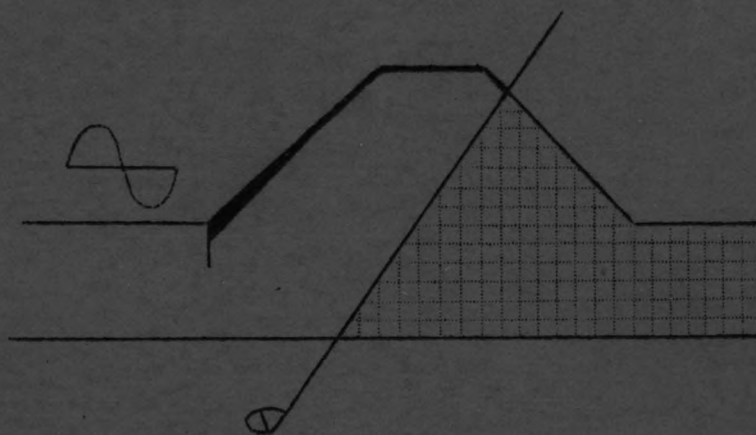


RICHTLIJNEN VOOR HET ONTWERPEN EN GEBRUIKEN VAN EEN ELEKTRISCH  
ANALOGON VOOR NIET-PERMANENTE GRONDWATERSTROMEN BESTAANDE UIT  
EEN NETWERK VAN WEERSTANDEN SCHAKELELEMENTEN EN CONDENSATOREN

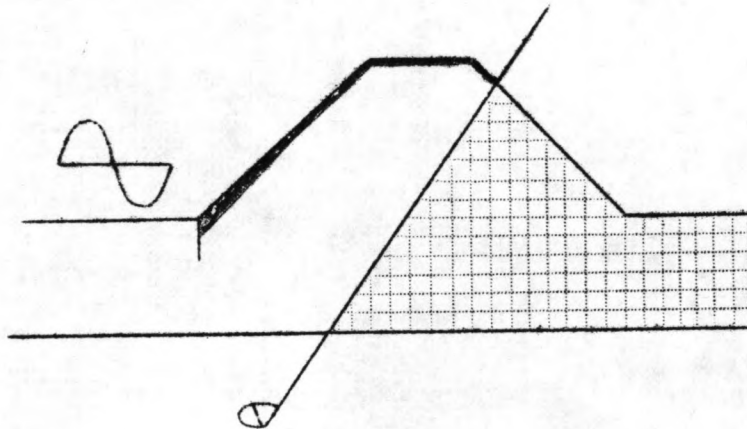
DEEL I



RICHTLIJNEN VOOR HET ONTWERPEN EN GEBRUIKEN VAN EEN ELEKTRISCH  
ANALOGON VOOR NIET-PERMANENTE GRONDWATERSTROMEN BESTAANDE UIT  
EEN NETWERK VAN WEERSTANDEN SCHAKELELEMENTEN EN CONDENSATOREN

Rapport van het HOOFDONTWERP VLOEISTOFMECHANICA, in opdracht van  
Prof. Ir. W.C.Bischoff van Heemskerck uitgevoerd door C.Verspuy.

DEEL I



I N H O U D   D E E L   I

Hoofdstuk		blz.
	SUMMARY	
	NOMENCLATUUR	
I	INLEIDING	1
II	ALGEMENE BESCHOUWINGEN	
	II 1. Grondwaterproblemen.	3
	II 2. Fundamentele vergelijkingen van de grondwaterbeweging.	7
	II 3. Het oplossen van grondwaterproblemen	18
	II 4. De analogie met een elektrische stroom door een geleider.	26
	II 5. De analoge modelmethode m.b.v. elektrisch geleidend papier.	28
	II 6. De opdracht.	35
III	HET WEERSTANDNETWERK.	
	III-1. Het discretiseren.	37
	III 2. De fouten die veroorzaakt kunnen worden door het discretiseren in in het inwendige van een veld.	
	III-2 1. De eventuele fout in een knooppunt gelegen in het inwendige van een veld.	52
	III 2-2. De eventuele fout in punten van een netwerk.	70
	III 3. Het discretiseren aan de randen van een twee dimensionaal veld.	
	III 3-1. Het realiseren van randvoorwaarden.	82
	III 3 2. De stroming om een damwand.	94
	III 4. Enige richtlijnen voor het ontwerpen en bouwen van een weerstandnetwerk-model.	
	III 4 1. De mogelijke fouten.	117
	III 4 2. De mate van discretiseren.	123
	III-4 3. Overgang bij verschillende maasvormen.	130
	III-4-4. Een grondmassief dat niet homogeen of niet isotroop is.	134
	LITERATUUROPGAVE    DEEL I    ( los bijgevoegd).	

## S U M M A R Y

New possibilities in simulating groundwater flows by means of electric analogs are discussed in this report.

Chapter II. The basic equation of groundwater flow is a law found by Darcy in 1856. Later on more general and more differentiated formulations were found. Together with an equation of continuity we ultimately have to solve some differential equation. The solution which we may use depends in particular on the type of the boundary conditions (shape etc.). If the course of a boundary is rather capricious an analytic solution is impossible. In some practical cases it is very advantageous to solve problems by means of electric analog models. Therefore much attention is paid to solutions obtained by means of electric analog equipment. After describing the conductive sheet analog consisting of the so called "Teledeltos" paper, advantages and limitations of this method are discussed. From this discussion the importance of this research appears.

Chapter III. To improve the analog method we want to replace the continuous material by a network of lumped elements. This chapter is devoted to the properties of a resistance network.

Shape and size of the meshes are considered in relation to the accuracy of the results. These considerations agree with those used in connection with finite difference approximations in relaxation-techniques.

Realization of the boundary conditions in problems of steady flow involve a difficulty if a singularity is present. In a test problem the realization of proper flow conditions in the vicinity of such a singularity is dealt with. It appears that in such a case the effect of reducing the mesh-size is very small. Fortunately there is an easy way to reduce the errors. In that way two (or three) elements in the vicinity of the singularity are given values which differ from those in the original design. It seems that every singularity in networks can be handled in a similar way.

Results of computations and measurements, which are listed in the appendices, are discussed and compared with each other.

The consulted references are mentioned in the "Literatuur opgave".

N O M E N C L A T U U R.

<u>Grondwater.</u>	eenheden: lengte - meter	m.
	massa - kilogram	kg.
	tijd - seconde	s.
	kracht - kilogram	kgf.
$\rho$ = de soortelijke dichtheid		kg.m <sup>-3</sup> .
$g$ = de versnelling t.g.v. de zwaartekracht		m.s <sup>-2</sup> .
$\gamma$ = het soortelijk gewicht		kgf.m <sup>-3</sup> .
$\eta$ = de dynamische viscositeit ( $\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}}$ )		kgf.m <sup>-2</sup> .s.
$\beta$ = de compressibiliteit		m <sup>2</sup> .kgf <sup>-1</sup> .
$n$ = het poriëngetal		1.
$n_e$ = het effectieve poriëngetal		1.
$x, y$ en $z$ rechthoekige coördinaten		m.
$V$ = volume		m <sup>3</sup> .
$A$ = oppervlakte		m <sup>2</sup> .
$B$ = breedte		m.
$H$ = hoogte		m.
$h = z + \frac{p}{\rho g}$ piezometrisch niveau (p.n.) = stijghoogte = in meters waterkolom		m.
$h_p$ = de stijghoogte v.e. punt in het piezometrisch vlak		m.
$Z$ = de hoogte v.d. bovenzijde v.h. gesloten grondwater t.o.v. een willekeurig vert. vlak		m.
$z$ = de plaatshoogte v.e. punt t.o.v. een willek. horizontaal vlak		m.
$z_p$ = de plaatshoogte v.e. punt i.h. piezometrisch vlak t.o.v. een willekeurig horizontaal vlak		m.
$p$ = de waterspanning in een bepaald punt		kgf.m <sup>-2</sup> .
$p_c$ = de capillaire spanning		kgf.m <sup>-2</sup> .
$h_c$ = de hoogte van de capillaire zone in grond		m.
$S$ = de langs een stroonlijn gemeten afstand		m.
$Q$ = het debiet = de hoeveelheid doorstromend water per tijdseenheid		m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> .
$q$ = het debiet per eenheid van breedte		m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> .
$q_s$ = het debiet per eenheid van oppervlakte		m.s <sup>-1</sup> .

$v$	= filtersnelheid = debiet per eenheid van oppervlakte	$m.s^{-1}$ .
$\bar{v}$ of $v_m$	= gemiddelde snelheid = debiet per eenheid van oppervlakte	$m.s^{-1}$ .
$K$	= de doorlatendheidscoëfficiënt van grond	$m.s^{-1}$ .
$\phi$	= $K.h$ = (snelheids-)potentiaal	$m^2.s^{-1}$ .
$\psi$	= stroomfunctie	$m^2.s^{-1}$ .
$\Omega$	= $\phi + i\psi = \lambda.e^{i\theta}$ = complexe potentiaal	$m^2.s^{-1}$ .
$w$	= $z + ix = r.e^{i\alpha}$ = complexe variabele	$m$ .
$R$	= $\frac{A_{nat}}{O_{nat}}$ = hydraulische straal	$m$ .
$D$	= diameter van een korrel	$m$ .

### Elektriciteit.

$E$	= spanning	$V.$ (volt)
$i$	= stroomsterkte	$A.$ (ampère)
$R$	= weerstand	$\Omega.$ (ohm)
$R_o$	= de vierkantsweerstand van een plaatgeleider	$\Omega.$
$R_1$	= de weerstand per $m^1$ in de stroomrichting v.e. geleider met een bep. doorsnede $A_e$	$\Omega.m^{-1}$ .
$\rho$	= de specifieke weerstand ( $R = \frac{B_E I_E}{S_E} . \rho$ )	$\Omega.m^{-1}$ .
$C$	= de capaciteit v.e. condensator	$s.\Omega^{-1} = F.$ (Farad)
$t_e$	= de tijd in een elektrisch model	$s.$
$f_e$	= de frequentie in een elektrisch model	$s^{-1}$ .
$H_e$	= hoogte " " " "	$m$ .
$B_e$	= breedte " " " "	$m$ .
$S_e$	= de langs een geleider gemeten afstand	$m$ .
$A_e$	= oppervlakte v.e. geleider loodrecht op de richting v.d. stroom	$m^2$ .

## Hoofdstuk I    Inleiding

In dit ontwerp worden nieuwe mogelijkheden besproken die bestaan op het gebied van de elektrische modelmethode voor de oplossing van grondwaterproblemen.

Na een aantal algemene beschouwingen over de problemen die bestaan en de oplossingsmogelijkheden, wordt nader ingegaan op de modelmethode m.b.v. een elektrische plaatgeleider. Naast de voordelen worden de beperkingen van deze methode genoemd, waaruit het belang van dit onderzoek naar voren komt. Hoofdstuk II wordt besloten met een beschrijving van de opdracht die met te noemen begrenzings in onderdelen is gesplitst.

In hoofdstuk III wordt beschreven waarom men een netwerk van weerstandelementen kan gebruiken bij het oplossen van grondwaterproblemen. Hierbij wordt aangegeven welke factoren daarbij een rol spelen. Belangrijke factoren als maasvorm en maaswijdte worden aan uitvoerige beschouwingen onderworpen. Een andere belangrijke factor is het realiseren van de randvoorwaarden. Met behulp van een toetsprobleem wordt aangegeven hoe de omgeving van een singulier punt kan worden benaderd. Resultaten van uitgevoerde berekeningen en van metingen aan testmodellen, die op bijlagen zijn toegevoegd, worden besproken en met elkaar vergeleken. Voor dit onderdeel van het ontwerp is veel literatuur geraadpleegd, waarvan een uiteraard onvolledige opgave wordt gedaan.

In hoofdstuk IV wordt aangegeven op welke wijze een vrije grondwaterspiegel in een niet-permanente stromingstoestand automatisch variërend kan worden gerealiseerd. Voor dit gedeelte van het onderzoek is het gedrag van het grondwater nabij de vrije grondwaterspiegel bestudeerd. Voor een één-dimensionaal geval zijn in een natuurmodel door het "Laboratorium voor Grondmechanica" te Delft metingen verricht, waarbij ernaar gestreefd is de nauwkeurigheid zodanig op te voeren, dat het effect van de capillaire zone (bij zand) kon worden vastgesteld. Vooraf is voor dit geval een numerieke berekening uitgevoerd, waarin het effect van de capillaire zone theoretisch is benaderd. De resultaten hiervan stemmen redelijk overeen met die van de natuurmetingen. In een elektrisch model is het nog niet zonder meer mogelijk het effect van de capillaire zone te simuleren. De weerstand wordt in een dergelijk model discreet bij- en afgeschakeld.

In verband met het bovenstaande zijn van het zelfde één-dimensionale geval numerieke berekeningen uitgevoerd waarbij:

- 1e. de capillaire zone constant werd gesteld.
- 2e. de capillaire zone werd verwaarloosd (gelijk nul gesteld).
- 3e. de capillaire zone werd verwaarloosd en de weerstandsweg discreet werd bij- en afgeschakeld.

De berekeningen ad 3e. kunnen dus worden vergeleken met de metingen aan het ontworpen testmodel.

De voor dit gedeelte van het onderzoek benodigde berekeningen zijn in samenwerking met de afdeling Getijden en Numerieke berekeningen van de Waterloopkundige Afdeling der Delta Dienst uitgevoerd.

De schakelelementen, die in het testmodel zijn toegepast, zijn ontwikkeld door het Elektrisch Laboratorium van de Delta Dienst d r Rijkswaterstaat. Bij dit laboratorium zijn alle voor het onderzoek benodigde metingen verricht, waarbij de schrijver veel hulp en gastvrijheid heeft ondervonden.

Het onderzoek betreffende het realiseren van een automatisch variërende randvoorwaarde is, op het moment waarop dit rapport is geschreven, niet voltooid.

Hoofdstuk V geeft conclusies die in dit stadium van het onderzoek mogelijk zijn. In dit zelfde hoofdstuk worden verdergaande suggesties gedaan voor de toekomstige ontwikkeling, waaraan de schrijver hoopt mede te werken.



## Hoofdstuk II Algemene Beschouwingen

### II-1 Grondwaterproblemen

Grondwaterproblemen zijn te verdelen in:

- a. permanente stromingstoestanden
- b. niet-permanente stromingstoestanden

ad a. Hierbij is men geïnteresseerd in de potentiaalverdeling in het massief en/of in de grootte van de kwel door het massief.

Bekende voorbeelden zijn:

- bepaling van de kwel door afsluitdammen met aan beide zijden een constante waterspiegel.
- bepaling van het debiet van putten en bronnen.
- bepaling van de totale waterdruk onder een vloer van een kunstwerk.

Quasi-permanente problemen komen veel voor, door van een niet-permanente stromingstoestand de (rand) voorwaarden op een bepaald moment te beschouwen.

ad b. Bij deze problemen zijn de potentiaalverdeling en de kwel op ieder moment anders.

Men is nu geïnteresseerd in het verloop van deze waarden in de tijd.

Een voorbeeld hiervan is het onderzoek ten behoeve van de aanleg van moderne zeedijken. Hierover wordt in het volgende meer gezegd.

De twee stoffen waarmee we bij grondwaterproblemen te maken hebben zijn grond en water. Van deze twee is water de stof die wat betreft de eigenschappen bij deze problemen het minst varieert.

#### Eigenschappen van water:

De dichtheid  $\rho$ : deze is gedefinieerd als de massa per volume eenheid:  
dimensie  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Deze waarde varieert slechts weinig met de temperatuur, het zoutgehalte en met de druk.

In het volgende wordt  $\rho$  constant gehouden.

De dynamische viscositeit  $\eta$ : deze wordt gedefinieerd door de vergelijking:  
 $\tau = \eta \frac{dv}{dy}$ , waaruit de dimensie volgt  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  of  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$\eta$  varieert met de temperatuur, die voor grondwater ongeveer constant is; dus ook  $\eta$  kan constant worden gesteld.

De compressibiliteit  $\beta$  : deze wordt gedefinieerd door de vergelijking:

$$\frac{dp}{p} = \beta \cdot \rho \quad \text{of ook} \quad \frac{dV}{V} = - \beta V, \text{ waaruit de dimensie van } \beta \text{ volgt:}$$

$$\text{kgf}^{-1} \cdot \text{m}^2 \quad \text{of} \quad \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^1 \cdot \text{s}^2.$$

$\beta$  heeft voor water een kleine waarde  $\approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot (\text{kgf})^{-1}$ .

De invloed van deze waarde op grondwaterbeweging is klein ten opzichte van de invloed van de berging aan het vrije oppervlak, zodat  $\beta$  gelijk nul wordt gesteld.

Eigenschappen van grond:

Het poriëngetal  $n$ : is gedefinieerd door  $n = \frac{V - V_k}{V}$

waarin  $V$  = het totale volume van een hoeveelheid grond

en  $V_k$  = het volume dat door de korrels wordt ingenomen.

Voor zand heeft  $n$  een waarde die varieert van 0,35 tot 0,45.

Het effectieve poriëngetal  $n_e$ : is gedefinieerd als het quotient van het volume dat bij herhaald droogvallen van grond door water kan worden ingenomen en het totale volume.

Deze voor de berging bij een variërende vrije <sup>grond-</sup>waterspiegel belangrijke factor heeft een kleinere waarde dan  $n$ . Dit is een gevolg van het feit dat in de poriën van de grond lucht wordt ingesloten.

De waarde  $n_e$ , voor zand  $K = 10^{-4}$ , varieert van 0,18 tot 0,23 (zie [1]).

Het getal  $n_e$  wordt in de literatuur wel met de letter  $\beta$  aangeduid.

De belangrijkste eigenschap van grond in dit verband is de doorlatendheid voor water.

In 1865 werd door Darcy de naar hem genoemde experimentele wet gevonden (zie [2]).

Bij proeven werd de hoeveelheid water die per tijdseenheid stroomt door een prismatische zandkolom met dwarsdoorsnede  $A$  gemeten, waarbij het verval constant werd gehouden ( zie fig. 1 ).

Hij vond dat het totale debiet  $Q$  recht evenredig is met het verschil in piëzometrisch niveau  $h_2 - h_1 = \Delta h$ .

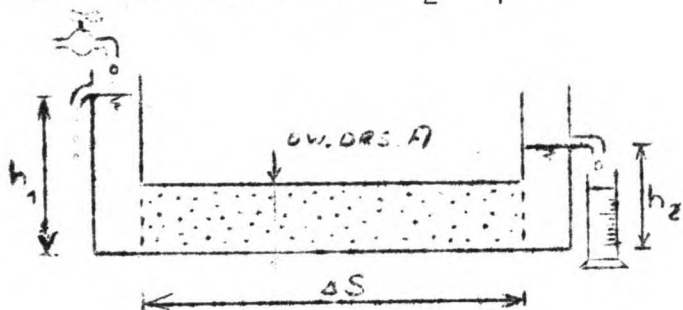


fig. 1

$$Q = - K \cdot A \cdot \frac{h_2 - h_1}{\Delta S}$$

$$Q = - K \cdot A \cdot \frac{\Delta h}{\Delta S} \quad (1 - 1)$$

Hierin is  $\Delta S$  de lengte van de prismatische zandkolom en  $K$  de doorlatendheidsconstante van de grond.

Het piëzometrische niveau = de stijghoogte =  $h = z + \frac{p}{\rho g}$  (1 - 2)  
 waarin  $z$  de hoogte van een bepaald punt t.o.v. een willekeurig horizontaal  
 vergelijkingsvlak is en  $p$  de waterspanning in dat zelfde punt is, terwijl  $\rho g$   
 het soortelijk gewicht van de vloeistof is, dat constant wordt gesteld in de  
 plaats en in de tijd.

De specifieke afvoer  $q_s$  is de totale afvoer  $Q$  gedeeld door het oppervlak van  
 de dwarsdoorsnede  $A$ .

De vergelijking (1 - 1) wordt dan  $q_s = -K \frac{\Delta h}{\Delta S}$

Als  $\Delta S$  nadert tot nul:  $q_s = -K \frac{dh}{dS}$  (1 - 3)

In deze vorm van de Wet van Darcy wordt voor  $q_s$  vaak geschreven  $v$ , waarbij  
 dan de gemiddelde filtersnelheid wordt gedacht. Dan wordt vergelijking (1 - 3):

$$v = -K \frac{dh}{dS} \quad (1 - 4)$$

De (ware) snelheid van het water is groter dan deze  $v$ . En wel, afhankelijk van  
 het feit of we met  $n$  resp.  $n_e$  te maken hebben, gelijk aan  $\frac{1}{n} v$  resp.  $\frac{1}{n_e} v$ .

In het volgende wordt met  $v$  steeds het specifieke debiet oftewel de filter-  
 snelheid bedoeld.

De Wet van Darcy is met de vergelijkingen van Euler af te leiden.

Voor een één-dimensionale permanente stroming zijn de volgende vergelijkingen  
 bekend:

bij laminaire stroming door een buis:  $\bar{v} = -\frac{1}{2} R^2 \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS}$  (1 - 5)

waarin  $R =$  hydraulische straal  $= \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{\pi d} = \frac{d}{4}$   
 en dus ook:

$$\bar{v} = -\frac{1}{32} d^2 \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS} \quad (1 - 6)$$

bij laminaire stroming door een open leiding:

$$\bar{v} = -\frac{1}{3} R^2 \cdot \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS} \quad (1 - 7)$$

Voor de stroming van een vloeistof door grond kunnen we schrijven:

$$\bar{v} = -f_1 R^2 \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS} \quad (1 - 8)$$

We kunnen de hydraulische straal  $R$  van grond recht evenredig stellen met de  
 korreldiameter  $D$ , dan:  $R^2 = f_2 D^2$ . (1 - 9)

De factor  $f_2$  is door het doen van een groot aantal proeven te bepalen.

We mogen dus schrijven  $v = -f_1 \cdot f_2 D^2 \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS} = -f_3 D^2 \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS}$ .

Als we stellen  $K^* = f_3 D^2$  dan is :

$$v = -K^* \frac{g}{\nu} \frac{dh}{dS} \quad (1 - 10)$$

De doorlatendheidscoëfficiënt  $K$  is dan gesplitst in 2 factoren:

- een factor  $K^*$  voor de grondeigenschappen: korrelvorm, korrelstapeling;
- een factor  $\frac{g}{\nu} = \frac{\rho g}{\eta}$  voor de eigenschappen van de vloeistof, deze is voor

grondwater constant te stellen.

De factor  $K^{\#}$  wordt wel de intrinsieke doorlatendheidscoëfficiënt genoemd.

Het bepalen van de doorlatendheidscoëfficiënt  $K$  in de natuur is niet erg nauwkeurig uitvoerbaar.

Men zal bij de beschouwingen dan ook uitgaan van een serie mogelijke  $K$ -waarden.

Als voorbeeld nemen we het onderzoek t.b.v de dijk aanleg.

De  $K$ -waarde van het te ontwerpen zandlichaam is slechts binnen bepaalde grenzen bekend.

De  $K$ -waarde van de grond waarop de dijk wordt aangelegd is niet nauwkeurig te bepalen.

Men wil een dichte taludbekleding toepassen en vraagt zich af wat hiervan de minimale dikte (zwaarte) moet zijn opdat de stabiliteit verzekerd is (zie [3], blz. 3 - 11)

Hierbij spelen de maximaal te verwachten overdrukken onder de taludbekleding een rol.

Om deze te bepalen moet men het verloop van de potentialen onder de taludbekleding, t.o.v. de plaatshoogte en t.o.v. de variërende buitenwaterspiegel (potentiaal) kennen.

Het is bekend dat de te bepalen overdrukken sterk afhangen van de  $K$ -waarden van resp. zandlichaam en ondergrond (zie [3], blz. 11 - 15)

Er is voor elk geval steeds een  $K$ -waarde (meestal liggend binnen de praktische grenzen), waarbij de overdrukken het grootst zijn.

Om veilig te construeren moet men met dit ongunstigste rekening houden.

Het zal dus steeds noodzakelijk zijn systematisch een groot aantal  $K$ -waarde variaties toe te passen, waardoor het aantal gelijkvormige problemen steeds vrij groot is.

Ook de helling van het talud is in dit verband een belangrijke factor. In de eerste plaats worden de overdrukken onder de bekleding er door beïnvloed. In de tweede plaats is de helling bepalend voor de toelaatbare overdruk onder een bekleding met een bepaalde dikte.

De vaak toegepaste perskade van mijnsteen heeft een onbekende doorlatendheidscoëfficiënt, die zich bovendien in de tijd kan wijzigen ([3], blz. 15 - 19). Dit geeft andermaal een aantal noodzakelijke variaties.

Ook de doorlatendheid van de bescherming vóór de teen van de dijk speelt een rol in dit verband ([3], blz. 20).

Tijdens deze opsomming is het duidelijk geworden dat, voor een bepaald ontwerp, het aantal verschillende problemen, dat achtereenvolgens moet worden opgelost, zeer groot is.

II - 2 Fundamentele vergelijkingen van de grondwaterbeweging.

In een drie-dimensionaal geval, waarbij de 3 assen in de z.g. hoofdrichtingen van de doorlatendheid liggen, kan de Wet van Darcy worden geformuleerd:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y &= -K_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z &= -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 1)$$

Hierbij is de grond homogeen en anisotroop verondersteld,

Als de grond homogeen en isotroop is:  $K_x = K_y = K_z = K$ , dan gaat vergelijking (2 - 1) over in:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -K \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y &= -K \frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z &= -K \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 2)$$

Als we in de vergelijkingen (2 - 2) voor h substitueren  $h = z + \frac{p}{\rho g}$ , dan krijgen we:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{K}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{K}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_z &= -K - \frac{K}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 3)$$

Als het water niet stroomt, dan is:  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$  en  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ . Dit geeft voor de verg. (2 - 3)

$$q_x = 0 \quad q_y = 0 \quad q_z = -K + K = 0$$

Continuïteitsvergelijkingen:

Deze berusten op de wet van behoud van massa.

Allereerst willen we twee continuïteitsbeschouwingen onderscheiden:

1. Voor een elementje in het inwendige van een met water verzadigd grondmassief.
2. Voor een elementje dat aan één zijde begrensd wordt door een z.g. vrije grondwaterspiegel.

ad 1. Continuïteitsvergelijking in het inwendige van een met water verzadigd grondmassief.

Beschouw een parallelepipedum met zijden  $\Delta x, \Delta y$  en  $\Delta z$  (zie fig.2).

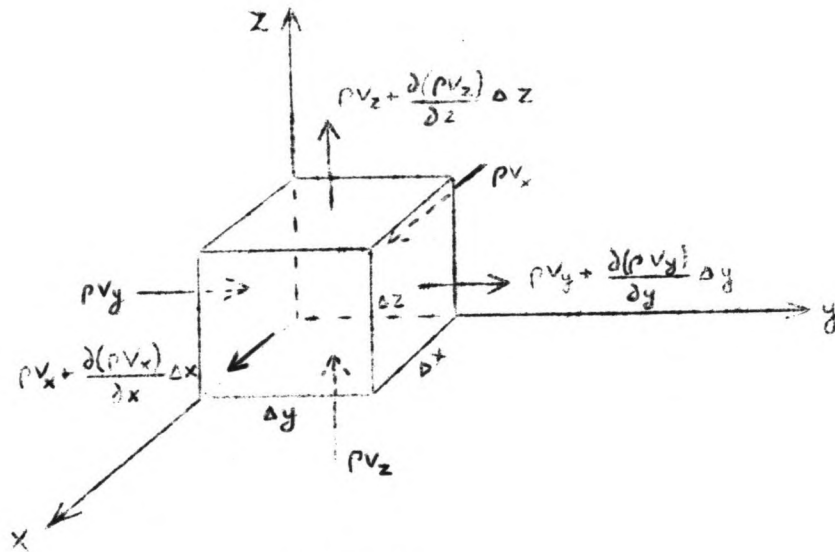


fig. 2

De massa van het water dat instroomt is gelijk aan de massa van het water dat uitstroomt, vermeerderd met de massa van het water dat eventueel in het parallelepipedum wordt geborgen.

De massa van het water in het parallelepipedum is  $\Delta M = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot n$

In een kleine tijd  $\Delta t$  (klein genoeg om de snelheden gedurende  $\Delta t$  constant te mogen stellen):

$$\text{In: } \rho v_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \rho v_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \rho v_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t$$

$$\text{Uit: } \left( \rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \left( \rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \left( \rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t .$$

$$\text{eventueel geborgen: } \frac{\partial(\Delta M)}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial(n \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\partial t} \Delta t .$$

De balans: in = uit + geborgen geeft:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \frac{\partial(n \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\partial t} \Delta t = 0$$

De term  $\frac{\partial(n \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\partial t} \Delta t$  geeft de invloed van bergingscapaciteit die varieert in de tijd.

Hiertoe behoort ook de z.g. elastische berging.

In dit onderzoek zijn  $n$  en  $\rho$  constant verondersteld, waardoor deze term nul wordt.

We krijgen dan:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t \right) = 0$$

en dus na deling door  $\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$  :  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$  (2 - 4)

Continuïteitsvergelijking voor een elementje begrensd door een vrije grondwater-  
spiegel.

Met de vrije grondwaterspiegel wordt bedoeld de bovenzijde van het gesloten grondwater, dus het vlak dat de bovenbegrenzing vormt van de capillaire zone.

Noemen we de hoogte van dit vlak  $Z$  en de hoogte van het phreatische vlak  $z_p$ , beide t.o.v. het (x.y)-vlak, dan is  $Z = z_p + h_c$ .

Nu geldt voor het phreatisch vlak  $z_p = h_p$ , waardoor dus ook  $Z = h_p + h_c$

We beschouwen een drie-  
dimensionaal elementje  
(zie fig. 3):

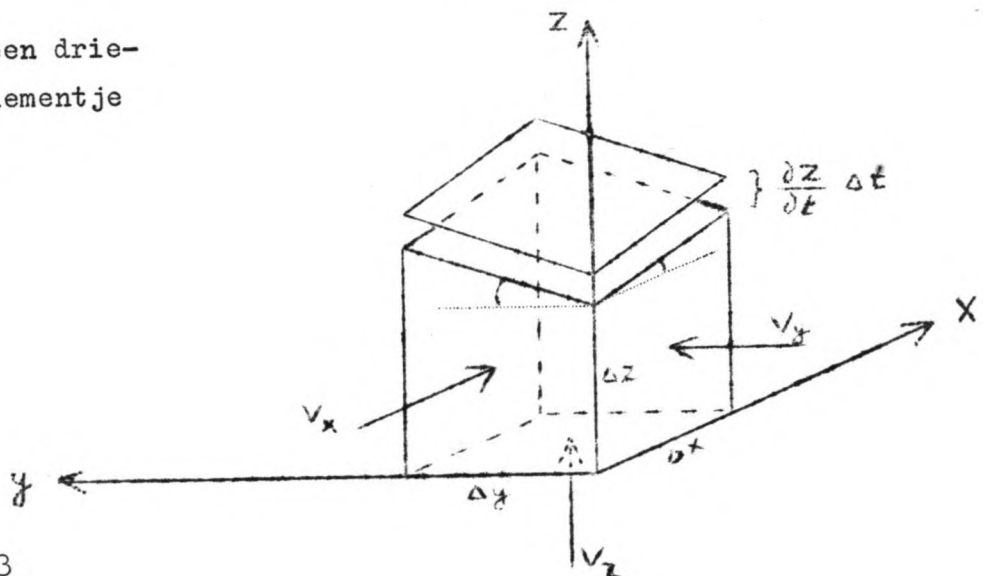


fig. 3

Gesteld wordt dat boven het grondvlakje ( $\Delta x \cdot \Delta y$ ) de vrije grondwaterspiegel in een tijdje  $\Delta t$  evenwijdig aan zichzelf verplaatst over  $\frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \Delta t$ . Verder wordt de dichtheid van het water constant gesteld.

We kunnen nu over een kleine tijd  $\Delta t$  schrijven:

$$\text{In: } \Delta t \left\{ v_x \cdot \Delta y \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y \right) + v_y \cdot \Delta x \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) + v_z \cdot \Delta y \cdot \Delta x \right\}$$

$$\text{Uit: } \Delta t \left\{ \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y \right) \right\}$$

$$\text{Geborgen aan de vrije grondwaterspiegel: } \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot n_e$$

De balans in - uit = geborgen geeft:

$$\Delta t \left\{ - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y \right) - \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \right) \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \cdot \Delta x \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) + v_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right\} = \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot n_e$$

Delen door  $-\Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y$  geeft:

$$\left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y \right) + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \right) \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \left( \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) - v_z + \frac{\partial Z}{\partial t} n_e = 0 \quad (2-5)$$

In een continuüm kunnen we  $\Delta x$  en  $\Delta y$  tot nul laten naderen, we krijgen in dat geval de vergelijking:

$$v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y} - v_z + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad (2-6)$$

In een twee-dimensionaal geval kunnen we een dergelijke beschouwing houden (zie fig. 4):

$$\text{In: } \Delta t \left\{ v_x \cdot \Delta z + v_z \cdot \Delta x \right\}$$

$$\text{Uit: } \Delta t \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \left( \Delta z + \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right)$$



De berging aan de vrije grondwater-  
spiegel:

$$\Delta x \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \Delta t \cdot n_e$$

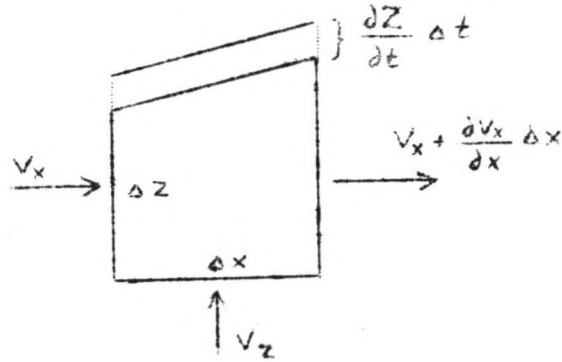


fig. 4

We krijgen dan voor de balans:

$$\Delta t \left\{ v_x \cdot \Delta z + v_z \cdot \Delta x - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \left( \Delta z + \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) \right\} = \Delta x \frac{\partial Z}{\partial t} \Delta t \cdot n_e$$

of wel na delen door  $-\Delta t \cdot \Delta x$  :

$$v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \left( \Delta z + \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x \right) - v_z + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad (2 - 7)$$

In een continuüm kunnen we  $\Delta x$  en  $\Delta z$  tot nul laten naderen zodat vergelijking (2 - 7) in dat geval over gaat in :

$$v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_z + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad (2 - 8)$$

Bij een permanente stromingstoestand is de vrije grondwaterspiegel een stroomlijn.

Als de hoek tussen de vrije grondwaterspiegel en de  $x$ -richting  $\alpha$  is dan is:

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_z = v \sin \alpha$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$$

En dus:  $v_z = v_x \operatorname{tg} \alpha = v_x \frac{\partial Z}{\partial x}$

Als we dit in vergelijking (2 - 8) substitueren krijgen we:

$$v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

waaruit de permanentie blijkt.

Laten we nu een element van het grondmassief beschouwen met een hoogte  $Z$ , dat aan de onderzijde wordt begrensd door een ondoorlatende laag  $v_z = 0$  (zie fig. 5)

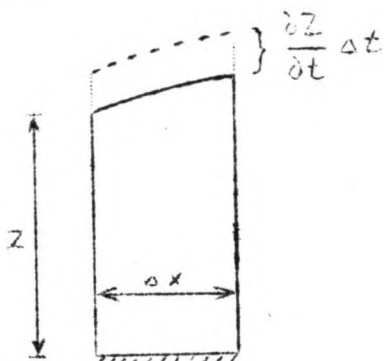


fig. 5

Als we nu aannemen dat over de hoogte  $Z$   $v_x$  onafhankelijk is van  $z$  dan mag in de voorgaande beschouwing voor  $\Delta z$  deze  $Z$  worden gesubstitueerd.

De vergelijking (2 - 7) gaat dan over in:

$$v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} (Z + \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x) + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

In een continuüm kunnen we  $\Delta x$  klein nemen, zodat  $\frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x$  t.o.v.  $Z$  te verwaarlozen is.

We krijgen dan de vergelijking:

$$v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial v_x}{\partial x} + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad (2 - 9)$$

Omdat bovenstaande aanname is gedaan mogen we schrijven  $v_x \cdot Z = q_x$  waardoor vergelijking (2 - 9) ook te schrijven is als;

$$\frac{\partial (q_x)}{\partial x} + n_e \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad (2 - 10)$$

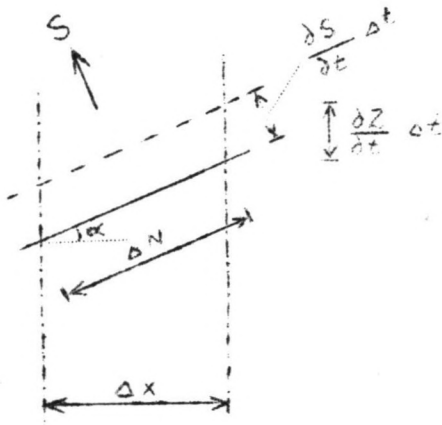
In het voorgaande is voor de berging van de vrije grondwaterspiegel gesteld:

$$\Delta q_x = \Delta x \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \Delta t \cdot n_e$$

Als we de stroming loodrecht op de vrije grondwaterspiegel beschouwen en deze richting  $S$  noemen, dan kunnen we voor de berging schrijven (zie fig. 6):

$$\Delta q \text{ in de richting } S = \Delta N \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t \cdot n_e$$

Hierin is  $\Delta N = \frac{\Delta x}{\cos \alpha}$  en  $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} \cos \alpha$



Ook geldt dus:

$$\Delta q \text{ in de richting } S = \Delta N \cdot n_e \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} \cos \alpha$$

fig. 6

Op blz. 9 is gesteld dat  $Z = h_p + h_c$ .

Als nu de capillaire stijghoogte  $h_c$  constant wordt verondersteld dan:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial h_p}{\partial t}$$

In dat geval kan men schrijven:

$$\Delta q \text{ in de richting van } S = \Delta N \cdot n_e \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cos \alpha$$

Is de helling van de vrije grondwaterspiegel gering dan is  $\cos \alpha \approx 1$  en dus is dan:

$$\Delta q \text{ in de richting van } S \approx \Delta N \cdot n_e \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2 - 11)$$

Differentiaalvergelijkingen :

We beperken ons in het nu volgende tot een twee dimensionale grondwaterbeweging waarbij dus alle afgeleiden naar y nul zijn en waarbij steeds in de y-richting een moot wordt beschouwd die 1 m breed is.

De vergelijkingen (2 - 1) geven nu: 
$$\left. \begin{aligned} v_x &= -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_z &= -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 12)$$

De vergelijking (2 - 4) wordt nu: 
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2 - 13)$$

Substitutie van de vergelijkingen (2 - 12) in (2 - 13) geeft :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (2 - 14)$$

Hierin kunnen  $K_x$  en  $K_z$  willekeurig variëren in het massief. Men noemt dit massief inhomogeen en anisotroop.

Is een grondmassief homogeen en anisotroop dan is  $K_x$  een constante en  $K_z$  een andere constante.

Vergelijking (2 - 14) wordt dan:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2 - 15)$$

Is in een bijzonder geval  $K_x = K_z = K$ , dan wordt de vergelijking (2 - 14):

$$K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Substitueren we nu  $\phi = -K \cdot h$  ( $= -K(z + \frac{p}{\rho g})$ ), dan geeft dit een zeer bekende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2 - 16)$$

Dit is de vergelijking van Laplace, een bijzonder type elliptische differentiaalvergelijking, die een potentiaalbeweging beschrijft, waarbij de inwendige berging nul is.

De functies die aan deze vergelijking voldoen worden harmonische functies gen:emd <sup>1)</sup>⊗.

Bij vergelijking (2 - 16) behoren de vergelijkingen (2 - 12) in de volgende

---

1)⊗. Niet te verwarren met de goniometrische functies bij de harmonische analyse.

$$\text{vorm: } \left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 17)$$

De rotatie van een stroming kan worden gedefinieerd als:

$$\text{rot. } \underline{v} = \lim. \frac{\oint \underline{v} \cdot d\underline{S}}{\text{opp}} \quad (\text{zie [4], blz. 473})$$

Voor een rechthoekig elementje geeft dit:

$$(\text{zie [4], blz. 474}) \quad (2 - 18)$$

$$\text{rot. } \underline{v} = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

In een algemeen geval geven de vergelijkingen (2 - 12) met de vergelijking (2 - 18)

$$\text{rot. } \underline{v} = -K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x} - \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial K_z}{\partial x} + K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial K_x}{\partial z}$$

In een bijzonder geval waarbij de vergelijkingen (2 - 17) gelden geven deze met de vergelijking (2 - 18):

$$\text{rot. } \underline{v} = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2 - 19)$$

waaruit volgt dat de stroming in dat geval rotatie-vrij is.

