



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Het prijzen van Bitcoin opties met behulp van de ddCOS
methode**
(Engelse titel: Option valuation of Bitcoins under the ddCOS
method)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

MEREL TE HOFSTÉ

Delft, Nederland
Augustus 2017



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Het prijzen van Bitcoin opties met behulp van de ddCOS methode”
(Engelse titel: “Option valuation of Bitcoins under the ddCOS method”)

MEREL TE HOFSTÉ

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Prof.Dr.ir. C.W. Oosterlee

Overige commissieleden

Dr.Ir. F.J. Vermolen

Dr. B. van den Dries

Augustus, 2017

Delft

VOORWOORD

Deze scriptie is geschreven ter afsluiting van het BSc eindproject van de studie Technische Wiskunde aan de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica. Hierin wordt beschreven hoe men aan de hand van een koers met hoge volatiliteit, bijvoorbeeld de Bitcoin, opties kan prijzen. Hierin wordt gekeken naar verschillende methodes zoals de COS methode en de ddCOS methode.

Graag wil ik professor Kees Oosterlee en PhD. Álvaro Leitao bedanken voor de hulp en begeleiding van dit project het afgelopen kwartaal.

Ik wens u veel plezier tijdens het lezen van deze scriptie.

Merel te Hofsté, 8 augustus 2017

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord	4
Lijst van figuren	6
Lijst van tabellen	7
1. Inleiding	8
2. Cryptocurrencies	9
2.1. Continue aandelenkoersen	10
2.2. Verdeling Bitcoin	11
3. COS methode	14
3.1. Fourierreeks	14
3.2. Fourierreeksen en de karakteristieke functie	15
3.3. Opties prijzen met de karakteristieke functie	20
3.4. Europese call en put opties prijzen	21
3.5. SIN methode	23
4. ddCOS methode	25
4.1. Europese call en put opties prijzen	26
4.2. Bitcoin opties prijzen	28
4.3. Verdeling voor Bitcoin	30
5. Conclusie	33
Referenties	34
6. Appendix	36
7. Matlab code	39

LIJST VAN FIGUREN

1	Bitcoin in het nieuws.	8
2	Koers van de drie grootste cryptocurrencies.	10
3	De koers van Bitcoin over één week.	11
4	Bitcoin koers en return.	12
5	Verschillende weergaves van de Bitcoin returns over 6 maanden.	12
6	Bitcoin koers en return.	13
7	Verschillende weergaves van de Bitcoin returns over 3 maanden.	13
9	Cosinus ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling.	17
10	Fout in de benadering van de standaardnormale verdeling via COS methode.	17
11	Sinus ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling.	19
12	Cosinus ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de lognormale verdeling.	20
13	Verschil COS en Black-Scholes voor verschillende n .	23
14	Verschil SIN en Black-Scholes voor verschillende n .	24
15	Koersverloop geometrische Brownse beweging, $S_0 = 4$.	27
16	$\tilde{A}_k$ en karakteristieke functie voor verschillende $n, m = 1028$.	28
17	Verschil ddCOS en Black-Scholes voor verschillende $n, m = 10000$.	28
18	Put prijzen gewaardeerd met Monte Carlo en ddCOS weergegeven voor verschillende uitoefenprijzen K .	30
19	α -stable verdeling voor verschillende $\alpha, \beta = 0, \gamma = 1, \mu = 0$.	31
20	α -stable verdeling voor verschillende $\beta, \alpha = 1, \gamma = 1, \mu = 0$.	31
21	Benadering $\tilde{A}_k$ door α -stable met $\alpha = 0.4, \beta = 1, \mu = 0, \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.	32
22	Ethereum grafisch uitgelegd.	37
23	Fourier ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling.	38

