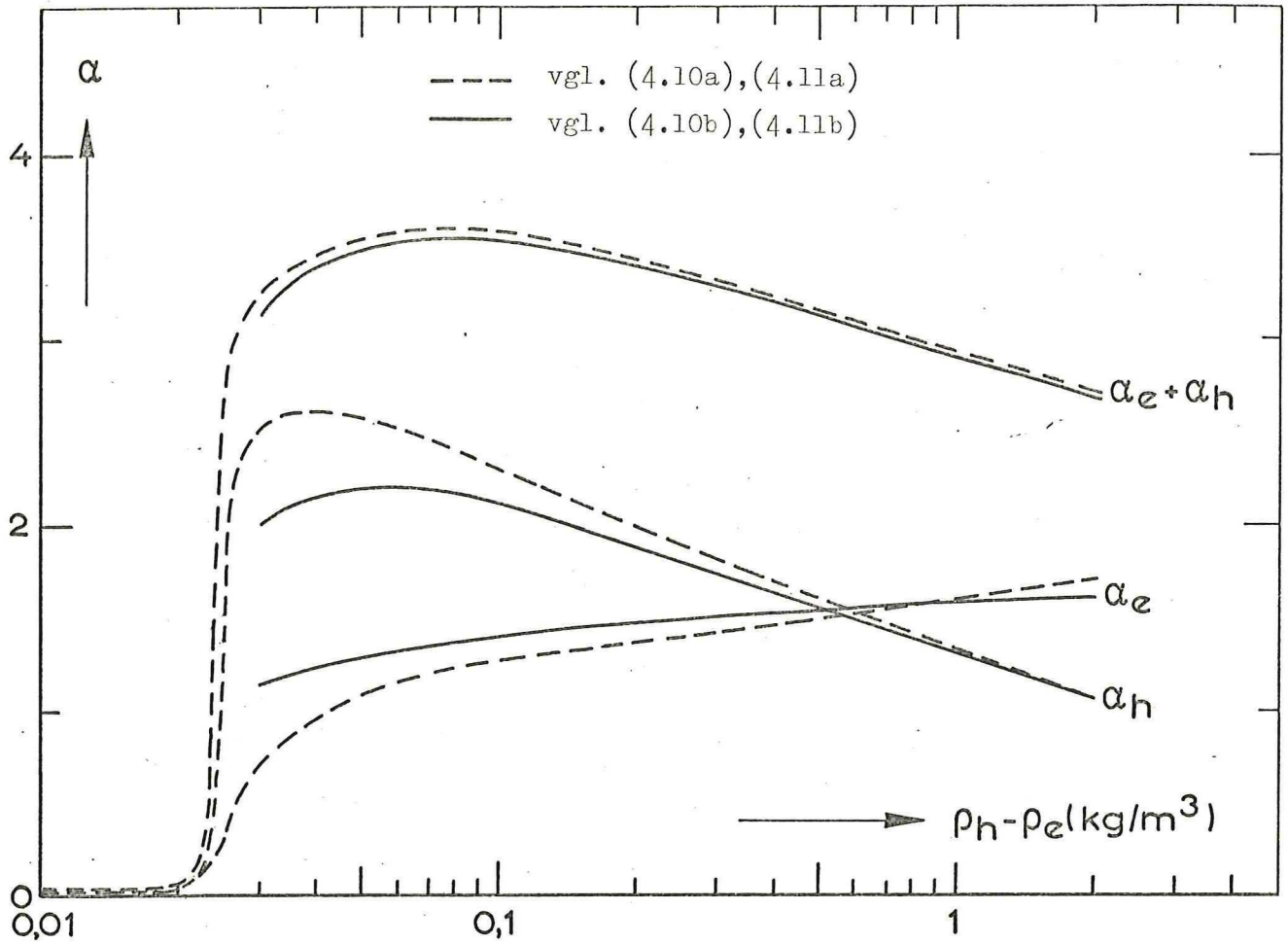


fig. 30 Sterke afname van de debieten bij klein dichtheidsverschil

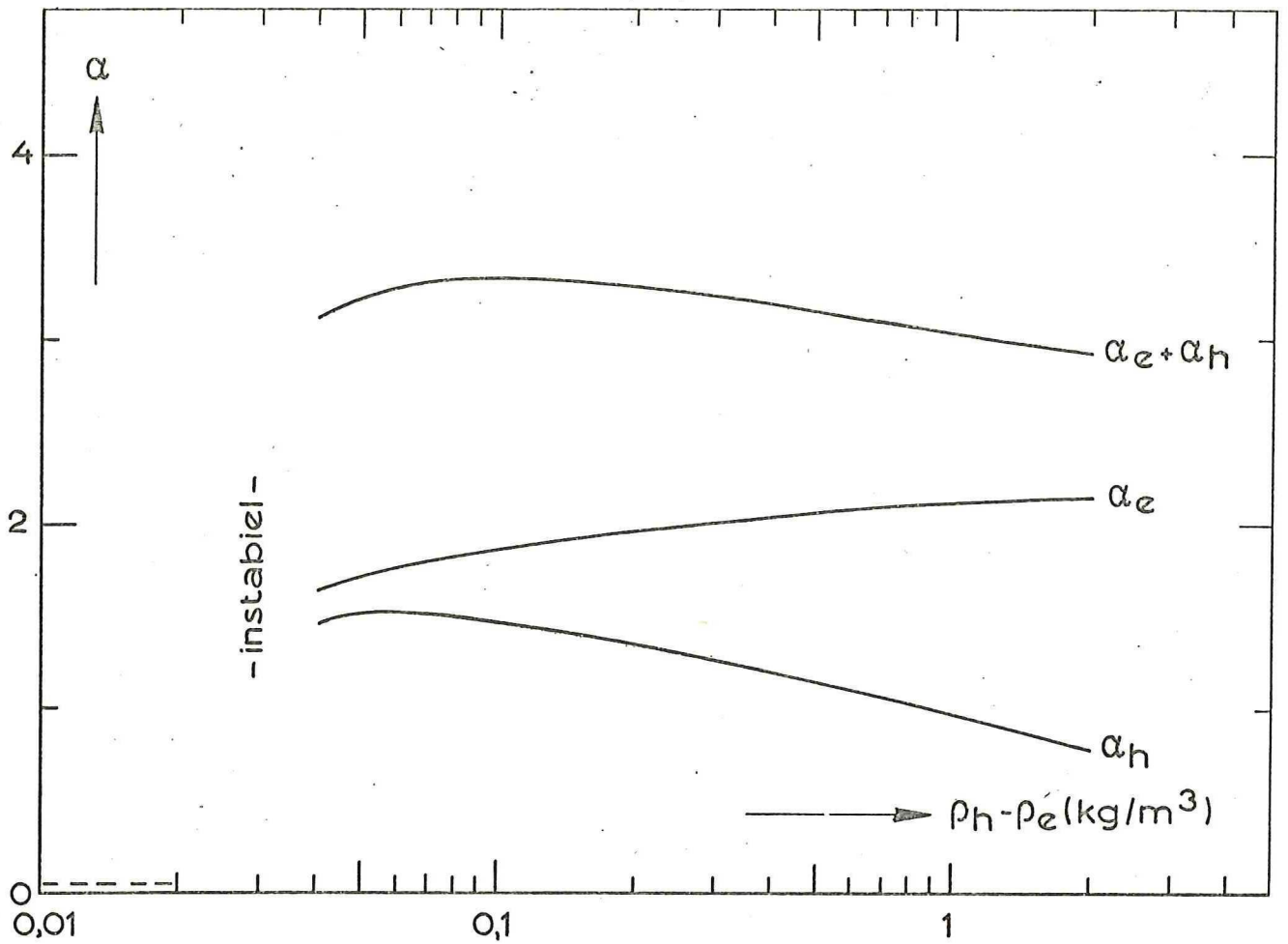


fig. 31 Debeten bij verschillend dichtheidsverschil ( $H_{ep} = 5$  m,  $H_{hy} = 10$  m)

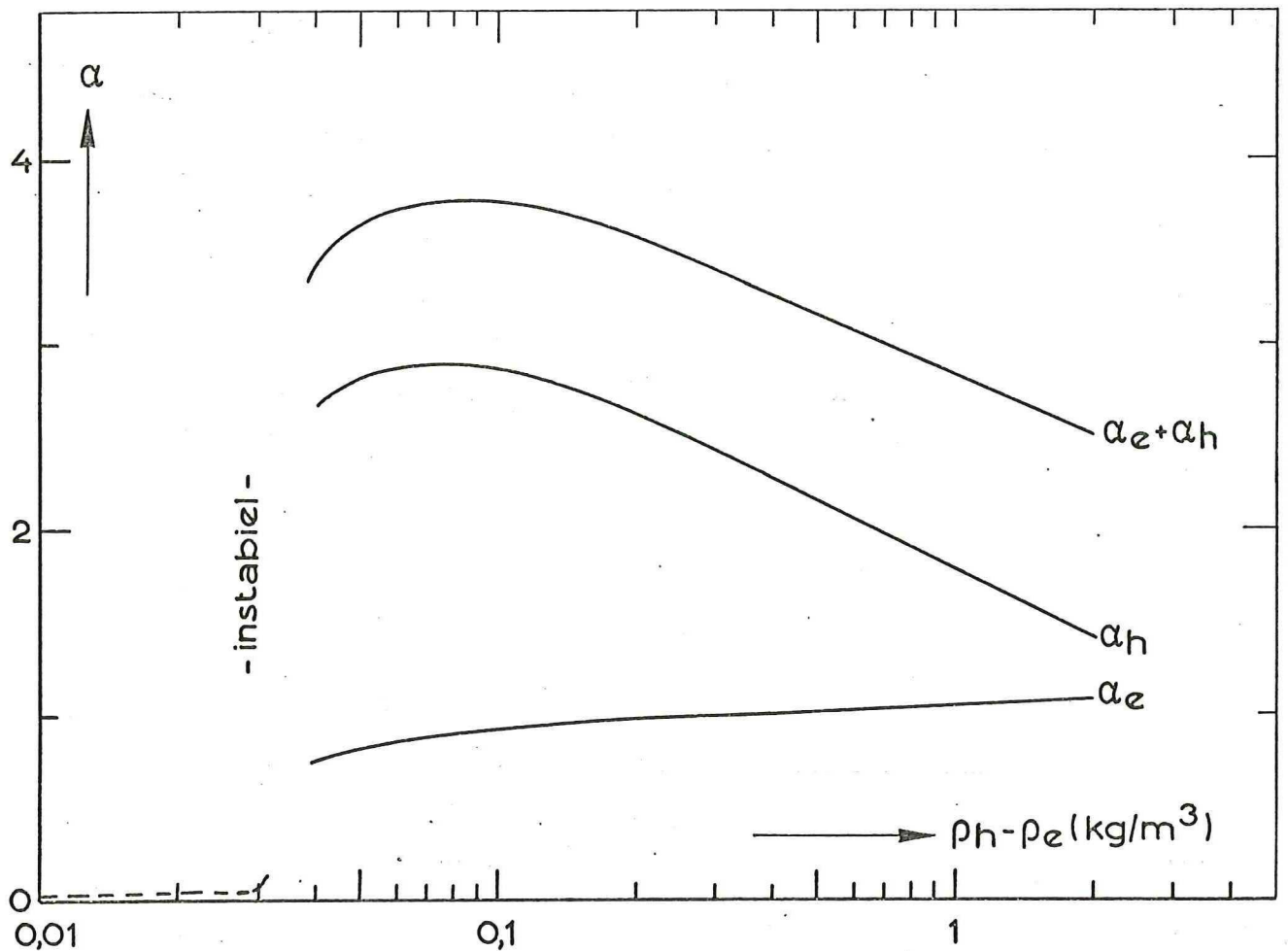


fig. 32 Debeten bij verschillend dichtheidsverschil ( $H_{ep} = 10$  m,  $H_{hy} = 10$  m)

### 6.1.b Toetsing van enkele variabelen.

Voor dezelfde standaard situatie, als is vermeld in de vorige paragraaf, is het dichtheidsverschil gevarieerd.

Het resultaat van deze berekening is weergegeven in figuur 29a.

Het blijkt dat er voor hele kleine dichtheidsverschillen een optimum in het debiet van de menglaag optreedt, hetgeen voornamelijk wordt veroorzaakt door een toename van het debiet dat uit het hypolimnion wordt opgenomen.

Uit figuur 29b blijkt dat, zoals verwacht, bij kleine dichtheidsverschillen de afstand tot het epilimnion ( $r_e$ ) groter wordt. Dit verklaard tevens de toename van  $\alpha_h$ . De dikte van de menglaag ( $H_m$ ) is betrekkelijk ongevoelig voor dichtheidsverschillen. Bij een heel klein dichtheidsverschil neemt deze dikte plotseling toe, hetgeen tot gevolg heeft dat de debieten  $\alpha_e$  en  $\alpha_h$  afnemen.

Teneinde een beter inzicht te verkrijgen in het verloop van de debiet bij kleine dichtheidsverschillen is figuur 29a half-logaritmisch uitgezet, zie figuur 30.

Bij dichtheidsverschillen kleiner dan  $0,03 \text{ kg/m}^3$  blijkt het computer model instabiel te zijn. Dit kon worden verholpen door in plaats van de vgl. (4.10b) en (4.11b) de vgl. (4.10a) en (4.11a) te gebruiken, waarbij de dikte van epilimnion en hypolimnion onafhankelijk zijn van de dichtheid van het menglaag-water. Het resultaat van deze berekening is in de figuur aangegeven door de gestippelde lijn.

Opmerkelijk is de bijzonder snelle afname van het mengdebiet voor nog kleinere dichtheidsverschillen als met de oorspronkelijke vergelijkingen kon worden berekend.

Verder blijkt dat met deze betrekkingen een aansluiting kan worden verkregen met het isotherme model.

Voor de berekening <sup>bij</sup> grotere dichtheidsverschillen verdient het gebruik van de vgl. (4.10b) en (4.11b) echter de voorkeur aangezien zij fysisch juist zijn. De verschillen zijn echter gering.

Nagegaan is of de parameters  $k$  en  $C_1$  invloed hebben op de dichtheidsafhankelijkheid, dit blijkt nagenoeg niet het geval te zijn. Alleen de grootte van de debieten blijken enigszins te verschillen, maar de tendens, zoals is weergegeven door figuur 30 blijft dezelfde.