Langs een stroomlijn is in ieder punt de richting van  $v$  bepaald door de raaklijn in dit punt. Voor elk punt geldt dus (zie fig. 7):

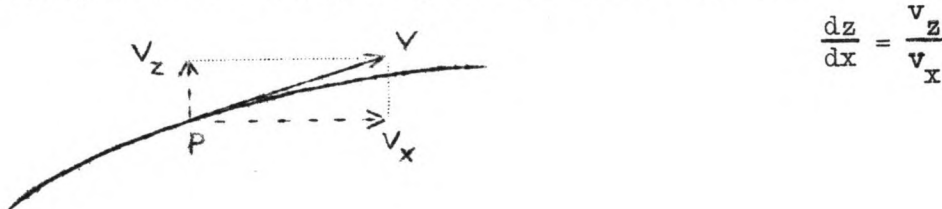


fig. 7

We kunnen dus voor de vergelijking van een stroomlijn schrijven:

$$v_z \cdot dx - v_x \cdot dz = 0 \quad (2 - 20)$$

Definieren we nu  $\psi$  (de stroomfunctie van Stokes) waarvan:

$$d\psi = v_z \cdot dx - v_x \cdot dz \quad , \text{ dan is : } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_z \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -v_x \end{aligned} \right\} \quad (2 - 21)$$

De vergelijkingen (2 - 17) en (2 - 21) geven tezamen:

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 22)$$

Dit zijn de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann, die een stelsel orthogonale lijnen vertegenwoordigen (zie opm. onderaan blz.19).

Men kan schrijven  $\psi = \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} dz + \frac{\partial \phi}{\partial z} dx \right)$ , zodat, afgezien van een constante,  $\psi$  eenvoudig te bepalen is uit  $\phi$ .

Uit vergelijking (2 - 19) volgt  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}$ . Met de vergelijkingen (2 - 22) is

hiervoor te schrijven:  $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x}$  of wel  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ , zodat

ook  $\psi$  een harmonische functie is.

Als men in de verg. (2 - 22) voor  $z$  en  $x$  in een bepaald punt resp. de richting  $S$  van de raaklijn aan de stroomlijn in dit punt en de richting  $n$  loodrecht op  $S$  neemt, dan kan men schrijven:  $v_S = \frac{\partial \phi}{\partial S} = \frac{\partial \psi}{\partial n}$

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial S} = 0$$

(2 - 23)

Op deze laatste vergelijkingen (2 - 23) berust de onder II-3 te noemen grafische methode voor de oplossing van een grondwaterprobleem.

De vergelijkingen (2- 22) maken het mogelijk om d.m.v. een z.g. conforme transformatie bepaalde problemen op te lossen (zie II-3).

In het geval dat een grondmassief homogeen en anisotroop is hebben we gezien dat de vergelijking (2 - 15) geldt:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{waarin } K_x \text{ en } K_z \text{ verschillende constanten zijn.}$$

Als we nu substitueren  $x^* = x \sqrt{\frac{K_z}{K_x}}$  dan krijgen we voor vergelijking (2 - 15):

$$K_z \frac{\partial^2 h}{\partial x^{*2}} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2 - 24)$$

Als we nu stellen  $\phi = K_z \cdot h$  dan gaat deze vergelijking over in de vergelijking van Laplace (2 - 16).

De substitutie  $x^* = x \sqrt{\frac{K_z}{K_x}}$  betekent een z.g. vertrekking. Als de waarde  $K_x$  groter is dan de waarde  $K_z$  dan worden de afmetingen in de  $x$ -richting met een factor kleiner dan 1 vermenigvuldigd.

Het is natuurlijk ook mogelijk om voor  $z$  te substitueren  $z^* = z \sqrt{\frac{K_x}{K_z}}$  waardoor we in plaats van vergelijking (2 - 24) vinden:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_x \frac{\partial^2 h}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (2 - 25)$$

In dit geval worden, als  $K_x$  groter is dan  $K_z$ , de afmetingen in de z-richting met een factor groter dan 1 vermenigvuldigd.

Men krijgt met één van bovenstaande substituties dus ook voor een homogeen anisotroop grondmassief een probleem waarbij de vergelijking van Laplace geldt.

## II - 3 Het oplossen van grondwaterproblemen.

Bij het oplossen van grondwaterproblemen staan ons in principe de volgende methoden ten dienste:

1. Een berekening van die problemen waarvan, al of niet na schematisatie, een gesloten oplossing mogelijk is.
2. Een berekening met behulp van een z.g. conforme afbeelding.
3. Grafische oplossing door middel van een vierkantennet.
4. Benadering met behulp van een numeriek rekenproces.
5. Het meten in een natuur model.
6. Het meten in een analoog model.

ad 1. Deze methode is slechts mogelijk als de randvoorwaarden aan zeer bepaalde voorwaarden voldoen.

In veel gevallen is het verloop der randen grillig, zodat een gesloten oplossing zonder meer niet bestaat.

ad 2. Deze methode die ook onder 1 valt, wordt apart genoemd om de volgende redenen:

- 1e. het bijzondere karakter van de methode;
- 2e. omdat in dit ontwerp met deze methode enige berekeningen zijn uitgevoerd.

Men kan bij deze methoden twee werkwijzen onderscheiden:

De directe methode, waarbij na afbeelding de oplossing direct beschikbaar is.

De indirecte methode, waarbij een afbeelding een nieuw probleem geeft dat opgelost moet worden. Dit oplossen kan geschieden met één der bovenstaande methoden omdat de differentiaalvergelijking door het transformeren niet gewijzigd wordt.

Een voorbeeld hiervan is de methode van Pavlovsky. waarbij een z.g. Schwarz-Christoffel transformatie een nieuw probleem geeft dat op zijn beurt getransformeerd wordt tot een afbeelding waarbij de oplossing evident is ([5] blz. 64).

Om de onder 2e genoemde reden wordt hier op de directe methode nader ingegaan.

We hebben gezien dat, als de vergelijking van Laplace (2 - 16) geldt, er een functie  $\phi$  en een functie  $\psi$  bestaan, waarbij de differentiaal-betrekkingen van Cauchy-Riemann (2 - 21) gelden.

We kunnen nu de beide functies  $\phi$  en  $\psi$  combineren tot een complexe potentiaal  $\Omega = \phi + i\psi$  (3 - 1)

Hierin is  $i = \sqrt{-1}$  en wordt  $\phi$  het reële deel en  $\psi$  het imaginaire deel genoemd.

Als we stellen  $w = z + ix$  (3 - 2) dan is door de betrekkingen (2 - 21)  $\Omega$



een analytische functie van  $w$ , d.w.z. dat de afgeleiden van  $\Omega$  naar  $w$  bestaan.

$$\text{Immers als } \Omega = f(w), \text{ dan is: } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= \frac{d\Omega}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\Omega}{dw} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= \frac{d\Omega}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = i \frac{d\Omega}{dw} \end{aligned} \right\} \quad (3 - 3)$$

$$\text{Uit (3 - 1) en (3 - 2) volgt: } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{d\Omega}{dw} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = i \frac{d\Omega}{dw} \end{aligned} \right\} \quad (3 - 4)$$

$$\text{Uit (3 - 4) volgt: } \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{Waaruit de betrekkingen (2 - 22) volgen } 1)^{\text{**}}: \left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2 - 22)$$

Elk punt van een gebied  $G$  in het  $w$ -vlak heeft door de transformatie-formule  $\Omega = f(w)$  een corresponderend punt in het  $\Omega$ -vlak, waardoor in dit vlak een conforme afbeelding van het gebied  $G$  bestaat.

Conform wil zeggen dat twee lijnen die elkaar onder een hoek  $\alpha$  snijden, na afbeelding elkaar onder dezelfde hoek  $\alpha$  snijden (hoekgetrouw).

Als men in een bepaald geval de transformatie-formule kent, dan is op deze wijze een stroombeeld te transformeren tot een aantal rechte potentiaallijnen en stroomlijnen die loodrecht op elkaar staan. Daarom is van de getransformeerde punten de potentiaal eenvoudig te bepalen.

Men kan de partiële afgeleiden van  $\phi$  resp.  $\psi$  naar  $z$  resp.  $x$  op de volgende wijze uitdrukken:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial w} && \text{zie verg. (3 - 2) en dus} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \Omega}{dw^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d^2 \Omega}{dw^2} && \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

---

1)<sup>\*\*</sup>. In de literatuur wordt meestal gesteld  $z = x + iy$  daardoor komen deze vergelijkingen meestal voor in de vorm:  $\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\}$

dus algemeen: 
$$\frac{\partial^n \Omega}{\partial z^n} = \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} + i \frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} = \frac{d^n \Omega}{dw^n} \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = i \frac{d\Omega}{dw} \quad \text{zie verg. (3-2)}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i \frac{d^2 \Omega}{dw^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = i^2 \frac{d^2 \Omega}{dw^2} \quad \text{etc. etc.}$$

dus algemeen: 
$$\frac{\partial^n \Omega}{\partial x^n} = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} + i \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} = i^n \frac{d^n \Omega}{dw^n} \quad (3-6)$$

Uit (3-5) en (3-6) volgen de betrekkingen:

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} = \text{RE} \left\{ \frac{d^n \Omega}{dw^n} \right\} \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} = \text{IM} \left\{ \frac{d^n \Omega}{dw^n} \right\} \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} = \text{RE} \left\{ i^n \frac{d^n \Omega}{dw^n} \right\} \quad (3-9)$$

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} = \text{IM} \left\{ i^n \frac{d^n \Omega}{dw^n} \right\} \quad (3-10)$$

Hierin wordt met  $\text{RE} \{ a \}$  het reële deel van  $a$  en met  $\text{IM} \{ a \}$  het imaginaire deel van  $a$  bedoeld.

De partiële afgeleiden van  $\phi$  en  $\psi$  naar  $z$  resp.  $x$  zijn dus uit te drukken in de afgeleiden van  $\Omega$  naar  $w$ .

Het is mogelijk om als de transformatie-formule bekend is  $\phi(x, z)$  en  $\psi(x, z)$  uit te drukken.

Men kan dan ook de partiële afgeleiden bepalen door  $\phi(x, z)$  en  $\psi(x, z)$  te differentiëren.

Vaak zullen  $\phi(x, z)$  en  $\psi(x, z)$  vrij ingewikkelde functies zijn.

De transformatie-formule  $\Omega = f(w)$  is in het algemeen eenvoudiger, daarom verdient het bepalen van hogere afgeleiden met behulp van de betrekkingen (3-7) t/m (3-10) de voorkeur.

Het complexe getal  $w = z + ix$  is ook te schrijven als  $w = re^{i\alpha}$  (3-11)  
 waarin dan  $r = \sqrt{z^2 + x^2}$  en  $\alpha = \text{arctg} \frac{x}{z}$ .

Men kan door reeksontwikkeling aantonen dat ook  $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  (3-12)

Het reële deel is dan  $\text{RE} \{ w \} = r \cos \alpha$ .

Het imaginaire deel is dan  $\text{IM} \{ w \} = r \sin \alpha$ .

Ook  $\Omega = \phi + i\psi$  is te schrijven als  $\Omega = \lambda e^{i\theta}$  (3 - 13)

Door in  $\Omega = f(z)$  de uitdrukkingen (3 - 11) en (3 - 13) te gebruiken kunnen we een verband leggen tussen  $r$  en  $\lambda$  en tussen  $\alpha$  en  $\theta$ .

Op deze wijze is de afbeelding eenvoudig te tekenen (zie [6]).

ad 3. Deze bekende methode berust op de op blz. 16 vermelde betrekkingen en is dus bruikbaar bij twee dimensionale permanente of quasi-permanente gevallen waarbij de vergelijking van Laplace geldt.

De nauwkeurigheid van deze methode is uiteraard niet erg groot.

ad 4. Hiertoe behoort o.a. de relaxatie methode.

We zullen het principe van deze methode behandelen, omdat de benaderingswijze gelijk is aan die bij een weerstandnetwerk (zie hoofdstuk III, blz. 43). De relaxatie methode is een benaderingsmethode waarbij de differentiaalvergelijking wordt vervangen door een vergelijking met eindige differenties.

Beschouwen we een functie  $f$  van  $(x)$  (zie fig. 8), dan kunnen de eerste afgeleiden van  $f(x)$  in de punten B resp. D worden benaderd:

$$\frac{df(x_B)}{dx} \approx \frac{f(x_C) - f(x_A)}{2\Delta}$$

$$\frac{df(x_D)}{dx} \approx \frac{f(x_E) - f(x_C)}{2\Delta}$$

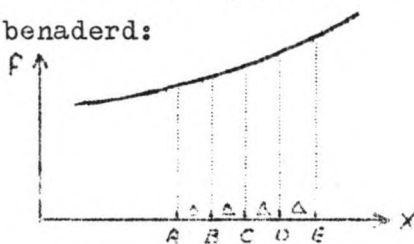


fig. 8

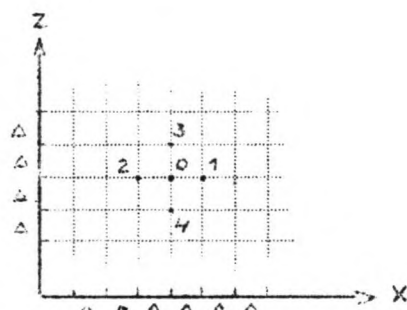


fig. 9

De tweede afgeleide in het punt C kan nu worden

benaderd door:

$$\frac{d^2 f(x_C)}{dx^2} \approx \frac{\frac{df(x_D)}{dx} - \frac{df(x_B)}{dx}}{2\Delta} = \frac{f(x_A) + f(x_E) - 2f(x_C)}{4\Delta^2} \quad (3 - 14)$$

Voor een functie van twee veranderlijken kunnen de partiële tweede afgeleiden op dezelfde wijze worden benaderd. Men kan op het  $(x,z)$ -vlak een rooster met vierkante mazen denken (zie fig. 9), maaswijdte  $\Delta$ . Men kan dan schrijven:

$$\frac{\partial^2 \phi(x_0, z_0)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x_1, z_1) + \phi(x_2, z_2) - 2\phi(x_0, z_0)}{4\Delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x_0, z_0)}{\partial z^2} \approx \frac{\phi(x_3, z_3) + \phi(x_4, z_4) - 2\phi(x_0, z_0)}{4\Delta^2}$$

en dus ook:

$$\frac{\partial^2 \phi(x_0, z_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x_0, z_0)}{\partial z^2} \approx \frac{\phi(x_1, z_1) + \phi(x_2, z_2) + \phi(x_3, z_3) + \phi(x_4, z_4) - 4\phi(x_0, z_0)}{4\Delta^2}$$

Op deze wijze gaat voor het punt 0 de vergelijking van Laplace (2 - 16) over in:

$$4\phi(x_0, z_0) - \left[ \phi(x_1, z_1) + \phi(x_2, z_2) + \phi(x_3, z_3) + \phi(x_4, z_4) \right] = 0 \quad (3 - 15)$$

Voor elk knooppunt in het inwendige van het gebied heeft men het rekenmolecuul van figuur 10, dat volgt uit de vergelijking (3 - 15).

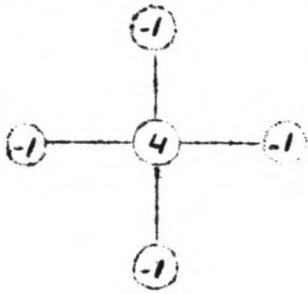


fig. 10

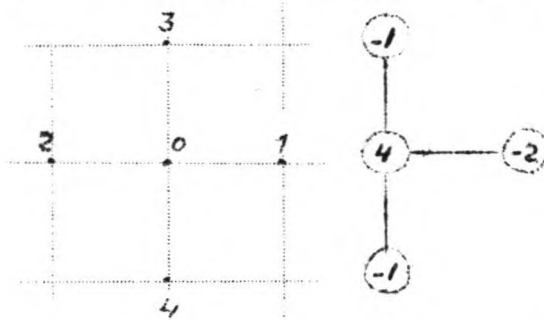
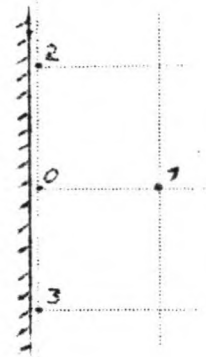


fig. 11



Aan de randen moet men afhankelijk van de vorm van deze randen t.o.v. het rooster afwijkende rekenmoleculen toepassen. Voorbeelden hiervan zijn in diverse publicaties te vinden. Voor een rechte ondoorlatende rand die samenvalt met een lijn van het rooster krijgt men het molecuul van figuur 11 .

De bekende potentialen (randvoorwaarden) worden bij de knooppunten ingeschreven, De procedure is nu als volgt:

- a. Schat op alle knooppunten een waarde voor  $\phi$  .
- b. Bepaal voor elk knooppunt het door het bijbehorende rekenmolecuul voorgeschreven verschil, b.v. (zie fig. 10):  $4\phi(x_0, z_0) - [\phi(x_1, z_1) + \phi(x_2, z_2) + \phi(x_3, z_3) + \phi(x_4, z_4)]$
- c. Begin nu bij een bepaald knooppunt, b.v. dat met het grootste verschil (ad b.) en trek van de waarde  $\phi_0$  een kwart gedeelte van het verschil (ad b.) af.
- d. Bepaal het nieuwe verschil ad b. voor de direct omliggende punten.
- e. Ga naar een volgend punt (ad c.) .

Als men c, d en e in een of andere (eventueel systematische ) volgorde herhaalt, dan zullen op een gegeven moment de verschillen verwaarloosbaar worden.

Men heeft dan niet de juiste oplossing, maar een benaderde oplossing behorende bij de gekozen maaswijdte  $\Delta$  .

Bij een kleinere maaswijdte krijgt men meestal betere resultaten. Verkleining van de maaswijdte met een factor 2 geeft een factor 4 in het aantal knooppunten en daarom een factor evenredig met  $4^2 = 16$  in het rekenwerk.

Men kan de maaswijdte zeer klein kiezen, echter de kosten zullen dan sterk stijgen. Er bestaan bepaalde technieken, z.g. overrelaxatie, die het rekenwerk beperken. Deze berusten erop dat men bij een bepaald probleem aan de algemene formule (3 - 15) een zeer bepaalde coëfficiënt toevoegt, waardoor het proces sneller convergeert ( [7] chapter 10) .

Men is niet gebonden aan vierkante mazen en het daarbij behorende molecuul. In diverse publicaties worden vele andere mogelijkheden besproken, die allen ten doel hebben de nauwkeurigheid te vergroten.

De nauwkeurigheid bij numerieke processen hangt sterk af van de benaderingswijze. Het kiezen van de juiste benaderingswijze en het toepassen ervan eist een goede kennis van de analyse en van de mogelijkheden van het rekentuig. Echter dan nog kan men voor niet te voorziene moeilijkheden komen te staan, die proberender-wijze moeten worden overwonnen.

Voor iedere variatie moet de berekening, die veelal op een computer zal geschieden, worden herhaald. Dit is duur en tijdrovend.

De resultaten van de berekening moeten worden verwerkt tot overzichtelijke grafieken of iets dergelijks.

Er zit steeds enig tijdsverschil tussen de uitvoering van de berekening en de interpretatie van de resultaten. Dit is vooral een nadeel, gezien de onvoorziene moeilijkheden die zich vaak voordoen.

Men behoeft van de bouw van het rekentuig geen bijzonderheden te kennen om er nuttig gebruik van te kunnen maken.

Bij niet-permanente problemen wordt de benaderingswijze zo mogelijk nog belangrijker. Het grote probleem is dan de stabiliteit van het proces, die b.v. afhangt van de verhouding tussen de tijdstap en de stap in de plaats. Dit probleem vereist grote kennis van de numerieke wiskunde.

ad 5. Onder een natuurmodel wordt in dit verband verstaan een model waarbij zand en water niet worden vervangen. Men kan in de natuur metingen verrichten. Hierbij doen zich vaak onregelmatigheden voor.

Men kan in een laboratorium onder geconditioneerde omstandigheden metingen verrichten aan een model op een bepaalde schaal.

Een natuurmeting is de enige weg om een juist inzicht te krijgen in de eigenschappen van de grond en de invloed van deze eigenschappen op de waterbeweging.

Bij alle andere benaderingswijzen worden coëfficiënten gebruikt die in dergelijke modellen moeten worden bepaald. (zie [9], blz. 100)

Het beste model is de natuur zelf.

Echter het is moeilijk om in deze modellen nauwkeurig te meten:

- stijgbuisjes geven afwijkingen omdat ze een bergingscapaciteit vertegenwoordigen;
- waterspanningsmeters hebben een beperkte nauwkeurigheid;
- schaalonregelmatigheden; enz.

Bovendien zijn dergelijke modellen vaak zeer arbeidsintensief en vooral moeilijk te variëren wat betreft afmetingen en coëfficiënten bij een systematisch onderzoek (zie blz. 6).

ad 6. Analoge modellen.

De belangrijkste toepassingen voor grondwaterproblemen zijn:

- a. Het Hele-Shaw -model, ook wel parallelle plaat- of spleetmodel genoemd.
- b. De elektrische analoge modellen.

ad a. Een dergelijk model berust op de analogie tussen de stroming van een viskeuze vloeistof tussen twee platen waarvoor de Wet van Poiseuille geldt en de stroming van water door grond.

De Wet van Poiseuille luidt voor dit geval:  $v_m = - \frac{gb^2}{1200 \nu} \frac{dh}{dS}$

waarin:  $v_m$  = gemiddelde snelheid  $ms^{-1}$

$b$  = spleetwijdte  $m$ .

$g$  = versnelling van de zwaartekracht  $m.s^{-1}$ .

$\nu$  =  $\frac{\eta}{\rho}$   $m^2 s^{-1}$ .

$h$  = stijghoogte (p.n.)  $m$ .

$S$  = afstand gemeten in de stroomrichting  $m$ .

Vergelijken we deze formule met (1 - 4), (1 - 8) of (1 - 10) dan is de analogie duidelijk.

Met een dergelijk model is een al of niet permanente grondwaterbeweging met een vrije grondwaterspiegel te simuleren.

Het meten van de stijghoogte in punten van het model is moeilijk (onmogelijk), omdat stijgbuisjes een bergingscapaciteit vertegenwoordigen, die de stroming beïnvloedt.

In Nederland is een dergelijk model voor het eerst toegepast door het Rijksinstituut voor Drinkwatervoorziening ( zie [9] p. 84 - 91 ).

ad b. Over deze modellen wordt in het volgende meer gezegd.

Als men een keuze moet maken uit de mogelijke oplossingsmethoden, dan zullen daarbij de volgende factoren een rol spelen:

- a. De aard van het probleem in verband met de mogelijkheden van elk der oplossingsmethoden.
- b. De omvang van het probleem; deze wordt bepaald door:
  - het aantal verschillende problemen van dezelfde soort;
  - het aantal variaties binnen één probleem.
- c. De kosten van de benodigde installatie (aanschaffing of huur).
- d. De gewenste nauwkeurigheid.
- e. De gewenste overzichtelijkheid van de resultaten.
- f. De gewenste wisselwerking tussen degene die het probleem stelt en degene die het probleem oplost. Communicatie tijdens de oplossing.
- g. De wens om instructief te kunnen werken; het "spelen" met de randvoorwaarden, waarbij de invloed hiervan (direct) blijkt.

Op het gebied van rekenautomaten is grote vooruitgang geboekt. De ontwikkeling gaat zo snel dat enthousiaste specialisten in het werken met digitale rekenmachines, analoge rekenmachines en analoge modellen min of meer langs elkaar werken.

Men zal vooral om economische redenen steeds scherper moeten onderkennen welke problemen het best met een rekenmachine en welke beter in een bepaald model of in een analogon kunnen worden opgelost.

Een elektrisch analogon eist van de gebruiker een omschakeling van de bekende grootheden op de elektrische grootheden. Als men deze sprong een keer gemaakt heeft zijn de voordelen groot, vooral wat betreft de punten d, e, f en g van bovenstaande factoren (zie ook onder II-4).

## II - 4 De analogie met een elektrische stroom door een geleider.

Een elektrisch analogon komt in de volgende vormen voor:

1. Een folie-analogon
2. Een z.g. elektrolytische trog
3. Een netwerk van weerstanden.

Het principe om een elektrisch analogon te gebruiken voor het demonstreren van een bepaalde potentiaalverdeling is reeds vrij lang bekend. Reeds in 1845 werd door Kirchhoff een folie-analogon gebruikt ter verifiëring van zijn theorie over de potentiaalverdeling in een elektrisch veld, waarbij de vergelijking van Laplace geldt.

In 1875 werd door W.G.Adams een dergelijk drie dimensionaal veld onderzocht met behulp van een elektrolytische trog (zie: [10] ).

Later werd ingezien dat een temperatuurveld aan dezelfde vergelijking voldoet. Het aantal toepassingen van elektrische analogons is sterk toegenomen.

De eerste publikaties in Nederland over de toepassingsmogelijkheden voor grondwaterproblemen van Prof. Ir. C.G.J. Vreedenburgh verschenen omstreeks 1930 (zie: [11] en [12] ).

De analogie blijkt uit de volgende wetten:

$$\text{Darcy : } v = -K \frac{dh}{ds} \quad \text{of} \quad dh = \frac{-1}{K} \frac{Q}{A} ds \quad (4 - 1)$$

$$\text{Ohm : } E = i R \quad \text{of} \quad dE = -\rho \frac{i}{A_e} dS_e \quad (4 - 2)$$

Door de analogie tussen (4 - 1) en (4 - 2) is het in principe mogelijk een grondwaterprobleem te vertalen in een elektrisch probleem.

Hierbij moet afhankelijk van het probleem een aantal hydraulische grootheden worden vertaald in elektrische grootheden.

In II - 5 en de volgende hoofdstukken wordt hierover meer gezegd.

De toepassing in een bepaald geval van een der bovenstaande vormen hangt samen met de eigenschappen van elk.

ad 1. Deze vorm kan worden toegepast voor twee dimensionale problemen.

Als geleider werd in het begin een dunne metaalplaat gebruikt, met een voor het doel te geringe weerstand. Pas nadat er andere folies beschikbaar waren, werd deze vorm veelvuldig toegepast.

In II - 5 wordt over het werken met een folie-analogon meer gezegd.



ad 2. Hierbij is het weerstandsmedium een elektrolyt (vloeistof) die zich in een niet geleidende bak bevindt.

De potentiaal-randvoorwaarden worden in de vorm van elektroden in de vloeistof aangebracht. Het is mogelijk op deze wijze een drie-dimensionaal probleem op te lossen.

Een voordeel van deze vorm is dat de weerstand in het medium volkomen isotroop is.

Een ander voordeel is dat de weerstand eenvoudig kan worden gevarieerd door het niveau in de bak te variëren. Plaatselijke variaties in de weerstand en variaties in de vorm van de randen zijn niet gemakkelijk (snel) te realiseren. Het registreren is in een dergelijk analogon niet eenvoudig. Een ander probleem is de z.g. polarisatie die kan optreden. Met een dergelijk model is volgens Karplus bij bepaalde problemen een nauwkeurigheid van 2 % mogelijk (zie: [17], blz. 169).

ad 3. Deze vorm is het meest flexibel, waardoor het aantal toepassingsmogelijkheden zeer groot is.

In de hoofdstukken III t/m IV wordt op deze vorm nader ingegaan.

Elektrische analoge modellen hebben een aantal zeer positieve eigenschappen. Als men beschikt over de nodige apparatuur (die vrij kostbaar kan worden), dan is het werken met een dergelijk model eenvoudig. Het vervaardigen is niet erg tijdrovend.

Systematische variatie van elektrische grootheden is eenvoudig en snel te realiseren.

De meetnauwkeurigheid is zeer ver op te voeren.

De mogelijkheden om resultaten te registreren zijn groot en breiden zich nog steeds uit.

Een elektrisch model is zeer instructief. Men gaat niet zelden door het model het oorspronkelijke probleem beter begrijpen.

II - 5 De analoge modelmethode m.b.v. elektrisch geleidend papier.

Hierbij wordt als plaatvormige geleider vaak het z.g. Teledeltos-papier gebruikt, hoewel ook andere materialen worden toegepast.

Deze methode wordt vrij algemeen toegepast voor permanente problemen.

Op het Elektrisch Laboratorium van de Delta Dienst der Rijkswaterstaat wordt bij onderzoeken t.b.v. dijk-ontwerpen deze methode ook voor niet-permanente problemen toegepast sinds 1958.

Een van de eerste toepassingen was een onderzoek ten behoeve van de dam in het Veerse Gat (zie: [13]).

Daarna is voor vele andere ontwerpen een dergelijk onderzoek verricht, waaronder: Dam in het Brouwerse Gat (zie: [14]).

Het aantal mogelijkheden is vrij groot en de verkregen resultaten zijn voldoende nauwkeurig voor de praktijk.

In de Ingenieur van 10 juni 1960 is een artikel van Ir. H. Marcus verschenen over deze methode. In het nu volgende wordt, uitgaande van dit artikel, op deze modeltechniek nader ingegaan.

Uit de beide wetten (4 - 1) en (4 - 2) is de volgende schaalwet af te leiden:

$$\frac{h}{E} = \frac{1/\rho}{K} \cdot \frac{S}{S_e} \cdot \frac{A_e}{A} \cdot \frac{Q}{i} \quad ((4 - 3))$$

Verhouding afm.:  $\frac{A_e}{A} = \frac{B_e \cdot H_e}{B \cdot H}$

Nu is  $R = \frac{B_e \cdot H_e}{S_e} \rho \quad (\Omega = \text{Ohm})$

Voor een vierkant stukje plaatgeleider is  $S_e = H_e$  en dus  $R = \frac{\rho}{B_e}$ .

De waarde  $\frac{\rho}{B_e}$  is een constante voor een bepaalde plaatgeleider die wordt toegepast. Deze waarde die onafhankelijk is van de grootte van het vierkant wordt vierkantsweerstand genoemd:  $R_{\square}$ .

Voor teledeltos papier is b.v.:  $R_{\square} = \text{ca. } 3000 \Omega$ .

Gesteld wordt dat de grond in het massief zowel als het materiaal in het model homogeen en isotroop is.

De hoogte-schaal zal dan gelijk worden gekozen aan de lengte-schaal, dus

$\frac{S}{S_e} = \frac{H}{H_e}$ , waardoor (4 - 3) over gaat in:

Schaalwet I :  $\frac{h}{E} = \frac{1/R_{\square}}{K} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{Q}{i} \quad ((4 - 4))$

Hierin zal B vaak de eenheid van breedte zijn.

Als men de hoogte-schaal en de lengte-schaal gelijk neemt, dan blijkt uit (4 - 4) dat deze schaal geen invloed meer heeft op de verhouding  $\frac{h}{E}$  en  $\frac{Q}{i}$ . Men is dan dus geheel vrij in de keuze van deze schaal.

Omdat het materiaal een verwaarloosbaar kleine capaciteit heeft, is voor een elementje van de plaatgeleider (zie fig.12) te schrijven:

$$i_x + i_z - \left\{ i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} \Delta x + i_z + \frac{\partial i_z}{\partial z} \Delta z \right\} = 0$$

of:  $\frac{\partial i_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial i_z}{\partial z} \Delta z = 0$  (4 - 5)

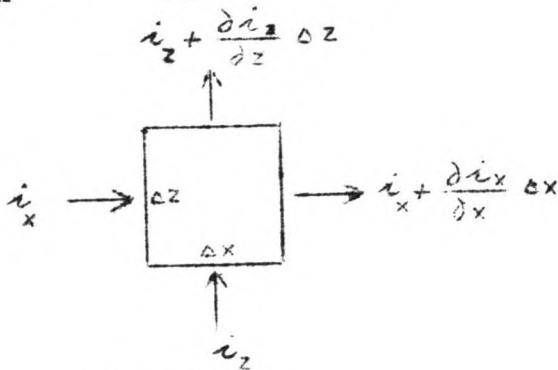


fig. 12

Deze beschouwing is analoog aan die betreffende de continuïteitsvergelijking bij grondwaterstroming in het inwendige van een massief ( zie blz. 8 ).

De weerstand van het elementje in de x-richting is  $R_{\square} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}$

De weerstand van het elementje in de z-richting is  $R_{\square} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$

Uit de wet van Ohm volgt:

$$i_x = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{R_{\square} \frac{\Delta x}{\Delta z}} = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\Delta z}{R_{\square}} \quad \text{waaruit} \quad \frac{\partial i_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta z}{R_{\square}}$$

$$i_z = \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot \frac{1}{R_{\square} \frac{\Delta z}{\Delta x}} = \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \frac{\Delta x}{R_{\square}} \quad \text{waaruit} \quad \frac{\partial i_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta x}{R_{\square}}$$

Substitueren we deze vergelijkingen in vergelijking (4 - 5) dan geeft dit:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \frac{\Delta x \Delta z}{R_{\square}} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \frac{\Delta x \Delta z}{R_{\square}} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0 \quad (4 - 6)$$

Dit is de vergelijking van Laplace, dus analoog aan vergelijking (2 - 16).

Voor de stroming (berging) loodrecht op de vrije grondwaterspiegel bij een niet-permanente toestand kunnen we schrijven (zie blz. 13):

$$q \text{ in de richting } S = \Delta N \cdot n_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2 - 11)$$

Hierbij is verondersteld dat de grondwaterspiegel slechts een geringe helling heeft. Nemen we aan dat over een eindige afstand  $N$  de berging constant is in de plaats, dan gaat vergelijking (2 - 11) over in:

$$\text{Berging over } N : q = N \cdot n_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4 - 6)$$

De elektrische analogie van deze vergelijking is die, welke het laden van een condensator beschrijft:

$$i = C \frac{dE}{dt_e} \quad (4 - 7)$$

Uit de vergelijkingen (4 - 6) en (4 - 7) volgt:

$$\text{Schaalwet II : } \boxed{\frac{n_e N}{t_w} = \frac{Q}{i} \cdot \frac{E}{h} \cdot \frac{C}{t_e}}$$

Als we deze met de schaalwet I combineren, krijgen we de schaalwet:

$$\boxed{N \cdot \frac{n_e}{K} \frac{1}{t_w} = R_{\square} C \frac{1}{t_e}} \quad (4 - 8)$$

Als we nu stellen  $\frac{1}{t_w} = f_w$  en  $\frac{1}{t_e} = f_e$ , dan gaat (4 - 8) over in de schaalwet:

$$\boxed{N \cdot \frac{n_e}{K} f_w = R_{\square} C f_e} \quad (4 - 9)$$

De invloed van een vrije grondwaterspiegel in een niet-permanente stromings-toestand kan met zekere beperkingen in een elektr. model worden voorgesteld door condensatoren. De capaciteit van deze condensatoren kan met (4 - 9) worden berekend als de overige grootheden bekend zijn.

Deze overige grootheden zijn in de eerste plaats de eigenschappen van de grond  $n_e$  en  $K$  en de vierkantsweerstand van het materiaal. In de tweede plaats zijn er de tijdschaal  $(\frac{t_w}{t} = \frac{f_e}{f_w})$  en de breedte  $N$  van een gedeelte van de vrije grondwaterspiegel dat door één condensator wordt voorgesteld.

Voor de inrichting van een model i.v.m. enige toepassingen wordt verwezen naar de genoemde literatuur (zie: [13], [14] en [15]).

De voordelen van het werken met Teledeltos-modellen:

- 1<sup>e</sup>. Het materiaal is continu, dus een goede weergave van het continue medium grond.
- 2<sup>e</sup>. Voor een permanente stroming en voor een niet-permanente stroming op elk tijdstip zijn de equipotentiaal lijnen te tekenen. Men kan dus eenvoudig een vierkantennet bepalen.
- 3<sup>e</sup>. Het maken van een dergelijk model is vrij goedkoop, zowel wat betreft materiaalkosten, als wat betreft arbeidsloon.
- 4<sup>e</sup>. Een model is tijdens het onderzoek eenvoudig en snel systematisch te variëren.
- 5<sup>e</sup>. De resultaten zijn overzichtelijk te registreren.
- 6<sup>e</sup>. De reproduceerbaarheid van resultaten is goed. De resultaten zijn voor de praktijk voldoende nauwkeurig.

Tekortkomingen van Teledeltos modellen:

- 1<sup>e</sup>. Er zijn alleen modellen mogelijk van twee-dimensionale problemen.
- 2<sup>e</sup>. Een K-waarde die willekeurig varieert met de plaats is niet steeds te realiseren.
- 3<sup>e</sup>. Een niet-permanente stromingstoestand waarbij de vrije grondwaterspiegel varieert in de plaats is slechts met bepaalde verwaarlozingen na te bootsen.
- 4<sup>e</sup>. Nauw verwant aan 3<sup>e</sup>. is het realiseren van een z.g. "open talud".  
Men kan de randvoorwaarden niet naar behoefte geometrisch laten variëren in één model.
- 5<sup>e</sup>. Variaties in de weerstand van het papier.

ad 1<sup>e</sup>. Dit is een vanzelfsprekend gevolg van het gebruikte materiaal. Wel is het mogelijk om in drie dimensies te werken door weerstandjes in punten aan het papier te bevestigen. Men discretiseert dan dus in één richting wat betreft de weerstand. Het aansluiten van een weerstandje aan het papier is echter praktisch geen fraaie constructie.

ad 2<sup>e</sup>. Zeer bepaalde variatie in de K-waarde zijn nog wel mogelijk, b.v. gedeelten met  $K' = 2K$  of  $K' = 3K$ , etc. door enige lagen papier over elkaar aan te brengen (zie: [16], blz. 22).

Het moeilijke punt is dan echter de overgang.

Ook is het in principe mogelijk om een gedeelte van het model in de vorm van een weerstand netwerk uit te voeren. Ook hierbij geeft de aansluiting moeilijk-

heden. Een gedeelte met een relatief veel kleinere K-waarde kan in het model worden gebracht door dit gedeelte eenvoudig uit te snijden ( $K = 0$ ). Verschillen in K-waarde van twee hoofdrichtingen zijn te simuleren door het model te vertrekken (zie: [15]).

Een gedeelte met een relatief veel grotere K-waarde kan in model worden gebracht door dit geheel met (zeer goed geleidende) zilververf te bestrijken ( $K \rightarrow \infty$ ).

ad 3<sup>e</sup>. Een niet-permanente stromingstoestand kan worden benaderd door een (groot) aantal quasi-permanente stromingstoestanden.

Dit is natuurlijk een zeer tijdrovende benadering.

Voor stromingstoestanden die periodiek variëren is deze benaderingswijze dan ook praktisch niet wenselijk.

Bij het eerder genoemde onderzoek t.b.v. dijk-ontwerpen wordt een andere benaderingswijze toegepast.

Aan de hand van de figuren op bijlagen 1 en 2 wordt hierop nader ingegaan. Figuur 1 geeft een schets van een dwarsprofiel van een zeedijk.

De buitenweerstand varieert in de tijd (zie peilen). De binnenwaterstand is constant (Polderpeil).

De vrije grondwaterspiegel varieert in de tijd tussen de lijnen a en b.

Het is niet mogelijk in één T-D model een bovenbegrenzing te maken die periodiek in de tijd varieert.

Wel is het mogelijk het model voor een gemiddelde grondwaterspiegel te begrenzen (constant) en daarop de capaciteiten aan te sluiten, die de berging tijdens het variëren simuleren.

Men kan de grondwaterstroming in twee componenten verdeeld denken:

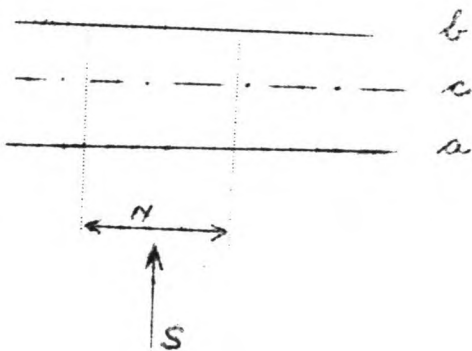
- 1 . omdat de middenstand van het buitenwater boven P.P. ligt, een permanente stroming door de dijk en de ondergrond van buiten naar binnen.
- 2 . een periodiek variërende stroming door de dijk, door het variëren van de buitenwaterstand.

Aan de grondwaterbeweging wordt een aandeel geleverd door de capillaire zone (voor bepaald zand b.v. ca. 0,30 m). Daarom begrenst men het model door een lijn die op schaal 0,30 m ligt boven de freatische lijn ( $z = h$ ) die behoort bij de middenstand. Laten we deze lijn, die iteratief wordt bepaald, c noemen.

Het is al direct duidelijk dat de component 1 in dat geval plaats vindt door een watervoerend pakket dat in tegenstelling met de werkelijkheid constant is. De invloed hiervan zal afhankelijk zijn van de verhouding tussen lengte en breedte van het watervoerend pakket.

Laten we aannemen dat er een stroombuis bestaat zoals op de figuren 2 en 3

is aangegeven.



In de natuur is de berging continu in horizontale en verticale richting.

Door N stroomt dus water heen en weer met een continu variërende weerstandsweg  $S$ .

Stel dat een capaciteit op de lijn  $c$  wordt aangesloten die representatief is voor de berging door  $N$ .

De grootte van deze capaciteit is te bepalen met (4 - 9).

De aansluiting op het papier geschiedt door een streepje zilververf (lamel-constructie, zie fig. 4) dat een zeer geringe weerstand heeft.

Dit streepje zilververf is een equipotentiaal-lijn.