LIJST VAN TABELLEN

1	Maximale fout in de benadering van de standaardnormale verdeling.	17
2	Maximale fout in de benadering van de standaardnormale en de lognormale verdeling.	19
3	COS put optie waardes voor verschillende n met referentiewaarde 0.9132 via Black-Scholes.	22
4	SIN put optie waardes voor verschillende n met referentiewaarde 0.9132 via Black-Scholes.	24
5	COS en ddCOS put optie waardes voor verschillende n met referentiewaarde 0.9132 via Black-Scholes.	27
6	ddCOS methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K .	29
7	Monte Carlo methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K , 6 maanden.	29
8	ddCOS methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K , 3 maanden.	30
9	ddCOS methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K , $3\frac{1}{4}$ jaar.	30

1. Inleiding

Cryptocurrencies, of digitale valutas, zijn de afgelopen jaren zeer populair geworden, maar wat verstaan we hier eigenlijk onder? Cryptocurrency is een samenvoeging van twee woorden: crypto en currency, of valuta. Crypto staat voor cryptografisch, wat wijst op de cryptografische versleuteling. Omdat er bij deze digitale munten geen derde partij betrokken is, zoals bijvoorbeeld een bank, is dit de hele basis van het systeem. De hele beveiliging berust op zeer complexe computercode.



FIGUUR 1. Bitcoin in het nieuws.

Cryptocurrencies staan bekend om de enorme schommelingen in de koers. Waar veel beleggers het zien als het nieuwe goud, zien anderen het als een tikkende tijdbom. Desalniettemin wordt er steeds meer in gehandeld en neemt de vraag naar derivaten toe. Zo ook voor opties. LedgerX, een Amerikaanse gespecialiseerde institutionele financiële dienstverlener heeft sinds kort toestemming gekregen om te gaan handelen in opties voor cryptocurrencies.[2] Hierin wordt niet duidelijk hoe zij deze opties willen gaan waarderen. Dit is een interessante vraag, want de standaardformules die we kunnen toepassen op bijvoorbeeld aandelen in de AEX, AMX etc., werken niet voor deze fluctuerende digitale valuta's. Hiervoor zullen we andere methodes moeten toepassen en dat is dan ook wat we in deze scriptie gaan behandelen.

2. Cryptocurrencies

Bitcoin is de eerste en bekendste cryptocurrency. Geïntroduceerd in 2008 door Satoshi Nakamoto[5]. Dit is geen echte naam, maar een pseudoniem van een programmeur die het concept van een cryptocurrency publiceerde in een online document. Op basis hiervan is een code ontwikkeld en is Bitcoin ontstaan. Bitcoin heeft op dit moment een marktcapaciteit van meer dan 44 miljoen Amerikaanse dollar. [3]

De afgelopen 9 jaar is het hard gegaan met de digitale valuta en is de code vaak weer zodanig aangepast dat er weer een nieuwe valuta is ontstaan. Op dit moment zijn er meer dan 700 cryptocurrencies waarin gehandeld kan worden. De op één na grootste valuta is Ethereum. Ethereum kwam pas in 2015 op de markt, maar heeft nu al een capaciteit van 32 miljoen dollar. Ethereum is niet een directe concurrent van Bitcoin, omdat het van origine niet bedoeld is als vervanging van bestaande valuta's. Ethereum is bedoeld om mobiele apps op dezelfde manier te laten werken als Bitcoin. Zo is er geen derde partij meer nodig om data naar te verzenden. In plaats daarvan zijn er andere Ethereum gebruikers die hieraan meewerken en als beloning de currency, Ether, krijgen. In afbeelding 22 in de Appendix is dit grafisch uitgelegd.

Met een marktwaarde van 11 miljoen staat Ripple op plaats 3 van digitale valuta's. Ripple kwam in 2012 op de markt en wordt gezien als een verbetering op Bitcoin. Met Ripple kun je sneller transacties maken, omdat deze direct geaccepteerd en gevalideerd worden. Bij Bitcoin zit hier een langer proces achter. Ripple is ontwikkeld om alle betalingssystemen met elkaar te verbinden. Het werkt samen met grote banken en verschilt daarin dus van Bitcoin en Ethereum. De opkomst van deze valuta's is duidelijk terug te zien in figuur 2. Deze figuren komen van coinmarketcap.com [4]. Vooral in de afgelopen paar maanden zijn alternatieven voor onze bestaande valuta's zeer populair geworden.



