

wb1203

Dynamica 2-B

April 1998

Prof.dr.ir. P. Meijers

Technische Universiteit Delft
Faculteit der Werktuigbouwkunde
en Maritieme Techniek
VAKGROEP TECHNISCHE MECHANICA
Mekelweg 2
2628 CD DELFT

Dynamica 2-B (wb1203)

Prof.dr.ir. P. Meijers

april 1998

Inhoud

	pag
1. Enkelvoudig massa-veersysteem	1.1
1.1 Vrije ongedempte trillingen	1.1
1.2 Vrije, gedempte trillingen	1.8
1.3 Gedwongen trillingen	1.12
1.4 Trillingsisolatie	1.18
1.5 Integraal van Duhamel	1.22
 2. Systeem met twee graden van vrijheid	 2.1
2.1 Vrije trillingen	2.1
2.2 Gedwongen trillingen van een ongedempt systeem	2.5
2.3 Gedwongen trillingen van een gedempt systeem	2.8
 3. Discrete systemen met veel vrijheidsgraden	 3.1
3.1 Bewegingsvergelijkingen	3.1
3.2 Modale analyse	3.4
3.3 Statische condensatie van de massamatrix	3.8
3.4 Oplossing van het eigenwaardeprobleem	3.10
3.4.1 Choleski-decompositie	3.10
3.4.2 Householder-QR-methode	3.12
3.4.3 'Power' methode	3.14
3.4.4 Methode van Rayleigh	3.16
3.5 Modale demping	3.17
3.6 Numerieke integratie van de bewegingsvergelijkingen	3.18
3.6.1 Centrale-differentiemethode	3.18
3.6.2 Newmark-methode	3.20
3.6.3 Stabiliteit van het numerieke integratieproces	3.23
 4. Rotordynamica	 4.1
4.1 Ronddraaiende as in starre lagers	4.1
4.2 Elastisch gelagerde as	4.6
4.3 Niet axiaalsymmetrische asdoorsnede	4.10
4.4 Balanceren	4.14

Literatuurlijst

Oefenvraagstukken

1. ENKELVOUDIG MASSA-VEERSYSTEEM

1.1 Vrije, ongedempte trillingen

We beschouwen een massa m die met een veer (veerstijfheid k) verbonden is aan een als star te beschouwen fundatie (fig. 1.1).

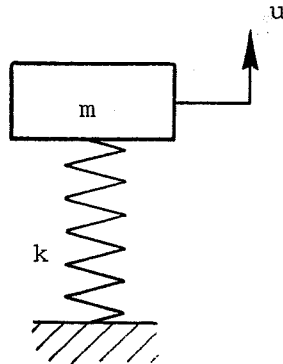


Fig. 1.1

Als het effect van de zwaartekracht buiten beschouwing wordt gelaten en alleen een verplaatsing in de richting van de veer mogelijk is dan volgt uit de wet van Newton de bewegingsvergelijking

$$m\ddot{u} + ku = 0. \quad (1.1)$$

Hierin is u de verplaatsing vanuit de stand waarin de veer onbelast is.

De oplossing van deze homogene vergelijking kan altijd geschreven worden in de vorm

$$u = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (1.2)$$

met $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Onafhankelijk van de begintoestand zal de massa steeds met dezelfde radiaalfrequentie (ω_0) gaan trillen. Deze frequentie wordt de eigenfrequentie genoemd. Als de beginwaarden op het tijdstip $t = 0$ gegeven zijn door

$$u(0) = u_0; \quad \dot{u}(0) = v_0$$

dan zijn hiermee de waarden van C_1 en C_2 vastgelegd. Het resultaat is

$$u = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (1.3)$$

Een andere schrijfwijze voor de algemene oplossing (1.2) is

$$u = \hat{u} \cos (\omega_0 t - \varphi) \quad (1.4)$$

waarin $\hat{u}$ de amplitude van de beweging geeft en φ de fasehoek. Uit (1.4) volgt

$$u = \hat{u} [\cos \omega_0 t \cos \varphi + \sin \omega_0 t \sin \varphi]$$

zodat het verband tussen (1.2) en (1.4) is

$$\hat{u} = \sqrt{(C_1^2 + C_2^2)}; \quad \varphi = + \arctan \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \quad (1.5)$$

Nog een andere schrijfwijze is de complexe notatie

$$u = \hat{u} e^{i(\omega_0 t - \varphi)} \equiv \hat{u} [\cos(\omega_0 t - \varphi) + i \sin(\omega_0 t - \varphi)] \quad (1.6)$$

Er wordt hierbij afgesproken dat de fysische grootte het reële deel is van de complexe functie.

Uit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ volgt dat een verhoging van de veerstijfheid k met een factor 2 tot gevolg heeft dat de eigenfrequentie met $\sqrt{2}$ omhoog gaat. Wordt de massa met een factor 2 verhoogd dan gaat de frequentie met een factor $\sqrt{2}$ omlaag.

De in de veer opgehoopte elastische energie is $\frac{1}{2} ku^2$ en de kinetische energie van de massa m is $\frac{1}{2} m\dot{u}^2$.

Door substitutie van (1.3) volgt

$$\frac{1}{2} ku^2 + \frac{1}{2} m\dot{u}^2 = \frac{1}{2} ku_0^2 + \frac{1}{2} m\dot{v}_0^2, \quad (1.7)$$

m.a.w. de som van de potentiële energie en de kinetische energie is op elk moment constant en dus gelijk aan de som in de begin-toestand. Dit was te verwachten immers er is geen dissipatie van energie door damping. Voor een middenstand ($u = 0$) is alle energie omgezet in kinetische energie van de massa, terwijl in de uiterste standen ($\dot{u} = 0$) alle energie opgeslagen is in de veer.

We geven nu enkele voorbeelden die door een zelfde tweede orde differentiaalvergelijking als gegeven in (1.1) worden beschreven.

Allereerst de als massaloos te beschouwen buigbalk (Fig. 1.2) met een massa m aan het eind. De veer is in dit geval een buigveer.

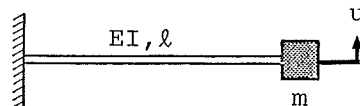


Fig. 1.2

De bewegingsvergelijking wordt

$$m\ddot{u} + \frac{3 EI}{\ell^3} u = 0 \quad (1.8)$$

en de eigenfrequentie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3 EI}{m \ell^3}} .$$

Een tweede voorbeeld geeft Fig. 1.3.

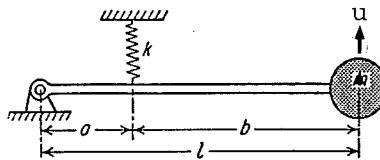


Fig. 1.3

Een massaloze, starre balk is aan één eind scharnierend bevestigd en draagt aan het andere eind een massa m . Op een afstand a van het scharnier is de balk verend ondersteund. Het verband tussen een kracht en verplaatsing aan het balkeind kunnen we aangeven als

$$F_m = k^* u$$

waarin k^* een effectieve veerstijfheid is. Uit het evenwicht volgt voor de kracht ter plaatse van de veer

$$F_v = \frac{\ell}{a} F_m = k^* \frac{\ell}{a} u$$

en bovendien geldt

$$F_v = k u_v = k \left(\frac{a}{\ell} \right) u .$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt de effectieve veerstijfheid

$$k^* = \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 k$$

zodat de differentiaalvergelijking wordt

$$m\ddot{u} + k \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 u = 0 \quad (1.9)$$

en de eigenfrequentie

$$\omega_0 = \left(\frac{a}{\ell} \right) \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Het verschuiven van de veer vanuit het eindpunt naar links heeft dus een sterke invloed op de effectieve stijfheid.

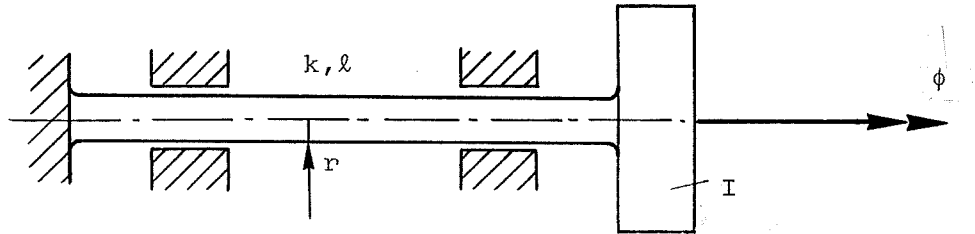


Fig. 1.4

Fig. 1.4 geeft een schijf met een massa-traagheid I verbonden aan een als massaloos te beschouwen as. De as werkt dus als een torsie veer met stijfheid k gedefinieerd door

$$T = k\phi \quad (1.10)$$

waarin T het torsiemoment is en ϕ de hoekverdraaiing aan het eind. We weten uit de behandeling van de torsie van een balk dat

$$T = S_t \omega \quad (1.11)$$

waarin ω de specifieke wringhoek is ($\omega = d\phi/dx$). Voor een prisma-tische balk geldt dan

$$k = \frac{S_t}{\ell} \quad (1.12)$$

Heeft de balk een cirkelvormige doorsnede of is het een buis waarvan binnen- en buitenstraal concentrische cirkels zijn dan is $S_t = GI_p$ waarin I_p het polaire traagheidsmoment is en G de glijdingsmodulus.

Toepassing van de wet van Euler voor de rotatie van een lichaam geeft de bewegingsvergelijking

$$I\ddot{\phi} + k\phi = 0. \quad (1.13)$$

Dit is weer een zelfde vergelijking als (1.1) en de eigenfrequentie is

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{S_t}{I\ell}}.$$

Fig. 1.5 geeft een elastische as met twee massatraagheden, dit is in wezen een systeem met 2 vrijheidsgraden.

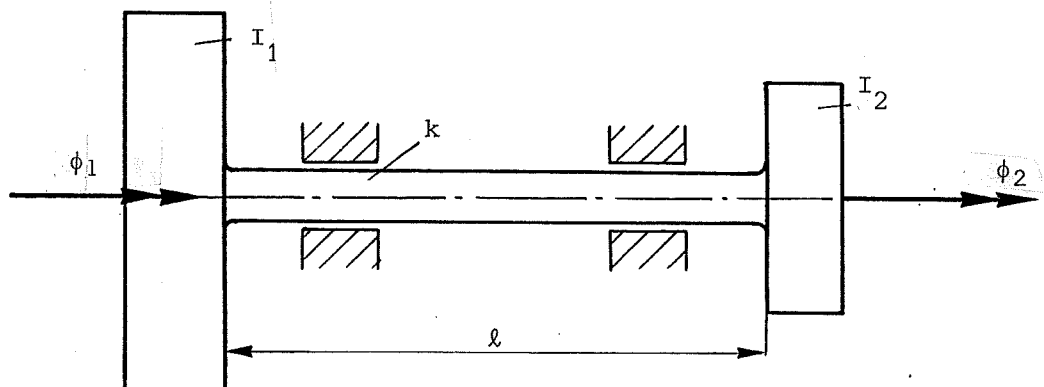


Fig. 1.5

De bewegingsvergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 + k(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\phi}_2 + k(\phi_2 - \phi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Hieruit volgt

$$(\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) + \left(\frac{k}{I_1} + \frac{k}{I_2} \right) (\phi_2 - \phi_1) = 0, \quad (1.15)$$

en na invoering van $\psi = \phi_2 - \phi_1$ kan deze vergelijking ook geschreven worden als

$$\frac{I_1 I_2}{(I_1 + I_2)} \ddot{\psi} + k\psi = 0. \quad (1.16)$$

De eigenfrequentie voor de torsietrillingen is

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} k}.$$

De bewegingsvergelijking is weer die voor een enkelvoudig massa-veersysteem en de oplossing

$$\psi = \phi_2 - \phi_1 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (1.17)$$

Optellen van de bewegingsvergelijkingen (1.14) geeft

$$I_1 \ddot{\phi}_1 + I_2 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (1.18)$$

met als algemene oplossing

$$I_1 \phi_1 + I_2 \phi_2 = C + Dt. \quad (1.19)$$

De volledige oplossing is

$$\varphi_1 = - \frac{I_2}{(I_1+I_2)} A \cos \omega_0 t - \frac{I_2}{(I_1+I_2)} B \sin \omega_0 t + \frac{C}{(I_1+I_2)} + \frac{D}{(I_1+I_2)} t \quad (1.20)$$

$$\varphi_2 = \frac{I_1}{(I_1+I_2)} A \cos \omega_0 t + \frac{I_1}{(I_1+I_2)} B \sin \omega_0 t + \frac{C}{(I_1+I_2)} + \frac{D}{(I_1+I_2)} t$$

Of na invoering van andere constanten

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \omega t - C_1 \cos \omega_0 t - C_2 \sin \omega_0 t \quad (1.21)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \omega t + \frac{I_1}{I_2} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t).$$

De eerste twee termen geven de eenparige beweging van het gehele systeem waarbij dus geen vervorming van de as optreedt. De laatste twee termen geven de torsietrilling waarbij de schijven in tegenfase zijn. De amplituden zijn omgekeerd evenredig met de traagheidsmomenten.

Tenslotte geeft Fig. 1.6 nog een voorbeeld waarbij er een tandwieloverbrenging is tussen twee assen waarop schijven met massatraagheden I_1 en I_2 zijn geplaatst. De torsiestijfheid van de twee assen wordt aangegeven met k_1 en k_2 . De overbrenging $r_g/r_p = n$. De massatraagheid van de tandwielen mag verwaarloosd worden t.a.v. I_1 en I_2 . We zijn alleen geïnteresseerd in torsietrillingen van het systeem.

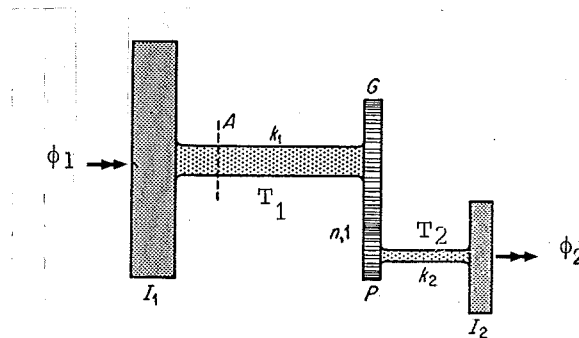


Fig. 1.6

De bewegingsvergelijkingen voor de rotatie van de twee schijven zijn:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = T_1 ; \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = - T_2 = \frac{T_1}{n} \quad (1.22)$$

De hoekverdraaiing van het kleine tandwiel is

$$\varphi_p = \varphi_2 - \frac{T_2}{k_2} = \varphi_2 + \frac{T_1}{nk_2} ,$$

en van het grote tandwiel

$$\varphi_g = -\frac{1}{n} \varphi_p = -\frac{1}{n} \varphi_2 - \frac{T_1}{n^2 k_2} .$$

Voor φ_1 geldt

$$\varphi_1 = \varphi_g - \frac{T_1}{k_1} = -\frac{1}{n} \varphi_2 - T_1 \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{n^2 k_2} \right)$$

of met k gedefinieerd door

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{n^2 k_2} , \quad (1.23)$$

vinden we

$$T_1 = -k \left(\varphi_1 + \frac{1}{n} \varphi_2 \right) .$$

Na substitutie in de bewegingsvergelijkingen (1.22) resulteert dit in

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k \left(\varphi_1 + \frac{1}{n} \varphi_2 \right) &= 0 \\ n I_2 \ddot{\varphi}_2 + k \left(\varphi_1 + \frac{1}{n} \varphi_2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Hieruit volgt voor de eventuele torsietrilling

$$I \left(\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{n} \ddot{\varphi}_2 \right) + k \left(\varphi_1 + \frac{1}{n} \varphi_2 \right) = 0 \quad (1.25)$$

waarin het effectieve traagheidsmoment I gedefinieerd is door

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{n^2 I_2} \quad (1.26)$$

De eigenfrequentie van de torsietrilling is

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}.$$

Op dezelfde wijze als in het voorgaande voorbeeld kan aan de oplossing van (1.25) eenparige beweging toegevoegd worden waarvoor

$$\varphi_1 = -\frac{1}{n} \varphi_2.$$

1.2 Vrije, gedempte trillingen

De oplossingen die we in de vorige paragraaf gegeven hebben dempen nooit uit, maar we weten dat dit in de natuur niet voorkomt. Na verloop van tijd sterven vrije trillingen uit t.g.v. een altijd aanwezige, soms geringe damping.

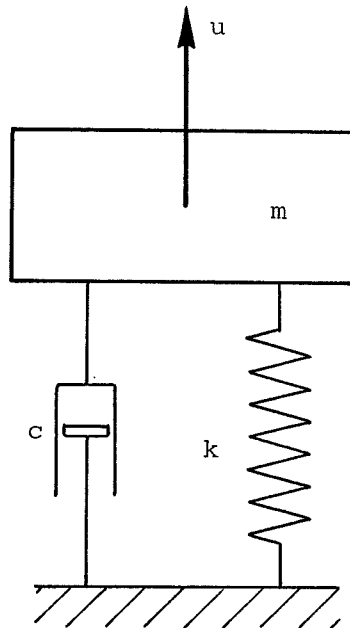


Fig. 1.7 Gedempt massa-veersysteem

In het massa-veersysteem wordt nu een demper parallel met de veer geplaatst; zie fig. 1.7. In veel gevallen zal de damping een zgn. viskeuze **damping** zijn d.w.z. de dempingskracht is een functie van de relatieve snelheid zoals bijvoorbeeld in een schokbreker. De eenvoudigste viskeuze demper is de **lineaire demper**, d.w.z. de

dempingskracht is evenredig met en tegengesteld aan de snelheid. Dit is een benadering van de werkelijkheid die dikwijls voldoende nauwkeurig is als maar de dempingscoëfficiënt van de lineaire demper zo gekozen wordt dat bij trilling de energiedissipatie per cyclus gelijk is aan die in het werkelijke systeem. De bewegingsvergelijking voor vrije, gedempte trillingen wordt

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (1.27)$$

en na introductie van de eigenfrequentie voor het ongedempte systeem

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

en van de dimensieloze dempingsfactor ζ gedefinieerd door

$$2 \zeta \omega_0 = \frac{c}{m} \quad (1.28)$$

kan (1.27) ook geschreven worden in de vorm

$$\ddot{u} + 2 \zeta \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0. \quad (1.29)$$

Door de substitutie $u = e^{\lambda t}$ gaat de tweede-orde differentiaalvergelijking over in de algebraïsche vergelijking

$$\lambda^2 + 2 \zeta \omega_0 \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (1.30)$$

Deze zgn. karakteristieke vergelijking heeft als oplossingen:

$$\lambda_{1,2} = - \zeta \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.31)$$

De volledige oplossing is dan

$$u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.32)$$

waarin C_1 en C_2 bepaald zijn door de beginvoorwaarden. Uit de wortels van de karakteristieke vergelijking volgt dat het karakter van de oplossing geheel verandert op het punt $\zeta = 1$.

We onderscheiden daarom de drie gevallen $\zeta < 1$, $\zeta > 1$ en $\zeta = 1$.

Voor $\zeta < 1$ wordt de oplossing van de karakteristieke vergelijking

$$\lambda_{1,2} = - \zeta \omega_0 \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.33)$$

en de volledige oplossing van de bewegingsvergelijking is te schrijven als:

$$\begin{aligned}
 u &= e^{-\zeta \omega_0 t} \left[C_1 e^{i \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t} + C_2 e^{-i \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t} \right] \\
 &= e^{-\zeta \omega_0 t} \left[(C_1 + C_2) \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right]
 \end{aligned}$$

Het ligt nu voor de hand in plaats van de willekeurige constanten C_1 en C_2 , twee andere constanten namelijk

$$C_1' = C_1 + C_2 ; \quad C_2' = i(C_1 - C_2)$$

in te voeren. De algemene oplossing is dan ook als volgt te geven

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} \left[C_1' \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + C_2' \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \quad (1.34)$$

waarin C_1' en C_2' bepaald zijn door de beginvoorwaarden. Kwalitatief is het gedrag als aangegeven in figuur 1.8.

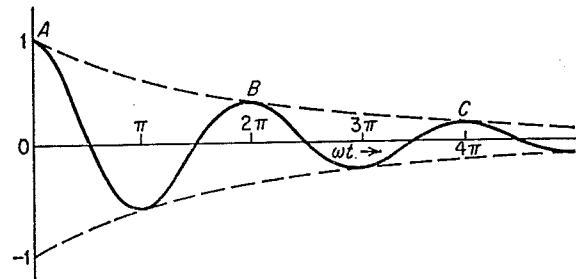


Fig. 1.8 Vrije trilling van een onderkritisch gedempt systeem

In (1.34) geeft de uitdrukking tussen haken een harmonische oplossing met een frequentie die lager ligt dan bij het ongedempte systeem. In het geval van constructie-damping ($\zeta = 0,02 - 0,03$) is deze verschuiving zeker te verwaarlozen, maar dit geldt voor praktisch het gehele gebied van technische toepassingen. De amplitude van de oplossing sterft exponentieel uit.

Naarmate de damping kleiner is, is het aantal cycli nodig voor het uitsterven van de vrije trilling groter. De energie wordt gedissipeerd in de demper door omzetting in warmte.

De reductie van de amplitude over een periodetijd

$$2\pi / (\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2})$$

is

$$\frac{\exp \left[-\zeta \omega_0 \left\{ t + 2\pi / (\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}) \right\} \right]}{\exp (-\zeta \omega_0 t)} = \exp \left(-\frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right). \quad (1.35)$$

Deze verhouding is onafhankelijk van de amplitude van de trilling en van de tijd. De exponent

$$2\pi\zeta/(\sqrt{1-\zeta^2})$$

wordt het logaritmisch decrement genoemd en is voor licht gedempte systemen bij goede benadering $2\pi\zeta$.

Een gebruikelijke methode om informatie uit een systeem te halen is na te gaan wat de responsie is op een eenheidsimpuls. De bewegingsvergelijking kunnen we dan als volgt schrijven

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \delta(t) \quad (1.36)$$

De delta-functie is per definitie nul voor $t \neq 0$ en voor $t = 0$ is ze zodanig oneindig dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.37)$$

Integreren van de bewegingsvergelijking over het gebied van $-\varepsilon$ tot $+\varepsilon$ waarbij $\varepsilon \rightarrow 0$, geeft

$$u(0+) = 0; \quad \dot{u}(0+) = \frac{1}{m}.$$

Met deze beginvoorwaarden volgt uit (1.34) de zg. impuls-responsie

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t), \quad t > 0. \quad (1.38)$$

Voor $\zeta > 1$ geldt

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

en

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[C_1 e^{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + C_2 e^{-\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right] \quad (1.39)$$

De oplossing is een superpositie van twee termen die beide exponentieel uitsterven. We kunnen niet meer spreken van een trilling, maar van een terugkruipen naar de evenwichtsstand.

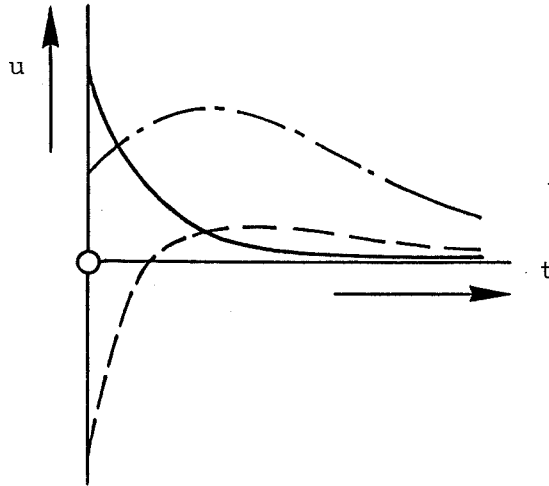


Fig. 1.9 Beweging van een massa-veersysteem dat bovenkritisch gedempt is

In verband met praktische toepassing is het gebied $\zeta > 1$ van weinig belang.

Tenslotte hebben we nog het kritisch gedempte systeem waarvoor $\zeta = 1$. De wortels van de karakteristieke vergelijking zijn dan beide

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0$$

en de algemene oplossing is te beschrijven in de vorm

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} [C_1 + C_2 t] \quad (1.40)$$

1.3 Gedwongen trillingen

De wet van Newton toegepast op het lineair, enkelvoudig massa-veersysteem (fig. 1.10) dat geëxciteerd wordt door een uitwendige kracht $f(t)$ luidt

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (1.41)$$

Is de functie $f(t)$ periodiek dan kan ze ontwikkeld worden in een Fourier-reeks en kan de volledige oplossing verkregen worden door aan de oplossing van de homogene vergelijking voor elke Fourier-term een particuliere oplossing toe te voegen.

We beschouwen nu de oplossing bij excitatie door één Fourier-term d.w.z. ten gevolge van een harmonische excitatie. De bewegingsvergelijking is in dit geval

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f_0 \cos \omega t \quad (1.42)$$

De totale oplossing is voor $\zeta < 1$ te schrijven als (1.34)

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[C_1' \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + C_2' \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] + \text{part. oplossing} \quad (1.43)$$

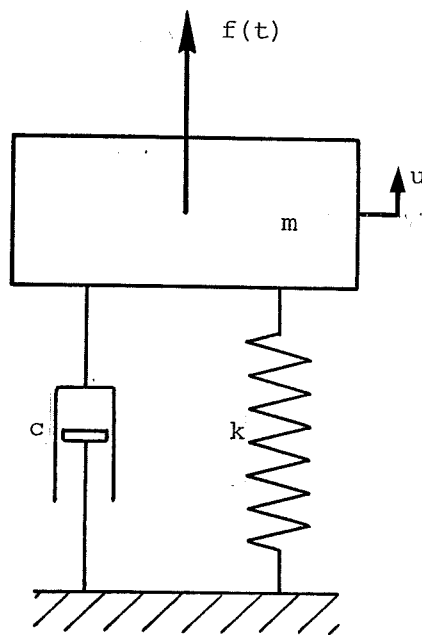


Fig. 1.10 Gedwongen trillingen van een massa-veer systeem

Het is voor de hand liggend als particuliere oplossing een harmonische functie te veronderstellen met een frequentie gelijk aan de frequentie van de excitatie. Vanwege de demper zullen echter de belasting en de verplaatsing niet in fase zijn. Met

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.44)$$

volgt na substitutie in (1.42)

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + k)A + c\omega B &= f_0 \\ (-m\omega^2 + k)B - c\omega A &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Geschreven met $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ en $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ is de oplossing

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \omega^2/\omega_0^2)}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\omega_0^2} \frac{f_0}{k} \\ B &= \frac{2\zeta\omega/\omega_0}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\omega_0^2} \frac{f_0}{k} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Een andere schrijfwijze voor (1.44) is

$$u = u_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.47)$$

waarin de amplitude

$$u_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}} \frac{f_0}{k} \quad (1.48)$$

en

$$\tan \varphi = \frac{B}{A} = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \quad (1.49)$$

In plaats van bovenstaande behandeling met reële grootheden kunnen we ook nagaan wat de stationaire responsie is op een harmonisch ingangssignaal

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (1.50)$$

waarbij weer stilzwijgend wordt aangenomen dat het reële deel van deze functie de betreffende fysische grootheid is.

De responsie wordt geschreven in de form

$$u(t) = H(\omega) f_0 e^{i\omega t} \quad (1.51)$$

waarin $H(\omega)$ de (complexe) frequentie reponsiefunctie van het systeem wordt genoemd. Voor dit enkelvoudig massa-veersysteem geldt

$$H(\omega) = \frac{1}{(-m\omega^2 + k + ic\omega)} \quad (1.52)$$

met

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-i\varphi} \quad (1.53)$$

volgt

$$\frac{u_0}{f_0} = |H(\omega)| = \frac{1}{k \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}} \quad (1.54)$$

en

$$\tan \varphi = - \frac{\operatorname{Im}[H(\omega)]}{\operatorname{Re}[H(\omega)]} = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \quad (1.55)$$

De vergelijkingen (1.54) en (1.55) geven het verband tussen de complexe functie $H(\omega)$ en de eerder ingevoerde reële grootheden u_0 en φ .

De factor f_0/k in (1.48) geeft de statische verplaatsing aan t.g.v. de kracht f_0 . In de totale oplossing (1.43) met particuliere oplossing (1.44) of (1.47) zijn de integratieconstanten

$$C_1 \text{ en } C_2$$

bepaald uit de beginvoorwaarden. Als $\omega \neq \omega_0$, d.w.z. er is geen excitatie in de eigenfrequentie, dan zullen de vrije trillingen (algemene oplossing van de homogene vergelijkingen) uitsterven en blijft alleen de particuliere oplossing over.

Beschouwen we nu de ongedempte oplossing

$$u_0 = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} \frac{f_0}{k} \quad (1.56)$$

Als $\omega \rightarrow 0$ dan nadert de verplaatsing naar de statische verplaatsing f_0/k . In het gebied $\omega/\omega_0 < 1$ zijn kracht en verplaatsing in fase, terwijl ze in tegenfase zijn voor $\omega/\omega_0 > 1$. Voor $\omega/\omega_0 \gg 1$ gaat de verplaatsing u naar nul, d.w.z. de massa reageert nauwelijks meer op de hoge frequenties. Op de eigenfrequentie $\omega/\omega_0 = 1$ gaat binnen de lineaire theorie de amplitude naar oneindig en verandert de fasehoek plotseling van 0 naar π (zie fig. 1.11 voor $\zeta = 0$).

Fig. 1.11 geeft ook het effect van damping op amplitude en fasehoek. Door de damping wordt de amplitude gereduceerd en speciaal voor $\omega/\omega_0 = 1$ blijft nu de amplitude eindig, bovendien gaat de faseovergang nu geleidelijk.

Het maximum van de amplitude treedt op voor een eigenfrequentie die iets lager ligt dan de eigenfrequentie ω_0 . Uit (1.48) volgt dat het maximum optreedt voor

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2\zeta^2 \quad (1.57)$$

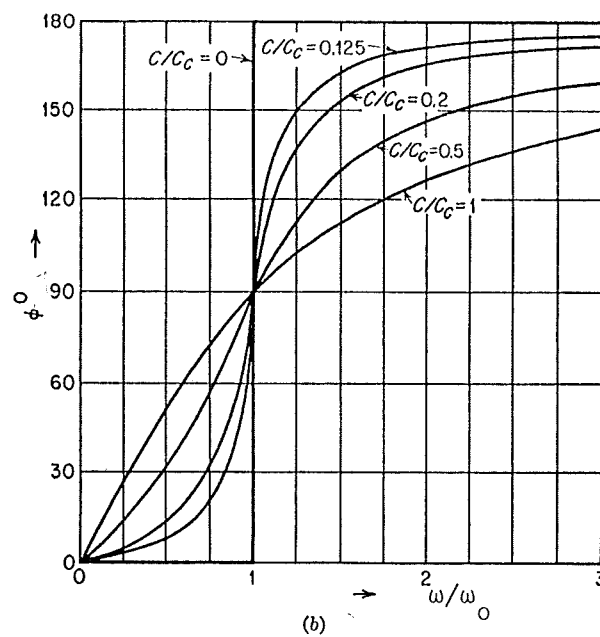
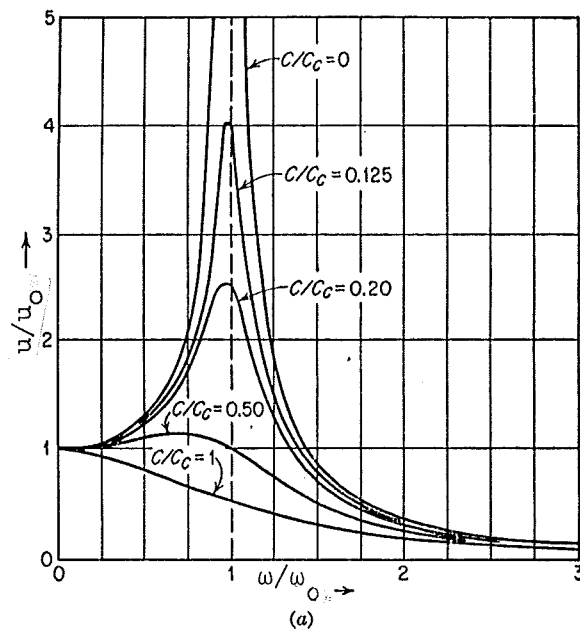


Fig. 1.11 Amplitude en fasehoek tussen kracht en verplaatsing als functie van ω/ω_0 en $\zeta = c/c_c$

mits $\zeta \leq \frac{1}{2} \sqrt{2}$ en de maximale amplitude is dan

$$u_{0 \max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{f_0}{k} \quad (1.58)$$

Voor licht gedempte systemen kan bij goede benadering gesteld worden dat de maximale amplitude optreedt voor $\omega = \omega_0$ en dat

$$u_{0 \max} = \frac{1}{2\zeta} \frac{f_0}{k} \quad (1.59)$$

Uit fig. 1.11-a blijkt dat de breedte van de resonantiepiek bepaald is door ζ . Definieren we de breedte als het frequentiegebied waarvoor

$$u_0 \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} u_{0 \max}$$

dan is eenvoudig na te gaan dat voor kleine waarden van ζ d.w.z. als ζ^2 verwaarloosd mag worden t.o.v. 1, dit gebied loopt van $\omega_1/\omega_0 = 1 - \zeta$ tot $\omega_2/\omega_0 = 1 + \zeta$. Hieruit volgt

$$\zeta = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_0} \quad (1.60)$$

Is uit een experiment de amplitudegrafiek bekend dan kunnen we met (1.60) daaruit ζ bepalen.

De totale oplossing is (1.43):

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[C_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + C_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] + u_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.61)$$

maar tot nu toe is alleen de stationaire oplossing of de zg. gedwongen trilling beschouwd en de uitstervende vrije trilling, het inschakelverschijnel genaamd, buiten beschouwing gelaten. De waarden

$$C_1 \text{ en } C_2$$

zijn bekend uit de beginvoorwaarden van de totale beweging.

We kiezen als voorbeeld een excitatiefrequentie $\omega = 1/8 \omega_0$ en een zodanig logaritmisch decrement dat de amplitude van de vrije trilling elke cyclus 10% daalt. Zijn verder de beginvoorwaarden $u(0) = 0$ en $\dot{u}(0) = 0$, dan ontstaat de beweging als aangegeven in fig. 1.12.

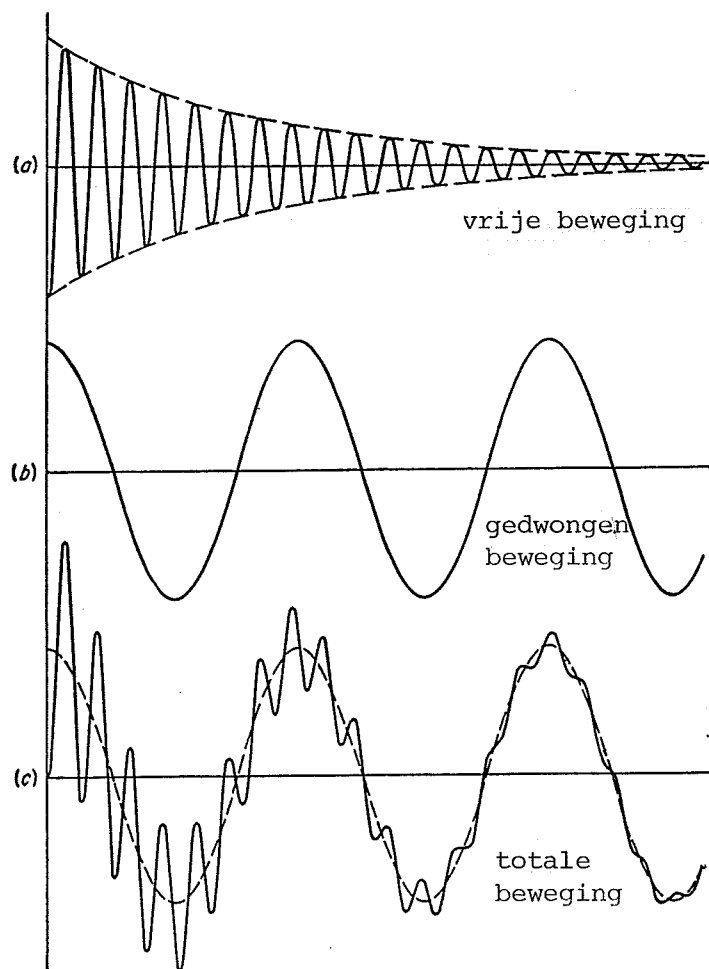


Fig. 1.12 Gedwongen trilling en inschakelverschijnsel

De maximale amplitude van de beweging is in dit geval ongeveer twee maal zo groot als de amplitude van de stationaire oplossing. Voor deze parametercombinatie is na enkele perioden van de gedwongen trilling het inschakelverschijnsel verdwenen.

1.4 Trillingsisolatie

Een niet volledig gebalanceerde machine moet dikwijls geïnstalleerd worden in een constructie die niet mag trillen. Voorbeelden zijn een motor in een auto of een schip. De machine moet dan zodanig opgesteld worden dat trillingen nauwelijks doorgegeven worden naar de fundatie.

De algemene oplossing bestaat uit het verend opstellen van de machine.