Als men de zilververf over de volle breedte  $N$  zou aanbrengen betekent dit dat de gehele lijn  $c$  een equipotentiaal-lijn zou worden omdat alle stroombuizen aan elkaar grenzen. Men brengt daarom slechts over een gedeelte van  $N$  de geleidende verf aan, wat weer betekent dat de stroombuis wordt vernauwd. Men heeft uit experimenten en berekeningen gevonden dat een lamel-constructie zoals op fig. 4 is aangegeven het meest bevredigend is.

De weerstandsweg  $S_c$  naar de condensator is constant in het model terwijl deze in werkelijkheid continu varieert tussen  $S_a$  en  $S_b$ . De weerstand van een stroombuis is recht evenredig met de lengte  $S$ . De invloed van de variatie tussen  $S_a$  en  $S_b$  is dus afhankelijk van de verhouding tussen de grootte van het verschil ( $S_b - S_a$ ) en de lengte van de mogelijke stroombuis  $S$ . In het geschetste geval is deze verhouding klein, b.v.  $1/20$  (zie fig. 2).

Is echter een kortere stroombuis mogelijk, b.v. als het talud in- en uitstroming toestaat dan wordt de invloed van deze schematisatie ontoelaatbaar groot.

ad 4<sup>e</sup>. Deze tekortkoming is nauw verwant aan 3<sup>e</sup>. Het gaat namelijk om een variatie van de afmetingen (geometrische randvoorwaarden) in de tijd, wat in één T.D.-model niet mogelijk is.

ad 5<sup>e</sup>. Het is bekend dat de weerstand in twee hoofdrichtingen maximaal ongeveer 20 % kan verschillen, wat door het vertrekken van de schaal is te verdisconteren.

Daarnaast echter variëren de weerstandswaarden in een bepaalde hoofdrichting met de plaats. Deze variaties beïnvloeden de potentiaalverdeling.

In een stuk T-D papier van  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  kan de weerstandswaarde in één bepaalde richting b.v. 5 - 15 % variëren volgens een verrichte meting. Als laatste kan de vrij grote gevoeligheid van het papier voor atmosferische omstandigheden worden genoemd (temperatuur, vochtigheid).

De bovenstaande punten doen de vraag rijzen of er niet een wijze van nabootsen mogelijk is waarbij de tekortkomingen kunnen worden opgeheven.

Wat 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> en 4<sup>e</sup> betreft is het onmogelijk om dit in een elektrisch model te verbeteren als het medium continu is.

Om ten aanzien van deze punten een verbetering te verkrijgen zullen we dus een voordeel n.l. continu model moeten offeren.

In een discontinu model wordt de weerstand van een elementje grond in een hoofdrichting discreet voorgesteld door een weerstandselement. Dit schept de volgende mogelijkheden:

- 1<sup>e</sup>. De elementen kunnen willekeurig variëren.
- 2<sup>e</sup>. Men kan tussen de elementen aan- an afschakelen.
- 3<sup>e</sup>. De elementen zijn met geringe variaties (toleranties) verkrijgbaar.
- 4<sup>e</sup>. De elementen zijn ongevoelig voor atmosferische invloeden.



## II-6 De opdracht.

Gevraagd werd het geven van:

"Richtlijnen voor het ontwerpen en het gebruiken van een elektrisch analogon voor niet-permanente grondwaterstromen, bestaande uit een netwerk van weerstanden, schakelelementen en condensatoren".

Hoewel is getracht het onderzoek zo algemeen mogelijk te houden is het realiseren van een praktisch bruikbaar netwerk-dijkanalogon steeds het richtpunt geweest. Mede daardoor zijn enige beperkingen opgelegd. Zo is het onderzoek beperkt tot twee-dimensionale problemen in rechthoekige coördinaten. Hierbij is op te merken dat, juist omdat het gaat om een netwerk van elementen, een uitbreiding tot drie-dimensionale problemen geen principiële verschillen in de benadering zal geven.

Uit wat we in het voorgaande hebben gezien kunnen bij niet-permanente stromingen met een vrije grondwaterspiegel, twee gebieden worden onderscheiden:

- 1e. het gedeelte van een grondmassief dat doorlopend geheel met water verzadigd is.
- 2e. het gedeelte van een grondmassief dat de variërende vrije grondwaterspiegel bevat.

In verband hiermede is het onderzoek in enige onderdelen gesplitst. Deze onderdelen zijn in verschillende hoofdstukken ondergebracht.

### Hoofdstuk III: Het weerstandnetwerk.

Hierin wordt besproken waarom een grondwaterstroming kan worden gesimuleerd door een elektrische stroom door een netwerk van weerstanden. Het zal daarbij vooral gaan over het feit dat de weerstand niet continu verdeeld is.

De resultaten van dit gedeelte van het onderzoek zijn vooral bruikbaar voor een gedeelte ad 1e. van het model.

### Hoofdstuk IV: De vrije grondwaterspiegel.

Voor dit gedeelte van het onderzoek is het gedrag van het grondwater nabij de vrije grondwaterspiegel bestudeerd.

Het realiseren van een gedeelte ad 2e. in een model is één van de nieuwe mogelijkheden van het toepassen van een weerstandnetwerk.

De resultaten van dit gedeelte van het onderzoek kunnen worden gezien als een eerste stap in de richting van het uiteindelijke doel.

Zo wordt in dit hoofdstuk slechts gesproken over een één-dimensionale grondwaterbeweging.

Hoofdstuk V:

In dit hoofdstuk worden eerst enige conclusies getrokken die in dit stadium van het onderzoek mogelijk zijn. Daarnaast worden enige suggesties gedaan voor de voortzetting van het onderzoek. Deze voortzetting komt neer op het uitbreiden van de mogelijkheden om randvoorwaarden, die (continu en/of periodiek) in de plaats variëren, in een netwerk-model te realiseren.

### Hoofdstuk III. Het Weerstandnetwerk.

In een grondmassief zijn de plaatsvariabelen en de tijdvariabele continue onafhankelijke veranderlijken. We hebben in het voorgaande gezien dat in een elektrische geleider met continue plaatsvariabelen, de potentiaalverdeling geheel analoog is aan die in een grondmassief. Krijgt een grondmassief in een elektrisch model de vorm van een weerstandnetwerk, dan zijn de plaatsvariabelen niet meer continu in dit model. Het vervangen van het continue medium door een netwerk van discrete elementen wordt discretiseren genoemd. We willen in dit hoofdstuk onderzoeken wat daarbij de consequenties zijn.

Bij dit onderzoek wordt de stromingstoestand op een bepaald moment beschouwd, zodat in het volgende de functies  $\phi$  en  $\mathbb{E}$  steeds (stilzwijgend) alleen afhankelijk van de plaatsvariabelen zijn gesteld.

Voor niet-permanente stromingstoestanden, waarbij de z.g. elastische berging (zie blz. 9) en de traagheid verwaarloosd kunnen worden, zal alles wat wordt gezegd in dit hoofdstuk, onverminderd van toepassing zijn. In het inwendige van een weerstandnetwerk voor deze problemen komen geen capaciteiten of zelfinducties voor.

We beperken ons tot één-dimensionale en twee-dimensionale problemen in rechthoekige coördinaten.

In het volgende wordt het grondmassief homogeen en isotroop verondersteld zodat het veld voldoet aan de verg. (2-16) :

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} = 0$$

Aan het einde van dit hoofdstuk zal op het realiseren van een grondmassief dat niet homogeen en/of niet isotroop is nader worden ingegaan.

#### III - 1. Het discretiseren.

Bij een weerstandnetwerkmodel heeft niet elk punt van het grondmassief een corresponderend punt in het model. Het veld is dus slechts op bepaalde punten (de knooppunten van het netwerk) aanwezig.

Willen we van tussengelegen punten de waarde van de functie weten, dan moeten we op de een of andere manier interpoleren.

Veel belangrijker is de vraag of de waarden van de functie op de knooppunten zelf wel juist is, en of het gehele netwerk representatief is voor het massief in het prototype.

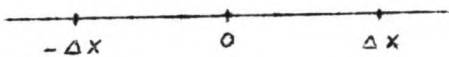
We kunnen het discretiseren op twee manieren benaderen, die beide belangrijk zijn voor het inzicht:

- 1e. een wiskundige benadering.
- 2e. een fysische benadering.

ad 1e De wiskundige benadering.

Bij het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen wordt vaak gebruik gemaakt van z.g. eindige differentiebenaderingen. Een differentiaalvergelijking wordt dan vervangen door een vergelijking met eindige differenties.

Stel dat  $\phi$  een continue functie van  $x$  is en dat de waarde van deze functie in drie punten, die op een afstand  $\Delta x$  van elkaar liggen, bekend is. Laten we deze punten resp.  $-\Delta x$ ,  $0$  en  $\Delta x$  noemen.



De gemiddelde waarde van de eerste afgeleide van  $\phi$  naar  $x$  over het lijnsegment  $[0, \Delta x]$  kan worden uitgedrukt met het differentiequotient:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{[0, \Delta x]} = \frac{\phi(\Delta x) - \phi(0)}{\Delta x} \quad (1-1)$$

De gemiddelde waarde van de eerste afgeleide van  $\phi$  naar  $x$  over het lijnsegment  $[-\Delta x, 0]$  kan worden uitgedrukt op dezelfde wijze.

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{[-\Delta x, 0]} = \frac{\phi(0) - \phi(-\Delta x)}{\Delta x} \quad (1-2)$$

$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{[0, -\Delta x]}$  kan worden beschouwd als de waarde van de eerste afgeleide voor  $x = +\frac{1}{2}\Delta x$ , dus  $\frac{d\phi(\frac{1}{2}\Delta x)}{dx} \approx \frac{\phi(\Delta x) - \phi(0)}{\Delta x}$

$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{[-\Delta x, 0]}$  kan worden beschouwd als de waarde van de eerste afgeleide voor  $x = -\frac{1}{2}\Delta x$ , dus  $\frac{d\phi(-\frac{1}{2}\Delta x)}{dx} \approx \frac{\phi(0) - \phi(-\Delta x)}{\Delta x}$

De tweede afgeleide van  $\phi$  naar  $x$  in het punt 0 kan nu, met een z.g. centrale differentiebenadering, worden benaderd:

$$\frac{d^2\phi(0)}{dx^2} \approx \frac{\frac{d\phi(\frac{1}{2}\Delta x)}{dx} - \frac{d\phi(-\frac{1}{2}\Delta x)}{dx}}{\Delta x} \approx \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\phi(\Delta x) - \phi(0)}{\Delta x} - \frac{\phi(0) - \phi(-\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

of wel 
$$\frac{d^2\phi(0)}{dx^2} \approx \frac{\phi(\Delta x) + \phi(-\Delta x) - 2\phi(0)}{(\Delta x)^2} \quad (1-3)$$

De vergelijking van Laplace voor een één dimensionaal veld kan dus worden benaderd op de volgende wijze:

$$0 = \frac{d^2\phi(0)}{dx^2} \approx \frac{\phi(\Delta x) + \phi(-\Delta x) - 2\phi(0)}{(\Delta x)^2} \quad (1-4)$$

In een twee-dimensionaal veld kunnen de partiele afgeleiden van  $\phi(x, z)$  naar  $x$  resp.  $z$  op soortgelijke wijze worden benaderd.

Laten we bijvoorbeeld in een gedeelte van een dergelijk veld vijf punten beschou-

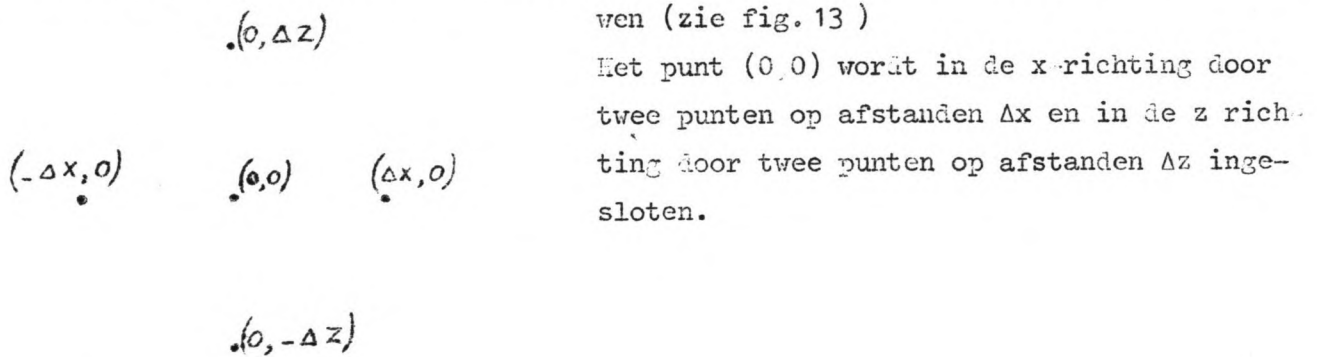


fig. 13

Voor de partiele afgeleiden voor punten midden tusschen het punt 0,0 en de 4 om-  
liggende punten kunnen we dan de volgende benaderingen schrijven:

$$\frac{\delta\phi(\frac{1}{2}\Delta x, 0)}{\delta x} \approx \frac{\phi(\Delta x, 0) - \phi(0, 0)}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\delta\phi(-\frac{1}{2}\Delta x, 0)}{\delta x} \approx \frac{\phi(0, 0) - \phi(-\Delta x, 0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta\phi(0, \frac{1}{2}\Delta z)}{\delta z} \approx \frac{\phi(0, \Delta z) - \phi(0, 0)}{\Delta z} \quad ; \quad \frac{\delta\phi(0, -\frac{1}{2}\Delta z)}{\delta z} \approx \frac{\phi(0, 0) - \phi(0, -\Delta z)}{\Delta z}$$

De tweede partiële afgeleiden van  $\phi(x,z)$  naar  $x$  resp.  $z$  in het punt  $(0,0)$  kunnen dan worden benaderd:

$$\frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta x^2} \approx \frac{\phi(\Delta x, 0) + \phi(-\Delta x, 0) - 2\phi(0,0)}{\Delta x^2} \quad \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta z^2} \approx \frac{\phi(0, \Delta z) + \phi(0, -\Delta z) - 2\phi(0,0)}{\Delta z^2}$$

De vergelijking van Laplace kan dus voor het punt  $(0,0)$  worden benaderd:

$$0 = \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta z^2} \approx \frac{\phi(\Delta x, 0) + \phi(-\Delta x, 0) - 2\phi(0,0)}{\Delta x^2} + \frac{\phi(0, \Delta z) + \phi(0, -\Delta z) - 2\phi(0,0)}{\Delta z^2} \quad (1-5)$$

Worden de afstanden  $\Delta x$  en  $\Delta z$  gelijk gekozen, zeg  $\Delta$ , dan gaat (1-5) over in:

$$0 = \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta z^2} \approx \frac{\phi(\Delta, 0) + \phi(-\Delta, 0) + \phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta) - 4\phi(0,0)}{\Delta^2} \quad (1-6)$$

Uit de verg. (II-3-15) volgt de vergelijking:

$$\phi(\Delta, 0) + \phi(-\Delta, 0) + \phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta) - 4\phi(0,0) \approx 0 \quad (1-7)$$

Op deze vergelijking berust de z.g. relaxatiemethode voor het oplossen van grondwaterproblemen (bij vierkante mazen).

Bij de bespreking van deze methode (zie: hoofdstuk II blz. 21) werd opgemerkt dat men niet is gebonden aan vierkante mazen.

Ook bij een weerstandnetwerk is de keuze van de maasvorm in principe vrij.

Men kan onderscheiden:

1. onregelmatige maasvormen
2. regelmatige maasvormen.

d. 1. Een bekend artikel over onregelmatige maasvormen is dat van R.H. Mac Neal [13].

Hoewel men deze maasvormen in principe kan toepassen, zal dit om praktische redenen zoveel mogelijk worden vermeden, daar zij onnodige complicaties geven.

Het belangrijkste bezwaar is dat de weerstandselementen, die met veel moeite worden bepaald, zeer willekeurige en verschillende waarden zullen krijgen.

Worden elementen toegepast die normaal in de handel zijn, dan kan men slechts kiezen uit een zeer bepaalde reeks waarden, zodat men niet over elke willekeurige waarde kan beschikken.

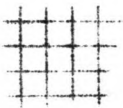
Een grote verscheidenheid in de waarden vergroot de kans op fouten en maakt een model meer arbeidsintensief en minder overzichtelijk.

Alleen als de randen van een model een grillig verloop hebben kan men een gedeelte met onregelmatige mazen overwegen.

ad. 2. Het aantal regelmatige maasvormen dat praktische betekenis heeft is beperkt.

We kunnen de volgende vormen onderscheiden:

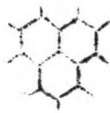
- a. vierkanten.
- b. rechthoeken.
- c. regelmatige zeshoeken.
- d. gelijkzijdige driehoeken.
- e. vierkanten waaraan diagonalen zijn toegevoegd.



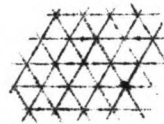
a.



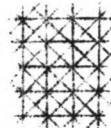
b.



c.



d.



e.

Bij de keuze van een maasvorm in een bepaald geval zullen de volgende punten een rol spelen:

- a. de vorm van de grenzen;
- b. de vereiste souplesse van de maasvorm bij variaties in de weerstandswaarden en/of de maaswijdte;
- c. de bij een bepaalde maasvorm behorende nauwkeurigheid.

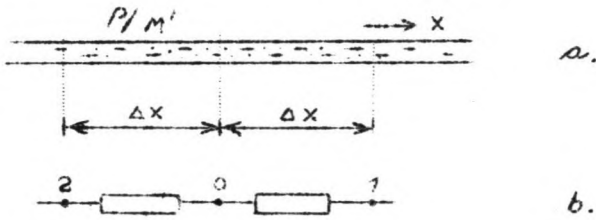
Onder III-2 wordt voor bovenstaande vormen achtereenvolgens een foutbeschouwing opgezet.

#### De fysische benadering:

We kunnen het discretiseren zien als het vervangen van de weerstand in een continue elektrische geleider door een netwerk van weerstandselementen.

Deze benadering is belangrijk voor het bepalen van de waarden der weerstandselementen (zie: [19] blz. 96).

Hebben we een één-dimensionaal continu geleidend systeem, waarvan de weerstand per eenheid van lengte  $\rho$  is (zie fig. 14a), dan kunnen we dit vervangen door een serie weerstandselementen (zie fig. 14b).



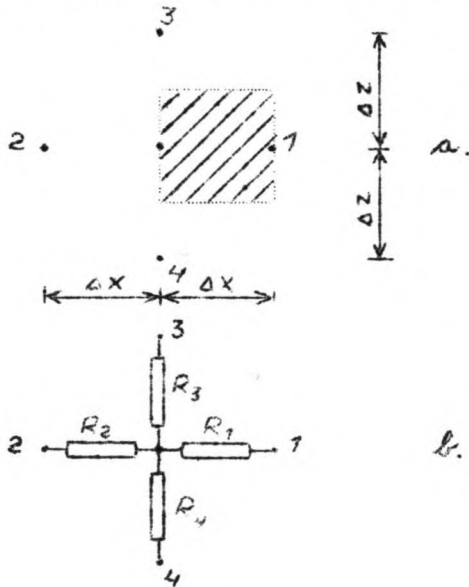
Is de afstand tussen de twee punten  $\Delta x$ , dan wordt de waarde van het tussengelegen weerstandselement  $\rho \cdot \Delta x$ .

fig. 14

We hebben gezien dat in een twee-dimensionaal continu geleidend systeem, waarbij de weerstand homogeen en isotroop is, er een z.g. vierkantsweerstand  $R_{\square}$  bestaat (zie blz. 28). Deze is afhankelijk van het materiaal en onafhankelijk van de grootte van het vierkant!

We willen een dergelijk systeem vervangen door een netwerk van weerstandselementen, in b.v. twee loodrecht op elkaar staande richtingen.

De waarde van elk der elementen is afhankelijk van de vorm van het gebiedje uit het systeem, waarvoor deze weerstand representatief is. We beschouwen 5 punten in het systeem (zie fig. 15).



De waarde van het weerstandselement tussen 0 en 1 volgt uit de vorm van het gearceerde gebied:

$$R_1 = R_{\square} \frac{\Delta x}{\Delta z} \quad (1-8)$$

Op dezelfde wijze is ook voor de andere elementen de weerstandswaarde te bepalen:

$$R_2 = R_{\square} \frac{\Delta x}{\Delta z}$$

$$R_3 = R_{\square} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$R_4 = R_{\square} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

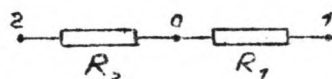
fig. 15

Zijn in dit geval de afstanden  $\Delta x$  en  $\Delta z$  gelijk dan worden de waarden  $R$  van de vier elementen gelijk aan elkaar en aan  $R_{\square}$ .



In de elektriciteitsleer geldt in elk knooppunt de Wet van Kirchhoff, die zegt dat de som van de stromen naar dat knooppunt nul is.

Voor een één-dimensionaal geval wordt dit (zie fig. 16):



$$\frac{E_1 - E_0}{R_1} + \frac{E_2 - E_0}{R_2} = 0 \quad (1-9)$$

fig. 16

Als  $R_1$  en  $R_2$  gelijk  $R$  zijn dan gaat verg. (1-9) over in  $\frac{E_1 + E_2 - 2E_0}{R} = 0$  (1-10)

Voor een twee-dimensionaal geval wordt dit (zie fig. 17):

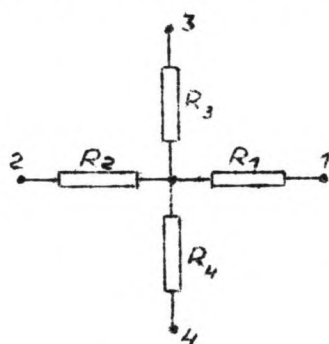


fig. 17

$$\frac{E_1 - E_0}{R_1} + \frac{E_2 - E_0}{R_2} + \frac{E_3 - E_0}{R_3} + \frac{E_4 - E_0}{R_4} = 0 \quad (1-11)$$

Als  $R_1$  en  $R_2$  gelijk  $R_x$  en  $R_3$  en  $R_4$  gelijk  $R_z$  zijn dan gaat verg. (1-11) over in:

$$\frac{E_1 + E_2 - 2E_0}{R_x} + \frac{E_3 + E_4 - 2E_0}{R_z} = 0 \quad (1-12)$$

Zijn de waarden  $R_x$  en  $R_z$

gelijk, zeg  $R$ , dan gaat verg. (1-12) over in:

$$\frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - 4E_0}{R} = 0 \quad (1-13)$$

Uit verg. (1-13) volgt ook de vergelijking:  $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - 4E_0 = 0$  (1-14)

Vergelijken we de vergelijkingen (1-7) en (1-14) met elkaar dan zien we dat deze, afgezien van de analoge functies  $\phi$  en  $E$ , volkomen met elkaar overeenstemmen.

Dit betekent dus dat de vergelijking, die in elk knooppunt van een weerstandnetwerk geldt, gelijk is aan de vergelijking, die wordt gebruikt bij een relaxatieproces voor het oplossen van de vergelijking van Laplace.

Men kan dan ook stellen dat de oplossing, die d.m.v. een weerstandnetwerk automatisch en onmiddellijk wordt verkregen, analoog is aan de oplossing, die wordt

verkregen met een relaxatie-proces.

We hebben reeds gesteld dat bij een eindige differentiebenadering verwaarlozingen worden ingevoerd, die afhankelijk zullen zijn van de gekozen afstandjes  $\Delta x$  en  $\Delta z$ .

Bij een weerstandnetwerk is deze foutbron op volkomen identieke wijze aanwezig. We zullen onder II-2 trachten hierin een inzicht te krijgen.

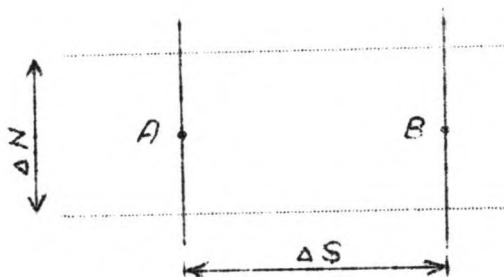
De invloed van de grootte van de weerstand in een elektrisch model komt tot uiting in de schaalwetten die onder II-5 zijn afgeleid. Hierin komt voor een twee-dimensionaal homogeen isotroop geval steeds het verband voor tussen de elektrische grootte  $R_{\square}$  en de doorlatendheidscoëfficiënt  $K$  (zie blz. 28).

We zullen bij enige regelmatige maasvormen (zie blz. 41) de weerstandswaarden bepalen in verhouding met de in bovengenoemd geval bestaande vierkantsweerstand  $R_{\square}$ .

Men kan voor een dergelijke bepaling als volgt te werk gaan :

- 1e. Beschouw achtereenvolgens een stroming in de richtingen van de coördinaatassen.
- 2e. Neem aan dat door een stroombuis met een geschikte breedte een stroom  $i$  gaat.
- 3e. De vierkantsweerstand is  $R_{\square}$ , zodat tussen willekeurige punten langs een stroombuis de spanningsval ( $\Delta E$ ) te bepalen is uit het product van stroom en weerstand:

$$E_A - E_B = i \cdot \frac{\Delta S}{\Delta N} R_{\square}. \quad (1-15)$$



- 4e. Met een dergelijke beschouwing is in de beide hoofdrichtingen het potentiaalverschil tussen punten, die overeenkomen met de knooppunten van het netwerk, te bepalen.
  - 5e. De stroom  $i$  wordt geconcentreerd gedacht in de verschillende weerstanden. De gewenste potentiaalverschillen tussen de knooppunten zijn bepaald, zodat de benodigde weerstandswaarden zijn uit te drukken.
- Bovenstaande procedure zullen we voor de verschillende maasvormen volgen.

Mazen in de vorm van rechthoeken (b):

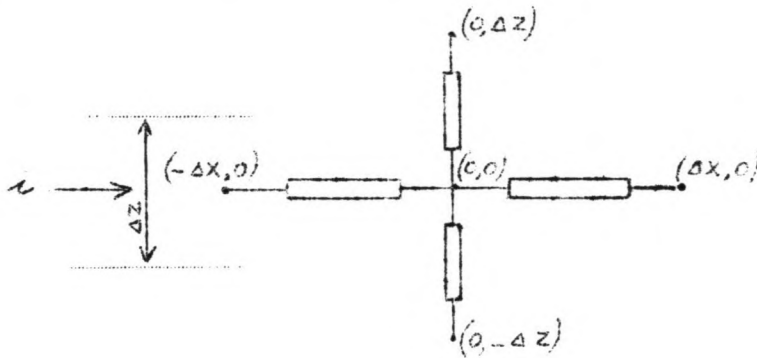
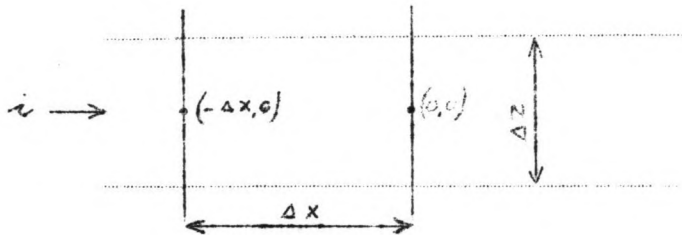


fig. 18

Stroming in de richting van de positieve x-as.

De breedte van de stroombuis is  $\Delta z$  (zie fig. 18). De stroomsterkte noemen we  $i$ .



Nu is volgens vergelijking (1-15)

$$E(-\Delta x, 0) - E(0, 0) = i \frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot R_0 \quad (1-16)$$

Denken we de stroom  $i$  geconcentreerd in de we erstand  $R_2$  dan geldt in het netwerk:

$$E(-\Delta x, 0) - E(0, 0) = i R_2 \quad (1-17)$$

Uit de vergelijkingen (1-16) en (1-17) volgt dat moet gelden:

$$R_2 = \frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot R_0$$

Op dezelfde wijze zijn de overige waarden te bepalen.

$$\text{We krijgen dan: } R_1 = R_2 = \frac{\Delta x}{\Delta z} R_0 \quad R_3 = R_4 = \frac{\Delta z}{\Delta x} R_0 \quad (1-18)$$

Deze uitdrukkingen zijn reeds gevonden (zie: blz.42) door slechts te letten op het gebied van een continue geleider, waarvoor het weerstandelement representatief is.

Wordt de maasvorm ingewikkelder dan is bovenstaande procedure de aangewezen weg.

De vergelijking in een knooppunt wordt bij deze maasvorm:

$$\frac{E(\Delta x, 0) - E(0, 0)}{R_1} + \frac{E(-\Delta x, 0) - E(0, 0)}{R_2} + \frac{E(0, \Delta z) - E(0, 0)}{R_3} + \frac{E(0, -\Delta z) - E(0, 0)}{R_4} = 0$$

Substitueren we in deze vergelijking de betrekkingen (1-18) dan krijgen we:

$$\frac{E(\Delta x, 0) - E(0, 0)}{\frac{\Delta x}{\Delta z} R_{\square}} + \frac{E(-\Delta x, 0) - E(0, 0)}{\frac{\Delta x}{\Delta z} R_{\square}} + \frac{E(0, \Delta z) - E(0, 0)}{\frac{\Delta z}{\Delta x} R_{\square}} + \frac{E(0, -\Delta z) - E(0, 0)}{\frac{\Delta z}{\Delta x} R_{\square}} = 0$$

of wel:

$$E(\Delta x, 0) + E(-\Delta x, 0) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 \{E(0, \Delta z) + E(0, -\Delta z)\} - 2 \left\{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\right\} E(0, 0) = 0$$

Als we  $\frac{\Delta x}{\Delta z} = a$  stellen volgt:

$$E(\Delta x, 0) + E(-\Delta x, 0) + a^2 \{E(0, \Delta z) + E(0, -\Delta z)\} - 2 \{1 + a^2\} E(0, 0) = 0 \quad (1-19)$$

Mazen in de vorm van vierkanten (a):

Met dat wat is afgeleid voor de weerstandswaarden bij rechthoekige mazen, is gemakkelijk in te zien dat in dit geval deze waarden worden:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_{\square} \quad (1-20)$$

In dit geval geldt in ieder knooppunt de vergelijking (1-13) zoals we reeds op blz. 43 hebben gezien.

Mazen in de vorm van regelmatige zeshoeken (c):

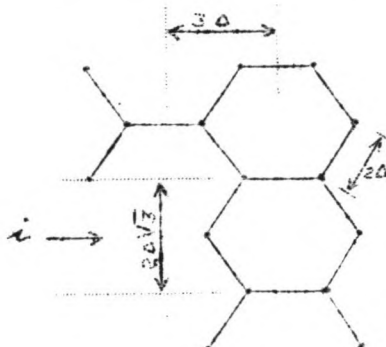


fig. 19

Stroming in de positieve x richting. Laten we de zijdelengte  $2\Delta$  noemen. Beschouwen we enige mazen dan is het duidelijk dat de breedte van de stroombuis, die past in de beschouwing,  $2\Delta\sqrt{3}$  groot is.

De stroom door deze breedte noemen we  $i$ .

Dan is:  $E(-2\Delta, 0) - E(0, 0) = i \cdot \frac{2\Delta}{2\Delta\sqrt{3}} \cdot R_0 = 1/3\sqrt{3} \cdot i \cdot R_0$

En ook  $E(0, 0) - E(\Delta, \Delta\sqrt{3}) = E(0, 0) - E(\Delta, -\Delta\sqrt{3}) =$

$$i \cdot \frac{\Delta}{2\Delta\sqrt{3}} \cdot R_0 = \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot i \cdot R_0$$

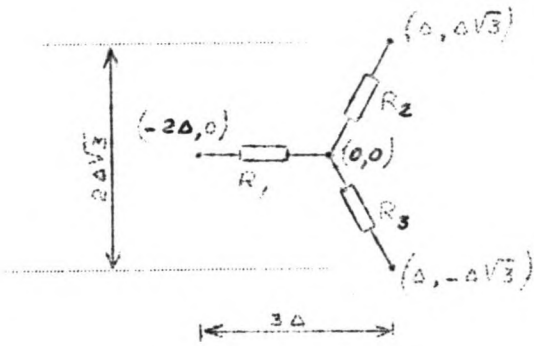


fig. 20

In het netwerk denken we de stroom  $i$  geconcentreerd in de weerstand  $R_1$ .

In het knooppunt  $(0, 0)$  splitst deze stroom  $i$  zich in twee gelijke componenten  $\frac{i}{2}$ , geconcentreerd gedacht in  $R_2$  en  $R_3$ .

$E(-2\Delta, 0) - E(0, 0) = iR_1$  waardoor met bovenstaande vergelijkingen:  $R_1 = 1/3\sqrt{3}R_0$

$E(0, 0) - E(\Delta, \Delta\sqrt{3}) = \frac{i}{2}R_2$  " " " " " "  $R_2 = 1/3\sqrt{3}R_0$

$E(0, 0) - E(\Delta, -\Delta\sqrt{3}) = \frac{i}{2}R_3$  " " " " " "  $R_3 = 1/3\sqrt{3}R_0$  (1-21)

Stroming in richting van de negatieve z-as:

Beschouwen we enige mazen dan blijkt dat de breedte van de stroombuis die past in deze beschouwing  $3\Delta$  is (zie fig. 19).

Noemen we de stroom hierdoor weer  $i$  dan is:

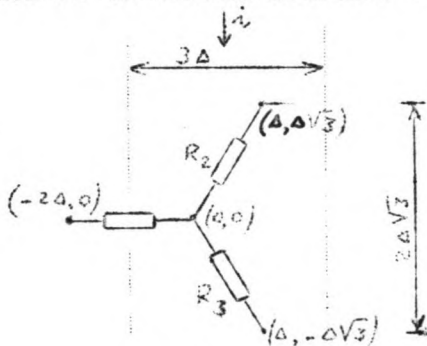


fig. 21

$E(0, 0) - E(\Delta, \Delta\sqrt{3}) = i \frac{\Delta\sqrt{3}}{3\Delta} R_0 = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot i \cdot R_0$

en  $E(\Delta, \Delta\sqrt{3}) - E(0, 0) = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot i \cdot R_0$

In het weerstandnetwerk zijn bij deze stroming verbindingen in de x-richting stroomloos.

De stroom  $i$  is geconcentreerd in de weerstand  $R_2$

en in de weerstand  $R_3$ .

We kunnen dus schrijven:

$E(0, 0) - E(\Delta, \Delta\sqrt{3}) = i R_3$

$E(\Delta, +\Delta\sqrt{3}) - E(0, 0) = i R_2$

Waardoor de volgende betrekkingen volgen:

$R_2 = \frac{1}{3} \sqrt{3} R_0 \quad R_3 = \frac{1}{3} \sqrt{3} R_0$

Deze uitdrukkingen komen overeen met die voor een stroming in de x-richting. (1-21)

Blijkbaar moeten dus in een homogeen isotroop geval bij deze maasvorm, alle weerstandselementen een waarde  $\frac{1}{3} \sqrt{3} R_0$  hebben.

Dat alle waarden gelijk moeten zijn is gemakkelijk in te zien door de coördinaatassen ten opzichte van het netwerk te draaien.

In ieder knooppunt geeft de wet van Kirchhoff de volgende vergelijking:

$$E(-2\Delta, 0) + E(\Delta, \Delta\sqrt{3}) + E(\Delta, -\Delta\sqrt{3}) - 3E(0, 0) = 0 \quad (1-23)$$

Mazen in de vorm van gelijkzijdige driehoeken (a):

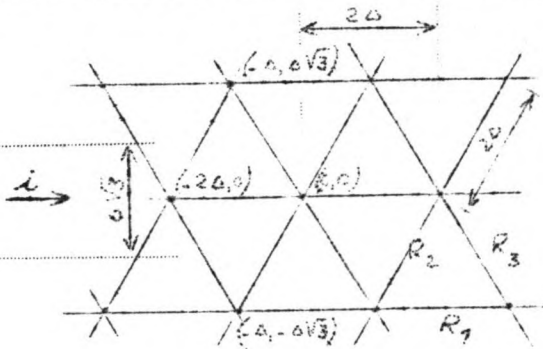


fig. 22

Ook hierbij is in te zien dat de weerstandselementen alle een gelijke waarde zullen moeten hebben:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \quad (1-24)$$

De vraag is alleen nog welke grootte R moet krijgen t.o.v. de vierkantsweerstand  $R_0$ .

De stroming in de richting van de positieve x-as:

Laten we de lengte van een zijde  $2\Delta$  noemen.

Beschouwen we enige mazen dan blijkt dat de breedte van de stroombuis die past in deze beschouwing  $\Delta\sqrt{3}$  is (zie fig. 22). De stroom door deze breedte noemen we  $i$ .

Dan is:

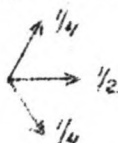
$$E(-2\Delta, 0) - E(0, 0) = i \cdot \frac{2\Delta}{\Delta\sqrt{3}} R = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot i \cdot R_0$$

en 
$$E(-2\Delta, 0) - E(-\Delta, \Delta\sqrt{3}) = E(-\Delta, \Delta\sqrt{3}) - E(0, 0) = i \cdot \frac{\Delta}{\Delta\sqrt{3}} \cdot R = \frac{1}{3} \sqrt{3} i R_0$$

en ook 
$$E(-2\Delta, 0) - E(-\Delta, -\Delta\sqrt{3}) = E(-\Delta, -\Delta\sqrt{3}) - E(0, 0) = \frac{1}{3} \sqrt{3} i R_0$$

In het netwerk krijgen alle weerstandselementen dezelfde waarde R.

De totale stroom, die in het knooppunt  $(-2\Delta, 0)$  van links komt, wordt verdeeld in 3 componenten, die zich verhouden als 1:2:1.



Van een gedeelte  $1/4$  behoort steeds slechts de helft bij de beschouwde stroombuis.

Deze beschouwing geeft dat de  $i$  van de aangenomen stroombuis wordt verdeeld in 3 componenten, die zich verhouden als 1:4:1 (zie fig. 23).

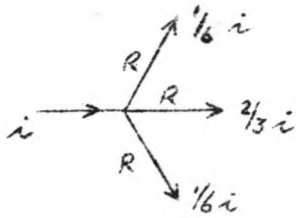


fig. 23

Uit fig.22 is te zien dat geldt:

$$E(-2\Delta,0) - E(0,0) = -\frac{2}{3} i R$$

$$E(-2\Delta,0) - E(-\Delta,\Delta\sqrt{3}) = \frac{1}{6} i R$$

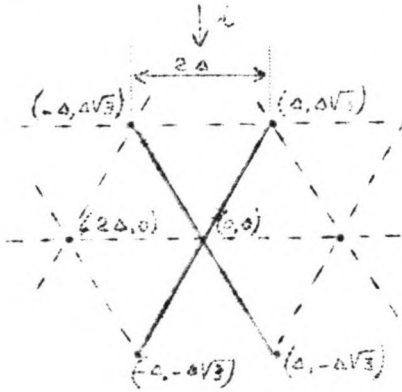
$$E(-2\Delta,0) - E(-\Delta,-\Delta\sqrt{3}) = \frac{1}{6} i R$$

Deze vergelijkingen geven met bovenstaande vergelijkingen:

$$R = \sqrt{3} R_0$$

(1-25)

Stroming in de richting van de negatieve z-as:



Beschouwen we enige mazen dan blijkt dat de breedte van een stroombuis die past in de beschouwing  $2\Delta$  is (zie fig. 22). Noemen we de stroom, door deze breedte,  $i$  dan is:

$$E(0,0) - E(-\Delta,-\Delta\sqrt{3}) = E(0,0) - E(\Delta,-\Delta\sqrt{3}) = i \cdot \frac{\Delta\sqrt{3}}{2\Delta} R_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i \cdot R_0.$$

We hebben reeds gesteld dat de waarden van de weerstandselementen alle gelijk moeten zijn.

De stroom  $i$ , die van boven het punt  $(0,0)$  komt, verdeelt zich in dit punt dus in 2 gelijke componenten  $\frac{1}{2} i$ .

We kunnen dus schrijven:

$$E(0,0) - E(-\Delta,-\Delta\sqrt{3}) = E(0,0) - E(\Delta,-\Delta\sqrt{3}) = \frac{1}{2} i R$$

Vergelijken we deze uitdrukking met de bovenstaande dan volgt de betrekking(1-25):

$$R = \sqrt{3} R_0$$

De wet van Kirchhoff geeft in dit geval de vergelijking:

$$E(2\Delta,0) + E(-2\Delta,0) + E(\Delta,\Delta\sqrt{3}) + E(-\Delta,-\Delta\sqrt{3}) + E(-\Delta,\Delta\sqrt{3}) + E(\Delta,-\Delta\sqrt{3}) - 6E(0,0) = 0$$

(1-26)

Mazen in de vorm van vierkanten waaraan diagonalen zijn toegevoegd (e):

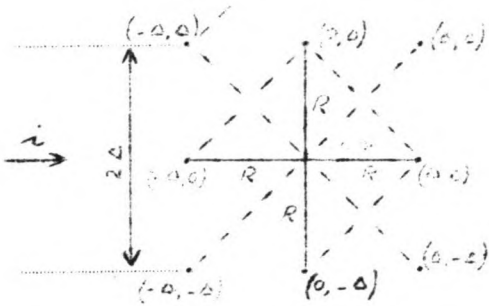


fig. 24

Laten we de zijde van een vierkant  $\Delta$  noemen. De weerstandselementen in de zijden van de vierkanten moeten allen gelijk zijn, zeg  $R$ . De waarde van de weerstandselementen in de diagonalen moeten eveneens gelijk worden genomen. Laten we deze laatste de waarde  $aR$  geven.