(A) Bitcoin



(B) Ethereum



(c) Ripple

FIGUUR 2. Koers van de drie grootste cryptocurrencies.

2.1. Continue aandelenkoersen. Een verandering in waarde van een risico-vrije investering D op een interval δt kan worden weergegeven als

$$D(t + \delta t) = D(t) + r\delta t D(t) \quad (2.1)$$

met r de rentevoet. Dit model kunnen we uitbreiden door een willekeurige fluctuerende factor in te voeren. Zet nu $t_i = i\delta t$ zodat we het aandeel kunnen bepalen op alle discrete punten t_i . Ons discrete aandelenmodel ziet er nu als volgt uit

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu\delta t S(t_i) + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i S(t_i) \quad (2.2)$$

met

- $S(t_i)$ de prijs van het aandeel op tijdstip t_i
- μ een constante parameter. De parameter μ speelt dezelfde rol als r in (2.1).
- $\sigma \geq 0$ is een constante parameter dat de mate van fluctuaties weergeeft.
- $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld door $N(0,1)$

De returns, gegeven door

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} \quad (2.3)$$

vormen een onafhankelijke en identieke normale verdeling.

Neem nu het tijdsinterval $[0, t]$ met $t = L\delta t$. We weten de beginprijs van het aandeel $S(0) = S_0$ en (2.2) geeft ons uitdrukkingen voor $S(\delta t), S(2\delta t), \dots, S(L\delta t = t)$. Dit model geeft een koersprijs vermenigvuldigd met $1 + \mu\delta t + \sqrt{\delta t} Y_i$ en dus

$$S(t) = S_0 \prod_{i=0}^{L-1} (1 + \mu\delta t + \sqrt{\delta t} Y_i). \quad (2.4)$$

Deel (2.4) door S_0 en neem het logaritme,

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \sum_{i=0}^{L-1} \log(1 + \mu\delta t + \sqrt{\delta t} Y_i). \quad (2.5)$$

We kunnen (2.5) benaderen door $\log(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots$ toe te passen.

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \sum_{i=0}^{L-1} (\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i - \frac{1}{2}\sigma^2\delta t Y_i^2). \quad (2.6)$$

Deze vergelijking heeft een verwachting en variantie gelijk aan resp. $\mu\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\delta t$ en $\sigma^2\delta t$.

De Centrale Limietstelling geeft dat $\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$ in (2.6) zich zal gedragen als een normaal verdeelde stochast met verwachtingswaarde $L(\mu\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\delta t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ en variantie $L\sigma^2\delta t = \sigma^2 t$, oftewel

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right). \quad (2.7)$$

We kunnen nu ons continue prijsmodel opstellen, gegeven door

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad \text{met } Z \sim N(0, 1). \quad (2.8)$$

Dit is een lognormale verdeling, omdat het logaritme ervan normaal verdeeld is. Dit is de verdeling die Geometrische Brownse bewegingen volgen. Voor deze koersen kunnen we opties prijzen met de bekende Black-Scholes formule. Voordat we deze formule introduceren, een korte uitleg over Europese opties.