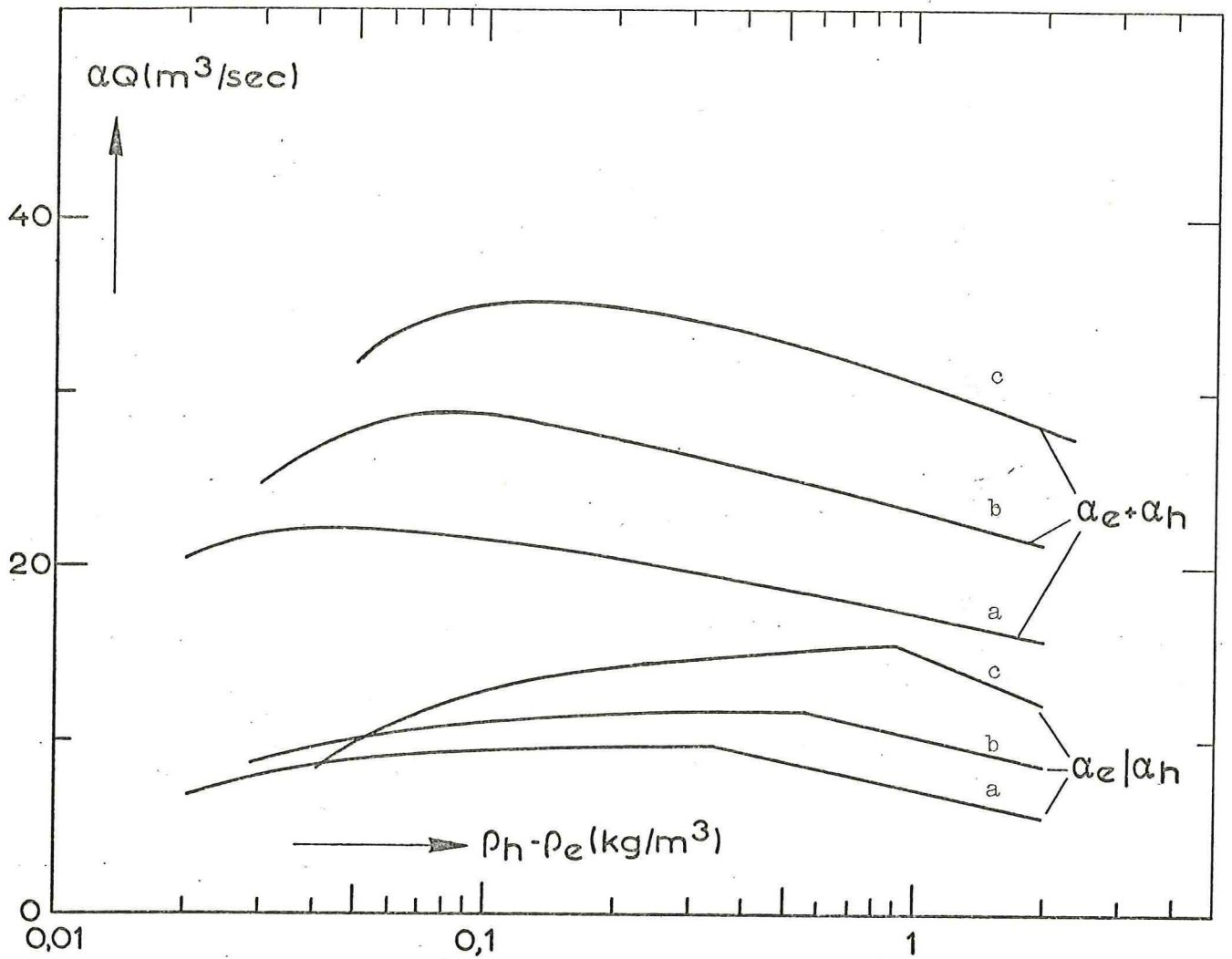


fig. 33 Debiet van de menglaag en het debiet van 'volledige' menging bij luchtdebieten,  $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$  (a),  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$  (b),  $0,2 \text{ m}^3/\text{s}$  (c).



Om de invloed na te gaan van de plaats van de oorspronkelijke begrenzing tussen de lagen in het 2-lagensysteem zijn de dikten van epilimnion en hypolimnion gewijzigd. Teneinde tendens verschillen waar te kunnen nemen zijn deze situatie door gerekend voor diverse dichtheidsverschillen.

De resultaten met  $H_{ep}=5m$ ,  $H_{hy}=10m$  zijn opgenomen in figuur 31.

De resultaten met  $H_{ep}=10m$ ,  $H_{hy}=5m$  zijn opgenomen in figuur 32.

Een opmerkelijk verschil tussen de beide figuren is het verschil in de verhouding van  $\alpha_e$  en  $\alpha_h$ . De som van de beide debieten is qua orde van grootte gelijk.

Bij de situatie van figuur 31 wordt er veel meer hypolimnion water opgemengd, zodat in dit geval de dichtheid van het menglaag-water dichter zal liggen bij die van het hypolimnion-water. Deze tendens is in overeenstemming met hetgeen in het kwalitatieve model reeds is opgemerkt.

Om enig inzicht te verkrijgen in één van de belangrijkste doelstelling van de LWBB, is het luchtdebiet gevarieerd. Dit om na te gaan of een groter luchtdebiet ook een grotere menging impliceert.

Hiertoe zijn een 3-tal luchtdebieten ( $Q_{lucht}=0,05 / 0,1 / 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ ) met elkaar vergeleken.

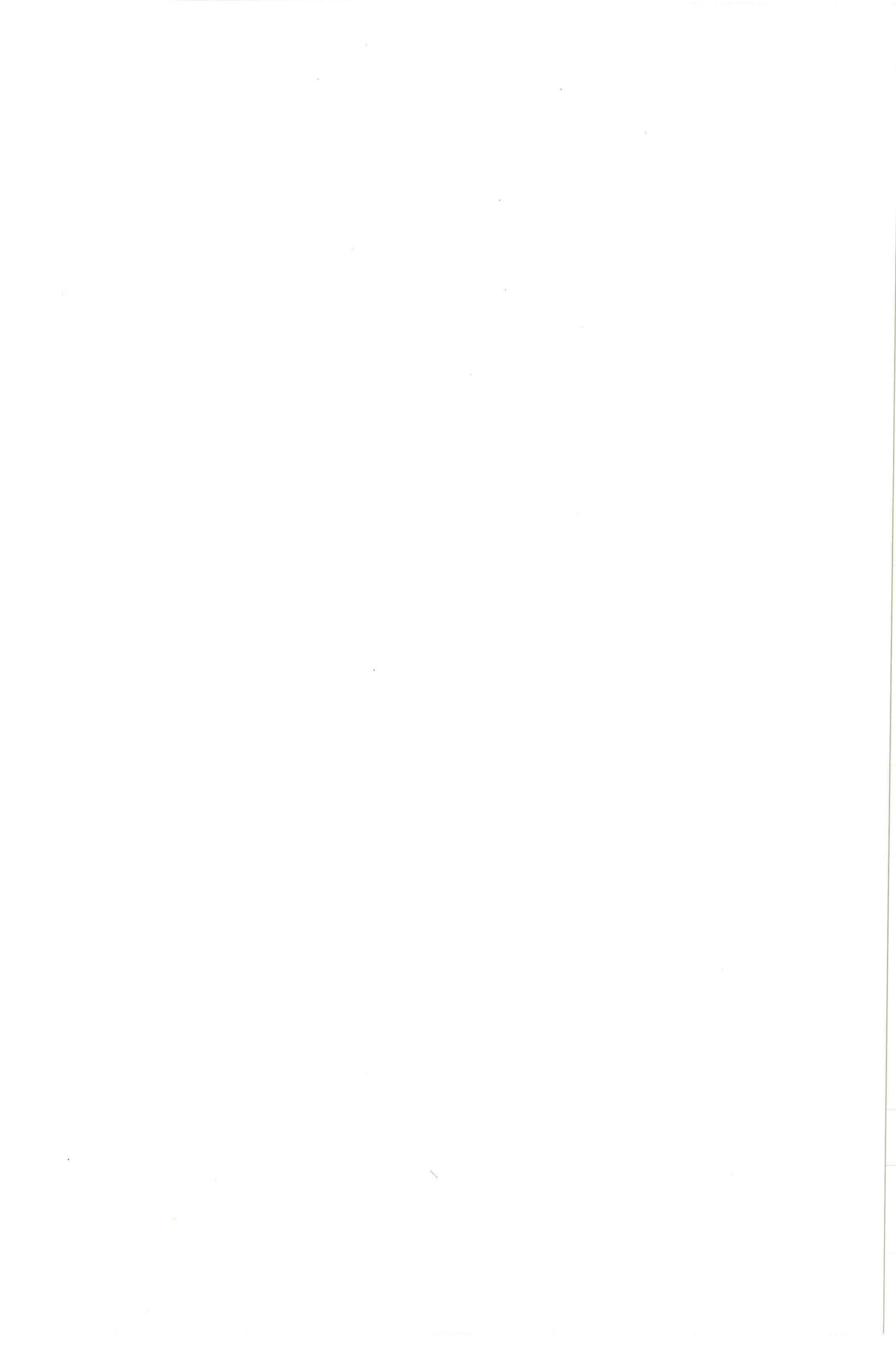
In verband met de mate van opmenging zijn niet de relatieve maar de werkelijke grootten van de debieten uitgezet (zie figuur 33). Uit de figuur blijkt dat voor dit rekenmodel het debiet in de menglaag toeneemt met het luchtdebiet. Alleen voor hele kleine dichtheidsverschillen ( $< 0,05 \text{ kg/m}^3$ ) kan dit niet meer worden gesteld. De toename van het mengdebiet blijkt qua orde van grootte gelijk te zijn aan de relatieve toename van het opstromende debiet, eigenlijk zelfs iets groter.

Om de werkelijk opmenging van het gehele bekken in ogenschouw te kunnen nemen, moet eigenlijk worden gezien hoeveel water zodanig wordt opgemengd, als noodzakelijk is om het gehele bekken op te mengen. Bij een situatie met gelijke dikten voor epilimnion en hypolimnion dient voor 'volledige' opmenging het debiet uit de beide lagen aan elkaar gelijk te zijn.

Is  $\alpha_e$  kleiner dan  $\alpha_h$ , dan wordt de volledige opmenging dus bepaald door  $\alpha_e$ . Is daarentegen  $\alpha_h$  kleiner, dan bepaald  $\alpha_h$  het debiet voor volledige opmenging.

Het verloop van de 'volledige' opmengdebieten zijn eveneens in figuur 33 opgenomen. Hieruit blijkt dat een groter luchtdebiet ook een groter debiet





van 'volledige' menging veroorzaakt. Alleen voor dichtheidsverschillen kleiner dan ca.  $0,08 \text{ kg/m}^3$  blijkt dit niet meer te gelden.

De 'volledige' menging wordt bij grote dichtheidsverschillen bepaald door  $\alpha'_h$  en bij kleine dichtheidsverschillen door  $\alpha'_e$ . Aangezien  $\alpha'_h$  afneemt voor grote dichtheidsverschillen en  $\alpha'_e$  afneemt voor kleine dichtheidsverschillen, is er een dichtheidsverschil aan te geven dat optimaal wordt opgemengd. Voor deze situatie, dat  $H_{ep} = H_{hy}$ , correspondeert dit met het dichtheidsverschil waarbij  $\alpha'_e = \alpha'_h$ .

Voor dit rekenmodel kan uit het voorgaande worden gekonkludeerd dat voor 'normale' stratifikaties ( $\Delta T > 1^\circ\text{C}$ ) een groter luchtdebiet over het algemeen een grotere menging tot gevolg heeft, waarbij de globaal bezien de toename van de menging gelijk is aan de relatieve toename van het debiet van de opstrooming.

#### 6.2. Berekeningen m.b.t. de destratificatie proeven van 1975 en 1976.

Nagegaan is in hoeverre de berekeningen met behulp van het rekenmodel in overeenstemming zijn te brengen met de werkelijkheid. Aangezien tot nu betrekkelijk weinig metingen zijn verricht is een goede verificatie van het rekenmodel niet mogelijk. De enige metingen die hiervoor mogelijk bruikbaar zijn betreffen de destratificatie proef in 1976 (zie Römgens (14)), uitgevoerd in het drinkwaterbekken '130'.

Voor deze situatie is dan ook het geheel doorgerekend en zijn de uitkomsten met betrekking tot de snelheden in het farfield vergeleken met de gemeten snelheden. In verband met de onbekendheid van de parameter  $C_1$  is getracht deze zodanig aan te passen dat de meetresultaten enigszins worden benaderd. Het blijkt hierbij dat de waarde van  $C_1$  aanzienlijk groter moet worden gekozen dan oorspronkelijk was verondersteld. Een goede overeenstemming met de metingen kan echter niet worden verkregen (zie figuur 34).