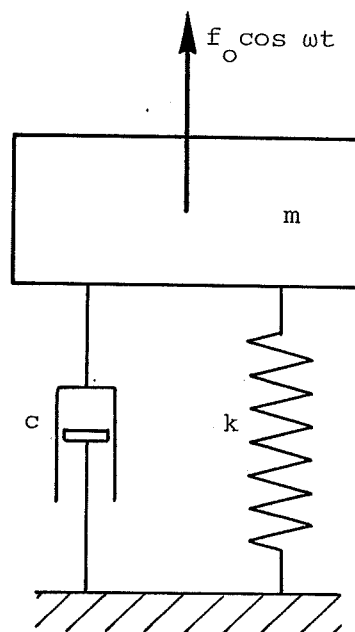


Fig. 1.13

De doorgeleide kracht (r) is de som van de veerkracht en de demperkracht. Dit betekent in het stationaire geval (1.44)

$$r = c\dot{u} + ku = (kA + c\omega B) \cos \omega t + (kB - c\omega A) \sin \omega t \quad (1.62)$$

met

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} ; \quad \zeta = c/(2 \sqrt{mk}),$$

en gebruikmakend van (1.46) volgt

$$r = \frac{\left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \cos \omega t + 2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \sin \omega t \right] f_0}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]} \quad (1.63)$$

Schrijven we de fundatiekracht als

$$r = r_0 \cos (\omega t - \psi) \quad (1.64)$$

dan wordt het resultaat

$$\frac{r_0}{f_0} = \sqrt{\left[\frac{1 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]} \quad (1.65)$$

en

$$\tan \psi = \frac{2\zeta \frac{\omega^3}{\omega_0^3}}{\left[1 + (4\zeta^2 - 1) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]} \quad (1.66)$$

In het ideale geval is de transmissiecoëfficiënt r_0/f_0 nul, maar voor praktische toepassing moet deze amplitudeverhouding klein zijn.

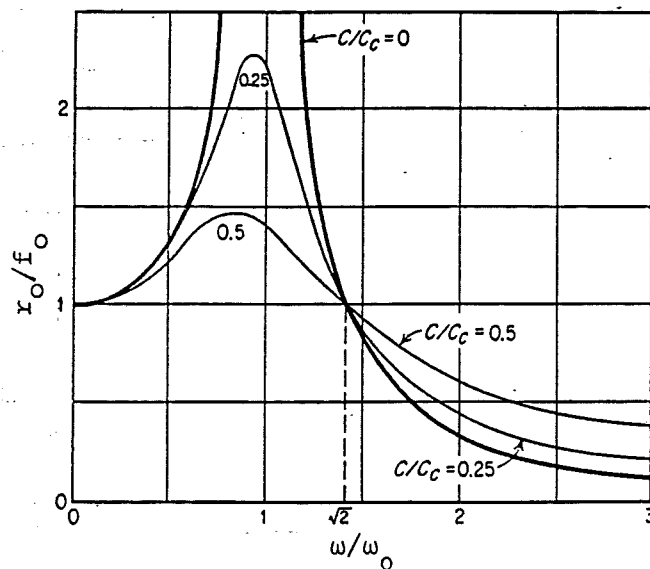


Fig. 1.14 Transmissie coëfficiënt voor een verende opstelling

Fig. 1.14 geeft r_0/f_0 als functie van ω/ω_0 en ζ . De conclusie is dat de eigenfrequentie laag moet zijn t.o.v. de excitatiefrequentie. Voor $\omega/\omega_0 < \sqrt{2}$ wordt de trillingsoverdracht door de veren slechter. In het geval $\omega/\omega_0 = 5$ en $\zeta = 0$ is de overdracht $r_0/f_0 = 1/24$, dit is de orde van grootte die gebruikelijk is.

In het gebied waar een verende ondersteuning zinvol is, wordt de overdracht door demping slechter. Dit effect is echter voor de

gebruikelijke dempingsfactoren niet groot, bovendien moet tijdens het aanlopen van een motor de eigenfrequentie ω_0 gepasseerd worden en dan is het voordelig dat het systeem wat gedempt is.

Het is ook mogelijk dat een apparaat geïsoleerd moet worden voor trillingen die via de fundatie worden toegevoerd, bijv. door een aardbeving.

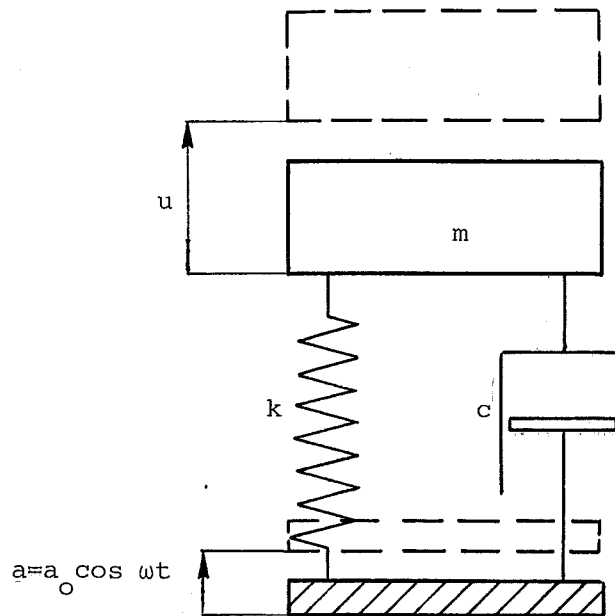


Fig. 1.15

We gaan nu uit van een harmonische beweging van de fundatie

$$a = a_0 \cos \omega t.$$

De bewegingsvergelijking wordt

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{a} + ka = ka_0 \cos \omega t - c\omega a_0 \sin \omega t \quad (1.67)$$

en kan direct gecorreleerd worden met (1.42).

De stationaire oplossing wordt weer geschreven in de vorm

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.68)$$

Na substitutie in (1.67) volgt voor A en B:

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + k) A + c\omega B &= ka_0 \\ (-m\omega^2 + k) B - c\omega A &= -c\omega a_0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

met als oplossing

$$\frac{A}{a_0} = \frac{k(k - m\omega^2) + c^2\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} = \frac{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]} \quad (1.70)$$

$$\frac{B}{a_0} = \frac{cm\omega^3}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} = \frac{2\zeta \frac{\omega^3}{\omega_0^3}}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]}$$

Schrijven we (1.68) in de vorm

$$u = u_0 \cos(\omega t - \psi)$$

dan geldt voor de amplitude u_0 en de fasehoek ψ

$$\frac{u_0}{a_0} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_0^2}{\left(1 - \omega^2 / \omega_0^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_0^2}} \quad (1.71)$$

$$\tan \psi = \frac{2\zeta \omega^3 / \omega_0^3}{1 + (4\zeta^2 - 1) \omega^2 / \omega_0^2}.$$

Deze oplossing is identiek met (1.65) en (1.66) zodat fig. 1.14 geldig blijft als we de verhouding van de krachtsamplituden r_0/f_0 vervangen door de verhouding van de verplaatsingsamplituden u_0/a_0 . Ook de opmerkingen op basis van fig. 1.14 blijven geldig met het oog op de isolatie voor trillingen vanuit de fundatie.

1.5 Integraal van Duhamel

In paragraaf 1.3 is de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$$

gegeven voor het geval $f(t)$ een harmonische belasting is. Is $f(t)$ een willekeurige (niet-periodieke) functie van de tijd dan staan er twee wegen open nl. een directe numerieke integratie of de bepaling van de zgn. Duhamel-integraal. De laatste methode willen we hier toelichten.

De algemene oplossing van de homogene bewegingsvergelijking is

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} \left[A \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right]$$

en met de beginvoorwaarden

$$u(0) = u_0 ; \quad \dot{u}(0) = v_0,$$

wordt dit

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} \left[u_0 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{(v_0 + \zeta \omega_0 u_0)}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] \quad (1.72)$$

Hieraan moet de particuliere oplossing toegevoegd worden waarvoor $u(0) = 0$ en $\dot{u}(0) = 0$. Is het krachtverloop $f(t)$ als in fig. 1.16 aangegeven dan is het effect van de impuls $f(\tau)d\tau$ voor $t < \tau$ niet aanwezig en gelden voor de vrije trilling in het tijdsdomein $t > \tau$ de beginvoorwaarden

$$u(\tau^+) = 0; \quad \dot{u}(\tau^+) = \frac{f(\tau)d\tau}{m}$$

Met (1.38) volgt dan voor $t > \tau$

$$u = \frac{e^{-\zeta \omega_0 (t-\tau)}}{m \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \{ \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} (t-\tau) \} f(\tau) d\tau \quad (1.73)$$

De totale oplossing inclusief het inschakelverschijnsel wordt

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_0 t} \left[u_0 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{(v_0 + \zeta \omega_0 u_0)}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] +$$

$$+ \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{m \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \int_0^t f(\tau) e^{+\zeta \omega_0 \tau} \sin \{ \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} (t-\tau) \} d\tau \quad (1.74)$$

De laatste term in (1.74) staat bekend als de integraal van Duhamel.

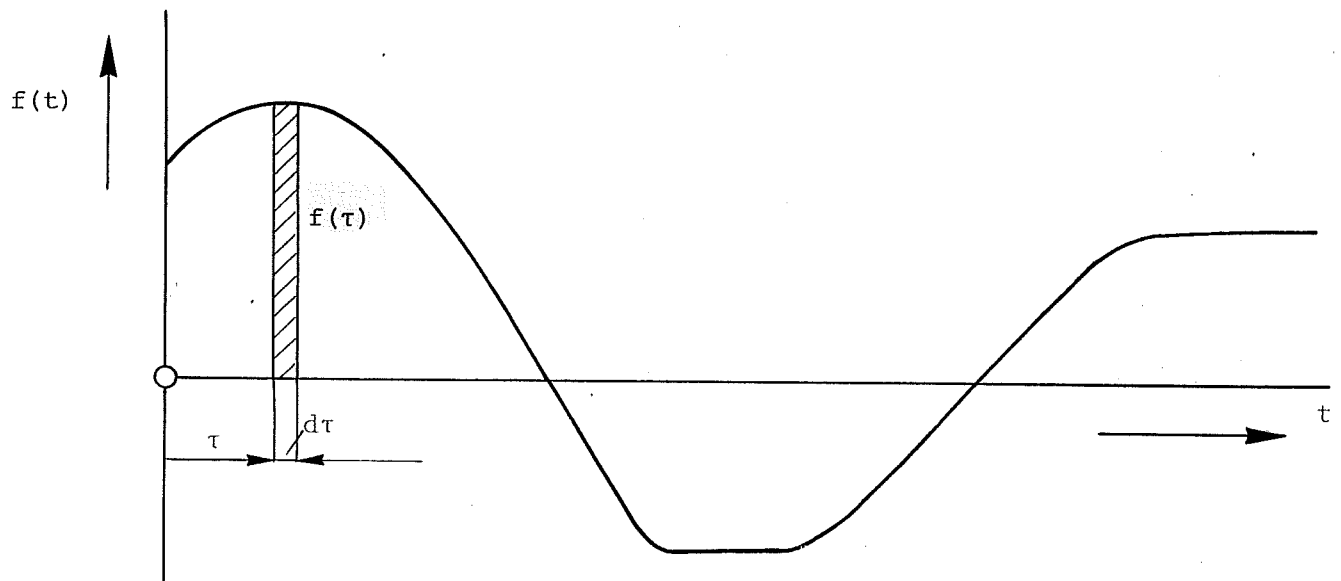


Fig. 1.16 Willekeurig met de tijd verlopend belasting $f(t)$

2. SYSTEEM MET TWEE GRADEN VAN VRIJHEID

2.1 Vrije trillingen

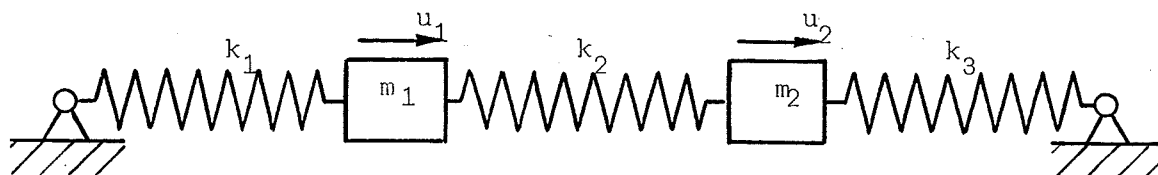


Fig 2.1

Met een enkelvoudig massa-veersysteem kunnen reeds allerlei trillingsverschijnselen en gevallen van trillingsisolatie worden onderzocht. Er is echter een aantal verschijnselen dat slechts verklaard kan worden aan de hand van een systeem met meer dan één vrijheidsgraad. Voordat we een discreet systeem met een willekeurig aantal vrijheidsgraden bespreken onderzoeken we een systeem met twee vrijheidsgraden. Er is ook weer een groot aantal andere systemen zoals torsie-systemen en elektrische netwerken waarvan de beschrijving geheel equivalent is met het tweevoudig massa-veersysteem in figuur 2.1

Toepassing van de wet van Newton geeft de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

We proberen nu een oplossing waarbij de massa's m_1 en m_2 een harmonische beweging uitvoeren met dezelfde nog onbekende frequentie maar met verschillende amplituden. Veronderstel daarom

$$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi) ; \quad u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.2)$$

Na substitutie in de bewegingsvergelijkingen vinden we de homogene, algebraïsche vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

Een van nul verschillende oplossing is alleen mogelijk voor die frequenties waarvoor de coëfficiëntendeterminant nul is. Dit

geeft de zgn. frequentievergelijking:

$$\begin{aligned} & (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) (-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0 \\ \text{of} \quad & \omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1)}{m_1 m_2} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Voor de verdere behandeling vereenvoudigen we het systeem door het aanbrengen van de symmetrievoorwaarden

$$m_1 = m_2 = m ; \quad k_3 = k_1$$

De frequentievergelijking wordt dan:

$$\omega^4 - \frac{2(k_1 + k_2)}{m} \omega^2 + \frac{k_1(k_1 + 2k_2)}{m^2} = 0 \quad (2.5)$$

en de oplossingen

$$(\omega_1)^2 = \frac{k_1}{m} \quad \text{met} \quad A_2^{(1)} = A_1^{(1)} \quad (2.6-a)$$

$$(\omega_2)^2 = \left(\frac{k_1 + 2k_2}{m} \right) \quad \text{met} \quad A_2^{(2)} = -A_1^{(2)} \quad (2.6-b)$$

De fysische betekenis van deze oplossing is duidelijk. De eerste oplossing geeft een vrije trilling waarvoor $u_1 = u_2$ zodat de veer k_2 niet wordt belast. Het gedrag is als voor twee onafhankelijke, enkelvoudige massa-veersystemen. De frequentie is dan natuurlijk onafhankelijk van k_2 en gelijk aan $\omega_1 = \sqrt{(k_1/m)}$. Trilt het systeem in de tweede trilvorm dan bewegen de massa's in tegengestelde richting en blijft het midden van de veer op zijn plaats. Dit punt kan als ingeklemd beschouwd worden. Weer hebben we twee ontkoppelde, enkelvoudige massa-veersystemen maar de effectieve veerstijfheid is $(k_1 + 2k_2)$ en de frequentie dus $\omega_2 = \sqrt{((k_1 + 2k_2)/m)}$.

De volledige oplossing kan geschreven worden als

$$\begin{aligned} u_1 &= C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ u_2 &= C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Met de beginvoorwaarden

$$t = 0 : u_1 = u_2 = u_0 ; \quad \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0 , \quad (2.8)$$

is de oplossing een harmonische beweging met frequentie ω_1 in de eerste trilvorm. Is de beginsituatie daarentegen

$$t = 0 : u_1 = -u_2 = u_0 ; \quad \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0 , \quad (2.9)$$

dan treedt een vrije trilling op met frequentie ω_2 in de tweede trilvorm. Voor alle andere beginvoorwaarden is de oplossing een superpositie van oplossingen in de eerste en tweede trilvorm. Als voorbeeld kiezen we de beginvoorwaarden:

$$u_1(0) = u_0 ; u_2(0) = 0 ; \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0 \quad (2.10)$$

Vergelijking (2.10) geeft de voorwaarden voor de bepaling van C_1, φ_1, C_2 en φ_2 in (2.7). De vergelijkingen worden

$$u_1(0) = C_1 \sin \varphi_1 + C_2 \sin \varphi_2 = u_0$$

$$\dot{u}_1(0) = C_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + C_2 \omega_2 \cos \varphi_2 = 0$$

$$u_2(0) = C_1 \sin \varphi_1 - C_2 \sin \varphi_2 = 0$$

$$\dot{u}_2(0) = C_1 \omega_1 \cos \varphi_1 - C_2 \omega_2 \cos \varphi_2 = 0$$

met als oplossing:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2 ; C_1 = C_2 = u_0/2$$

De oplossing voor de vrije ongedempte trilling wordt met de gegeven beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} u_0 [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] \\ u_2 &= \frac{1}{2} u_0 [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Deze oplossing kan ook geschreven worden als

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t \\ u_2 &= u_0 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t \end{aligned} \quad (2.12)$$

In het bijzondere geval dat $k_2 \ll k_1$ hebben we te maken met twee enkelvoudige massa-veersystemen met dezelfde frequentie die door de veer k_2 zwak gekoppeld zijn. In zo'n geval is

$(\omega_2 - \omega_1) \ll (\omega_2 + \omega_1)$ zodat de bewegingen u_1 en u_2 in (2.12) een frequentie krijgen van $\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ en een amplitude die langzaam varieert. Men noemt dit zwevingen. Fig 2.2 geeft de oplossing van vergelijking (2.12). We zien ook in de figuur dat de totale energie, die constant blijft, langzaam wordt overgebracht van het ene massa-veersysteem met vrijheidsgraad u_1 naar het andere met vrijheidsgraad u_2 en omgekeerd.

Een aardige demonstratie van zwevingen t.g.v zwakke koppeling tussen twee enkelvoudige massa-veersystemen met bijna gelijke eigenfrequenties geeft de veer van Wilburforce (Fig 2.3). De massa aan een spiraalveer heeft twee graden van vrijheid namelijk een op en neer gaande beweging en een torsiebeweging. De koppeling ontstaat doordat een trekkracht op de veer ook een kleine hoekverdraaiing geeft en omgekeerd een torsiemoment een kleine axiale verplaatsing veroorzaakt. De twee stelschroeven (Fig 2.3) kunnen het traagheidsmoment I beïnvloeden terwijl m constant blijft; op deze wijze kunnen de eigenfrequenties van de torsie- en van de axiale beweging dicht bij elkaar gebracht worden.

Wordt de veer uitgerekt en daarna de massa losgelaten dan treedt een axiale trilling op die langzaam overgaat in een torsiebeweging enz.

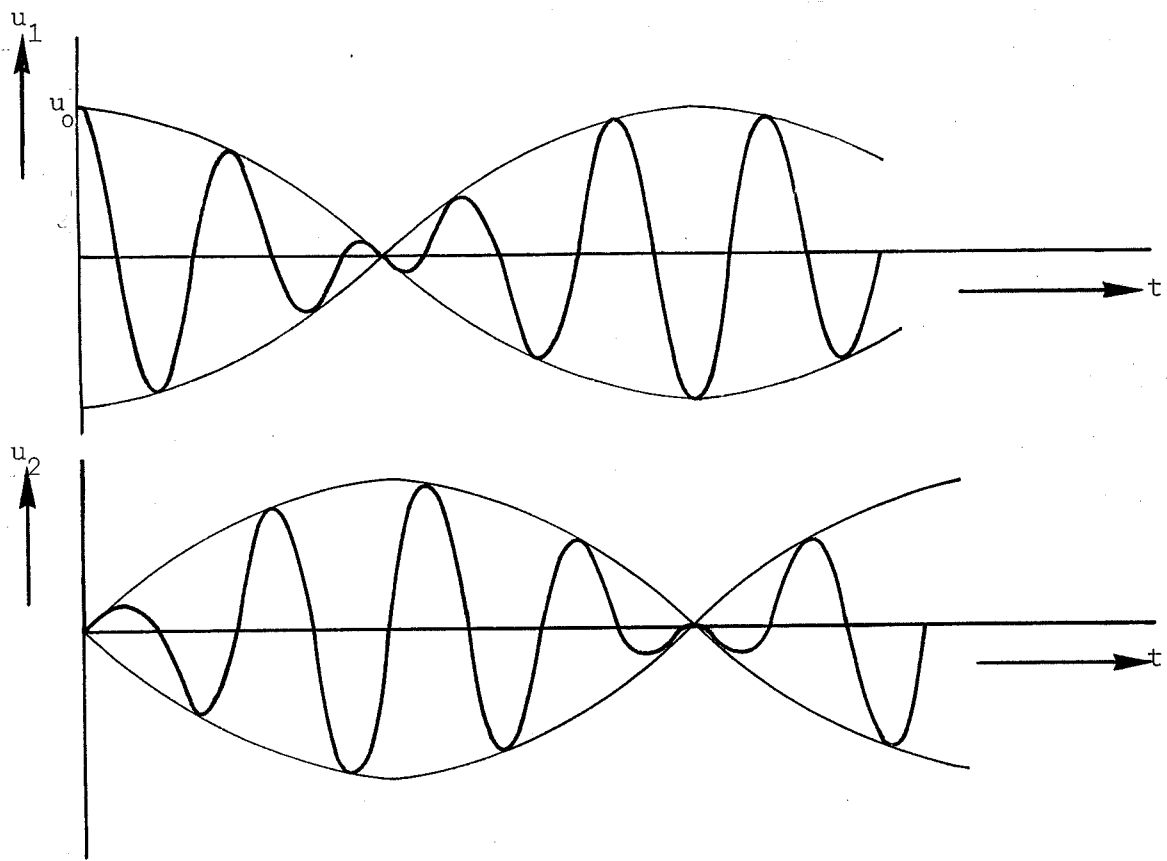


Fig 2.2 Zwevingen t.g.v twee gelijke, enkelvoudige massa-
veersystemen die zwak gekoppeld zijn

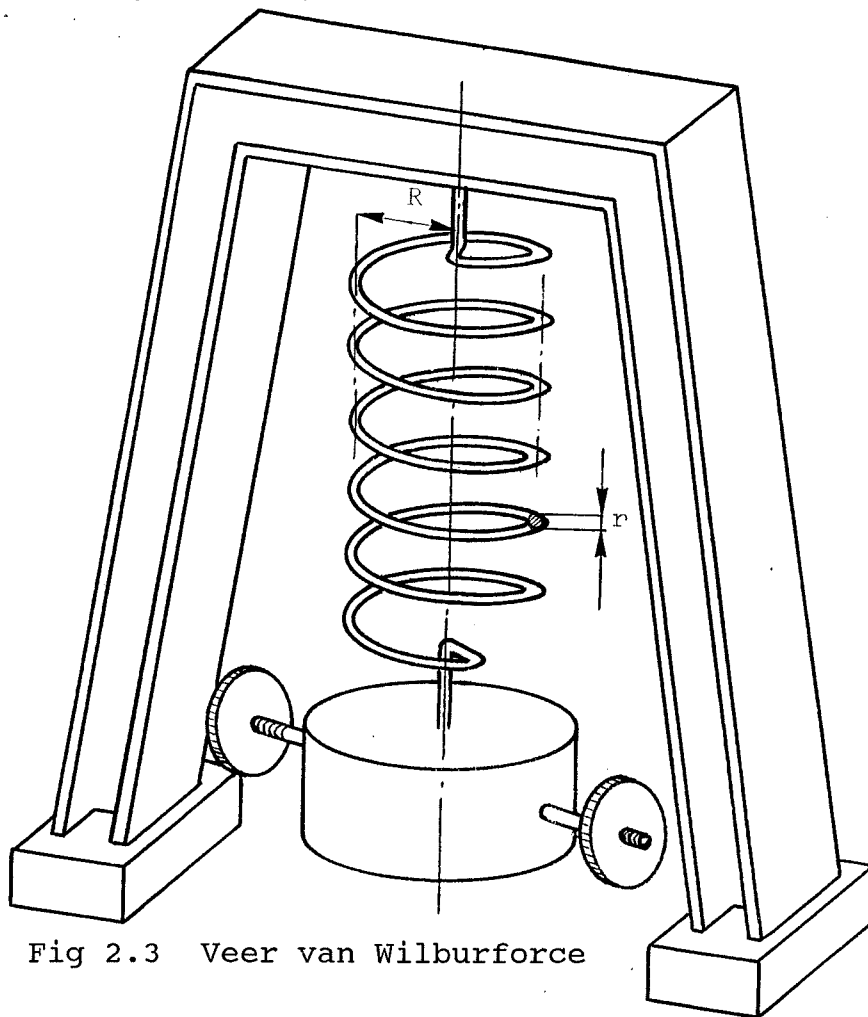


Fig 2.3 Veer van Wilburforce

Om te laten zien dat er inderdaad een zwakke koppeling optreedt beschouwen we het gedrag van een veerelement ds onder een hoek α met het horizontale vlak als er centraal op de veer een axiale kracht f aangrijpt. De straal van de veerdraad is r en van de spiraal R (zie figuur 2.3). De buig- en torsiestijfheid van de veerdraad zijn resp.

$$S_b = \frac{\pi}{4} E r^4 ; S_t = \frac{\pi}{2} G r^4 = \frac{1}{1+\nu} S_b \quad (2.13)$$

Het koppel op de draad is fR (zie figuur 2.4).

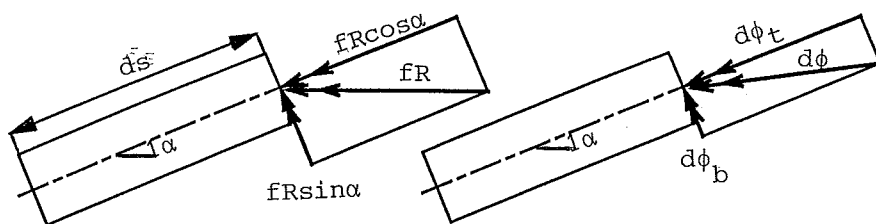


Fig 2.4

De incrementen van buig- en torsiehoek over ds zijn

$$d\phi_b = \frac{fR \sin \alpha}{S_b} ds ; d\phi_t = (1+\nu) \frac{fR \cos \alpha}{S_b} ds \quad (2.14)$$

Het resulterende increment $d\phi$ in figuur 2.4 heeft ook een verticale ontbondene zodat er inderdaad ook torsie optreedt bij axiale belasting van de veer. Met

$$f = k_f u + \varepsilon \psi$$

$$T = \varepsilon u + k_t \psi \quad (2.15)$$

volgt voor de bewegingsvergelijkingen

$$m \ddot{u} + k_f u + \varepsilon \psi = 0$$

$$I \ddot{\psi} + \varepsilon u + k_t \psi = 0$$

Zijn nu de eigenfrequenties van de ontkoppelde systemen $\sqrt{(k_f/m)}$ en $\sqrt{(k_t/I)}$ praktisch aan elkaar gelijk dan hebben we inderdaad weer een oplossing van het type (2.12)

2.2 Gedwongen trillingen van een ongedempt systeem

De bewegingsvergelijkingen voor een tweevoudig massa-

veersysteem waarvan de massa m harmonisch geëxciteerd wordt of waarvan het ophangpunt harmonisch geëxciteerd wordt luiden

$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = f_0 \cos \omega t \quad \text{resp} \quad k_1 a_0 \cos \omega t$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = 0$$

De oplossing voor de excitatie van het steunpunt is dus de oplossing van het geval dat de massa m_1 geëxciteerd wordt met een amplitude $f_0 = k_1 a_0$

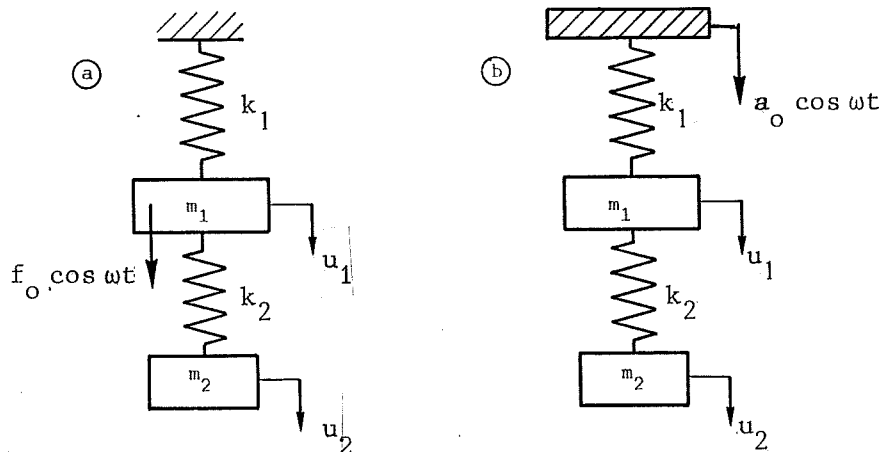


Fig 2.5 Twee-massaveersysteem harmonisch geëxciteerd

De vrije trillingen, die zullen uitdempen mits de excitatiefrequentie niet gelijk is aan een eigenfrequentie, laten we buiten beschouwing en we kijken alleen naar de stationaire oplossing d.w.z naar de particuliere oplossing van de bewegingsvergelijkingen.

Als verondersteld wordt dat de oplossing geschreven kan worden in de vorm

$$u_1 = A_1 \cos \omega t ; u_2 = A_2 \cos \omega t \quad (2.18)$$

Dan vinden we

$$A_1 = \frac{(1 - \omega^2 / \omega_2^2)}{(1 - \omega^2 / \omega_2^2)(1 + k_2/k_1 - \omega^2 / \omega_1^2) - k_2/k_1} \cdot \frac{f_0}{k_1}$$

$$A_2 = \frac{1}{(1 - \omega^2 / \omega_2^2)(1 + k_2/k_1 - \omega^2 / \omega_1^2) - k_2/k_1} \cdot \frac{f_0}{k_1} \quad (2.19)$$

waarin

$$\omega_1^2 \equiv k_1 / m_1 ; \omega_2^2 \equiv k_2 / m_2 \quad (2.20)$$

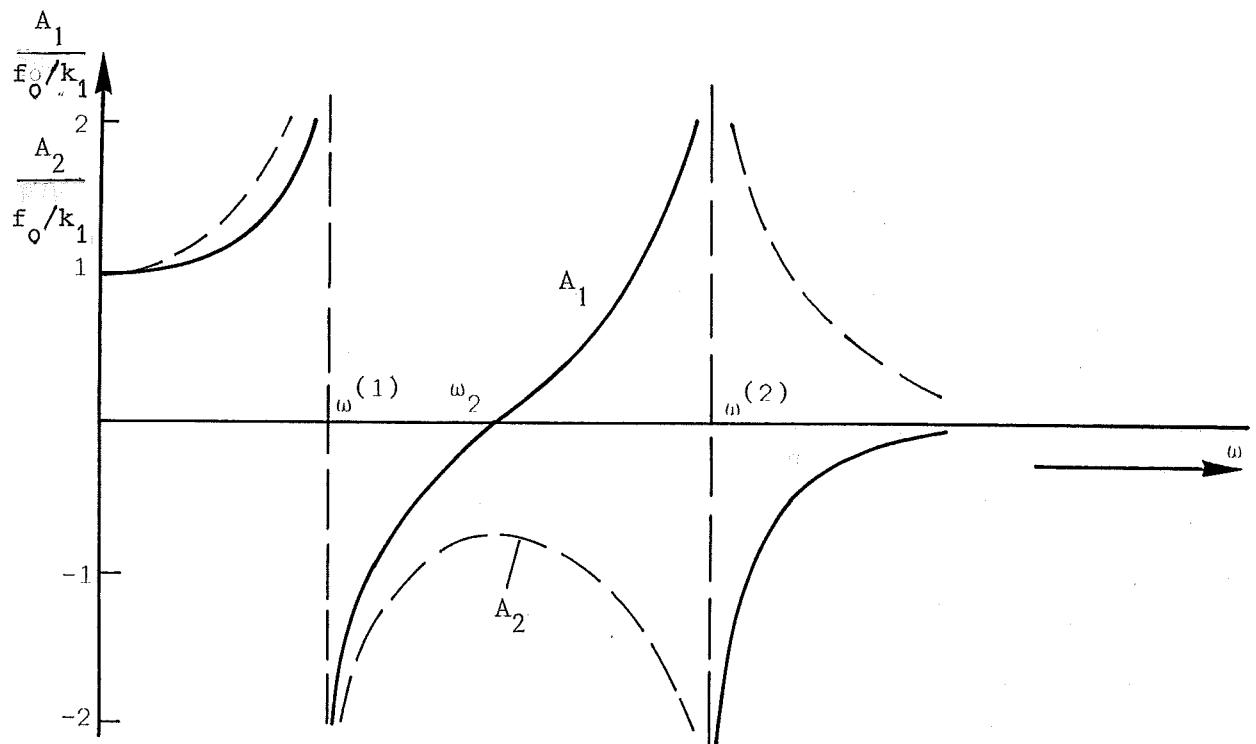


Fig 2.6 Amplituden van de massa's als functie van ω

Figuur 2.6 geeft de amplituden A_1 en A_2 geschaald met de statische amplitude f_0/k_1 .

Er zijn zoals te verwachten twee frequenties $\omega^{(1)}$ en $\omega^{(2)}$ waar de amplituden ∞ worden. Dit zijn de eigenfrequenties van het systeem. De amplitude A_1 is bij één frequentie nl. $\omega = \omega_2 = \sqrt{(k_2/m_2)}$ nul. Bij deze frequentie is de veerkracht in veer 2 gelijk en tegengesteld aan de excitatiekracht $f_0 \cos \omega t$ zodat de resulterende kracht op m_1 nul is en de massa niet trilt. Voor frequenties lager dan ω_2 zijn de bewegingen in fase en voor hogere frequenties in tegenfase.

Een machine of machine-onderdeel wordt soms geëxciteerd op één bepaalde constante frequentie; vooral als deze frequentie in de buurt ligt van een eigenfrequentie kan dit ontoelaatbare trillingen veroorzaken. Kunnen we de trillingen niet voldoende reduceren door wijzigen van stijfheid of massa dan is er de mogelijkheid een dynamische trillingsdemper toe te passen.

Wordt de betreffende machine geschematiseerd met het massaveersysteem k_1, m_1 en is de excitatie $f_0 \cos \omega t$, dan weten we nu dat een hieraan bevestigd massaveersysteem k_2, m_2 met een eigenfrequentie $\omega_2 = \sqrt{(k_2/m_2)}$ gelijk aan de excitatiefrequentie tot gevolg heeft dat de hoofdmassa m_1 niet meer trilt. Op deze wijze hebben we dus inderdaad een dynamische trillingsdemper verkregen (Frahm 1909). Een demper heeft niet veel zin als de excitatie niet dicht in de buurt van de resonantie is, daarom beschouwen we speciaal het geval

$$\frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1}$$

De verhouding van de hulpmassa tot de hoofdmassa geven we aan met

$$\mu = m_2/m_1$$

Voor dit speciale geval wordt (2.19)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1-\omega^2/\omega_2^2)}{(1-\omega^2/\omega_2^2)(1+\mu-\omega^2/\omega_2^2)-\mu k_1} \cdot \frac{f_0}{k_1} \\ A_2 &= \frac{1}{(1-\omega^2/\omega_2^2)(1+\mu-\omega^2/\omega_2^2)-\mu k_1} \cdot \frac{f_0}{k_1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

De eigenfrequenties zijn bepaald door de vergelijking

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - \mu = 0 \quad (2.22)$$

met als oplossing

$$\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\mu + \frac{\mu^2}{4}\right)} \quad (2.23)$$

Voor een hulpmassa die een vijfde deel is van de hoofdmassa ($\mu=1/5$) vinden we $\omega^{(1)}=0,8\omega_1$ en $\omega^{(2)}=1,25\omega_1$. De resonantie voor $\omega=\omega_1$ is door toevoeging van het hulpsysteem (k_2, m_2) vervangen door twee resonantie frequenties één lager en één hoger dan ω_1 . Uit figuur 2.6 zal duidelijk zijn dat de dynamische demper alleen bruikbaar is als de excitatiefrequentie bijna constant is. Dit is het geval voor machines die direct gekoppeld zijn met synchrone elektrische motoren en generatoren. Voor machines met variabele toerentallen is deze demper niet zinvol omdat het systeem met één eigenfrequentie vervangen is door een systeem met twee eigenfrequenties die resp. wat lager en wat hoger liggen.

2.3 Gedwongen trillingen van een gedempt systeem

We beschouwen een systeem met damping en brengen in dit geval

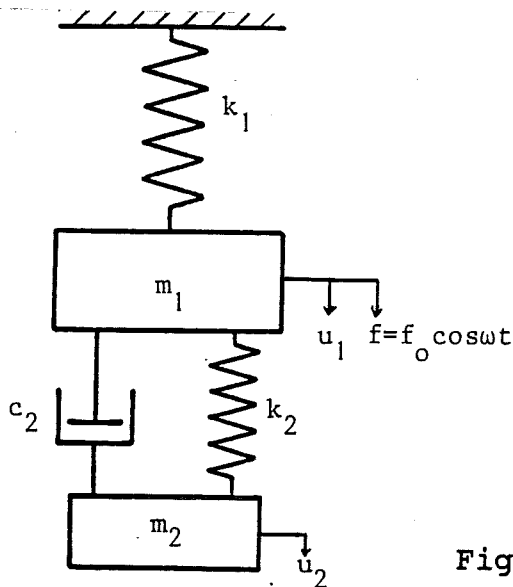


Fig 2.7

alleen een demper aan tussen de twee massa's, zie figuur 2.7. De excitatie is een harmonische excitatie van massa m_1 . De bewegingsvergelijkingen worden

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

We zijn alleen geïnteresseerd in de gedwongen trillingen en laten de vrije trillingen t.g.v het inschakelverschijnsel buiten beschouwing. Omdat er faseverschuiving optreedt zoeken we een oplossing in de vorm

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ u_2 &= A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na substitutie in de bewegingsvergelijkingen volgt:

$$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)-m_1\omega^2 & c_2\omega & -k_2 & -c_2\omega \\ -c_2\omega & (k_1+k_2)-m_1\omega^2 & c_2\omega & -k_2 \\ -k_2 & -c_2\omega & k_2-m_2\omega^2 & c_2\omega \\ c_2\omega & -k_2 & -c_2\omega & k_2-m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Dit zijn de algebraïsche vergelijkingen voor de vier constanten A_1, B_1, A_2 en B_2 .