Een optie is een recht om binnen een vooraf bepaalde periode een aandeel, of een ander goed, voor een vooraf afgesproken prijs te kopen of te verkopen, dit wordt de uitoefenprijs K genoemd. Wanneer men denkt dat de prijs van een goed zal stijgen, is het interessant om een call optie te kopen. Deze is vaak velen malen goedkoper dan het aandeel zelf. Wanneer het aandeel in de periode stijgt, kan men op de expiratedatum het aandeel voor de lagere prijs kopen. Wanneer het aandeel niet is gestegen, is er geen uitbetaling en verliest de belegger alleen de prijs die hij heeft betaald voor de optie. De uitbetalingsfunctie ziet er dan als volgt uit:

$$\max(S(T) - K, 0).$$

Een put optie werkt hetzelfde voor wanneer men denkt dat het aandeel gaat dalen. Hierbij is het aandeel al in bezit en heeft de koper van de optie het recht om op expiratedatum zijn aandeel voor een vaste, vooraf afgesproken prijs te verkopen. De uitbetalingsfunctie van een put ziet er als volgt uit:

$$\max(K - S(T), 0).$$

Terug naar Black-Scholes. Een call optie C met beginwaarde van het onderliggende aandeel $S = S_0$, uitoefenprijs K en expiratedatum T is gegeven door

$$C(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

met

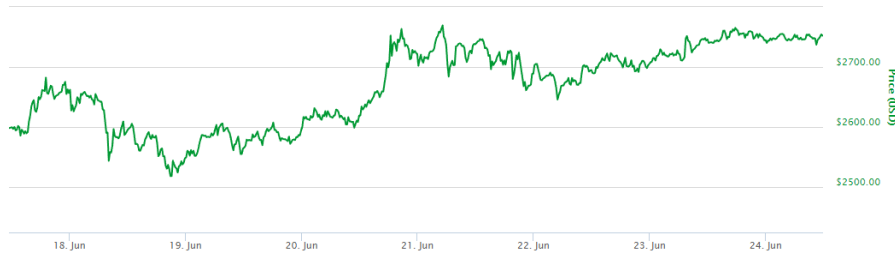
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Een put optie P kunnen we prijzen met behulp van de put-call pariteit.

$$C(S, t) + Ke^{-r(T-t)} = P(S, t) + S$$

2.2. Verdeling Bitcoin. De onderliggende verdeling van de koersen in afbeelding 2 zien er afgebeeld over een aantal jaar glad en stijgend uit. Echter, als we inzoomen op een willekeurige week, zie figuur 3, zien we de koers sterk fluctueren. Dit komt door de hoge volatiliteit van deze valuta's. We zullen hierom ook eerst het onderliggende proces van de Bitcoin koers in Amerikaanse dollars bestuderen voordat we daadwerkelijk opties gaan prijzen.

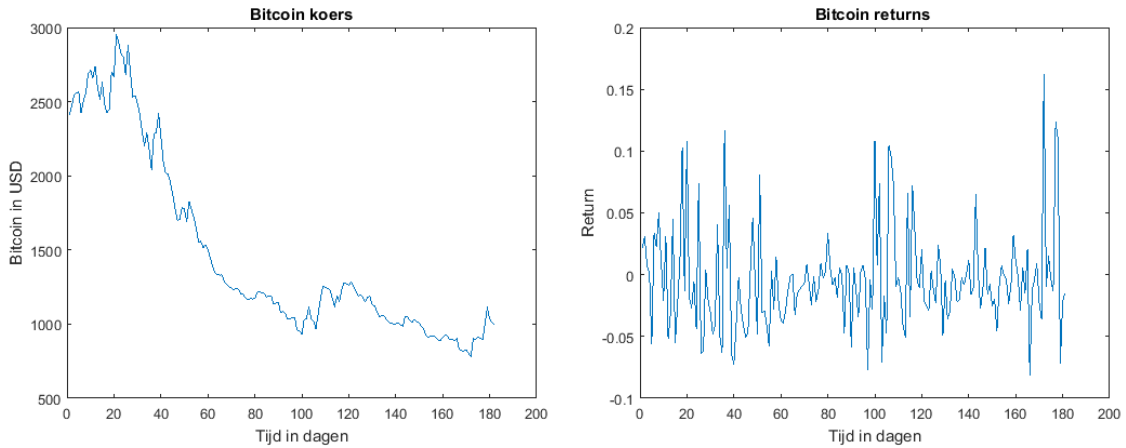


FIGUUR 3. De koers van Bitcoin over één week.