Voor de berekening is gebruik gemaakt van de hierondervermelde invoergegevens

$$H = 27 \text{ m}$$

$$H_{ep} = 5 \text{ m}$$

$$H_{hy} = 10 \text{ m}$$

$$\rho_h - \rho_e = 0,7 \text{ kg/m}^3$$

$$Q_{\text{lucht}} = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$k = 0,08$$

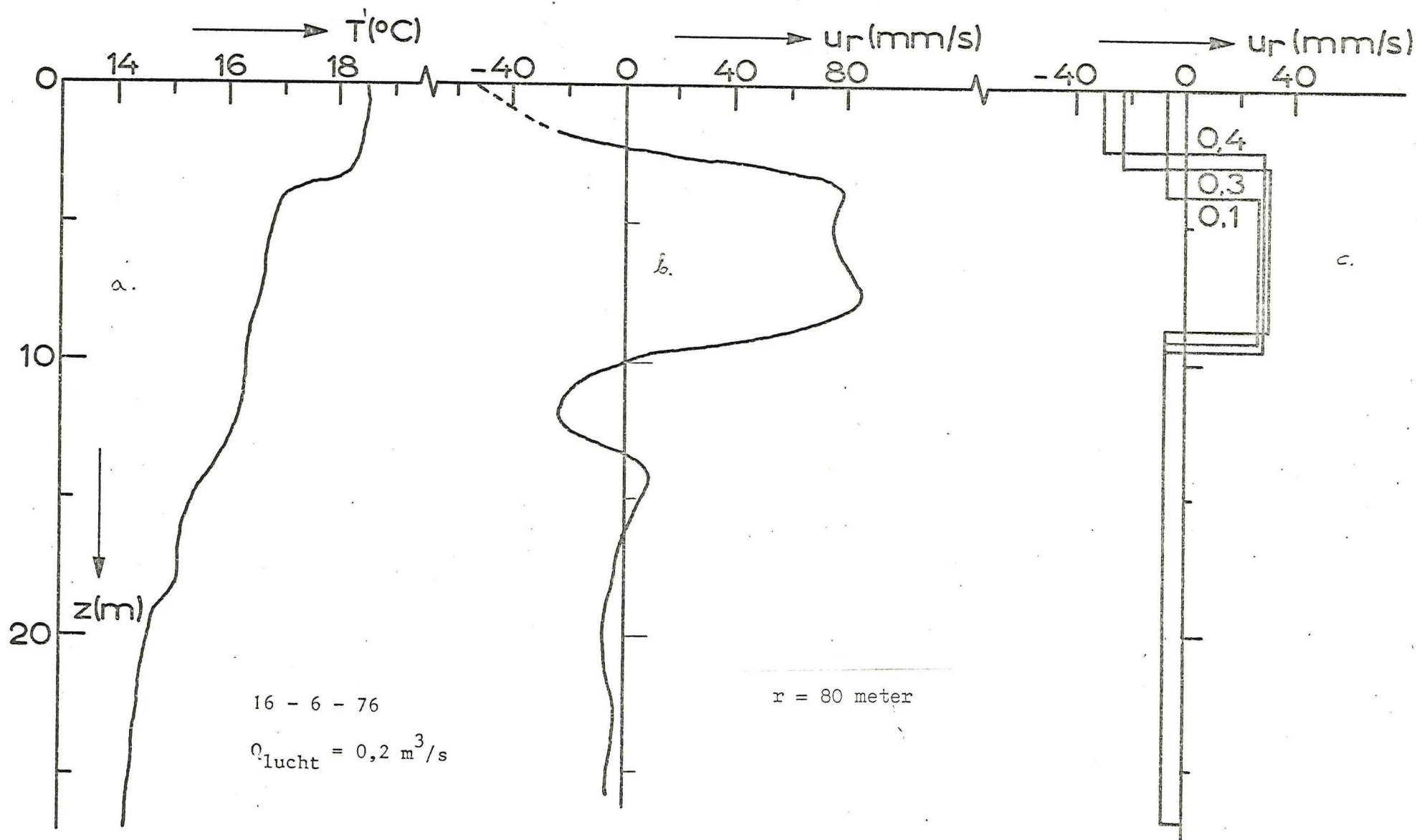


fig. 34 Metingen tijdens destratieficatie proef 1976 (bekken "130")

a. temperatuursprofiel b. snelheidsprofiel c. berekend snelheidsprofiel (met  $C_1 = 0,1/0,3/0,4$ )

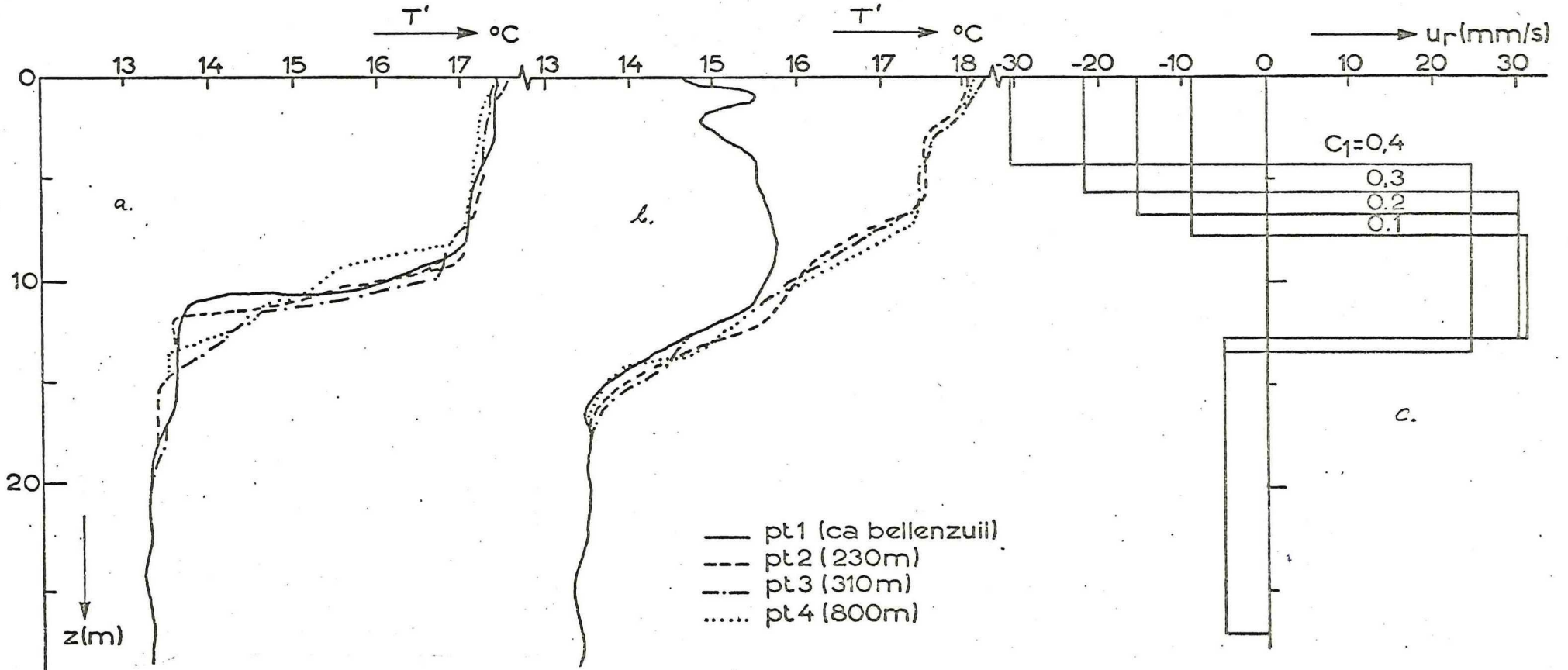


fig. 35 Metingen van het temperatuurverloop voor (a) en tijdens het destratificeren (bekken '130'). (b)  
 c. Berekend snelheidsprofiel op  $r = 80$  m.

$k = 0,08$

H (m)	Hop (m)	P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	Q <sub>ball</sub> (m <sup>3</sup> /s)	C <sub>1</sub>	Q <sub>op</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δe	Δh	Δe + Δh	P <sub>0</sub> -P <sub>e</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	P <sub>m</sub> -P <sub>e</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	Z <sub>0</sub> (m)	H <sub>m</sub> (m)	H <sub>e</sub> (m)	H <sub>2e</sub> (m)
24	5	0,7	0,2	0,1	23,7	0,6	2,4	3,0	0,64	0,55	4,2	5,4	3,9	27,0
				0,2		1,1	3,6	0,66	0,49	4,5	5,6	3,3	28,0	
				0,3		1,4	4,0	0,65	0,45	4,3	6,0	2,9	28,3	
24	10	0,7	0,2	0,4	23,7	1,5	2,5	4,0	0,64	0,44	4,4	7,3	2,3	28,5
				0,1		1,3	3,0	0,58	0,40	3,8	5,1	4,8	23,7	
				0,2		2,2	4,0	0,55	0,32	4,0	6,1	6,7	25,4	
				0,3		2,8	1,9	4,7	0,54	0,28	4,1	7,1	5,7	26,1
				0,4		2,9	1,8	4,6	0,52	0,27	4,1	9,2	4,3	26,5

1976

1975



Uit de figuur blijkt dat ondanks het vergroten van de waarde van  $C_1$  de snelheid in de menglaag niet toeneemt, wel wordt het debiet groter, zodat dit tot gevolg heeft dat de dikte van de menglaag moet toenemen.

Het gevolg is dat de aldus berekende snelheidsverdeling niet in overeenstemming kan worden gebracht met de gemetensnelheidsverdeling. Hierbij dient echter wel te worden opgemerkt dat het gemeten snelheidsprofiel niet voldoet aan de voorwaarde van radiale continuïteit, zodat mogelijk de snelheden in de menglaag gemiddeld gezien kleiner zullen zijn. De orde van grootte van de snelheden in epilimnion en hypolimnion zijn wel redelijk in overeenstemming te brengen met de meetresultaten.

Eenzelfde berekening is ook gedaan voor de destratificatie proef van 1975, eveneens uitgevoerd in het bekken '130' (Groot en v.d. Heyden (6)).

Deze situatie is in zoverre verschillend van de vorige, dat de oorspronkelijke dikte van het epilimnion hierbij ca. 10 m bedroeg. Het dichtheidsverschil kan voor deze metingen eveneens op ca.  $0,7 \text{ kg/m}^3$  worden geschat.

Het resultaat van de berekening is uitgezet in figuur 35.

Helaas is bij deze metingen een vergelijk met het gemeten snelheidsprofiel niet mogelijk en kan alleen de dikte van de menglaag worden vergeleken met het temperatuurprofiel tijdens het destratificeren.

Ook voor deze situatie is het snelheidsprofiel berekend voor verschillende waarden van  $C_1$ . Uit de figuur blijkt dat deze parameter een behoorlijke invloed heeft op dit profiel.

In nevenstaande tabel zijn enkele karakteristieke grootheden opgenomen betreffende de berekeningen voor verschillende waarden van  $C_1$ . Uit deze tabel blijkt dat voor grote  $C_1$ -waarden het debiet in de menglaag een maximum bereikt. Indien de  $C_1$ -waarde verder wordt vergroot wordt de berekening instabiel. Duidelijk blijkt er dus een optimale  $C_1$ -waarde te bestaan waarvoor de grootte van de mengdebieten maximaal is.

Voor de meting van 1976 is het maximale debiet in de menglaag ca.  $95 \text{ m}^3/\text{s}$ . Het debiet van het epilimnion is dan ca.  $35 \text{ m}^3/\text{s}$  en het opgenomen debiet uit het hypolimnion bedraagt dan ca.  $60 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Voor de meting van 1975 kunnen we berekenen dat het maximale debiet in de menglaag ca.  $110 \text{ m}^3/\text{s}$  bedraagt, waarbij de opgenomen debieten uit epilimnion en hypolimnion resp.  $67$  en  $43 \text{ m}^3/\text{s}$  zijn.

Een vergelijk van deze debieten met de geschatte debieten uit de snelheids-

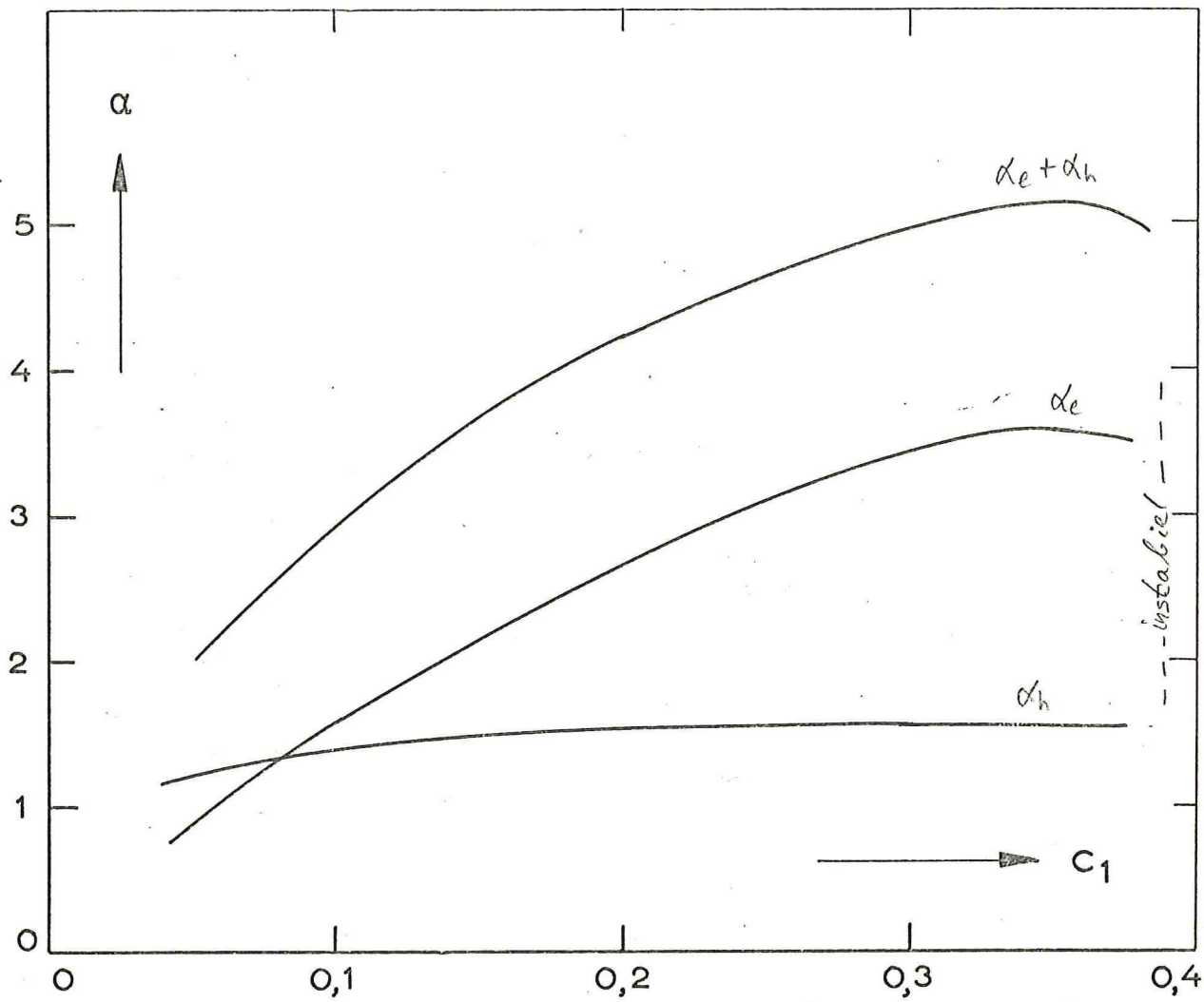


fig. 36 Verandering van de debieten tengevolge van  $C_1$  (standaardsituatie)

metingen en het verloop van de temperatuurprofielen tijdens het destratificeren is vanwege de onnauwkeurigheid van deze schattingen niet goed mogelijk.