Stroming in de richting van de positieve x-as:

Als we enige mazen beschouwen dan zien we dat de breedte van een stroombuis, die past in deze beschouwing,  $2\Delta$  is (zie fig. 24).

De stroom door deze stroombuis noemen we  $i$ .

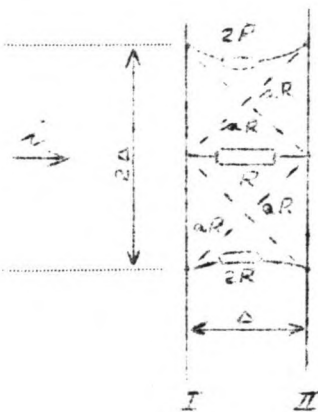


fig. 25

We beschouwen de stroming van equipotentiaallijn I naar equipotentiaallijn II.

De weerstand over deze afstand in de gekozen stroombuis is  $\frac{\Delta}{2\Delta} R_0 = \frac{1}{2} R_0$

$$\text{Dus } E_I - E_{II} = i \cdot \frac{1}{2} R_0 = \frac{1}{2} i R_0$$

In het netwerk met deze maasvorm is de vervangingsweerstand die representatief is voor het beschouwde gebied (zie fig. 25), als volgt te bepalen

( $2R, aR, aR, R, aR, aR, 2R$  parallel):

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{aR} + \frac{1}{aR} + \frac{1}{R} + \frac{1}{aR} + \frac{1}{aR} + \frac{1}{2R} = \frac{8+4a}{2aR} \text{ of } R_v = \frac{aR}{4+2a}$$

We kunnen dus schrijven:

$$E_I - E_{II} = i \cdot \frac{aR}{4+2a}$$

Hieruit volgt met bovenstaande vergelijking:

$$i \cdot \frac{aR}{4+2a} = \frac{1}{2} i R_0$$



$$\text{En dus } R = \frac{(4+2a)}{2a} R_0 \quad (1-27)$$

De weerstandswaarde van de elementen in de diagonalen is dus :

$$aR = \frac{4+2a}{2} R_0 \quad (1-28)$$

Eenzelfde beschouwing voor de stroming in de richting van de z-as, geeft natuurlijk hetzelfde resultaat.

De wet van Kirchhoff geeft in dit geval in elk knooppunt de volgende vergelijking:

$$\frac{E(\Delta,0)+E(-\Delta,0)+E(0,\Delta)+E(0,-\Delta)-4E(0,0)}{R} + \frac{E(\Delta,\Delta)+E(-\Delta,-\Delta)+E(-\Delta,\Delta)+E(\Delta,-\Delta)-4E(0,0)}{aR} = 0$$

of wel:

$$E(\Delta,0)+E(-\Delta,0)+E(0,\Delta)+E(0,-\Delta)-4E(0,0) + \frac{1}{a} \{ E(\Delta,\Delta)+E(-\Delta,-\Delta)+E(-\Delta,\Delta)+E(\Delta,-\Delta)-4E(0,0) \} = 0 \quad (1-29)$$

III - 2. De fouten die veroorzaakt kunnen worden door het discretiseren in het inwendige van een veld.

We hebben gezien dat het discretiseren van de weerstand neer komt op een benadering met behulp van eindige differenties.

We zullen onderscheid maken tussen het discretiseren in het inwendige van een veld en het discretiseren aan de randen van een veld.

Over het discretiseren aan de randen van een veld wordt onder III-3 een beschouwing gehouden.

In het volgende wordt eerst het discretiseren in het inwendige van een veld aan een beschouwing onderworpen.

We zullen trachten, met behulp van een wiskundige benadering en aan de hand van voorbeelden, een inzicht te krijgen in de grootte van de fouten, die hierbij kunnen worden gemaakt.

We zullen onder III-2-1, voor de verschillende maasvormen, een uitdrukking afleiden voor de fout, die in een bepaald punt kan worden gemaakt.

Daarna zullen we onder III-2-2, aan de hand van een voorbeeld, de foutbeschouwing bij een tweetal maasvormen toetsen. Bovendien zullen we trachten, met ditzelfde voorbeeld een inzicht te krijgen, in de invloed van de foutterm op de functiewaarden, in de punten van een netwerk.

III - 2-1. De eventuele fout in een knooppunt gelegen in het inwendige van een veld.

We willen een inzicht krijgen in de grootte van de fout, die het gevolg is van een benadering met eindige differenties.

Intuïtief hebben we reeds gesteld, dat de stapgrootte (maaswijdte) een factor zal zijn. En wel, hoe groter deze is, hoe onnauwkeuriger het resultaat zal zijn. Laten we eerst met een paar eenvoudige voorbeelden nagaan, in hoeverre de benadering van de tweede afgeleide door middel van eindige differenties, afwijkt van de juiste waarde.

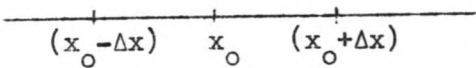
Voorbeeld I:

Stel dat in een één-dimensionaal geval:  $\phi = Ax^2$ .

Van een punt  $x_0$  (zie fig. 26) is dus bekend:

$$\phi(x_0) = Ax^2$$

$$\frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} = 2A$$



Van twee punten, gelegen op afstanden  $\Delta x$  van  $x_0$ , is bekend:

fig. 26

$$\phi(x_0 + \Delta x) = A(x_0 + \Delta x)^2 = A(x_0^2 + 2\Delta x x_0 + \Delta x^2)$$

$$\phi(x_0 - \Delta x) = A(x_0 - \Delta x)^2 = A(x_0^2 - 2\Delta x x_0 + \Delta x^2)$$

Volgens (1- 3) kunnen we de tweede afgeleide in het punt  $x_0$  benaderen:

$$\frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} \approx \frac{\phi(x_0 + \Delta x) + \phi(x_0 - \Delta x) - 2\phi(x_0)}{\Delta x^2} = \frac{2A \cdot \Delta x^2}{\Delta x^2} = 2A$$

Dit is exact de waarde, die we vinden door de functie tweemaal te differentieren. De eindige-differentie benadering geeft in dit geval dus geen afwijkende waarde.

Voorbeeld 2:

Als in hetzelfde geval  $\phi = Ax^4$  wordt gesteld, dan kunnen we eenzelfde beschouwing houden:

$$\phi(x_0) = Ax_0^4$$

$$\frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} = 12Ax_0^2$$

$$\phi(x_0 + \Delta x) = A(x_0^4 + 4x_0^3 \cdot \Delta x + 6x_0^2 \Delta x^2 + 4x_0 \Delta x^3 + \Delta x^4)$$

$$\phi(x_0 - \Delta x) = A(x_0^4 - 4x_0^3 \Delta x + 6x_0^2 \Delta x^2 - 4x_0 \Delta x^3 + \Delta x^4)$$

Volgens (1- 3) is weer:

$$\frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} \approx \frac{\phi(x_0 + \Delta x) + \phi(x_0 - \Delta x) - 2\phi(x_0)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} \approx \frac{12A x_0^2 \Delta x^2 + 2A \Delta x^4}{\Delta x^2} = 12Ax_0^2 + 2A \cdot \Delta x^2$$

Vergelijken we deze benadering met de juiste waarde, dan zien we dat de benadering een waarde geeft die  $2A \cdot \Delta x^2$  te hoog is.

De fout, die met de benadering wordt gemaakt, is dus inderdaad afhankelijk van de stapgrootte  $\Delta x$ .

In het eerste geval gaf de benadering een juiste waarde onafhankelijk van de grootte van  $\Delta x$ .

Hieruit blijkt dat ook de aard van de functie een belangrijke rol speelt.

Het is mogelijk om de functiewaarden in de punten  $(x_0 + \Delta x)$  en  $(x_0 - \Delta x)$  uit te drukken met behulp van een reeks ontwikkeling, volgens Taylor:

$$\phi(x_0 + \Delta x) = \phi(x_0) + \Delta x \frac{d\phi(x_0)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3\phi(x_0)}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4\phi(x_0)}{dx^4} + \dots$$

$$\phi(x_0 - \Delta x) = \phi(x_0) - \Delta x \frac{d\phi(x_0)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3\phi(x_0)}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4\phi(x_0)}{dx^4} + \dots$$

Tellen we deze beide uitdrukkingen op dan krijgen we:

$$\phi(x_0 + \Delta x) + \phi(x_0 - \Delta x) = 2\phi(x_0) + \Delta x^2 \frac{d^2\phi(x_0)}{\delta x^2} + \frac{2\Delta x^4}{4!} \frac{d^4\phi(x_0)}{\delta x^4} + \dots$$

Als we de tweede afgeleide expliciet schrijven dan volgt :

$$\frac{d^2\phi(x_0)}{dx^2} = \frac{\phi(x_0 + \Delta x) + \phi(x_0 - \Delta x) - 2\phi(x_0)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{d^4\phi(x_0)}{dx^4} - \dots$$

Als we deze uitdrukking vergelijken met de benadering volgens (1-3) dan zien we dat wat verwaarloosd wordt gelijk is aan:

$$- \frac{\Delta x^2}{12} \frac{d^4\phi(x_0)}{dx^4} - \dots \tag{2-1}$$

Nemen we in bovenstaande ontwikkeling termen met hogere dan vierde afgeleiden mee, dan zou de eerstvolgende term in (2-1) worden:

$$- \frac{2 \cdot \Delta x^4}{6!} \frac{d^6\phi(x_0)}{\delta x^6}$$

Voor de beide eenvoudige voorbeelden kunnen we nu met de term (2-1) de afwijking bepalen.

Voorbeeld 1:  $\frac{d^4 \phi(x_0)}{dx^4} = 0$  en dus afwijking = 0

Voorbeeld 2:  $\frac{d^4 \phi(x_0)}{dx^4} = 24A$  en dus afwijking =  $-\frac{\Delta x^2}{12} \cdot 24A = -2A\Delta x^2$

Dat wil zeggen dat de benadering met eindige differenties een waarde geeft, die  $2A\Delta x^2$  te hoog is.

Bovenstaande uitkomsten komen overeen met de, in de voorbeelden, gevonden waarden.

In een twee-dimensionaal geval kunnen we op soortgelijke wijze te werk gaan. Het is mogelijk om de functiewaarde in punten, die op een kleine afstand van een punt  $(x_0, z_0)$  liggen, uit te drukken in de functiewaarde en de waarden van de partiële afgeleiden van het punt  $x_0, z_0$ , als deze waarden continu zijn. Hiertoe wordt gebruik gemaakt van de reeks ontwikkeling volgens Taylor voor een functie van twee veranderlijken.

Als van een functie  $F(x, z)$  (waarbij  $x$  en  $z$  onafhankelijke veranderlijken zijn) alle partiële afgeleiden, tot en met die van de  $n^e$  orde, bestaan voor punten van een lijnsegment in het  $(x, z)$ -vlak dat  $(x_0, z_0)$  als beginpunt en  $(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z)$  als eindpunt heeft dan geldt de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned}
 F(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z) = & F(x_0, z_0) + \Delta x \frac{\delta F(x_0, z_0)}{\delta x} + \Delta z \frac{\delta F(x_0, z_0)}{\delta z} \\
 & + \frac{1}{2!} \left\{ \Delta x^2 \frac{\delta^2 F(x_0, z_0)}{\delta x^2} + 2\Delta x \Delta z \frac{\delta^2 F(x_0, z_0)}{\delta x \delta z} + \Delta z^2 \frac{\delta^2 F(x_0, z_0)}{\delta z^2} \right\} \\
 & + \frac{1}{3!} \left\{ \Delta x^3 \frac{\delta^3 F(x_0, z_0)}{\delta x^3} + 3\Delta x^2 \Delta z \frac{\delta^3 F(x_0, z_0)}{\delta x^2 \delta z} + 3\Delta x \Delta z^2 \frac{\delta^3 F(x_0, z_0)}{\delta x \delta z^2} + \Delta z^3 \frac{\delta^3 F(x_0, z_0)}{\delta z^3} \right\} \\
 & + \dots \\
 & + \frac{1}{n!} \left\{ \Delta x^n \frac{\delta^n F(x_0, z_0)}{\delta x^n} \dots \dots \dots \Delta z^n \frac{\delta^n F(x_0, z_0)}{\delta z^n} \right\}.
 \end{aligned}$$

(2-2)

Zijn in bovenstaande uitdrukking  $x_0$  en  $z_0$  beiden nul dan gaat deze over in de reeksontwikkeling genoemd naar Mac Laurin:

$$\begin{aligned}
 F(\Delta x, \Delta z) = & F(0,0) + \Delta x \frac{\delta F(0,0)}{\delta x} + \Delta z \frac{\delta F(0,0)}{\delta z} + \frac{1}{2!} \left\{ \Delta x^2 \frac{\delta^2 F(0,0)}{\delta x^2} + 2\Delta x \Delta z \frac{\delta^2 F(0,0)}{\delta x \delta z} + \Delta z^2 \frac{\delta^2 F(0,0)}{\delta z^2} \right\} \\
 & + \frac{1}{3!} \left\{ \Delta x^3 \frac{\delta^3 F(0,0)}{\delta x^3} + 3\Delta x^2 \Delta z \frac{\delta^3 F(0,0)}{\delta x^2 \delta z} + 3\Delta x \Delta z^2 \frac{\delta^3 F(0,0)}{\delta x \delta z^2} + \Delta z^3 \frac{\delta^3 F(0,0)}{\delta z^3} \right\} + \\
 & \text{-----} \\
 & \text{-----} \\
 & + \frac{1}{n!} \left\{ \Delta x^n \frac{\delta^n F(0,0)}{\delta x^n} + \text{-----} + \Delta z^n \frac{\delta^n F(0,0)}{\delta z^n} \right\}. \quad (2-3)
 \end{aligned}$$

Voor alle punten, die in het netwerk een directe relatie met het punt (0,0) hebben, is de functiewaarde met behulp van deze ontwikkeling uit te drukken. Door deze uitdrukkingen te combineren is steeds een uitdrukking te verkrijgen, die te vergelijken is met de differentievergelijking, die in het weerstandnetwerk geldt. Dit vergelijken geeft (een indruk van) de verwaarlozing, die met de differentievergelijking wordt ingevoerd.

Achtereenvolgens zal voor de in II-1 genoemde regelmatige maasvormen a t/m e een dergelijke foutbeschouwing worden opgezet.

In het volgende komen steeds hogere partiële afgeleiden van de functie  $\phi$  naar x resp. z voor.

Het gaat steeds over een functie  $\phi$  die in elk punt voldoet aan de vergelijking van Laplace:

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0 \quad \text{of wel} \quad \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} = - \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} .$$

Omdat aan deze vergelijking wordt voldaan, zijn door partiële differentiatie naar x resp. z verschillende betrekkingen af te leiden, waarvan er hier een aantal volgen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} = - \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} \quad \text{dus} \quad \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^2 \delta z^2} = - \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} \quad ) \\
 \text{en} \quad \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = - \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^2 \delta x^2} \quad ) \quad \text{omdat} \quad \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^2 \delta z^2} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^2 \delta x^2} \quad \text{volgt hieruit:} \\
 \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta^3 \phi}{\delta x^3} = - \frac{\delta^3 \phi}{\delta z^2 \delta x} \quad \frac{\delta^3 \phi}{\delta x^2 \delta z} = - \frac{\delta^3 \phi}{\delta z^3} .$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} \quad \text{dus} \quad \frac{\delta^6 \phi}{\delta x^4 \delta z^2} = \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^6} \quad )$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = - \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^2 \delta x^2} \quad \text{dus} \quad \frac{\delta^6 \phi}{\delta x^6} = - \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^2 \delta x^4} \quad )$$

omdat  $\frac{\delta^6 \phi}{\delta x^4 \delta z^2} = \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^2 \delta x^4}$  volgt hieruit

$$\frac{\delta^6 \phi}{\delta x^6} = - \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^6}$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} \quad \text{dus ook} \quad \frac{\delta^6 \phi}{\delta x^6} = \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^4 \delta x^2}$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} \quad \text{dus ook} \quad \frac{\delta^8 \phi}{\delta x^8} = \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^4 \delta x^4} \quad )$$

omdat  $\frac{\delta^8 \phi}{\delta x^4 \delta z^4} = \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^4 \delta x^4}$  volgt hieruit

$$\text{en} \quad \frac{\delta^8 \phi}{\delta x^4 \delta z^4} = \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^8}$$

$$\frac{\delta^8 \phi}{\delta x^8} = \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^8}$$

$$\frac{\delta^6 \phi}{\delta x^6} = - \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^6} \quad \text{dus} \quad \frac{\delta^8 \phi}{\delta x^6 \delta z^2} = - \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^6}$$

$$\text{en} \quad \frac{\delta^8 \phi}{\delta x^8} = - \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^6 \delta x^2}$$

Bovenstaande betrekkingen zijn in het volgende overzicht verzameld: (2-4):

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} = - \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2}$$

$$\frac{\delta^3 \phi}{\delta x^3} = - \frac{\delta^3 \phi}{\delta z^2 \delta x} \quad \frac{\delta^3 \phi}{\delta x^2 \delta z} = - \frac{\delta^3 \phi}{\delta z^3}$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} = - \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^2 \delta z^2} = - \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^2 \delta x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta^6 \phi}{\delta x^6} &= -\frac{\delta^6 \phi}{\delta z^6} = -\frac{\delta^6 \phi}{\delta x^4 \delta z^2} = +\frac{\delta^6 \phi}{\delta x^2 \delta z^4} = -\frac{\delta^6 \phi}{\delta z^2 \delta x^4} = \frac{\delta^6 \phi}{\delta z^4 \delta x^2} \cdot \\ \frac{\delta^8 \phi}{\delta x^8} &= \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^8} = \frac{\delta^8 \phi}{\delta x^4 \delta z^4} = \frac{\delta^8 \phi}{\delta z^4 \delta x^4} = -\frac{\delta^8 \phi}{\delta x^6 \delta z^2} = -\frac{\delta^8 \phi}{\delta x^2 \delta z^6} \\ &= -\frac{\delta^8 \phi}{\delta z^2 \delta x^6} = -\frac{\delta^8 \phi}{\delta z^6 \delta x^2} \end{aligned} \right\} (2-4)$$

a) Mazen in de vorm van vierkanten:

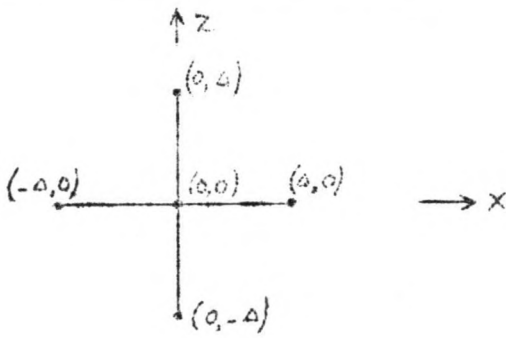


fig. 27

Elk punt is verbonden met 4 omliggende punten die op gelijke afstanden  $\Delta$  (de maaswijdte) zijn gelegen (zie fig. 27)

De functiewaarden in de punten  $(\Delta, 0)$ ,  $(-\Delta, 0)$ ,  $(0, \Delta)$  en  $(0, -\Delta)$  kunnen achtereenvolgens worden uitgedrukt met behulp van de reeksontwikkeling volgens Taylor - Mac Laurin (2-3):

$$\phi(\Delta, 0) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(-\Delta, 0) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots$$

$$\phi(0, \Delta) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots$$

$$\phi(0, -\Delta) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots$$





Men stelt bij de benadering (vergelijk met (1-14)):

$$\phi(\Delta, 0) + \phi(-\Delta, 0) + \phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta) - 4\phi(0, 0) = 0 \quad (2-10)$$

De verwaarlozing bij deze vergelijking is dus:  $4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}}$

Laten we de functiewaarden in 4 omliggende punten bekend (goed) veronderstellen. Bij de bepaling van  $\phi(0, 0)$  met verg. (2-10) wordt dus een fout gemaakt die gelijk is aan:

$$- \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}}. \quad (2-11)$$

b) Mazen in de vorm van rechthoeken:

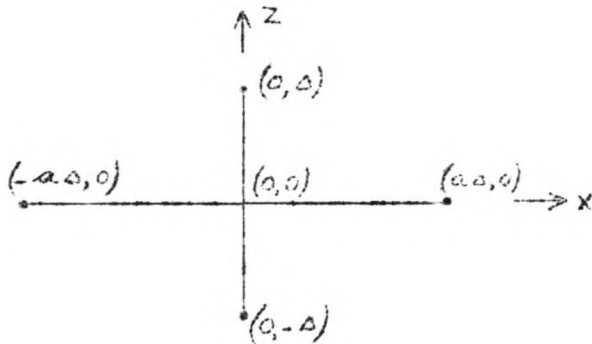


fig. 28

Elk punt is verbonden met 4 omliggende punten, waarbij de afstanden niet allen gelijk zijn (zie fig. 28).

Laten we de afstanden in de z-richting  $\Delta$  noemen en de afstanden in de x-richting  $a\Delta$ .

De functiewaarden in de vier om het punt  $(0, 0)$  liggende punten zijn uit te drukken met behulp van de reeksontwikkeling volgens Taylor-Mac Laurin (2-3):

$$\phi(a\Delta, 0) = \phi(0, 0) + a\Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{(a\Delta)^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{(a\Delta)^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{(a\Delta)^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots + \dots$$

$$\phi(-a\Delta, 0) = \phi(0, 0) - a\Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{(a\Delta)^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} - \frac{(a\Delta)^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{(a\Delta)^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots + \dots$$

$$\phi(0, \Delta) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots + \dots$$

$$\phi(0, -\Delta) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots + \dots$$

We kunnen van deze 4 uitdrukkingen de twee onderste met  $a^2$  vermenigvuldigen. Optellen van de 4 dan verkregen uitdrukkingen geeft:

$$\begin{aligned} \phi(a\Delta, 0) + \phi(-a\Delta, 0) + a^2\{\phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta)\} &= 2\{1+a^2\} \phi(0, 0) + a^2\Delta^2 \left\{ \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} \right\} \\ &+ \frac{2a^4 \Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \frac{2a^2 \Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots \quad (2-12) \end{aligned}$$

Uit deze vorm volgt ook:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} &= \frac{\phi(a\Delta, 0) + \phi(-a\Delta, 0) + a^2\{\phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta)\} - 2\{1+a^2\} \phi(0, 0)}{a^2 \Delta^2} - \\ &\frac{2a^2 \Delta^2}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \frac{2\Delta^2}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots \quad (2-13) \end{aligned}$$

Substitueren we in de uitdrukking (2-12) enige van de betrekkingen (2-4) dan gaat deze over in:

$$\phi(a\Delta, 0) + \phi(-a\Delta, 0) + a^2\{\phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta)\} = 2(1+a^2) \phi(0, 0) + 2a^2\{1+a^2\} \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

of wel:

$$\begin{aligned} \phi(a\Delta, 0) + \phi(-a\Delta, 0) + a^2\{\phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta)\} - 2\{1+a^2\} \phi(0, 0) &= 2a^2\{1+a^2\} \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots \\ &\quad (2-14) \end{aligned}$$

Men stelt bij de benadering (vergelijk met (1-19)):

$$\phi(a\Delta, 0) + \phi(-a\Delta, 0) + a^2\{\phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta)\} - 2\{1+a^2\} \phi(0, 0) = 0 \quad (2-15)$$

Dat wat in deze vergelijking verwaarloosd wordt is dus:

$$-2a^2\{1+a^2\} \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots$$

Veronderstellen we dat voor een bepaald punt de functiewaarde, in de vier om dat punt liggende punten juist is, dan is de waarde  $\phi(0, 0)$  met verg. (2-14) te bepalen.

De benadering van de waarde  $\phi(0,0)$  met verg. (2-15) geeft een verwaarlozing die gelijk is aan:

$$-a^2 \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} - \dots \quad (2-16)$$

c. Mazen in de vorm van regelmatige zeshoeken:

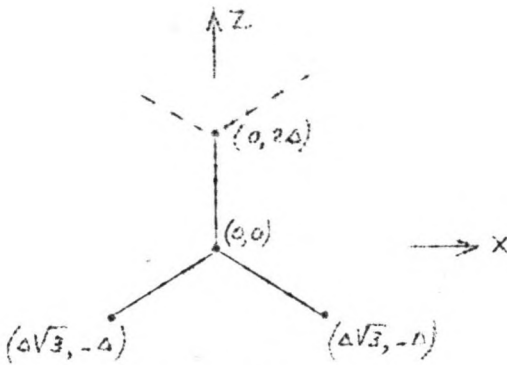


fig. 29

Elk punt is direct verbonden met drie omliggende punten, die op gelijke afstanden liggen.

Laten we deze afstand  $2\Delta$  noemen (zie fig. 29) en voor een bepaald punt  $(0,0)$  een foutbeschouwing opzetten.

De functiewaarden in de drie om het punt  $(0,0)$  liggende punten kunnen worden uitgedrukt met behulp van de reeksontwikkeling (2-3). Deze uitdrukkingen zijn op bijlage 3 verzameld.

Door optellen krijgen we de uitdrukking (2-17) (zie bijlage 3).

Uit (2-17) volgt ook:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta z^2} &= \frac{\phi(0,2\Delta) + \phi(\Delta\sqrt{3}, -\Delta) + \phi(-\Delta\sqrt{3}, -\Delta) - 3\phi(0,0)}{6\Delta^2} \\ &- \frac{1}{3!} \left\{ -3\Delta \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta x^2 \delta z} + \Delta \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta z^3} \right\} \\ &- \frac{1}{4!} \left\{ 3\Delta^2 \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} + 6\Delta^2 \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^2 \delta z^2} + 3\Delta^2 \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta z^4} \right\} - \dots \end{aligned} \quad (2-18)$$

Substitueren we in de uitdrukking (2-17) enige van de betrekkingen (2-4) dan gaat deze over in:

$$\phi(0,2\Delta) + \phi(\Delta\sqrt{3}, -\Delta) + \phi(-\Delta\sqrt{3}, -\Delta) = 3\phi(0,0) + \frac{24}{3!} \Delta^3 \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta z^3} + \dots \quad (2-19)$$

Bij de benadering wordt gesteld (vergelijk met (1-23) ):

$$\phi(0,2\Delta) + \phi(\Delta\sqrt{3},-\Delta) + \phi(-\Delta\sqrt{3},-\Delta) - 3\phi(0,0) = 0 \quad (2-20)$$

Dat wat in deze vergelijking verwaarloosd wordt is dus:

$$- 4\Delta^3 \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta z^3} - \dots$$

Veronderstellen we dat voor een bepaald punt de functiewaarde in de drie omliggende punten juist is, dan is de waarde  $\phi(0,0)$  met verg. (2-15) te bepalen. De benadering van de waarde  $\phi(0,0)$  met verg. (2-16) geeft een verwaarlozing, die gelijk is aan:

$$- \frac{4}{3} \Delta^3 \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta z^3} - \dots$$

of wel: 
$$- \frac{(2\Delta)^3}{6} \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta z^3} - \dots \quad (2-21)$$

d. Mazen in de vorm van gelijkzijdige driehoeken.

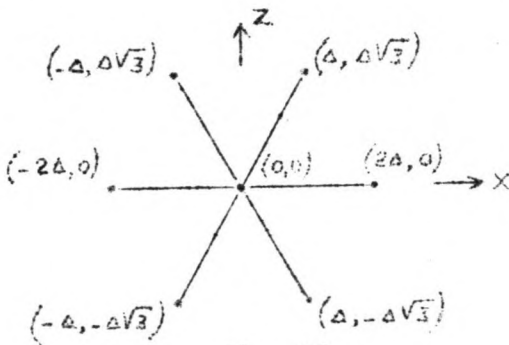


fig. 30

Elk punt heeft een directe relatie met 6 omliggende punten (zie fig. 30) waarbij de tussenafstanden gelijk zijn.

Laten we deze afstanden (de lengten van de zijden der driehoeken)  $2\Delta$  noemen (zie fig. 30).

De functiewaarden in de om het punt  $(0,0)$  liggende punten, kunnen worden uitgedrukt met behulp van de reeksontwikkeling (2-3).

Deze uitdrukkingen zijn op bijlage 4 uitgeschreven.

Door optellen en substitutie van enige der betrekkingen (2-4) krijgen we uiteindelijk de vergelijking:

$$\phi(2\Delta,0) + \phi(-2\Delta,0) + \phi(\Delta,\Delta\sqrt{3}) + \phi(-\Delta,-\Delta\sqrt{3}) + \phi(-\Delta,\Delta\sqrt{3}) + \phi(\Delta,-\Delta\sqrt{3}) = 6\phi(0,0) + \frac{384}{6!} \Delta^6 \frac{\delta^6 \phi(0,0)}{\delta x^6} + \dots$$

(2-23)

Bij de benadering wordt gesteld (vergelijk met (1-25)):

$$\phi(2\Delta,0)+\phi(-2\Delta,0)+\phi(\Delta,\Delta\sqrt{3})+\phi(-\Delta,-\Delta\sqrt{3})+\phi(-\Delta,\Delta\sqrt{3})+\phi(\Delta,-\Delta\sqrt{3}) - 6\phi(0,0) = 0 \quad (2-24)$$

Dat wat in deze vergelijking verwaarloosd wordt is dus:

$$-\frac{384}{6!} \Delta^6 \frac{\delta^6 \phi(0,0)}{\delta x^6} - \dots$$

Veronderstellen we dat voor een bepaald punt de functiewaarde, in de zes om dat punt liggende punten, juist is, dan is de waarde  $\phi(0,0)$  met verg. (2-23) te bepalen. De benadering van de waarde  $\phi(0,0)$  met verg. (2-24) geeft een verwaarlozing die gelijk is aan:

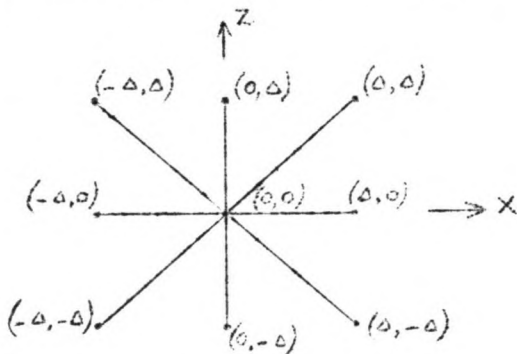
$$-\frac{64}{6!} \Delta^6 \frac{\delta^6 \phi(0,0)}{\delta x^6} - \dots$$

of wel 
$$-\frac{(2\Delta)^6}{6!} \frac{\delta^6 \phi(0,0)}{\delta x^6} - \dots \quad (2-25)$$

e. Mazen in de vorm van vierkanten waaraan diagonalen zijn toegevoegd:

Men kan in een netwerk met vierkante mazen alle knooppunten diagonaalsgewijs met elkaar verbinden (zie: [21]). Het kruispunt der diagonalen is dan geen knooppunt in het netwerk.

Elk knooppunt heeft dus een directe relatie met acht omliggende punten (zie fig.31)



Als we de maaswijdte van de vierkante mazen  $\Delta$  noemen, dan worden de afstanden langs de diagonalen  $\Delta\sqrt{2}$ .

fig. 31

De functiewaarden, in de om het punt  $(0,0)$  liggende punten, kunnen worden uitgedrukt met behulp van de reeksontwikkeling (2-3). Deze uitdrukkingen zijn op bijlage 5 uitgeschreven.

Door in de uitdrukkingen van bijlage 5 enige van de betrekkingen (2-4) te substitueren en ze daarna te combineren, kunnen we tot de volgende vergelijking komen:

$$\phi(\Delta, 0) + \phi(-\Delta, 0) + \phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta) + \frac{1}{a} \{ \phi(\Delta, \Delta) + \phi(-\Delta, -\Delta) + \phi(\Delta, -\Delta) + \phi(-\Delta, \Delta) \} -$$

$$4 \left(1 + \frac{1}{a}\right) \phi(0, 0) = 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}} + \frac{4}{a} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-4)^m \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}}. \quad (2-26)$$

Men stelt bij de benadering (verg. (1-29)):

$$\phi(\Delta, 0) + \phi(-\Delta, 0) + \phi(0, \Delta) + \phi(0, -\Delta) + \frac{1}{a} \{ \phi(\Delta, \Delta) + \phi(-\Delta, -\Delta) + \phi(\Delta, -\Delta) + \phi(-\Delta, \Delta) \} -$$

$$4 \left(1 + \frac{1}{a}\right) \phi(0, 0) = 0 \quad (2-27)$$

Dat wat in deze vergelijking wordt verwaarloosd is dus:

$$- 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}} - \frac{4}{a} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-4)^m \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}}.$$

Veronderstellen we dat voor een bepaald punt de functiewaarde, in de acht omliggende punten, juist is, dan is de waarde  $\phi(0, 0)$  met verg. (2-26) te bepalen.

De benadering van de waarde  $\phi(0, 0)$  met verg. (2-27) geeft een verwaarlozing die gelijk is aan:

$$- \frac{1}{4 \left(1 + \frac{1}{a}\right)} \left\{ 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}} + \frac{4}{a} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-4)^m \frac{\Delta^{4m}}{(4m)!} \frac{\delta^{4m} \phi(0, 0)}{\delta x^{4m}} \right\} \quad (2-28)$$

Wil men in deze vorm de termen met de vierde partiële afgeleiden laten wegvallen dan moet a de waarde 4 krijgen.

In de vorm (2-28) komen dan dus slechts termen met achtste en hogere partiële afgeleiden voor.

Men kan dus blijkbaar de verwaarlozing, die men maakt, reduceren door de omliggende punten, afhankelijk van het feit of ze langs een zijde van een vierkant dan wel langs een diagonaal liggen, een verschillend gewicht te geven.

De waarde  $a=4$  gesubstitueerd in verg. (1-29) betekent, dat de weerstandswaarde van de elementen langs de diagonalen 4 maal zo groot is als die, van de elementen in de zijden van een vierkant (zie fig. 32).

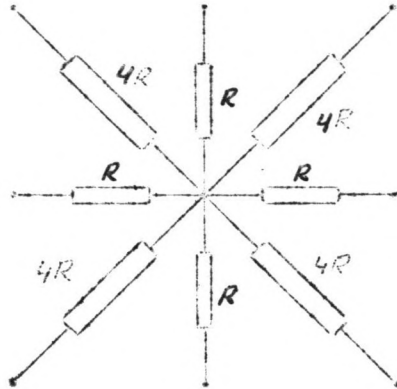


fig. 32

De uitdrukking (2-28) voor de fout, die in elk knooppunt kan worden gemaakt, is in dit geval te schrijven als:

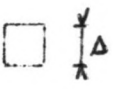
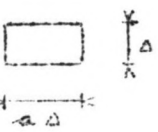
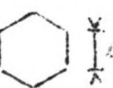

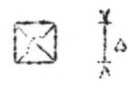
$$-\frac{1}{5} \left\{ \frac{4\Delta^8}{8!} \frac{\delta^8 \phi(0,0)}{\delta x^8} + \frac{16\Delta^8}{8!} \frac{\delta^8 \phi(0,0)}{\delta x^8} + \dots \right\} = -\frac{\Delta^8}{10.080} \frac{\delta^8 \phi(0,0)}{\delta x^8} - \dots \quad (2-29)$$

In het voorgaande is voor verschillende maasvormen afgeleid welke fout men door de benadering in elk knooppunt kan maken.

Steeds is een willekeurig punt (0,0) beschouwd.

De resultaten kunnen worden verzameld in het volgende overzicht:



Maasvorm	Fout per knooppunt
<p>a</p> 	$-\frac{\Delta^4}{24} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} - \dots$
<p>b</p> 	$-a^2 \frac{\Delta^4}{24} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} - \dots$
<p>c</p> 	$-\frac{\Delta^3}{6} \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta z^3} - \dots$
<p>d</p> 	$-\frac{\Delta^6}{720} \frac{\delta^6 \phi(0,0)}{\delta x^6} - \dots$
<p>e</p>  <p>REMAR ALS <math>n = 4</math></p>	$-\frac{\Delta^8}{10.080} \frac{\delta^8 \phi(0,0)}{\delta x^8} - \dots$

Uit dit overzicht kunnen we enige conclusies trekken.

De maasvormen a en b geven uitdrukkingen voor de fout, die grote overeenkomst vertonen.

De maasvorm c is, wat deze uitdrukking betreft, in het nadeel ten opzichte van alle overigen.

De maasvorm d geeft een uitdrukking, die gunstig is ten opzichte van die voor maasvorm a; waarbij het aantal elementen ongeveer 1,6 maal zo groot is.

De maasvorm e geeft t.o.v. de maasvorm a een zeer gunstige uitdrukking, waarbij het aantal elementen verdubbeld wordt.

Voor alle vormen gelden de volgende overwegingen:

1. De hogere afgeleiden moeten bestaan wil er van een fout sprake zijn.
2. De maasvorm moet praktisch zijn.
3. De overgang op een maasvorm met een grotere nauwkeurigheid moet niet ingewikkeld zijn.
4. Het aantal elementen zal men zo klein mogelijk willen houden.
5. De bereikte nauwkeurigheid moet in een goede verhouding zijn met de nauwkeurigheid, die i.v.m. andere foutbronnen kan worden bereikt.

Bij de keuze van de maasvorm zal men trachten met de genoemde overwegingen tot een optimum te komen.

Vele van de overwegingen hebben een zeer moeilijk benaderbaar karakter, zodat hiervan, voor een algemeen geval, slechts enige relatieve opmerkingen kunnen worden gemaakt.

ad 1. Het zal, in een algemeen geval, steeds moeilijk zijn precies aan te geven in welke gebieden de hogere afgeleiden een waarde zullen krijgen, die van invloed is op de fout tengevolge van de discretisatie.

Bovendien gaat het om de invloed van de fouten, in dat gebied gemaakt, ten opzichte van het gehele stroombeeld.

Deze verhouding is, voor een willekeurig onbekend geval, niet uit te drukken.

ad 2. Bij deze overweging speelt de algemene bruikbaarheid van een model de belangrijkste rol:

- 1<sup>e</sup>. Aantal en aard van de verschillende problemen, die men wil oplossen met eenzelfde netwerkmodel.
- 2<sup>e</sup>. De vereiste souplesse bij het variëren tijdens een meting.
- 3<sup>e</sup>. Aanpassing van de maasvorm aan de randen van gebied (zie: III-3).
- 4<sup>e</sup>. De behoefte aan meetpunten op een zeer bepaalde plaats.

Dit is praktisch een zeer belangrijk punt.

Deze overweging is nauw verwant aan die ad 3.

ad 3. In een bepaald geval is het mogelijk dat men plaatselijk een gebied met een andere maasvorm in model brengt, om op deze wijze de nauwkeurigheid van de verschillende gebieden minder te doen variëren.

ad 4. Deze overweging is om economische redenen belangrijk. De kosten van de weerstandselementen zijn niet erg hoog. Het aanbrenge van de elementen geeft een post arbeidsloon, die ongeveer recht evenredig met het aantal zal zijn.

De totale afmetingen van het model zullen zo moeten worden gekozen, dat de overzichtelijkheid voldoende blijft voor een goed gebruik.

In verband met de post arbeidsloon is niet alleen het aantal elementen belangrijk, maar ook de vorm van de mazen. Het bepalen van de weerstandswaarden der elementen dient zo eenvoudig mogelijk te zijn.

ad 5. Door andere oorzaken kunnen in een bepaald geval afwijkingen in de resultaten ontstaan (zie: III.4.1).

Het heeft geen zin om de afwijkingen tengevolge van de discretisering vele malen kleiner te houden dan die, tengevolge van andere foutbronnen.

Het is duidelijk dat het na bovenstaande overwegingen niet mogelijk is een absolute uitspraak te doen aangaande de keuze van de maasvorm in een algemeen geval. Bedenkt men echter dat bij zeer veel problemen in rechthoekige coördinaten wordt gedacht, dan zal een netwerk, dat bestaat uit mazen gevormd door richtingen evenwijdig met de coördinaatassen, de voorkeur verdienen.

Daarbij kan worden opgemerkt dat de maasvormen a, b en e eenvoudig zijn te combineren.

Met een netwerk, dat bestaat uit een combinatie van de maasvormen a, b en zonedig e, zal aan de bovenstaande overwegingen eenvoudig tegemoet kunnen worden gekomen. Men heeft op deze wijze een eenvoudig, overzichtelijk netwerk, waarin een gebied met zeer grote nauwkeurigheid (maasvorm e) gemakkelijk kan worden ingevoegd. In het volgende zullen we ons tot deze drie maasvormen beperken.