We zullen nu onderzoeken of de koers een Geometrische Brownse Beweging volgt. Dit is een stochastisch proces dat veel aandelenkoersen volgen. Op deze processen is de Black-Scholes analyse toe te passen en hierdoor zijn optieprijsen eenvoudig te berekenen. Of dit hier ook het geval is, kunnen we zien aan de hand van de returns, i.e.,

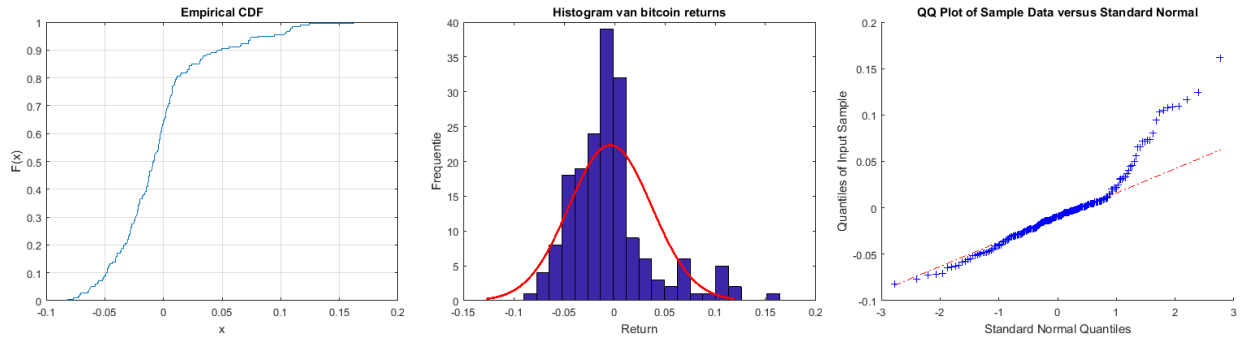
$$r_i = \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

De data die we hier gebruiken is de koers van Bitcoin in Amerikaanse dollars. Deze data komt van Quandl [6].



FIGUUR 4. Bitcoin koers en return.

De returns in figuur 4 zouden een standaard normale verdeling moeten aannemen. Dit kunnen we testen met verschillende grafische weergaves te zien in figuur 5.



FIGUUR 5. Verschillende weergaves van de Bitcoin returns over 6 maanden.

Zoals te zien zijn de returns niet standaard normaal verdeeld. We zien wel duidelijk in het histogram dat de data rechtsscheef verdeeld is. Scheefheid is een maat voor asymmetrie. Met een waarde gelijk aan 0, betekent dat de data symmetrisch is verdeeld, zoals bijvoorbeeld de normale verdeling. De scheefheid kunnen we berekenen via

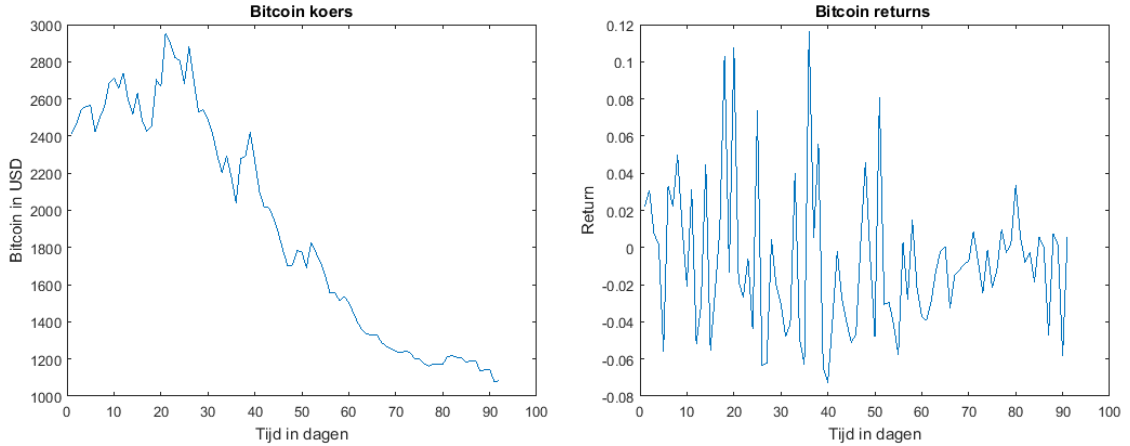
$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mathbb{E}(X - \mu)^3}{(\mathbb{E}(X - \mu)^2)^{3/2}} = 1.2496.$$