### 6.3. Enkele kanttekeningen.

Uit de voorgaande paragraaf kan worden opgemaakt dat de waarde voor de parameter  $C_1$  vermoedelijk aanzienlijk groter is als aanvankelijk op basis van entrainment tengevolge van turbulentie werd verwacht.

Ook blijkt er een waarde voor  $C_1$  te bestaan waarvoor het debiet in de menglaag een maximale waarde bereikt. Nagegaan is of deze tendens ook optreedt bij de in par. 6.1. gebruikte standaardsituatie. Uit figuur 36 blijkt dat dit inderdaad het geval is, voor grote waarden van  $C_1$  blijkt het opgenomen debiet uit het epilimnion zelfs af te nemen. Voor nog grotere waarden is het rekenmodel onstabiel.

Uit het voorgaande zou mogelijk kunnen worden afgeleid dat het veronderstelde entrainment mechanisme tengevolge van turbulentie onjuist is en dat moet worden gedacht aan een onbepaalde opname van epilimnion-water, waarbij dan wel moet worden voldaan aan de voorwaarde voor het farfield.

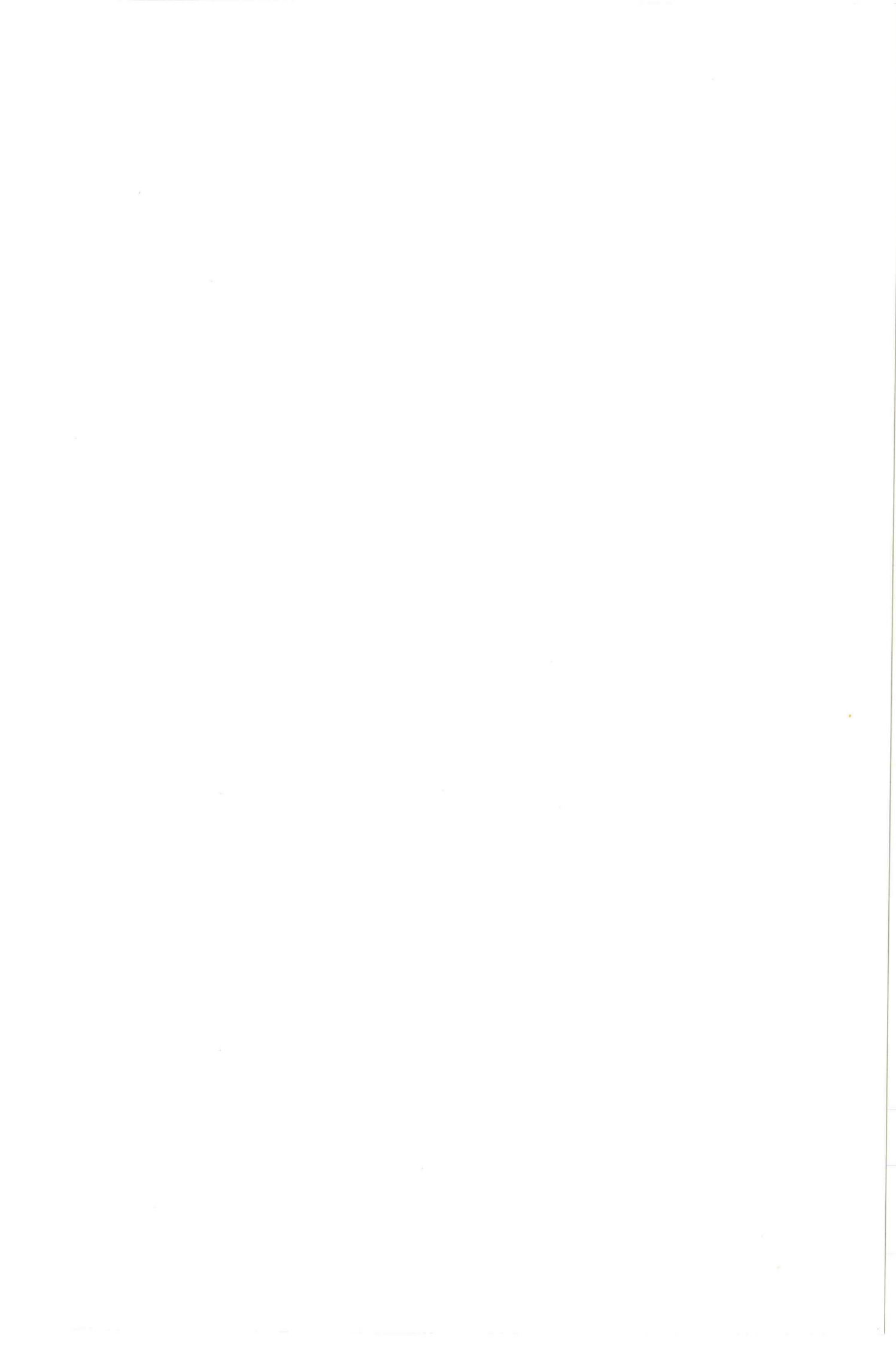
Dit komt eigenlijk neer op de gedachtengang van Rigger (16), die verondersteld dat de stroming zich zo instelt dat een maximale hoeveelheid water wordt opgenomen. Dat wil dus zeggen dat een dusdanige waarde voor  $C_1$  moet worden gezocht dat het mengdebiet maximaal is.

Op deze wijze is dan eigenlijk een extra voorwaarde verkregen waarmee de grootte van  $C_1$  kan worden gekwantificeerd.

Deze gedachtengang dient echter eerst te worden geverifieerd, waarbij het onderzoek zich vooral zal moeten richten op het mechanisme dat de opname van epilimnion-water veroorzaakt.

Het zal duidelijk zijn dat bij het niet meer constant veronderstellen van de waarde van  $C_1$  de afhankelijkheid van de werking van de zuil t.a.v. verandering van het dichtheidsverschil en/of luchtdebiet hierdoor wezenlijk kan veranderen.

Een ander facet dat in dit rekenmodel buiten beschouwing is gebleven is het feit dat eigenlijk water wordt gemengd van verschillende temperatuur,



zodat het gebruik van massabalansen (par. 4.2.) eigenlijk niet is toegestaan. Eigenlijk moet in plaats van een massabalans hierbij gebruik worden gemaakt van een enthalpie-balans waaruit eerst de temperatuur van <sup>de</sup> menglaag wordt berekend en vervolgens aan het water die dichtheid wordt toegekend als hoort bij die betreffende temperatuur.

Een en ander is van belang voor het vinden van de plaats van de menglaag tussen het epilimnion en hypolimnion. Zoals blijkt uit figuur 30 heeft dit weliswaar weinig invloed op het debiet in de menglaag, maar de verhouding van de hoeveelheid opgenomen epilimnion-water t.o.v. het opgenomen hypolimnion-water kan hierdoor enigszins veranderen.



## 7. KONKLUSIES EN AANBEVELINGEN

### 7.1. Konklusies t.a.v. het isotherme model.

Evenals voor een 2-dimensionale jet kan worden afgeleid dat het snelheidsprofiel van een radiale jet mogelijk te beschrijven is met een  $sech^2$ -functie. De theoretische benadering voor de afstroming van de bellenzuil, d.m.v. superpositie van het snelheidsprofiel van de radiale jet op een uniforme terugstroming, levert een theoretisch model voor de bellenzuil dat in grote lijnen overeenkomt met waarnemingen uit experimenten.

Uit het theoretisch model blijkt dat de dikte van de afstromende laag niet lineair toeneemt met de afstand tot de zuil.

Uit het theoretisch model blijkt dat het debiet van de afstroming toeneemt met de afstand tot de zuil, deze toename van het afstromende debiet is echter niet onbeperkt en bereikt op een bepaalde afstand een maximale waarde.

Uit een koppeling van de afstroming aan de opstroming op basis van impulsstromen, blijkt dat het afstromende debiet in de Biesbosch Bekkens maximaal ca. 6 à 8 keer zo groot is dan het debiet van de opstroming.

Dit maximale debiet wordt bereikt op een afstand van ca. 5 à 6 keer de diepte.

Voor de reikwijdte kan worden afgeleid dat deze overeenkomt met een afstand van ca. 5,5 à 7 keer de diepte.

Vanwege de onnauwkeurigheid van de tot nu toe gedane experimenten is nog geen zekerheid verkregen omtrent de geldigheid van de theorie, hoewel bepaalde tendensen wel zijn waargenomen.

### 7.2. Konklusies t.a.v. het gestratificeerde model.

De eerste berekeningen met behulp van het opgestelde rekenmodel voor de werking van de bellenzuil onder gestratificeerde omstandigheden, duiden erop dat het mogelijk lijkt op deze wijze de orde van grootte van de mengdebieten te berekenen. Door de koppeling aan het farfield met behulp van een relatie voor kritische stroming blijkt er nagenoeg geen menging meer op te treden voor hele kleine dichtheidsverschillen.

Uit een vergelijking van de berekeningen met een destratificatie proef in het drinkwaterbekken '130', is gebleken dat de opname van epilimnion-water vermoedelijk veel groter is als oorspronkelijk was voorspeld.

Een onderzoek naar het mechanisme dat zorgt voor de opname van epilimnion water lijkt derhalve noodzakelijk.

De invloed van het luchtdebiet op de mate van opmenging is mede daardoor nog onzeker.

### 7.3. Aanbevelingen.

#### i. M.b.t. de opstroming.

Aangezien uit de metingen van het najaar 1976 erop duiden dat de afhankelijkheid van het luchtdebiet aanmerkelijk sterker was dan op grond van de theorie was voorspeld, verdient het aanbeveling deze theorie nog een kritisch te bezien met betrekking tot de omstandigheden in de Biesbosch bekkens.

Hierbij dient vooral nader te worden onderzocht wat de invloed is op het entrainment- en impulsoverdrachtmechanisme door het roteren van de bellenzuil en de spiraalvormige toestroming t.g.v. van het coriolis-effekt.

#### ii. M.b.t. de isotherme afstroming.

Laboratorium experimenten ter verificatie van het opgestelde theoretische model voor de afstroming van de bellenzuil onder isotherme omstandigheden, alsmede om meer te kunnen zeggen over de uitbreidingsconstante. Onderzoek naar de invloed van coriolis op het radiale stromingsbeeld. Verder onderzoek naar de wijze waarop de koppeling van opstroming en afstroming tot stand komt.

#### iii. M.b.t. het gestratificeerde model.

Onderzoek naar het mechanisme dat zorg draagt voor de opname van epilimnion-water.

Beïnvloeding van de grootte van de uitbreidingsconstante  $k$  tengevolge van dichtheidsverschillen dient eveneens nader te worden onderzocht.

Onderzoek naar een extra vergelijking of voorwaarde t.a.v. de dikte van de menglaag òf de snelheden in de menglaag, òf de snelheden in het epilimnion, waardoor de parameter  $C_1$  als onbekende parameter kan komen te vervallen.

Voor het betrekken van de resultaten op thermische stratificatie, verdient het aanbeveling om de dichtheid van het water in de menglaag en de terugstroming te berekenen met behulp van een balans voor de inwendige energie.

iv. M.b.t. het computermodel.

Verbetering van de stabiliteit van de interne loop door invoering van een variabele stapgrootte.

Bij een uitbouw van het programma met een extra loop, bijv. voor het voldoen aan een bepaalde voorwaarde, of m.b.t. opmenging van een beken in de tijd, verdient het aanbeveling om vanwege de te verbruiken rekentijd het programma te laten uitvoeren in Fortran of Algol.

Literatuurlijst

- (1) H. Bakker, Meesleuring van water in een bellenzuil, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1974.
- (2) A.M.C. Bembaron, Schuifspanningsverdeling en entrainment bij bellenzuilen, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1976.
- (3) S. Groot, Koppeling tussen het verticale en horizontale gedrag van een bellenzuil, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1974
- (4) W.B. v.d. Bos, Bellen blazen by Brabantsche Biesbosch bekkens, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1975.
- (5) J.P. v.d. Straaten, Bepaling van de reikwijdte van bellenzuilen voor het gebruik in drinkwaterbekkens, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1974.
- (6) S. Groot en H.M.C. v.d. Heyden, Onderzoek naar de mechanismen van menging in een gestratificeerd spaarbekken tengevolge van een bellenzuil, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1976.
- (7) W.B. v.d. Bos, Ontwikkeling van Temperatuurprofielen in Meren en Spaarbekkens, Lab. Fys. Techn., T.H. Delft, 1976.
- (8) H. Tennekes en Lumley, A first course in turbulence, MIT Pres Cambridge Masseurhusses, 1972.
- (9) J.O. Hinze, Turbulence, Mc Graw-Hill, 1959, 1976.
- (10) G.N. Abramovich, The theorie of turbulent jets, MIT Press, 1963.
- (11) R.E. Bird, et. al., Transport phenomena, Wiley, New York - London, 1966.
- (12) C. Kranenburg, Invloed van de coriolisversnelling op de gelaagde stroming in het farfield van een bellenzuil, Lab. v. Vloeistofmechanica, T.H. Delft, juli 1976.
- (13) J.C. Schönfeld, Collegediktaat Dichtheidsstromen en interne golven, Civiel Techniek, T.H. Delft, 1976.
- (14) H. Römgens, Destratificatie met behulp van een bellenzuil, Lab. v. Vloeistofmechanica, T.H. Delft, 1976.



Literatuurlijst (vervolg)

- (15) C. Kranenburg, Bovengrens menging t.g.v. kritische stroming in farfield, intern rapport, Lab. v. Vloeistofmechanica, T.H. Delft, nov. 1976.
- (16) B.P. Rigter, Density induced return currents in outlet channels, Journal of Hydr. Div., proc. ASCE, Vol.-96, 1970, No Hy 2, (529-546)
- (17) L.H.J. Goossens en J.A. van Pagee, Electronic mixing device in laser doppler velocimetry, Journal of Phys. E, Sci. Instrum., Vol.-9, 1976, (554-556)
- (18) J.A. van Pagee, Rapport over het meten met een laser doppler snelheidsmeter, Lab. v. Fys. Techn., T.H. Delft, 1975.
- (19) Handbook of Chem. and Phys., 55ed., 1974-1975.