In principe is hiermee het probleem opgelost, maar we zullen nu als voorbeeld nog nagaan in hoeverre een hulpmassa m_2 met veer k_2 en demper c_2 geschikt is om als trillingsdemper op te treden. De toevoeging t.o.v het systeem in de vorige paragraaf is dus alleen de lineaire demper.

We introduceren de volgende parameters:

$$\mu = m_2/m_1 ; \omega_1^2 = k_1/m_1 ; \omega_2^2 = k_2/m_2 ;$$

$$g = \omega/\omega_1 ; h = \omega_2/\omega_1 ; \zeta = c_2/(2m_2\omega_1) ; u_{st} = f_0/k_1$$

en vinden dan voor de versterking van de amplitude van de hoofdmassa

$$\hat{u}_1 = \sqrt{(A_1^2 + B_1^2)}$$

t.o.v de statische amplitude:

$$\frac{\hat{u}_1}{u_{st}} = \sqrt{\frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - h^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu h^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - h^2)]^2}}$$

Voor gelijke eigenfrequenties ($h=1$) en een hulpmassa die 5% is van de hoofdmassa geeft figuur 2.8 het verloop van de amplitude als functie van $g=\omega/\omega_1$.

Als $\zeta=0$ geldt de oplossing als gegeven in de vorige paragraaf. Voor $\zeta=\infty$ is het gedrag als voor een enkelvoudig massa-veersysteem met massa (m_1+m_2) . De figuur geeft ook het amplitude verloop voor $\zeta=0,10$ en $\zeta=0,32$. De maximale amplitude voor $\zeta=0,32$ is aanzienlijk hoger dan die voor $\zeta=0,10$. Het is opmerkelijk dat er twee punten zijn (P en Q) die onafhankelijk zijn van ζ . De demper heeft nu de functie om de maximale amplitude die een functie is

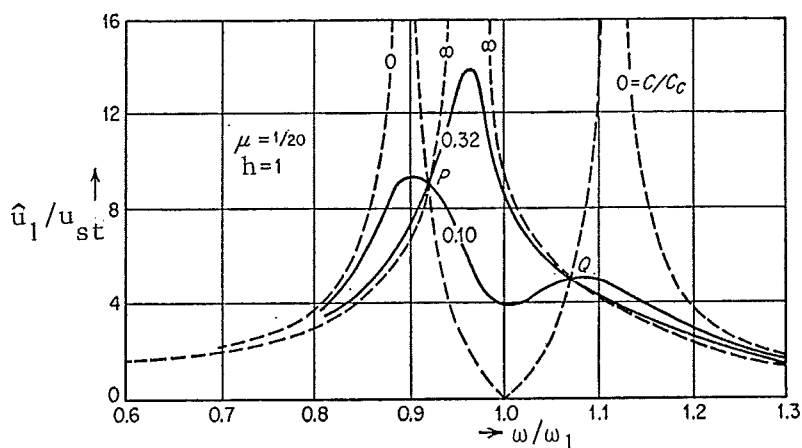


Fig 2.8 Amplitude van de hoofdmassa als functie van ω/ω_1

van h en ζ zo laag mogelijk te maken. Het optimum zal ongeveer bereikt worden als P en Q op hetzelfde niveau liggen en de raaklijn aan de kromme horizontaal is in P of in Q. Fig 2.9 geeft een dergelijke oplossing voor $\mu=0,25$. Zowel de oplossing met

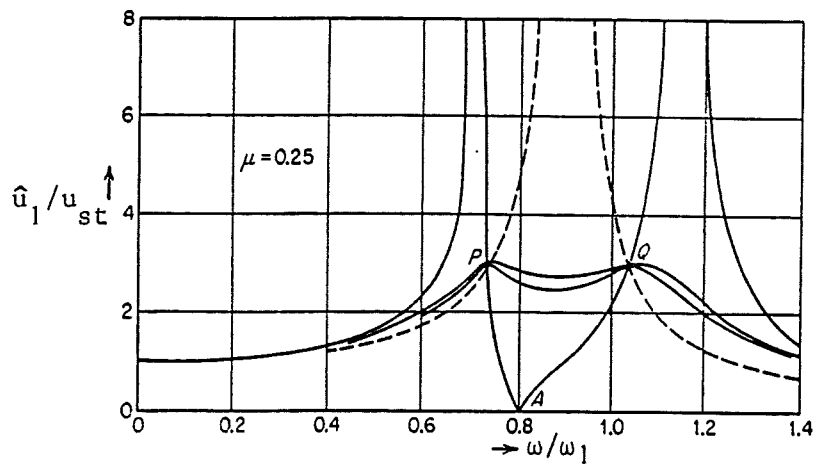


Fig 2.9 Resonantiecurve voor een optimale trillingsdemper

horizontale raaklijn in P als die met horizontale raaklijn in Q is gegeven. De optimale waarde voor de frequentie verhouding

$$h = \frac{1}{1+\mu} = 0,8$$

terwijl de amplituden in P en Q dan zijn

$$\frac{\hat{u}}{u_{st}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\mu}\right)} = 3$$

De optimale dampingsfactor wordt

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3\mu}{2(1+\mu)^3}\right)} = 0,22$$

De detailuitwerking van deze berekeningen laten we hier achterwege. Met deze trillingsdemper waarbij $\mu = 0,25$ werd gekozen, kunnen we dus in het gehele frequentiegebied de amplitude reduceren tot driemaal de statische amplitude.

Wordt de veerconstante $k_2=0$ gesteld dan hebben we dus alleen een lineaire demper tussen de hulp- en hoofdmasse. Deze demper staat bekend als de Lanchester-demper. Het zal duidelijk zijn dat $\omega_2=0$ en $h=0$. De optimale demper geeft een maximale amplitude verhouding

$$\frac{\hat{u}_1}{u_{st}} = 1 + \frac{2}{\mu} = 9 \quad \text{voor } \mu=0,25$$

en de daarbij behorende dampingsfactor

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{[2(2+\mu)(1+\mu)]}} = 0,42 \text{ voor } \mu=0,25$$

Fig 2.10 toont een constructieve uitvoering van een Lanchester-demper.

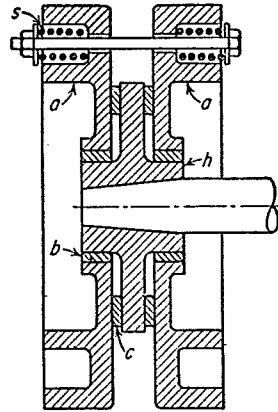


Fig 2.10 Lanchester-demper.

Het blijkt dat de amplitude van de relatieve beweging van de hulpmassa t.o.v de hoofdmassa en dus de veerkracht in de veer 2, drie à viermaal zo groot is als voor de hoofdbeweging. Met het oog op vermoeiing kan dit een probleem zijn, daarom wordt wel voor een Lanchester-demper gekozen hoewel deze, zoals uit het voorbeeld blijkt, minder effectief is.

3.1 Bewegingsvergelijkingen

Als we denken aan werkelijke constructies zoals schepen, offshore constructies, auto's, treinen, kranen, gereedschapswerktuigen en allerlei apparaten in de fijnmechanische industrie, dan zijn deze constructies dermate gecompliceerd dat alleen met moderne numerieke methoden het in wezen continue systeem gereduceerd kan worden tot een voldoende nauwkeurig discreet systeem met veel vrijheidsgraden. Voor deze systemen zullen de lagere eigenfrequenties berekend moeten worden en de responsie op te verwachten periodieke belasting en/of op kortdurende belastingpulsen. Het kennen van de responsie van de constructie op dynamische belasting kan belangrijk zijn met het oog op sterkte (breuk, vermoeiing) maar ook in verband met comfort (trein, auto).

Hoewel de behandeling hier beperkt wordt tot lineaire systemen, hebben we in werkelijkheid vaak met niet-lineair gedrag te maken. De responsie kan dan niet verkregen worden door superpositie van de bijdragen aan een aantal trilvormen. Een directe numerieke integratie van de bewegingsvergelijkingen is dan de enige methode. Beide methoden zullen we in dit hoofdstuk bespreken.

Het verschil tussen de statica en de dynamica is dat in de dynamica de massakrachten in rekening gebracht moeten worden. Volgens d'Alembert betekent dit dat we aan de uitwendige belastingvector (f), die in het algemeen een functie van de tijd zal zijn, een extra belastingvector $-M\ddot{u}$ moeten toevoegen en eventueel ook nog een vector van dempingskrachten die in de lineaire theorie benaderd wordt met een snelheidsevenredige dempingsvector $(-C\dot{u})$. Worden de massa's en de massatraagheden direct gekoppeld aan de vrijheidsgraden in de knooppunten dan zal de massamatrix (M) een diagonaal matrix zijn. Is er massa buiten de knooppunten aanwezig dan bevat M ook termen buiten de diagonaal.

In het college Stijfheid en Sterkte II is uitvoerig stilgestaan bij de discretisering van een constructie opgebouwd uit staaf-, balk- en/of plaalementen. We zullen daarom niet opnieuw bespreken wat de elementmatrices zijn voor diverse elementtypen en de daaruit opgebouwde systeemmatrix K gedefinieerd door

$$Ku = f$$

waarin u de vector is van knooppuntsverplaatsingen en/of verdraaiingen en f de belastingvector inclusief eventueel de massa- en dempingskrachten.

Wel zullen we de berekeningsprocedure voor de opbouw van de massa-matrix hier herhalen aan de hand van de bijdrage van een willekeurig balkelement uit een vlakke balkconstructie die in zijn vlak belast is. Voor andere elementtypen zoals plaat- en ringelementen is de procedure identiek.

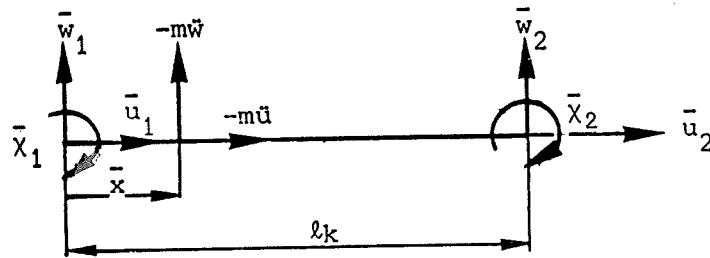


Fig. 3.1.

Is de massa per eenheid van lengte m dan is de virtuele arbeid van de traagheidskrachten (Fig. 3.1)

$$- \int_0^{\ell_k} [m\ddot{u}\delta u + m\ddot{w}\delta w] d\bar{x} \quad (3.1)$$

Met de lokale verplaatsingsvector voor element k :

$$\bar{u}^k = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{w}_1 & \bar{x}_1 \ell_0 & \bar{u}_2 & \bar{w}_2 & \bar{x}_2 \ell_0 \end{bmatrix}$$

en het verplaatsingsverloop voor de axiale en resp. de normale verplaatsing

$$u = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{x}}{\ell_k} \\ \frac{\bar{x}}{\ell_k} \end{bmatrix},$$

$$w = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \bar{x}_1 \ell_0 & \bar{w}_2 & \bar{x}_2 \ell_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^3 \\ \left\{ -\left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right) + 2\left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^3 \right\} \frac{\ell_k}{\ell_0} \\ 3\left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^3 \\ \left\{ \left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}}{\ell_k}\right)^3 \right\} \left(\frac{\ell_k}{\ell_0}\right) \end{bmatrix}$$

i)

ℓ_0 is een geschikt gekozen referentie lengte

wordt die virtuele arbeid

$$- \int_0^{\ell_k} [m\ddot{u}\delta u + m\ddot{w}\delta w] d\bar{x} = -\delta \bar{u}^k T \bar{M}^k \ddot{u}^k \quad (3.2)$$

Is de massa per lengte-eenheid constant dan resulteert dit in de massamatrix

$$\bar{M}^k = \frac{m_k \ell_k}{420} \begin{vmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & -22 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right) & 0 & 54 & 13 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right) \\ & & 4 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right)^2 & 0 & -13 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right) & -3 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right)^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & 22 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right) \\ & & & & & 4 \left(\frac{\ell_k}{\ell_0} \right)^2 \\ & & & & & & (\text{sym.}) \end{vmatrix}$$

De massamatrix is gebaseerd op de gegeven, benaderde verplaatsingsfuncties u en w . Ze wordt daarom de consistente massamatrix genoemd. Alle vrijheidsgraden, zowel verplaatsingen als rotaties, zijn gekoppeld met massa.

Met een transformatie

$$\bar{u}^k = T^k u \quad (3.3)$$

kunnen we overgaan van lokale naar globale verplaatsingen en de bijdrage van elk element

$$M^k = T^k T \bar{M}^k T^k \quad (3.4)$$

aan de massamatrix van de hele constructie (M) bepalen. Naast de bijdragen van de verdeelde massa zullen er ook nog geconcentreerde massa's en/of massatraagheden aan M moeten worden toegevoegd. De virtuele arbeidsvergelijking wordt dan

$$\delta u^T K u = \delta u^T f(t) - \delta u^T M \ddot{u} \quad (3.5)$$

en hieruit volgt het stelsel bewegingsvergelijkingen

$$M \ddot{u} + K u = f(t). \quad (3.6)$$

Als aangenomen wordt dat de demping verwaarloosbaar is, dan is door het gegeven stelsel van differentiaalvergelijkingen en de bijbehorende beginvoorwaarden $u(0)$ en $\dot{u}(0)$ het dynamisch gedrag

van de constructie vastgelegd.

In principe zijn er nu, zoals reeds opgemerkt, twee oplossingsmethoden, namelijk een directe numerieke integratie van het stelsel (3.6) of een bepaling van eigenfrequenties met bijbehorende trilvormen gevolgd door de bepaling van excitatie en responsie van elke trilvorm afzonderlijk. De totale responsie volgt dan uit de superpositie van de afzonderlijke bijdragen.

Hier wordt eerst de tweede procedure behandeld; deze geeft meer inzicht in het dynamisch gedrag van elastische constructies dan de eerste methode.

3.2 Modale analyse

Voor het bepalen van de eigenfrequenties en trilvormen gaan we uit van de homogene vergelijkingen

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (3.7)$$

Substitutie van de harmonische oplossing

$$u = \hat{u} \sin \omega t \quad (3.8)$$

geeft

$$[K - \omega^2 M] \hat{u} = 0 \quad (3.9)$$

met een van nul verschillende oplossing voor $\hat{u}$ als

$$\det |K - \omega^2 M| = 0 \quad (3.10)$$

Een systeem met n vrijheidsgraden gekoppeld met massa geeft n reële oplossingen voor ω^2 . Bij elke eigenfrequentie ω_p kan een niet-triviale oplossing u gegeven worden die slechts tot op een vermenigvuldigingsfactor na bepaald is. Door normering kan elke trilvorm volledig vastgelegd worden. De genormeerde trilvorm bij ω_p wordt aangegeven met e^p dus:

$$K e^p = \omega_p^2 M e^p. \quad (3.11)$$

Ook geldt dan

$$e^{qT} K e^p = \omega_p^2 e^{qT} M e^p \quad (3.12)$$

waarin e^q een willekeurige andere trilvorm is.

Omdat eveneens geldt:

$$e^{qT} K e^p = \omega_q^2 e^{qT} M e^p$$

volgt

$$(\omega_p^2 - \omega_q^2) e^{qT} M e^p = 0$$

d.w.z. dat voor $\omega_p \neq \omega_q$ de volgende orthogonaliteit moet gelden

$$e^q{}^T M e^p = 0 \quad (3.13)$$

De normering van de trilvormen kan bijv. zo gekozen worden dat

$$e^p{}^T M e^p = 1. \quad (3.14)$$

Als alle eigenfrequenties verschillend zijn zoals hier wordt aangenomen dan kunnen we de eigenvectoren bijeenbrengen in een vierkante matrix E gedefinieerd door

$$E = | e^1 \ e^2 \ \dots \ e^n | \quad (3.15)$$

Uit de vergelijkingen (3.12), (3.13) en (3.14) volgt

$$E^T M E = I, \quad E^T K E = \Omega^2, \quad (3.16)$$

waarin I de eenheidsmatrix is en

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \omega_n \end{vmatrix}.$$

Een willekeurige oplossing u van

$$M\ddot{u} + Ku = f(t)$$

wordt nu gezocht in de vorm

$$u = Ea. \quad (3.17)$$

Substitutie van deze oplossing geeft

$$ME\ddot{a} + KEa = f(t)$$

of

$$E^T M E \ddot{a} + E^T K E a = E^T f(t)$$

en met (3.16)

$$\ddot{a} + \Omega^2 a = E^T f(t). \quad (3.18)$$

Dit is een stelsel ontkoppelde bewegingsvergelijkingen.
Met de substitutie

$$E^T f = b \quad (3.19)$$

wordt een willekeurige bewegingsvergelijking:

$$\ddot{a}_p + \omega_p^2 a_p = b_p(t) \quad (3.20)$$

Dit zijn dus vergelijkingen als voor een enkelvoudig massa-veer-systeem. De participatiefactor a_p bepaalt de bijdrage van de p-de trilvorm (e_p) aan de totale responsie van het systeem. Treedt er een periodieke excitatie op zoals bij veel toepassingen het geval

is, dan zal ook b_p een periodieke functie zijn die is opgebouwd uit een aantal harmonische termen. De responsie op een harmonische excitatie

$$b_p = \hat{b}_p \sin \omega t \quad (3.21)$$

wordt bepaald door de particuliere oplossing

$$a_p = \hat{a}_p \sin \omega t \quad (3.22)$$

van de bewegingsvergelijking (3.20) waarin

$$\hat{a}_p = \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2)} \hat{b}_p \quad (3.23)$$

De oplossingen van de homogene vergelijking die hieraan toegevoegd moeten worden zullen weer snel uitdempen als gevolg van altijd aanwezige geringe damping. Door deze damping zal ook de amplitude op de resonantiefrequentie $\omega = \omega_p$ begrensd blijven, maar hij kan wel zo groot worden dat er gevaar optreedt voor breuk en vermoeiing, of dat hij ontoelaatbaar is met het oog op comfort.

Voor lichtgedempte systemen die periodiek worden geëxciteerd kan bij goede benadering worden aangenomen dat elk van de trilvormen een snelheidsevenredige damping ondervindt zodat vgl. (3.20) wordt

$$\ddot{a}_p + 2\zeta_p \omega_p \dot{a}_p + \omega_p^2 a_p = b_p \quad (3.24)$$

Zoals eerder vermeld is de dimensieloze dempingscoëfficiënt ζ_p voor grote constructies zoals scheeps- en offshoreconstructies meestal 0,02 - 0,03. De responsie op de harmonische excitatie

$$b_p = \hat{b}_p \sin \omega t$$

wordt in dit geval (na uitdempen van inschakelverschijnselen):

$$a_p = \frac{\hat{b}_p}{\omega_p^2} \frac{1}{\sqrt{\left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right\}^2 + 4\zeta_p^2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right]}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.25a)$$

met

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta_p \omega_p \omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)} \quad (3.25b)$$

We passen de zg. modale analyse toe op een buigbalk aan één zijde ingeklemd en aan de andere zijde belast door een kracht $F(t)$ en een koppel $T(t)$ (zie figuur 3.2). De massakrachten ontstaan

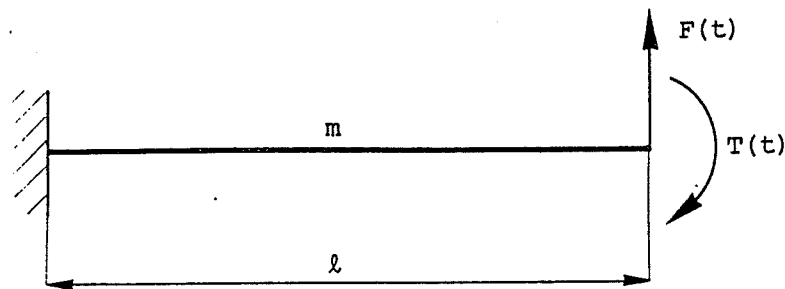


Fig. 3.2.

alleen door een verdeelde massa per eenheid van lengte m . Langs de balk wordt slechts één element gekozen en de longitudinale trillingen blijven buiten beschouwing (ontkoppeld van de buigtrillingen).

De bewegingsvergelijkingen zijn in dit geval

$$\frac{m\ell}{210} \begin{vmatrix} 78 & 11 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{w}_2 \\ \ddot{\chi}_2 \ell \end{vmatrix} + \frac{EI}{\ell^3} \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_2 \\ \chi_2 \ell \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ T/\ell \end{vmatrix},$$

en de eigenfrequenties en genormeerde trilvormen

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 12,48 \frac{EI}{m\ell^4}; & e^1 &= (m\ell)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 2,020 \\ -2,782 \end{vmatrix}, \\ (\text{exact } 12,36 \frac{EI}{m\ell^4}) & & & \\ \omega_2^2 &= 1211,52 \frac{EI}{m\ell^4}; & e^2 &= (m\ell)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 2,815 \\ -21,454 \end{vmatrix}, \\ (\text{exact } 485,5 \frac{EI}{m\ell^4}) & & & \end{aligned}$$

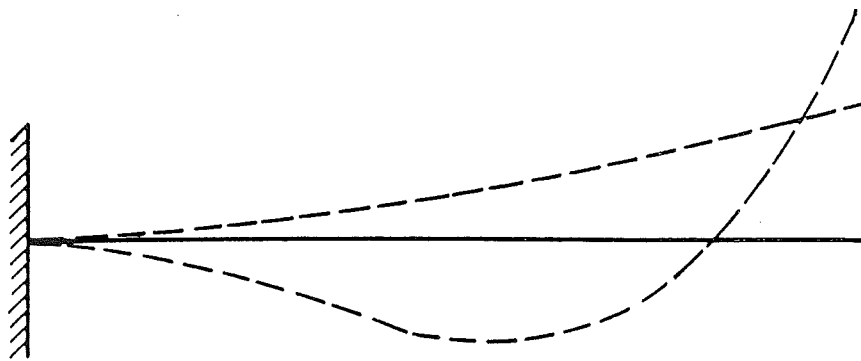


Fig. 3.3. Twee trilvormen voor de buigbalk.

De ontkoppelde bewegingsvergelijkingen worden

$$\ddot{a}_1 + 12,48 \frac{EI}{m\ell^4} a_1 = (m\ell)^{-\frac{1}{2}} \left[2,02 F - 2,78 \frac{T}{\ell} \right];$$

$$\ddot{a}_2 + 1211,52 \frac{EI}{m\ell^4} a_2 = (m\ell)^{-\frac{1}{2}} \left[2,81 F - 21,45 \frac{T}{\ell} \right].$$

De tweede trilvorm kan met het gekozen verplaatsingsveld niet nauwkeurig beschreven worden; daarvoor zijn minstens twee balkelementen nodig. Het is dan ook niet te verwonderen dat de tweede eigenfrequentie zeer onnauwkeurig is. In werkelijkheid zijn er oneindig veel eigenfrequenties voor de balk met verdeelde massa, zoals blijkt uit de analytische oplossing in **Dynamica 3-A**. Doordat we hier in de discrete beschrijving slechts twee vrijheidsgraden hebben gekozen, vinden we ook slechts twee eigenfrequenties.

In het algemeen kan gesteld worden dat bij discretisering van staaf- en balkconstructies het aantal eigenfrequenties en trilvormen van het discrete systeem dat nauwkeurig beschreven wordt aanzienlijk kleiner is dan het totale aantal vrijheidsgraden dat gekozen is; ruwweg een derde tot de helft van de eigenfrequenties van het discrete systeem zal nauwkeurig zijn.

3.3 Statische condensatie van de massamatrix

Door na de modale analyse slechts een beperkt aantal trilvormen mee te nemen en de rest te verwaarlozen kunnen we een groot systeem reduceren tot een veel kleiner systeem. Deze zg. dynamische condensatie is wat nauwkeurigheid betreft het beste dat te bereiken is, maar vereist het bepalen van een aantal eigenfrequenties en trilvormen voor een zeer groot systeem en dat kost relatief veel computertijd.

We kunnen echter ook op een andere wijze het systeem verkleinen. In het geval van gecompliceerde constructies kan, voor het bepalen van enkele van de laagste eigenfrequenties en van de responsie op excitaties in het gebied van de lage eigenfrequenties, het aantal vrijheidsgraden gekoppeld met massa aanzienlijk kleiner zijn dan het aantal vrijheidsgraden nodig voor de berekening van de stijfheidsmatrix. We noemen de reductie van

vrijheidsgraden gekoppeld met massa condensatie van de massa-matrix.

Deze condensatie kan als volgt doorgevoerd worden. Het aantal componenten in vector u dat met massa gekoppeld blijft noemen we u^1 en het restant wordt met u^2 aangegeven. Op basis van het statische probleem wordt vervolgens u^2 uitgedrukt in u^1 en de belastingvector. Het stelsel vergelijkingen voor het statische probleem is

$$\begin{vmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^1 \\ u^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1 \\ f^2 \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

Hieruit volgt

$$u^2 = [K^{22}]^{-1} f^2 - [K^{22}]^{-1} K^{21} u^1 \quad (3.27)$$

en na substitutie

$$u = \begin{vmatrix} u^1 \\ u^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -[K^{22}]^{-1} K^{21} & [K^{22}]^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^1 \\ f^2 \end{vmatrix} = Q^1 u^1 + Q^0 f^2. \quad (3.28)$$

Voor de afleiding van de bewegingsvergelijkingen beschouwen we nu alleen variaties van u^1 . De variaties van u^2 worden daarin uitgedrukt met het gegeven verband tussen u^1 en u^2 . De virtuele arbeidsvergelijking

$$\delta u^T \ddot{M} u + \delta u^T K u = \delta u^T f$$

wordt dan

$$\delta u^{1T} [Q^{1T} M Q^1 \ddot{u}^1 + Q^{1T} K Q^1 u^1] = \delta u^{1T} [Q^{1T} f - Q^{1T} M Q^0 \ddot{f}^2]$$

en de daaruit af te leiden bewegingsvergelijkingen

$$Q^{1T} M Q^1 \ddot{u}^1 + Q^{1T} K Q^1 u^1 = Q^{1T} [f - M Q^0 \ddot{f}^2] \quad (3.29)$$

Toepassing op de aan één zijde ingeklemde balk met gelijkmatig verdeelde massa (Fig. 3.2) waarbij de hoekverdraaiing χ_2 niet direct gekoppeld wordt met massa, geeft

$$u = \begin{vmatrix} w_2 \\ \chi_2 \ell \end{vmatrix} = Q^1 u^1 + Q^0 f^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_2 + \frac{\ell^3}{EI} \\ \frac{1}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ T/\ell \end{vmatrix}$$

De bewegingsvergelijking voor w_2 wordt dan

$$\ddot{w}_2 + \frac{140 EI}{11 m \ell^4} w_2 = (m \ell)^{-1} \left[\frac{140}{33} F - \frac{70 T}{11 \ell} - \frac{4}{99} \frac{m \ell^4}{EI} \frac{\ddot{T}}{\ell} \right],$$

en voor de laagste eigenfrequentie wordt nu gevonden

$$\omega_1^2 = 12,73 \frac{EI}{m\ell^4}.$$

In het geval beide vrijheidsgraden gekoppeld zijn met massa is het resultaat

$$\omega_1^2 = 12,48 \frac{EI}{m\ell^4}.$$

Voor dit zeer eenvoudige geval is de benadering zeer goed en het blijkt ook dat voor gecompliceerde constructies het aantal vrijheidsgraden voor de beschrijving van het dynamisch gedrag aanzienlijk geringer kan zijn dan het aantal vrijheidsgraden nodig voor berekening van de stijfheidseigenschappen. Bij balkconstructies kunnen we vaak de hoekverdraaiingen elimineren zonder groot verlies van nauwkeurigheid. Omdat de condensatie hier plaats vindt op basis van het statische probleem spreken we van statische condensatie.

Een andere methode van vereenvoudiging wordt verkregen door de verdeelde massa te concentreren in de gekozen knooppunten. Gezien het feit dat meestal de verdeelde massa van de (staal)constructie slechts een klein deel is van de totale massa, is het realistisch in zulke gevallen af te stappen van de consistente massamatrix en de massa te concentreren in de knooppunten. De massamatrix wordt dan echter singulier, immers de rotaties zijn dan niet meer gekoppeld met massa.

Op eenvoudige wijze kan echter weer een systeem met positief-definiëte matrices verkregen worden. Uit het stelsel bewegingsvergelijkingen

$$\begin{vmatrix} M^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{u}^1 \\ \ddot{u}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^1 \\ u^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1 \\ f^2 \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

volgt

$$u^2 = [K^{22}]^{-1} [f^2 - K^{21}u^1]. \quad (3.31)$$

Na substitutie wordt het stelsel bewegingsvergelijkingen voor de vrijheidsgraden gekoppeld met massa (u^1)

$$M^{11}\ddot{u}^1 + [K^{11} - K^{12}(K^{22})^{-1}K^{21}]u^1 = f^1 - K^{12}(K^{22})^{-1}f^2 \quad (3.32)$$

3.4 Oplossing van het eigenwaardeprobleem

3.4.1 Choleski-decompositie

De meeste procedures voor het oplossen van eigenwaarde problemen m.b.t. grote systemen gaan niet uit van de algemene formulering (3.9)

$$[K - \omega^2 M] u = 0$$

maar van de standaardvorm

$$[K^* - \omega^2 I] u^* = 0 \quad (3.33)$$

Gaan we uit van een symmetrische positief definitieve matrix M dan bestaat er altijd een reële niet-singuliere onder-driehoeks matrix L waarvoor geldt

$$L L^T = M. \quad (3.34)$$

Deze decompositie van de matrix M wordt de Choleski-decompositie genoemd.

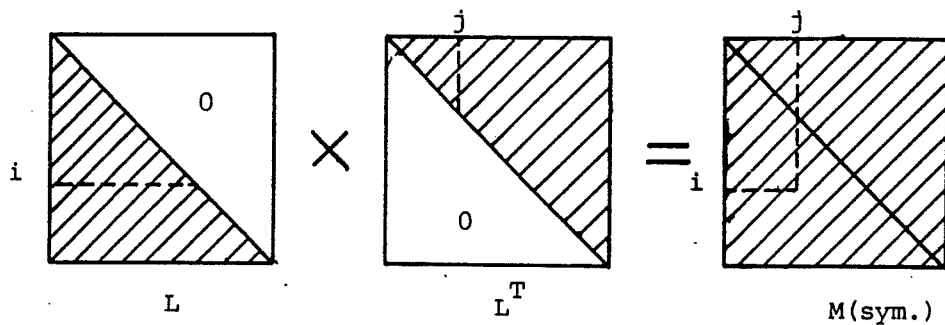


Fig. 3.4.

De elementen van L kunnen rij voor rij of kolom voor kolom worden bepaald. In de rij-voor-rij-bepaling vinden we voor rij i

$$\sum_{k=1}^j L_{ik} L_{jk} = M_{ij} \quad (3.35)$$

Dit betekent voor $j = 1, \dots, i-1$:

$$L_{ij} = \left[M_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right] / L_{jj} \quad (3.36)$$

en voor $j = i$:

$$L_{ii} = \left[M_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Voor de eerste drie rijen vinden we dan

$$L_{11} = \sqrt{M_{11}}$$

$$L_{21} = M_{21}/L_{11}; \quad L_{22} = \sqrt{[M_{22} - L_{21}^2]}$$

$$L_{31} = M_{31}/L_{11}; \quad L_{32} = (M_{32} - L_{31}L_{21})/L_{22}; \quad L_{33} = \sqrt{[M_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2]}.$$

Het algemene eigenwaarde probleem kan dus ook geschreven worden als

$$[K - \omega^2 L L^T] u = 0$$

of

$$L^{-1} [K(L^{-1})^T - \omega^2 L] L^T u = 0.$$

Met de substituties

$$L^T u = u^*; \quad L^{-1} K (L^{-1})^T = K^* \quad (3.37)$$

ontstaat inderdaad de standaardvorm (3.33)

$$[K^* - \omega^2 I] u^* = 0.$$

De eigenwaarden van de standaardvorm zijn dezelfde als de eigenwaarden van de gegeneraliseerde vergelijkingen (3.9) en de relatie tussen de eigenvectoren geeft (3.37a).

Voor het oplossen van het standaard eigenwaarde probleem zijn een aantal klassieke en algemeen toepasbare procedures beschikbaar. We noemen de methode van Jacobi, die van Givens en de QR-methode van Householder. Van deze methoden wordt de Householder-QR-methode als het meest efficiënt beschouwd.

Naast deze oplosmethoden die alle eigenwaarden, ω_i^2 , geven zijn er ook een aantal iteratieve methoden die één of enkele van de hoogste dan wel de laagste eigenwaarden bepalen. We zullen nu in het kort de QR-methode toelichten.

3.4.2 Householder-QR-methode

Allereerst wordt in het standaard eigenwaardeprobleem

$$Ku - \lambda u = 0$$

de symmetrische matrix K teruggebracht tot een symmetrische, tridiagonale matrix. D.w.z. alleen de hoofddiagonaal en de neven diagonalen daarnaast bevatten van nul verschillende termen. Deze zgn. Householder-reductie wordt voor een $n \times n$ matrix verkregen door $(n-2)$ transformaties van het type

$$K_{k+1} = P_k^T K_k P_k \quad k = 1, \dots, n-2 \quad (3.38)$$

waarin $K_1 = K$. Bij elke transformatie wordt telkens één rij en dus ook één kolom in de tridiagonale vorm gebracht. Hoe de eenvoudige transformatie-matrices P_k gekozen moeten worden geeft

o.a. [2, hoofdstuk 11].

Vervolgens wordt de zgn. QR-iteratie procedure uitgevoerd op de tridiagonale matrix K_{n-1} . Deze procedure kan ook direct op K worden toegepast maar de Householder-reductie maakt de berekening efficiënter. Voor de toelichting van de QR-decompositie gaan we uit van K in de oorspronkelijke vorm. De basisstap in het iteratieproces is de decompositie van K in de vorm

$$K = QR \quad (3.39)$$

waarin Q een orthogonale en R een bovendriehoeksmatrix is. Een matrix Q is per definitie een orthogonale matrix als geldt

$$Q^T Q = Q Q^T = I. \quad (3.40)$$

De consequentie hiervan is dat $Q^{-1} = Q^T$. Uit Q en R vormen we vervolgens

$$RQ = Q^T K Q. \quad (3.41)$$

Door toepassing van zgn. Jacobi-rotatiematrices wordt K omgezet in een bovendriehoeksmatrix R . Dit gaat als volgt

$$P_{n,n-1}^T \dots P_{3,2}^T P_{3,1}^T P_{2,1}^T K = R \quad (3.42)$$

Hierin moet de rotatiematrix $P_{i,j}^T$ zo gekozen worden dat het element (j,i) nul wordt. Uit (3.39) en (3.42) volgt voor de orthogonale matrix

$$Q = P_{2,1} P_{3,1} P_{3,2} \dots P_{n,n-1}. \quad (3.43)$$

Het QR-iteratieproces wordt nu verkregen door (3.39) en (3.41) te herhalen. Met de definitie $K_1 = K$ wordt het proces

$$K_k = Q_k R_k \quad (3.44)$$

en

$$K_{k+1} = R_k Q_k. \quad (3.45)$$

Het kan aangetoond worden dat

$$K_{k+1} \rightarrow \Lambda; Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k \rightarrow E \text{ voor } k \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

d.w.z. na een aantal iteraties nadert K_{k+1} tot een diagonaalmatrix met de eigenwaarden als diagonaaltermen. Bovendien naderen de kolommen van de produktmatrix

$$Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k$$

tot de eigenvectoren.

Door een verschuiving toe te passen waarbij in plaats van (3.44) en (3.45) de volgende decompositie wordt uitgevoerd

$$K_k - \mu_k I = Q_k R_k \quad (3.47)$$

$$K_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I \quad (3.48)$$

waarin μ_k een geschikt gekozen scalaire grootte is, kan het convergentieproces nog versneld worden. Ook nu blijft gelden

$$K_{k+1} \rightarrow \Lambda; Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k \rightarrow E \text{ voor } k \rightarrow \infty.$$

De verkregen eigenvectoren moeten teruggebracht worden tot eigenvectoren behorend bij de oorspronkelijke matrix K . Een belangrijke besparing op rekenkosten kan hier verkregen worden door alleen de eigenvectoren te bepalen die vereist zijn.

Een meer gedetailleerde beschrijving met voorbeelden voor deze en andere oplosmethoden geeft [2]; daarin is ook opgenomen een Fortran programma voor de Jacobi-methode. Een zeer uitgebreide behandeling van het eigenwaardeprobleem geeft Wilkinson [9].

3.4.3 'Power' methode

De laagste eigenfrequentie ω_1 en de bijbehorende trillingsvorm e^1 kunnen zeer eenvoudig iteratief bepaald worden. Ditzelfde geldt voor de hoogste eigenfrequentie maar deze is meestal niet van belang.