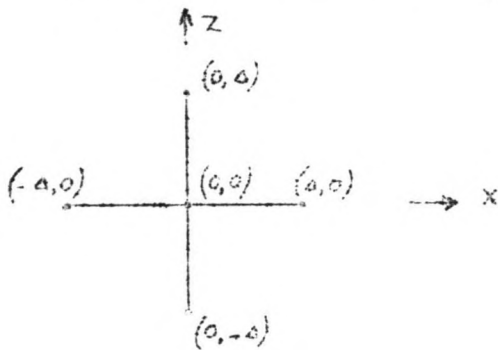
III. 2.2. De eventuele fout in punten van een netwerk.

In het voorgaande is o.a. voor mazen in de vorm van vierkanten een foutbeschouwing opgezet.

Deze kan als volgt worden geresumeerd.

Als in vier om het punt (0,0) liggende punten de functiewaarde bekend is, dan kan de functiewaarde in het punt (0,0) zelf worden benaderd:

$$\phi(0,0) \approx \frac{\phi(\Delta,0) + \phi(-\Delta,0) + \phi(0,\Delta) + \phi(0,-\Delta)}{4} \quad (2-30)$$



Deze vergelijking geldt in elk knooppunt van een netwerk (zie: verg. (1-14)).

De fout die hierbij kan worden gemaakt is als volgt uit te drukken (zie:(2-11)):

$$- \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\Delta^{4m}}{4m!} \frac{\delta^{4m} \phi(0,0)}{\delta x^{4m}} \cdot$$

In deze reeks komen dus termen voor met de  $4^e$ ,  $8^e$  etc. afgeleide van  $\phi$  naar  $x$ .

Laten we nu eerst deze foutbeschouwing testen aan een concreet voorbeeld, waarbij we de waarde van de uitdrukking (2-11) gemakkelijk kunnen bepalen.

Een functie die voor dit doel geschikt is, is de volgende:

$$\phi = x^4 - 6x^2z^2 + z^4$$

Van deze functie is:

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} = 12x^2 - 12z^2$$

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = -12x^2 + 12z^2$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = 24$$

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} = 24$$

Deze functie voldoet aan de vergelijking van Laplace:  $\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0$ .

Daarbij zijn de vierde partiële afgeleiden naar x resp. z constant en wel voor alle waarden van x en z gelijk aan 24.

De hogere partiële afgeleiden naar x resp. z zijn allen nul.

De waarde van de uitdrukking (2-11) is voor deze functie als volgt te schrijven:

$$-\frac{\Delta^4}{24} \cdot 24 = -\Delta^4.$$

Deze waarde is dus nog alleen afhankelijk van de stapgrootte (maaswijdte)  $\Delta$ .

Voor alle punten van het roosterwerk van bijlage 6 ,

{1,0 ≤ x ≤ 2,6 en 0,0 ≤ z ≤ 1,6 } waarvan de maaswijdte 0,2 is, kan de waarde van  $\phi$  worden bepaald.

Op bijlage 6 zijn deze waarden, die vrij nauwkeurig moesten zijn, vermeld.

Laten we nu voor het punt (1,8, 0,8) de functiewaarde benaderen door het gemiddelde te nemen van vier omliggende punten.

We kunnen daarbij de afstand (maaswijdte) van de punten variëren.

Kiezen we de maaswijdte 0,2 dan volgt  $\phi(1,8, 0,8)$  uit:

$$\phi(1,8, 0,8) = \frac{\phi(2,0, 0,8) + \phi(1,6, 0,8) + \phi(1,8, 1,0) + \phi(1,8, 0,6)}{4}$$

Voor een maaswijdte 0,4 krijgen we:

$$\phi(1,8, 0,8) = \frac{\phi(2,2, 0,8) + \phi(1,4, 0,8) + \phi(1,8, 1,2) + \phi(1,8, 0,4)}{4}$$

Voor een maaswijdte 0,6 en 0,8 kunnen we een dergelijke benadering geven.

In onderstaande tabel zijn de resultaten verzameld:

maaswijdte	benaderde waarde $\phi(1,8, 0,8)$	juiste waarde $\phi(1,8, 0,8)$	verwaarlozing "fout"
0,2	- 1,5328	- 1,5344	- 0,0016
0,4	- 1,5088	"	- 0,0256
0,6	- 1,4048	"	- 0,1296
0,8	- 1,1248	"	- 0,4096

We zien dus dat de fout toeneemt met de maaswijdte.

Volgens de uitdrukking (2-11) is deze in dit geval gelijk aan:  $-\Delta^4$ .

Voor de verschillende maaswijdten  $\Delta$  wordt dit achtereenvolgens:

$$\Delta = 0,20 \rightarrow - 0,0016$$

$$\Delta = 0,40 \rightarrow - 0,0256$$

$$\Delta = 0,60 \rightarrow - 0,1296$$

$$\Delta = 0,80 \rightarrow - 0,4096$$

Deze waarden komen precies overeen met de waarden, die in de tabel zijn vermeld.

Laten we nu vier verschillende punten beschouwen:

resp. (1,2, 1,4) , (1,2, 2,2) , (0,4, 2,2) en (0,4, 1,4).

We kunnen de functiewaarden in deze punten weer benaderen met het gemiddelde van vier omliggende punten.

Kiezen we achtereenvolgens de maaswijdte 0,2 en 0,4 dan zijn hierbij de afwijkingen van de juiste waarde te bepalen.

In onderstaande tabel zijn de resultaten verzameld.

punt	verwaarlozing bij maaswijdte $\Delta = 0,2$	verwaarlozing bij maaswijdte $\Delta = 0,4$
1,2, 1,4	- 0,0016	- 0,0256
1,2, 2,2	- 0,0016	- 0,0256
0,4, 2,2	- 0,0016	- 0,0256
0,4, 1,4	- 0,0016	- 0,0256

We zien dus dat de verwaarlozing in dit geval door het gehele gebied gelijk is (onafhankelijk van de plaats en van de grootten van de functiewaarden), wat overeenstemt met het feit, dat de vierde afgeleiden een constante waarde hebben.

Als de maasvorm  $e$  wordt toegepast dan geldt in elk knooppunt in het inwendige van het veld de vergelijking (2-27) (zie: blz. 65) .

Met deze vergelijking kan de functiewaarde in een bepaald punt worden benaderd, als de functiewaarden in de, in dit geval acht, omliggende punten bekend is.

Dat wat hierbij wordt verwaarloosd is uit te drukken in de vorm (2-28).

Wordt voor  $a$  (de verhouding van de weerstand in de diagonalen en die in de zijden van de vierkante mazen) de waarde 4 aangehouden, dan gaat deze vorm over in de

vorm:

$$-\frac{\Delta^8}{10080} \frac{\delta^8 \phi(0,0)}{\delta x^8} - \text{-----} \quad (2-29)$$

Van de functie  $\phi = x^4 - 6x^2z^2 + z^4$  zijn de vijfde en hogere partiële afgeleiden nul voor alle waarden van  $x$  en  $z$ .

Daarom zal de vorm (2-29) in elk punt de waarde nul hebben.

Dit betekent dat het toepassen van de maasvorm  $e$ , waarbij  $a = 4$ , in dit geval bij elke maaswijdte steeds een juiste benadering zal geven.

We zullen voor het punt  $(1,8, 0,8)$  de functiewaarde bepalen met de vergelijking, die bij een dergelijk netwerk in elk willekeurig knooppunt geldt (zie fig. 33 en verg. 2-27):

$$\phi(0,0) = \frac{\phi(\Delta,0)+\phi(-\Delta,0)+\phi(0,\Delta)+\phi(0,-\Delta) + \frac{\phi(\Delta,\Delta)+\phi(-\Delta,\Delta)+\phi(-\Delta,-\Delta)+\phi(\Delta,-\Delta)}{4}}{5}$$

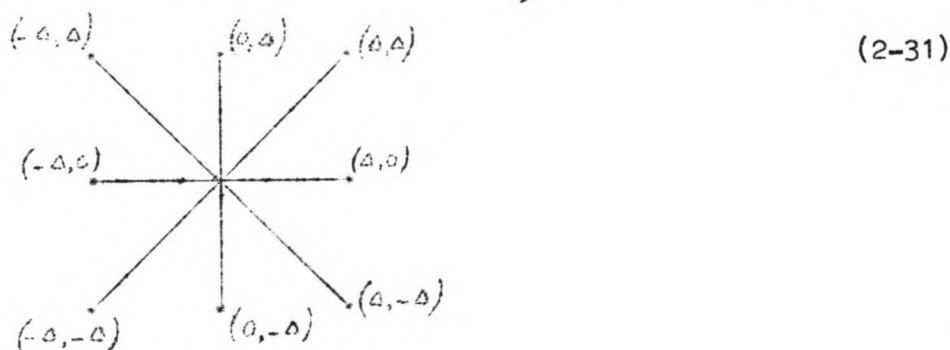


fig. 33

In onderstaande tabel worden voor verschillende maaswijdten  $\Delta$  resp. 0,2, 0,4, 0,6 en 0,8 de benaderde functiewaarden vergeleken met de juiste functiewaarde in het punt.

maaswijdte $\Delta$	benadering volgens verg. (2-31)	juiste waarde	verschil ("fout")
0,2	- 1,5344	- 1,5344	0,0000
0,4	- 1,5344	- 1,5344	0,0000
0,6	- 1,5344	- 1,5344	0,0000
0,8	- 1,5344	- 1,5344	0,0000

Hieruit blijkt dus inderdaad dat, met de keuze van deze maasvorm, in dit geval, steeds de juiste waarde wordt verkregen, onafhankelijk van de grootte van de maaswijdte  $\Delta$ .

In het voorgaande is steeds sprake van de verwaarlozing bij het benaderen van één onbekende functiewaarde met de bekende functiewaarden in een aantal omliggende punten.

Als in een netwerk, dat bestaat uit meerdere mazen, de functiewaarden in de punten op de rand bekend zijn, dan kunnen de functiewaarden van de punten, die binnen deze rand liggen, worden benaderd.

Voor elk punt kan de vergelijking (1-14) worden opgesteld, zodat het aantal beschikbare vergelijkingen even groot is als het aantal onbekenden.

We zullen nu achtereenvolgens netwerken beschouwen, waarbij het aantal onbekenden steeds toeneemt (resp. 2, 4, 6 en 9 onbekenden).

Bij een maasvorm  $a$  geldt in elk knooppunt de vergelijking (2-30).

De verwaarlozing in deze vergelijking, die voor de gekozen functie  $\emptyset$  gelijk is aan  $-\Delta^4$ , zullen we  $-\delta$  noemen.

De functiewaarden worden met letters aangegeven. In ieder knooppunt is de vergelijking, die de juiste waarde geeft, te schrijven als:

$$\begin{array}{c} \cdot D \\ \\ C \cdot \quad \cdot a \quad \cdot A \\ \\ \cdot B \end{array} \quad a = \frac{A+B+C+D}{4} - \delta$$

In het volgende worden bekende functiewaarden met hoofdletters en onbekende functiewaarden met **kleine letters** aangeduid.

De bijbehorende figuren zijn op bijlage 7 getekend.

Na elk geval wordt het resultaat getoest aan de hand van een voorbeeld.

Hiervoor wordt een gedeelte van het gebied met de bekende functie  $\emptyset$  gekozen, dat ligt binnen de grenzen  $1,8 \leq x \leq 2,6$  en waarbij de maaswijdte 0,2 is.

Tenslotte worden in elk geval de waarden vermeld, die men krijgt bij een keuze van de maasvorm  $e$  zoals deze in het voorgaande reeds is besproken, waarbij de waarde van de verwaarlozing, bij deze functie  $\emptyset$ , steeds gelijk nul is.

### 2 onbekenden:

In dit geval zijn de juiste waarden van  $a$  en  $b$  te bepalen uit de vergelijkingen (zie: bijlage 7 fig. 1).

$$a = \frac{A+E+F+b}{4} - \delta$$

$$b = \frac{B+C+D+a}{4} - \delta$$

Oplossing van deze vergelijkingen geeft:

$$a = \frac{4(A+E+F) + B+C+D}{15} - \frac{4}{3} \delta \quad (2-32)$$

$$b = \frac{4(B+C+D) + A+E+F}{15} - \frac{4}{3} \delta \quad (2-33)$$



Hieruit volgt dat, bij de benadering (verwaarlozing van  $\delta$  in de vergelijkingen), er in de waarden van a en b,  $-\frac{4}{3}\delta$  wordt verwaarloosd.

Nemen we voor de waarden A t/m F achtereenvolgens (zie: netwerk bijlage 6)

$$A = 7,4896$$

$$B = 13,1008$$

$$C = 27,6736$$

$$D = 22,2656$$

$$E = 15,0416$$

$$F = 7,4128$$

dan krijgen we met verwaarlozing van  $-\frac{4}{3}\delta$  in de vergelijkingen (2-32) en (2-33) resp. voor de bijbehorende a en b resp.

$$a = 12,1877 \quad b = 18,8069$$

De juiste waarden zijn resp.:

$$a = 12,1856 \quad b = 18,8048$$

Het verschil is voor beide waarden + 0,0021 .

Bij de maaswijdte 0,2 is voor deze functie  $\delta = 0,0016$  (zie blz. 72), zodat  $-\frac{4}{3}\delta = -0,0021$ .

Doordat deze waarde in de vergelijkingen is verwaarloosd, worden de uitkomsten voor a en b het bedrag 0,0021 te hoog.

Worden de waarden a en b bepaald met vergelijkingen, die overeenkomen met (2-31), behorende bij een netwerk met een maasvorm e, dan krijgt men resp.  $a = 12,1856$   $b = 18,8048$ , zijnde de juiste waarden.

Dit resultaat is een gevolg van het feit, dat bij deze maasvorm in het geval van deze functie  $\emptyset$ , de verwaarlozing bij de benadering steeds de waarde nul heeft.

#### 4 onbekenden:

In dit geval (zie: bijlage 7 fig. 2) zijn de waarden van a, b, c en d te bepalen uit de volgende vergelijkingen:

$$a = \frac{A+H+b+c}{4} - \delta \quad b = \frac{B+C+a+d}{4} - \delta$$

$$c = \frac{D+E+b+c}{4} - \delta \quad c = \frac{G+F+a+d}{4} - \delta .$$

Deze vergelijkingen geven de juiste waarden voor a, b, c en d.

Verwaarlozen we in bovenstaande vergelijkingen de term  $-\delta$  dan geeft dit de vergelijkingen die gelden in de knooppunten van een netwerk met een maasvorm a.

We kunnen de waarden, die uit deze vergelijkingen zijn op te lossen, a' b' c' en d' noemen.

Nu is af te leiden dat geldt resp.:

$$a = a' - 2\delta$$

$$b = b' - 2\delta$$

$$c = c' - 2\delta$$

$$d = d' - 2\delta$$

Blijkbaar is de afwijking in de waarden voor a, b, c en d, t.g.v. het al of niet verwaarlozen van de term  $-\delta$  in de bovenstaande vergelijkingen, voor deze vier punten gelijk en wel  $-2\delta$ .

Nemen we voor de waarden A t/m H achtereenvolgens (zie: netwerk bijlage 6):

$$A = 13,1008$$

$$B = 20,8656$$

$$C = 39,2336$$

$$D = 44,0768$$

$$E = 33,1776$$

$$F = 23,4256$$

$$G = 15,0416$$

$$H = 12,1856$$

dan krijgen voor de waarden a' t/m c' (met verwaarlozing van de invloed van  $\delta$ ) resp.

$$a' = 18,8080$$

$$b' = 27,6768$$

$$c' = 22,2688$$

$$d' = 31,8000$$

De juiste waarden a t/m d zijn resp.:

$$a = 18,8048$$

$$b = 27,6736$$

$$c = 22,2656$$

$$d = 31,7968$$

Het verschil is voor alle vier punten dus inderdaad gelijk en wel 0,0032.

Bij de maaswijdte 0,2 voor deze functie is  $\delta = 0,0016$  zodat  $2\delta = 0,0032$ .

De benaderde waarden zijn dus inderdaad alle dit bedrag te hoog.

Worden de waarden a t/m c bepaald met vergelijkingen, die gelden bij een netwerk met een maasvorm e dan krijgt men resp.:

$$a = 18,8048$$

$$b = 27,6736$$

$$c = 22,2656$$

$$d = 31,7968$$

Deze waarden zijn gelijk aan de juiste waarden, wat een gevolg is van het feit dat bij deze functie  $\emptyset$ , de maasvorm  $e$  een verwaarlozing geeft, die steeds de waarde nul heeft.

### 6 onbekenden:

In dit geval (zie: bijlage 7 fig. 3) zijn de juiste waarden van  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  en  $f$  te bepalen met de volgende vergelijkingen:

$$a = \frac{A+K+b+d}{4} - \delta \quad b = \frac{B+a+c+e}{4} - \delta$$

$$c = \frac{C+D+b+f}{4} - \delta \quad d = \frac{H+J+a+e}{4} - \delta$$

$$e = \frac{G+b+d+f}{4} - \delta \quad f = \frac{E+F+c+e}{4} - \delta$$

Verwaarlozen we in bovenstaande vergelijkingen de term  $-\delta$  dan kunnen we  $a$  t/m  $f$  ook oplossen. Deze waarden zullen we  $a'$  t/m  $f'$  noemen. Nu is af te leiden dat achtereenvolgens:

$$a = a' - \frac{16}{7} \delta$$

$$b = b' - \frac{20}{7} \delta$$

$$c = c' - \frac{16}{7} \delta$$

$$d = d' - \frac{16}{7} \delta$$

$$e = e' - \frac{20}{7} \delta$$

$$f = f' - \frac{16}{7} \delta$$

We zien dat de afwijking voor punten, die een overeenkomstige ligging t.o.v. de bekende randpunten hebben, gelijk zijn:

Voor de punten  $a$ ,  $c$ ,  $d$  en  $f$  is deze  $-\frac{16}{7} \delta$  en voor de punten  $b$  en  $e$  is deze  $-\frac{20}{7} \delta$ .

Ook in dit geval zijn deze afwijkingen aan de hand van een voorbeeld te toetsen.

We zullen dit hier achterwege laten en overstappen op een volgend geval.

### 9 onbekenden:

In dit geval zijn voor de punten  $a$  t/m  $j$  (zie bijlage 7 fig. 4) de volgende vergelijkingen op te stellen:

$$a = \frac{A+M+b+d}{4} - \delta$$

$$b = \frac{B+a+c+e}{4} - \delta$$

$$c = \frac{C+D+b+f}{4} - \delta$$

$$d = \frac{J+a+e+g}{4} - \delta$$

$$e = \frac{b+d+f+h}{4} - \delta$$

$$f = \frac{E+c+e+j}{4} - \delta$$

$$g = \frac{K+J+d+h}{4} - \delta$$

$$h = \frac{H+e+g+j}{4} - \delta$$

$$j = \frac{F+G+f+h}{4} - \delta$$

Uit deze vergelijkingen kunnen de juiste waarden van a t/m j worden opgelost. Wordt de term  $-\delta$  verwaarloosd, dan worden voor a t/m f waarden gevonden, die we a' t/m j' zullen noemen.

Nu is af te leiden dat achtereenvolgens:

$$a = a' - \frac{11}{4} \delta$$

$$f = f' - \frac{14}{4} \delta$$

$$b = b' - \frac{14}{4} \delta$$

$$g = g' - \frac{11}{4} \delta$$

$$c = c' - \frac{11}{4} \delta$$

$$h = h' - \frac{14}{4} \delta$$

$$d = d' - \frac{14}{4} \delta$$

$$j = j' - \frac{11}{4} \delta.$$

$$e = e' - \frac{18}{4} \delta$$

Hieruit blijkt dat:

voor de punten a, c, g en j  
de afwijking gelijk is aan  $-\frac{11}{4} \delta$  ;

voor de punten b, d, f en h  
de afwijking gelijk is aan  $-\frac{14}{4} \delta$  ;

voor het punt e de afwijking  
gelijk is aan  $-\frac{18}{4} \delta$ .

Laten we deze uitkomsten eerst aan de hand van voorbeelden verifiëren.

In het netwerk van bijlage 6 kunnen we vier verschillende gebieden onderscheiden, die dezelfde vorm hebben als het gebied van fig. 4 op bijlage 7.

Deze gebieden zijn genummerd 1 t/m 4 (zie: bijlage 8).

Achtereenvolgens zijn met bovenstaande vergelijkingen de waarden van a t/m j bepaald met verwaarlozing van de term  $-\delta$ .

In het volgende overzicht worden de resultaten hiervan, voor de vier gebieden, gegeven in de 3e kolom.

In de 4e kolom zijn de juiste waarden vermeld, terwijl in de vijfde kolom de verschillen zijn bepaald.

Overzicht 4 netwerken met elk negen onbekenden

1	2	3	4	5
gebied	punt	waarden met verwaar- lozing van $\delta$ maaswijdte $\Delta = 0,2$	juiste waarden	verschil 4-3
1	a	- 11,0148	- 11,0192	- 0,0044
	b	- 15,3608	- 15,3664	- 0,0056
	c	- 19,7060	- 19,7104	- 0,0044
	d	- 8,2888	- 8,2944	- 0,0056
	e	- 11,0120	- 11,0192	- 0,0072
	f	- 13,4856	- 13,4912	- 0,0056
	g	- 5,5620	- 5,5662	- 0,0042
	h	- 6,9128	- 6,9184	- 0,0056
	j	- 7,8020	- 7,8064	- 0,0044
	2	a	- 27,1940	- 27,1984
b		- 29,6456	- 29,6512	- 0,0056
c		- 30,7140	- 30,7184	- 0,0044
d		- 16,4808	- 16,4864	- 0,0056
e		- 16,3112	- 16,3184	- 0,0072
f		- 14,5096	- 14,5152	- 0,0056
g		- 6,9956	- 7,0000	- 0,0044
h		- 4,6088	- 4,6144	- 0,0056
j		- 0,3780	- 0,3824	- 0,0044
3		a	- 0,9028	- 0,9072
	b	- 0,2568	- 0,2624	- 0,0056
	c	1,1580	1,1536	- 0,0044
	d	0,7224	0,7168	- 0,0056
	e	1,9928	1,9856	- 0,0072
	f	4,1272	4,1216	- 0,0056
	g	1,7340	1,7296	- 0,0044
	h	3,3784	3,3728	- 0,0056
	j	5,9452	5,9408	- 0,0044
	4	a	7,4940	7,4896
b		13,1064	13,1008	- 0,0056
c		20,8700	20,8656	- 0,0044
d		12,1912	12,1856	- 0,0056
e		18,8120	18,8048	- 0,0072
f		27,6792	27,6736	- 0,0056
g		15,0460	15,0416	- 0,0044
h		22,2712	22,2656	- 0,0056
j		31,8012	31,7968	- 0,0044

Beschouwen we het overzicht nader dan zien we dat in alle vier gebieden de verschillen hetzelfde regelmatige patroon vertonen (zie: fig. 34).

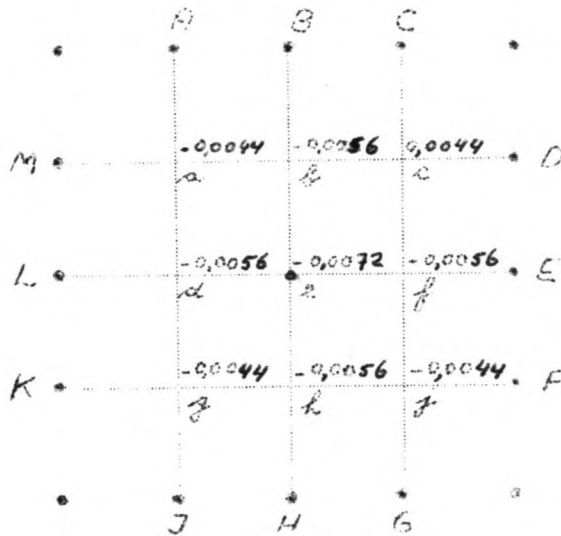


fig. 34

Bij de maaswijdte  $\Delta = 0,2$  is voor deze functie  $\delta = 0,0016$ .

In het voorgaande is voor de verschillende afwijkingen resp.  $-\frac{11}{4} \delta$ ,  $-\frac{14}{4} \delta$  en  $-\frac{18}{4} \delta$  aangegeven.

In dit geval worden deze waarden achtereenvolgens:

$$-\frac{11}{4} \delta = -\frac{11}{4} \cdot 0,0016 = -0,0044 \quad \text{voor a, c, g en j}$$

$$-\frac{14}{4} \delta = -\frac{14}{4} \cdot 0,0016 = -0,0056 \quad \text{voor b, d, f en h}$$

$$-\frac{18}{4} \delta = -\frac{18}{4} \cdot 0,0016 = -0,0072 \quad \text{voor e.}$$

We zien dat deze waarden in de bovenstaande voorbeelden inderdaad zijn gevonden.

Worden de waarden a t/m j bepaald met vergelijkingen, die gelden bij een netwerk met maasvorm e, dan vindt men de juiste waarden, wat een gevolg is van het feit, dat deze maasvorm bij deze functie een verwaarlozing gelijk aan nul geeft.

In het voorgaande hebben we gezien dat in een netwerk met maasvorm a alleen sprake is van afwijkingen, als de vierde en hogere partiële afgeleiden van de functie naar x (of z) bestaan.

In een bijzonder geval, waarin de vierde afgeleide een constante waarde heeft en de hogere afgeleiden nul zijn voor alle waarden van x en z, is het mogelijk de fout-beschouwing te toetsen.

Daarna is getracht in dat geval een inzicht te krijgen in de uitbreiding van de fout, als de afmetingen van een netwerk (het aantal mazen en dus ook het aantal onbekenden) toenemen.

In dit rapport zijn een aantal gevallen behandeld.

Tijdens het onderzoek is getracht door een meer uitgebreide reeks van gevallen, waarin het aantal onbekenden successievelijk werd vergroot, een bepaalde relatie te vinden tussen het aantal onbekenden, de ligging van een punt t.o.v. de randen en de grootte van de afwijking in het punt.

Daarbij is gebleken dat het vinden van een dergelijk verband niet zonder meer mogelijk is.

Wel zijn na het voorgaande enige betrekkelijke opmerkingen te maken.

De absolute fout in een bepaald punt, in het geval de waarde  $\delta$  constant is, neemt meer toe naarmate het punt verder van de randen ligt.

In het geval met 9 onbekenden is de afwijking voor het punt  $e$  gelijk aan  $4,5 \delta$ .

In een geval met 25 onbekenden ( $5 \times 5$ ) is de afwijking voor het punt in het centrum ongeveer  $11 \delta$ . In een geval met 49 onbekenden ( $7 \times 7$ ) tenslotte werd voor de afwijking in het punt gelegen in het centrum ongeveer  $19 \delta$  gevonden.

De afwijking in punten langs de randen is kleiner. De afwijking voor een punt in een hoek is het kleinst, omdat dit een directe relatie heeft met twee bekende potentialen.

De afwijking in deze punten neemt echter toe, zij het in mindere mate, met de afmetingen van het gehele netwerk.

### III. 3. Het discretiseren aan de randen van een twee-dimensionaal veld.

Bij een (permanente) twee-dimensionale stromingstoestand gaat het er, in het geval de grond homogeen en isotroop is, om de vergelijking van Laplace op te lossen:

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0$$

Hiervoor is het noodzakelijk dat langs de gehele rand voorwaarden bekend zijn, waaraan de gezochte functie  $\phi$  moet voldoen (randwaarde probleem). Het is duidelijk dat het op de juiste wijze in rekening brengen van de randvoorwaarden uitermate belangrijk is.

Tot zover zijn we er, bij het bestuderen van de benadering met behulp van weerstand-netwerken, steeds vanuit gegaan dat de randvoorwaarden exact zijn aangebracht.

In het volgende wordt op het realiseren van de randvoorwaarden in een netwerk van weerstanden nader ingegaan. Het aantal verschillende vormen van randvoorwaarden is zeer groot, zodat het onderzoek wat dit betreft niet volledig is geweest.

Echter met de gevolgde benaderingswijze en de toepassing hiervan in enige voorbeelden zullen vele van de vaak voorkomende gevallen kunnen worden gerealiseerd.

#### III. 3.1. Het realiseren van randvoorwaarden.

Bij de verschillende grondwaterproblemen zullen de randvoorwaarden die we kunnen ontmoeten zeer verschillend zijn.

In het algemeen worden onderscheiden:

- a) Problemen waarbij in ieder punt van de rand de waarde van de functie bekend is. Deze problemen worden genoemd naar Dirichlet.
- b) Problemen waarbij in ieder punt van de rand de waarde van de afgeleide van de functie in de richting loodrecht op de rand ( $\frac{\delta \phi(s)}{\delta n}$ ) bekend is. Deze problemen worden genoemd naar Neumann.
- c) Problemen waarbij in ieder punt van de rand een lineair verband bestaat tussen de waarde van  $\phi$  en de waarde van de afgeleide in de richting loodrecht op de rand  $\frac{\delta \phi}{\delta n}$ . In het algemeen geldt dan:

$$f_1(s) \phi(s) = f_2(s) \frac{\delta \phi(s)}{\delta n} + f_3(s)$$

Deze problemen worden wel genoemd naar Fourier. Bovenstaande algemene vorm bevat ook de beide typen a en b. De meeste problemen waarmee wij te maken hebben behoren tot dit type. Immers in de meeste gevallen is op gedeelten van de rand de functiewaarde bekend, terwijl op andere gedeelten de waarde van  $\frac{\delta \phi}{\delta n}$  bekend is.



Langs een z.g. vrije grondwaterspiegel gelden, indien de capillaire zône wordt verwaarloosd, steeds twee voorwaarden:

1e.  $\frac{\delta\phi(s)}{\delta n} = 0$

2e.  $\phi(s) = K.h(s) = K.z(s)$ .

Waarbij het verloop van  $z(s)$  onbekend is. Wij komen hierop in dit hoofdstuk en in hoofdstuk IV nog nader terug. Uit de voorwaarde die op een rand geldt, volgt een vergelijking waaraan in alle punten op deze rand moet worden voldaan. Het aanbrengen van de randvoorwaarden zal bij een weerstandnetwerkmodel geschieden door het aanbrengen van de analoge voorwaarden op de knooppunten van het netwerk. Het aanbrengen van deze voorwaarden kan in een elektrisch model zeer nauwkeurig geschieden.

Bij randen waarlangs de waarde van  $\phi$  bekend is komt het neer op het aanbrengen van de analoge waarden  $E$  in alle knooppunten van de rand. Zijn deze waarden gelijk dan is er sprake van een equipotentiaallijn.

Bij randen waarlangs de waarde van  $\frac{\delta\phi}{\delta n}$  bekend is, komt het neer op het aanbrengen van de juiste waarde van  $\frac{\delta E}{\delta n}$  in de knooppunten. Het aanbrengen van een dergelijke voorwaarde is in het algemeen wat moeilijker (stroom-randvoorwaarde).

Is de waarde  $\frac{\delta\phi}{\delta n}$  langs de rand gelijk nul dan is sprake van een stroomlijn. Het komt er dan op neer het model op een goede wijze langs deze stroomlijn te beëindigen. We zullen in het volgende vooral twee gevallen beschouwen:

- 1e. Een rand waarlangs de functie  $\phi$  een constante waarde heeft ( equipotentiaallijn).
- 2e. Een rand waarlangs  $\frac{\delta\phi}{\delta n}$  de waarde nul heeft (stroomlijn).

Naast de voorwaarde die langs de rand geldt is voor de gezochte oplossing de vorm van de rand natuurlijk zeer belangrijk. Bij het realiseren van de randvoorwaarden in een netwerk van weerstanden verdient het goed weergeven van de vorm van deze randen dan ook zeer veel aandacht. Het gaat er daarbij in hoofdzaak om het netwerk in de omgeving van de rand zodanig te ontwerpen, dat de weerstand representatief is voor het gebied. Dit is zeer overzichtelijk te verwezenlijken door een geometrische interpretatie van het gebied, in wat we in het voorgaande een fysische beschouwing hebben genoemd. Als voorbeeld zullen we een eenvoudig geval nemen (zie: fig. 35).

Een rechte rand, die evenwijdig loopt met een der hoofdrichtingen van het netwerk, dat bestaat uit vierkante mazen. De "normale" maaswijdte is  $\Delta$ . De normale weer-

standselementen hebben de waarde  $R_0$ . De mazen langs de rand hebben de afmeting  $a\Delta \cdot \Delta$ .

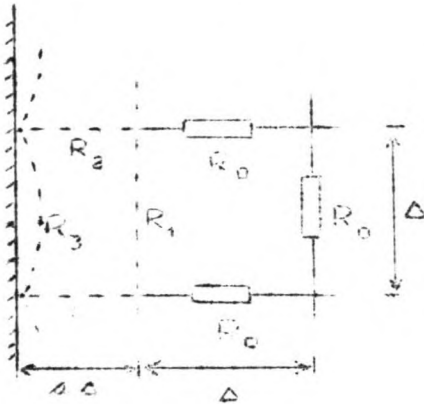


fig. 35

De waarden van de elementen  $R_1$ ,  $R_2$  en  $R_3$  kunnen nu als volgt worden uitgedrukt (zie: ook III-1 blz. 45):

$$R_1 = \frac{\Delta}{\frac{\Delta}{2} + \frac{a\Delta}{2}} R_0 = \frac{2}{1+a} R_0, \quad R_2 = \frac{a\Delta}{\Delta} R_0 = aR_0 \quad \text{en} \quad R_3 = \frac{\Delta}{\frac{a\Delta}{2}} R_0 = \frac{2}{a} R_0. \quad (3-1)$$

Het ontwerpen van het netwerk in de omgeving van de rand, komt neer op het aanpassen van de vorm hiervan aan het netwerk, dat voor het overige gebied is gekozen en waarvan de knooppunten vastliggen.

Hierbij kan nog worden opgemerkt, dat het bepalen van de afwijkende weerstandswaarden overeenkomt met het bepalen van een afwijkend rekenmolecuul bij de relaxatiemethode (zie: II-3 blz. 22).

Snijdt een rand beide hoofdrichtingen dan is de aanpassing ingewikkelder.

Men kan dan de volgende wegen volgen:

- a) het netwerk een zodanige vorm geven, dat knooppunten op de rand komen te liggen;
- b) de rand benaderen door een "trapjeslijn", waarbij de grootte van de trapjes zodanig wordt vastgesteld, dat de nauwkeurigheid van het model voldoende blijft.

ad. a. Deze methode zal een aantal mazen kunnen geven, die een zeer willekeurige vorm hebben. Hieruit volgt, dat de waarden van de weerstanden in de verschillende takken in dat geval, sterk zullen variëren. Het aantal in de handel bestaande waarden is beperkt, zodat verschillende waarden, zelfs door combinatie, niet steeds nauwkeurig te verkrijgen zijn. Wel kan in bepaalde gevallen met deze methode op eenvoudige wijze een goede aanpassing worden verkregen.

We nemen als voorbeeld hiervan een rechte rand, die een bepaalde hoek maakt met een der hoofdrichtingen (zie: fig. 36).

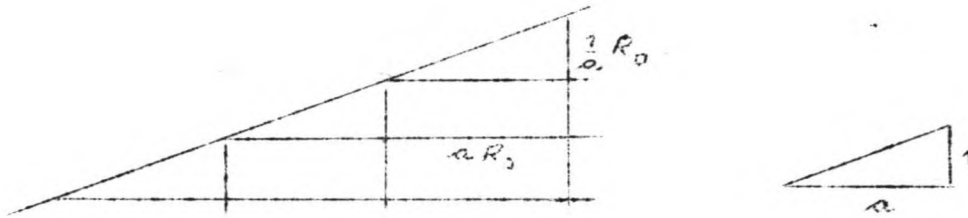


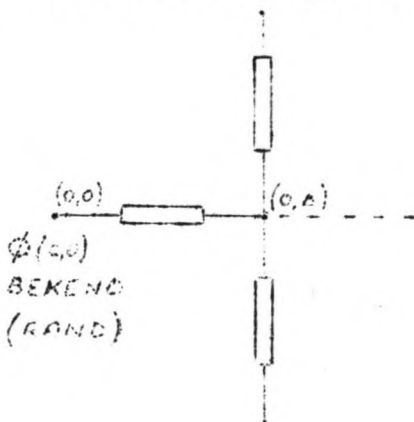
fig. 36

Het is dan in principe eenvoudig de maasvorm zo te kiezen, dat de knooppunten precies op de rand liggen. Is de helling 1:a, dan krijgen, in een isotroop geval, alle verticale weerstanden de waarde  $\frac{1}{a} R_0$  ) (3-2)  
 alle horizontale " de waarde  $a R_0$  )

ad. b. Deze methode is wat betreft de uitvoering zeer eenvoudig. De mazen zijn regelmatig en bevatten geen elementen met afwijkende waarden. Denkt men, bij een permanente stromingstoestand, aan een vrije grondwaterspiegel, dan is dit praktisch de enige benaderingswijze, die mogelijk is. Immers de ligging van deze stroomlijn, waarvan zoals gezegd in ieder punt de stijghoogte  $\frac{\phi(s_0)}{K}$  gelijk is aan de plaats-hoogte  $z(s_0)$ , moet iteratief worden bepaald. Men kan dus in een netwerk weinig anders doen, dan deze lijn met een "trapjeslijn" benaderen. Uiteraard moet er voor worden gezorgd dat de maasverdeling zo fijn is, dat deze benadering een verwaarloosbare invloed heeft. In hoofdstuk IV wordt op deze benaderingswijze nog nader ingegaan.

Is men erin geslaagd, de aanpassing van het weerstandnetwerk aan de randen (door een fysische benadering) tot stand te brengen, dan kan voor ieder knooppunt een fout-beschouwing worden opgezet, die overeenkomt met die, in de beschouwingen onder III-1 en III-2.

We zullen eerst een geval beschouwen, waarbij op de punten van de rand de potentiaal bekend is.



In het punt (0,0) van fig.37 is de waarde van de functie  $\phi$  bekend, zodat in dat punt van een fout t.g.v. het discretiseren geen sprake is.

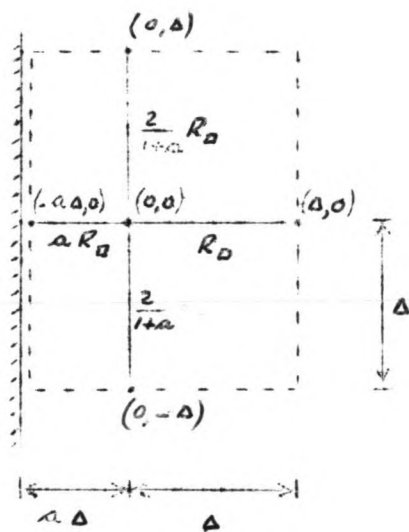
fig. 37

Een foutbeschouwing voor het punt  $(0, \Delta)$  kan worden opgezet op dezelfde wijze, als hiervoor in hoofdstuk III is besproken. Hierbij kan worden opgemerkt, dat de mazen langs de rand meestal een afwijkende vorm zullen hebben, waardoor voor zo'n punt de afstanden tot de omliggende punten niet symmetrisch zal zijn. Hieronder zal voor een niet-symmetrische vorm een dergelijke foutbeschouwing worden opgezet.

In het geval de rand een stroomlijn is geldt voor elk punt op deze rand:

$$\frac{\delta\phi(s)}{\delta n} = 0 \quad \text{of wel} \quad \frac{\delta\phi}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\delta\phi}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta n} = 0 \quad (3-3)$$

Loopt de rand evenwijdig met een der hoofdrichtingen van het netwerk, dan zijn in het voorgaande de waarden van de weerstandelementen bepaald. We zullen voor dit geval (zie: fig. 35) een beschouwing geven. Een foutbeschouwing voor het punt  $(0,0)$  van fig. 38 geeft de verwaarlozing die mogelijk is, in het geval de afstanden tot de omliggende punten niet symmetrisch is.



Met de uit het voorgaande bekende waarden (zie: 3-1) kan de vergelijking die in het knooppunt  $(0,0)$  geldt worden opgesteld:

fig. 38

$$\frac{E(\Delta,0) - E(0,0)}{R_0} + \frac{E(-a\Delta,0) - E(0,0)}{aR_0} + \frac{E(0,\Delta) - E(0,0)}{\frac{2}{1+a} R_0} + \frac{E(0,-\Delta) - E(0,0)}{\frac{2}{1+a} R_0} = 0$$

Na enig omwerken en het vervangen van  $\frac{E}{R_0}$  door  $\phi$  volgt:

$$\phi(\Delta,0) - \phi(0,0) + \frac{\phi(-a\Delta,0) - \phi(0,0)}{a} + (1+a) \frac{\phi(0,\Delta) - \phi(0,0)}{2} + (1+a) \frac{\phi(0,-\Delta) - \phi(0,0)}{2} = 0$$

(3-4)

Het is mogelijk om de functiewaarden in de punten die om het punt (0,0) liggen met behulp van reeksontwikkeling uit te drukken:

$$\phi(\Delta, 0) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(-a\Delta, 0) = \phi(0, 0) - a\Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{a^2\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} - \frac{a^3\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{a^4\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(0, \Delta) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots$$

$$\phi(0, -\Delta) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots$$

Door de bovenstaande uitdrukkingen achtereenvolgens te vermenigvuldigen met resp. 1,  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1+a}{2}$ ,  $\frac{1+a}{2}$  en daarna op te tellen kunnen we de volgende uitdrukking krijgen:

$$\phi(\Delta, 0) - \phi(0, 0) + \frac{\phi(-a\Delta, 0) - \phi(0, 0)}{a} + (1+a) \frac{\phi(0, \Delta) - \phi(0, 0)}{2} + (1+a) \frac{\phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0)}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta^2 + a\Delta^2)}{2} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} - (1+a) \frac{\Delta^2}{2} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} - (1-a^2) \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} - (1+a^3) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} - \\ & (1+a) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Omdat geldt  $\frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} = 0$  en dus ook  $\frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} - \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} = 0$

is deze uitdrukking te schrijven als:

$$\phi(\Delta, 0) - \phi(0, 0) + \frac{\phi(-a\Delta, 0) - \phi(0, 0)}{a} + (1+a) \frac{\phi(0, \Delta) - \phi(0, 0)}{2} + (1+a) \frac{\phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0)}{2} - (1-a^2)$$

$$\frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} - (2+a+a^3) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots = 0 \quad (3-5)$$

Bij de benadering geldt verg. (3-4).