Bijlage I (Navier-Stokes vgl. en orde afschatting)

De continuïteitsvgl. en bewegingsvgl. (Navier-Stokes) voor turbulente stroming (stationair, tijdgemiddeld) in poolcoördinaten zijn (9), (11),

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r u_r + \cancel{\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} u_\varphi} + \frac{d}{dz} u_z = 0$$

$$r\text{-ri. } u_r \frac{du_r}{dr} + \cancel{\frac{u_\varphi}{r} \frac{du_r}{d\varphi}} + u_z \frac{du_r}{dz} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} +$$

$$\nu \left( \frac{d^2}{dr^2} u_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_r + \cancel{\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} u_r} + \frac{d^2}{dz^2} u_r - \frac{u_r}{r^2} - \cancel{\frac{2}{r^2} \frac{du_r}{d\varphi}} \right) +$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \overline{u_r'^2} - \cancel{\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} \overline{u_r' u_\varphi'}} - \frac{d}{dz} \overline{u_r' u_z'} + \frac{\overline{u_\varphi'^2}}{r} + \cancel{\nu_0 u_\varphi}$$

$$\varphi\text{-ri. } u_r \frac{du_\varphi}{dr} + \cancel{\frac{u_\varphi}{r} \frac{du_\varphi}{d\varphi}} + u_z \frac{du_\varphi}{dz} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{dp}{d\varphi} +$$

$$\nu \left( \frac{d^2}{dr^2} u_\varphi + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_\varphi + \cancel{\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} u_\varphi} + \frac{d^2}{dz^2} u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{du_r}{d\varphi} \right) +$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} \overline{u_\varphi'^2} - \frac{d}{dr} \overline{u_\varphi' u_r'} - \frac{d}{dz} \overline{u_\varphi' u_z'} - 2 \frac{\overline{u_\varphi' u_r'}}{r} - \cancel{\nu_0 u_r}$$

$$z\text{-ri. } u_r \frac{du_z}{dr} + \cancel{\frac{u_\varphi}{r} \frac{du_z}{d\varphi}} + u_z \frac{du_z}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} +$$

$$\nu \left( \frac{d^2}{dr^2} u_z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_z + \cancel{\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} u_z} + \frac{d^2}{dz^2} u_z \right) +$$

$$-\frac{d}{dz} \overline{u_z'^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \overline{r u_r' u_z'} - \cancel{\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} \overline{u_\varphi' u_z'}} + g$$

De doorgestreepte termen vallen weg bij de aanname van radiaalsymmetrie.

Bijlage I (vervolg)

Orde afschatting voor de termen van de bewegingsvgl. voor de r-ri. gaat als volgt,

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$\frac{u_r^2}{L} \quad \frac{u_r^2}{L} \quad \frac{u_\varphi^2}{L}$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) +$$

$$\nu \frac{u_r^2}{L^2} \quad \nu \frac{u_r^2}{L^2} \quad \nu \frac{u_r^2}{L^2} \quad \nu \frac{u_r}{L^2}$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r' u_\varphi'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_\varphi' u_z'} - 2 \frac{\overline{u_\varphi' u_r'}}{r} - \nu_0 u_r$$

$$\frac{u_\varphi^2}{L} \quad \frac{u_\varphi^2}{L} \quad \frac{u_\varphi^2}{L}$$

De doorgestreepte termen zijn te verwaarlozen indien wordt verondersteld

$$l \ll L$$

Bijlage II (Afleiding Gelijkvormigheidscondities)

Substitutie van de vgl. (11a,b,d) in de continuïteitsvgl. (2.1) geeft,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta) + \frac{d}{dz} u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^b g(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{r} (a+1) \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta) + u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a \frac{d}{dr} f(\theta) + u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^b \frac{d}{dz} g(\theta) = 0$$

daar  $\theta = \frac{z/L_0}{(r/L_0)^d}$ , is dit gelijk aan,

$$\frac{u_0}{r} (a+1) \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta) + u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f'(\theta) (-d) \frac{\theta}{r} + \frac{u_0}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{b-d} g'(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{L_0} (a+1) \left(\frac{r}{L_0}\right)^{a-1} f(\theta) - \frac{u_0}{L_0} d \left(\frac{r}{L_0}\right)^{a-1} f'(\theta) \theta + \frac{u_0}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{b-d} g'(\theta) = 0$$

delen door  $\frac{u_0}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{a-1}$  geeft,

$$(a+1) f(\theta) - d f'(\theta) \theta + \left(\frac{r}{L_0}\right)^{b-d-a+1} g'(\theta) = 0$$

Uit de eindigheidsconditie blijkt derhalve,

$$b - d - a + 1 = 0 \quad (2.12a)$$

Substitutie van de vgl. (11a,b,c,d) in de bewegingsvgl. (2.10) geeft,

$$u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta) \frac{d}{dr} u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta) + u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^b g(\theta) \frac{d}{dz} u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta) +$$

$$- \frac{d}{dz} u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^c h(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{u_0^2}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a-1} f^2(\theta) + u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a} f(\theta) f'(\theta) (-d) \frac{\theta}{r} + \frac{u_0^2}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{a+b-d} g(\theta) f'(\theta) +$$

$$- \frac{u_0^2}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{c-d} h'(\theta) = 0$$

delen door  $\frac{u_0^2}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a-1}$  geeft,

$$a f^2(\theta) - d f(\theta) f'(\theta) \theta + \left(\frac{r}{L_0}\right)^{-a+b-d+1} g(\theta) f'(\theta) - \left(\frac{r}{L_0}\right)^{c-d-2a+1} h'(\theta) = 0$$

Bijlage II (vervolg)

Uit de eindigheidsvoorwaarde volgt,

$$-a + b - d + 1 = 0 \quad (=2.12a)$$

$$\text{en} \quad c - d - 2a + 1 = 0 \quad (2.12b)$$

Met behulp van de continuïteitsvgl. (2.1) is af te leiden,

$$u_z \frac{du_r}{dz} = \frac{d}{dz} u_r u_z - u_r \frac{du_z}{dz} = \frac{d}{dz} u_r u_z + u_r \frac{du_r}{dz} + \frac{u_r^2}{r}$$

dit ingevuld in de bewegingsvgl. (2.10) geeft,

$$2 u_r \frac{du_r}{dz} + \frac{u_r^2}{r} + \frac{du_r u_z}{dz} + \frac{d \overline{u_r' u_z'}}{dz} = 0$$

hetgeen gelijk is aan,

$$\frac{1}{r} \frac{d r u_r^2}{dz} + \frac{d}{dz} u_r u_z + \frac{d \overline{u_r' u_z'}}{dz} = 0$$

Integratie naar  $z$  en  $\varphi$  geeft,

$$2\pi \frac{d}{dz} \int_0^\infty r u_r^2 dz + 2\pi r u_r u_z \Big|_{0(z)}^\infty + 2\pi r \overline{u_r' u_z'} \Big|_{0(z)}^\infty = 0$$

daar op  $z=0$   $u_z=0$  en  $\overline{u_r' u_z'}=0$

en voor  $z \rightarrow \infty$   $u_z \rightarrow 0$  en  $\overline{u_r' u_z'} \rightarrow 0$ , volgt hieruit,

$$\frac{d}{dz} \int_0^\infty r u_r^2 dz = 0$$

Dit komt overeen met behoud van impuls.

Integratie naar  $r$  geeft,

$$\int_0^\infty r u_r^2 dz = \text{constant.}$$

zodat,

$$\int_0^\infty r u_r^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a} \sqrt{f(\theta)} dz = L_0 u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a+1} \int_0^\infty \sqrt{f(\theta)} dz =$$

$$L_0^2 u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a+1+d} \int_0^\infty \sqrt{f(\theta)} d\theta = \text{constant.}$$

Er moet dus gelden,

$$2a + d + 1 = 0 \quad (2.12c)$$

Bijlage II (vervolg)

De aanname  $\frac{u_1' u_2'}{u_1^2}$  is geen functie van  $r$  geeft,

$$\frac{u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^c h(\theta)}{u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2a} f(\theta)} = \left(\frac{r}{L_0}\right)^{c-2a} \frac{h(\theta)}{f(\theta)} = \text{geen functie van } r$$

$$\Rightarrow c - 2a = 0 \quad (2.12d)$$

De aanname  $v_t = \frac{u_1' u_2'}{u_1 u_2}$  is geen functie van  $r$  geeft,

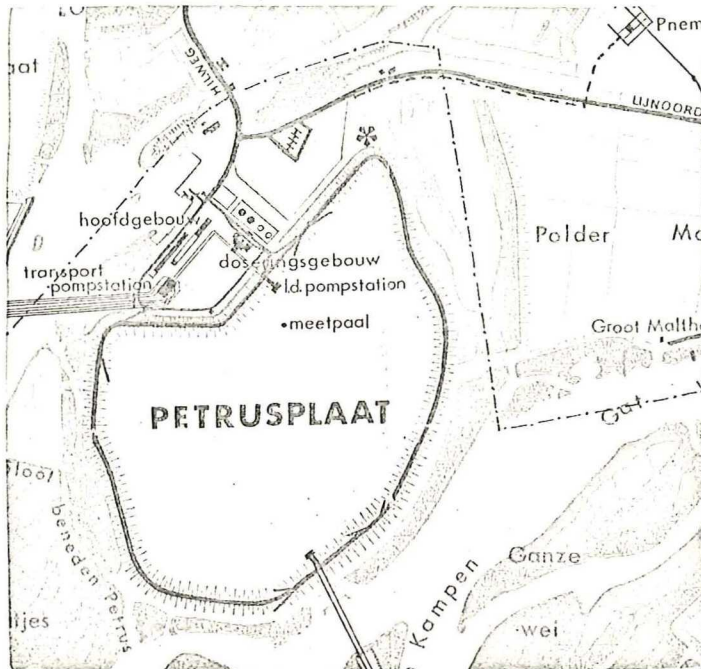
$$\frac{u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^c h(\theta)}{\frac{d}{dz} u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^a f(\theta)} = \frac{u_0^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^c h(\theta)}{\frac{u_0}{L_0} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{a-d} f'(\theta)} = L_0 u_0 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{c-a+d} \frac{h(\theta)}{f'(\theta)} \neq f(r)$$

$$\Rightarrow a - c - d = 0 \quad (2.12e)$$



Bijlage III

Metingen aan de afstromende laag van een bellenzuil in de Petrusplaat  
onder isotherme omstandigheden.



Meetrapport: N. Nederveen  
J.A. van Pagee

december 1976

Inhoudsopgave

A	Inleiding	1
B	Meetmethoden	1
C	Meetresultaten	2
D	Interpretatie meetresultaten	4
E	Conclusies en aanbevelingen	6

Metingen aan de afstromende laag van een bellenzuil in de Petrusplaat onder isotherme omstandigheden.

A. Inleiding:

Op 19,20,21 oktober en 9 november j.l. zijn er metingen gedaan aan de meest westelijke bellenzuil in de Petrusplaat (diepte ca 15 m.).

Het doel van deze metingen was om na te gaan in hoeverre een opgestelde theorie voor de afstroming van een bellenzuil in overeenstemming is met de werkelijke afstroming in het prototype.

Teneinde de theorie goed te kunnen verifiëren, zijn op verschillende afstanden van de bellenzuil bij 2 verschillende luchtdebieten ( $5,1 \text{ m}^3/\text{min.}$  en  $10,2 \text{ m}^3/\text{min.}$ ) snelheidsprofielen gemeten.

Voorwaarde voor zinvolle metingen was betrekkelijk 'windstil' weer, alsmede isotherme omstandigheden. Aangezien men in het najaar verzekerd is van isothermie in het bekken is aan deze periode de voorkeur gegeven.

Een nadeel van deze tijd van het jaar is dat het KNMI slechts met een geringe betrouwbaarheid 'windstil' weer kan voorspellen, waardoor niet alle metingen onder de meest ideale omstandigheden zijn uitgevoerd.

B. Meetmethoden:

snelheidsmeters

De snelheidsmetingen zijn verricht met de Mini Akwa (akoestische snelheidsmeter van de TPD) en een micromolen (fabrikaat W.L.)

Voor de Mini Akwa is gebruik gemaakt van dezelfde drijverconstructie als waarmee de metingen in mei/juni j.l. zijn uitgevoerd (zie verslag H. Röm-gens).

Deze drijverconstructie was nodig om de invloed van bootschommelingen en golfbewegingen te minimaliseren.

Een nadeel van deze meetconstructie is, dat het hiermee niet mogelijk is om dichter dan ca 2 meter onder het oppervlak te meten.

Aangezien te verwachten is dat juist in de bovenste laag de meeste informatie zit over hoe de afstromende laag zich ontwikkelt, waren vooral ook metingen noodzakelijk in de bovenste 2 meter.

In dit gebied zijn de metingen verricht met een micromolen die middels een uitbouwconstructie op ca 80 cm. van de boot was bevestigd.

(Opm.: Vanwege diverse complicaties is afgezien van bevestiging van de micromolen aan de drijverconstructie).

meettijd

Tijdens proefmetingen (13,14 oktober) bleek de afstroming erg instabiel te zijn o.a. vanwege het roteren van de bellenkolom. Omdat één rotatie ca. 10 à 15 min. kon duren was het noodzakelijk om 'minstens' gedurende ca. 20 à 30 min. te meten.

(Opm.: Op grotere afstanden en grotere diepten kon de tijdsduur van een meting enigszins worden bekort.)

Ondanks deze lange meettijd werden de onnauwkeurigheden in de snelheidsmetingen voornamelijk veroorzaakt door deze instabiliteiten.

#### hoogteinstelling

Gemeten is op diverse diepten, 0 - 1,5 meter (4 à 5 metingen met micrometer)  
1,75-14 meter (8 à 9 metingen met Mini Akwa)

De hoogte van de micrometer werd ingesteld met een onnauwkeurigheid van ca 5 cm.