Hier is μ_3 het derde centrale moment en σ de standaardafwijking. Een scheefheid van meer dan 1, geeft een duidelijke scheefheid naar rechts weer. Naast de scheefheid van een verdeling, is de kurtosis ook een interessant begrip. De kurtosis is een maat voor de piekvormigheid van een verdeling. De kurtosis van de normale verdeling is gelijk aan 3. Waardes hierboven geven aan dat de verdeling een sterkere piek heeft dan de normale verdeling. Zoals te zien in figuur (5) verwachten we een hoge kurtosis. Deze berekenen we als volgt

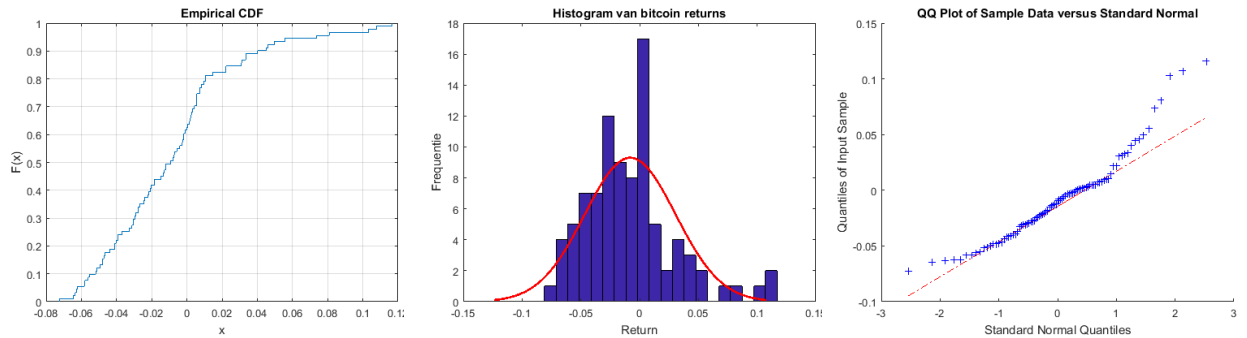
$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}(X - \mu)^4}{(\mathbb{E}(X - \mu)^2)^2} = 5.2573,$$

met μ_4 het vierde centrale moment en σ opnieuw de standaardafwijking.

Bovenstaande resultaten zijn gevonden voor een periode van 6 maanden. Om te controleren of dezelfde resultaten gelden voor een andere periode, halveren we de afgelopen 6 maanden tot de afgelopen 3 maanden. De koers is weergegeven in figuur 6.



FIGUUR 6. Bitcoin koers en return.



FIGUUR 7. Verschillende weergaves van de Bitcoin returns over 3 maanden.

We zien in figuur 7 dat de returns over deze periode ook niet Geometrisch Browns verdeeld zijn. We zien wel dat deze periode pieken vertoont, maar minder dan voorheen. Dit zou te zien moeten zijn in de kurtosis. Deze is gelijk aan $\gamma_4 = 4.2862$ en dit is inderdaad lager. We zien ook weer de rechtsscheefheid terug. De $\gamma_3 = 0.9916$ bevestigt dit.