We gaan voor de laagste eigenfrequentie niet uit van de standaardvorm

$$[K - \omega^2 I] u = 0$$

omdat de te bespreken procedure dan de hoogste eigenfrequentie oplevert, maar van

$$\left[K^{-1} - \frac{1}{\omega^2} I \right] u = 0$$

of

$$\left[A - \frac{1}{\omega^2} I \right] u = 0 \quad (3.49)$$

Eerst moet nu een beginvector $u^{(0)}$ aangenomen worden die niet een benadering hoeft te zijn van de eerste trillingsvorm. Het iteratieproces is dan als volgt

$$u^{(1)} = A u^{(0)} \quad (3.50)$$

$$u^{(2)} = A u^{(1)}$$

⋮

$$u^{(N)} = A u^{(N-1)}$$

We zullen aantonen dat $u^{(N)}$ nadert tot de eerste trillingsvorm en dat geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u_i^{(N)}}{u_i^{(N-1)}} = \frac{1}{\omega_1^2} \quad (3.51)$$

onafhankelijk van de index i .

Om dit te bewijzen drukken we de vectoren $u^{(i)}$ uit in de, nog onbekende, genormeerde eigenvectoren e^k . De uitgangsvector wordt als volgt geschreven

$$u_i^{(0)} = \sum_k b_k e_i^k. \quad (3.52)$$

Invullen in (3.50) geeft

$$u_i^{(1)} = \sum_j \sum_k a_{ij} b_k e_j^k \quad (3.53)$$

Ook geldt voor een eigenfrequentie ω_k en een trillingsvorm e^k :

$$\sum_j a_{ij} e_j^k = \frac{1}{\omega_k^2} e_i^k. \quad (3.54)$$

Na substitutie in (3.53) vinden we

$$u_i^{(1)} = \sum_{k=1} \frac{b_k}{\omega_k^2} e_i^k \quad (3.55)$$

en na N iteratiestappen

$$u_i^{(N)} = \frac{b_1}{\omega_1^{2N}} e_i^1 + \frac{b_2}{\omega_2^{2N}} e_i^2 + \frac{b_3}{\omega_3^{2N}} e_i^3 + \dots \quad (3.56)$$

Als de eigenfrequenties zo gerangschikt zijn dat

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$$

zal voor voldoende grote waarde van N de eerste term overheersen. Dit betekent dat $u^{(N)}$ evenredig wordt met de genormeerde eigenvector e^1 en dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u_i^{(N)}}{u_i^{(N-1)}} = \frac{1}{\omega_1^2}.$$

In de Engelse literatuur staat deze iteratiemethode bekend als de 'power'-methode. Wil men enkele van de laagste eigenfrequenties bepalen dan kan dit iteratief met een multivector-iteratie.

Hiervoor wordt verwezen naar de literatuur [9].

3.4.4 Methode van Rayleigh

Een andere veel toegepaste methode voor het bepalen van de laagste eigenfrequentie van een ongedempt systeem is de methode van Rayleigh. Hierbij wordt uitgegaan van een amplitude vector $\hat{u}$, die een benadering is van de trillingsvorm bij de laagste eigenfrequentie. De geschatte verplaatsingsvector bij een harmonische trilling met frequentie ω wordt

$$u = \hat{u} \cos \omega t$$

en

$$\dot{u} = -\omega \hat{u} \sin \omega t.$$

Door te stellen dat de maximale potentiële energie en de maximale kinetische energie aan elkaar gelijk zijn volgt

$$\frac{1}{2} \hat{u}^T K \hat{u} = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{u}^T M \hat{u} \quad (3.57)$$

en dus

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} \hat{u}^T K \hat{u}}{\frac{1}{2} \hat{u}^T M \hat{u}} \quad (3.58)$$

De gekozen amplitudevector kunnen we uitdrukken in de genormeerde trilvormen met

$$\hat{u} = E c \quad (3.59)$$

hieruit volgt

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} c^T E^T K E c}{\frac{1}{2} c^T E^T M E c} = \frac{\frac{1}{2} c^T \Omega^2 c}{\frac{1}{2} c^T c} = \frac{c_1^2 \omega_1^2 + c_2^2 \omega_2^2 + \dots}{c_1^2 + c_2^2 + \dots}$$

of

$$\omega^2 = \omega_1^2 \left[\frac{1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots}{1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 + \dots} \right]. \quad (3.60)$$

Als de gekozen amplitudevector goed de trillingsvorm van de laagste eigenfrequentie benadert dan zullen $c_2, c_3 \dots$ klein zijn t.o.v. c_1 en benadert het quotiënt

$$\frac{1}{2} \hat{u}^T K \hat{u} / \frac{1}{2} \hat{u}^T M \hat{u}$$

het kwadraat van de laagste eigenfrequentie. Tevens zien we dat

$$\omega^2 \geq \omega_1^2 \quad (3.61)$$

zodat we een bovengrens voor de laagste eigenfrequentie vinden.

3.5 Modale damping

In het geval een mechanisch systeem gedempt is zal een modale analyse waarbij het systeem teruggebracht wordt tot ontkoppelde enkelvoudige massa-veer systemen niet meer mogelijk zijn. Het stelsel bewegingsvergelijkingen voor snelheidsevenredige damping wordt

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \quad (3.62)$$

waarin C de dempingsmatrix wordt genoemd.

In het bijzondere geval dat we zgn. Rayleigh-damping veronderstellen d.w.z. dat

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad (3.63)$$

is echter de modale analyse wel door te voeren. Substitueren we in (3.62)

$$u = Ea \quad (3.64)$$

dan volgt na voorvermenigvuldiging met E^T

$$E^T M E \ddot{a} + \alpha_1 E^T M E \dot{a} + \alpha_2 E^T K E \dot{a} + E^T K E a = E^T f(t)$$

of

$$\ddot{a} + \alpha_1 \dot{a} + \alpha_2 \Omega^2 \dot{a} + \Omega^2 a = b(t).$$

Dit zijn nu weer ontkoppelde bewegingsvergelijkingen die ook als volgt geschreven kunnen worden

$$\ddot{a}_p + 2\zeta_p \omega_p \dot{a}_p + \omega_p^2 a_p = b_p(t) \quad (p = 1, \dots, n) \quad (3.65)$$

waarin de dimensieloze dempingsfactor

$$\zeta_p = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_1}{\omega_p} + \alpha_2 \omega_p \right]. \quad (3.66)$$

Voldoet de damping aan (3.65) waarbij nog alle dempingsconstanten ζ_p vrij te kiezen zijn dan spreekt men van modale damping. In het speciale geval van Rayleigh-damping zijn er slechts 2 vrije parameters en zijn alle dempingsconstanten daarin uit te drukken met (3.66).

Bij voorkeur zullen we vanwege de eenvoud de damping willen benaderen door modale damping. De constanten ζ_p die van belang zijn kunnen experimenteel bepaald worden door bijvoorbeeld de amplituden te bepalen op de bijbehorende resonantiefrequenties.

Dan zijn er twee mogelijkheden voor de hand liggend. Ten eerste kunnen we α_1 en α_2 zo kiezen dat de dempingsparameters ζ_p zo goed mogelijk benaderd worden. Deze methode is in fig. 3.5 aangegeven. De tweede mogelijkheid is dat de matrix C bepaald wordt die hoort bij (3.65) met de onafhankelijke parameters $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p$. Het blijkt dat C dan moet voldoen aan [2]:

$$C = M \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k+1} [M^{-1}K]^k. \quad (3.67)$$

Constructiedamping blijkt met modale damping of zelfs Rayleigh-damping meestal goed benaderd te kunnen worden. Alleen als constructies zwaar gedempt worden door lokale dempers kan het wel nodig zijn te rekenen met niet-modale damping.

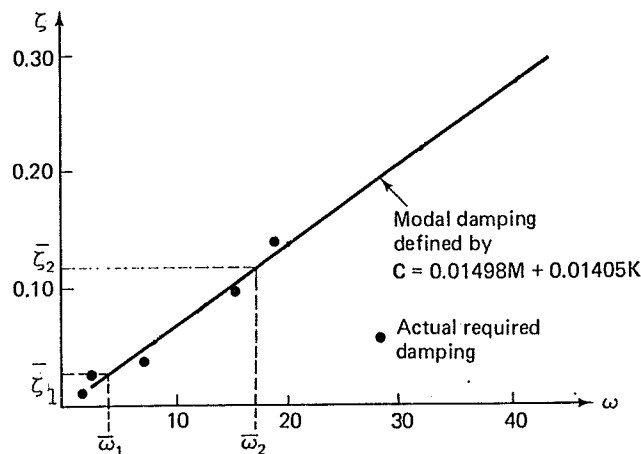


Fig. 3.5 Damping als functie van de frequentie.

3.6 Numerieke integratie van de bewegingsvergelijkingen

3.6.1 Centrale differentiemethode

In principe kunnen we het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$$

omzetten in een stelsel differentievergelijkingen door de vector van versnellingen en de vector van de snelheden om te zetten in verplaatsingen. Er staan een groot aantal mogelijkheden ter beschikking waarbij fouten orde $(\Delta t)^2$ of fouten van hogere macht in de stapgrootte (Δt) worden toegestaan.

Een goede methode voor relatief kleine systemen is de centrale differentiemethode aan de hand waarvan we de methodiek willen illustreren. De versnelling op het tijdstip $t_n = t_0 + n\Delta t$ wordt benaderd door

$$a_n = \frac{1}{(\Delta t)^2} [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] \quad (3.68)$$

en de snelheid door

$$v_n = \frac{1}{2\Delta t} [u_{n+1} - u_{n-1}]. \quad (3.69)$$

Substitutie in de bewegingsvergelijkingen geeft

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right] u_{n+1} = f_n^* \quad (3.70)$$

waarin

$$f_n^* = f_n + \left[\frac{2}{(\Delta t)^2} M - K \right] u_n - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right] u_{n-1}. \quad (3.71)$$

In wezen wordt voor de bepaling van u_{n+1} het evenwicht beschouwd op het tijdstip t_n . Dit betekent dat de centrale differentiemethode een expliciete numerieke integratiemethode is. Voor impliciete methoden wordt het evenwicht voor de bepaling van u_{n+1} beschouwd in t_{n+1} .

We zien dat een decompositie van de stijfheidsmatrix hier niet nodig is. Als bovendien de massamatrix een diagonaal matrix is en de dempingsmatrix ontbreekt of ook een diagonaal matrix is, is de procedure zeer snel. Het is zelfs niet nodig de stijfheidsmatrix op te bouwen. Alleen bewerkingen op elementniveau zijn nodig en deze bijdragen kunnen direkt verwerkt worden in de 'belasting'-vector f_n^* . Zijn de massamatrix en/of de dempingsmatrix niet te benaderen door diagonaalmatrices dan verliest de procedure aan aantrekkelijkheid. Voor praktische problemen is een benadering van de massamatrix door een diagonaalmatrix dikwijls toelaatbaar.

Het belangrijke nadeel van deze en andere expliciete methoden is dat de tijdstap Δt beneden een bepaalde kritieke waarde moet blijven. Een gedetailleerde beschouwing leert dat (paragraaf 3.6.3)

$$\Delta t < \frac{T_{cr}}{\pi}$$

waarin T_{cr} de trillingstijd is van de hoogste eigenfrequentie in het systeem. Voor grote constructies zijn de hoogste eigenfrequenties uit een e.e.m.-berekening zeker niet nauwkeurig en zeer hoog. Bovendien zou met het oog op de nauwkeurigheid van de globale responsie een veel grotere tijdstap mogelijk zijn dan bij deze expliciete methode de stabiliteit van de oplosmethode toelaat. Voor de bekende Runge-Kutta methoden waarbij het systeem van tweede orde differentiaalvergelijkingen wordt omgezet in een tweemaal zo groot stelsel eerste orde vergelijkingen en daarna met een expliciete methode wordt geïntegreerd is de kritische stapgrootte van dezelfde orde.

We zullen daarom nu ook een methode bespreken die altijd stabiel is en waarbij de stapgrootte bepaald wordt door de nauwkeurigheid van de responsie en dus door de frequentie-inhoud

van de opgelegde belasting. Dit is echter een impliciete methode en vereist daarom decompositie van de stijfheidsmatrix of een effectieve stijfheidsmatrix.

3.6.2 Newmark-methode

Drie gangbare impliciete integratiemethoden voor stelsels bewegingsvergelijkingen zijn de Houbolt-methode, de Wilson- θ -methode en de Newmark-methode. Alleen de laatste zullen we hier bespreken omdat die toch zekere voordelen biedt t.o.v. de twee andere methoden.

In de vergelijking van de nauwkeurigheid zullen we echter ook de andere methoden betrekken. Een gedetailleerde beschrijving van alle drie methoden wordt gegeven in [2].

Het essentiële van de Newmark-methode is dat een bepaald verloop voor de versnelling wordt verondersteld in het gebied $t_n \leq t \leq t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Na integratie over het interval vinden we dan voor v_{n+1} en u_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \Delta t [(1-\gamma) a_n + \gamma a_{n+1}] \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [(1-2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.72)$$

De constanten γ en β zijn afhankelijk van het gekozen versnellingsverloop en zullen optimaal gekozen worden met het oog op stabiliteit. Nemen we de versnelling constant voor $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ en gelijk aan $\frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ dan wordt (3.72):

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{2} \Delta t [a_n + a_{n+1}] \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t v_n + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 [a_n + a_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dit correspondeert met $\beta = 1/4$ en $\gamma = 1/2$. Het zal blijken dat voor deze combinatie het integratieproces altijd stabiel is. Deze combinatie wordt dan ook meestal toegepast voor 'transient response' berekeningen.

Met (3.73) wordt het stelsel vergelijkingen voor t_{n+1} :

$$\begin{vmatrix} M & C & K \\ -\frac{1}{2} \Delta t I & I & O \\ -\frac{1}{4} (\Delta t)^2 I & O & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n+1} \\ v_{n+1} \\ u_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n+1} \\ v_n + \frac{1}{2} \Delta t a_n \\ u_n + \Delta t v_n + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 a_n \end{vmatrix}. \quad (3.74)$$

Na enige bewerking volgt

$$K^* u_{n+1} = f_{n+1}^* \quad (3.75)$$

waarin

$$K^* = \frac{4}{(\Delta t)^2} M + \frac{2}{\Delta t} C + K \quad (3.76)$$

en

$$f_{n+1}^* = f_{n+1} + M \left[\frac{4}{(\Delta t)^2} u_n + \frac{4}{\Delta t} v_n + a_n \right] + C \left[\frac{2}{\Delta t} u_n + v_n \right] \quad (3.77)$$

Hier is dus een decompositie van de effectieve stijfheidsmatrix K^* nodig. Is de verplaatsingsvector u_{n+1} bepaald dan volgt voor de versnellings- en snelheidsvector:

$$a_{n+1} = \frac{4}{(\Delta t)^2} (u_{n+1} - u_n) - \frac{4}{\Delta t} v_n - a_n$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} \Delta t (a_{n+1} + a_n). \quad (3.78)$$

Met een exacte methode (modale analyse), de centrale differentiemethode en de drie genoemde impliciete methoden werd het volgende stelsel bewegingsvergelijkingen geïntegreerd

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Als beginvoorwaarden werden gekozen $u_1(0) = u_2(0) = 0$; $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$.

De trillingstijden van de twee eigenfrequenties zijn

$$T_1 = 4,45; \quad T_2 = 2,8.$$

De stapgrootte werd voor alle numerieke integraties $\Delta t = T_2/10$ gekozen. Deze stapgrootte is vrij groot maar beneden de kritieke waarde voor stabiliteit van de expliciete integratie. Het resultaat is gegeven in fig. 3.6.

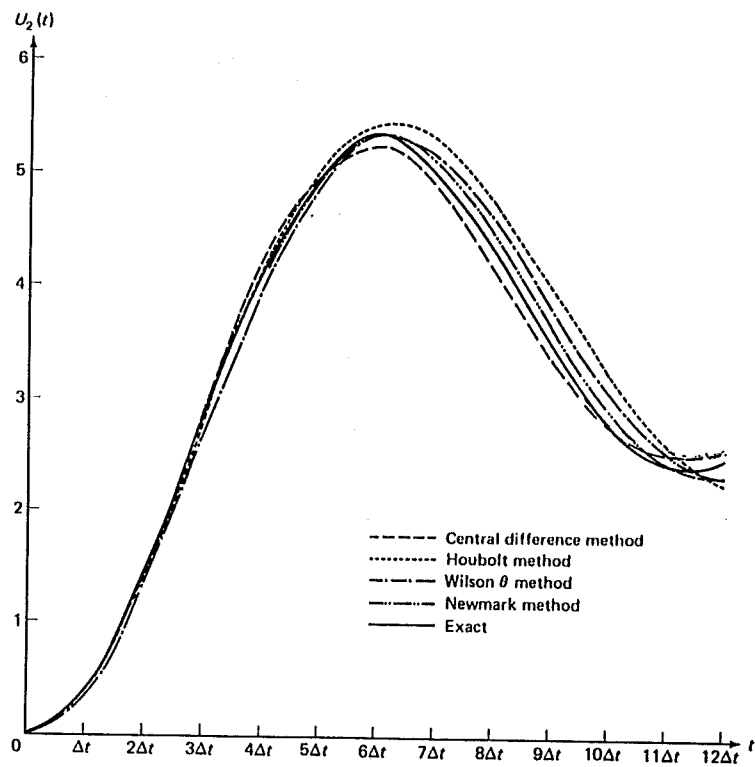
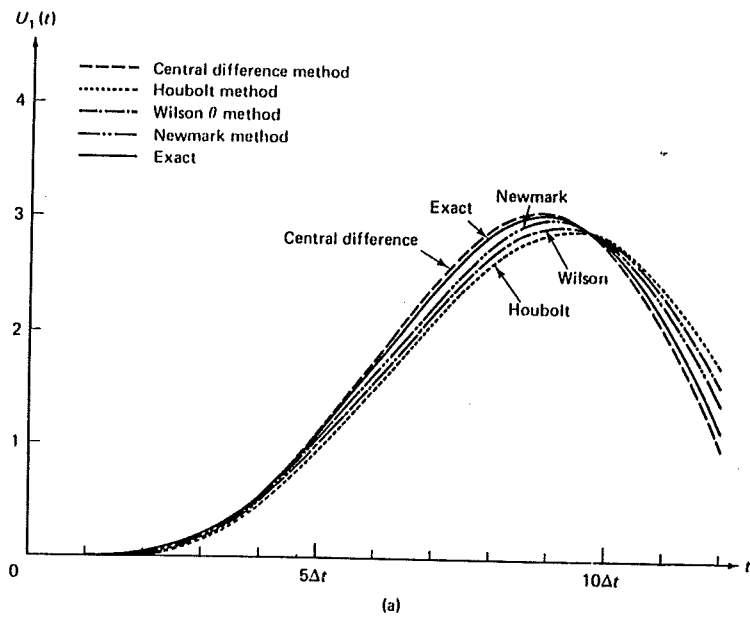


Fig. 3.6 Responsie voor verschillende numerieke integratie methoden.

Voor het beginwaarde probleem

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

met

$$u(0) = 1; \quad \dot{u}(0) = 0$$

werd de nauwkeurigheid onderzocht als functie van de stapgrootte Δt , zie fig. 3.7. Alle drie de impliciete integratiemethoden zijn voor de gekozen parameters onvoorwaardelijk stabiel. Voor de Newmark-methode treedt geen amplitude variatie op en is de periodeverlenging minder dan voor de andere methoden.

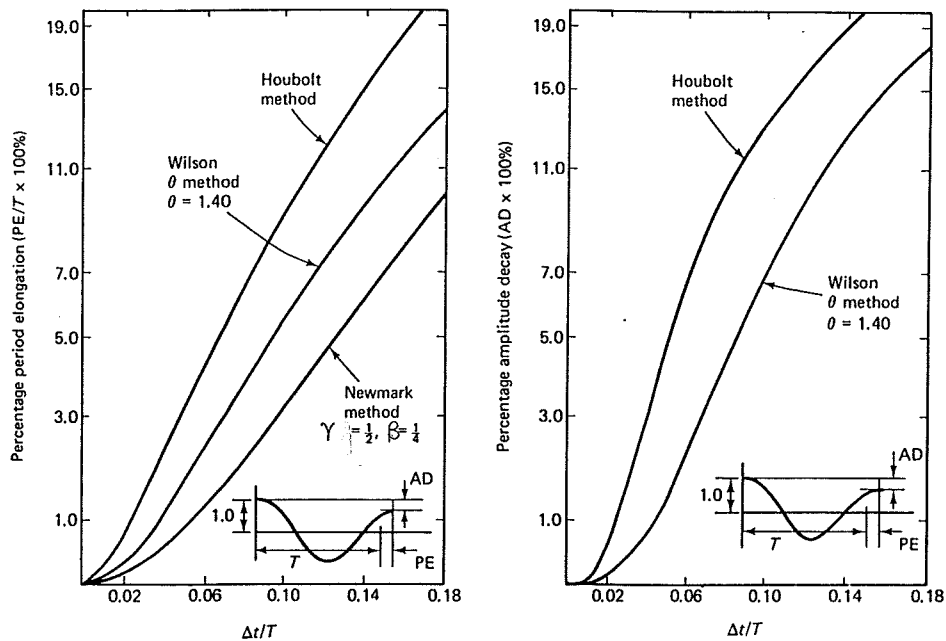


Fig. 3.7 Periodeverlenging en amplitudeverandering bij impliciete integratiemethoden

3.6.3 Stabiliteit van het numerieke integratieproces

Als we te maken hebben met een lineair mechanisch systeem dat eventueel modaal gedempt is, dan kan de stabiliteit van het numerieke integratieproces eenvoudig onderzocht worden na toepassing van modale analyse. De responsie wordt dan verkregen door superpositie van de responsies van enkelvoudige massa-veer systemen. De procedure voor het stabiliteitsonderzoek wordt daarom toegelicht voor een enkelvoudig massa-veer systeem en als numerieke integratieprocedures worden de Newmark- en de centrale differentiemethode gekozen. Het is eenvoudig na te gaan met (3.72) dat de expliciete centrale differentiemethode beschouwd kan worden als het limietgeval $\beta = 0$; $\gamma = \frac{1}{2}$ van de impliciete Newmark-methode.

Eliminatie van de versnellingen op het tijdstip t_{n+1} uit de bewegingsvergelijkingen (3.74) geeft

$$Y_{n+1} = A Y_n + g \quad (3.79)$$

waarin

$$Y_n^T = [v_n \quad u_n]$$

Zijn λ_1 en λ_2 de eigenwaarden van het eigenwaardeprobleem

$$[A - \lambda I] Y_n = 0, \quad (3.80)$$

dan kunnen we, volgens dezelfde procedure als toegepast bij de modale analyse, het stelsel terugbrengen tot

$$\begin{vmatrix} q_{1,n+1} \\ q_{2,n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 q_{1,n} \\ \lambda_2 q_{2,n} \end{vmatrix} + g^* \quad (3.81)$$

Hieruit volgt dat de stabiliteitsgrens is bereikt als

$$|\lambda_i|_{\max} = 1, \quad (3.82)$$

immers voor $|\lambda_1| > 1$ of $|\lambda_2| > 1$ zal na m stappen een amplitude aangegroeid zijn met een factor $|\lambda_i|_{\max}^m$ en zal deze na verloop van tijd boven alle grenzen stijgen.

Uitwerking van de voorwaarde (3.82) voor de Newmark-methode geeft

$$\frac{\Delta t}{T_{cr}} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \gamma - \beta}} \quad (3.83)$$

waarin T_{cr} de trillingstijd in de eigenfrequentie is.

Voor een willekeurig systeem zal dus de trillingstijd van de hoogste eigenfrequentie maatgevend zijn voor de stabiliteit. Uit (3.82) volgt dat alleen voor $\beta = 1/4$ en $\gamma = 1/2$ de stapgrootte niet begrensd wordt door de stabiliteit. Voor de centrale differentiemethode ($\beta = 0$; $\gamma = 1/2$) geldt

$$\frac{\Delta t}{T_{cr}} \leq \frac{1}{\pi}$$

zoals reeds eerder vermeld.

Voorbeeld 1

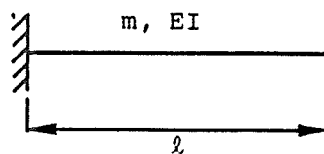


Fig. 3.8.

Voor een prismatische buigbalk aan één zijde ingeklemd en aan de andere zijde vrij, is de massa per lengte-eenheid m . Wordt langs de balk één element gekozen dan vinden we voor het discrete systeem twee eigenfrequenties

$$\omega_1^2 = 12,5 \frac{EI}{m\ell^4} ; \quad \omega_2^2 = 1211,5 \frac{EI}{m\ell^4} \quad (\omega_2 \text{ niet nauwkeurig!}).$$

Dit betekent dat de maximale tijdstap voor de centrale differentiemethode met het oog op stabiliteit gelijk is aan

$$\Delta t_{\max} = \frac{1}{\pi} T_2 = 0,0575 \sqrt{\frac{m\ell^4}{EI}}$$

Wordt door statische condensatie van de massamatrix de rotatie niet meer gekoppeld met massa dan vinden we als enige eigenfrequentie

$$\omega_1^2 = 12,7 \frac{EI}{m\ell^4}$$

en

$$\Delta t_{\max} = \frac{T_1}{\pi} = 0,561 \sqrt{\frac{m\ell^4}{EI}}.$$

Dit betekent dat de tijdstap ongeveer 10 maal zo groot gekozen kan worden als de rotatie niet gekoppeld wordt met massa.

In het algemeen kan gesteld worden dat in een eindige-elementen berekening voor grote constructies altijd zeer hoge eigenfrequenties aanwezig zijn die op zich niet nauwkeurig zijn, maar waardoor de stapgrootte van expliciete methoden zeer sterk wordt verkleind.

Voorbeeld 2 Stapgrootte bij axiale trillingen

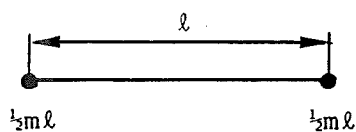


Fig. 3.9.

We nemen aan dat de soortelijke massa van het staafmateriaal ρ is. Wordt de massa zodanig ruw verdeeld dat aan elk eind de helft geplaatst wordt dan is de bewegingsvergelijking voor de axiale vrije trillingen

$$\frac{1}{2} \rho A \ell \ddot{u} + 2 \frac{EA}{\ell} u = 0 \rightarrow \ddot{u} + 4 \frac{E}{\rho \ell^2} u = 0.$$

De golf voortplantingssnelheid in de staaf is (zie Dynamica 3A)

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

en de eigenfrequentie uitgedrukt in de golfvoortplantingssnelheid is

$$\omega_1 = 2 \frac{c}{\ell}.$$

De stabiliteitsgrens is voor de centrale differentiemethode bereikt als

$$\Delta t = \frac{T_1}{\pi} = \frac{\ell}{c}.$$

Dit is juist de tijd die een spanningsgolf nodig heeft om zich van het ene naar het andere eind van de staaf voort te planten. Wordt een consistente massamatrix gekozen dan is de maximale tijdstap

$$\Delta t = \frac{\ell}{\sqrt{3} c}.$$

De consistente massamatrix geeft in het algemeen een kleinere kritieke tijdstap.

Dit voorbeeld is bijzonder illustratief omdat ook voor constructies de orde van grootte van de maximale tijdstap voor expliciete integratiemethoden bepaald wordt door de looptijd van een spanningsgolf tussen de knooppunten.

Om een dynamisch probleem op te lossen is de keuze van de tijds-integratiemethode erg belangrijk. Hierbij moet ook verdisconteerd worden dat bij praktische problemen meestal slechts een aantal van de laagste eigenfrequenties door de belasting geëxciteerd wordt. Dit betekent dat, eventueel met een Fourier-analyse, de frequentieinhoud van de belasting vastgesteld moet worden. Bevat de belasting slechts frequenties $\omega \leq \omega_u$ dan moet het eindige elementenmodel van het werkelijke systeem nauwkeurig de eigenfrequenties tot ongeveer $\omega_{c_0} = 4 \omega_u$ bevatten.

Vervolgens moet de direkte integratie worden uitgevoerd met een tijdstap Δt die vanwege de nauwkeurigheid ongeveer $1/20 T_{c_0}$ is (waarin T_{c_0} de trillingstijd is bij ω_{c_0}) maar mogelijk kleiner moet zijn met het oog op de stabiliteit. In veel gevallen zal het vanwege de hoge eigenfrequenties in het systeem efficiënter zijn een impliciete integratiemethode toe te passen met $\Delta t \approx 1/20 T_{c_0}$.

In het algemeen kan gesteld worden dat een eindige-elementen-model van een constructie altijd zeer hoge eigenfrequenties bevat, tenzij door condensatie het systeem zover is gereduceerd dat alleen de voor de responsie essentiële trillingsvormen zijn meegenomen (dynamische condensatie). In het laatste geval hebben expliciete methoden de voorkeur. De algoritmen zijn eenvoudiger en zeer betrouwbaar als ze stabiel zijn.

4. ROTORDYNAMICA

4.1 Ronddraaiende as in starre lagers

We beschouwen eerst een schijf met massa m op een elastische en massaloos gedachte as die met een constante hoeksnelheid ω in twee lagers ronddraait. In deze paragraaf wordt aangenomen dat de lagers vergeleken met de as star zijn en dat demping verwaarloosd mag worden. Deze veronderstellingen zijn in veel gevallen nauwkeurig als we niet te maken hebben met glijlagers.

Voor de beschrijving wordt een vast coördinatensysteem x - y - z

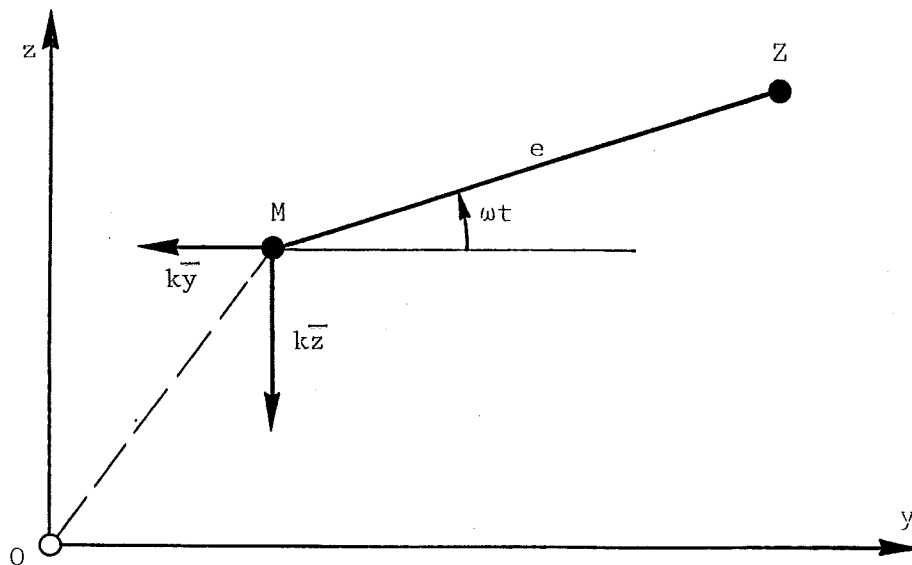


Fig. 4.1 Positie van middelpunt en zwaartepunt van de schijf

gekozen, waarbij de x -as langs de onvervormde staafas valt, terwijl de y - en z -as in het middenvlak van de schijf liggen (Fig 4.1.). Het middelpunt van de schijf (punt M) heeft de coördinaten $\bar{y}$ en $\bar{z}$. Het zwaartepunt (Z) van de schijf ligt op een vaste afstand van M en deze excentriciteit wordt aangeduid met e . Zowel de coördinaten $\bar{y}$ en $\bar{z}$ als e zijn altijd zeer klein t.o.v de afmetingen van de schijf.

Wordt het nulpunt van de tijd zo gekozen dat de hoek van MZ met de y -as ωt is, dan zijn de coördinaten van het zwaartepunt:

$$y = \bar{y} + e \cos \omega t ; z = \bar{z} + e \sin \omega t \quad (4.1)$$

De schijf heeft voor beweging in het y - z -vlak drie vrijheidsgraden namelijk de translaties van het zwaartepunt en de rotatie om het zwaartepunt. In het middelpunt van de schijf grijpt de terugstelkracht aan met componenten $-k\bar{y}$ en $-k\bar{z}$, waarin k de veerconstante van de as is. We veronderstellen hier dat de

buigstijfheid van de as in alle richtingen hetzelfde is.

De bewegingsvergelijkingen voor de translatie van het zwaartepunt zijn

$$m\ddot{y} = -k[y - e\cos\omega t]$$

$$m\ddot{z} = -k[z - e\sin\omega t]$$

of

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \omega_0^2 y &= e\omega_0^2 \cos\omega t \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= e\omega_0^2 \sin\omega t\end{aligned}\quad (4.2)$$

waarin

$$\omega_0^2 = k/m \quad (4.3)$$

Als het massatraagheidsmoment van de schijf om het zwaartepunt I_z is, dan geldt voor rotatie met constante hoeksnelheid ω :

$$I_z \dot{\omega} = T - k(y - e\cos\omega t)e\sin\omega t + k(z - e\sin\omega t)e\cos\omega t = 0 \quad (4.4)$$

waarin T het torsiemoment is dat door de as op de schijf wordt uitgeoefend. Dit geeft

$$T = ke[y\sin\omega t - z\cos\omega t] \quad (4.5)$$

De algemene oplossing van (4.2) is

$$\begin{aligned}y &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{e\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \\ z &= C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t + \frac{e\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t\end{aligned}\quad (4.6)$$

De oplossingen van de homogene vergelijkingen stellen de vrije trillingen voor van de (door de as) verend opgehangen massa m . We nemen aan dat door altijd aanwezige demping deze vrije trillingen uitgestorven zijn. Voor $\omega \neq \omega_0$ wordt dan de stationaire oplossing

$$y = \frac{e\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t ; \quad z = \frac{e\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t \quad (4.7)$$

en de bijbehorende coördinaten van M zijn

$$\bar{y} = \frac{e\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t ; \quad \bar{z} = \frac{e\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t \quad (4.8)$$

Als $\omega \neq \omega_0$ zullen zoals uit 4.7 en 4.8 blijkt de punten O, M en Z op een rechte lijn liggen. Als $\omega \rightarrow \omega_0$ dan gaat de amplitude naar oneindig en zal de lineaire theorie niet meer nauwkeurig zijn. Hoewel de amplituden binnen een niet-lineaire theorie mogelijk eindig blijven kan toch in de omgeving van $\omega = \omega_0$ een zeer

gevaarlijke toestand ontstaan. We noemen $\omega = \omega_0$ het kritische toerental.

In het gebied $\omega < \omega_0$ draait de rotor onderkritisch en ligt het zwaartepunt Z verder naar buiten dan het schijfmiddelpunt M. Dit is geheel in overeenstemming met de verwachtingen. In het bovenkritische gebied ($\omega > \omega_0$) is $(\omega_0^2 - \omega^2)$ negatief en komt het zwaartepunt Z tussen M en O te liggen (zie Fig. 4.2.)

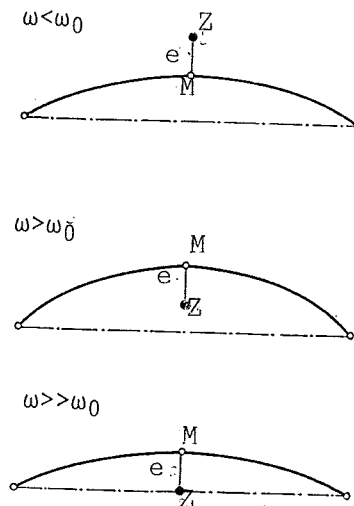


Fig. 4.2 Ligging van het zwaartepunt voor $\omega < \omega_0$, $\omega > \omega_0$ en $\omega \gg \omega_0$

Voor zeer hoge toerentallen valt Z praktisch samen met O; de rotor draait dan weer zeer rustig en men noemt dit zelfcentrering. Hoewel het zwaartepunt dan gecentreerd is, blijft de as uitgebogen met de amplitude e en treden er dus wel lagerkrachten op.

Invullen van (4.7) in (4.5) geeft $T=0$, d.w.z. het constante toerental in de stationaire toestand wordt gehandhaafd zonder torsiemoment.