De hoogte instelling van de Mini Akwa geschiedde op ca. 15 cm. nauwkeurig.

#### afstandsmeting

Meetseries zijn gedaan op verschillende afstanden van de bellenzuil, variërend van ca. 25 tot 75 meter. Dichterbij meten was niet zinvol vanwege de cirkulatie diameter van de bellenkolom (ca. 20 m). Verder dan 75 m. bleek vanwege windinvloeden en de geringe stroomsnelheden eveneens weinig zinvol.

De afstandsmetingen zijn gedaan m.b.v. boeien die door de schippers van de Biesbosch op verschillende afstanden waren uitgelegd. Dit uitzetten van de boeien was geschied door een staaldraad met afstandsmarkeringen te spannen over de bellenzuil.

Helaas zijn halverwege de meetseries bij het verhalen van de boot enkele boeien verplaatst zodat verder de afstandsmetingen tot de bellenzuil zijn verricht met niet rekkend touw voorzien van afstandsmarkeringen.

De nauwkeurigheid waarmee deze metingen konden worden uitgevoerd is geschat op ca. 2 à 3 meter.

De boeienlijn was verder erg nuttig voor het uitrichten van de boot in de richting van de zuil.

#### windmetingen

De windsnelheid en richting is bepaald door schatting van waarnemers (ervaren zeilers) op de boot, hetgeen is geverifieerd met de registratie-apparatuur van de Biesbosch, waarvan het windmolentje is geplaatst bovenop de meettoren in het bekken. De waarnemingen bleken goed in overeenstemming te zijn met de geregistreerde waarden.

### C. Meetresultaten:

De resultaten van de verschillende metingen zijn opgenomen in de tabellen 1 t/m 9.

De vermelde waarden zijn gemiddelden over de meettijd per punt.

In figuur 1 is de plaats in het bekken aangegeven waar de metingen zijn verricht alsmede de oriëntatie van de hoek  $\alpha$  die de stromingsrichting bepaalt.

Opmerking: Met de micromolen zijn alleen de snelheden in de richting van de bellenzuil gemeten.



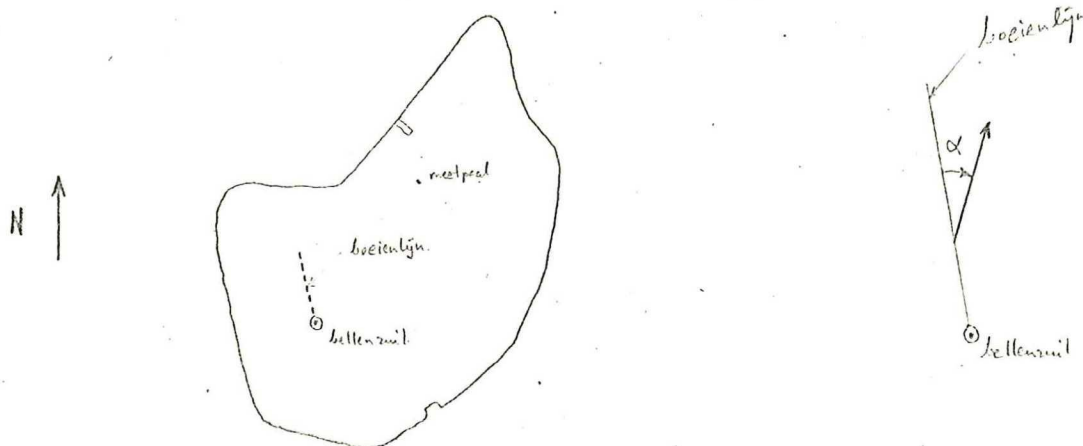


fig 1. situatie schets.

De resultaten van de metingen zijn uitgezet in de figuren 2 en 3, resp. behorende bij luchtdebiet  $5,1 \text{ m}^3/\text{min.}$  en  $10,2 \text{ m}^3/\text{min.}$

Uit de figuren blijkt dat er over het algemeen een duidelijke tangentiële stroming om de zuil is. Vermoedelijk is dit te wijten aan het coriolis effect. Aangezien de instelling van coriolisstroming tijdsafhankelijk is zijn tevens in de figuur de perioden vermeld hoelang de bellenzuil aanstond op het moment van meting. Het valt op dat in de afstromende laag de tangentiële snelheid in dezelfde richting is als bij de toestroming.

Aangezien dichtbij de zuil voornamelijk de toestroming wordt beïnvloed door coriolis lijkt het alsof de bovenlaag als het ware wordt meegesleurd in dezelfde tangentiële richting. Dit effect kan o.a. worden verklaard m.b.v. wrijvingseffecten. Een ander mogelijk mechanisme is dat water uit de toestromende laag via entrainment wordt opgenomen in de afstromende laag.

Ter verificatie van de afstroomtheorie zijn de radiële snelheden uitgezet in de figuren 4 en 5. In de grafieken zijn tevens na grafische curve-fitting (2 constanten  $m$  en  $k$  zijn bepaald) de meest aannemelijke theoretische lijnen ingetekend. Het blijkt dat de meetpunten een vrij grote spreiding vertonen. De theoretische lijnen lijken het geheel echter op vrij redelijke wijze te benaderen.

De grote onnauwkeurigheid waarmee de metingen zijn verricht moeten grotendeels worden toegeschreven aan instabiliteiten. Omdat de tangentiële snelheden vrij groot zijn kunnen vooral ook hoekfouten debet zijn aan significante afwijkingen.

Ondanks dat bij sommige metingen de wind soms tot matig kon oplopen is hiervan weinig terug te vinden in de metingen. Vergelijken we bijv. de metingen van 21-10 ( $6 \text{ à } 7 \text{ m/s.}$ ) met die van 4-11 ( $2 \text{ à } 3 \text{ m/sec.}$ ) dan zijn er geen significante verschillen.

D. Interpretatie meetresultaten:

Teneinde iets meer te kunnen zeggen over welke conclusies uit de resultaten kunnen worden gehaald is het noodzakelijk iets te vertellen over het theoretisch model dat voor de afstromende laag is opgesteld.

Dit model is nauw verwant aan de theoretische oplossing voor een 2-dimensionale jet. In verband met de voorwaarde dat het debiet van heen- en terugstroming gelijk moet zijn is superpositie van een propstroom verondersteld op de oplossing zonder terugstroming.

Het theoretisch resultaat voor de horizontale snelheidsverdeling is

$$u_r = U_R \left( \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{\ell}\right) - \frac{\ell}{H} \tanh\left(\frac{H}{\ell}\right) \right)$$

voor de karakteristieke snelheid geldt

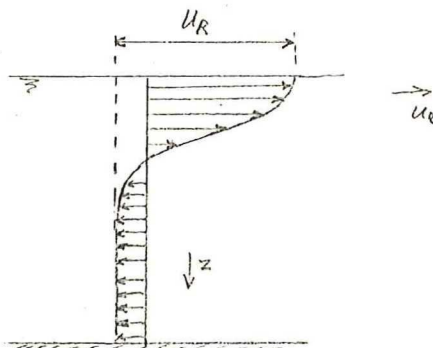
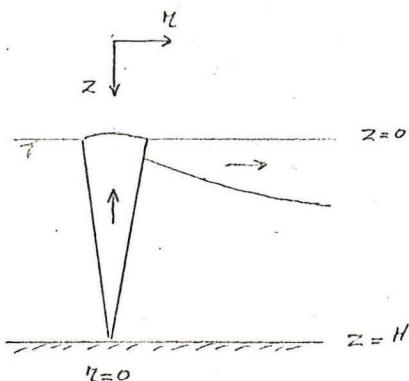
$$U_R = \frac{m}{\ell}$$

Voor de karakteristieke breedte-maat geldt

$$\ell = k \cdot r.$$

$k$  is dus een soort uitbreidingsconstante en  $m$  een constante die afhangt van de kinetische energie van het opstomende water.

(Voor 2-dimensionale jets geldt  $k=0,06$  à  $0,08$ )



Als we de geleverde kinetische energie van de opstoming (zie A. Bembaron) gelijkstellen aan de kinetische energie in de afstromende laag vinden we de relatie

$$\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0,45 Q_{\text{lucht}}^{1/3} H^{-0,38}$$

Uit de metingen zijn de volgende waarden voor de constanten in een  $k$  bepaald:

$Q_{\text{lucht}} \text{ (m}^3\text{/min)}$	$k$	$\frac{m}{H} \text{ (m/s)}$	$\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}}$	$\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (volgens theorie)
5,1	0,070	0,019	0,073	0,071
10,2	0,080	0,034	0,120	0,089
8,4	0,040	0,021	0,105	0,083

ter vergelijking  
voorjaar 1974)

(fout afschatting)  $\pm 0,2$   $\pm 0,005$   $\pm 0,002$   $\pm 0,005$



Opvallend is het verschil in k waarden tussen de eerder gedane metingen in 1974 (ook in de Petrusplaat) en deze metingen. Aangezien de metingen in 1974 bij 'echt' windstil weer zijn uitgevoerd, werd in eerste instantie verondersteld dat de uitbreidingsconstante k afhankelijk zou zijn van de mate van turbulentie in het bekken.

Deze gedachte is echter niet bevestigd door vergelijking van de nu gedane metingen met weinig wind (4-11) met de metingen met veel wind (21-10).

Verder kan worden opgemerkt dat bij de in 1974 uitgevoerde meetserie de meettijd aanzienlijk korter was (ca. 3 min.) zodat deze meting onbetrouwbaar is.

In figuur 6 is  $\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}}$  dubbellogaritmisch uitgezet tegen  $Q_{lucht}$ ; tevens is de volgens de theorie verwachte afhankelijkheid uitgezet. Uit de figuur blijkt dat de theoretische waarden voor  $\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}}$  qua orde van grootte overeenkomen met de gemeten waarden.

De  $Q_{lucht}$  afhankelijkheid wijkt echter af.

Uit de metingen blijkt:

$$\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}} \div Q^{0,7} \text{ (theorie: } Q^{0,33})$$

Dit verschil in afhankelijkheid is duidelijk significant en vereist een nader onderzoek betreffende aspecten als,

- relatieve belsnelheid
- invloed compressibiliteit
- entrainment-/impulsoverdrachtmechanisme bij roterende bellenzuil of bij bellenzuil met spiraalvormige toestroming t.g.v. het coriolis effect.
- eventueel verlies van kinetische energie bij overgang opstroming/afstroming.

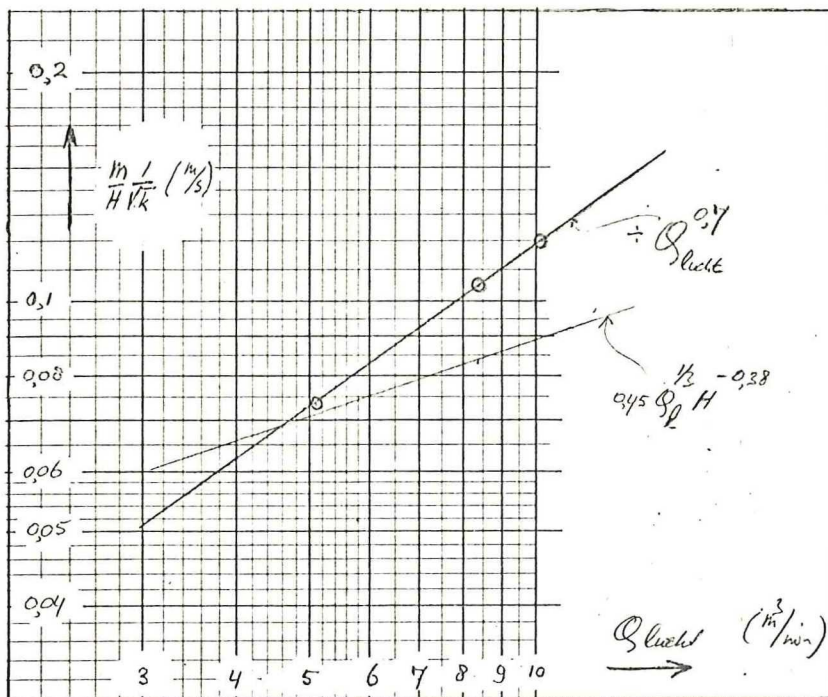


fig 6.  $\frac{m}{H} \frac{1}{\sqrt{k}}$  uitgezet als functie van het luchtdebiet.

## E. Conclusies en aanbevelingen

### Conclusies:

Vooral door de instabiliteit van de stroming laat de nauwkeurigheid van de metingen veel te wensen over. Hierdoor kan niet duidelijk worden aangetoond of de afgeleide theorie een juiste beschrijving geeft van de wijze waarop de afstroming plaatsvindt.

De Theorie is echter niet in strijd met de metingen.

De tangentiële stroomsnelheden in het toestromende gebied (vermoedelijk t.g.v. het coriolis effect) zijn qua orde van grootte gelijk aan de afstroomsnelheden aan het oppervlak en kunnen derhalve niet zo maar buiten beschouwing worden gelaten. Vooral ook omdat de afstromende laag door deze tangentiële snelheden lijkt te worden beïnvloed.

De uitbreidingsconstante  $k$  is niet significant afhankelijk van de windsnelheid.

De kinetische energie in de afstromende laag blijkt significant sterker afhankelijk te zijn van het luchtdebiet dan op grond van de theorie was verwacht.

(Opm.: In hoeverre deze gunstige invloed ook voordelig is bij het opheffen van stratificatie, zal moeten blijken uit een beschouwing van de werking van de bellenzuil onder gestratificeerde omstandigheden).

### Aanbevelingen

Door de grote fluctuaties van de stroomsnelheden worden extra fouten geïntroduceerd door de niet-lineariteit van de mini Akwa. Het uit-middelen van de signalen veroorzaakt daardoor extra fouten in het uiteindelijk resultaat terwijl ook een momentane verwerking dubieus is vanwege de verschillende tijdconstanten in de verwerkingsapparatuur van de beide meetlijnen van de mini Akwa.

Een nadere beschouwing van de afstroomtheorie, met invoering van het coriolis effect, lijkt noodzakelijk. Tevens zal moeten worden onderzocht door welke factoren de reikwijdte wordt bepaald.

Alvorens nieuwe (isotherme) metingen in de Biesbosch bekkens aan te bevelen lijkt het ons vanwege de onnauwkeurigheid van dergelijke metingen zinvol om eerst de theorie te toetsen d.m.v. metingen in laboratorium modellen.