Dat wat in deze vergelijking wordt verwaarloosd is dus uit te drukken:

$$-(1-a^2) \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta x^3} - (2+a+a^3) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} - \dots \quad (3-6)$$

Wordt in deze vorm voor a de waarde 1 gesubstitueerd, wat betekent dat de vorm van de mazen ook langs de rand vierkant is, dan gaat deze over in:

$$- 4 \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} - \dots$$

Dit is de foutterm, die is afgeleid voor een punt gelegen in het inwendige van een veld, dat is weergegeven door een netwerk van weerstanden met vierkante mazen (zie: III-2-1 blz. 59).

We zullen nu een foutbeschouwing opzetten voor een punt op deze rand (zie: fig. 39), dat we weer punt (0,0) zullen noemen:

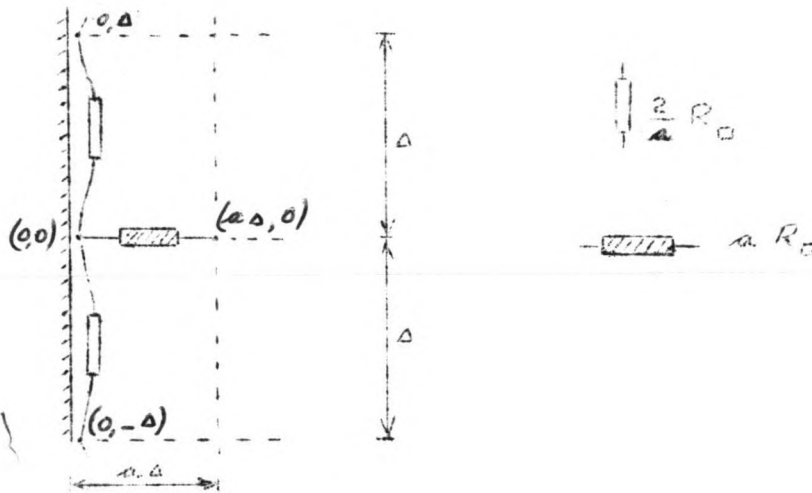


fig. 39

De waarden van de weerstandselementen zijn bekend zodat de vergelijking, die in het knooppunt (0,0) geldt, kan worden opgesteld:

$$\frac{E(a\Delta, 0) - E(0, 0)}{aR_0} + \frac{E(0, \Delta) - E(0, 0)}{\frac{2}{a} R_0} + \frac{E(0, -\Delta) - E(0, 0)}{\frac{2}{a} R_0} = 0$$

Na enig omwerken en het vervangen van  $\frac{E}{aR_0}$  door  $\phi$  is deze vergelijking te schrijven als:

$$2\{\phi(a\Delta, 0) - \phi(0, 0)\} + a^2\{\phi(0, \Delta) - \phi(0, 0)\} + a^2\{\phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0)\} = 0 \quad (3-7)$$

Het is weer mogelijk om de functiewaarden in de, in dit geval drie, omliggende punten met behulp van reeksontwikkeling uit te drukken:

$$\phi(a\Delta, 0) = \phi(0, 0) + a\Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta x} + a^2 \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + a^3 \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} + a^4 \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(0, \Delta) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots$$

$$\phi(0, -\Delta) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots$$

Door bovenstaande uitdrukkingen achtereenvolgens te vermenigvuldigen met resp. 2,  $a^2$  en  $a^2$  en daarna op te tellen is de volgende uitdrukking te verkrijgen:

$$2\{\phi(a\Delta, 0) - \phi(0, 0)\} + a^2\{\phi(0, \Delta) - \phi(0, 0)\} + a^2\{\phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0)\} - a\Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta x} - 2a^2 \frac{\Delta^2}{2!} \left\{ \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} \right\} - 2a^3 \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} - 2a^4 \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} - 2a^2 \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots = 0$$

Nu geldt  $\frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} = 0$  en dus ook  $\frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} = \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4}$

Bovendien geldt voor een punt op deze rand ( $\frac{\delta\phi}{\delta n} = 0$ )  $\frac{\delta\phi}{\delta x} = 0$  waardoor in dit geval ook  $\frac{\delta^3\phi}{\delta x \delta z^2} = 0$ .

Uit  $\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta z^2} = 0$  is af te leiden  $\frac{\delta^3\phi}{\delta x^3} = -\frac{\delta^3\phi}{\delta z^2 \delta x}$  zodat ook geldt  $\frac{\delta^3\phi}{\delta x^3} = 0$ .

Met deze betrekkingen gaat bovenstaande uitdrukking over in:

$$2\{\phi(a\Delta, 0) - \phi(0, 0)\} + a^2\{\phi(0, \Delta) - \phi(0, 0)\} + a^2\{\phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0)\} - 2(a^4 + a^2) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots = 0 \tag{3-8}$$

Bij de benadering geldt verg. (3-7).

Dat wat in deze vergelijking verwaarloosd wordt is dus:

$$-2(a^4 + a^2) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots \tag{3-9}$$

Laten we nu het geval beschouwen dat de rand een stroomlijn is, die een hoek maakt met de hoofdrichtingen van het netwerk. We zullen daarbij het netwerk een zodanige vorm geven, dat de knooppunten samenvallen met de rand. In fig. 40 is een stukje van een dergelijke rand getekend. De helling met de x-richting zullen we 1:a stellen.

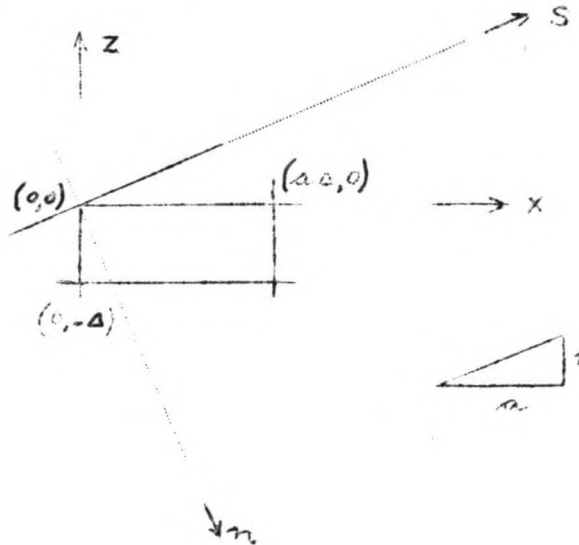


fig. 40

De waarde van de weerstanden is resp.:  $aR_{\square}$  voor die tussen punt  $(0,0)$  en punt  $(a\Delta, 0)$  en  $\frac{1}{a} R_{\square}$  voor die tussen punt  $(0,0)$  en punt  $(0, -\Delta)$ . In het punt  $(0,0)$  van het netwerk geeft de wet van Kirchhoff:

$$\frac{E(a\Delta, 0) - E(0, 0)}{aR_{\square}} + \frac{E(0, -\Delta) - E(0, 0)}{\frac{1}{a}R_{\square}} = 0$$

Als we de functie  $\frac{E}{aR_{\square}}$  vervangen door de analoge functie  $\phi$ , dan kunnen we schrijven::

$$\phi(a\Delta, 0) - \phi(0, 0) + a^2 \{ \phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0) \} = 0 \tag{3-10}$$

We kunnen de functiewaarden in de punten  $(a\Delta, 0)$  en  $(0, -\Delta)$  uitdrukken n.b.v. reeksontwikkeling:

$$\phi(a\Delta, 0) = \phi(0, 0) + a\Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{a^2\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{a^3\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{a^4\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(0, -\Delta) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots$$

Door de tweede uitdrukking met  $a^2$  te vermenigvuldigen en bij de eerste uitdrukking op te tellen, kunnen we schrijven:



$$\begin{aligned} \phi(a\Delta, 0) - \phi(0, 0) + a^2\{\phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0)\} &= + a\Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta x} - a^2\Delta \frac{\delta\phi(0, 0)}{\delta z} \\ + \frac{a^2\Delta^2}{2!} \left\{ \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi(0, 0)}{\delta z^2} \right\} + \frac{a^3\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta x^3} - \frac{a^2\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{a^4\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta x^4} \\ &+ \frac{a^2\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0, 0)}{\delta z^4} \end{aligned} \quad (3-11)$$

Voor het gehele gebied geldt:  $\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta z^2} = 0$  en dus ook:  $\frac{\delta^4\phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4\phi}{\delta z^4}$

In het punt (0,0) (evenals voor alle punten op een stroomlijn) geldt  $\frac{\delta\phi}{\delta n} = 0$ .  
En omdat ook  $\frac{\delta^2\phi}{\delta n^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta s^2} = 0$  is af te leiden dat geldt  $\frac{\delta^3\phi}{\delta n^3} = 0$  (3-12)

Volgens verg. (3-3) is  $\frac{\delta\phi}{\delta n} = \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\delta\phi}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta n} = 0$

Deze vergelijking geeft in dit geval (zie: fig. 41):

$$\frac{\delta\phi}{\delta n} = \frac{\delta\phi}{\delta x} \cos \alpha - \frac{\delta\phi}{\delta z} \sin \alpha = \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{\delta\phi}{\delta z} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = 0$$

Hieruit volgt  $\frac{\delta\phi}{\delta x} - a \frac{\delta\phi}{\delta z} = 0$  (3-13)

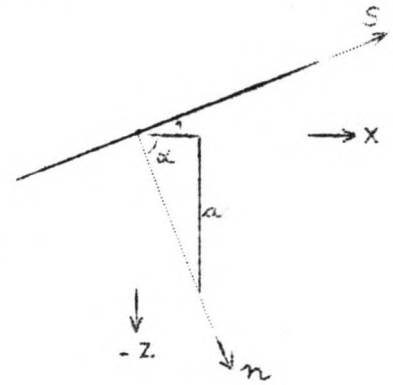


fig. 41

Op dezelfde wijze is uit (3-12) de volgende uitdrukking af te leiden:

$$\frac{\delta^3\phi}{\delta x^3} - 3a \frac{\delta^3\phi}{\delta x^2\delta z} + 3a^2 \frac{\delta^3\phi}{\delta x\delta z^2} - a^3 \frac{\delta^3\phi}{\delta z^3} = 0 \quad (3-14)$$

Omdat  $\frac{\delta^3\phi}{\delta x^2\delta z} = \frac{\delta^3\phi}{\delta z\delta x^2} = -\frac{\delta^3\phi}{\delta z^3}$  en  $\frac{\delta^3\phi}{\delta z^2\delta x} = \frac{\delta^3\phi}{\delta x\delta z^2} = -\frac{\delta^3\phi}{\delta x^3}$  kan voor (3-14)

worden geschreven:

$$(1+3a^2) \frac{\delta^3\phi}{\delta x^3} - (a^3-3a) \frac{\delta^3\phi}{\delta z^3} = 0$$

of wel:  $\frac{\delta^3\phi}{\delta z^3} = \frac{1+3a^2}{a^3-3a} \frac{\delta^3\phi}{\delta x^3}$  (3-15)

Substitueren we enige van bovenstaande betrekkingen in de uitdrukking (3-11) dan kan worden geschreven:

$$\varphi(a\Delta, 0) - \varphi(0, 0) + a^2\{\varphi(0, -\Delta) - \varphi(0, 0)\} - \frac{a(a^4 - 6a^2 - 1)\Delta^3}{a^2 - 3} \frac{\delta^3 \varphi(0, 0)}{3! \delta x^3} - (a^4 + a^2) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \varphi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots \quad (3-16)$$

Bij de benadering wordt gesteld (zie: verg. (3-10)):

$$\varphi(a\Delta, 0) - \varphi(0, 0) + a^2\{\varphi(0, -\Delta) - \varphi(0, 0)\} = 0$$

Dat wat in deze vergelijking verwaarloosd wordt is dus:

$$- \frac{a(a^4 - 6a^2 - 1)\Delta^3}{a^2 - 3} \frac{\delta^3 \varphi(0, 0)}{3! \delta x^3} - (a^4 + a^2) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \varphi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots \quad (3-17)$$

Hieraan zien wij dat, nagenoeg voor alle waarden van  $a \neq 0$ , de term met de derde afgeleide een rol speelt.

Met het voorgaande is enigszins duidelijk geworden, dat het realiseren van de randvoorwaarden in een netwerk van weerstanden steeds bijzondere aandacht vereist. Dit te meer daar de invloed op het stroombeeld van de verwaarlozingen aan de rand (evenals die van de verwaarlozingen in het inwendige van een veld) sterk afhangt van de verhoudingen in een probleem.

De benadering, die gevolg is, kan als volgt worden samengevat:

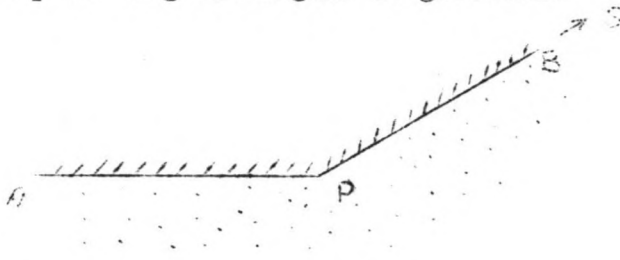
- 1e. Bepaal de waarde van de elementen met behulp van een fysische beschouwing.
- 2e. Bepaal de orde van de verwaarlozing in een bepaald punt met behulp van een wiskundige beschouwing.

We willen op dit moment met bovenstaande voorbeelden volstaan, waarbij nog naar enige literatuur, waarin andere benaderingen worden besproken, wordt verwezen: zie: [16] blz. 31-45 en [22] blz. 38-63.

Tenslotte willen we enige aandacht schenken aan een gedeelte van een randvoorwaarde met een bijzonder karakter.

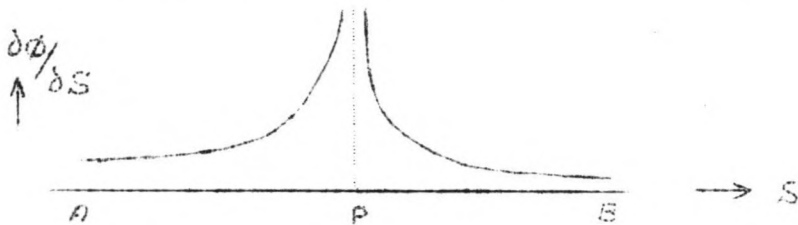
In bepaalde problemen doet zich langs de rand een zgn. singulariteit voor. D.w.z. dat op dat gedeelte van de rand de functie niet analytisch is. Het is b.v. mogelijk dat zich op een bepaalde plaats een sprong in het verloop van de eerste afgeleide voordoet.

Een voorbeeld hiervan is een stroomlijn A-B waarin in het punt P een knik voorkomt b.v. zoals op de volgende figuur is getekend.



Langs de gehele stroomlijn geldt:  $\frac{\delta\phi}{\delta n} = 0$ .

Het verloop van  $\frac{\delta\phi}{\delta S}$  langs S is b.v. dat van het volgende figuur:



Het is duidelijk dat, in de omgeving van een dergelijk punt, van een uitdrukking m.b.v. de reeksontwikkeling volgens Taylor geen sprake kan zijn. De benadering, zoals deze tot nu toe is gevolgd, zal in dit geval dan ook niet mogelijk zijn. In het hierna volgende gedeelte wordt een toetsprobleem beschreven, waarbij in de randvoorwaarden sprake is van een singulariteit. We zullen trachten daarbij voor een dergelijke singulariteit een benaderingswijze te volgen, die wordt aangegeven door Huard de la Marre (zie: [15] blz. 45-49). Tevens wordt in dit probleem de benaderingswijze, zoals deze in het voorgaande is aangegeven, getoetst.

III. 3.2. De stroming om een damwand.

Een grondwaterstroming, die vaak voorkomt bij waterbouwkundige constructies, is die om een wand met een kleine dikte. Bij de benadering wordt de dikte meestal verwaarloosd. Ook in het dwarsprofiel van een zeedijk komt nagenoeg steeds een korte damwand voor, die het uitspoelen van het zand onder de taludbekleding nabij de teen moet voorkomen. Om deze redenen wordt in het volgende aan een grondwaterstroming om een dergelijke wand een aparte beschouwing gewijd. We willen trachten de invloed van het discretiseren aan de randen, die in het voorgaande m.b.v. een wiskundige benadering voor verschillende gevallen is uitgedrukt, in een concreet geval te onderzoeken. Men dergelijke grondwaterstroming leent zich slechts in zeer bijzondere omstandigheden voor een exacte benadering. Wil de potentiaalfunctie  $\phi$  in een gesloten vorm bestaanbaar zijn dan moeten minstens enige grenzen op een oneindige afstand liggen (zie: II-3 blz. 18). Het is niet zonder meer mogelijk om een dergelijk probleem, waarvan de oplossing bekend is, als een toetsprobleem voor de modelmethode te gebruiken, omdat een model steeds eindige grenzen zal hebben.

Er bestaat een elektrische modelmethode met behulp van het z.g. Teledeltos-papier (zie: II- 5 blz. 28 ) waarmee in een continu model een probleem met eindige grenzen kan worden opgelost.

Laten we eerst het toetsprobleem dat is gekozen bespreken (zie: bijlage 9 )

De verschillende randvoorwaarden zijn op de bijlage aangegeven:

voor $x=0$ en $-4 \leq z \leq 0$	$\phi = 500$
" $0 \leq x \leq 8$ en $z = -4$	$\frac{\delta \phi}{\delta n} = 0 \rightarrow \frac{\delta \phi}{\delta z} = 0$
" $x = 8$ en $-4 \leq z < 12$	$\frac{\delta \phi}{\delta n} = 0 \rightarrow \frac{\delta \phi}{\delta x} = 0$
" $0 \leq x \leq 8$ en $z = 12$	$\phi = 1000$
" $x = 0$ en $0 \leq z \leq 12$	$\frac{\delta \phi}{\delta n} = 0 \rightarrow \frac{\delta \phi}{\delta x} = 0$

Het bijzondere van dit probleem is, dat de randen een singulariteit bevatten. In het punt (0,0) vertoont de rand (die ter plaatse een stroomlijn is) een knik over een hoek  $\pi$ . In het punt (0,0) is de functie  $\phi$  continu, echter de afgeleiden van  $\phi$  zijn alle discontinu. We kunnen daarom in de onmiddellijke omgeving van dit punt (0,0) niet een wiskundige beschouwing houden, zoals in het voorgaande steeds is gedaan. In het nu volgende willen we aan de hand van de oplossing van verschillende problemen o.a. een inzicht krijgen in de invloed van het discretiseren in de omgeving van een dergelijk punt.

Hierbij kan worden gesteld, dat de invloed van de singulariteit, op het stroombeeld in zijn directe omgeving, niet afhankelijk is van de ligging der overige grenzen. Wat dit betreft, kan dus van overeenkomst sprake zijn, tussen een probleem met eindige grenzen (het toetsprobleem) en een probleem waarvan enige grenzen op een oneindige afstand liggen (theoretisch geval).

Van het beschreven toetsprobleem zijn in vier verschillende elektrische modellen, bestaande uit een continue plaatgeleider (Teledeltos papier), oplossingen bepaald. Hierbij is, op een vooraf vastgesteld aantal punten (rooster zie: bijlage 9), de waarde van de potentiaalfunctie gemeten. Het meten in een aantal verschillende modellen geeft de mogelijkheid om onnauwkeurigheden, die zich kunnen voordoen (zie: II- 5 blz. 31), te constateren en voor een groot gedeelte te elimineren. Op deze wijze is een oplossing van het toetsprobleem te verkrijgen, waaraan een redelijke nauwkeurigheid kan worden toegekend (zie: bijlage 21).

Voor ditzelfde probleem is een weerstandnetwerk ontworpen, waarvan de knooppunten overeenkomen met de punten van het vooraf vastgestelde roosterwerk. De mazen van dit netwerk hebben dus de vorm van vierkanten (maasvorm a). Voor deze maasvorm is in III-2 een uitgebreide foutbeschouwing opgezet. De waarde van de weerstandselementen zijn, zoals we onder III-1 hebben gezien, eenvoudig te bepalen door een fysische beschouwing. In dit geval krijgen alle elementen in het inwendige van het gebied de waarde  $R_{\square}$ , terwijl de elementen langs de randen de waarde  $2R_{\square}$  krijgen.

Hierbij kan worden opgemerkt dat, in het geval de rand een equipotentiaallijn is, de waarde van de weerstandselementen er niet veel toe doet. Immers alle punten van de rand hebben dezelfde potentiaal zodat de stroom tussen deze punten nul is. Deze weerstandselementen, die in dit geval strikt genomen de waarde  $2R_{\square}$  zouden moeten hebben, kunnen eenvoudig worden weggelaten in het model ( $R=\infty$ ). Op bijlage 9 is een weerstandnetwerkmodel aangegeven, zoals dit voor dit probleem is uit te voeren. In elk knooppunt van een weerstandnetwerk geldt de wet van Kirchhoff, wat in dit geval de volgende vergelijkingen geeft (zie: fig. 42 en fig. 43):

$$\text{voor een punt in het inwendige: } \phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D - 4\phi_a = 0$$

$$\text{voor een punt langs de rand } 2\phi_A + \phi_B + \phi_D - 4\phi_a = 0$$

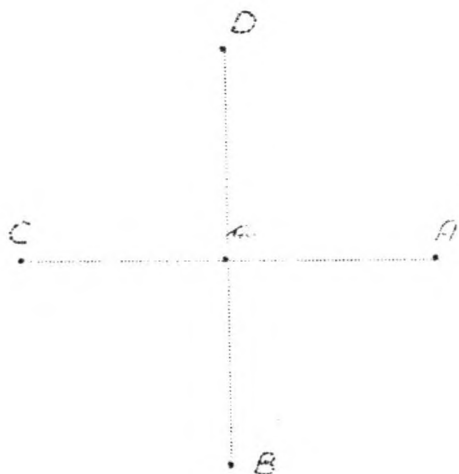


fig. 42

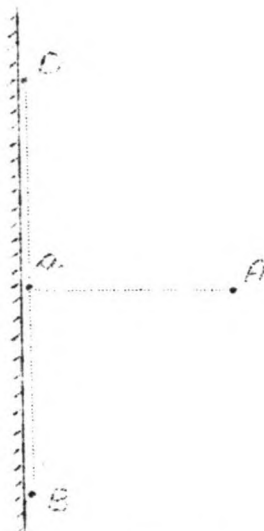


fig. 43

Volgens het ontwerp van bijlage 9 zijn 3 netwerken gebouwd, die op een verschillende wijze zijn samengesteld. Op deze wijze kan ook in de invloed van de onnauwkeurigheden, die hierbij kunnen optreden, een inzicht worden verkregen.

Bij het meten met de weerstandnetwerkmodellen voor dit toetsprobleem, zijn verschillende facetten onderzocht, die voor een algemeen geval van belang kunnen zijn. Een van deze facetten is de door Huard de la Marre aangegeven mogelijkheid om enige weerstanden in de omgeving van een singulier punt, afwijkende waarden te geven, zodat daardoor de oplossing in gunstige zin wordt beïnvloed. Deze mogelijkheid is eerst overwogen voor een aantal problemen, waarvan de oplossing in gesloten vorm te bepalen is. In drie gevallen is het mogelijk, om m.b.v. een betrekkelijk eenvoudige (directe) conforme afbeelding, de potentiaalverdeling rond een dunne wand uit te drukken, als een (gesloten) analytische functie. Voor een gebied zijn op punten van een roosterwerk, dat voor het toetsprobleem is vastgesteld, de waarden van de potentiaalfunctie bepaald. Daarbij is ernaar gestreefd, de constanten (schaalwaarden bij de transformatie) zo te kiezen, dat onderlinge vergelijking van de resultaten mogelijk is. We zullen eerst achtereenvolgens deze drie gevallen bespreken.

Geval I:

Het eenvoudigste geval doet zich voor, indien alle grenzen op een oneindig grote afstand liggen (zie: bijlage 10 fig. 1). We definiëren  $\Omega = \phi + i\psi$  en  $w = z + ix$ .

Door de transformatieformule  $\frac{\Omega}{c} = \sqrt{\frac{w}{a}}$  (3-18)

is het stroombeeld uit het complexe  $w$ -vlak in het complexe  $\Omega$ -vlak te transformeren tot een stroombeeld met rechte equipotentiaallijnen en stroomlijnen, die uiteraard loodrecht op elkaar staan. In de formule zijn  $c$  en  $a$  schaalwaarden.

We zijn vrij in de keuze van  $x$  en  $z$ , zodat we deze de waarden 1, 2, 3 etc. kunnen geven, waardoor de punten van een roosterwerk kunnen worden vastgelegd.

Om in de verschillende gevallen enige vergelijking mogelijk te maken, is steeds gesteld dat :

$$\phi(0, z) = 500 \quad \text{voor } z \leq 0$$

$$\phi(0, 12) = 1000$$

Het verschil  $\phi(0, 12) - \phi(0, 0) = 500$ .

In dit geval krijgt de constante  $\frac{c}{\sqrt{a}}$  daarom de waarde  $\frac{500}{\sqrt{12}}$ .

Het is mogelijk om de functie  $\phi$ , voor alle waarden van  $x$  en  $z$ , als een gesloten functie uit te drukken:

$$\phi(x, z) = \frac{500}{\sqrt{12}} \sqrt{x^2 + z^2} \cdot \cos\left\{\frac{1}{2} \arctg. \frac{x}{z}\right\} + \phi(0, 0)$$

Dit is te schrijven als:

$$\phi(x, z) = \frac{500}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2 + z}{2}} + \phi(0, 0)$$

Voor het punt  $(0, 0)$  is  $\phi = 500$  zodat we krijgen:

$$\phi(x, z) = \frac{500}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2 + z}{2}} + 500 \tag{3-19}$$

Voor alle punten van een roosterwerk met maaswijdte 1, dat zich uitstrekt tussen de grenzen:

$$0 \leq x \leq 12 \quad \text{en} \quad -4 \leq z \leq 12$$

zijn de waarden van de functie  $\phi$  in dit geval bepaald. Deze zijn verzameld op bijlage 11.

#### Geval II.

Een ander bekend geval, dat zich leent voor conforme afbeelding, is de stroming om een plaat, waarvan de lengte  $2d$  is. De transformatie-formule is in dit geval:

$$\Omega = c \arccos \frac{w}{d} \tag{3-20}$$

Als we van het stroombeeld in het  $w$ -vlak een kwart gedeelte beschouwen, dan komt dit overeen met dat bij de stroming om een damwand (in een symmetrisch geval), waarbij de bovengrens gevormd wordt door een rechte equipotentiaallijn, die loodrecht op deze damwand staat (zie: bijlage 10 fig. 2).

De diepte van de damwand is  $d$ .

De vergelijking, waaraan de stroomlijnen in het  $w$ -vlak in dit geval voldoen, is:

$$\frac{x^2}{\sinh^2 \frac{\psi}{c}} + \frac{z_1^2}{\cosh^2 \frac{\psi}{c}} = d^2 \quad (3-21)$$

De vergelijking, waaraan de equipotentiaallijnen in het  $w$ -vlak in dit geval voldoen, is:

$$\frac{z_1^2}{\cos^2 \frac{\phi}{c}} - \frac{x^2}{\sin^2 \frac{\phi}{c}} = d^2 \quad (3-22)$$

Uit vergelijking (3-22) kunnen we  $\phi$  als volgt uitdrukken in  $x$  en  $z_1$ :

$$\phi(x, z_1) = C_1 \arctg \sqrt{\frac{x^2 - z_1^2 + d^2 + \sqrt{z_1^2 \cdot x^2 \cdot d^2 + 4x^2 z_1^2}}{2z_1^2}} + C_2$$

Bij deze vergelijking ligt het nulpunt van het coördinatenstelsel in het midden van de plaat ( $2d$ ) d.w.z. voor het kwartgedeelte aan de bovenzijde van de damwand. Verschuiven we dit nulpunt naar het punt aan het ondereinde van de damwand dan wordt de vergelijking voor  $\phi$ :

$$\phi(x, z) = C_1 \arctg \sqrt{\frac{x^2 + 2dz \cdot z^2 + \sqrt{z^2 - 2dz - x^2 + 4d^2 x - 3d^2 xz + 4z^2 x^2}}{2(z-d)^2}} + C_2$$

De waarden  $C_1$  en  $C_2$  volgen weer uit de schaal, die men bij de transformatie kiest. Om vergelijking met de andere gevallen mogelijk te maken is weer geeist:

$$\phi(0, 12) = 1000$$

$$\phi(0, z) = 500 \text{ voor } z \leq 0$$

De formule voor de potentiaalfunctie wordt dan uiteindelijk:

$$\phi(x, z) = \frac{1000}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{x^2 + 2dz \cdot z^2 + \sqrt{z^2 - 2dz - x^2 + 4d^2 x - 3d^2 xz + 4z^2 x^2}}{2(d-z)^2}} + 500 \quad (3-23)$$

Voor alle punten van een roosterwerk, dat gelijk is aan dat bij geval I, zijn de waarden van de functie  $\phi$  voor dit geval bepaald. De waarden zijn op bijlage 12 verzameld.



Geval III.

Beschouwen we het stroombeeld om een plaat, waarvan geval II is afgeleid, nader, dan valt het op, dat er nog een geval uit af te leiden is. Als we de functies  $\emptyset$  en  $\psi$  verwisselen, dan ontstaat een geheel ander stroombeeld. Een kwart gedeelte hiervan is getekend op bijlage 10 (fig. 3). We zien dat het overeenkomt met het beeld van een stroming om een damwand (in een symmetrisch geval), waarbij zich op een diepte  $d$  onder het laagste punt van de damwand een rechte, zich loodrecht op de damwand tot in het oneindige uitstrekkende, ondoorlatende grens bevindt.

De vergelijking, waaraan de equipotentiaallijnen in dit geval voldoen, is te verkrijgen door in verg. (3-21) de  $\psi$  door  $\emptyset$  te vervangen:

$$\frac{x^2}{\sinh^2 \frac{\emptyset}{c}} + \frac{z_i^2}{\cosh^2 \frac{\emptyset}{c}} = d^2 \quad (3-24)$$

Hierin is  $d$  de hoogte van de opening onder de damwand. Het is ook nu mogelijk om  $\emptyset$  in  $x$  en  $z$  uit te drukken:

$$\emptyset(x, z_i) = C_1 \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{(x^2+z_i^2+d^2) + \sqrt{(x^2+z_i^2+d^2)^2 - 4d^2z_i^2}}{2d^2}} + C_2$$

Het nulpunt van de coördinaatassen ligt nu in het verlengde van de damwand op de ondoorlatende grens. Verschuiven we het assenstelsel zodanig dat dit nulpunt in het onderste punt van de damwand komt, dan gaat de vergelijking voor  $\emptyset$  over in:

$$\emptyset(x, z) = C_1 \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{x^2+(z+d)^2+d^2 + \sqrt{\{x^2+(z+d)^2+d^2\}^2 - 4d^2(z+d)^2}}{2d^2}} + C_2 \quad (3-25)$$

Deze constanten  $C_1$  en  $C_2$  zijn weer bepaald door de schaal, die men kiest bij de transformatie. Om vergelijking met de andere gevallen mogelijk te maken, is weer geëist:

$$\begin{aligned} \emptyset(0, 12) &= 1000 \\ \emptyset(0, z) &= 500 \text{ voor } z \leq 0 \end{aligned}$$

De formule voor de potentiaalfunctie wordt dan:

$$\emptyset(x, z) = 242,244 \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{x^2+(z+d)^2+d^2 + \sqrt{\{x^2+(z+d)^2+d^2\}^2 - 4d^2(z+d)^2}}{2d^2}} + 500 \quad (3-26)$$

Voor alle punten van een roosterwerk, dat gelijk is aan dat, bij de gevallen I en II, zijn de waarden van de functie  $\phi$  voor dit geval bepaald. De waarden zijn op bijlage 13 verzameld.

Op bijlage 14 zijn voor een aantal punten van het roosterwerk, in de omgeving van het singuliere punt  $(0,0)$ , de juiste waarden van de functie in de 3 voorgaande gevallen verzameld. Het bovenste getal is steeds de waarde behorende bij geval I. Het tweede getal behoort bij geval II en het derde bij geval III.

We kunnen nu het volgende experiment uitvoeren. Bepaal in een willekeurig punt van het roosterwerk het gemiddelde van de waarden, in de direct omliggende punten, behorende bij een bepaald geval. Komt deze waarde overeen met de juiste waarde in het beschouwde punt dat behoort bij hetzelfde geval, dan is dit een aanwijzing voor het feit dat vierde en hogere afgeleiden geen rol van betekenis spelen. Dit betekent ook, dat in de directe omgeving van het beschouwde punt een weerstandnetwerk met deze maaswijdte geen fout zal geven, die ligt boven de nauwkeurigheid van de berekende waarden. Als we dit experiment uitvoeren dan blijkt, dat in het overgrote deel van het gebied geen sprake is van een meetbare afwijking. In de omgeving van het singuliere punt  $(0,0)$  echter, blijken afwijkingen op te treden.

Beschouwen we in het geval I het punt G van bijlage 14 :

$$\frac{\phi_H + \phi_C + \phi_F + \phi_K}{4} = \frac{703 + 724 + 659 + 644}{4} = 684$$

Dit is precies de waarde van  $\phi_G$  in dit geval I.

Beschouwen we vervolgens in hetzelfde geval het punt J:

$$\frac{\phi_K + \phi_F + \phi_S + \phi_N}{4} = \frac{644 + 659 + 500 + 566}{4} = 592$$

Deze waarde wijkt af van de juiste waarde van  $\phi_J$ , die in dit geval I 602 is.

Voor de beide andere gevallen II en III is een dergelijke beschouwing te houden, waarvan het resultaat met het bovenstaande overeenkomt. Ook voor de andere punten in de omgeving van het singuliere punt S, evenals voor dit punt zelf, geeft een benadering van de functiewaarde met de bovenstaande vergelijking afwijkingen. We zouden kunnen overwegen, in de omgeving van het singuliere punt S, een andere maaswijdte of een andere maasvorm toe te passen, waardoor de benadering nauwkeuriger wordt. Op deze overwegingen komen we nog nader terug. We willen hier een geheel andere mogelijkheid overwegen om tot een nauwkeuriger benadering te komen.

In een groot aantal knooppunten, rondom S, is in de drie gevallen de juiste waarde van de functie bekend. Laten we van deze juiste functiewaarden uitgaan. We hebben gezien dat op enige afstand van S de benadering met de vergelijking, die in het netwerk van bijlage 9 in de knooppunten geldt, geen merkbare afwijking geeft. Dit betekent in de beschouwing, die we nu willen houden, dat de weerstandswaarden in het ontwerp voldoen op enige afstand van S. We stellen nu de waarden van de weerstandselementen, in een ruim gebied in de omgeving van S, onbekend. Gaande naar het punt S kunnen we in elk knooppunt, met de bekende functiewaarden, steeds één onbekende weerstand oplossen. Doen we dit, in de gevallen I t/m III, dan blijkt dat we, tot dicht in de omgeving van punt S, voor de weerstandselementen waarden vinden, die niet afwijken van de waarde  $R_D$  resp.  $2R_D$ . Op een bepaald moment, tijdens deze procedure, zijn de waarden van de weerstandselementen, langs de stippellijnen in de figuur van bijlage 15, nog onbekend. In de volgende tabel wordt de procedure voortgezet. Hierbij wordt de verhouding tussen de waarde van een weerstandelement en de waarde van de vierkantsweerstand  $\frac{R}{R_D}$  aangeduid met de letter f.

Zo is b.v.  $f_{A-E} = \frac{R_{A-E}}{R_D}$ .

Voorbeeld: beschouw het punt A waarbij de waarde van het weerstandselement  $R_{AE}$  onbekend is. De juiste waarde van de functie in de omliggende punten is in geval I resp.:

$$\phi_W = 750 \quad \phi_B = 710 \quad \phi_E = 644 \quad \phi_A = 704$$

De weerstandswaarden zijn:  $R_{A-W} = 2R_D$   $R_{A-B} = R_D$  ,  $R_{A-E}$  onbekend .

De vergelijking, die in A kan worden opgesteld wordt:  $\frac{\phi_W - \phi_A}{2R_D} + \frac{\phi_B - \phi_A}{R_D} + \frac{\phi_E - \phi_A}{R_{A-E}} = 0$

Of wel:  $\frac{\phi_W - \phi_A}{2} + \frac{\phi_B - \phi_A}{1} + \frac{\phi_E - \phi_A}{f_{A-E}} = 0$

Waaruit volgt:  $f_{A-E} \approx \underline{2,06}$ .

Dit voorbeeld is het eerste geval in de tabel 1.

tabel 1

weerstand R		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_D$	kies
van	tot					
A	E	A	I	$\frac{46}{2} + 6 - \frac{60}{f_{AE}} = 0$	$f_{AE} \approx \frac{60}{29} = 2,06$	2
			II	$\frac{44}{2} + 5 - \frac{55}{f_{AE}} = 0$	" $\approx \frac{55}{27} = 2,04$	2
			III	$\frac{47}{2} + 7 - \frac{65}{f_{AE}} = 0$	" $\approx \frac{65}{31} = 2,10$	2
G	F	G	I	$40+24 - 40 - \frac{22}{f_{FG}} = 0$	$f_{FG} \approx \frac{22}{24} = 0,915$	1
			II	$33+21 - 37 - \frac{22}{f_{FG}} = 0$	" $\approx \frac{22}{22} = 1$	1
			III	$41+32 - 41 - \frac{34}{f_{FG}} = 0$	" $\approx \frac{34}{32} = 1,06$	1
K	J	K	I	$40+33 - 30 - \frac{42}{f_{JK}} = 0$	$f_{JK} \approx \frac{42}{43} = 0,98$	1
			II	$37+28 - 29 - \frac{37}{f_{JK}} = 0$	" $\approx \frac{37}{36} = 1,03$	1
			III	$41+44 - 30 - \frac{54}{f_{JK}} = 0$	" $\frac{54}{55} = 0,99$	1
P	N	P	I	$30+36 - 21 - \frac{48}{f_{NP}} = 0$	$f_{NP} \approx \frac{48}{45} = 1,07$	1
			II	$29+31 - 19 - \frac{41}{f_{NP}} = 0$	" $\approx \frac{41}{41} = 1$	1
			III	$30+49 - 18 - \frac{63}{f_{NP}} = 0$	" $\approx \frac{63}{61} = 1,03$	1

De waarden die op deze wijze voor deze elementen gevonden worden, wijken niet veel af van de waarden die in het ontwerp zijn aangegeven (zie laatste kolom). Hierbij kunnen we opmerken dat de uitkomsten enigszins door de nauwkeurigheid, waarin de functiewaarden zijn bepaald, worden beïnvloed.

We nemen aan, dat ook voor deze elementen de waarden uit het ontwerp voldoen, zodat deze worden aangehouden. De weerstandselementen, die nu nog onbekend zijn, zijn resp. (zie: bijlage 16):

$$R_{E-F}, R_{F-J}, R_{E-S}, R_{S-J}, R_{J-N} \text{ en } R_{M-N}.$$

Het aantal beschikbare vergelijkingen is vijf.