Het gevaarlijke gebied waarbinnen niet stationair gedraaid mag worden wordt bepaald door de maximaal toelaatbare buigbelasting van de as, de maximaal toelaatbare lager belasting en/of door de speling tussen rotor en huis. Is op basis hiervan de maximaal toelaatbare doorbuiging $r_{\max}$, dan volgt hieruit voor het gevaarlijke gebied

$$\frac{r_{\max}}{(r_{\max} + e)} \omega_0^2 < \omega^2 < \frac{r_{\max}}{(r_{\max} - e)} \omega_0^2 \quad (4.9)$$

Als $\omega = \omega_0$ dan wordt (4.2) geëxciteerd in de eigenfrequentie en is de algemene oplossing niet te schrijven als (4.6). Een particuliere oplossing is dan

$$y = \frac{1}{2} e \omega_0 t \sin \omega_0 t ; z = -\frac{1}{2} e \omega_0 t \cos \omega_0 t \quad (4.10)$$

De uitwijking groeit dan lineair met de tijd en de punten O, M en Z liggen niet meer op een rechte lijn. De lijnstukken OZ en MZ sluiten een rechte hoek in. Moet de hoeksnelheid weer constant blijven dan wordt met (4.5) het wringend koppel

$$T = \frac{1}{2} k e^2 \omega_0 t \quad (4.11)$$

Is het toegevoerde koppel groter dan kan het kritieke toerental gepasseerd worden, anders blijft de rotor in de resonantie steken. Voor het berekenen van de maximale amplitude als het resonantiegebied doorlopen wordt, verwijzen we naar de literatuur [7]

Zijn we niet geïnteresseerd in de volledige oplossing van de bewegingsvergelijkingen voor willekeurige excitatiefrequenties, maar alleen in het kritieke toerental dan kan de behandeling vereenvoudigd worden. De excentriciteit van het zwaartepunt e wordt nul gesteld (dit kan omdat het kritieke toerental hierdoor niet beïnvloed wordt). Vertoont de massa m een uitwijking y dan werken daarop de centrifugaalkracht $m\omega^2 y$ en de terugstelkracht $-ky$. Er is alleen evenwicht met $y \neq 0$ voor het kritieke toerental

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en dit correspondeert geheel met het voorgaande.

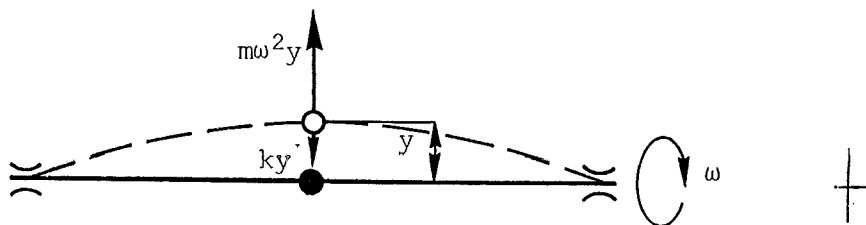


Fig. 4.3 Krachten op een massa t.p.v het asmiddelpunt

Het stijfheidsgetal k volgt uit de elementaire formules voor buiging van balken en is natuurlijk afhankelijk van de plaats van de massa langs de roterende balk en van de wijze van ondersteuning. Op overeenkomstige wijze kunnen we de kritieke toerentallen bepalen voor een as met meerdere massa's die in een aantal (knoop)punten (n) centrisc h op de staafas zijn aangebracht. Het verband tussen knooppuntsverplaatsingen (y_i) en knooppuntskrachten (f_i) geven we zoals gebruikelijk aan met

$$K_{ij} y_j = f_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.12)$$

Ten gevolge van het centrifugaalveld zijn de centrifugaalkrachten

$$f_i = m_i \omega^2 y_i = \omega^2 M_{ij} y_j \quad (4.13)$$

waarin M_{ij} de componenten van de diagonaalmassamatrix zijn. Er is evenwicht als geldt

$$[K_{ij} - \omega^2 M_{ij}] y_j = 0 \quad (4.14)$$

Een van nul verschillende oplossing voor y_i is alleen mogelijk voor

$$\det[K_{ij} - \omega^2 M_{ij}] = 0 \quad (4.15)$$

en dit levert de n kritieke toerentallen.

In het limietgeval dat de balk een continu verdeelde massa draagt is de verdeelde belasting t.g.v. de centrifugaalkrachten

$$q = \rho A \omega^2 y \quad (4.16)$$

De gewone differentiaalvergelijking voor $y(x)$ wordt dan

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \rho A \omega^2 y = 0 \quad (4.17)$$

en deze vergelijking voor het bepalen van de kritieke toerentallen is hetzelfde als die voor de trillende buigbalk

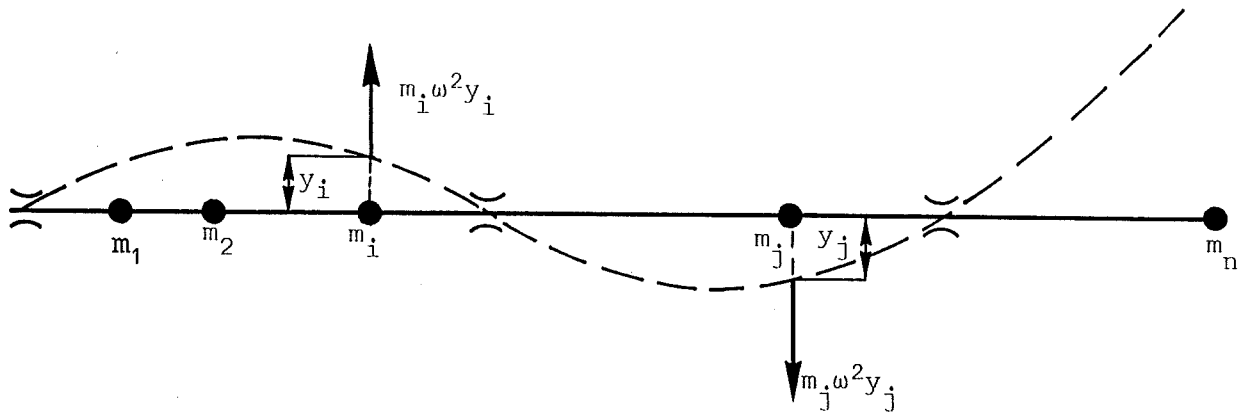


Fig. 4.4 Roterende as met n puntmassa's

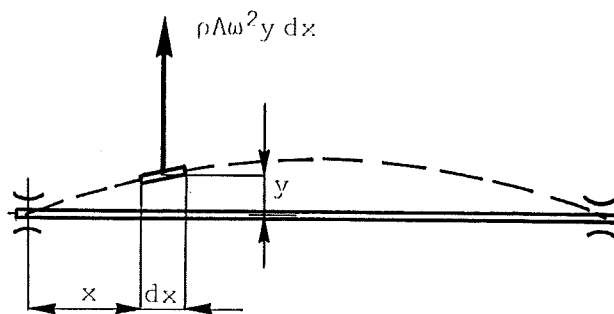


Fig. 4.5 Roterende as met continu verdeelde massa

4.2 Elastisch gelagerde as

Tot nu toe werd verondersteld dat de as star gelagerd was, maar dat is niet altijd het geval. Is de ondersteuning niet zeer stijf t.o.v. de as, dan moet dit in rekening worden gebracht en zal daardoor het laagste kritieke toerental dalen. Bij de gebruikelijke constructies zal de horizontale stijfheid niet gelijk zijn aan de verticale stijfheid. De ondersteuning gedraagt zich dan anisotroop. Meestal is de horizontale stijfheid lager dan de verticale stijfheid. Door de anisotropie vinden we twee vaak dicht bij elkaar gelegen kritieke toerentallen beide lager dan voor de star ondersteunde as. Het middelpunt van de schijf dat bij een starre of isotroop-elastische ondersteuning een cirkelbaan beschrijft zal bij anisotrope ondersteuning een ellips beschrijven. We zullen zien dat de ellips doorlopen kan worden in de draairichting van de as of in tegengestelde richting.

Bij glijlagers is het meestal noodzakelijk de stijfheid en eventueel ook de demping in rekening te brengen. De oliefilm gedraagt zich als een niet-lineaire veer maar voor kleine trillingen om een evenwichtsstand kan om deze stand gelineariseerd worden.

De complicatie dat de veren en dempers van de oliefilm gekoppeld zijn en bovendien aanleiding geven tot niet-symmetrische stijfheids- en dempingsmatrices laten we hier buiten beschouwing zodat de theorie in deze paragraaf slechts bij benadering het effect van de smeerfilm kan beschrijven.

In horizontale richting veronderstellen we nu 2 veren met stijfheid k_h in serie met de veerstijfheid van de as k (zie fig 4.6). In verticale richting zijn de stijfheidsgetallen van de lagers en de as resp. $2k_v$ en k . De effectieve veerstijfheden k_y en k_z worden dan bepaald uit

$$\frac{1}{k_y} = \frac{1}{2k_h} + \frac{1}{k}; \quad \frac{1}{k_z} = \frac{1}{2k_v} + \frac{1}{k} \quad (4.18)$$

en de terugstelkrachten op M zijn $-k_y y_m$ en $-k_z z_m$.

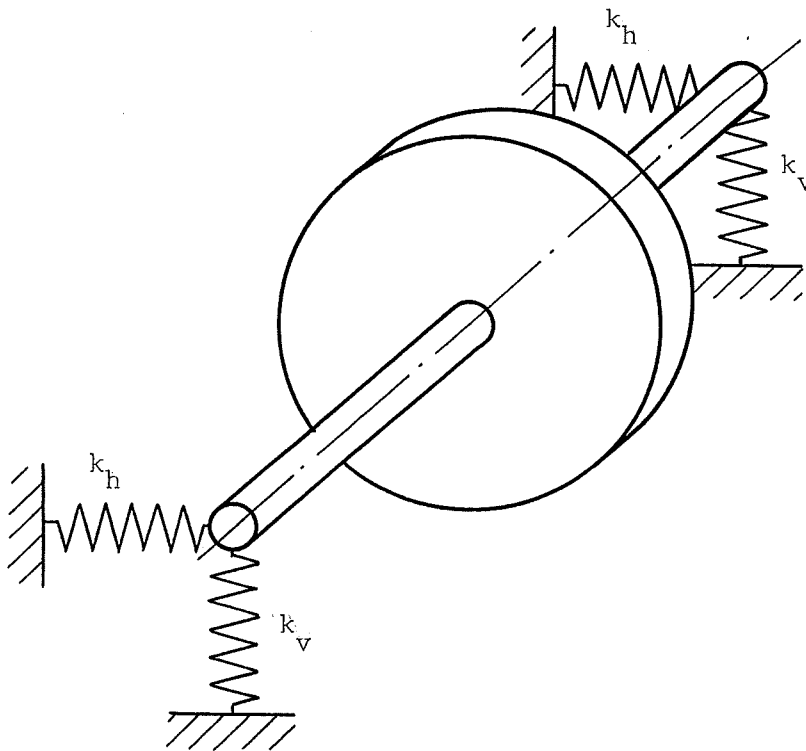


Fig. 4.6 Rotor opgelegd op elastische lagere

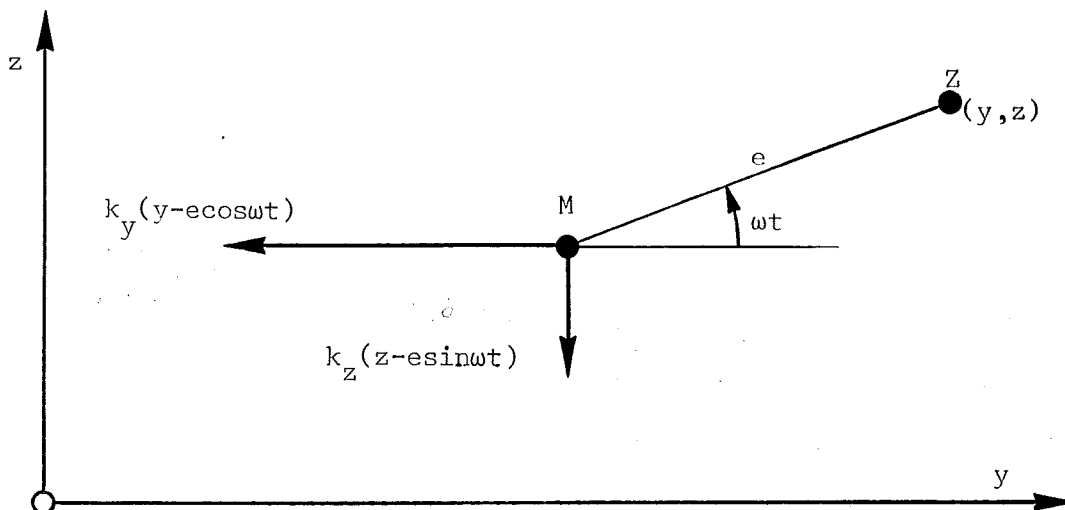


Fig. 4.7 Terugstelkrachten voor elastische lagering

De bewegingsvergelijkingen voor de translatie van het zwaartepunt zijn in dit geval

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_y^2 y &= e\omega_y^2 \cos\omega t \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z &= e\omega_z^2 \sin\omega t \end{aligned} \quad (4.19)$$

waarin

$$\omega_y^2 = \frac{k_y}{m} ; \omega_z^2 = \frac{k_z}{m} \quad (4.20)$$

Laten we weer de uitstervende oplossingen van de homogene vergelijkingen buiten beschouwing dan wordt de beweging van het zwaartepunt

$$y = \frac{e\omega_y^2}{(\omega_y^2 - \omega^2)} \cos \omega t ; z = \frac{e\omega_z^2}{(\omega_z^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (4.21)$$

en van het middelpunt van de schijf (M):

$$Y_m = \hat{Y}_m \cos \omega t ; z_m = \hat{Z}_m \sin \omega t \quad (4.22)$$

waarin

$$\hat{Y}_m = \frac{\omega^2}{(\omega_y^2 - \omega^2)} e ; \hat{Z}_m = \frac{\omega^2}{(\omega_z^2 - \omega^2)} e \quad (4.23)$$

Uit (4.22) volgt de vergelijking voor de ellips

$$\left(\frac{Y_m}{\hat{Y}_m} \right)^2 + \left(\frac{z_m}{\hat{Z}_m} \right)^2 = 1 \quad (4.24)$$

met halve assen $\hat{Y}_m$ en $\hat{Z}_m$.

Om de omlooprichting te onderzoeken voeren we de complexe coördinaat ζ in, gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \zeta = Y_m + iz_m &= \hat{Y}_m \cos \omega t + i \hat{Z}_m \sin \omega t \\ &= \frac{1}{2} \hat{Y}_m (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{1}{2} \hat{Z}_m (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

of

$$\zeta = \frac{1}{2} (\hat{Y}_m + \hat{Z}_m) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} (\hat{Y}_m - \hat{Z}_m) e^{-i\omega t} \quad (4.25)$$

De eerste term beschrijft in het complexe vlak een cirkel die doorlopen wordt in de draairichting van de as. De tweede term beschrijft een cirkel in tegengestelde richting.

Afhankelijk van de amplituden van de twee termen in (4.25) is de resulterende beweging van M gelijklopend of tegenlopend. We zien in Fig. 4.8 dat voor

$$(\hat{Y}_m + \hat{Z}_m) > (\hat{Y}_m - \hat{Z}_m)$$

de ellipsbaan gelijklopend is en voor

$$(\hat{Y}_m + \hat{Z}_m) < (\hat{Y}_m - \hat{Z}_m)$$

tegenlopend. Deze grootheden kunnen echter ook negatief zijn. Op dezelfde wijze als in figuur 4.8 aangegeven kunnen we aantonen dat in het algemeen geldt

$$\begin{aligned}
|\hat{y}_m + \hat{z}_m| &> |\hat{y}_m - \hat{z}_m| &: \text{gelijkloop (Gleichlauf)} \\
|\hat{y}_m + \hat{z}_m| &< |\hat{y}_m - \hat{z}_m| &: \text{tegenloop (Gegenlauf)} \\
|\hat{y}_m + \hat{z}_m| &= |\hat{y}_m - \hat{z}_m| &: \text{beweging langs een rechte lijn} \\
&&& \text{(gedegenereerde ellips)}
\end{aligned}$$

Met (4.23) volgt:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_m + \hat{z}_m &= e\omega^2 \frac{\omega_z^2 + \omega_y^2 - 2\omega^2}{(\omega_y^2 - \omega^2)(\omega_z^2 - \omega^2)} \\
\hat{y}_m - \hat{z}_m &= e\omega^2 \frac{\omega_z^2 - \omega_y^2}{(\omega_y^2 - \omega^2)(\omega_z^2 - \omega^2)}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

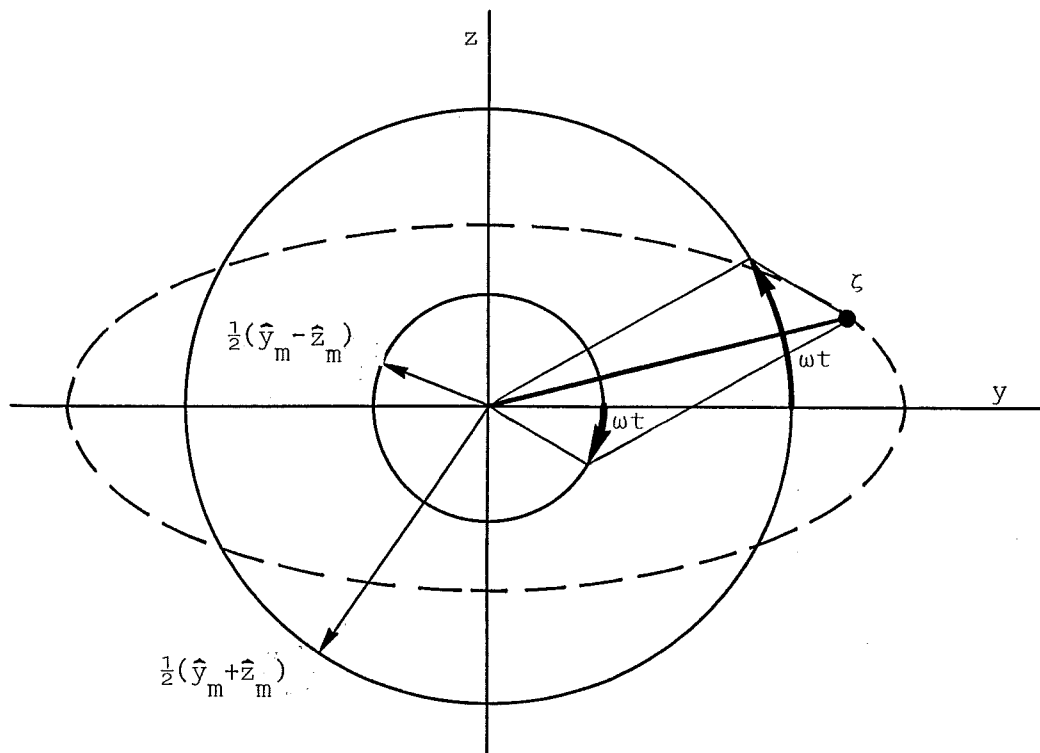


Fig. 4.8 Baankromme van M

Gelijklopende beweging treedt dus op voor

$$|\omega_y^2 + \omega_z^2 - 2\omega^2| > |\omega_y^2 - \omega_z^2| \tag{4.27}$$

Veronderstellen we dat de horizontale stijfheid lager is dan de verticale stijfheid dan geldt $\omega_z^2 > \omega_y^2$ en onderscheiden we de volgende gebieden

$$\begin{aligned}
\omega < \omega_y &: \text{gelijklopend} \\
\omega_y < \omega < \omega_z &: \text{tegenlopend} \\
\omega > \omega_z &: \text{gelijklopend}
\end{aligned}$$

Gasch en Pfützner [7] geven het volgende voorbeeld. Stel dat $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ en dat door de lagering $\omega_y = 0,85\omega_0$ en $\omega_z = 0,95\omega_0$. Fig. 4.9 geeft dan voor enkele waarden in het gelijkloop en tegenloop gebied de baankromme van M. Voor de resonantiefrequenties $\omega = \omega_y$ en $\omega = \omega_z$ ontaarden binnen de lineaire theorie de ellipsen in een oneindig lange horizontale resp. verticale lijn. Bij het doorlopen van de resonantiefrequentie verandert de gelijkloop in tegenloop of omgekeerd. Voor $\omega \gg \omega_z$ wordt de baanstraal weer e en centreert het zwaartepunt zich weer op de rotatie-as.

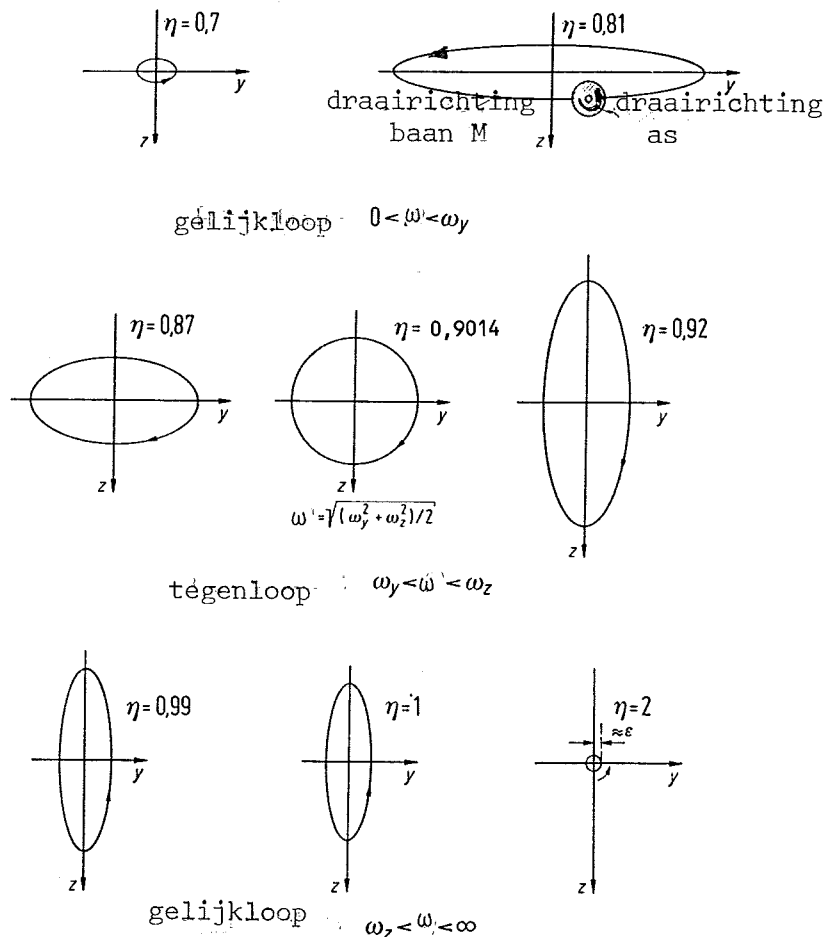


Fig. 4.9 Baan van het punt M in gelijkloop en tegenloop gebieden ($\omega_y = 0,85\omega_0$; $\omega_z = 0,95\omega_0$; $\eta = \omega/\omega_0$)

4.3 Niet axiaalsymmetrische asdoorsnede

Tot nu toe hebben we assen met cirkelvormige doorsnede verondersteld. Bij turbines is dat ook meestal juist, maar bij elektrische machines kunnen ook doorsneden voorkomen waarbij de buigstijfheid om twee onderling loodrechte assen sterk verschillend is, bijv. bij tweepolige rotoren van synchrone motoren. De verschijnselen die daarbij optreden onderzoeken we weer aan de hand van een as met één massa waarbij voor de asdoorsnede symmetrie verondersteld wordt om twee onderling

loodrechte assen.

Men mag verwachten dat er door het verschil in buigstijfheid weer twee kritische toerentallen zijn waarbij de amplitude t.g.v. een kleine onbalans binnen de lineaire theorie oneindig wordt. Het zal echter blijken dat in het gebied daartussen de beweging instabiel is.

Zouden we de bewegingsvergelijkingen formuleren in een vast coördinatensysteem dan hebben we te maken met een periodiek veranderende buigstijfheid. Is de lagering star of isotroop elastisch dan vinden we in een meedraaiend coördinatensysteem bewegingsvergelijkingen met constante coëfficiënten; daarom gaan we nu uit van een meedraaiend assenstelsel waarvan de asrichtingen evenwijdig zijn met de hoofdasen van de doorsnede. We beschouwen de relatieve beweging t.o.v. dat systeem.

In de hoofdrichtingen van de as veronderstellen we de stijfheidsgetallen k_y en k_z .

De vaste coördinaten van een punt geven we aan met (y_0, z_0) en de coördinaten in het meedraaiende systeem met (y, z) . We definiëren de complexe variabelen

$$\zeta_0 = y_0 + iz_0 ; \zeta = y + iz \quad (4.28)$$

Het verband hiertussen is

$$\zeta_0 = \zeta e^{i\omega t} ; \zeta = \zeta_0 e^{-i\omega t} \quad (4.29)$$

Hieruit volgt

$$\dot{\zeta}_0 = [\dot{\zeta} + i\omega\zeta] e^{i\omega t}$$

en

$$\ddot{\zeta}_0 = [\ddot{\zeta} + 2i\omega\dot{\zeta} - \omega^2\zeta] e^{i\omega t}$$

De complexe bewegingsvergelijking voor de translatie van z wordt

$$m\ddot{\zeta}_0 = m[\ddot{\zeta} + 2i\omega\dot{\zeta} - \omega^2\zeta] e^{i\omega t} = f_0 \quad (4.30)$$

waarin de terugstelkracht

$$f_0 = f_{y0} + if_{z0} \quad (4.31)$$

Uitgedrukt in het meedraaiende systeem vinden we na scheiding van het reële en het imaginaire deel:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= 2m\omega\dot{z} + m\omega^2 y + f_y \\ m\ddot{z} &= -2m\omega\dot{y} + m\omega^2 z + f_z \end{aligned} \quad (4.32)$$

De schijnkracht t.g.v. de sleepversnelling $\omega^2 r$ met componenten $m\omega^2 y$ en $m\omega^2 z$ is in figuur 4.10 aangegeven. Ook zijn daarin de zg. Coriolis-krachten aangegeven met componenten $2m\omega\dot{z}$ en $-2m\omega\dot{y}$ in resp y- en z-richting.

De positie van M t.o.v. Z is nu bepaald door e en γ zie Fig 4.11 en de terugstelkrachten zijn dan

$$\begin{aligned} f_y &= -k_y(y - e \cos \gamma) \\ f_z &= -k_z(z - e \sin \gamma) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Met de definities

$$\omega_y^2 = \frac{k_y}{m} ; \quad \omega_z^2 = \frac{k_z}{m} \quad (4.34)$$

kunnen de bewegingsvergelijkingen (4.22) herschreven worden in de vorm

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\omega_y^2 - \omega^2)y - 2\omega\dot{z} &= e\omega_y^2 \cos \gamma \\ \ddot{z} + (\omega_z^2 - \omega^2)z + 2\omega\dot{y} &= e\omega_z^2 \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.35)$$

Een particuliere oplossing hiervan is:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\omega_y^2}{(\omega_y^2 - \omega^2)} e \cos \gamma \\ z &= \frac{\omega_z^2}{(\omega_z^2 - \omega^2)} e \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.36)$$

Voor de vrije trillingen d.w.z de oplossingen van de homogene vergelijkingen wordt gesteld

$$y = A e^{\lambda t} ; \quad z = B e^{\lambda t} \quad (4.37)$$

Een van nul verschillende oplossing is dan mogelijk voor

$$\lambda^4 + (\omega_y^2 + \omega_z^2 + 2\omega^2)\lambda^2 + (\omega_y^2 - \omega^2)(\omega_z^2 - \omega^2) = 0 \quad (4.38)$$

of

$$\lambda^2_{1,2} = \frac{1}{2} [-(\omega_y^2 + \omega_z^2 + 2\omega^2) \pm \sqrt{(\omega_y^2 + \omega_z^2 + 2\omega^2)^2 - 4(\omega_y^2 - \omega^2)(\omega_z^2 - \omega^2)}] \quad (4.39)$$

Wordt gesteld dat $k_y < k_z$ en dus $\omega_y^2 < \omega_z^2$ dan is in het gebied

$$\omega_y < \omega < \omega_z$$

de term

$$-4(\omega_y^2 - \omega^2)(\omega_z^2 - \omega^2) > 0$$

en wordt één van de wortels λ^2 positief. Dit betekent een met de tijd exponentieel aangroeiende uitwijking. Hier hebben we dus niet alleen te maken met de twee eigenfrequenties ω_y en ω_z maar treedt instabiliteit op in het gebied er tussen.

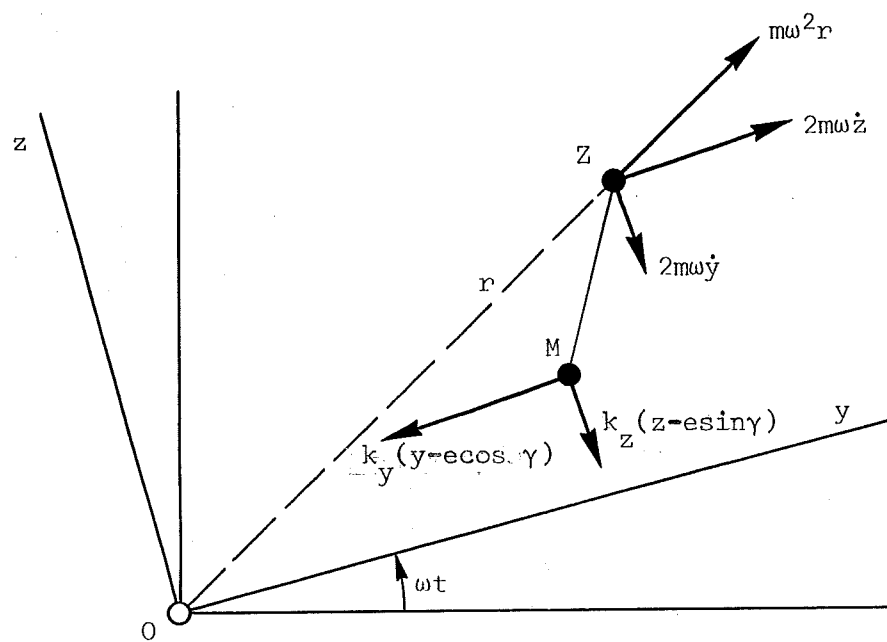


Fig. 4.10 Terugstelkrachten en schijnkrachten in het draaiende assenstelsel

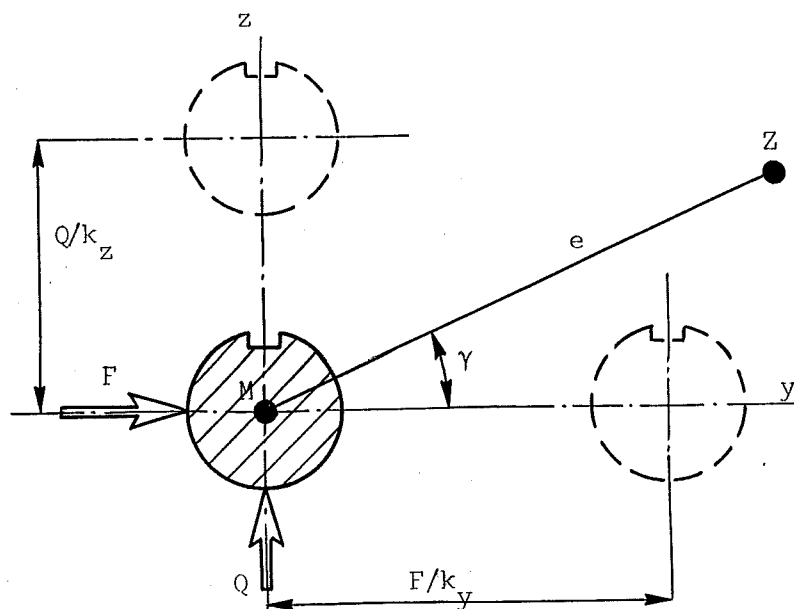


Fig. 4.11 Positie van het zwaartepunt voor een niet axiaalsymmetrische doorsnede

Het blijkt dat bij voldoende hoge uitwendige demping het tussengebied weer stabiel te krijgen is. Hiervoor wordt verwezen naar de literatuur [7].

4.4 Balanceren

Balanceren van een starre rotor

Ligt het zwaartepunt van een schijf op een afstand e van de hartlijn van de as dan veroorzaakt dit trillingen en roterende krachten op de lagers. Deze onbalans kan opgeheven worden door een kleine massa aan te brengen aan de 'lichte zijde' van de schijf, zodat het zwaartepunt weer centraal komt te liggen. Is de massa van de schijf M , de excentriciteit e en de correctiemassa m op een afstand r van de hartlijn van de as aangebracht, dan moet gelden

$$mr = Me \Rightarrow m = \frac{e}{r} M \quad (4.40)$$

Het bepalen van de onbalans Me kan met een statische proef gebeuren. Laten we de rotor in het zwaartekrachtsveld rollen over twee horizontale strippen, dan komt het zwaartepunt zo laag mogelijk te liggen en moet de correctie aan de bovenkant van de schijf aangebracht worden. De grootte van de correctie mr wordt zo gekozen dat de rotor juist in indifferent evenwicht is.

Is de rotor niet een schijf maar een cilinder zoals bijv. in Fig. 4.12, dan zal als er op de ideale cilinder een kleine massa

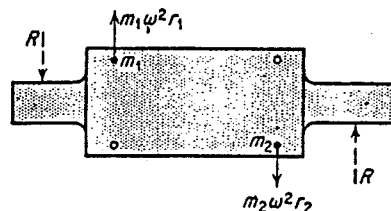


Fig. 4.12 Een dynamisch ongebalanceerde rotor

m_1 op straal r_1 wordt aangebracht en 180° gedraaid een massa $m_2 = m_1$ op straal $r_2 = r_1$ de cilinder in evenwicht zijn.

Roteert de as dan ontstaat er door de centrifugaalkrachten $m_1 \omega^2 r_1$ en $m_2 \omega^2 r_2$ een koppel en daardoor worden er ook reactiekrachten in de lagers opgewekt die evenwicht maken. De rotor is statisch gebalanceerd, maar dynamisch ongebalanceerd d.w.z. de onbalans kunnen we alleen met een dynamische test constateren.

We zullen nu laten zien dat een starre rotor volledig gebalanceerd (statisch en dynamisch) kan worden door in 2 vlakken loodrecht op de as te corrigeren. Meestal zullen daarvoor de eindvlakken worden genomen. Als voorbeeld kiezen we (Fig. 4.13)

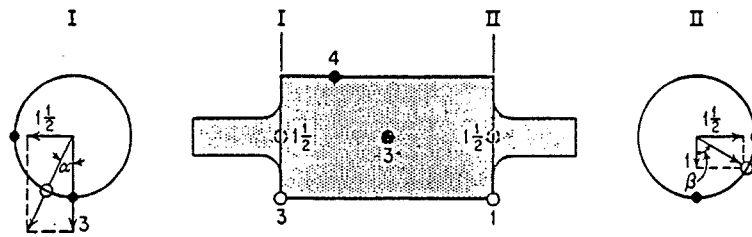


Fig. 4.13 Onbalans in een rotor gecorrigeerd in de twee eindvlakken I en II.

een rotor met onbalans $mr=4$ op een kwart van de lengte en $mr=3$ over 90° gedraaid midden tussen de eindvlakken. De onbalans $mr=4$ wordt gecorrigeerd met 3 en 1 op de eindvlakken I en resp. II over 180° gedraaid. De onbalans $mr=3$ wordt gecorrigeerd met $1\frac{1}{2}$ in beide eindvlakken. De totale correcties worden nu bepaald door de correcties in de eindvlakken samen te stellen als in Fig 4.13 aangegeven. In vlak I zijn de resulterende onbalans en de positie

$$mr = \sqrt{(1,5^2 + 3^2)} = 3,35 ; \alpha = \arctan 0,5$$

en in vlak II

$$mr = \sqrt{(1+1,5^2)} = 1,80 ; \beta = \arctan 1,5$$

Hier is aangenomen dat we grootte en positie van de bestaande onbalans kennen, maar in het algemeen zullen die bepaald moeten worden op een balanceermachine. Zie voor de beschrijving van dergelijke metingen bijvoorbeeld [1].

Balanceren van flexibele rotoren

Tot nu toe veronderstelden we dat de rotor star was en dat is een goede benadering als we draaien op een toerental ver beneden het eerste kritieke toerental. Echter bij toerentallen hoger dan ongeveer de helft van het eerste kritieke toerental wordt de uitbuiging van de rotor zodanig dat de daardoor veroorzaakte extra centrifugaal krachten niet meer verwaarloosd kunnen worden.

De machine kan altijd gebalanceerd worden door direct tegenover de onbalans (Me) een correctie aan te brengen, maar als we willen balanceren in twee vlakken loodrecht op de as dan wordt de situatie wat gecompliceerder. Veronderstel nu dat de rotor een uniforme as is en dat we willen balanceren in de vlakken op $\frac{1}{6}$ van de totale lengte vanaf de einden. Een eenheid van onbalans ($Me=1$) eist bij een starre as de waarden $mr=\frac{1}{2}$ ter plaatse van elk van de 2 vlakken.

Als de as draait op zijn eerste kritieke toerental dan is de doorbuiging sinusvormig en moeten we een onbalans aanbrengen van Me ter plaatse van beide vlakken (zie Fig.4.14 -b). Dit kan aangetoond worden door de arbeid van de onbalans krachten te beschouwen voor een virtuele uitwijking (vanuit de rechte toestand) in de eerste trilvorm. De virtuele amplitude ter plaatse van de onbalans wordt δy gesteld. Zijn er geen onbalans krachten dan is elke uitgebogen toestand in de trilvorm een evenwichtstoestand. Is nu de virtuele arbeid van de extra onbalanskrachten nul dan hebben we de as weer gebalanceerd. Is de onbalans in de vlakken I en II gesteld op αMe dan is de virtuele

arbeid van de centrifugaalkrachten

$$[-\alpha_1 Me\omega_1^2 + Me\omega_1^2] \delta y = 0 \quad (4.41)$$

en is dus inderdaad $\alpha_1=1$.