Het is dus duidelijk dat de bitcoin koers geen Geometrische Brownse beweging volgt. Hierdoor kunnen we geen Black-Scholes toepassen. In het volgende hoofdstuk zullen we dan ook naar een andere optieprijsingsmethode kijken en deze zo aanpassen dat we het zelfs op de BTC koers kunnen toepassen.

3. COS methode

Een methode om opties te prijzen is de COS-methode.[7] In deze methode wordt de bekende optie-prijzings formule

$$v(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int v(y, T) f(y|x) dy \quad (3.1)$$

gebruikt die gebaseerd is op het no-arbitrage principe. Hier staat v voor de waarde van de optie, Δt voor het verschil tussen het vervaltijdstip T en begintijdstip t_0 , x en y zijn de waarden op de verschillende tijdstippen en $f(y|x)$ is de verdeling van het onderliggende proces en r de risicovrije rentevoet.

In de COS methode kijken we met name naar de functie $f(y|x)$ en het verband met de fourier expansie en de karakteristieke functie. Zo kunnen we uiteindelijk ook opties prijzen van op basis van koersen waar we de onderliggende functie niet van kennen, maar wel de karakteristieke functie. Om dit te doen zullen we ons eerst verdiepen in de fourierreeks.

3.1. Fourierreeks. Een fourierreeks is een (on)eindige som van sinusoides die gebruikt kan worden om een periodieke functie te benaderen. Dit is een methode ontwikkeld door Joseph Fourier in de 19e eeuw. Dit betekent dat een functie $f(x)$ op het interval $[-L, L]$ kan worden geschreven als

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx), \quad (3.2)$$

$$\text{met } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (3.3)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos(nx) dx, \quad (3.4)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \sin(nx) dx. \quad (3.5)$$

De fourierreeks kunnen we opsplitsen in twee delen: de benadering met de cosinus en de benadering met de sinus. Dit noemen we ook wel de cosinusreeks en de sinusreeks. Deze eerste is met name geschikt voor even functies en de tweede voor oneven functies. Dit kunnen we eenvoudig afleiden uit (3.2). Stel, de functie $f(x)$ is een oneven functie. Deze kenmerkt zich door de eigenschap

$$f(-x) = -f(x).$$

Voor een oneven functie geldt

$$\int_{-L}^L f_{\text{oneven}}(x) dx = 0.$$

Hierdoor is de A_0 term in (3.3) gelijk aan 0 en het product van de oneven functie f en de even functie $\cos(nx)$, in (3.4), dat weer oneven is, gelijk aan 0.

Daarnaast heeft een even functie de eigenschap

$$f(-x) = f(x),$$

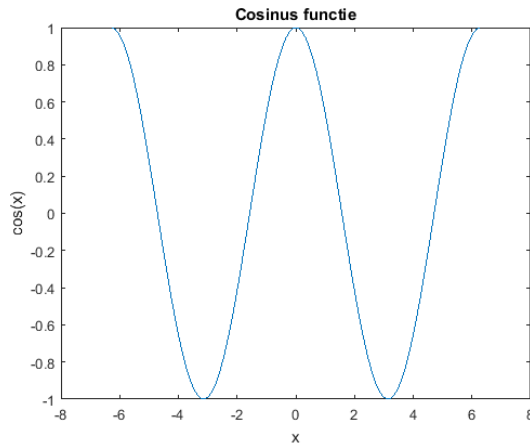
met als integraal

$$\int_{-L}^L f_{\text{even}}(x) dx = 2 \int_0^L f_{\text{even}}(x) dx$$

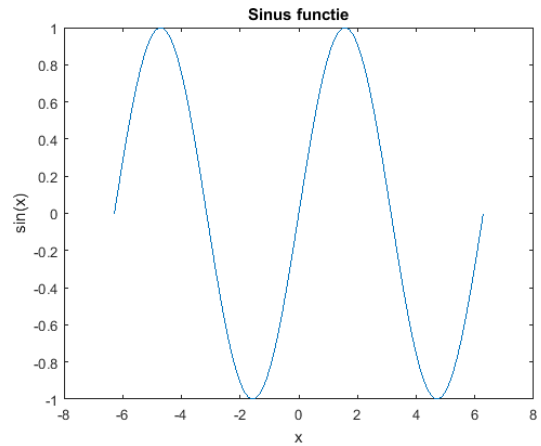
Zo komen we tot de sinus-ontwikkeling van een oneven functie $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(nx), \quad (3.6)$$

$$\text{met } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^L f(x) \sin(nx) dx. \quad (3.7)$$



(A) Voorbeeld van een even functie.