Tijdens de gehele procedure, is het aantal onbekenden groter dan het aantal beschikbare vergelijkingen. Men moet dus enige weerstanden gelijk kiezen aan die, in het ontworpen netwerk, en daarbij één weerstandswaarde oplossen. Geeft dit een waarde, die ongeveer gelijk is aan die, uit het ontworpen netwerk, dan kan men deze waarde aanhouden. Volgt uit de vergelijking een waarde voor het onbekend gestelde weerstandselement, die afwijkt van de waarde uit het ontworpen netwerk, dan is men aan deze waarde niet gebonden. Men zou ook voor één der overige, in het beschouwde knooppunt aangesloten, elementen een afwijkende waarde kunnen bepalen. Men heeft dus steeds een zekere vrijheid. Wel moet in alle punten aan de bestaande vergelijkingen worden voldaan. Laten we nu het punt N in de drie gevallen beschouwen. Daarbij wordt eerst aangenomen, dat  $R_{M-N}$  gelijk is aan de waarde uit het ontworpen netwerk:  $R_0$  en daarbij  $R_{M-J}$  bepaald. Daarna wordt, door  $R_{M-J}$  aan te nemen,  $R_{N-M}$  bepaald.

tabel 2

weerstand		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_0$	kies
van	tot					
N	M	N	I	$-66-16+43 + \frac{36}{f_{JN}} = 0$	$f_{JN} = \frac{36}{34} = 1,06$	1
			II	$-58-15+41 + \frac{33}{f_{JN}} = 0$	$\frac{33}{32} = 1,03$	1
			III	$-34-16+63 + \frac{39}{f_{JN}} = 0$	$\frac{39}{37} = 1,05$	1
N	J	N	I	$-\frac{66}{f_{IN}} - 16+43+36 = 0$	$f_{IN} = \frac{66}{63} = 0,97$	1
			II	$-\frac{58}{f_{IN}} - 15+41+33 = 0$	$\frac{58}{59} = 0,98$	1
			III	$-\frac{34}{f_{IN}} - 16+63+39 = 0$	$\frac{34}{86} = 0,93$	1

Uit het resultaat blijkt dat, als we deze weerstanden de waarde  $R_D$  ( $f=1$ ) geven, geen grote fout wordt gemaakt. Laten we vervolgens het punt F in de drie gevallen beschouwen. Eerst wordt, onder aanname dat  $R_{F-E}$  gelijk is aan  $R_D$ , de waarde van  $R_{F-J}$  bepaald. Daarna wordt  $R_{F-E}$  bepaald, waarbij  $R_{F-J} = R_D$  wordt gesteld.

tabel 3

weerstand		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_D$
van	tot				
F	J	F	I	$-15+51+25 - \frac{57}{f_{FJ}} = 0$	$f_{FJ} \approx \frac{57}{61} = 0,94$
			II	$-12+43+22 - \frac{52}{f_{FJ}} = 0$	" $\approx \frac{52}{58} = 0,90$
			III	$-13+54+32 - \frac{63}{f_{FJ}} = 0$	" $\approx \frac{63}{68} = 0,93$
F	E	F	I	$51+25-57 - \frac{15}{f_{FE}} = 0$	$f_{FE} \approx \frac{15}{19} = 0,79$
			II	$43+22-52 - \frac{12}{f_{FE}} = 0$	" $\approx \frac{12}{18} = 0,67$
			III	$54+32-63 - \frac{13}{f_{FE}} = 0$	" $\approx \frac{13}{25} = 0,73$

Als we dus  $R_{F-E} = R_D$  stellen, dan moet  $R_{F-J} \approx 0,9 R_D$  zijn.

Wordt  $R_{F-J} = R$  gesteld, dan zou  $R_{F-E} \approx 0,75 R_D$  moeten zijn.

Laten we voor deze beide mogelijkheden, de waarden van de twee nog resterende weerstanden bepalen. We beschikken over twee vergelijkingen n.l. in de punten E resp. J.

Voor  $R_{F-E} = R_D$  en voor  $R_{F-J}$  overeenkomstig de waarde uit de tabel zijn de waarden van  $R_{E-S}$  en  $R_{J-S}$  te bepalen:

tabel 4

weerstand		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_0$
van	tot				
E	S	E	I	$\frac{60}{2} + 15 + \frac{144}{f_{ES}} = 0$	$f_{ES} \approx \frac{144}{45} = 3,20$
			II	$\frac{55}{2} + 12 + \frac{131}{f_{ES}} = 0$	" $\approx \frac{131}{40} = 3,28$
			III	$\frac{65}{2} + 18 + \frac{168}{f_{ES}} = 0$	" $\approx \frac{168}{51} = 3,30$
J	S	J	I	$\frac{57}{0,94} + 42 - 36 - \frac{102}{f_{SJ}} = 0$	$f_{SJ} \approx \frac{102}{67} = 1,52$
			II	$\frac{52}{0,90} + 37 - 33 - \frac{91}{f_{SJ}} = 0$	" $\approx \frac{91}{62} = 1,47$
			III	$\frac{63}{0,93} + 54 - 39 - \frac{123}{f_{SJ}} = 0$	" $\approx \frac{123}{33} = 1,48$

Voor  $R_{F-J} = R_0$  en voor  $R_{F-E}$  overeenkomstig de waarde uit de tabel, zijn de waarden van  $R_{E-S}$  en  $R_{J-S}$  te bepalen:

tabel 5

weerstand		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_0$
van	tot				
E	S	E	I	$\frac{60}{2} + \frac{15}{0,79} + \frac{144}{f_{ES}} = 0$	$f_{ES} \approx \frac{144}{49} = 2,94$
			II	$\frac{55}{2} + \frac{12}{0,67} + \frac{131}{f_{ES}} = 0$	" $\approx \frac{131}{46} = 2,86$
			III	$\frac{65}{2} + \frac{18}{0,78} + \frac{168}{f_{ES}} = 0$	" $\approx \frac{168}{56} = 3,00$
J	S	J	I	$57 + 42 - 36 - \frac{102}{f_{JS}} = 0$	$f_{JS} \approx \frac{102}{63} = 1,62$
			II	$52 + 37 - 33 - \frac{91}{f_{JS}} = 0$	" $\approx \frac{91}{56} = 1,62$
			III	$63 + 54 - 39 - \frac{123}{f_{JS}} = 0$	" $\approx \frac{123}{73} = 1,58$

Uit deze resultaten blijkt duidelijk dat, in de drie gevallen, de uitkomsten steeds dicht bij elkaar liggen. Om een juiste functiewaarde in de verschillende punten te krijgen, zou men kunnen overwegen drie elementen een afwijkende waarde te geven. Als we de verschillen in de drie gevallen verwaarlozen, dan zijn de volgende mogelijkheden aanwezig:

$$\text{óf } R_{F-J} \approx 0,90 R_U \text{ en } R_{E-S} \approx 3,25 R_U$$

$$R_{S-J} \approx 1,50 R_U$$

$$\text{óf } R_{F-E} \approx 0,75 R_U \text{ en } R_{E-S} \approx 2,95 R_U$$

$$R_{S-J} \approx 1,60 R_U$$

Willen we liefst zo weinig mogelijk afwijkende weerstandswaarden aanbrengen, dan is ook te overwegen  $R_{F-J}$  en  $R_{F-E}$  beide gelijk aan  $R_U$  te kiezen. De waarden van de elementen  $R_{E-S}$  en  $R_{J-S}$  is weer te bepalen uit de vergelijkingen in de punten E resp. J:

tabel 6

weerstand		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_U$
van	tot				
E	S	E	I	$\frac{60}{2} + 15 + \frac{144}{f_{ES}} = 0$	$f_{ES} \approx \frac{144}{45} = 3,20$
			II	$\frac{55}{2} + 12 + \frac{131}{f_{ES}} = 0$	" $\approx \frac{131}{40} = 3,28$
			III	$\frac{65}{2} + 18 + \frac{168}{f_{ES}} = 0$	" $\approx \frac{168}{51} = 3,30$
J	S	J	I	$57 + 42 - 36 - \frac{102}{f_{JS}} = 0$	$f_{JS} \approx \frac{102}{63} = 1,62$
			II	$52 + 37 - 33 - \frac{91}{f_{JS}} = 0$	" $\approx \frac{91}{55} = 1,62$
			III	$63 + 54 - 39 - \frac{123}{f_{JS}} = 0$	" $\approx \frac{123}{78} = 1,58$

Ook uit deze resultaten blijkt dat de waarden, in de drie gevallen, dicht bij elkaar liggen.



Met de bekende functiewaarden kunnen we ook eenzelfde beschouwing houden als de mazen van het netwerk een factor 2 worden vergroot. De waarde van de elementen in het netwerk, dat dan kan worden ontworpen, is eveneens resp.  $R_{\square}$  en  $2R_{\square}$ .  
Laten we in dit netwerk slechts de twee weerstanden, die met het punt S verbonden zijn, een afwijkende waarde geven. De waarde van de weerstanden  $R_{A-S}$  en  $R_{K-S}$  is te bepalen:

tabel 7

weerstand		beschouwde punt	geval	vergelijking	resultaat $f = R/R_{\square}$
van	tot				
A	S	A	I	$42+20 - \frac{204}{f_{AS}} = 0$	$f_{AS} \approx \frac{204}{62} = 3,26$
			II	$41+17 - \frac{186}{f_{AS}} = 0$	" $\approx \frac{186}{58} = 3,21$
			III	$43+26 - \frac{233}{f_{AS}} = 0$	" $\approx \frac{233}{69} = 3,38$
K	S	K	I	$80+60-51 - \frac{144}{f_{KS}} = 0$	$f_{KS} \approx \frac{144}{89} = 1,62$
			II	$75+50-48 - \frac{123}{f_{KS}} = 0$	" $\approx \frac{123}{77} = 1,66$
			III	$82+80-48 - \frac{177}{f_{KS}} = 0$	" $\approx \frac{177}{114} = 1,55$

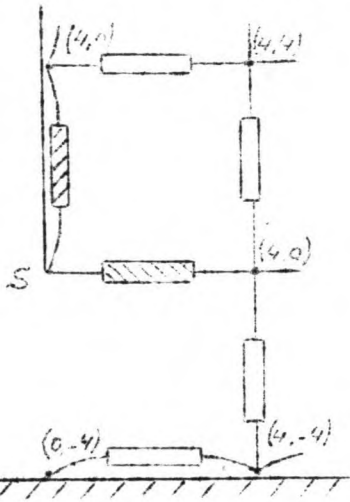
De resultaten wijken nauwelijks af van die, behorende bij een maaswijdte die een factor 2 fijner is.

Wordt de maaswijdte een factor 4 groter genomen dan in het oorspronkelijke netwerk, dan zijn de resultaten:

geval I : element in de z-richting  $3,27 R_{\square}$  ; element in de x-richting  $1,63 R_{\square}$  .  
 II : " " " "  $3,19 R_{\square}$  ; " " " "  $1,65 R_{\square}$  .  
 III : " " " "  $3,50 R_{\square}$  ; " " " "  $1,77 R_{\square}$  .

In de gevallen I en II vertonen de resultaten weinig verschil met die, behorende bij de fijnere netwerken. In het geval III is sprake van enige afwijking.

Dit is niet verwonderlijk als men bedenkt dat, bij deze maaswijdte, de ruimte tussen de damwand en de, in dat geval aanwezige, ondoorlatende laag door één maas wordt



gevuld.

Dit is natuurlijk een zeer grove wijze van benaderen, die in de praktijk niet zal worden toegepast.

In het voorgaande is reeds opgemerkt dat de uitkomsten enigszins zullen worden beïnvloed door de nauwkeurigheid waarmee de functiewaarden zijn bepaald. Voor de hierna volgende foutbeschouwing zijn, voor geval I, enige waarden nauwkeuriger bepaald (zie: blz. 114). Herhalen <sup>we</sup> voor deze nauwkeuriger waarden de berekening van tabel 7 (geval I) dan vinden we:

$$R_{E-S} = 3,26 R_G \quad (\text{i.p.v. } 3,20 R_G)$$

$$R_{J-S} = 1,64 R_G \quad (\text{i.p.v. } 1,62 R_G)$$

Hieruit blijkt dat de nauwkeurigheid van de functiewaarden inderdaad enige invloed heeft, zodat hiermede bij het onderling vergelijken rekening gehouden moet worden.

Laten we de resultaten, die verkregen zijn, puntsgewijs resumeren:

Drie theoretische gevallen I t/m III geven strookbeelden, die onderling verschillen. We kunnen in de drie gevallen uitgaan van de juiste functiewaarden en deze substitueren in de vergelijking, die in de knooppunten van een ontworpen weerstandnetwerk geldt. Doen we dit, dan zijn slechts in de directe omgeving van het singuliere punt S afwijkingen te constateren.

Brengt men op een bepaalde manier wijzigingen aan in het door een gebruikelijke fysische benadering ontworpen weerstandnetwerk, dan is de potentiaalverdeling gunstig te beïnvloeden.

Deze wijzigingen kunnen bestaan uit het vervangen van twee ("normale") weerstandselementen door elementen met afwijkende waarden.

De afwijkende waarden kunnen, binnen zekere nauwkeurigheidsgrenzen, in de drie gevallen gelijk zijn. Men zal uit deze resultaten kunnen concluderen dat, ook in een

ander geval van stroming om hetzelfde singuliere punt, deze afwijkende waarden eenzelfde gunstige invloed moeten hebben (zie: blz. 95).

Alvorens dit in een probleem te toetsen, zullen we eerst de potentiaalverdeling in het geval I wat nader bestuderen.

In het voorgaande zijn voor het discretiseren aan de randen, enige foutbeschouwingen opgezet (zie: III 3-1.). We kunnen nu de beschouwingen die behoren bij de figuren 38 en 39 (zie: blz. 86 en 88), toetsen aan het theoretische geval I, waarvoor de functie in gesloten vorm is uit te drukken (zie: verg. (3-19)):

$$\phi(x,z) = \frac{500}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+z^2}+z}{2}} + 500 = 144,3 \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+z^2}+z}{2}} + 500$$

Laten we echter, voor het volgende, gebruik maken van de meer algemen vorm:

$$\phi(x,z) = C_1 \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+z^2}+z}{2}} + C_2 \tag{3-27}$$

We kunnen nu, voor een aantal punten van het roosterwerk (zie terug), de functiewaarden als volgt uitdrukken:

$$\phi(0,-1) = C_2$$

$$\phi(0,0) = C_2$$

$$\phi(0,1) = C_1 + C_2$$

$$\phi(0,2) = C_1\sqrt{2} + C_2 = 1,4142 C_1 + C_2$$

$$\phi(0,3) = C_1\sqrt{3} + C_2 = 1,7321 C_1 + C_2$$

$$\phi(0,4) = 2C_1 + C_2$$

$$\phi(1,0) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}} + C_2 = 0,7071 C_1 + C_2$$

$$\phi(1,1) = C_1\sqrt{1,2071} + C_2 = 1,0936 C_1 + C_2$$

$$\phi(1,2) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5} + 1} + C_2 = 1,4553 C_1 + C_2$$

$$\phi(1,3) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{3}{2}} + C_2 = 1,7553 C_1 + C_2$$

$$\phi(1,-1) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}} + C_2 = 0,4551 C_1 + C_2$$

$$\phi(1,-2) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5} - 1} + C_2 = 0,3437 C_1 + C_2$$

$$\phi(2,1) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}} + C_2 = 1,2720 C_1 + C_2$$

$$\phi(2,-1) = C_1\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} + C_2 = 0,7362 C_1 + C_2$$

Uit deze uitdrukkingen volgt dat  $C_1$  het verschil is tussen de functiewaarden in de punten (0,0) en (0,1). Verder blijkt dat deze constante in de uitdrukkingen voor alle functiewaarden, behalve die voor de punten (0,0), (0,1) etc., voorkomt. Het is zinvol om deze waarde als vergelijkingsgrootheid te gebruiken.

Laten wij het punt (0,2) beschouwen en aannemen, dat de waarden van de functie in de drie omliggende punten juist is. (zie roosterwerk op bijlage 9).

We kunnen de waarde  $\phi(0,2)$  benaderen met de vergelijking, die in een weerstandnetwerk geldt:

$$\phi(0,2) \approx \frac{\phi(0,3) + \phi(0,1) + 2\phi(1,2)}{4} = \frac{1,7321 + 1 + 2(1,4553)}{4} C_1 + C_2 = 1,4107 C_1 + C_2$$

De juiste waarde is  $1,4142 C_1 + C_2$

Bij de benadering wordt dus verwaarloosd:

$$(1,4142 - 1,4107) C_1 = \underline{0,0035 C_1}$$

Dit is dus 0,35% van  $C_1$ .

Laten we nu punt (0,3) beschouwen en aannemen, dat in de omliggende punten de functie de juiste waarde heeft. Men kan  $\phi(0,3)$  benaderen met de vergelijking, die in een netwerk geldt:

$$\phi(0,3) \approx \frac{\phi(0,4) + \phi(0,2) + 2\phi(1,3)}{4} = \frac{2 + 1,4142 + 2(1,7553)}{4} C_1 + C_2 = 1,7312 C_1 + C_2$$

De juiste waarde is  $1,7321 C_1 + C_2$ .

Bij de benadering wordt dus verwaarloosd:

$$(1,7321 - 1,7312) C_1 = \underline{0,0009 C_1}$$

Dit is dus 0,09% van  $C_1$ . Laten we eerst aan deze uitkomsten de foutbeschouwing toetsen. Op blz. 89 is afgeleid dat wat bij de benadering in de vergelijking verwaarloosd wordt is uit te drukken als (3-9):

$$-2 (a^4 + a^2) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,z)}{\delta x^4} - \dots$$

Voor vierkante mazen heeft  $a$  de waarde 1, zodat deze term overgaat in:

$$-4 \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,z)}{\delta x^4} - \dots$$

De verwaarlozing in de benadering van een waarde  $\phi(0,z)$  uit de omliggende punten, is een kwart van deze term dus :

$$- \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,z)}{\delta x^4} - \dots \tag{3-28}$$

Ondanks het feit, dat de uitdrukking voor  $\phi$  in het geval I eenvoudig is ten opzichte van die voor de beide andere gevallen, is het partieel differentiëren van deze functie zeer bewerkelijk. Heel veel eenvoudiger is het gebruik te maken van de uitdrukkingen, die in hoofdstuk II zijn gegeven. Zo volgt uit de vergelijkingen (3-7) en (3-9) op blz. 20:

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\delta^4 \Omega}{\delta z^4} \right\}$$

Voor geval I geldt:  $\Omega = \frac{c}{\sqrt{a}} \sqrt{w}$  (zie: (3-18))

Omdat we  $\frac{c}{\sqrt{a}} = C_1$  hebben gesteld is:  $\Omega = C_1 \sqrt{w}$

Zodat:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} &= \operatorname{Re}_E \left\{ C_1 \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} w^{-7/2} \right\} \\ &= -\frac{15}{16} C_1 \cdot \operatorname{Re}_E \left\{ (re^{i\alpha})^{-7/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{en dus } \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = -\frac{15}{16} \cdot C_1 \cdot r^{-7/2} \cdot \cos 7/2 \alpha \quad (3-29)$$

Langs de damwand geldt:  $r = z$  en  $\alpha = 0$

Zodat langs de damwand de vorm (3-29) overgaat in:

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = -\frac{15}{16} \cdot C_1 \cdot z^{-7/2} \quad (3-30)$$

De foutterm (3-23) wordt voor het punt (0,2):

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,2)}{\delta x^4} &= \dots \cong + \frac{1}{24} \cdot \frac{15}{16} \cdot C_1 \cdot 2^{-7/2} \\ &= + \frac{1}{24} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{11,3} \cdot C_1 \\ &= + 0,0035 C_1 \quad (0,35\% \text{ van } C_1) \end{aligned}$$

Dit betekent dat de benaderde waarde  $0,0035 C_1$  lager zal zijn dan de juiste waarde in het punt (0,2). Deze afwijking komt overeen met de waarde, die hiervoor uit het verschil tussen de juiste waarde en de benaderde waarde is gevonden.

Voor het punt (0,3) wordt de foutterm (3-23):

$$\begin{aligned}
 -\frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,3)}{\delta x^4} &\approx + \frac{1}{24} \cdot \frac{15}{16} \cdot C_1 \cdot 3^{-7/2} \\
 &= + \frac{1}{24} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{46,7} \cdot C_1 = + 0,00034 C_1
 \end{aligned}$$

Ook deze waarde komt overeen met het hiervoor bepaalde verschil tussen de juiste waarde en benaderde waarde in het punt (0,3).

Voor het punt (1,1) is eveneens de waarde van  $\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4}$  te bepalen:

$$\frac{\delta^4 \phi(1,1)}{\delta x^4} = - \frac{15}{16} C_1 r^{-\frac{7}{2}} \cos \frac{7}{2} \alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\delta^4 \phi(1,1)}{\delta x^4} = - \frac{15}{16} \cdot 2^{-\frac{7}{4}} \cdot \cos \frac{7\pi}{8} \cdot C_1$$

$$\frac{\delta^4 \phi(1,1)}{\delta x^4} = + 0,253 C_1$$

Uit de foutterm (3-6) volgt, bij deze maasvorm, voor de verwaarlozing in de benadering van  $\phi(x,z)$  uit de waarden van vier omliggende punten, :

$$-\frac{1}{4!} \frac{\delta^4 \phi(x,z)}{\delta x^4} \quad \text{---} \quad (3-31)$$

De waarde van deze term voor punt (1,1) wordt ongeveer:

$$-\frac{1}{24} \cdot 0,253 C_1 = -0,0107 C_1$$

De benaderde waarde zal dus 1,07% van  $C_1$  te hoog zijn.

Laten we dit resultaat toetsen aan de functiewaarden die zijn berekend.

$$\phi(1,1) = \frac{\phi(2,1) + \phi(0,1) + \phi(1,2) + \phi(1,0)}{4} = 0$$

$$= \frac{1,2720 + 1 + 1,4553 + 0,7071}{4} C_1 + C_2 = 1,1036 C_1 + C_2$$

De juiste waarde van  $\phi(1,1)$  is  $1,0986 C_1 + C_2$

De benaderde waarde is dus  $0,0100 C_1$  te hoog, wat overeenkomt met de waarde die uit de foutbeschouwing volgt.

Laten we nu het punt  $(1,-1)$  beschouwen. De waarde van de vierde afgeleide is te bepalen met (3-29):

$$\frac{\delta^4 \phi(1,-1)}{\delta x^4} = - \frac{15}{16} \cdot r^{-\frac{7}{2}} \cdot \cos \frac{7}{2} \alpha \cdot C_1.$$

waarin voor dit punt:  $r = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2}$  en  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$$\text{zodat: } \frac{\delta^4 \phi(1,-1)}{\delta x^4} = - \frac{15}{16} \cdot 2^{-\frac{7}{4}} \cdot \cos \frac{21}{8} \pi \cdot C_1 = - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{3,3636} \cdot -0,3825 = 0,1066 C_1$$

De foutterm (3-31) voor het punt  $(1,-1)$  wordt dus ongeveer:

$$- \frac{1}{4!} \frac{\delta^4 \phi(1,-1)}{\delta x^4} = - \frac{0,1066}{24} C_1 = - 0,0044 C_1$$

De benaderde waarde zal dus  $0,44$  van  $C_1$  te hoog zijn. We kunnen dit resultaat toetsen aan de berekende functiewaarden.

$$\begin{aligned} \phi(1,-1) &= \frac{\phi(2,-1) + \phi(0,-1) + \phi(1,0) + \phi(1,-2)}{4} = \\ &= \frac{0,7862 + 0 + 0,7071 + 0,3436}{4} C_1 + C_2 = 0,4592 C_1 + C_2 \end{aligned}$$

De juiste waarde van  $\phi(1,-1) = 0,4551 C_1 + C_2$ .

De benaderde waarde is dus  $0,0041 C_1$  te hoog, wat overeenkomt met de waarde die uit de foutbeschouwing volgt.

Uit vergelijking (3-29) blijkt dat de waarde van de vierde afgeleide evenredig is met  $r^{-\frac{7}{2}}$ . Uit de uitdrukking (3-31) volgt dat de foutterm o.a. afhankelijk is van de waarde van de vierde afgeleide en van de waarde  $\Delta^4$  ( $\Delta$  is de maaswijdte). Bij een verfijning van de maaswijdte met een factor 2, wordt de waarde van de foutterm in een bepaald punt ruwweg met een factor  $2^4 = 16$  gereduceerd. Hierbij laten we de invloed van de termen van achtste en hogere orde even buiten beschouwing.



Laten we het punt J beschouwen, dat op een afstand  $\Delta$  van S ligt (zie: fig. 44). Bij een maaswijdte-verfijning met een factor 2, komen een aantal knooppunten van

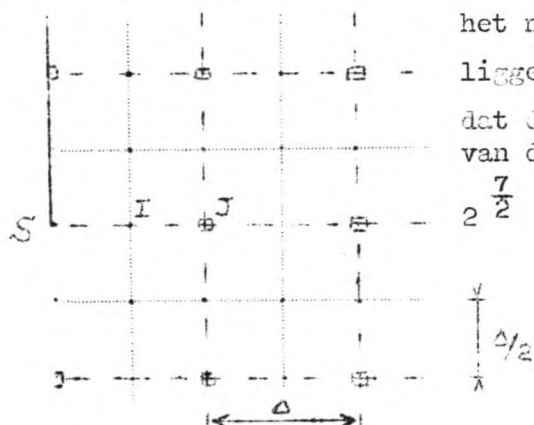


fig. 44

het nieuwe netwerk dichtter bij het punt S te liggen. Voor een punt I midden tussen S en J, dat dus ligt op een afstand  $\frac{\Delta}{2}$  van S; is de waarde van de vierde afgeleide :

$2^{\frac{7}{2}}$  maal deze waarde in het punt J.

De waarde van de foutterm (3-31) wordt voor het punt I dus ruwweg  $\frac{2^{\frac{7}{2}}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  maal de waarde van deze term in het punt J, bij het oorspronkelijke netwerk met maaswijdte  $\Delta$ .

Uit deze zeer globale beschouwing kan worden geconcludeerd dat, bij het toepassen van een maaswijdte-verfijning in de omgeving van een singulier punt, de grootte van de verwaarlozing, die plaatselijk wordt ingevoerd, relatief langzaam afneemt. Op blz. 94 is het toetsprobleem besproken, dat is gekozen voor dit gedeelte van het onderzoek. Voor dit probleem zijn, zoals gezegd (zie: blz. 95), in vier verschillende continue modellen oplossingen bepaald. De resultaten van deze metingen zijn gegeven op bijlage 17 t/m 20. Uit deze resultaten is de oplossing bepaald die op bijlage 21 is gegeven en waaraan een redelijke nauwkeurigheid mag worden toegekend. Voor dit toetsprobleem is een weerstandnetwerkmodel ontworpen, zoals reeds op blz. 95 is besproken. Volgens dit ontwerp zijn uit een hoeveelheid weerstanden achtereenvolgens, op een willekeurige wijze, drie weerstandnetwerkmodellen gebouwd. De oplossingen, die met deze modellen zijn gemeten, zijn verzameld op de bijlagen 22 t/m 24. Vergelijken we deze resultaten onderling, dan blijkt dat de grootste afwijkingen liggen in de orde van de afleesnauwkeurigheid (zie: III-4-1). De oplossing, verkregen met één der weerstandnetwerkmodellen, verschilt behoorlijk van de vrij nauwkeurige oplossing, die is verkregen m.b.v. de continue modellen. Vervolgens is in een weerstandnetwerkmodel een oplossing van ditzelfde probleem bepaald, waarbij één der in het voorgaande aangegeven mogelijkheden is uitgevoerd. In dit model zijn twee weerstanden met afwijkende waarden aangebracht. De weerstanden, die overeenkomen met  $R_{L-S}$  en  $R_{J-S}$  uit de beschouwing op blz. 106, hebben een waarde gekregen resp. gelijk aan  $3,3R_0$  en  $1,6R_0$ . De oplossing, die nu is verkregen, is op bijlage 25 gegeven.

Vergelijken we deze oplossing met de oplossing van bijlage 21, dan blijkt dat de verschillen gering zijn.

Uit deze resultaten is te concluderen dat het toepassen van enige afwijkende weerstandswaarden, in de directe omgeving van het singuliere punt S, een gunstige invloed heeft op de functieverdeling.

De waarde van deze afwijkende elementen is onafhankelijk van de ligging der overige grenzen.

Ook is nog nagegaan welke invloed de afwijkende weerstandselementen hebben op de totale stroom. In een weerstandnetwerkmodel is de totale stroom eenvoudig te bepalen uit de spanningsverschillen over de bekende weerstandselementen, die aansluiten op een rand (equipotentiaallijn).

Uit de resultaten van de netwerkmodellen, volgens het ontwerp, is de totale stroom bepaald:

243 eenheden.

Uit de resultaten van bijlage 25 (dus m.b.v. een model met twee afwijkende elementen) is eveneens de totale stroom bepaald:

239 eenheden.

Daarna zijn, in drie verschillende continue modellen, de totale stromen bepaald in dezelfde eenheden. Achtereenvolgens is gemeten:

237 eenheden.

231 " .

243 " .

Uit deze laatste resultaten blijkt de spreiding, die kan optreden (zie onder II-5). Rekening houdende met dit feit, mag toch worden geconcludeerd dat de totale stroom, door het aanbrengen van afwijkende elementen, eveneens gunstig wordt beïnvloed.

Het is aannemelijk dat, ook in andere gevallen van een singulier punt, een benadering mogelijk is, die overeenkomt met de benadering die in dit toetsprobleem is gevolgd.

### III - 4. Enige richtlijnen voor het ontwerpen en bouwen van een weerstandnetwerk-model.

#### III-4-1. De mogelijke fouten.

Het oplossen van grondwaterproblemen met behulp van een weerstandnetwerkmodel zal geschieden met een bepaalde nauwkeurigheid.

De factoren die deze nauwkeurigheid ongunstig beïnvloeden, kunnen als volgt worden onderscheiden:

- a) vergissingen;
- b) meetfouten;
- c) fouten, die veroorzaakt worden door afwijkingen in de waarden van de weerstandselementen;
- d) fouten, die worden gemaakt bij het verwerken van resultaten;
- e) fouten, die veroorzaakt worden door het discretiseren.

ad a. Hoewel deze factor voor de hand ligt, willen we er, juist omdat het gaat om een analoge modelmethode, even bij stil staan.

Men moet zorgen voor een goede communicatie tussen:

- degene die het probleem stelt;
- degene die het model ontwerpt;
- degene die de metingen verricht.

Wordt aan deze voorwaarde voldaan dan is de kans op dergelijke fouten sterk verkleind.

ad b. Zoals in hoofdstuk II is gezegd, is één van de voordelen van het gebruik van elektrische modellen de grote nauwkeurigheid waarmee kan worden gemeten.

Men kan onderscheid maken tussen het meten van spanningen en het meten van stromen. Echter bij een weerstandnetwerk zal het meten van stromen steeds geschieden door het bepalen van het spanningsverschil over een weerstandselement, waarvan de waarde bekend is.

In het algemeen is de nauwkeurigheid van een meting afhankelijk van twee factoren:

- 1e. de nauwkeurigheid van de apparatuur die wordt gebruikt;
- 2e. de mate waarin verstoring als gevolg van het meten kan worden beperkt.

ad 1e. De nauwkeurigheid is voor verschillende typen meters niet gelijk en varieert bovendien bij een bepaald type meter met het ingestelde meetbereik.

ad 2e. De invloed van deze factor kan in grote mate worden beperkt. Het gaat er, bij het meten van spanningen, om de verhouding tussen de ingangsweerstand van de meetapparatuur en de weerstand van het model voldoende groot te kiezen.

Men kan verder onderscheid maken in het meten van gelijkspanningen en het meten van wisselspanningen.

Het meten van gelijkspanningen kan zeer nauwkeurig geschieden als dit in een z.g. compensatieschakeling plaatsvindt.

Men vergelijkt daarbij de te meten spanning met een (uitwendige) nauwkeurig regelbare spanning.

Op het moment dat deze bekende spanning gelijk is aan de te meten spanning, is de stroom nul (indicatie), zodat van verstoring geen sprake is.

Het meten van wisselspanningen geschiedt door deze, via versterkers, door een bepaald instrument te laten registreren.

Hiervoor kan een elektronen-oscilloscope of een recorder worden gebruikt.

Sinds kort zijn voor dit doel U(ltra) - V(iolet)- recorders in de handel, die het b.v. mogelijk maken 12 verschillende spanningen gelijktijdig te registreren.

Door de ingangsweerstand van de versterkers voldoende groot te kiezen, is beïnvloeding van het model geheel te voorkomen.

De nauwkeurigheid bij het meten is zeer hoog op te voeren. Hierbij is de deskundigheid, waarmee de meetopstelling wordt ontworpen, natuurlijk zeer belangrijk. Een andere belangrijke factor is echter de hoedanigheid van de beschikbare apparatuur. Volgens Liebmann kan, in bepaalde gevallen, de nauwkeurigheid met zeer goede apparatuur 1:50.000 (0,002%) bedragen, terwijl een meetfout beneden 0,01% zeer goed is te verwezenlijken (zie: [20] blz. 352).

Tijdens dit onderzoek zijn, met betrekkelijk eenvoudige apparatuur, enige metingen verricht in een compensatieschakeling.

Dat op deze wijze een grote nauwkeurigheid mogelijk is, moge uit de volgende resultaten blijken.

In een van de voorgaande gedeelten van dit hoofdstuk is sprake van de fout in een punt als dit, in een netwerk bestaande uit vierkante mazen, verbonden is met vier omliggende punten waarin de functiewaarde juist (bekend) is.

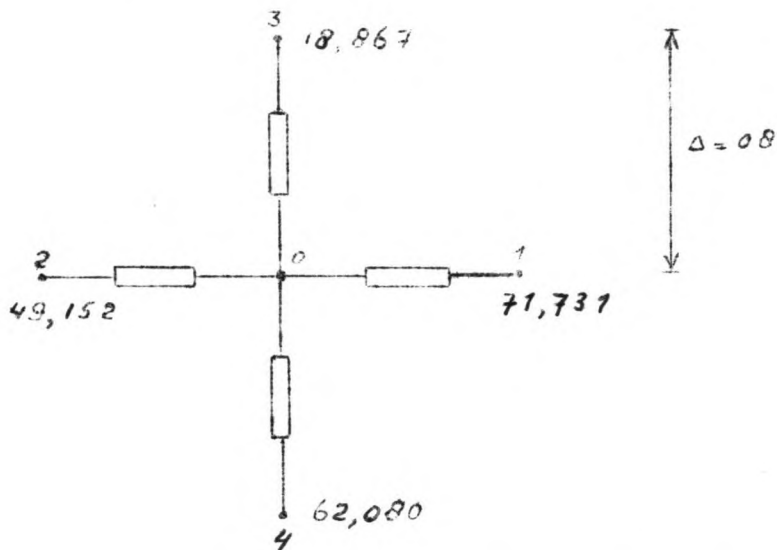
Het toetsen van de verschillende beschouwingen in een probleem heeft plaatsgevonden door berekeningen. Aan deze wijze van toetsen is de voorkeur gegeven, omdat zo alle fouten uitgesloten worden, die anders dan door het discretiseren worden veroorzaakt.

Als we de nauwkeurigheid van een meting willen vaststellen dan moeten de fouten, door andere factoren veroorzaakt, bekend zijn of worden uitgesloten.

We zullen uitgaan van een geval, waarbij de fout tengevolge van het discretiseren bekend is.

In een veld met een bekende potentiaalfunctie, waarin de waarde van de vierde afgeleide constant is (zie: hoofdstuk III - 2-2), is in vijf punten de waarde van deze

functie met een vrij grote nauwkeurigheid bepaald. De maaswijdte is 0,8.  
De waarden zijn in onderstaande figuur aangegeven.



Allereerst zijn met enige zorg 4 weerstandselementen gekozen, waarvan het onderlinge verschil maximaal 0,02% bedraagt. Deze zijn volgens bovenstaande figuur met elkaar verbonden.

De bij de punten 1, 2, 3 en 4 aangegeven waarden zijn in de vorm van elektrische spanningen op de overeenkomstige punten aangebracht. Dit aanbrengen geschiedt m.b.v. een nauwkeurige spanningsdeler en is eveneens een kwestie van nauwkeurig meten. In het punt 0 is de spanning gemeten: 50,458.

Het gemiddelde van de waarden in de punten 1 t/m 4 is:

$$\frac{71,731 + 49,152 + 18,867 + 62,080}{4} = 50,458$$

Deze waarde is gelijk aan de gemeten waarde.

De juiste waarde van de functie in het punt 0 is 50,048. Het verschil met de benaderde waarde is dus 0,410, wat overeenkomt met de waarde van de foutterm die behoort bij een maaswijdte  $\Delta = 0,3$  (zie: onder III-2-2).

Uit deze resultaten blijkt dat in een elektrisch analogon de nauwkeurigheid van de oplossing niet ongunstig door het meten hoeft te worden beïnvloed.

ad. c. Een netwerk wordt samengesteld uit een groot aantal weerstandselementen. Deze zijn verkrijgbaar in een bepaalde reeks van waarden. Een weerstand heeft een waarde, die meestal enigszins afwijkt van de waarde, die daarop in een kleurencode is aangegeven. De afwijking ligt binnen een gebied van 2 maal de z.g. tolerantie, die eveneens op de weerstand is aangegeven.

Een weerstand  $1000 \Omega$  5% kan dus een waarde hebben, die varieert tussen  $950 \Omega$  en  $1050 \Omega$ .

Het is heel vaak zo dat, van een bepaalde partij weerstanden, de afwijkingen enigszins gelijk gericht zijn.

Tijdens het onderzoek zijn uit een grote hoeveelheid weerstanden 1000  $\Omega$ . 5% 140 stuks gemeten. Op bijlage 26 is de verdeling van weerstandswaarden getekend, waaruit blijkt dat deze enigszins met een z.g. Normale Verdeling overeenkomt. Omdat de weerstandswaarden variëren, is het mogelijk dat hierdoor afwijkingen in de spanningsverdeling kunnen optreden.

Liebmann heeft er in verschillende publicaties op gewezen, dat de invloed van deze variaties, in de praktijk van het meten met een netwerkmodel, meestal verwaarloosbaar klein is (zie: o.a. [20] blz. 352).

Tijdens het onderzoek zijn aan drie weerstandsnetwerken, samengesteld uit verschillende elementen, metingen verricht (zie: III-3-2). Vergelijken we de resultaten van de bijlagen 22, 23 en 24, dan blijkt dat de maximale verschillen liggen in de orde van de meetnauwkeurigheid. Liebmann geeft een foutbeschouwing, die o.a. gebaseerd is op het feit, dat een willekeurig aantal weerstanden een statistische verdeling zal hebben. Het is duidelijk, dat in een bepaald geval de vorm van het stroombeeld van invloed zal zijn. In de genoemde beschouwing is dan ook de spanningsgradiënt in een bepaald punt in rekening gebracht. Aan de hand van metingen is de beschouwing getoetst.

Uit de beschouwing blijkt dat de fout in de spanningen, die we in de praktijk zullen mogen verwachten, bij gebruik van 0,1% weerstanden, zal variëren van 0,01% tot 0,001% (zie: [20] blz. 353).

De geringe invloed van de afwijkingen, in de weerstandswaarden, op de spanningsverdeling, is een gevolg van het grote aantal weerstanden dat in het netwerk wordt gecombineerd.

Ter illustratie van de invloed van een afwijking, in waarde van een weerstandselement in een netwerk, kan nog het volgende worden opgemerkt. In het voorgaande is sprake van een toetsprobleem (zie: III.3.2). Teneinde de potentiaalverdeling in de omgeving van het singuliere punt S te beïnvloeden, zijn weerstandselementen met een afwijkende waarde toegepast.

Door twee weerstanden in eenzelfde knooppunt een waarde te geven, die ca. 50% afwijkt, varieert in de knooppunten de potentiaal maximaal  $\frac{26}{122} = \text{ca. } 20\%$  van het verschil tussen de waarden in twee punten. In punten op enige afstand is de grootte van de verandering veel kleiner. Daarbij is het duidelijk, dat afwijkingen in weerstandswaarden in de omgeving van S in dit geval relatief de grootste invloed zal hebben, omdat daar de spanningsgradiënten maximaal zijn.

Het is eenvoudig om zekerheid te krijgen omtrent het feit of in een bepaald geval de tolerantie van de weerstanden enige merkbare invloed heeft.

Vervangt men n.l. in een gebied met de grootste spanningsgradiënten een weerstandselement door een element met een waarde, die enigszins ( $\approx$  de tolerantie) afwijkt dan is eenvoudig de invloed hiervan te constateren.

Is de afwijking in de spanning van een punt in de omgeving, lager dan de nauwkeurigheid die wordt geeist, dan is het zeker dat de "tolerantie fouten" niet maatgevend zijn. De afwijking in de andere punten, t.g.v. deze verandering, is geringer. Krijgt een weerstandselement, dat zich bevindt in een gebied waarin de gradiënten kleiner zijn, een iets afwijkende waarde dan is de invloed daarvan geringer.

Hoewel in een weerstandnetwerkmodel het aantal weerstanden groot is, zullen de kosten hiervan een klein gedeelte van de totale kosten zijn. Men zal dus, mede gezien de algemene bruikbaarheid van het model, uitgaan van een nauwkeurig type weerstanden, dat nog gemakkelijk verkrijgbaar is.

ad. d. Het verwerken van de door meting verkregen resultaten, zal met een bepaalde nauwkeurigheid geschieden. Wil men b.v. in een permanente stromingstoestand een aantal equipotentiaallijnen tekenen, dan moet op een of andere wijze worden geïnterpoleerd, omdat de waarde van de functie slechts op de knooppunten is te meten. De vraag is op welke wijze deze interpolatie uit te voeren en wat daarbij de nauwkeurigheid is.

Volgens Liebmann (zie: [19] blz. 98) wordt bij het lineair interpoleren tussen vier knooppunten met behulp van een potentiometer brug (zie: fig. 45b) een nauwkeurigheid verkregen die groter is dan  $1/15$  van de maaswijdte  $\Delta$ .