Op het tweede kritieke toerental is de virtuele arbeid van onbalans Me nul omdat de tweede trilvorm een knoop heeft ter plaatse van de onbalans. Op het derde kritieke toerental moet de correctie onbalans in het vlak I en ook in het vlak II aan dezelfde zijde zijn aangebracht als de oorspronkelijke onbalans. De virtuele arbeidsvergelijking met virtuele verplaatsingen in de derde trilvorm geeft

$$[2\alpha_3 Me\omega_3^2 - Me\omega_3^2] \delta y = 0$$

en hieruit volgt $\alpha_3=\frac{1}{2}$ (zie Fig 4.14 -d)

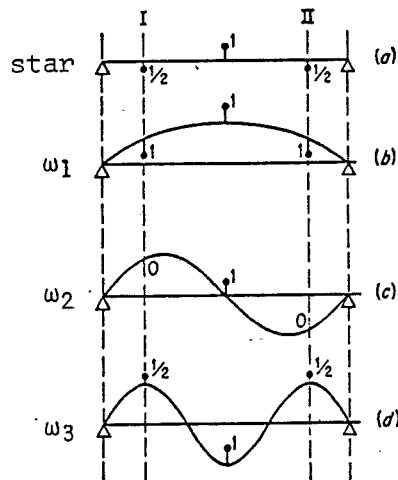


Fig. 4.14 Correctie onbalans in de vlakken I en II voor de starre balk en voor rotatie op het 1^e, 2^e of 3^e kritieke toerental.

We kunnen nu de belangrijke conclusie trekken dat de flexibele rotor slechts voor één toerental gebalanceerd kan worden door onbalansen in twee vlakken aan te brengen.

LITERATUURLIJST

- [1] Hartog, J.P. den, Mechanical Vibrations, 4th ed.
McGraw-Hill, New York, 1956.
Reprinted: Dover, New York, 1985.
- [2] Bathe, K.-J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis.
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982
- [3] Clough, R.W. and Penzien, J., Dynamics of Structures.
McGraw-Hill, New York, 1975.
2nd edition, 1993
- [4] Besseling, J.F., Stijfheid en Sterkte II (bw60).
Vakgroep Technische Mechanica, TU-Delft, 1988.
- [5] Meijers, P., Stijfheid en Sterkte III (bw71).
Vakgroep Technische Mechanica, TU-Delft, 1988.
- [6] Lekkerkerker, J.G., Dynamica van Machines.
Vakgroep Technische Mechanica, TU-Delft, 1987.
- [7] Gasch, R. und Pfützner, H., Rotordynamik.
Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [8] Biezeno, C.B. und Grammel, R., Technische Dynamik, Zweiter Band.
Springer Verlag, Berlin, 1953.
- [9] Wilkinson, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem.
Oxford Univ.Press, Oxford, 1965.
- [10] Hughes, Th.J.R., The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic
Finite Element Analysis.
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [11] Newland, P.E., Mechanical Vibrations Analysis and Computation.
Longman, Harlow, England, 1989.

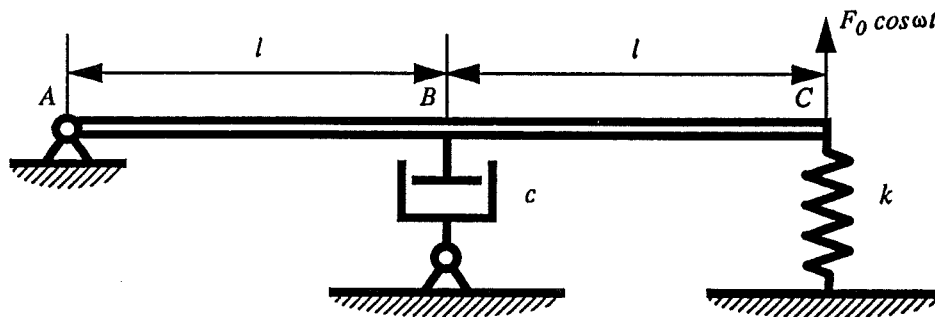
Oefenvraagstukken

Oefenvraagstukken

1. Systemen met enkele graden van vrijheid	5
2. Numerieke behandeling van discrete systemen	31
3. Rotordynamica en diversen	45
Antwoorden	49

1. Systemen met enkele graden van vrijheid

Opgave I.1



Een rechte onvervormbare balk AC, met homogeen verdeelde massa m , is in het uiteinde A scharnierend aan een vast steunpunt verbonden.

Het midden B is door een lineaire demper (dampings-constante c) aan een steunpunt verbonden en het uiteinde C is verend ondersteund (lineaire veer, veerstijfheid k).

In C werkt een uitwendige harmonische kracht $F \cos \omega t$. De optredende hoekverdraaiing van de balk is voor te stellen met een amplitude φ en een fasehoek α door $\varphi = \varphi \cos (\omega t - \alpha)$.

Gegeven is dat bij een frequentie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

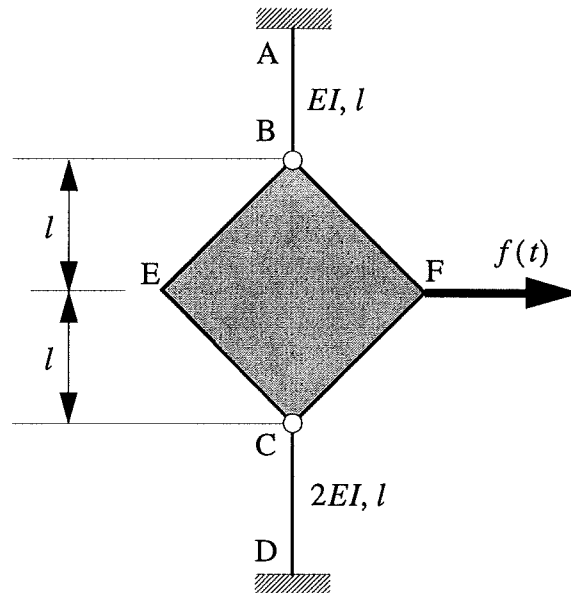
de fasehoek α 30° bedraagt.

We stellen de dampingsconstante c voor door $c = \mu \sqrt{mk}$.

BEREKEN:

De getallencoëfficiënt μ .

Opgave I.2

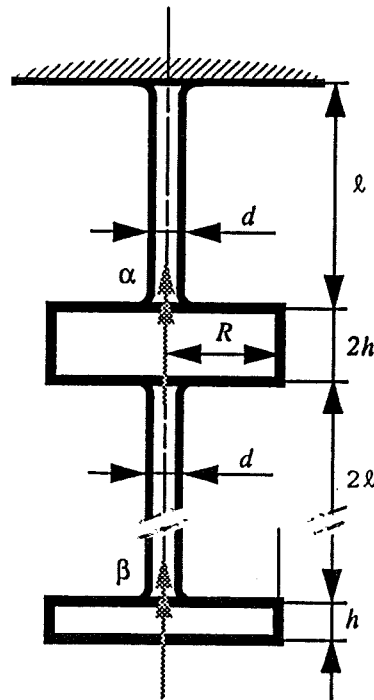


Een vierkante plaat met een uniforme massaverdeling en een totale massa m is in B en C bevestigd aan de bladveren BA en resp. CD . De buigstijfheid van de veren is EI voor AB en $2EI$ voor CD . De normaalkrachtstijfheid mag oneindig groot gesteld worden. In het hoekpunt C is de kracht $f(t)$ aangebracht.

GEVRAAGD:

- Toon aan dat het massa traagheidsmoment (I) van de schijf t.o.v. het zwaartepunt gelijk is aan $\frac{1}{3}ml^2$.
- Stel de bewegingsvergelijkingen op.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen van kleine trillingen in het vlak van tekening.
- Bepaal de responsie op een eenheidsimpuls $f = \delta(t)$.
- Bepaal de stationaire responsie op een harmonische excitatie $f = f_0 \sin \Omega t$.

Opgave I.3



Op een rechte as, aan één uiteinde ingeklemd, zijn twee schijven gemonteerd.

De lengte van het asdeel tussen de inklemming en de eerste schijf bedraagt de helft van die van het asdeel tussen de eerste en de tweede schijf. De as heeft overal dezelfde dikte.

Het materiaal is homogeen en elastisch met overal dezelfde glijdingsmodulus.

De massa mag worden verwaarloosd ten opzichte van de massa van de schijven.

Deze mogen echter wel als onvervormbaar worden beschouwd. Het zijn beide cilindrische schijven met dezelfde doorsnede, echter is van de eerste schijf de dikte tweemaal die van de tweede.

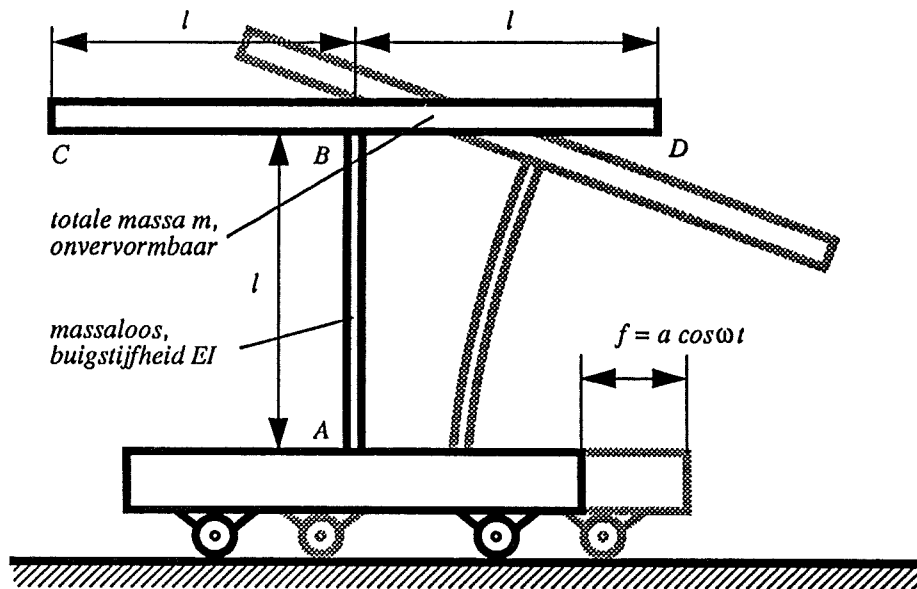
We beschouwen torsietrillingen, en wel de vrije trillingen die het systeem kan uitvoeren.

We duiden de hoekverdraaiingen van de schijven aan met α , resp. β .

GEVRAAGD:

De eigenfrequenties en de bijbehorende eigenvectoren.

Opgave I.4



Op een verrijdbare ondersteuning die in horizontale richting heen en weer bewogen wordt, en bijgevolg een verplaatsing $f = a \cos \omega t$ vertoont, is een constructie ingeklemd die bestaat uit een onvervormbare balk CD (lengte 2ℓ , massa m homogeen verdeeld) en een rechte als massaloos te beschouwen balk AB (buigstijfheid EI).

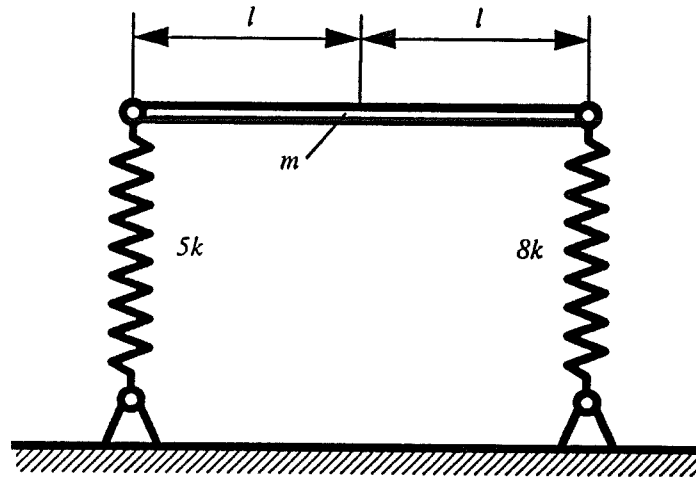
Het uiteinde A is ingeklemd in de genoemde ondersteuning, zodanig dat aldaar de raaklijn aan de eventueel vervormde balk AB vertikaal blijft (A ondergaat dus de harmonische heen en weer gaande beweging met amplitude a).

Het uiteinde B is ingeklemd in het midden van de balk CD.

GEVRAAGD:

- de optredende vervorming van de constructie te bestuderen, een onderzoek dat vergelijkbaar is met het nagaan van het effect van een aardbeving op een constructie.
- In het bijzonder wordt gevraagd:
Bij welke ω (of ω 's) is de verplaatsing van B gelijk aan 0, en wat is de bij die frequentie optredende hoekverdraaiing van CD?

Opgave I.5



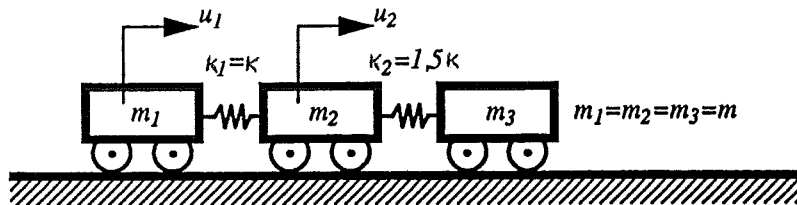
Een rechte homogene onvervormbare balk (lengte 2ℓ , massa m) is in zijn uiteinde ondersteund door veren met stijfheden ter grootte van respectievelijk $5k$ en $8k$.

We beschouwen bewegingen waarbij de veren alleen krachten $\perp$ balk uitoefenen (alles in het vlak van tekening, geen omkantelen naar rechts of links).

BEPAAL:

- Eigenfrequenties en eigenvectoren,
- Een stelsel modale coördinaten en een stelsel bewegingsvergelijkingen in deze modale coördinaten.

Opgave I.6



Het in de figuur aangegeven systeem beweegt aanvankelijk met constante snelheid. Op het tijdstip $t = 0$ wordt m_3 zodanig afgeremd dat de snelheid bij benadering direct nul wordt en blijft.

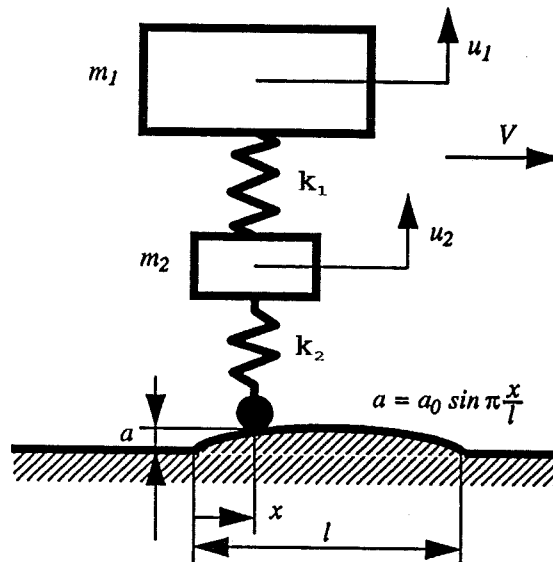
De andere massa's hebben op dat moment nog de aanvankelijke snelheid $\dot{u}_0$.

GEVRAAGD:

- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor de beweging van de massa's m_1 en m_2 voor $t > 0$.
- Bepaal de oplossing van deze vergelijkingen met de gegeven beginvoorwaarden.
De damping van het systeem wordt verwaarloosd.
- Geef aan hoe de maximale amplituden en de maximale veerkrachten wijzigen als m een factor 9 vergroot wordt en ook voor het geval de veerstijfheid k eenzelfde factor vergroot wordt.

Aangenomen kan worden dat de maximale amplitude gelijk is aan de som van de absolute waarden van de amplituden in de eigenfrequenties.

Opgave I.7

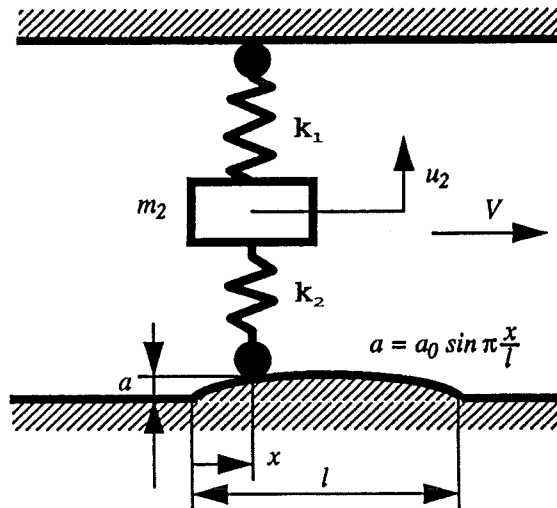


Bovenstaand tweevoudig massa-veersysteem geeft een sterk geschematiseerd voertuig aan dat met een snelheid V over een hobbel in het wegdek beweegt. Voor de eenvoud is hier de demping verwaarloosd.

GEVRAAGD:

- a) Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen voor het tweevoudig massa-veersysteem als $m_2/m_1 = 1/20$ en $k_2/k_1 = 5$.

- b) Voor de hoogfrequente aanstoting zal het systeem in eerste instantie benaderd kunnen worden door het onderstaande enkelvoudige massa-veersysteem.



Wat is de eigenfrequentie ω_2^* van dit enkelvoudig massa-veersysteem en vergelijk die met de hoogste eigenfrequentie ω_2 van het tweevoudig massa-veersysteem.

- c) Neem aan dat voor $t = 0$ juist de hobbels bereikt wordt en dat de snelheid V en de lengte l zodanig zijn dat voor

$$0 < t \leq T = \frac{\pi}{\omega_2^*} :$$

de opgelegde verplaatsing

$$a = a_0 \sin \omega_2^* t.$$

Wat is dan het verband tussen ω_2^* , V en l ?

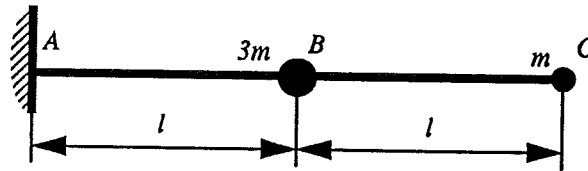
- d) Bepaal de responsie u_2 en de kracht op het wegdek voor

$$0 < t \leq \pi / \omega_2^*.$$

- e) Geef aan waar de oplossing voor dit model eventueel ongeldig wordt doordat er een trekkracht ontstaat tussen voertuig en wegdek.

(N.B.: In werkelijkheid ligt de situatie anders doordat we de statische aandrukkracht en ook de damping buiten beschouwing hebben gelaten.)

Opgave I.8



Een als massaloos te beschouwen rechte balk met buigstijfheid EI en lengte 2ℓ is in het uiteinde A ingeklemd, draagt in het midden B een puntmassa $3m$, en in het uiteinde C een puntmassa m .

GEVRAAGD:

Eigenfrequenties en trillingsvormen van de vrije trillingen die het systeem kan uitvoeren (met een eindige elementen behandeling).

Opgave I.9

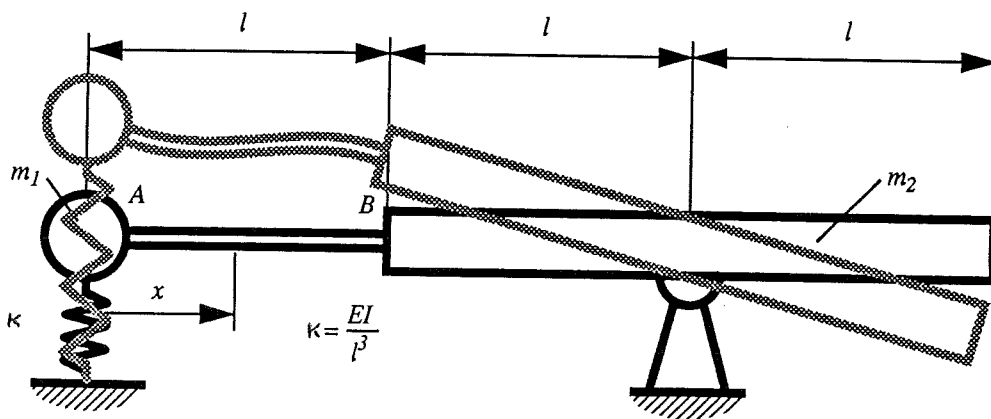
Gegeven is een in onvervormde toestand rechte, homogene, prisma-tische balk (lengte ℓ , buigstijfheid EI , soort. massa $\rho = 0$, opp. doorsnede A).

In een der uiteinden draagt deze balk een als stoffelijk punt op te vatten massa m_1 . Dit uiteinde is ondersteund door een veer met stijfheid κ .

Het andere uiteinde is star verbonden met een onvervormbare balk (lengte 2ℓ , totale massa, homogeen verdeeld, m_2 . De hartlijn van die balk ligt aldaar in het verlengde van de eerste balk.

De onvervormbare balk is in het midden scharnierend bevestigd aan een vast steunpunt.

De geometrie van het geheel is zodanig dat bij kleine uitwijkingen de veer een kracht uitoefent waarvan de werklijn loodrecht staat op de hartlijn van de balken in onvervormde toestand. Het vlak gaande door deze werklijn en de hartlijn van de balken is tevens het vlak waarin de onvervormbare balk zijn roterende beweging uitoefent.



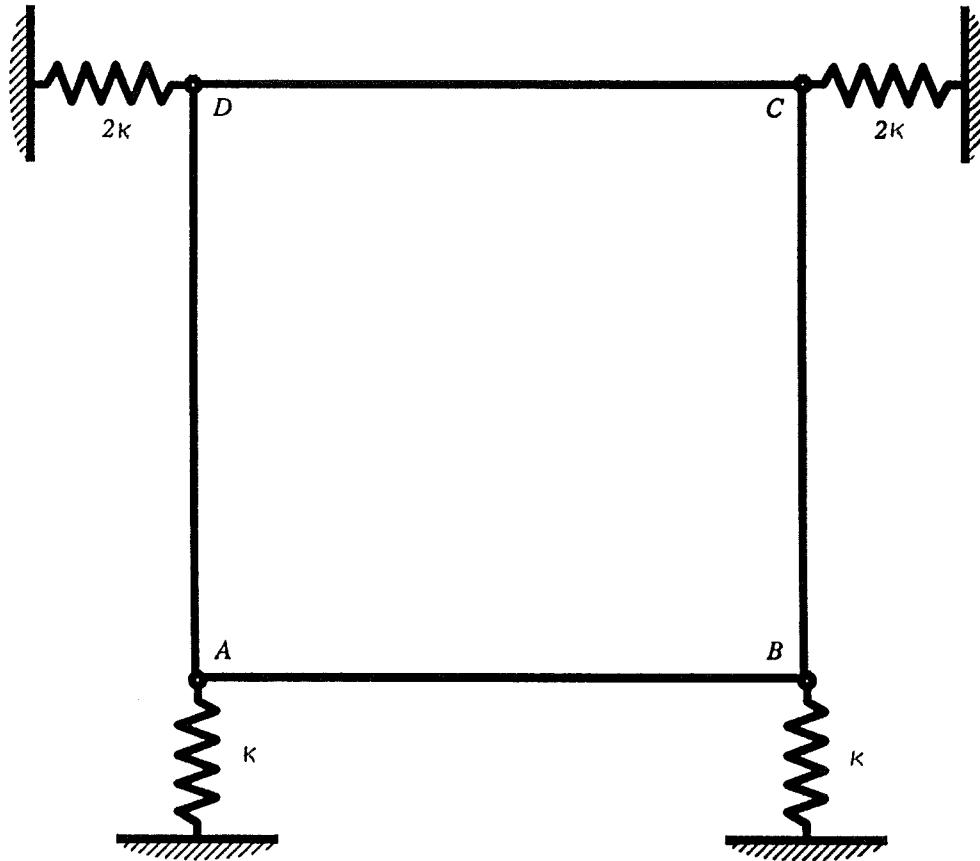
Dit systeem kan vrije trillingen uitvoeren.

GEVRAAGD:

Eigenfrequenties in trilvormen te bepalen met een eindige-elementen-methode.

Kies langs AB slechts één element en kies $m_2 = 3 m_1$.

Opgave I.10



Gegeven is een homogene vierkante plaat ABCD met massa m . Deze plaat kan in zijn vlak bewegen, maar is in elk der hoekpunten door een veer verbonden met een vast punt. De veren in C en D hebben een stijfheid $2k$ en zijn gericht volgens de ribbe CD. De veren in A en B hebben een stijfheid k en zijn gericht volgens respectievelijk DA en CB. Dit geldt dan, om precies te zijn, in de getekende stand waarbij elke veer juist ontspannen is.

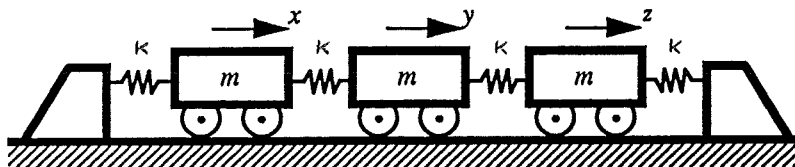
We beschouwen trillingen die de plaat uitvoert om deze evenwichtsstand (er hoeft geen zwaartekracht in rekening gebracht te worden) waarbij de uitwijkingen klein blijven, zodanig dat mag worden aangenomen dat de richtingen waarin de veren krachten uitoefenen ongewijzigd blijven.

GEVRAAGD:

Alle frequenties, met bijbehorende trillingsvormen (zgn. eigenvectoren).

Opm.: Men noeme de lengte van elk der zijden van het vierkant ABCD : 2ℓ .

Opgave I.11



Gegeven zijn 3 massa's ter grootte m die langs een rechte lijn kunnen bewegen (in de figuur weergegeven als wagentjes). Ze zijn onderling verbonden door lineaire veren met stijfheid κ , d.w.z. bij uitrekking is de veerkracht een trekkracht gelijk aan κ x de verlenging en bij indrukking een drukkracht κ x de verkorting (de veer knikt dan niet uit).

Aldus is de eerste massa waarvan we de verplaatsing met x aanduiden verbonden met de tweede (verplaatsing y) en deze met de derde (verplaatsing z).

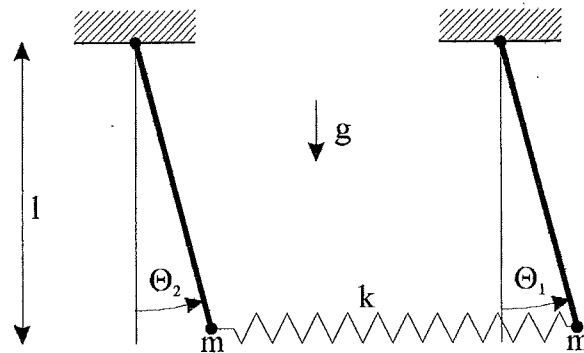
Bovendien zijn de eerste en derde elk met eenzelfde veer met stijfheid κ verbonden aan vaste steunpunten. Deze bevinden zich op de reeds genoemde rechte lijn.

We beschouwen de vrije trillingen die het systeem kan uitvoeren.

BEREKEN:

De eigenfrequenties alsmede de bijbehorende trillingsvormen (de eigenvectoren).

Opgave I.12



- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor de gekoppelde slingers in bovenstaande figuur.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen.
- Bepaal de responsie voor de beginvoorwaarden

$$\theta_1(0) = \theta_0; \theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$$

- Geef ook de oplossing voor

$$2 \frac{k}{m} \ll \frac{g}{l}$$

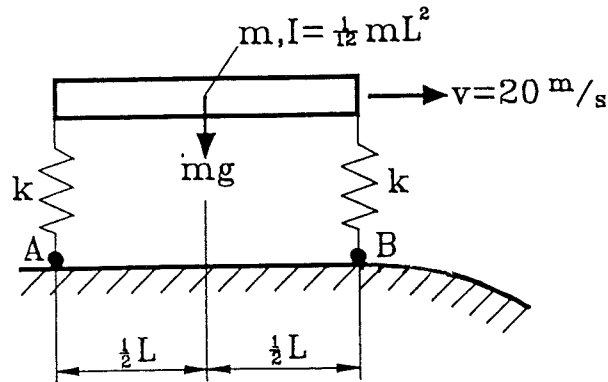
en de frequentie van de zwevingen.

N.B.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

Opgave I.13

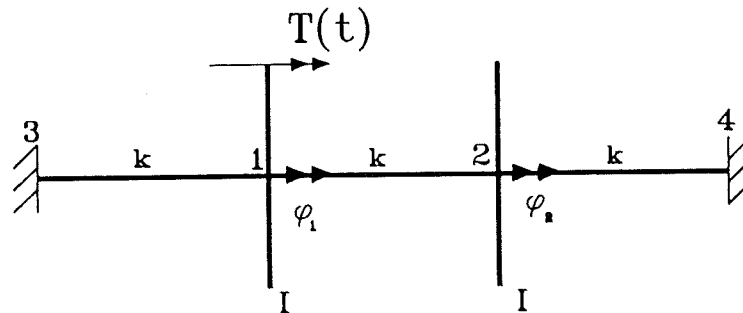


Een voertuig wordt geschematiseerd door een massa m , een massatraagheid om het zwaartepunt I en twee veren met stijfheid k (zie figuur). De statische indrukking t.g.v. de zwaartekracht bedraagt $u_{st}=0,05m$. Neem $g=10\text{m/s}^2$. Het voertuig heeft een snelheid van 20m/s . Vanaf het tijdstip $t=0$ is de weg zodanig dat het punt B een versnelling omlaag krijgt van $2g$.

GEVRAAGD:

- Bepaal het verloop van de weg $u_B(s)$ waarin s de afgelegde weg is vanaf $t=0$.
- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor het geschematiseerde voertuig waarbij verondersteld wordt dat B niet loslaat van de weg. (A beweegt horizontaal) Kies als vrijheidsgraad voor de verticale verplaatsing, de verplaatsing vanuit de positie dat er geen krachten (dus ook geen zwaartekracht) op het lichaam werken.
- Bepaal de oplossing voor $t \geq 0$ ($t < 0$ beweging op horizontale weg).
- Geef de vergelijking voor het loslaten van B. Wat is dan bij benadering de afgelegde weg (s) en de verticale verplaatsing u_B .

Opgave I.14

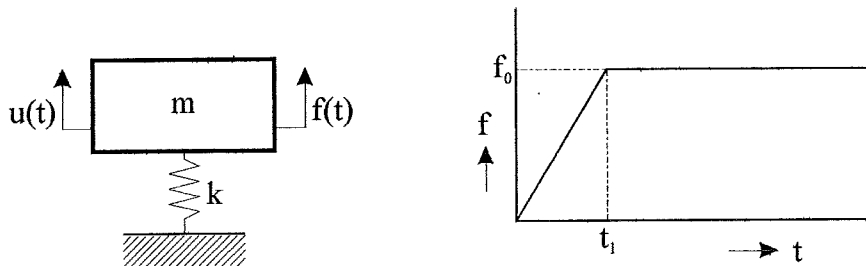


De schijven in 1 en 2 hebben een rotatietraagheid I .
De stijfheid van de torsieveren 3-1, 1-2 en 2-4 is k .
Schijf 1 is belast door een koppel $T(t)$.

GEVRAAGD:

- Wat is de stationaire oplossing voor de rotatie in punt 2 als $T(t)$ een harmonische excitatie is.
- Wat is de responsie in punt 2 t.g.v. een stap belasting in punt 1 ($t > 0$: $T(t) = T_0$) aangenomen dat het systeem in rust is voor $t < 0$.

Opgave I.15

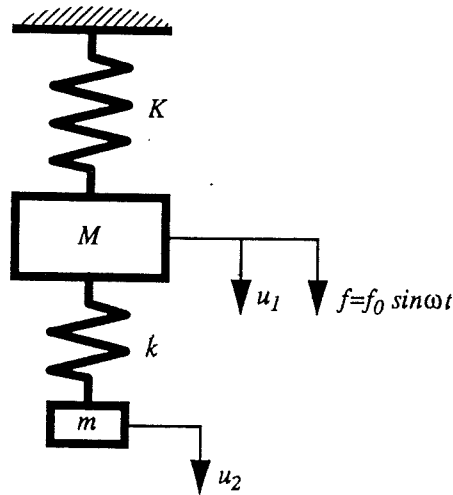


Bovenstaand enkelvoudig massa-veersysteem wordt belast door de kracht $f(t)$. Deze kracht verloopt lineair tussen $t = 0$ en $t = t_1$ en is daarna constant en gelijk aan f_0 . Op het tijdstip $t = 0$ is het systeem in rust.

GEVRAAGD:

- Bepaal de responsie $u(t)$ voor $0 \leq t \leq t_1$.
- Bepaal de responsie $u(t)$ voor $t \geq t_1$.
- Gedurende het inschakelverschijnsel zal de amplitude van $u(t)$ ergens voor $t > t_1$ maximaal zijn.
Geef de vergelijking voor de tijd, t_m , waarop dit maximum optreedt.
- Als T de periodetijd is van de eigenfrequentie
bepaal dan de maximale amplitude van de responsie in het gebied $t > t_1$
voor $t_1/T = 0$ en $t_1/T = 1$.

Opgave I.16



In bovenstaande figuur is een machine schematisch voorgesteld door het massa-veersysteem K, M . Een harmonische kracht $f = f_0 \sin \omega t$ met constante frequentie ω veroorzaakt trillingen.

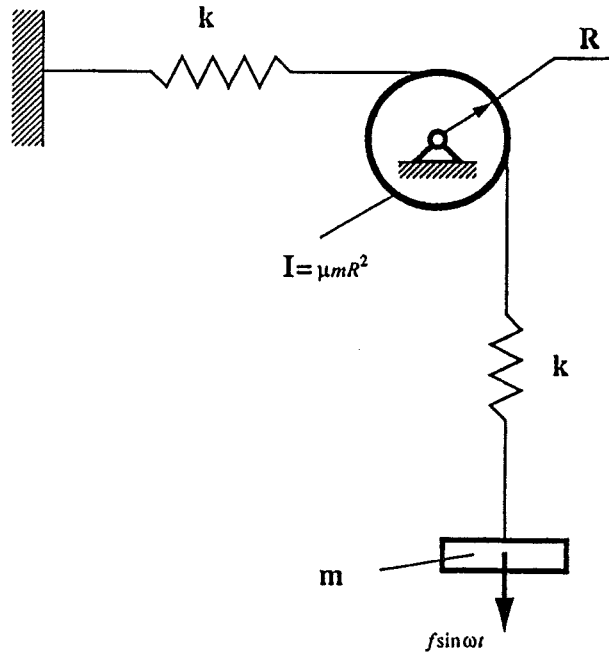
De trillingshinder willen we elimineren door het aanbrengen van een dynamische trillingsdemper in de vorm van een massa-veersysteem k, m .

We kiezen $k/m = K/M$ en geven de verhouding van hulpmassa en hoofdmassa aan met $\mu = m/M$.

GEVRAAGD:

- Geef de stationaire oplossing voor u_1/u_{1st} en u_2/u_{1st} als functie van ω . Hierin is $u_{1st} = f_0/K$.
- Voor welke frequentie is de amplitude van u_1 nul en wat is bij deze frequentie de amplitude van u_2 ?
- Hoe liggen als functie van μ de twee eigenfrequenties van het systeem t.o.v. de eigenfrequentie van het systeem zonder dynamische trillingsdemper?
- Geef numerieke waarden voor de eigenfrequenties onder 3) als $\mu = 0,1$ en $\mu = 0,2$.

Opgave I.17

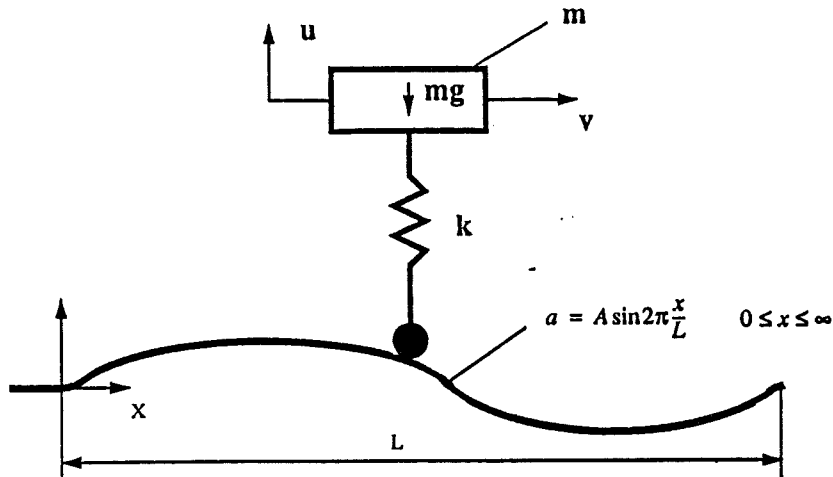


Een koord loopt over een katrol die in punt A vast en wrijvingsloos is ondersteund. Aan het eind is een massa m bevestigd. Beide delen van het koord mogen vervangen worden door veren met veerstijfheid k . De straal van de katrol is R en de massatraagheid $I = \mu m R^2$.

GEVRAAGD:

- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen voor kleine trillingen om de evenwichtsstand. Hierbij kan aangenomen worden dat de wrijving tussen koord en katrol zodanig groot is dat geen glijden optreedt. Geef het resultaat speciaal voor $\mu = 0,1$.
- Bepaal ook de stationaire oplossing als op de massa m een verticale kracht $f \sin \omega t$ werkt.
- Bepaal de horizontale en verticale kracht op het steunpunt als functie van de excitatiefrequentie ω .
- Hoe groot zijn $\hat{H}/f$ en $\hat{V}/f$ voor $\omega = 2 \sqrt{k/m}$ en $\mu = 0,1$. Hierin is $\hat{H}$ de amplitude van de horizontale kracht op steunpunt A en $\hat{V}$ de amplitude van de verticale kracht. Voor welke frequentie geldt $\hat{V} = 0$?