Daarna kunnen dan mogelijk gerichtere metingen worden gedaan naar de afhankelijkheid van het luchtdebiet en de diepte.

Meetresultaten bij een luchtdebiet van  $5,1 \text{ m}^3/\text{minuut}$

datum : 20-10-76		
begin meting : 14.00 uur		
eind meting : 15.45 uur		
afstand : 25 m		
windrichting : zzw		
windsnelheid : $6\text{--}7 \text{ m/s}$		
z(m)	u(cm/s)	$\alpha(o)$
0,30	18,5	-
0,60	16,1	-
1,00	9,9	-
1,40	7,4	-
1,73	5,8	338
2,10	4,2	327
2,75	3,5	340
3,75	3,2	260
5,75	5,5	253
8,75	6,8	250
12,75	7,3	252

1

datum : 19-10-76		
begin meting : 10.30 uur		
eind meting : 13.00 uur		
afstand : 30 m		
windrichting : zo		
windsnelheid : $5\text{--}6 \text{ m/s}$		
z(m)	u(cm/s)	$\alpha(o)$
0,10	15,6	-
0,35	10,5	-
0,60	9,3	-
1,00	7,4	-
1,25	7,4	-
1,63	7,1	344
2,05	5,8	338
2,73	4,3	327
4,75	1,7	267
7,75	4,0	190
11,75	4,8	181

2

datum : 19-10-76		
begin meting : 13.30 uur		
eind meting : 16.00 uur		
afstand : 45 m		
windrichting : zo		
windsnelheid : $4\text{--}5 \text{ m/s}$		
z(m)	u(cm/s)	$\alpha(o)$
0,30	9,8	-
0,75	7,6	-
1,25	6,8	-
1,40	5,3	-
1,70	5,4	349
2,75	2,4	353
2,75	3,7	353
4,75	0,3	45
6,80	2,3	162
9,75	2,9	171
12,75	2,2	177

3

datum : 20-10-76		
begin meting : 9.30 uur		
eind meting : 11.50 uur		
afstand : 75 m		
windrichting : z		
windsnelheid : $5\text{--}6 \text{ m/s}$		
z(m)	u(cm/s)	$\alpha(o)$
0,30	6,7	-
0,60	4,4	-
1,00	3,0	-
1,40	<2,0	-
1,63	4,6	335
2,00	4,1	331
3,00	4,1	315
4,00	2,3	327
5,75	1,4	263
7,75	1,2	260
9,75	2,3	254
12,75	5,5	227

4



Meetresultaten bij een luchtdebiet van  $10,2 \text{ m}^3/\text{minuut}$

datum : 21-10-76 begin meting : 9.00 uur eind meting : 11.30 uur afstand : 25 m windrichting : zzw windsnelheid : $4\text{à}5 \text{ m/s}$		
z (m)	u (cm/s)	$\alpha$ (o)
0,05	23,1	-
0,30	25,4	-
0,60	19,7	-
1,00	16,0	-
1,40	11,4	-
1,75	10,6	335
2,05	9,3	326
2,75	7,8	304
3,75	6,4	277
4,75	7,6	278
6,75	6,7	266
9,75	7,1	260
12,75	10,0	257

datum : 4-11-76 begin meting : 10.30 uur eind meting : 12.15 uur afstand : 35 m windrichting : zw-w-nw windsnelheid : $2\text{à}3 \text{ m/s}$		
z (m)	u (cm/s)	$\alpha$ (o)
0,30	17,1	-
0,60	15,3	-
1,00	13,2	-
1,40	9,2	-
1,85	8,1	349
2,25	6,8	362
3,00	8,9	326
4,00	2,1	290
5,00	2,3	199
6,75	5,9	203
8,80	7,2	209
10,75	7,4	211
12,75	7,0	225

5

6

datum : 4-11-76 begin meting : 15.00 uur eind meting : 16.00 uur afstand : 47 m windrichting : w windsnelheid : $2\text{à}3 \text{ m/s}$		
z (m)	u (cm/s)	$\alpha$ (o)
0,45	13,3	-
0,90	7,4	-
1,40	6,9	-
1,80	8,2	350
2,40	6,8	362
4,50	3,2	348
6,50	1,4	246
9,50	1,3	189
13,00	4,0	168

datum : 21-10-76 begin meting : 12.00 uur eind meting : 14.30 uur afstand : 55 m windrichting : zw windsnelheid : $7\text{à}8 \text{ m/s}$		
z (m)	u (cm/s)	$\alpha$ (o)
0,30	10,8	-
0,60	10,2	-
1,05	9,0	-
1,40	7,2	-
1,75	9,6	335
2,10	9,2	336
2,75	10,8	315
4,75	5,2	294
5,75	3,7	272
8,75	6,2	249
11,75	6,5	241
14,75	8,0	233

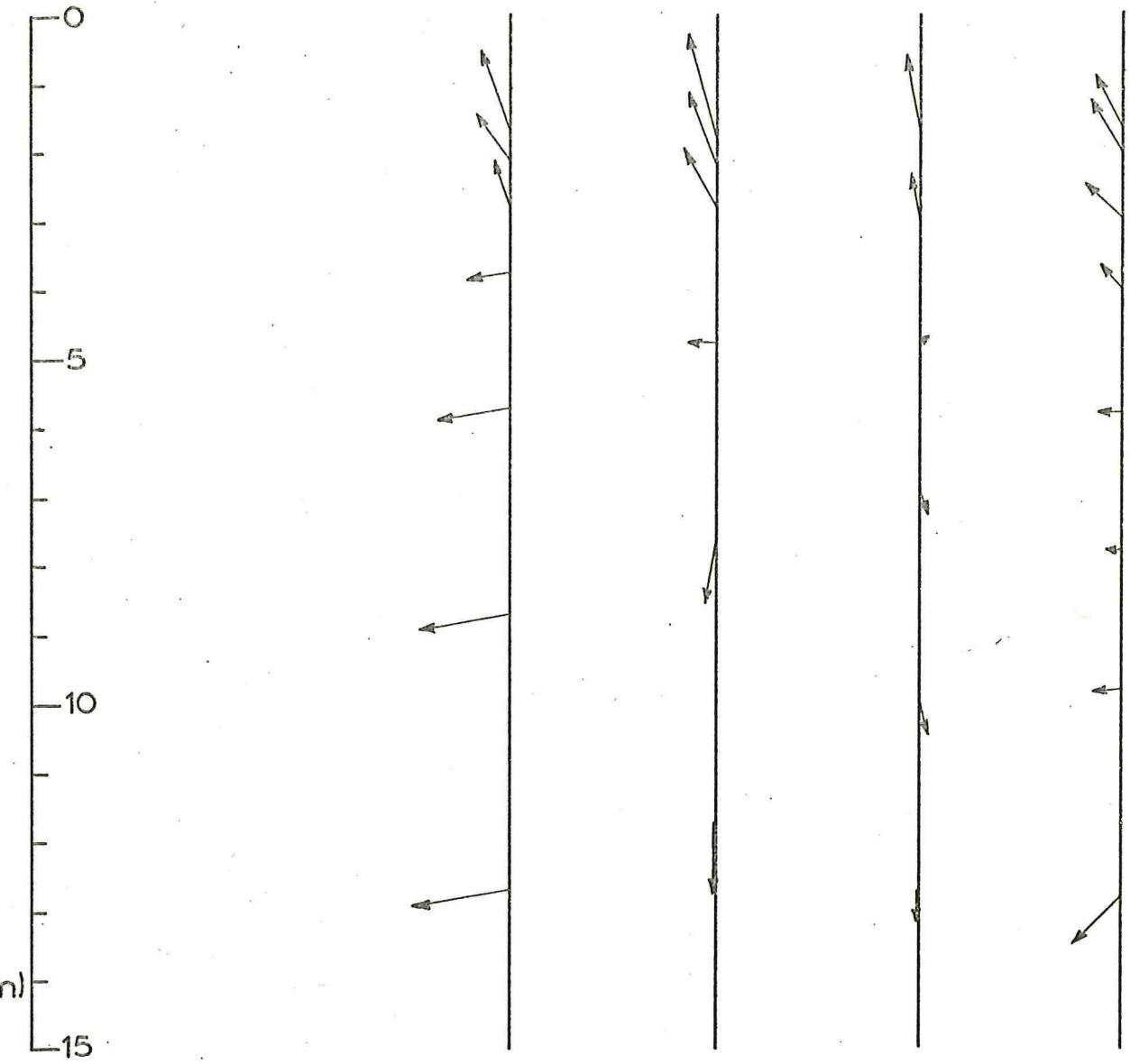
datum : 4-11-76 begin meting : 12.30 uur eind meting : 14.45 uur afstand : 66 m windrichting : nw windsnelheid : $3\text{à}5 \text{ m/s}$		
z (m)	u (cm/s)	$\alpha$ (o)
0,30	7,0	-
0,60	8,7	-
1,00	6,9	-
1,40	5,8	-
1,70	7,8	329
2,05	7,1	342
3,00	8,4	330
4,00	5,4	320
5,00	1,8	310
6,75	6,1	318
8,80	2,4	337
10,75	0,6	149
13,75	7,9	145

7

8

9

10cm/s



plaats:	25m	30m	45m	75m
---------	-----	-----	-----	-----

tijd na aanzetten:	45-47 uur	18-20 uur	22-24 uur	42-44 uur
--------------------	-----------	-----------	-----------	-----------

windrichting:

5m/s



oriëntatie richting

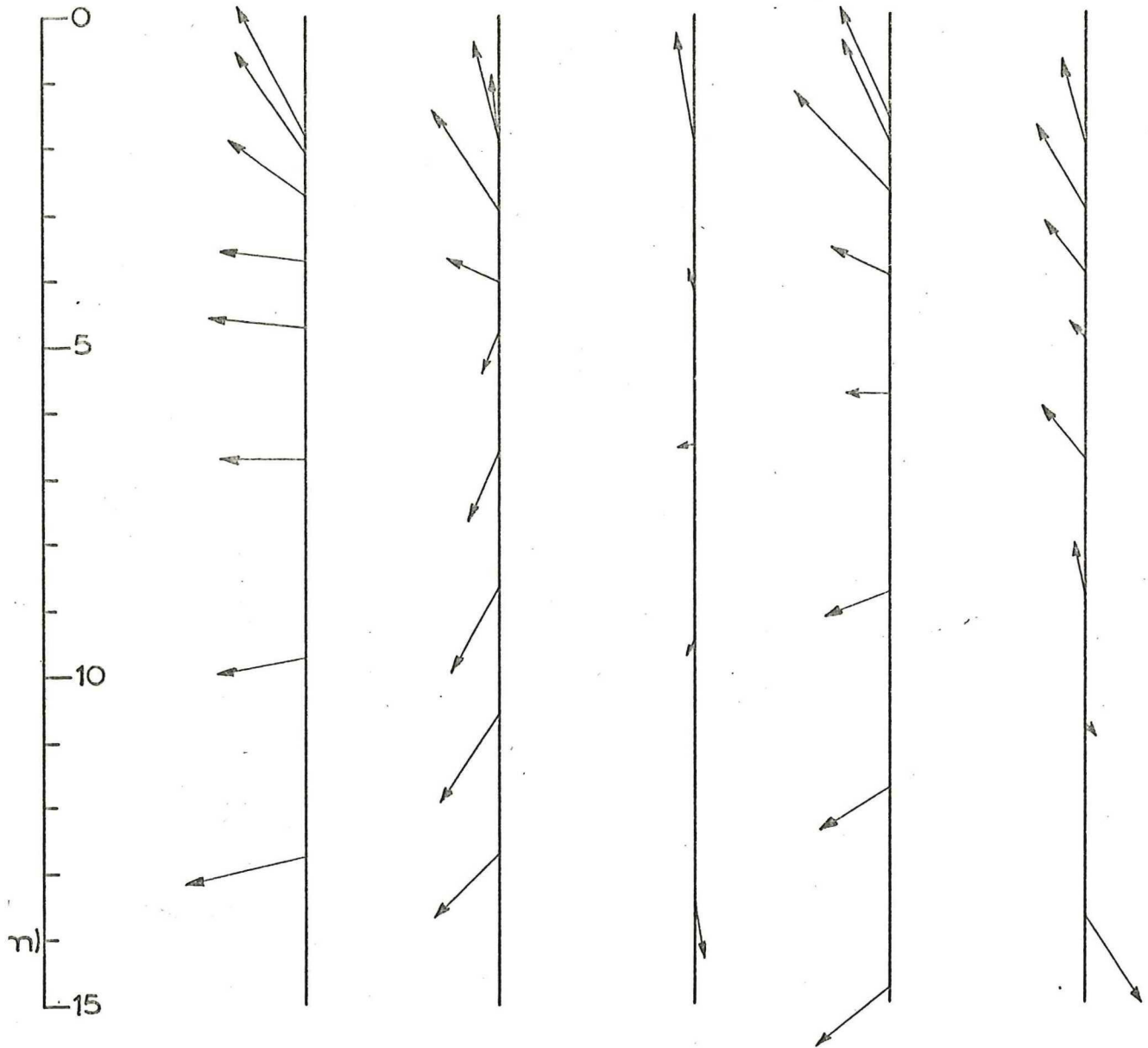
↓

⊙ B.Z

fig. 2 Gemeten snelheden en richtingen op verschillende diepten en afstanden bij  $Q_{\text{lucht}} = 5,1 \text{ m}^3/\text{min}$ .