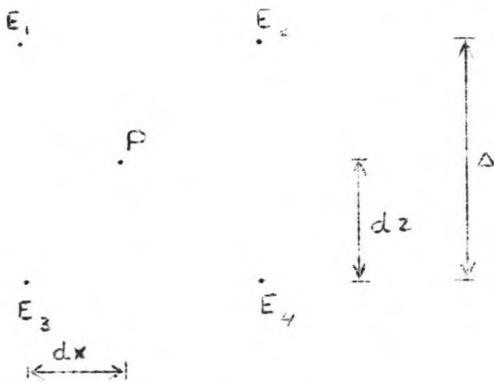


fig. 45<sup>a</sup>

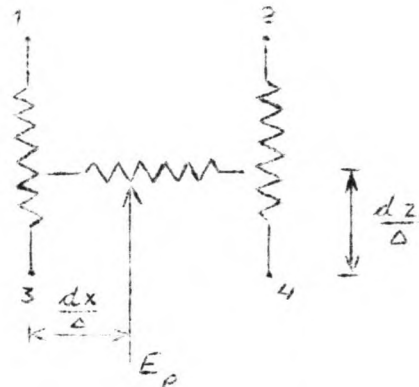


fig. 45<sup>b</sup>

Een ander voorbeeld is de nauwkeurigheid bij het registreren van de meetresultaten.

Men kan dit type fouten eventueel ook bij de meetfouten rekenen.

ad. e. In de voorgaande gedeelten van dit hoofdstuk is duidelijk geworden, dat door het discretiseren fouten kunnen worden ingevoerd.

Er is onderscheid gemaakt in de discretisering in het inwendige en de discretisering aan de randen, van een twee-dimensionaal veld. Daarbij is gesteld dat de randen steeds bijzondere aandacht verdienen.

Het is duidelijk dat het, in een willekeurig geval, niet mogelijk is de fouten t.g.v. het discretiseren zonder meer uit te drukken. Daarvoor zijn deze fouten van te veel factoren afhankelijk. In het volgende zal over de mate van discretiseren, in verband met de mogelijke fout die wordt veroorzaakt, meer worden gezegd.

Bij het ontwerpen van een weerstandnetwerkmodel zal men uitgaan van een bepaalde "over-all" nauwkeurigheid. Deze zal worden vastgesteld in verhouding met de grootheden van de problemen die men wil oplossen.

De toelaatbare waarden van de verschillende mogelijke fouten zullen in onderlinge relatie met elkaar en in relatie met de vereiste uiteindelijke nauwkeurigheid in de resultaten worden bepaald.



III. 4.2. De mate van discretiseren.

Eén van de belangrijkste vragen bij dit onderzoek is geweest: wat de vorm van de mazen zou moeten of mogen zijn.

We hebben op deze vraag een antwoord verkregen in de vorm van een vergelijkende foutbeschouwing.

Een antwoord op de vraag hoe groot de mazen mogen zijn, is niet zonder meer te geven.

Achtereenvolgens kunnen de volgende factoren worden onderscheiden, die in een weerstandnetwerkmodel de grootte van de mazen zullen beïnvloeden:

- a) De vorm van de mazen.
- b) Het bestaan van vierde en hogere partiële afgeleiden van de functie in een gebied.
- c) De grootte van het gebied waarin de hogere partiële afgeleiden bestaan.
- d) De invloed van de randen.
- e) De aanwezigheid van singulariteiten.
- f) Praktische argumenten.

ad. a. Hierover is reeds veel gezegd. In het overzicht aan het einde van III.2.1 zijn de fouttermen, die bij de verschillende maasvormen behoren, verzameld.

ad b. Om in een bepaald gebied iets over de maaswijde te kunnen zeggen, moeten de waarden van de vierde en hogere afgeleiden bekend zijn. Dit terwijl de functie onbekend is. In bepaalde gevallen is het mogelijk om in een netwerk de grootte van de vierde afgeleide te schatten (zie: fig. 46).

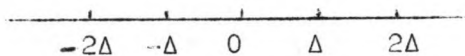


fig. 46

We weten dat in een punt (0) de tweede afgeleide kan worden benaderd met:

$$\frac{d^2\phi(0)}{dx^2} \approx \frac{\phi(\Delta) + \phi(-\Delta) - 2\phi(0)}{\Delta^2} \quad (3-32)$$

Zo is ook:

$$\frac{d^2\phi(\Delta)}{dx^2} \approx \frac{\phi(0) + \phi(2\Delta) - 2\phi(\Delta)}{\Delta^2} \quad (3-33)$$

En ook:

$$\frac{d^2\phi(-\Delta)}{dx^2} \approx \frac{\phi(0) + \phi(-2\Delta) - 2\phi(-\Delta)}{\Delta^2} \quad (3-34)$$

Met de uitdrukkingen (3-32) en (3-33) is het mogelijk de derde afgeleide, in het punt midden tussen 0 en  $\Delta$ , te benaderen:

$$\frac{d^3\phi(\frac{\Delta}{2})}{dx^3} \approx \frac{\frac{d^2\phi(0)}{dx^2} - \frac{d^2\phi(\Delta)}{dx^2}}{\Delta} \approx \frac{3\phi(\Delta) - 3\phi(0) - \phi(2\Delta) + \phi(-\Delta)}{\Delta^3} \quad (3-35)$$

En zo is met de uitdrukkingen (3-32) en (3-34):

$$\frac{d^3\phi(\frac{\Delta}{2})}{dx^3} \approx \frac{\frac{d^2\phi(-\Delta)}{dx^2} - \frac{d^2\phi(-0)}{dx^2}}{\Delta} \approx \frac{3\phi(0) - 3\phi(\Delta) - \phi(\Delta) + \phi(-2\Delta)}{\Delta^3} \quad (3-36)$$

Met de uitdrukkingen (3-35) en (3-36) is het vervolgens mogelijk de vierde afgeleide in het punt 0 te benaderen:

$$\frac{d^4\phi(0)}{dx^4} \approx \frac{\frac{d^3\phi(\frac{\Delta}{2})}{dx^3} - \frac{d^3\phi(\frac{\Delta}{2})}{dx^3}}{\Delta} \approx \frac{\phi(-2\Delta) - 4\phi(-\Delta) + 6\phi(0) - 4\phi(\Delta) + \phi(2\Delta)}{\Delta^4} \quad (3-37)$$

Als we dus in een netwerk beschikken over de waarde van de functie in vijf punten gelegen op een rechte lijn, waarbij de tussenafstanden  $\Delta$  zijn, dan is de waarde van de vierde afgeleide in het middenste punt te schatten met de uitdrukking (3-37).

Bij vierkante mazen is de foutterm (2-11) afgeleid:

$$-\frac{\Delta^4}{24} \frac{\delta^4\phi(0)}{\delta x^4} - \dots$$

Als we hierin de schatting voor de vierde afgeleide substitueren dan krijgen we:

$$-\frac{\phi(-2\Delta) - 4\phi(-\Delta) + 6\phi(0) - 4\phi(\Delta) + \phi(2\Delta)}{24} \quad (3-38)$$

Dit is dus een schatting van de term die bij de benadering in het netwerk in de vergelijking in het punt (0,0) wordt verwaarloosd.

Het is dus denkbaar dat in een netwerk in een bepaald gebied een dergelijke schatting wordt gemaakt en op grond van de uitkomst al of niet wordt besloten tot maatregelen over te gaan.

Een andere mogelijkheid om de invloed van het discretiseren te constateren is het volgende.

Laten we stellen dat een model is gemaakt, waarvan de maaswijdte  $\Delta$  is, en dat daarin een oplossing wordt bepaald. Door nu bij een andere maaswijdte een oplossing te bepalen, is de invloed van de hogere orde termen vast te stellen. Het is hierbij niet noodzakelijk in het gehele model een andere maaswijdte toe te passen. Men kan volstaan met een gedeelte van het gebied, waarin men invloed van de hogere afgeleiden verwacht. Ook is het mogelijk om een tweede oplossing te bepalen met het model, waarbij in een gedeelte de vorm van de mazen is veranderd. (b.v. diagonalen toegevoegd).

ad. c. Voor de fouten, die we kunnen verwachten, is in de eerste plaats de verwaarlozing bij de benadering in een punt bepalend. Echter ook het aantal punten, waarin van een verwaarlozing sprake is, is van invloed op de grootten van de uiteindelijke fouten.

In III-2-2. hebben we gezien dat de afwijkingen toenemen met het aantal knooppunten, waarin van een verwaarlozing sprake is. We hebben een indruk gekregen van de wijze waarop dit geschiedt.

Men moet er in een algemeen geval rekening mee houden dat, bij een gebied waarin van een afwijking sprake is, de absolute fouten een veelvoud van de foutterm in een punt zullen bedragen.

ad. d. De beschouwing voor de verwaarlozing in punten nabij de rand vertoont veel overeenkomst met die, voor de verwaarlozing in punten gelegen in het inwendige. Een verschil is dat door het aanpassen van het netwerk aan de vorm van de rand, in een knooppunt de symmetrie meestal ontbreekt, waardoor de foutterm een andere gedaante krijgt.

In de eerste plaats moet men er voor zorgen dat de aanpassing van het netwerk aan de rand zo goed mogelijk geschiedt. Dit kan geschieden door een geometrische interpretatie van het gebied in wat we een fysische benadering hebben genoemd. Daarna kan in elk punt desgewenst een foutbeschouwing worden opgezet, in wat we een wiskundige benadering hebben genoemd. Dit geeft een term voor de verwaarlozing in een bepaald punt.

Een moeilijkheid is weer dat de invloed van de verwaarlozing in een punt, op de afwijkingen in de functiewaarden, afhankelijk is van de verhoudingen in een bepaald geval.

Een bijzondere benadering wordt geëist, in het geval op de rand een singulariteit voorkomt. Daarom is deze factor, die voor de fouten t.g.v. de discretisering van groot belang kan zijn, apart genoemd.

ad. e. Als op de rand een singulariteit voorkomt, dan is men genoodzaakt een bijzondere benadering te volgen.

In het toetsprobleem in III.3.2 is sprake van een singulier punt. Om de fouten tengevolge van de discretisering te beperken, is een geheel afwijkende benadering gevolgd. Daarbij is het netwerk in de onmiddellijke omgeving van het punt zodanig aangepast, dat in theoretisch benaderbare gevallen een juiste functieverloop wordt verkregen. Daarna is aangenomen dat in gevallen, waarbij enige van de overige grenzen w.b. ligging of vorm zullen veranderen, dit geen bepalende invloed op de functie in de directe omgeving van het singuliere punt zal hebben. In het toetsprobleem blijkt dat de aangebrachte aanpassing een zeer gunstig effect heeft op het verloop van de functie  $\phi$  in het gebied. Hoewel dit nog nader moet worden onderzocht, zal deze aanpassing ook de grootte van de stromen zeer gunstig beïnvloeden. Het is aannemelijk dat, in een ander geval van een singulier punt, een benadering kan worden gevolgd, die overeenkomt met de benadering in het behandelde toetsprobleem.

ad. f. Het is mogelijk dat de maaswijdte plaatselijk om praktische redenen kleiner moet worden gekozen. Een voorbeeld hiervan is een geval, waarin men over een aantal meetpunten (knooppunten) wil beschikken, die op een geringe afstand van elkaar liggen.

Ook is het mogelijk dat plaatselijk op een fijnere maasverdeling moet worden overgegaan, omdat een inhomogeniteit in model moet worden gebracht, waarvan de afmetingen gering zijn.

Als de invloed van de hogere orde termen in een bepaald gebied bekend is, dan kan worden beoordeeld of deze te groot is. Teneinde de door het discretiseren veroorzaakte fout te beperken staan ons in principe 4 mogelijkheden ten dienste:

- 1e. Het invoeren van een stroom, die de invloed van de foutterm opheft.
- 2e. Het gebruik van een extrapolatieformule.
- 3e. Het overgaan op een fijnere maasverdeling.
- 4e. Het overgaan op een nauwkeuriger maasvorm.

ad. 1e. Als in een bepaald punt de term, die bij de benadering in het weerstand-netwerk verwaarloosd wordt, bekend is, dan is het mogelijk een stroom op het knooppunt in te voeren, die hieraan gelijk is. Dit is equivalent aan het superponeren van een correctiefunctie in de Relaxatie-techniek, zoals dit door Fox is voorgesteld. Hoewel in principe mogelijk is de uitvoering van deze methode in een netwerk niet eenvoudig. In een niet-permanente stromingstoestand zal de grootte van de in te voeren stroom eventueel in de tijd moeten variëren. Deze methode lijkt voor een algemeen bruikbaar netwerk niet een oplossing, die praktisch de voorkeur verdient.

ad. 2e. Een mogelijk<sup>heid</sup> om de invloed van de discretisering te constateren, is het achtereenvolgens bepalen van twee oplossingen. Stel dat een probleem is gemeten in een model, waarin de maaswijdte  $\Delta$  is. Laten we de functiewaarde in een bepaald punt, die met deze meting wordt verkregen,  $\phi_{\Delta}$  noemen. Door in het model de maaswijdte een factor 2 te reduceren, is het mogelijk dezelfde functiewaarde weer te benaderen. Laten we deze waarde  $\phi_{\frac{\Delta}{2}}$  noemen. Door de beide waarden  $\phi_{\Delta}$  en  $\phi_{\frac{\Delta}{2}}$  te vergelijken, kunnen we concluderen of de termen met van vierde en hogere orde een rol spelen in het veld. Het is tevens mogelijk, om met een extrapolatieformule volgens Richardson (zie: [23]), met deze twee waarden een benadering te bepalen, die nauwkeuriger is. De waarde die wordt bepaald, ligt in de buurt van die waarde, die met een meting in een netwerk, waarvan de maaswijdte nog eens met een factor 2 gereduceerd is, zou worden verkregen.

Volgens Richardson geldt:

$$\phi_{\frac{\Delta}{4}} \approx \phi_{\frac{\Delta}{2}} - \frac{1}{3} (\phi_{\Delta} - \phi_{\frac{\Delta}{2}}) \quad (3-39)$$

Laten we deze regel toetsen aan een bekende potentiaalverdeling.

Onder III.2.2 is voor de potentiaalfunctie  $\phi = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ , in een groot aantal punten, de functiewaarde bepaald.

Voor dit bijzondere veld is, voor verschillende maaswijdten, de afwijking in een punt bepaald, als gevolg van de discretisering, in het geval de functiewaarde in de omringende punten juist is. Ook is hierbij aangegeven hoe groot de afwijkingen in verschillende punten worden, in het geval van een netwerk met een toenemend aantal knooppunten sprake is. We zullen hier enige uitkomsten resumeren.

De afwijking voor het punt in het centrum van een netwerk is in dat bijzonder geval:

- bij één onbekende  $\delta$  ,
- " negen onbekenden 4,5 $\delta$  ,
- " negen en veertig onbekenden  $\approx 19\delta$  .

De waarde  $\delta$  is bij deze potentiaalfunctie achtereenvolgens :

bij een maaswijdte 0,8  $\rightarrow$  0,4096

" " " 0,4  $\rightarrow$  0,0256

" " " 0,2  $\rightarrow$  0,0016

Laten we de eerste benadering van de functie in het punt (1,8 , 0,8) (zie bijlage 6 ) uitvoeren bij een maaswijdte  $\Delta = 0,8$ . Het netwerk bestaat dan uit slechts vier mazen met één onbekende. De afwijking van de juiste waarde is dus 0,4096.

Laten we vervolgens de maaswijdte 0,4 nemen en de functiewaarde voor het punt  $\emptyset(1,8 , 0,8)$  weer benaderen. Dit netwerk bestaat uit 16 mazen en bevat 9 knooppunten, waarin de functie onbekend is.

De afwijking van de juiste waarde is voor het punt (1,8 , 0,9) in het centrum:

$$4,5 \cdot 0,0256 = 0,1152.$$

We kunnen nu de orde van grootte bepalen van de afwijking, die we kunnen verwachten wanneer we een netwerk zouden kiezen, met een maaswijdte die nogmaals met een factor 2 is gereduceerd. Immers we kunnen de formule (2-39) gebruiken voor de volgende uitdrukking:

$$\epsilon_{\frac{\Delta}{4}} = \epsilon_{\frac{\Delta}{2}} - 1/3 (\epsilon_{\Delta} - \epsilon_{\frac{\Delta}{2}})$$

$$\epsilon_{\frac{\Delta}{4}} = 0,1152 - 1/3 (0,4096 - 0,1152) = \underline{0,0271}.$$

Onder III.2.2 is de afwijking voor het punt (1,8 , 0,9) in het centrum van een netwerk (met maaswijdte  $\Delta = 0,2$ ), waarbij het aantal mazen 64 en het aantal onbekenden 49 is, bepaald op ongeveer 19 $\delta$ .

Dit wordt dus 19. 0,0016 = 0,0304.

Hieruit blijkt dus dat de afwijking, die met behulp van de extrapolatieformule is verkregen, ongeveer gelijk is aan de afwijking verkregen bij de benadering met een netwerk, waarvan de maaswijdte nogmaals met een factor 2 is gereduceerd.

ad. 3e. Een mogelijkheid, die in het voorgaande reeds enige malen is genoemd, is het overgaan op een fijnere maasverdeling. Is de invloed van de hogere orde termen bekend, dan kan tot een bepaalde maaswijdte worden besloten. De grootte van de fouten, die kunnen worden verwacht, is niet zonder meer vast te stellen. Deze is mede afhankelijk van de verhoudingen en van het stroombeeld in het model.

De verwaarlozing in een punt is evenredig met  $\Delta^4$ . Echter toename van het aantal punten, waarin een verwaarlozing plaatsvindt, geeft een toename van de fout in de functiewaarden (zie onder III-2-2). Met dit feit moet steeds rekening worden gehouden.

Het is mogelijk, in een gedeelte van het model, een andere maaswijdte te kiezen. De overgang tussen gebieden met verschillende maaswijdte zal in het volgende worden besproken.

ad. 4e. Als de invloed van hogere orde termen bekend is, dan kan worden overwogen of het overgaan op een maasvorm met een grotere nauwkeurigheid zin heeft. Zoals we hebben gezien kan het toepassen van mazen in de vorm van vierkanten, waaraan diagonalen zijn toegevoegd, een sterke reductie van de foutterm geven (vergelijk (2-29) met (2-11)). De waarden van de elementen in de diagonalen moet viermaal zo groot gekozen worden als de waarden van de elementen in de zijden van de vierkanten. Hierbij moet worden opgemerkt dat beide waarden verschillen van de vierkantsweerstand van het netwerk. Het is mogelijk een gedeelte van het model in deze nauwkeurige maasvorm uit te voeren. De overgang, tussen een gebied met vierkante mazen en een gebied met vierkanten, van dezelfde grootte, waaraan diagonalen zijn toegevoegd, wordt in het volgende besproken.

### III.4.3. Overgang bij verschillende maasvormen.

Zoals uit het voorgaande is af te leiden, zullen in een weerstandnetwerkmodel gebieden met verschillende maasvormen kunnen voorkomen. We zullen in enige gevallen de overgang tussen deze gebieden beschouwen. Het principe van de overgang op een andere maaswijdte, werd geïntroduceerd door Southwell, bij de beschrijving van de relaxatiemethode voor de oplossing van de vergelijking van Laplace.

Bij een weerstandnetwerk kunnen de waarden van de elementen in de overgangszône met behulp van een fysische beschouwing worden bepaald. De gedachte die de grondslag vormt van deze beschouwing is de volgende:

Als het stroombeeld van stromingen in twee onderling loodrecht op elkaar staande richtingen niet wordt verstoord, dan wordt elk ander stroombeeld ook niet verstoord.

De overgang tussen twee gebieden met vierkante mazen waarvan de verhouding in de maaswijdte 1:2 is ( $\Delta : 2\Delta$ ).

Uit verschillende beschouwingen blijkt dat een overgang zoals op bijlage 27 is getekend, het meest eenvoudig is.

De waarde van de elementen is bij vierkante mazen  $R_0$ . Het gaat er nu om de waarden van de elementen in de lijnen, die gestippeld zijn aangegeven te bepalen.

Stroming in de positieve x-richting (zie: bijlage 27 fig. 1):

Alle lijnen in de z-richting zijn equipotentiaallijnen. De stroom door een stroombuis in het fijne netwerk met een breedte  $\Delta$  noemen we  $i$ . De waarde van de elementen is  $R_0$  zodat de gradiënt voor deze stroming  $\frac{iR_0}{\Delta}$  is. In het punt A zal de stroom  $i$  zich in twee even grote componenten  $\frac{1}{2} i$ , via de diagonalen naar de punten B en C, verdelen. Het verschil in potentiaal tussen B of C en A is:

$$\frac{iR_0}{\Delta} \cdot \Delta = iR_0$$

De waarde van de elementen  $R_{A-B}$  en  $R_{A-C}$  volgt nu uit:

$$\frac{i}{2} \cdot R_{A-B} = \frac{i}{2} R_{A-C} = i R_0$$

Zodat  $R_{A-B} = R_{A-C} = 2 R_0$ .

In fig. 1 is aangegeven hoe de stroomverdeling plaatsvindt.



Stroming in de negatieve z-richting (zie: bijlage 27 fig. 2):

Eenzelfde beschouwing voor deze stroming geeft dat de waarde van de weerstandselementen  $R_{E-F}$  en  $R_{E-G}$  kunnen worden bepaald uit:

$$\frac{i}{2} R_{E-F} = \frac{i}{2} R_{E-G} = i R_{\square}.$$

Zodat  $R_{E-F} = R_{E-G} = 2 R_{\square}.$

De stroomverdeling is aangegeven in fig. 2.

Nu de waarde van de elementen in de diagonalen bekend is, kunnen de waarden van de elementen, aan randen van de grove maasverdeling, worden bepaald door te letten op de stroomverdeling in de beide gevallen. Laten we eerst de stroming van figuur 2 beschouwen. Door een weerstand  $R_{C-D}$ , parallel aan een weerstand van  $2R_{\square} + 2R_{\square} = 4R_{\square}$ , gaat een stroom  $3/2 i$ .

Het verschil in potentiaal tussen C en D is :

$$\frac{iR_{\square}}{\Delta} 2 \Delta = 2i R_{\square}.$$

Dus kunnen we schrijven:

$$2 i R_{\square} \left( \frac{1}{4R_{\square}} + \frac{1}{R_{C-D}} \right) = \frac{3}{2} i.$$

Waaruit volgt:  $R_{C-D} = 2 R_{\square}.$

Beschouwen we vervolgens de stroomverdeling in fig. 1 dan is op dezelfde wijze in te zien dat:

$$2 i R_{\square} \left( \frac{1}{4R_{\square}} + \frac{1}{R_{G-F}} \right) = \frac{3}{2} i$$

Waaruit volgt:  $R_{G-F} = 2 R_{\square}.$

Als de overgang op deze wijze tot stand wordt gebracht, dan is het aantal weerstanden met een afwijkende waarde beperkt.

Bovendien is de waarde  $2R_{\square}$  zeer eenvoudig te verkrijgen, door twee normale elementen in serie aan te brengen. Wil men een verfijning met een factor 4 of hoger dan kan men achtereenvolgens enige malen een overgangsgebied, zoals hierboven is aangegeven, toepassen (zie: bijlage 28 fig. 1).

De overgang van vierkante mazen op rechthoekige mazen (of omgekeerd).

Deze overgang kan op dezelfde wijze worden benaderd als de hiervoor behandelde overgang. In feite is het een overgang, waarbij een maaswijdteverfijning in één richting plaatsvindt. Laten we in een eenvoudig geval de overgang van fig. 2 op bijlage 28 beschouwen. Uit de beschouwing van een stroming  $i$  in de  $z$  richting, volgt dat de waarde van de elementen in de diagonalen  $2R_{\square}$  moet bedragen. Beschouwen we nu een stroming in de  $x$ -richting, dan is het volgende af te leiden (zie: bijlage 28 fig. 2)

$$2 i R_{\square} \left( \frac{1}{4R_{\square}} + \frac{1}{R_{B-C}} \right) = i$$

Waaruit volgt dat  $R_{B-C} = 4R_{\square}$ .

De overgang van mazen in de vorm vierkanten op mazen in vorm van vierkanten waarvan diagonalen zijn toegevoegd.

In het voorgaande is gesteld dat in bepaalde gevallen het toevoegen van diagonalen wenselijk is, om de fout tengevolge van het discretiseren te beperken.

In III-2-1. blz. 65 is afgeleid dat de waarden van de elementen in de diagonalen viermaal zo groot moet zijn als de waarde van de elementen in de zijden van de vierkanten ( $a = 4$ ). Op blz. 50 is de verhouding van de waarde der elementen t.o.v. de vierkantsweerstand afgeleid.

Voor  $a = 4$  worden deze achtereenvolgens:

weerstand in de zijden der vierkanten { zie: (1-27) } :  $R = \frac{4+2 \cdot 4}{2 \cdot 4} R_{\square} = 1,5 R_{\square}$  ;  
weerstand langs de diagonalen { zie: (1-28) } :  $aR = 4R = 6R_{\square}$ .

We zullen nu nagaan hoe de overgang, op een gebied met deze maasvorm, tot stand kan worden gebracht (zie: bijlage 29).

Beschouwen we een stroming in de  $x$ -richting dan zijn daaruit de waarden  $6R_{\square}$  en  $1,5R_{\square}$  af te leiden, als de verhouding 4:1 vast ligt. Laten we nu een stroming in de  $z$ -richting beschouwen. De stroom door een stroombuis, met een breedte  $\Delta$ , noemen we  $i$ .

De gradiënt is:  $\frac{iR_{\square}}{\Delta}$

Het potentiaal verschil tussen twee punten A en C wordt dan:  $\frac{iR_{\square}}{\Delta} 2\Delta = 2 i R_{\square}$ .

We kunnen nu schrijven:

$$2 i R_{\square} \left( \frac{1}{12R_{\square}} + \frac{1}{R_{A-C}} \right) = i \quad \text{of wel} \quad 2 (12R_{\square} + R_{A-C}) = 12 R_{A-C}$$

Hieruit volgt:  $R_{A-C} = \frac{12}{5} R_{\square}$

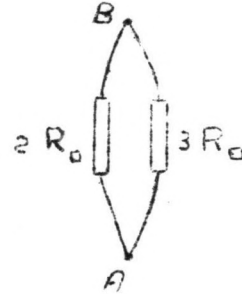
En dus  $R_{A-B} = R_{B-C} = \frac{6}{5} R_0$

Dit resultaat is ook zeer overzichtelijk te verkrijgen, door  $R_{A-B}$  te zien als twee elementen, die parallel zijn geschakeld. De waarde van deze twee elementen is af te leiden uit de waarden, van de overeenkomstige elementen in het inwendige van beide gebieden (dubbele waarden).

Resp.  $2,1,5 R_0 = 3R_0$  en  $2.R_0 = 2R_0$

Zodat de waarde  $R_{A-B}$  volgt uit:

$$R_{A-B} = \frac{3R_0 \cdot 2R_0}{3R_0 + 2R_0} = \frac{6}{5} R_0$$



III.4.4 Een grondmassief dat niet-homogeen of niet-isotroop is.

Tot zover is in dit hoofdstuk steeds sprake geweest van een weerstandnetwerk, dat representatief is voor een homogeen en isotroop grondmassief. We zullen dit hoofdstuk besluiten met enige beschouwingen over het realiseren van een niet-homogeen of niet-isotroop grondmassief in een weerstandnetwerkmiddel.

Laten we eerst een grondmassief beschouwen, bestaande uit twee gedeelten waarvan de doorlatendheidscoëfficiënten ( $K$ ) verschillen. Laten we verder aannemen dat de beide gedeelten isotroop zijn. Het weerstandnetwerk kan voor de beide gedeelten zonder meer worden ontworpen waarbij het verschil in  $K$ -waarden tot uiting zal komen in verschillende waarden voor de vierkantsweerstand  $R_0$ . In dit geval is het enige probleem het realiseren van de grens, tussen de twee gebieden in het model. Laten we de doorlatendheidscoëfficiënt resp.  $K_b$  en  $K_o$  noemen. We weten dat de elektrische weerstand omgekeerd evenredig is met de doorlatendheidscoëfficiënt. Laten we de vierkantsweerstand resp.  $R_b$  en  $R_o$  noemen. In fig. 1 van bijlage 30 zijn deze waarden aangegeven. In deze figuur is aangenomen dat de mazen in beide gebieden de vorm van vierkanten hebben en dat de grenslijn samenvalt met één der hoofdrichtingen van het netwerk (zie: fig. 1). De waarden van de weerstandselementen kan nu worden bepaald. De elementen  $R_3$  en  $R_4$  krijgen een waarde, die overeenkomt met de vierkantsweerstand van het gebied waarin ze zijn gelegen:

$$R_3 = \frac{\Delta}{\Delta} R_b = R_b \quad \text{en} \quad R_4 = \frac{\Delta}{\Delta} R_o = R_o .$$

De elementen  $R_1$  en  $R_2$  zullen een gelijke waarde krijgen. Deze is eenvoudig te bepalen als men bedenkt voor welk gebied ze representatief zijn.

We kunnen  $R_1$  zien als de vervangingsweerstand van twee elementen  $R_{1b}$  en  $R_{1o}$  die parallel zijn geschakeld.

De waarden  $R_{1b}$  en  $R_{1o}$  zijn resp.:

$$R_{1b} = \frac{\Delta}{\frac{\Delta}{2}} \cdot R_b = 2R_b$$
$$R_{1o} = \frac{\Delta}{\frac{\Delta}{2}} R_o = 2R_o$$

Zodat de waarde van  $R_1$  volgt uit:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2R_b} + \frac{1}{2R_o} = \frac{R_b + R_o}{2R_b R_o}$$

$$\text{Zodat } R_1 = R_2 = \frac{2R_b R_o}{R_b + R_o} .$$

Als we nu aannemen dat  $K_o = a K_b$  dan volgt daaruit dat  $R_b = a R_o$ .

De waarde van de vier elementen kunnen dan worden uitgedrukt in de vierkantsweerstand  $R_o$ :

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{2a}{1+a} R_o \\ R_2 &= \frac{2a}{1+a} R_o \\ R_3 &= a R_o \\ R_4 &= R_o \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

In het knooppunt  $(0,0)$  van fig. 1 van bijlage 30 geldt nu, volgens de wet van Kirchhoff:

$$\frac{E(\Delta,0) - E(0,0)}{\frac{2a}{1+a} R_o} + \frac{E(-\Delta,0) - E(0,0)}{\frac{2a}{1+a} R_o} + \frac{E(0,\Delta) - E(0,0)}{a R_o} + \frac{E(0,-\Delta) - E(0,0)}{R_o} = 0$$

Na vervanging van  $\frac{E}{2aR_o}$  door  $\phi$  volgt hieruit de vergelijking:

$$(1+a) \{ \phi(\Delta,0) - \phi(0,0) + \phi(-\Delta,0) - \phi(0,0) \} + 2 \{ \phi(0,\Delta) - \phi(0,0) \} + 2a \{ \phi(0,-\Delta) - \phi(0,0) \} = 0 \quad (3-41)$$

Laten we een onderscheid maken tussen de potentiaalfunctie in het bovenste gebied  $\phi_b$  en die in het onderste gebied  $\phi_o$ .

We kunnen een aantal betrekkingen afleiden tussen de partiële afgeleiden, van deze beide functies, in punten op de grens.

Voor punten op de grens, tussen de beide lagen, geldt dat:

1e.  $\phi_b = \phi_o$ .

2e.  $\frac{\delta \phi_b}{\delta x} = \frac{\delta \phi_o}{\delta x} \quad \frac{\delta^2 \phi_b}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \phi_o}{\delta x^2} \quad \text{etc.}$

3e.  $K_b \frac{\delta \phi_b}{\delta z} = K_o \frac{\delta \phi_o}{\delta z} \rightarrow \frac{\delta \phi_b}{\delta z} = \frac{K_o}{K_b} \frac{\delta \phi_o}{\delta z} = a \frac{\delta \phi_o}{\delta z} \quad (3-42)$

Omdat  $\frac{\delta^2 \phi_a}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_c}{\delta z^2} = 0$  en  $\frac{\delta^2 \phi_b}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_b}{\delta z^2} = 0$  en omdat

(zie 2e)  $\frac{\delta^2 \phi_b}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \phi_c}{\delta x^2}$  geldt ook:

$$\frac{\delta^2 \phi_b}{\delta z^2} = \frac{\delta^2 \phi_c}{\delta z^2} \quad (3-43)$$

Ook is af te leiden dat geldt:  $\frac{\delta^4 \phi_b}{\delta z^4} = \frac{\delta^4 \phi_c}{\delta z^4}$  (3-44)

ook is:  $\frac{\delta^3 \phi_b}{\delta z^3} = \frac{\delta}{\delta z} \left( -\frac{\delta^2 \phi_b}{\delta x^2} \right) = -\frac{\delta}{\delta x^2} \left( \frac{\delta \phi_b}{\delta z} \right) = -\frac{\delta}{\delta x^2} \left( a \frac{\delta \phi_c}{\delta z} \right)$

en  $\frac{\delta^3 \phi_b}{\delta z^3} = \frac{\delta}{\delta z} \left( -\frac{\delta^2 \phi_c}{\delta x^2} \right) = -\frac{\delta}{\delta x^2} \left( \frac{\delta \phi_c}{\delta z} \right)$

Uit deze vergelijkingen volgt dat:  $\frac{\delta^3 \phi_b}{\delta z^3} = a \frac{\delta^3 \phi_c}{\delta z^3}$  (3-45)

Laten we in het volgende deze betrekkingen meteen verwerken, met dien verstande dat alles wordt uitgedrukt in  $\phi_c$  en partiële afgeleiden van deze functie.

We kunnen de functiewaarden, in de om het punt (0,0) liggende punten, uitdrukken met behulp van reeksontwikkeling waarbij voor  $\phi$  de functie  $\phi_c$  wordt bedoeld.

$$\phi(\Delta, 0) = \phi(0, 0) + \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(-\Delta, 0) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} - \dots$$

$$\phi(0, \Delta) = \phi(0, 0) + a\Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} + a \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} + \dots$$

$$\phi(0, -\Delta) = \phi(0, 0) - \Delta \frac{\delta \phi(0, 0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0, 0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0, 0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} - \dots$$

Vermenigvuldigen we bovenstaande uitdrukkingen achtereenvolgens met  $(1+a)$ ,  $(1+a)$ , 2 en  $2a$  en tellen we ze daarna op, dan kunnen we de volgende uitdrukking krijgen:

$$(1+a) \{ \phi(\Delta, 0) - \phi(0, 0) + \phi(-\Delta, 0) - \phi(0, 0) \} + 2 \{ \phi(0, \Delta) - \phi(0, 0) \} + 2a \{ \phi(0, -\Delta) - \phi(0, 0) \} =$$

$$- 2(1+a) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} - 2(1+a) \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta z^4} = 0 \quad (3-46)$$

Bij de benadering in het weerstandnetwerk geldt verg. (3-41).

Dat wat in deze vergelijking wordt verwaarloosd is dus:

$$- 4(1+a) \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0, 0)}{\delta x^4} + \dots \quad (3-47)$$

In het geval  $a$  gelijk 1 is (homogeen), komt deze term overeen met de term in (2-g), als men aandacht schenkt aan de factor 2, die dan in bovenstaande uitdrukking (3-46) aanwezig is.

Laten we vervolgens een homogeen grondmassief beschouwen, waarvan de doorlatendheidscoëfficiënt in twee onderling loodrechte hoofdrichtingen een verschillende waarde heeft.

In hoofdstuk II is afgeleid dat in dat geval geldt:

$$K_x \frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + K_z \frac{\delta^2 h}{\delta z^2} = 0 \quad (2-15)$$

Als we aannemen dat  $K_x = nK_z$  dan gaat deze vergelijking over in:

$$nK_z \frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + K_z \frac{\delta^2 h}{\delta z^2} = 0$$

Omdat  $K_z$  onafhankelijk is van  $x$  en  $z$ , mogen we, als we stellen  $\phi = K_z h$ , hiervoor schrijven:

$$n \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0 \quad (3-48)$$

Of wel  $\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} = \frac{1}{n} \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2}$  waaruit is af te leiden dat

$$\text{geldt: } \frac{\delta^4 \phi}{\delta z^4} = n^2 \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} . \quad (3-49)$$

We weten dat de elektrische weerstand omgekeerd evenredig is met de doorlatendheidscoëfficiënt.

Laten we de waarde van de vierkantsweerstand in de x-richting  $R_x$  noemen en die in de z-richting  $R_z$ . We kunnen dan schrijven  $R_z = nR_x$ .

Laten we verder aannemen dat mazen in de vorm van vierkanten worden toegepast, waarbij de maaswijdte  $\Delta$  is. De waarde van de elementen, die in een knooppunt (0,0) (zie: bijlage 30 fig. 2) samenkomen, is dan als volgt te bepalen:

$$R_1 = R_2 = \frac{\Delta}{\Delta} \cdot R_x = R_x \quad (3-50)$$

$$R_3 = R_4 = \frac{\Delta}{\Delta} R_z = R_z = nR_x.$$

In het knooppunt (0,0) geldt in dit geval:

$$\frac{E(\Delta,0)-E(0,0)}{R_x} + \frac{E(-\Delta,0)-E(0,0)}{R_x} + \frac{E(0,\Delta)-E(0,0)}{nR_x} + \frac{E(0,-\Delta)-E(0,0)}{nR_x} = 0$$

Door vervanging van  $\frac{E}{nR_x}$  door  $\phi$  gaat deze vergelijking over in:

$$n\{\phi(\Delta,0)-\phi(0,0)+\phi(-\Delta,0)-\phi(0,0)\} + \phi(0,\Delta)-\phi(0,0)+\phi(0,-\Delta)-\phi(0,0) = 0 \quad (3-51).$$

We kunnen de functiewaarden, in de om het punt (0,0) liggende punten, uitdrukken met behulp van reeksontwikkeling:

$$\phi(\Delta,0) = \phi(0,0) + \Delta \frac{\delta \phi(0,0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} + \dots$$

$$\phi(-\Delta,0) = \phi(0,0) - \Delta \frac{\delta \phi(0,0)}{\delta x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2 \phi(0,0)}{\delta x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3 \phi(0,0)}{\delta x^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4 \phi(0,0)}{\delta x^4} - \dots$$



$$\phi(0,\Delta) = \phi(0,0) + \Delta \frac{\delta\phi(0,0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0,0)}{\delta z^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0,0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0,0)}{\delta z^4} + \dots$$

$$\phi(0,-\Delta) = \phi(0,0) - \Delta \frac{\delta\phi(0,0)}{\delta z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\delta^2\phi(0,0)}{\delta z^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\delta^3\phi(0,0)}{\delta z^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{\delta^4\phi(0,0)}{\delta z^4} - \dots$$

Vermenigvuldigen we van deze uitdrukkingen de twee bovenste met n en tellen we daarna de vier verkregen uitdrukkingen op, dan krijgen we:

$$n \{ \phi(\Delta,0) - \phi(0,0) + \phi(-\Delta,0) - \phi(0,0) \} + \phi(0,\Delta) - \phi(0,0) + \phi(0,-\Delta) - \phi(0,0) -$$

$$\Delta^2 \left\{ n \frac{\delta^2\phi(0,0)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi(0,0)}{\delta z^2} \right\} - \frac{2\Delta^4}{4!} \left\{ n \frac{\delta^4\phi(0,0)}{\delta x^4} + \frac{\delta^4\phi(0,0)}{\delta z^4} \right\} - = 0 \quad (3-52)$$

Substitueren we in (3-52) de betrekkingen (3-48) en (3-49) dan gaat deze uitdrukking over in:

$$n \{ \phi(\Delta,0) - \phi(0,0) + \phi(-\Delta,0) - \phi(0,0) \} + \phi(0,\Delta) - \phi(0,0) + \phi(0,-\Delta) - \phi(0,0) -$$

$$\frac{2\Delta^4}{4!} (n+n^2) \frac{\delta^4\phi(0,0)}{\delta x^4} - = 0 \quad (3-53)$$

In het knooppunt van het weerstandnetwerk geldt vergelijking (3-51).

Dat wat in deze vergelijking verwaarloosd wordt is dus:

$$- \frac{2(n+n^2)}{4!} \frac{\delta^4\phi(0,0)}{\delta x^4} - = 0 \quad (3-54)$$

In een isotroop grondmassief (n=1), gaat deze term over in de term v(2-9).

Bij de beschouwingen in het voorgaande, is steeds stilzwijgend uitgegaan van een permanente stromingstoestand. Bij niet-permanente problemen kunnen we onderscheid maken in:

- a) grenzen, waarvan de ligging in de tijd onveranderlijk is.
- b) grenzen, die in de tijd variëren (b.v. vrije grondwaterspiegel).

Voor niet-permanente problemen met grenzen ad. a kan de beschouwing, die in het voorgaande is gegeven zonder meer worden toegepast (zie: opm. blz. 37).

Indien bij dergelijke problemen de grenzen in de tijd variëren, dan ontstaan enige nieuwe problemen. In het volgende hoofdstuk wordt op het realiseren van dergelijke randvoorwaarden nader ingegaan.

- N.B. De hierna volgende hoofdstukken zullen in een binnenkort te verschijnen Deel II worden opgenomen.  
Deel II zal een complete literatuuropgave bevatten.  
De bij Deel I behorende literatuur-opgave is daarom los bijgevoegd.