Opgave I.18

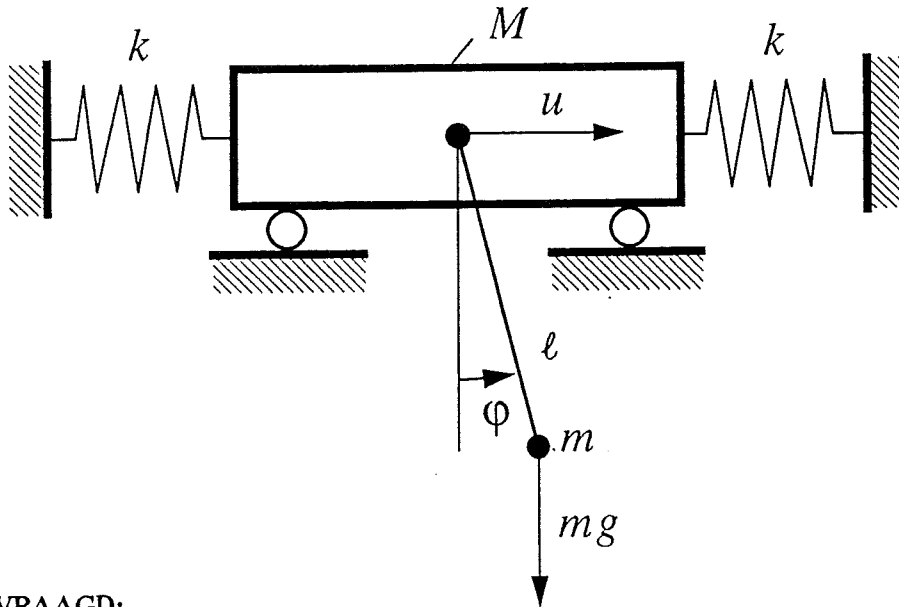


Bovenstaande figuur geeft **sterk geschematiseerd** een voertuig op een oneffen weg. Het voertuig heeft een constante snelheid v .

GEVRAAGD:

- Geef in de stationaire toestand waarbij het contact met de weg behouden blijft de responsie van het voertuig.
- Bepaal de contactkracht tussen veer en weg.
- Als de snelheid zeer langzaam opgevoerd wordt bij welke snelheid komt het voertuig dan los van de weg?
- Wat is die snelheid als $L = 6\text{ m}$; $A = 0,1\text{ m}$; $g = 10\text{ m/s}^2$, $k/m = 100\text{ s}^{-2}$.
- Geef ook de responsie van het systeem met in achtnahme van het inschakelverschijnsel als voor $t = 0$: $u = -mg/k$; $\dot{u} = 0$, en op dat tijdstip juist de eerste hobbel bereikt wordt als in de figuur aangegeven.

Opgave I.19



GEVRAAGD:

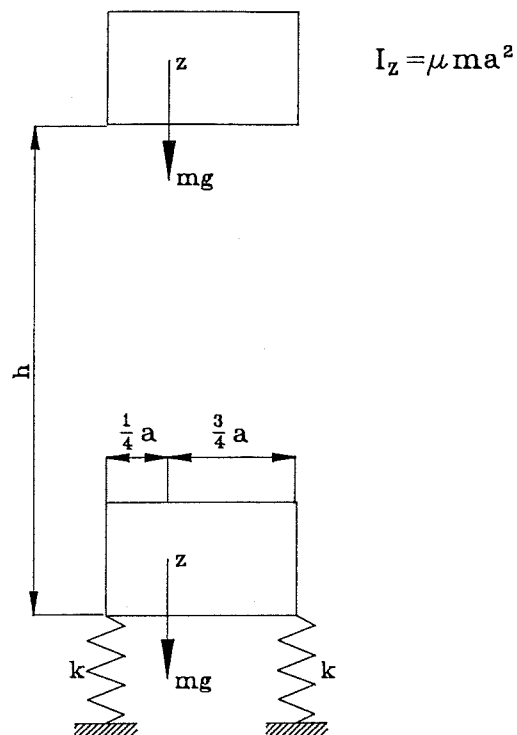
- a) Als $\mu = \frac{m}{M}$ en het koord tussen de hoofdmassa M en de massa m als massaloos te beschouwen is, bepaal dan voor het gegeven systeem de eigenfrequenties en trilvormen voor kleine trillingen om de evenwichtsstand $u = 0$ en $\theta = 0$; voor het speciale geval $\frac{2k}{M} = \frac{g}{\ell}$

- b) Geef ook de laagste eigenfrequentie voor

$$\frac{2k}{M} \ll \frac{g}{\ell} \quad \text{en voor} \quad \frac{g}{\ell} \ll \frac{2k}{M}$$

- c) Indien de parametercombinatie geldt als onder punt a) en de massa M geëxciteerd wordt door een horizontale harmonische kracht $f \cos \omega t$, bij welke frequentie is dan de amplitude van de hoofdmassa nul?

Opgave I.20



Een blok valt in het zwaartekrachtveld van een hoogte h op een elastische ondersteuning geschematiseerd als aangegeven door discrete lineaire veren.

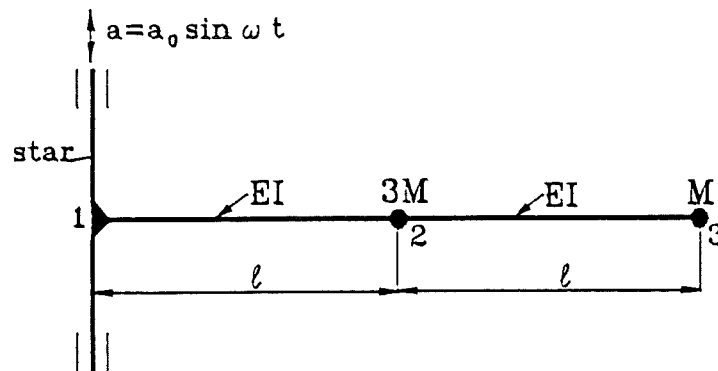
De massa van het blok is m en de massastraagheid om het zwaartepunt $I_z = \mu m a^2$ met $\mu = \frac{1}{16}$.

De positie van het zwaartepunt is in de figuur aangegeven.

GEVRAAGD:

- Op $t = 0$ komt het blok in contact met de veren. Wat zijn dan de beginvoorwaarden voor de verdere beweging.
- Bepaal de eigenfrequenties en de trilvormen voor het blok op de veren.
- Bepaal op een willekeurig tijdstip de beweging van het blok aangenomen dat het in contact blijft met de veren.
- Geef in formulevorm aan het geldigheidsgebied van de oplossing.

Opgave I.21

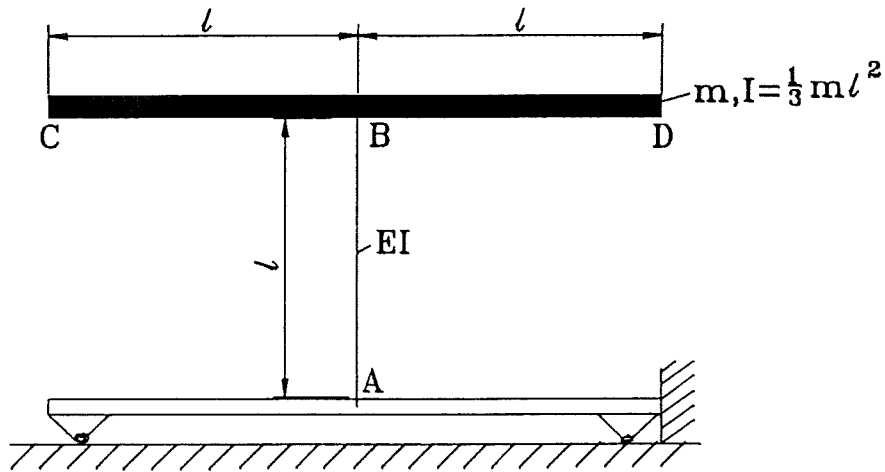


De elastische balk 1-3 met buigstijfheid EI is in 1 star verbonden met de verticale, starre balk. De punten 2 en 3 bevatten de geconcentreerde massa's resp. $3M$ en M . De constructie is verder als massaloos te beschouwen.

GEVRAAGD:

- Geef de verplaatsingen in 2 en 3 t.g.v. de kracht F_2 in 2 en de kracht F_3 in 3.
- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor het systeem waarbij de verticale staaf harmonisch op en neer wordt bewogen met de frequentie ω ($a = a_0 \sin \omega t$). De axiale stijfheid van staaf 1-3 kan oneindig gesteld worden.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen voor buigtrillingen in het vlak van tekening.
- Als de verticale staaf harmonisch op en neer wordt bewogen ($a = a_0 \sin \omega t$) voor welke frequentie ω is de amplitude van punt 2 in de stationaire toestand dan gelijk aan nul en vormt de massa M in punt 3 dus een dynamische trillingsdempers voor de massa in punt 2.

Opgave I.22

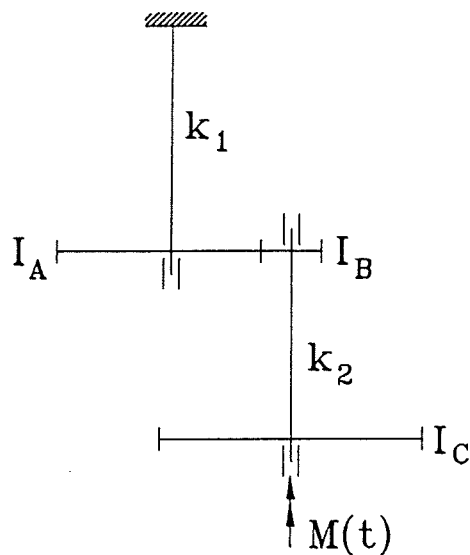


Bovenstaande constructie bestaat uit een balk CD met massa m en de massatraagheid om het zwaartepunt B is $\frac{1}{3} m l^2$; de balk is als star te beschouwen. De massa en massatraagheid van de buigbalk AB (buigstijfheid EI) en van het onderstel zijn klein t.o.v. de corresponderende grootheden voor CD. Het onderstel is ook als star te beschouwen. Op het tijdstip $t = 0$ heeft het voertuig de snelheid v en wordt het onderstel zodanig afgeremd dat aangenomen mag worden dat de snelheid daarvan voor $t > 0$ gelijk aan nul is.

GEVRAAGD:

- Bepaal de bewegingsvergelijkingen van het systeem voor $t > 0$.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen.
- Wat is de responsie van het systeem voor $t > 0$.

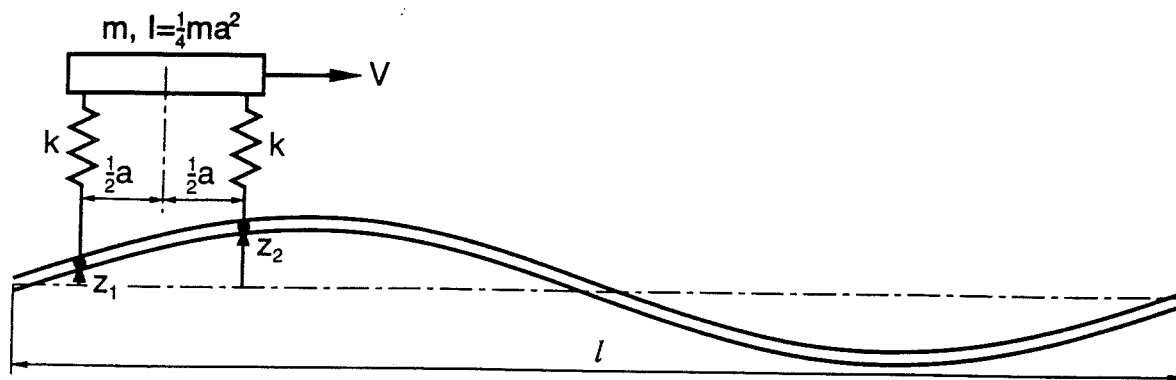
Opgave I.23



Bovenstaand systeem kan torsietrillingen uitvoeren. De rotatietraagheden van de tandwielen A en B zijn resp. I_A en I_B . De schijf C heeft een rotatietraagheid I_C . De overbrengverhouding van de tandwielen $R_A/R_B = n$. De assen kunnen geschematiseerd worden door torsieveren met stijfheden k_1 en k_2 . De belasting is een torsiemoment in punt C.

GEVRAAGD:

- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor het gegeven systeem
- Bepaal de stationaire responsie op een harmonische excitatie in punt C voor: $n = 5$; $I_A = I_C = I$; $I_B = 0,01I$; $k_1 = 5k$ en $k_2 = k$.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen
- Bepaal de impulsresponsie waarvoor $M(t) = \delta(t)$.



Een massaveersysteem (massa m , massatraagheid $I = \frac{1}{4}ma^2$) beweegt over een sinusvormige baan met een constante snelheid V . De amplitude van de baan is z en de golflengte l . De veerstijfheid van elke veer is k .

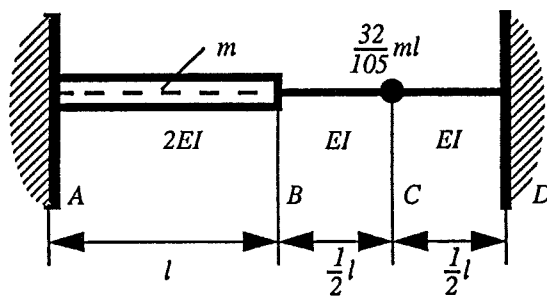
Op het tijdstip $t = 0$ is de positie zodanig dat de verplaatsing $z_1 = z \sin \omega t$ en $z_2 = z \sin \omega (t + \tau)$

GEVRAAGD:

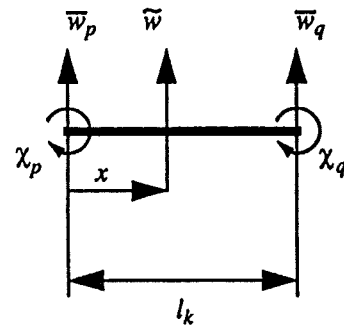
- Druk ω en τ uit in a , l en V .
- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor het massa veersysteem (zwaartekracht niet aanwezig!).
- Bepaal de stationaire responsie van het systeem.
- Voor welke snelheden wordt de amplitude (van het lineaire systeem) oneindig.
- Voor welke parameter combinatie wordt de amplitude van de rotatie van het lichaam nul?

2. Numerieke behandeling van discrete systemen

Opgave II.1



balkelement k:



De balk ABCD is in A en D ingeklemd.

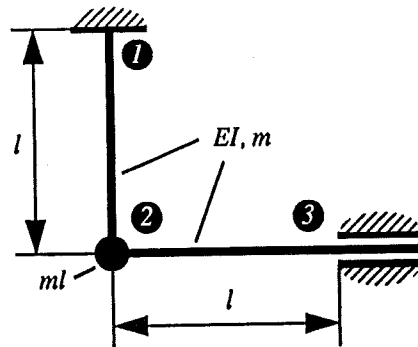
De balk draagt over het deel AB een gelijkmatig verdeelde massa m per lengte-eenheid. In het punt C is een geconcentreerde massa, $32/105 ml$, aangebracht.

De buigstijfheid van AB is $2EI$ en van BCD is deze EI .

GEVRAAGD:

- Verdeel de balk in 2 elementen AB en BCD, en stel met een eindige elementenmethode de bewegingsvergelijkingen op voor buigtrillingen.
- Bepaal de eigenfrequenties en de trilvormen van dit gediscrètiseerd model.
- Bepaal ook de laagste eigenfrequentie en de bijbehorende trilvorm na condensatie van de massa-matrix.
De knooppuntsrotaties zijn in het gecondenseerde systeem niet meer gekoppeld met massa.

Opgave II.2



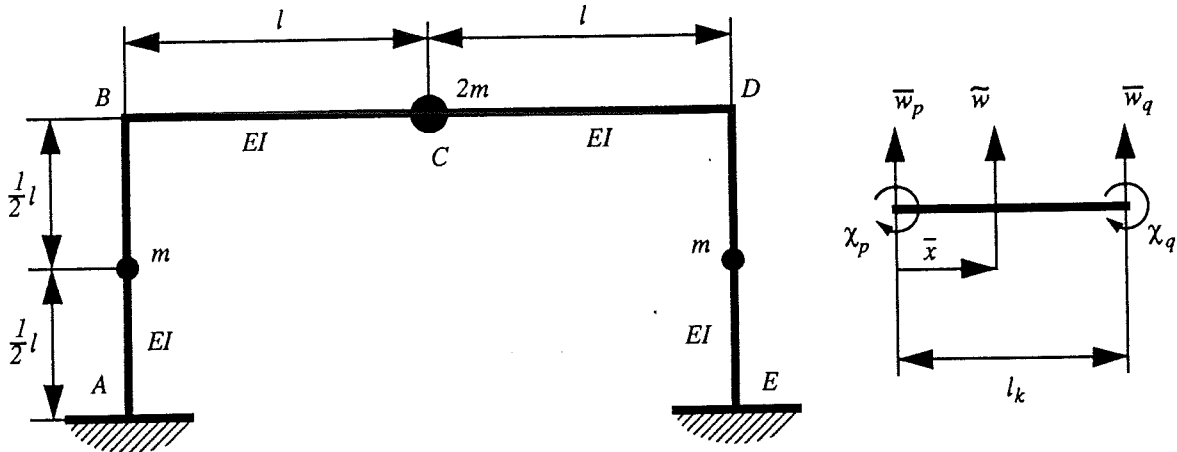
De constructie 1-2-3 is in punt 1 ingeklemd en in punt 3 is de verticale verplaatsing en de hoekverdraaiing in het 1-2-3 vlak nul.

De massa langs 1-2 en 2-3 is m per lengte-eenheid. Bovendien is er een geconcentreerde massa aangebracht in punt 2. De normaalkrachtvervorming kan verwaarloosd worden t.o.v. de buigvervorming.

GEVRAAGD:

- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor buigtrillingen in het vlak van de constructie.
De balken 1-2 en 2-3 worden daarbij elk gediscrètiseerd met één balkelement.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen van het gediscrètiseerde systeem.
- Bepaal de laagste eigenfrequentie na statische condensatie waarbij de rotaties geëlimineerd worden.

Opgave II.3



De constructie ABCDE is in A en E ingeklemd. In het punt C is een geconcentreerde massa $2m$ aangebracht en in het midden van AB en DE een massa m .

De normaalkrachtvervorming mag verwaarloosd worden t.o.v. de buigvervorming.

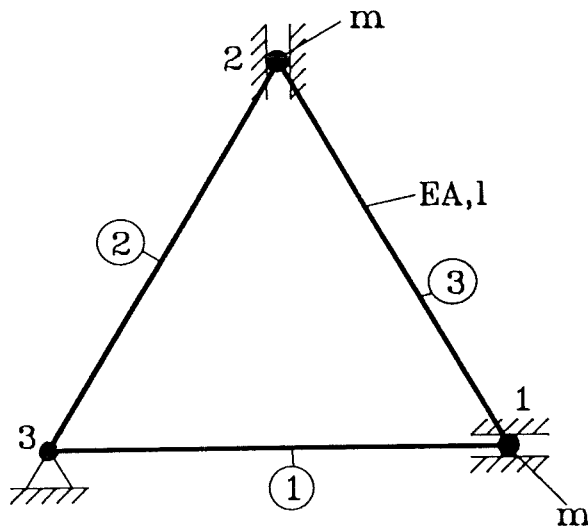
De massa van de constructie mag verwaarloosd worden t.o.v. de geconcentreerde massa's.

GEVRAAGD:

- De bewegingsvergelijkingen voor keersymmetrische buigtrillingen in het vlak van de constructie. De balken AB en BC worden daarbij elk gediscretiseerd met één balkelement.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen van het gediscrèteerde systeem. Geef ook een schets van de trilvormen.
- Bepaal de laagste eigenfrequentie voor de keersymmetrische trillingen na statische condensatie, waarbij de rotatie(s) geëlimineerd worden.

Geef ook de bijbehorende trilvorm en vergelijk de resultaten met b).

Opgave II.4

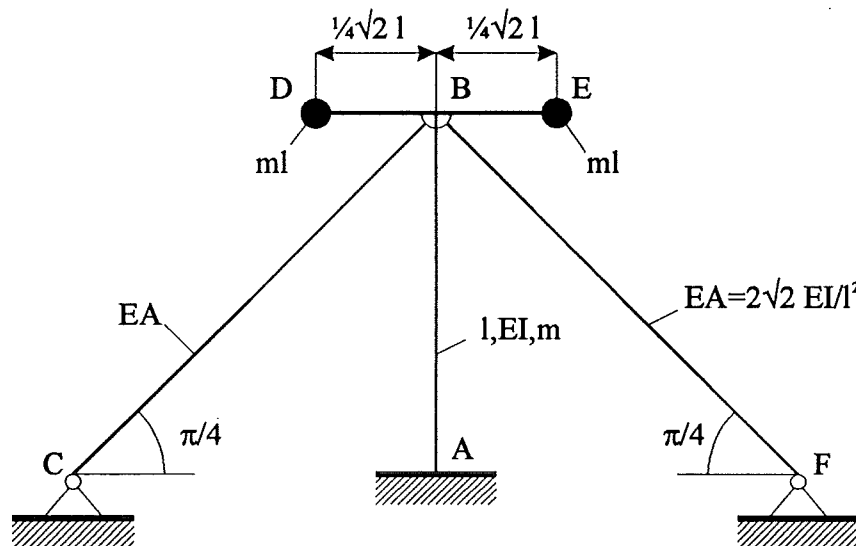


De constructie 1-2-3 is opgebouwd uit staven tussen wrijvingsloze scharnieren. Voor de drie staven is de lengte en de normaalkracht stijfheid hetzelfde; de staven zijn als massaloos te beschouwen. In de punten 1 en 2 is een massa m aangebracht. Het punt 1 kan alleen horizontaal bewegen en het punt 2 alleen verticaal.

GEVRAAGD:

- Bepaal de eigenfrequenties van deze constructie voor trilling in het vlak van tekening.
- Bepaal en schets de trilvormen.

Opgave II.5



Bovenstaande constructie bestaat uit een balk AB met buigstijfheid EI en lengte l en uit twee dwarsbalken DB en BE die als star te beschouwen zijn en star bevestigd zijn aan AB. In A is balk AB ingeklemd en de normaalkrachtvervorming van deze balk mag verwaarloosd worden.

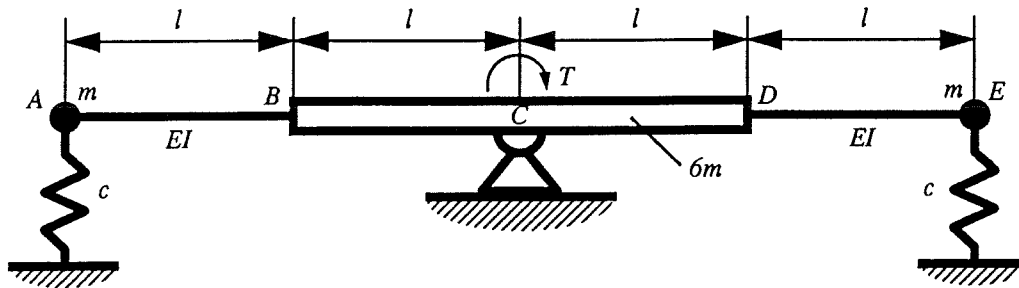
De staven CB en BF zijn tussen wrijvingsloze scharnieren geplaatst. De normaalkrachtstijfheid $EA = 2\sqrt{2} EI/l^2$.

In de punten D en E zijn geconcentreerde massa's $m\ell$ aangebracht. De massa langs AB is m per lengte-eenheid. DE, CB en BF zijn als massaloos te beschouwen.

GEVRAAGD:

- Stel met een eindige-elementen methode de bewegingsvergelijkingen op voor beweging in het vlak van tekening. Kies langs AB één element.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen voor vrije trillingen in het vlak van tekening. (Schets ook de trilvormen.)
- Wat is de laagste eigenfrequentie na statische condensatie waarbij alleen verplaatsingen als onafhankelijke vrijheidsgraden zijn gekozen.

Opgave II.6



Balk ABCDE is in het midden ondersteund in een wrijvingsloos scharnier en aan de einden verend ondersteund.

De balken AB en DE zijn massaloos en hebben een buigstijfheid EI . Deel BCD is star en draagt een gelijkmatig verdeelde massa. De totale massa van BCD is $6m$.

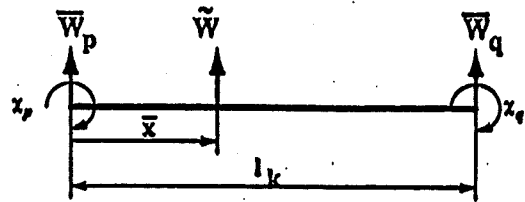
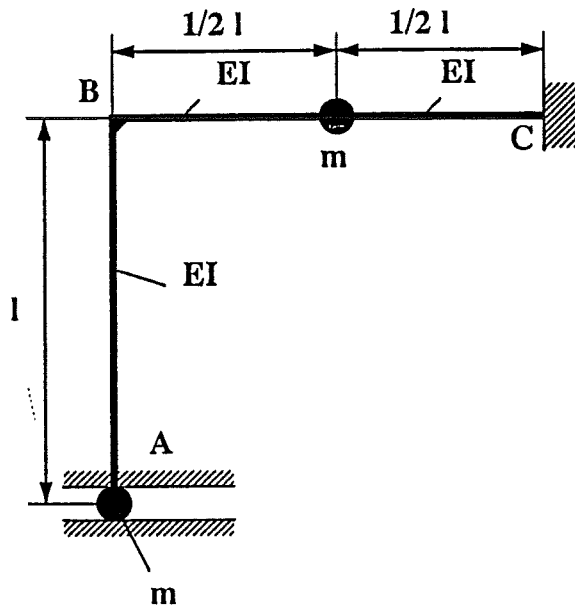
De veerstijfheid bedraagt $c = 6 EI/\ell^3$.

Aan de beide einden A en E is een geconcentreerde massa m aangebracht.

GEVRAAGD:

- Bepaal met een eindige-elementen-methode de bewegingsvergelijkingen voor de keersymmetrische vrije trillingen in het vlak van tekening.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen (schets ook de trilvormen) van de vrije trillingen.
- Geef de ontkoppelde bewegingsvergelijkingen voor het geval een uitwendig koppel T in punt C is aangebracht en geef de gedwongen beweging voor $T = T_0 \cos \omega t$.
- Geef de oplossing in de oorspronkelijke coördinaten voor $\omega = 0$ en $\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)$. Schets het amplitudeverloop voor deze twee gevallen.

Opgave II.7



GEVRAAGD:

- a) Bepaal de eigenfrequenties en de trilvormen (schets ook de trilvormen) voor trilling van de constructie ABC in het vlak van tekening.

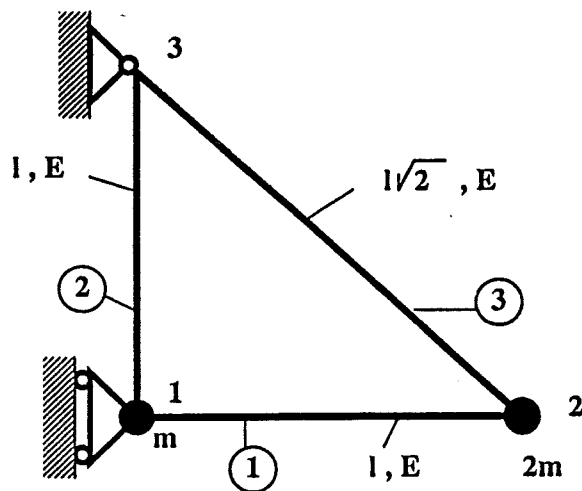
De massa is geconcentreerd in het midden van BC en in A.

Geef een eindige elementen behandeling met 2 elementen AB en BC.

De normaalkrachtstijfheid mag oneindig groot verondersteld worden.

- b) Geef ook de laagste eigenfrequentie als door statische condensatie de knooppuntsrotaties zijn geëlimineerd.

Opgave II.8



Staf 1 en 2 : oppervlak doorsnede: A
 Staf 3 : oppervlak doorsnede: $\frac{1}{2} A \sqrt{2}$

Massa in punt 1 : m
 Massa in punt 2 : $2m$

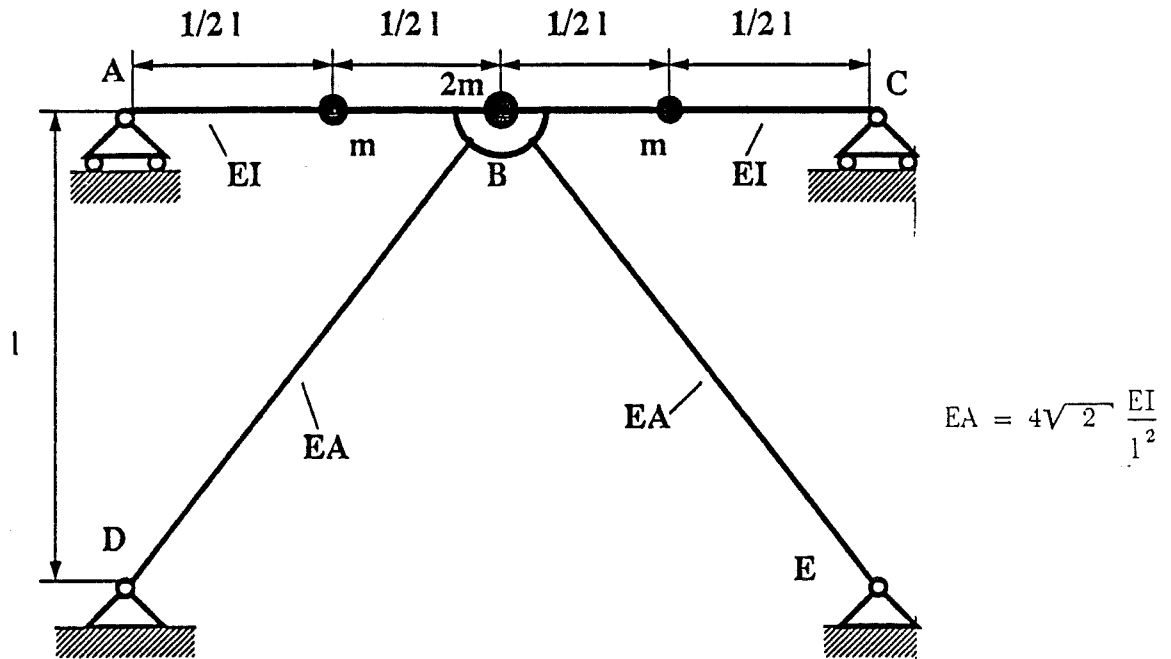
Staven massaloos en geplaatst tussen wrijvingsloze scharnieren.

Bovenstaande constructie trilt in het vlak van tekening.

GEVRAAGD:

- Bepaal de bewegingsvergelijkingen met een eindige-elementenmethode.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen (schets ook de trilvormen!)
- Pas statische condensatie toe waarbij alleen de verticale vrijheidsgraad in punt 2 als onafhankelijke vrijheidsgraad overblijft en bepaal de eigenfrequentie en trilvorm voor dit geval.

Opgave II.9



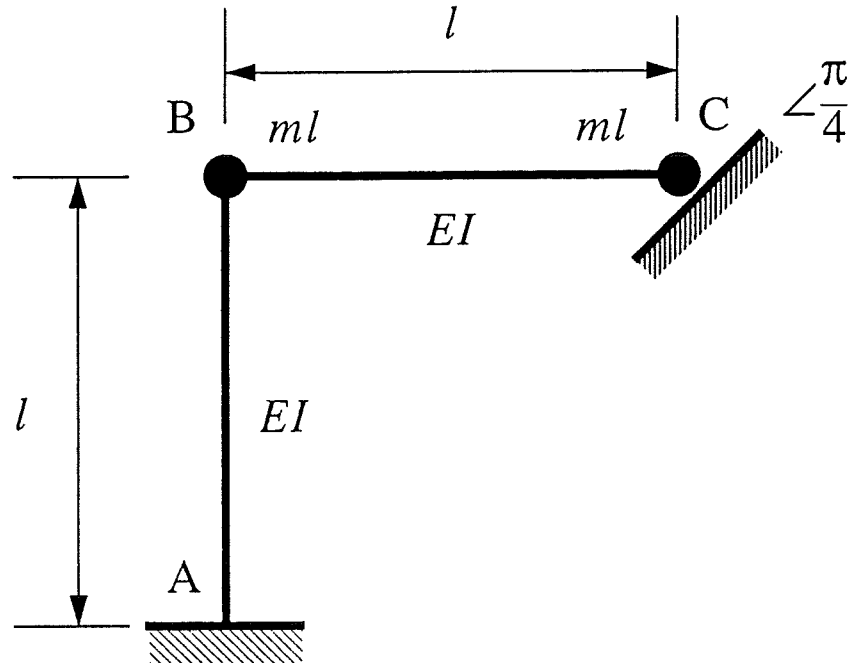
Balk ABC is een buigbalk met buigstijfheid EI . De normaalkrachtvervorming van deze balk mag verwaarloosd worden. De overige staven zijn geplaatst tussen wrijvingsloze scharnieren.

De massa van de balken mag verwaarloosd worden t.o.v. de geconcentreerde massa's.

GEVRAAGD:

- Bepaal de massamatrix (M) en de systeemmatrix (K) voor **symmetrische** trillingen van de constructie.
N.B.: Kies langs AB slechts één element.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen voor het systeem onder a).
Schets ook de trilvormen.
- Geef de ontkoppelde bewegingsvergelijkingen

Opgave II.10

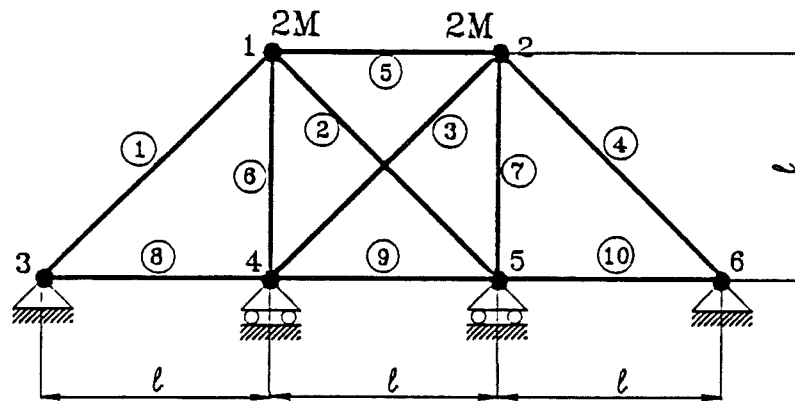


De balk AB draagt een massa m per lengte-eenheid, terwijl BC als massaloos te beschouwen is. In de punten B en C zijn ook geconcentreerde massa's ml aangebracht. De buigstijfheid van AB en BC is EI . Het punt C beweegt wrijvingsloos langs een helling onder 45° . De normaalkrachtvervorming mag verwaarloosd worden.

GEVRAAGD:

- Bepaal de bewegingsvergelijkingen voor de constructie ABC met een eindige elementen methode. Hierbij moet de massa-matrix kinematisch consistent zijn.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen (schets ook trilvormen).
- Bepaal de laagste eigenfrequentie na statische condensatie waarbij alleen knooppuntsverplaatsingen en geen rotaties als onafhankelijke vrijheidsgraden worden gekozen.

Opgave II.11



Elasticiteitsmodulus: E voor alle staven.

Oppervlak dwarsdoorsnede: $\sqrt{2}A$ voor staven 1 t/m 4.

Oppervlak dwarsdoorsnede: A voor staven 5 t/m 10.

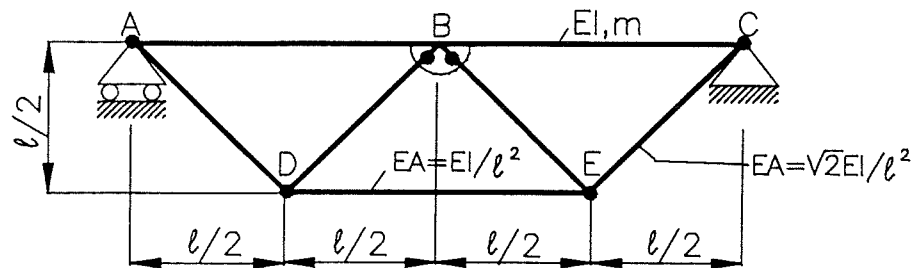
Geconcentreerde massa's: $2M$ in 1 en 2.

De staven zijn als massaloos te beschouwen

GEVRAAGD:

- Bepaal met een eindige-elementenmethode de bewegingsvergelijkingen voor keersymmetrische trillingen in het vlak van tekening.
- Bepaal de eigenfrequenties voor keersymmetrische trillingen.
- Bepaal ook de trilvormen en schets de trilvormen.