10cm/s



plaats:	25m	35m	47m	55m	66m
tijd na aanzetten:	17-19 uur <sup>⊗</sup> (65-67)	18-20 uur	22-24 uur	20-22 uur <sup>⊗</sup> (68-70)	20-22 uur

(<sup>⊗</sup> van 5,1 naar 10,2 m<sup>3</sup>/s)

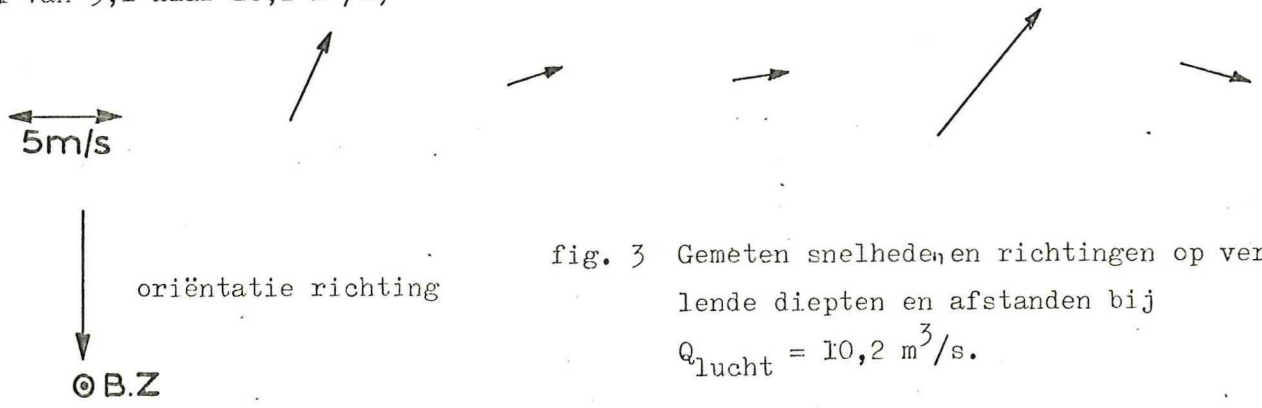


fig. 3 Gemeten snelheden en richtingen op verschillende diepten en afstanden bij  $Q_{\text{lucht}} = 10,2 \text{ m}^3/\text{s}$ .

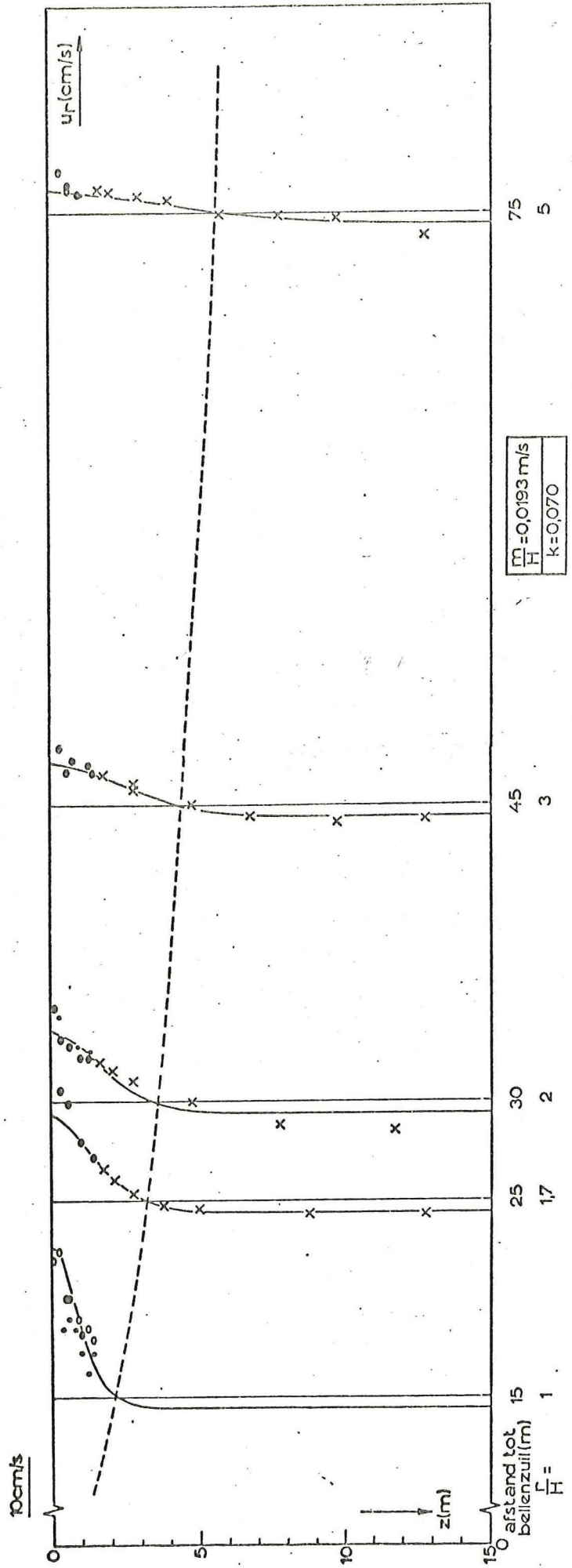


fig. 3 Radiale snelheden bij  $Q_{\text{lucht}} = 5,1 \text{ m}^3/\text{s}$ .

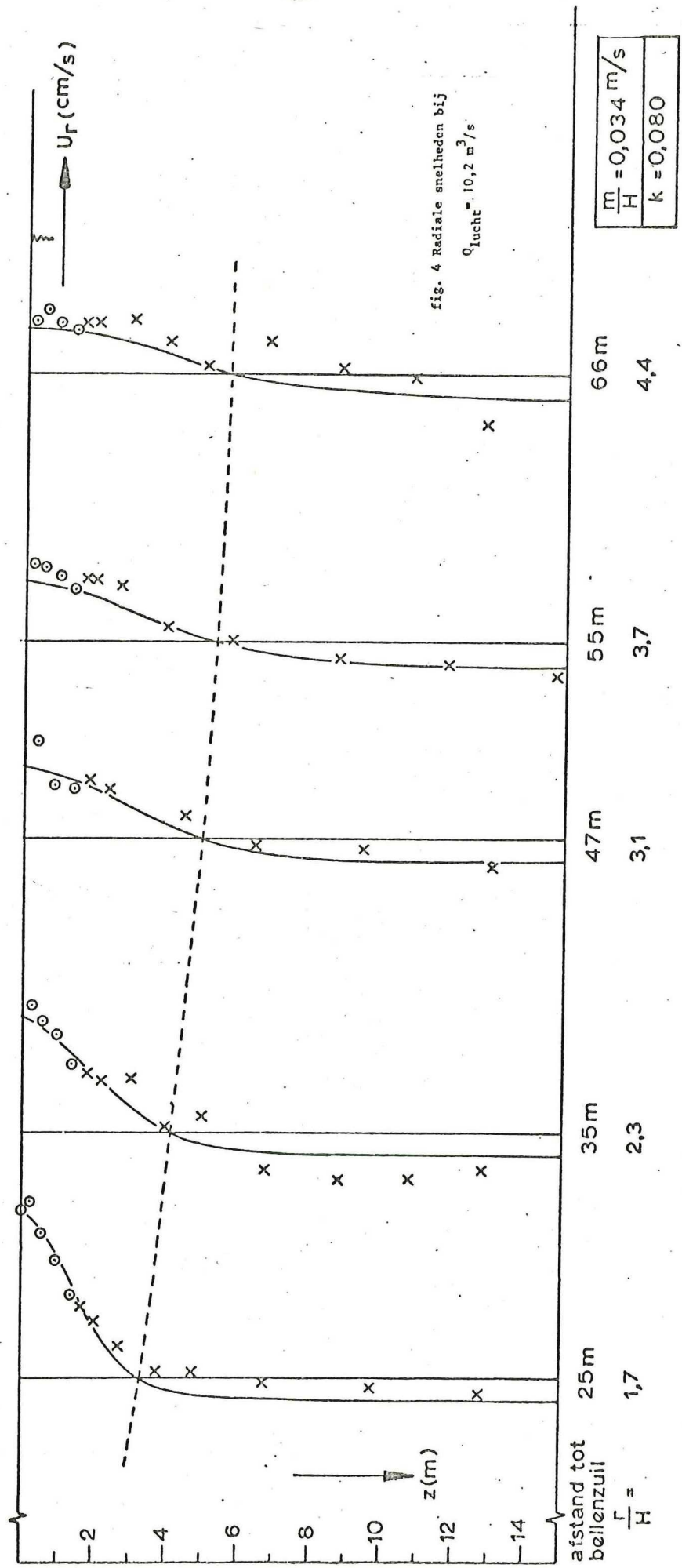


fig. 4 Radiale snelheden bij  $Q_{\text{lucht}} = 10,2 \text{ m}^3/\text{s}$ .

```

10. PUT LIST('Werkning van de belenzuil onder gestratificeerde omstandigheden');
20. PUT LIST('');
30. PUT LIST('geef de waarden voor H,Hep,Hhy,QI,ph-pe');
40. GET LIST(H,Hep,Hhy,QI,ph-pe);
50. k=.08;
60. C1=.1;
70. C2=0;
80. B=0;
90. pe=1000;
100. ph=pe+peh;
110. LET sinh(x)=(exp(x)-exp(-x))/2;
120. LET cosh(x)=(exp(x)+exp(-x))/2;
130. LET tanh(x)=sinh(x)/cosh(x);
140. LET sech(x)=1/cosh(x);
150. LET itanh(x)=log((1+x)/(1-x))/2;
160. IF H-Hep-Hhy<.01 THEN GO TO start; ELSE GO TO onzln;
170. IF pe<ph THEN GO TO start; ELSE GO TO onzln;
180. start: Q=.34*01**(1/3)*H**1.45;
190. m=.45*sqrt(k)*Q1**(1/3)*H**.6;
200. PUT LIST('geef re(start),s,e');
210. GET LIST(res,s,e);
220. PUT LIST('');
230. re=res-s;
240. pm=(pe+Hep+ph*Hhy)/H;
250. po=pm;
260. n=0;
270. PUT IMAGE(1)(1ml);
280. PUT LIST('');
290. n=n+1;
300. re=re+s;
310. IF re>8*H THEN GO TO eind;
320. Zo=itanh(sart(1-k*re/H*tanh(H/(k*re))))*k*re;
330. ao=2*3.14*m/Q*re*(tanh(Zo/(k*re))-Zo/H*tanh(H/(k*re)))-1;
340. IF ao<0 THEN GO TO weer;
350. UR=ml/(k*re);
360. Uro=ml/(k*re)*(1-k*re/H*tanh(H/(k*re)));
370. Ve=C1*Uro;
380. M=0;
390. aho=0;
400. q=0;
410. qo=.05;
420. q=q-qo;
430. K=0;
435. IF pe=ph THEN GO TO IS;
440. IF q+qo>1.0000001 THEN GO TO eind; ELSE q=q+qo;
450. IF K>60 THEN GO TO eind; ELSE K=K+1;
460. Hm=Zo/2+(H-Zo/2)*q;
470. IF K=1|Hm=H THEN Hh=Hhy-Hhy/H*Hm; ELSE Hh=Hhy-(pm-pe)/(ph-pe)*Hm;
480. IF K=1|Hm=H THEN He=Hep-Hep/H*Hm; ELSE He=Hep-(ph-pm)/(ph-pe)*Hm;
481. IF Hh<0|He<0 THEN Hh=Hhy-Hhy/H*Hm;
482. IF Hh<0|He<0 THEN He=Hep-Hep/H*Hm;
490. ah=Hh/(H-Zo)*(1+ao);
500. ae=Ve*2*3.14*re*He/0;
510. IF ae+ah=0 THEN GO TO IS; ELSE pm=(ae+pe+ah*ph)/(ae+ah);

```



```

531.1 Vm=(ae+ah)*Q/(2*3.14*re*Hm);
531.2 Vh=ah*Q/(2*3.14*re*Hh);
532. Fe=Ve*Ve/9.8/Hc;
533. Fm=Vm*Vm/9.8/Hm;
534. Fh=Vh*Vh/9.8/Hh;
535. H0=(1-Fe)*(1-Fm)*(1-Fh)-pm/ph*(1-Fm)-pe/pm*(1-Fh);
540. IF K=1 THEN GO TO AA2;
540. IF K=2 THEN H00=H0;
560. IF H00*H0<0 THEN go=-abs(qo/2); ELSE go=abs(qo);
570. IF H00*H0>0 THEN GO TO AA2;
590. IF abs(qo)>s/100000 THEN GO TO AA2;
595. C2=1000;
610. GO TO B1;
661. Hh=0;
762. He=0;
763. Hm=H;
764. ae=0;
765. ah=0;
766. pm=pe;
767. Vm=0;
768. ;
769. B=1000;
770. IF Hh=0 THEN Vh=0; ELSE Vh=ah*Q/(2*3.14*re*Hh);
780. Urt=(1+ao-ah)*Q/(H-Hh-Zo)/2/3.14/re;
790. po=((1+ao-ah)*pm+ah*ph)/(1+ao);
810. P1=po*9.8*Zo*Zo/2*(po*9.8*Zo+pm/2*9.8*(H-Hh-Zo))*(H-Hh-Zo)*ph*9.8*Hh/2)*Hh;
820. dP=po/2*Uro*Uro-pe/2*Ve*Ve;
830. P2=pe/2*9.8*He*He*(pe*9.8*Hm+pm*9.8*Hh/2)*Hh+dP*H;
840. Ia=(po*Zo+pm*(H-Hh-Zo)+ph*H)/H*UR*m*(1-k*re/H*tanh(H/(k*re)))*tanh(H/(k*re))*2/3;
850. W=P2-P1-Ia+pm*Hm*Vm-pe*He*Ve-ph*Hh*Vh*Vh;
860. IF n=1 THEN yo=W;
870. IF n=1 THEN GO TO run;
880. yn=W;
890. IF yo*yn>0 THEN GO TO run;
900. IF s<e THEN GO TO end;
910. IF yo*yn<0 THEN re=re-s;
920. s=s/2;
950. GO TO run;
960. PUT IMAGE(re,ah,ao,ae,ae+ah,pm,po,Zo,He,Hm,Hh,Ur,Urt,Ve,Vm,Vh,Q,n)(Im2);
970. PUT LIST(!!);
980. PUT IMAGE(1)(Im3);
990. PUT LIST(!!);
1000. PUT IMAGE(P2-P1,dP,H,Hep,Hhy,Q1,ph-pe,k,C1,C2,B)(Im4);
1010. Im1:
re ah ao ae ae+ah pm po Zo He Hm Hh Ur Urt Ve Vm Vh Q n
1020. Im2:
IMAGE;
1030. Im3:
IMAGE;
P2_P1 H Hep Hhy Q1 ph_pe k C1 C2 B
1040. Im4:
IMAGE;
1050. GO TO eind;
1060. onzln: PUT LIST(!o!broek @@&@#!);
1070. eind: PUT LIST(!!);

```