Opgave II.12

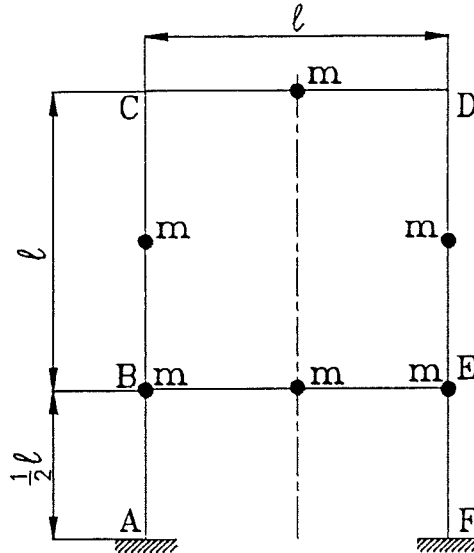


Bovenstaande constructie bestaat uit een balk ABC met buigstijfheid EI en massa per lengte eenheid m . De normaalkrachtstijfheid mag oneindig gesteld worden. Voor de verstijving is onder de balk een vakwerk aangebracht. Voor de staaf DE is de normaalkrachtstijfheid $EA = (EI)/l^2$ en voor de 4 overige staven geldt $EA = \sqrt{2}EI/l^2$. De massaverdeling wordt kinematisch consistent in rekening gebracht.

GEVRAAGD:

- De eigenfrequenties en trilvormen voor symmetrische trillingen in het vlak van tekening (Kies langs AB slechts één element). Schets de trilvormen.
- Geef ook de laagste eigenfrequentie na statische condensatie waarbij alleen verplaatsingen als onafhankelijke vrijheidsgraden worden gekozen.

Opgave II.13

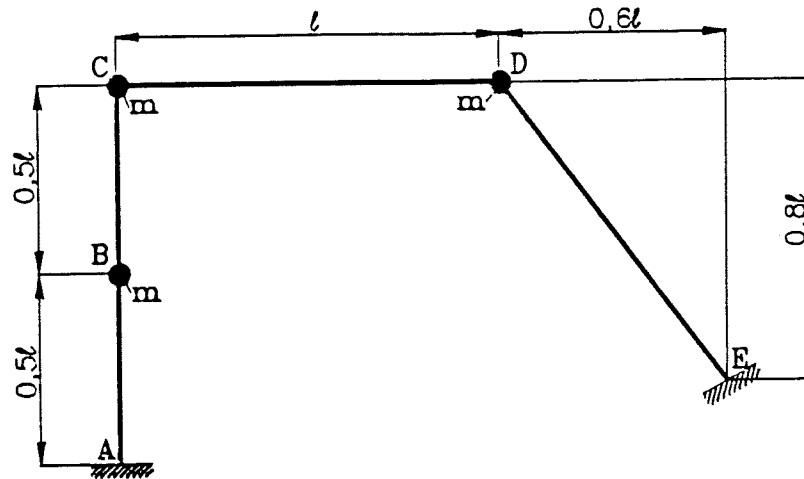


Bovenstaande portaalconstructie $ABCDEF$ heeft een buigstijheid EI . De normaalkrachtvervorming mag verwaarloosd worden. De massa is geconcentreerd in de middens van BC , CD , DE en BE . Bovendien is er een massa aangebracht in B en E .

GEVRAAGD:

- Bepaal met een eindige elementenmethode de systeemmatrix K en de kinematisch consistente massamatrix M voor **symmetrische trillingen** m.b.t. de hartlijn van de constructie. Kies langs BC , CD , DE en BE slechts één balkelement.
- Bepaal de eigenfrequenties en bijbehorende trilvormen. Schets ook de trilvormen.

Opgave II.14



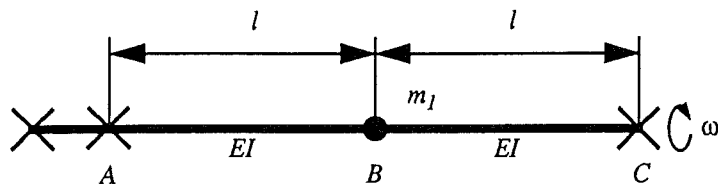
Bovenstaande constructie bestaat uit 3 buigbalken met buigstijfheid EI . De massa is geconcentreerd in de 3 punten, B, C en D. Beschouw trillingen in het vlak van de tekening. De normaalkrachtvervorming van de balken mag verwaarloosd worden. Langs ABC wordt slechts één balkelement gekozen.

GEVRAAGD:

- Bepaal de beweging van het punt D uitgedrukt in de gekozen vrijheidsgraden.
- Als de masskracht t.g.v. de massa in punt B kinematisch consistent in rekening wordt gebracht wat is dan de bijdrage van m_B aan de massamatrix.
- Stel de bewegingsvergelijkingen op voor de constructie.
- Bepaal de eigenfrequenties en trilvormen. Schets ook de trilvormen.

3. Rotordynamica en diversen

Opgave III.1

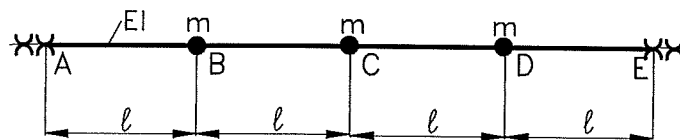


BEPAAL het kritieke toerental ω_c van de as ABC met puntmassa m_l .

In A is de as zodanig ondersteund dat daar de hellingshoek nul is en in C is ze opgelegd.

De balk heeft een constante doorsnede en de buigstijfheid is om elke as van de doorsnede EI .

Opgave III.2



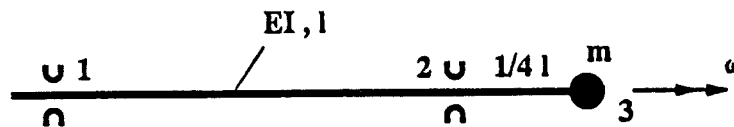
De as ABCDE draait met een toerental ω . In de punten B, C en D zijn massa's m aangebracht. De as is in A en E zodanig gelagerd dat ze daar voor buiging als ingeklemd mag worden beschouwd. De as is massaloos en heeft een buigstijfheid EI .

GEVRAAGD:

Bepaal de drie kritieke toerentallen en de bijbehorende verhoudingen van de amplituden in B, C en D.

N.B. Maak gebruik van symmetrie!

Opgave III.3

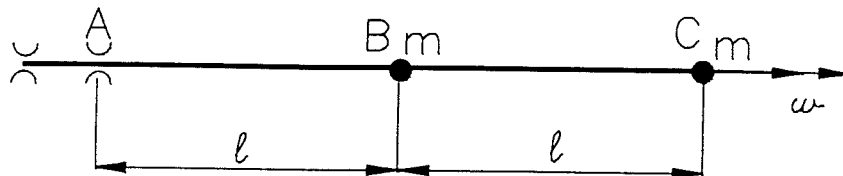


Bovenstaande figuur geeft een roterend systeem met in de punten 1 en 2 een starre ondersteuning en in het punt 3 een massa m (balk 1 – 2 – 3 massaloos te veronderstellen).

GEVRAAGD:

- Wat is het kritieke toerental van dit systeem als de as 1–2–3 een constante buigstijfheid EI heeft?
- Wat wordt in de rotordynamica verstaan onder gelijkloop en tegenloop?
- Waardoor wordt de maximale stapgrootte bepaald als een numeriek integratieproces voor een mechanisch systeem uitgevoerd wordt met een expliciete integratieprocedure?
- Geef de consistente massamatrix voor een staafelement dat axiale trillingen uitvoert, in het geval de massa per lengte-eenheid lineair verloopt tussen 0 en m .

Opgave III.4



De as ABC draait met een toerental ω . In de punten B en C zijn massa's m aangebracht. De as is in A zodanig gelagerd dat ze voor buiging als ingeklemd mag worden beschouwd. Verder is de as niet ondersteund, massaloos en heeft ze een buigstijfheid EI .

GEVRAAGD:

- a) Bepaal de kritische toerentallen en de bijbehorende verhoudingen van de amplituden in B en C .

Antwoorden

Vraagstuk I.1

$$\mu = \frac{8}{9}\sqrt{3}$$

Vraagstuk I.2

$$b) \quad m \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{u} \\ l\ddot{\phi} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ l\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$c) \quad \omega_1 = 2,758 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \left(\frac{l\hat{\phi}}{\hat{u}} \right)_1 = 0,464 ; \omega_2 = 5,328 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \left(\frac{l\hat{\phi}}{\hat{u}} \right)_2 = -6,46$$

$$d) \quad u = \sqrt{\frac{l^3}{mEI}} [0,586 \sin \omega_1 t + 0,022 \sin \omega_2 t] ;$$

$$\phi l = \sqrt{\frac{l^3}{mEI}} [0,272 \sin \omega_1 t - 0,141 \sin \omega_2 t]$$

$$e) \quad u = \frac{(9 - \beta)}{(\beta^2 - 12\beta + 24)} \frac{f_0}{k} \sin \Omega t ; \phi l = \frac{3}{(\beta^2 - 12\beta + 24)} \frac{f_0}{k} \sin \Omega t ; \beta = \frac{m\Omega^2}{k}$$

Vraagstuk I.3

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0 ; \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_2 = \omega_0 ; \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = -1$$

$$\omega_0^2 = \frac{S_t}{I_l} ; \quad S_t = \text{torsiestijfheid, } I = \text{massatraagheidsmoment onderste schijf}$$

Vraagstuk I.4

w = horizontale verplaatsing van B t.o.v. A

ϕ = hoekverdraaiing CD ; rechtsom positief

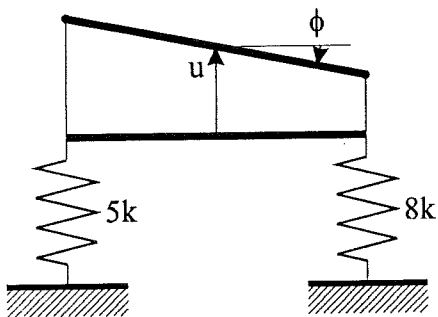
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \beta = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

$$w = \frac{\beta(12-\beta)}{\beta^2 - 24\beta + 36} a \cos \omega t ; \phi = \frac{18\beta}{\beta^2 - 24\beta + 36} a \cos \omega t$$

Eigenfrequenties $\omega_1 = \sqrt{(12-6\sqrt{3})}\omega_0$
 $\omega_2 = \sqrt{(12+6\sqrt{3})}\omega_0$

Verplaatsing B gelijk aan nul; $\omega = \sqrt{3}\omega_0$; $\phi = -2a \cos \omega t$. Schets trilvormen!

Vraagstuk I.5



$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_1^2 = 12\omega_0^2 ; \left(\frac{\hat{u}}{l\hat{\phi}} \right)_1 = 3$$

$$\omega_2^2 = 40\omega_0^2 ; \left(\frac{\hat{u}}{l\hat{\phi}} \right)_2 = -\frac{1}{9}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ l\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} ; \ddot{q}_1 + 12 \frac{k}{m} q_1 = 0 ; \ddot{q}_2 + 40 \frac{k}{m} q_2 = 0$$

Vraagstuk I.6

b) $u_1 = \frac{1}{5} \dot{u}^0 \left[\frac{6}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right]$

$$u_2 = \frac{1}{5} \dot{u}^0 \left[\frac{3}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{k}{m}} ; \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{k}{m}}$$

c) $|u_i| :: \sqrt{m} ; |F_i| :: \sqrt{m}$

$$|u_i| :: \frac{1}{\sqrt{k}} ; |F_i| :: \sqrt{k}$$

Vraagstuk I.7

- a) $\omega_1 = 0,912 \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} ; \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_2} = 5,943 ; \omega_2 = 10,962 \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} ; \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_2} = -0.00839$
- b) $\omega_2^* = 10,954 \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$
- c) $\omega_2^* = \frac{\pi V}{1}$
- d) $u_2 = \frac{5}{12} a_0 [\sin \omega_2^* t - \omega_2^* t \cos \omega_2^* t]$
 $\frac{F}{a_0 k_2} = -\frac{1}{12} [7 \sin \omega_2^* t + 5 \omega_2^* t \cos \omega_2^* t]$
- e) $\omega_2^* t = 2,15$

Vraagstuk I.8

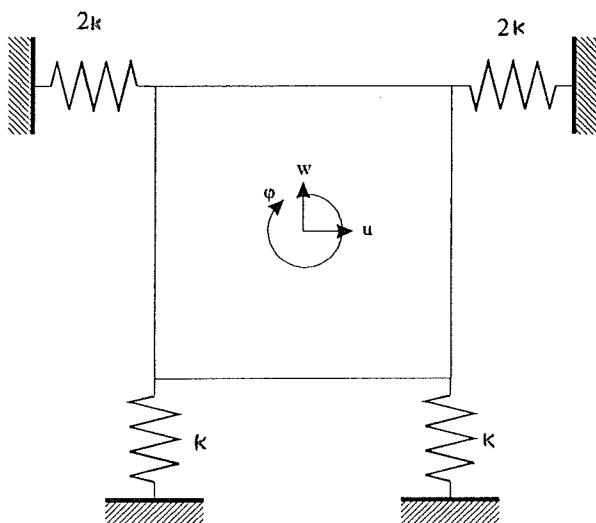
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2 EI}{7 ml^3}} ; \left(\frac{\hat{w}_B}{\hat{w}_C} \right)_1 = \frac{1}{3} ; \omega_2 = \sqrt{\frac{6 EI}{ml^3}} ; \left(\frac{\hat{w}_B}{\hat{w}_C} \right)_2 = -1$$

Vraagstuk I.9

$$\omega_1 = 0,888 \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{w}_A} \right)_1 = 0,535 ; \left(\frac{\hat{\chi}_A l}{\hat{w}_A} \right)_1 = 0,430$$

$$\omega_2 = 3,900 \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{w}_A} \right)_2 = -1,869 ; \left(\frac{\hat{\chi}_A l}{\hat{w}_A} \right)_2 = 5,237$$

Vraagstuk I.10



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}; \frac{\hat{u}}{l\hat{\phi}} = -\frac{4}{3}; \frac{\hat{w}}{l\hat{\phi}} = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}; \hat{u} = 0; l\hat{\phi} = 0 \ (\hat{w} \neq 0)$$

$$\omega_3 = \sqrt{12\frac{\kappa}{m}}; \frac{\hat{u}}{l\hat{\phi}} = \frac{1}{2}; \frac{\hat{w}}{l\hat{\phi}} = 0$$

Vraagstuk I.11

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}; \hat{x}:\hat{y}:\hat{z} = 1:\sqrt{2}:1$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}; \hat{x}:\hat{y}:\hat{z} = 1:0:-1$$

$$\omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}; \hat{x}:\hat{y}:\hat{z} = 1:-\sqrt{2}:1$$

Vraagstuk I.12 Tentamen Augustus 1993 Opgave 2

$$a) \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}; \hat{\theta}_2 = -\hat{\theta}_1$$

$$c) \theta_1 = \frac{1}{2}\theta_0[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t]; \theta_2 = \frac{1}{2}\theta_0[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t]$$

$$d) \theta_1 = \theta_0 \cos\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cos\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t; \theta_2 = \theta_0 \sin\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \sin\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t$$

$$\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \approx \frac{1}{2}\frac{k}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}; \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \approx \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{Cirkelfrequentie van zwevingen: } \omega_z = \frac{1}{2}\frac{k}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Vraagstuk I.13 Tentamen Mei 1993 Opgave 3

$$a) u_B = g \frac{s^2}{v^2}$$

b) $\ddot{\phi} + \omega_2^2 \phi = \omega_2^2 \frac{g}{l} t^2$, $\omega_2^2 = \frac{6k}{m}$
 $\ddot{u} + \omega_1^2 u = g + \frac{1}{2} \omega_1^2 g t^2$, $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$
 $u(t) = \frac{g}{\omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} g t^2$
 $\phi(t) = \frac{2g}{l \omega_2^2} \cos \omega_2 t - \frac{2g}{l \omega_2^2} + \frac{g}{l} t^2$

c) $3 \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t - 1 = 0$
 $s = 1,41 \text{ m}$; $u_B = 0,05 \text{ m}$

Vraagstuk I.14 Tentamen Januari 1993 Opgave 2

a) $\frac{k \hat{\phi}_2}{\hat{T}} = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 3 \right)}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$; $T = \hat{T} \sin \omega t$; $\phi_2 = \hat{\phi}_2 \sin \omega t$

b) $\phi_2 = \frac{T_0}{k} \left[-\frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{1}{6} \cos \sqrt{3} \omega_0 t + \frac{1}{3} \right]$

Vraagstuk I.15 Tentamen Augustus 1992 Opgave 2

a) $u(t) = \frac{f_0}{k} \left[\frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t_1} \right]$

b) $u(t) = \frac{f_0}{k} \left[1 - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t_1} + \frac{\sin \omega_0 (t - t_1)}{\omega_0 t_1} \right]$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c) $\tan \omega_0 t_m = \frac{1 - \cos \omega_0 t_1}{\sin \omega_0 t_1}$

d) $\frac{t_1}{T} = 0 : \left(\frac{uk}{f_0} \right)_{\max} = 2$; $\frac{t_1}{T} = 1 : \left(\frac{uk}{f_0} \right)_{\max} = 1$

Vraagstuk I.16

a) $\frac{u_1}{u_{1st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \mu \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) - \mu} \sin \omega t$

$$\frac{u_2}{u_{2st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \mu\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \mu} \sin \omega t$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{K}{M}$$

b) $\omega = \omega_n ; \frac{\hat{u}_2}{u_{1st}} = -\frac{1}{\mu}$

c) $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}$

d) Voor $\mu = 0,1$: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_1 = 0,854, \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_2 = 1,171,$

voor $\mu = 0,2$: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_1 = 0,801, \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_2 = 1,248$

Vraagstuk I.17 Tentamen Januari 1991 Opgave 1

a) $\omega_{01}^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m} \left[1 + \frac{2}{\mu} - \sqrt{1 + \frac{4}{\mu^2}} \right] ; \frac{R\hat{\phi}_0}{\hat{u}_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{\mu} + \sqrt{1 + \frac{4}{\mu^2}} \right]$

$$\omega_{02}^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m} \left[1 + \frac{2}{\mu} + \sqrt{1 + \frac{4}{\mu^2}} \right] ; \frac{R\hat{\phi}_0}{\hat{u}_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{\mu} - \sqrt{1 + \frac{4}{\mu^2}} \right]$$

$\mu = 0,1$: $\omega_{01} = 0,698 \sqrt{\frac{k}{m}} ; \frac{R\hat{\phi}_0}{\hat{u}_0} = 0,5125$

$\omega_{02} = 4,529 \sqrt{\frac{k}{m}} ; \frac{R\hat{\phi}_0}{\hat{u}_0} = -19,512$

b) $R\phi = \frac{f}{k} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right) \left(2 - \mu \frac{m}{k} \omega^2\right) - 1 \right]} \sin \omega t$

$$u = \frac{f}{k} \frac{\left(2 - \mu \frac{m}{k} \omega^2\right)}{\left[\left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right) \left(2 - \mu \frac{m}{k} \omega^2\right) - 1 \right]} \sin \omega t$$

c) $H = \frac{f}{\left[\left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right) \left(2 - \mu \frac{m}{k} \omega^2\right) - 1 \right]} \sin \omega t$

$$V = f \frac{\left(1 - \mu \frac{m}{k} \omega^2\right)}{\left[\left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right) \left(2 - \mu \frac{m}{k} \omega^2\right) - 1 \right]} \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{\hat{H}}{f} &= -0,172 \quad ; \quad \frac{\hat{V}}{f} = -0,103 \\ \hat{V} &= 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 3,16 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Vraagstuk I.18 Tentamen Augustus 1991 Opgave 3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad u &= -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{A}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \sin \omega t \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi V}{L} \\ \text{b)} \quad F &= k \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} A \sin \omega t - \frac{kg}{\omega_0^2} \\ \text{c)} \quad v &= \frac{L}{2\pi} \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{A\omega_0^2}{g}}} \\ \text{d)} \quad v &= 6,75 \text{ m/s} = 24,3 \text{ km/h} \\ \text{e)} \quad u &= -\frac{\left(\frac{A\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \sin \omega_0 t - \frac{g}{\omega_0^2} + \frac{A}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \sin \omega t \end{aligned}$$

Vraagstuk I.19 Tentamen Januari 1992 Opgave 2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \text{Voor } \frac{2k}{M} &= \frac{g}{l} : \quad \frac{\omega_{1,2}^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{\mu}{2} \mp \sqrt{\mu + \frac{1}{4}\mu^2} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{M} = \frac{g}{l} \\ \left(\frac{\hat{u}}{\hat{\theta}l}\right)_1 &= \frac{\mu}{-\frac{\mu}{2} + \sqrt{\mu + \frac{1}{4}\mu^2}} \quad ; \quad \left(\frac{\hat{u}}{\hat{\theta}l}\right)_2 = \frac{\mu}{-\frac{\mu}{2} - \sqrt{\mu + \frac{1}{4}\mu^2}} \\ \text{b)} \quad \frac{2k}{M} &\ll \frac{g}{l} : \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M(1+\mu)}} \quad ; \quad \frac{g}{l} \ll 1 : \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \text{c)} \quad \omega &= \omega_0 \end{aligned}$$

Vraagstuk I.20 Tentamen Augustus 1995 Opgave 2

- a) $u(0) = 0 ; \varphi(0) = 0 ; \dot{\varphi}(0) = 0 ; \dot{u}(0) = \sqrt{2hg} = \dot{u}_0$
- b) $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1,236 ; \left(\frac{a\hat{\varphi}}{\hat{u}} \right)_1 = -0,944 ; \frac{\omega_2}{\omega_0} = 3,236 ; \left(\frac{a\hat{\varphi}}{\hat{u}} \right)_2 = 16,944 ; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- c) $u = \frac{g}{\omega_0^2} \left[\frac{5}{8} - 0,648 \cos \omega_1 t + 0,023 \cos \omega_2 t \right] + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} [0,766 \sin \omega_1 t + 0,016 \sin \omega_2 t]$
- $a\varphi = \frac{g}{\omega_0^2} \left[-\frac{1}{2} + 0,612 \cos \omega_1 t + 0,388 \cos \omega_2 t \right] + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} [-0,723 \sin \omega_1 t + 0,276 \sin \omega_2 t]$
- d) $u + \frac{3}{4}a\varphi \geq 0 ; u - \frac{1}{4}a\varphi \geq 0$

Vraagstuk I.21 Tentamen Januari 1994 Opgave 2

- a) $\begin{vmatrix} w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \frac{l^3}{EI} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{8}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}$
- b) $\begin{vmatrix} 3M & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{vmatrix} + \frac{6EI}{7l^3} \begin{vmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3M\ddot{a} \\ -M\ddot{a} \end{vmatrix}$
- (N.B. w_2, w_3 verplaatsingen t.o.v. punt 1)

- c) $\omega_{01} = \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} ; \frac{\hat{w}_2}{\hat{w}_3} = \frac{1}{3} ; \omega_{02} = \sqrt{6} \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} ; \frac{\hat{w}_2}{\hat{w}_3} = -1$
- d) $\omega = \sqrt{\frac{6}{11}} \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} = 0,74 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$

Vraagstuk I.22 Tentamen Mei 1994 Opgave 1

- a) $m \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\varphi} l \end{vmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w \\ \varphi l \end{vmatrix} = 0$
- b) $\omega_1 = 1,268 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \frac{\phi_1 l}{\hat{w}_1} = \sqrt{3} = 1,732$
- $\omega_2 = 4,732 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \frac{\phi_2 l}{\hat{w}_2} = -\sqrt{3} = -1,732$

$$c) \quad w(t) = \frac{v}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{v}{2\omega_2} \sin \omega_2 t ; \quad l\varphi(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \frac{v}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{1}{2}\sqrt{3} \frac{v}{\omega_2} \sin \omega_2 t$$

Vraagstuk I.23 Tentamen Juni 1995 Opgave 2

$$a) \quad \begin{vmatrix} I_C & 0 \\ 0 & I_A + n^2 I_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\varphi}_C \\ \ddot{\varphi}_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_2 & nk_2 \\ nk_2 & k_1 + n^2 k_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_C \\ \varphi_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M(t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$b) \quad \varphi_C = \hat{\varphi}_C \cos \omega t ; \quad \varphi_A = \hat{\varphi}_A \cos \omega t ; \quad M = A \cos \omega t$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\varphi}_C \\ \hat{\varphi}_A \end{vmatrix} = \frac{A}{k\Delta} \begin{vmatrix} 30 - 1,25 \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \\ -5 \end{vmatrix}$$

$$\omega_o^2 = k/I$$

$$\Delta = 1,25 \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^4 - 31,25 \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 + 5$$

$$c) \quad \omega_1 = 0,401 \sqrt{\frac{k}{I}} ; \quad (\hat{\varphi}_C / \hat{\varphi}_A)_1 = -5,96 ; \quad \omega_2 = 4,984 \sqrt{\frac{k}{I}} ; \quad (\hat{\varphi}_C / \hat{\varphi}_A)_2 = 0,210$$

$$d) \quad \begin{vmatrix} \varphi_C \\ \varphi_A \end{vmatrix} = \frac{-0,404}{\sqrt{Ik}} \sin \omega_1 t \begin{vmatrix} -5,96 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{0,0325}{\sqrt{Ik}} \sin \omega_2 t \begin{vmatrix} 0,210 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Vraagstuk I.24 Tentamen Augustus 1994 Opgave 2

$$a) \quad \omega = 2\pi V/l ; \quad \tau = a/V$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\varphi}_a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w \\ \varphi_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kz [\sin \omega t + \sin \omega(t + \tau)] \\ \frac{1}{2}kz [\sin \omega t - \sin \omega(t + \tau)] \end{vmatrix}$$

$$c) \quad w = \frac{kz}{m \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 \right)} [\sin \omega t + \sin \omega(t + \tau)]$$

$$\varphi_a = 2 \frac{kz}{m \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 \right)} [\sin \omega t - \sin \omega(t + \tau)]$$

$$d) \quad V = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$e) \quad a = kl (k = 1, 2, \dots)$$

Vraagstuk II.1

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \omega_1 &= 8,835 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{w}_B} \right)_1 = -0,312 \\ \omega_2 &= 30,99 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{w}_B} \right)_2 = -15,14 \\ \text{c)} \quad \omega_1 &= 8,887 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{w}_B} \right)_1 = -0,5 \end{aligned}$$

Schets ook trilvormen!

Vraagstuk II.2

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \omega_1 &= 1,804 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_2 l}{\hat{u}_2} \right)_1 = -0,732 \\ \omega_2 &= 20,84 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} ; \left(\frac{\hat{\chi}_2 l}{\hat{u}_2} \right)_2 = -60,76 \\ \text{c)} \quad \omega_1 &= 2 \sqrt{\frac{35}{43}} \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} = 1,804 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \end{aligned}$$

Schets ook trilvormen!

Vraagstuk II.3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1}{64} \frac{ml^3}{EI} \begin{bmatrix} 80 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_B \\ \ddot{\chi}_B l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ \chi_B l \end{bmatrix} &= 0 \\ \text{b)} \quad \omega_1 &= 2,435 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \hat{u}_{[1]}^{cT} = [\hat{u}_B \quad \hat{\chi}_B l \quad \hat{\chi}_C l] = \hat{u}_B [1 \quad 0,82 \quad -0,41] \\ \omega_2 &= 22,761 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \hat{u}_{[2]}^{cT} = \hat{u}_B [1 \quad 24,10 \quad -12,05] \end{aligned}$$

Schets ook trilvormen!

$$\omega_1 = 2,437 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \hat{u}_{[1]}^{cT} = \hat{u}_B [1 \quad 0,86 \quad -0,43]$$

Vraagstuk II.4 Tentamen Januari 1993 Opgave 1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \omega_1 &= 0,961 \sqrt{\frac{EA}{ml}} \quad ; \quad \frac{\hat{v}_2}{\hat{u}_1} = -0,752 \\ \omega_2 &= 1,351 \sqrt{\frac{EA}{ml}} \quad ; \quad \frac{\hat{v}_2}{\hat{u}_1} = 1,330 \end{aligned}$$

Vraagstuk II.5 Tentamen Augustus 1992 Opgave 1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 996 & -22 \\ -22 & 109 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_B \\ \ddot{\chi}_B l \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ \chi_B l \end{bmatrix} = 0 \\ \text{b)} \quad & \omega_1 = 1,324 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \quad ; \quad \frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{u}_B} = 1,67 \\ & \omega_2 = 4,317 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \quad ; \quad \frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{u}_B} = -6,10 \\ \text{c)} \quad & \omega_1 = 1,337 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \end{aligned}$$

Vraagstuk II.6

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ \chi_B l \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_A \\ \ddot{\chi}_B l \end{bmatrix} = 0 \\ \text{b)} \quad & \omega_1^2 = 4,3153 \frac{EI}{ml^3} \quad ; \quad e^{1T} = m^{-\frac{1}{2}} [0,7882 \quad 0,6154] \\ & \omega_2^2 = 16,6847 \frac{EI}{ml^3} \quad ; \quad e^{2T} = m^{-\frac{1}{2}} [0,6154 \quad -0,7882] \\ & \text{Geef ook schets!} \\ \text{c)} \quad & \begin{bmatrix} w_A \\ \chi_B l \end{bmatrix} = m^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0,7882 & 0,6154 \\ 0,6154 & -0,7882 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ & \ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = \frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} \frac{T_0}{l} 0,6154 \quad , \quad \ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = -\frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} \frac{T_0}{l} 0,7882 \\ & a_1 = \frac{1}{2} 0,6154 m^{-\frac{1}{2}} \frac{T_0}{l} \frac{\cos \omega t}{(\omega_1^2 - \omega^2)} \quad , \quad a_2 = -\frac{1}{2} 0,7882 m^{-\frac{1}{2}} \frac{T_0}{l} \frac{\cos \omega t}{(\omega_2^2 - \omega^2)} \\ \text{d)} \quad & \omega = 0 : \begin{bmatrix} w_A \\ \chi_B l \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0,0834 \\ 0,1250 \end{bmatrix} \frac{T_0 l^2}{EI} \quad ; \quad \omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) = 3,8010 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} : \begin{bmatrix} w_A \\ \chi_B l \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0,1611 \\ 0,0131 \end{bmatrix} \frac{T_0 l^2}{EI} \cos \omega t \\ & (\text{Geef ook schets}) \end{aligned}$$

Vraagstuk II.7 Tentamen Januari 1991 Opgave 2

$$\text{a)} \quad \omega_1 = 1,307 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad ; \quad \chi_B l : \hat{u}_A : \chi_A l = -0,430 : 1 : -1,285$$

$$\omega_2 = 21,196 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \hat{\chi}_B l : \hat{u}_A : \hat{\chi}_A l = 148,8 : 1 : -75,9$$

$$b) \quad \omega_1 = 1,307 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \hat{\chi}_B l : \hat{u}_A : \hat{\chi}_A l = -\frac{3}{7} : 1 : \frac{9}{7}$$

Vraagstuk II.8 Tentamen Augustus 1991 Opgave 1

$$a) \quad m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{w}_2 \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$b) \quad \omega_1 = 0,309 \sqrt{\frac{EA}{ml}} ; \hat{w}_1 : \hat{u}_2 : \hat{w}_2 = 0 : 0,236 : 1$$

$$\omega_2 = 0,809 \sqrt{\frac{EA}{ml}} ; \hat{w}_1 : \hat{u}_2 : \hat{w}_2 = 0 : -4,237 : 1$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{EA}{ml}} ; \hat{w}_1 : \hat{u}_2 : \hat{w}_2 = 1 : 0 : 0$$

$$c) \quad \omega_1 = 0,310 \sqrt{\frac{EA}{ml}} ; \hat{u}_2 : \hat{w}_2 = 0,2 : 1$$

Vraagstuk II.9 Tentamen Oktober 1991 Opgave 1

$$a) \quad \frac{1}{64} m \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\chi}_A l \\ \ddot{w}_B \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_A l \\ w_B \end{bmatrix} = 0$$

$$b) \quad \omega_1 = 1,84 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \frac{\hat{\chi}_A l}{\hat{w}_B} = -1,57 ; \omega_2 = 19,458 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \frac{\hat{\chi}_A l}{\hat{w}_B} = 15,48$$

$$c) \quad \begin{bmatrix} \chi_A l \\ w_B \end{bmatrix} = m^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1,292 & 0,821 \\ 8,855 & 0,572 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = 0 ; \ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = 0$$

Vraagstuk II.10 Tentamen Januari 1992 Opgave 1

$$a) \quad \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -11 & 708 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\chi}_B l \\ \ddot{u}_B \end{bmatrix} + 210 \frac{EI}{ml^4} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_B l \\ u_B \end{bmatrix} = 0$$

$$b) \quad \omega_1 = 2,03 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} , \frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{u}_B} = 0,40 ; \omega_2 = 28,17 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} , \frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{u}_B} = 69,0$$

$$c) \quad \omega_1 = 2,03 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} , \frac{\hat{\chi}_B l}{\hat{u}_B} = \frac{3}{7} = 0,429$$

Vraagstuk II.11 Tentamen Januari 1994 Opgave 1

$$a) \quad \begin{vmatrix} 4M & 0 & 0 \\ 0 & 4M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_4 \end{vmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \quad \omega_1 = 0,635 \sqrt{\frac{EA}{Ml}} ; \omega_2 = 0,964 \sqrt{\frac{EA}{Ml}}$$

$$c) \quad \left(\frac{\hat{v}_1}{\hat{u}_1} \right)_{\omega_1} = -0,162, \left(\frac{\hat{u}_4}{\hat{u}_1} \right)_{\omega_1} = 0,387 ; \left(\frac{\hat{v}_1}{\hat{u}_1} \right)_{\omega_2} = 6,162, \left(\frac{\hat{u}_4}{\hat{u}_1} \right)_{\omega_2} = -1,721$$

Vraagstuk II.12 Tentamen Januari 1995 Opgave 1

$$a) \quad \omega_1 = 2,58 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \frac{\hat{\chi}_{Al}}{\hat{w}_B} = -1,58 ; \frac{\hat{u}_D}{\hat{w}_B} = 0,25 ; \frac{\hat{v}_D}{\hat{w}_B} = 0,50$$

$$\omega_2 = 27,54 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \frac{\hat{\chi}_{Al}}{\hat{w}_B} = 9,14 ; \frac{\hat{u}_D}{\hat{w}_B} = 0,25 ; \frac{\hat{v}_D}{\hat{w}_B} = 0,50$$

$$b) \quad \omega = 2,59 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

Vraagstuk II.13 Tentamen Juni 1995 Opgave 3

$$a) \quad K \begin{vmatrix} \chi_{Bl} \\ \chi_{Cl} \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} \ddot{\chi}_{Bl} \\ \ddot{\chi}_{Cl} \end{vmatrix} = 0 ; K = \frac{EI}{l^3} \begin{vmatrix} 28 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} ; M = \frac{m}{32} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$b) \quad \omega_1 = 9,96 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \hat{\chi}_{Bl}/\hat{\chi}_{Cl} = -0,380 ; \omega_2 = 20,32 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \hat{\chi}_{Bl}/\hat{\chi}_{Cl} = 1,580$$

Vraagstuk II.14 Tentamen Augustus 1995 Opgave 3

$$a) \quad u^T = \begin{bmatrix} u_C & \chi_{C^l} & \chi_{D^l} \end{bmatrix}; u_D = u_C; w_D = \frac{3}{4}u_C$$

$$b) \quad \frac{m}{64} \begin{bmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad \frac{m}{64} \begin{bmatrix} 180 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_C \\ \chi_{C^l} \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 291 & -6 \\ -6 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ \chi_{C^l} \end{bmatrix} = 0$$

$$d) \quad \omega_1 = 3,596 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \left(\frac{\chi_{C^l}}{\hat{u}_C} \right)_1 = -0,00799; \left(\frac{\chi_{D^l}}{\hat{u}_C} \right)_1 = 0,377$$

$$\omega_2 = 22,929 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \left(\frac{\chi_{C^l}}{\hat{u}_C} \right)_2 = 44,92; \left(\frac{\chi_{D^l}}{\hat{u}_C} \right)_2 = -10,855$$

Vraagstuk III.1

$$\omega_c = 4 \sqrt{\frac{6}{7}} \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}} = 3,307 \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}}$$

Vraagstuk III.2 Tentamen Augustus 1997 Opgave 3

$$\omega_1 = 1,39 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \text{ (sym)} \quad w_C/w_B = 1,84; w_D/w_B = 1$$

$$\omega_2 = 3,70 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \text{ (keersym)} \quad w_C/w_B = 0; w_D/w_B = -1$$

$$\omega_3 = 6,09 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \text{ (sym)} \quad w_C/w_B = -1,09; w_D/w_B = 1$$

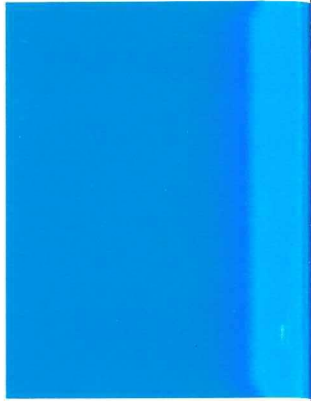
Vraagstuk III.3 Tentamen Augustus 1991 Opgave 2

$$\text{a) } \omega_{cr} = 6,197 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

$$\text{d) } M = ml \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Vraagstuk III.4 Tentamen Januari 1995 Opgave 2

$$\omega_1 = 0,584 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \frac{\hat{w}_B}{\hat{w}_C} = 0,320 \quad \omega_2 = 3,884 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} ; \frac{\hat{w}_B}{\hat{w}_C} = -3,121$$



043WB1203