(B) Voorbeeld van een oneven functie.

We kunnen hetzelfde laten zien voor de cosinusreeks, waar hetzelfde gedrag optreedt, maar dan in de andere term. Zo komen we tot de functie-ontwikkeling

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx), \quad (3.8)$$

$$\text{met } A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^L f(x) dx, \quad (3.9)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^L f(x) \cos(nx) dx. \quad (3.10)$$

3.2. Fourierreeksen en de karakteristieke functie. Omdat we later gaan kijken naar processen waarvan alleen de karakteristieke functie bekend is, is het handig om een relatie te vinden tussen de dichtheidsfunctie f en zijn karakteristieke.

3.2.1. Cosinus. De fouriertransformatie van een kansdichtheidsfunctie is de karakteristieke functie. Dus de kansdichtheid $f(x)$ en de karakteristieke functie $\phi(\omega)$

$$\phi(\omega) = \int e^{ix\omega} f(x) dx, \quad (3.11)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega x} \phi(\omega) d\omega \quad (3.12)$$

zijn een Fourier-paar. Om $f(x)$ te berekenen, gaan we gebruik maken van de fourier-cosinusreeks ontwikkeling. Op een interval van $[0, \pi]$ is dit gegeven door

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} ' A_k \cos(k\theta), \quad (3.13)$$

$$\text{met } A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad (3.14)$$

waar $\sum'$ betekent dat de eerste term gehalveerd wordt.

Om de cosinus expansie op een ander interval, bijvoorbeeld $[a, b]$ te krijgen, passen we verandering van variabelen toe, i.e.,

$$\theta = \frac{x-a}{b-a}\pi, \quad x = \frac{b-a}{\pi}\theta + a.$$

Vervolgens krijgen we

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} {}'A_k \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}), \quad (3.15)$$

$$\text{met } A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) dx. \quad (3.16)$$

Zoals we in (3.11) zagen, is de karakteristieke functie gegeven door

$$\phi_X(\omega) = \mathbb{E}[e^{i\omega X}] = \int e^{i\omega x} f_X(x) dx$$

Van Euler weten we dat

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \sin(\omega).$$

Hieruit kunnen we concluderen dat $\Re\{e^{i\omega}\} = \cos(\omega)$. Nu kunnen we voor elke stochast X en constante $a \in R$ stellen dat

$$\phi_X(\omega)e^{ia} = \mathbb{E}[e^{i\omega X + ia}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x + a)} f_X(x) dx, \quad (3.17)$$

waarvan het reële deel in (3.17) gelijk is aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x + a) f_X(x) dx \quad (3.18)$$

Als we nu de karakteristieke functie op het interval $[a, b]$ vermenigvuldigen met $e^{-\frac{ik\pi a}{b-a}}$ en het reële deel hiervan nemen, zullen we zien dat het resultaat op vergelijking (3.16) begint te lijken.

$$\Re\{\phi_X(\omega)e^{-\frac{ik\pi a}{b-a}}\} = \Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f_X(x) e^{-\frac{ik\pi a}{b-a}} dx\right\}$$

Voor $\omega = \frac{k\pi}{b-a}$ is dit gelijk aan

$$\Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \frac{k\pi}{b-a}} f_X(x) e^{-i \frac{k\pi a}{b-a}} dx\right\} = \Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} f_X(x) dx\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) f_X(x) dx. \quad (3.19)$$

Hieruit kunnen we concluderen dat

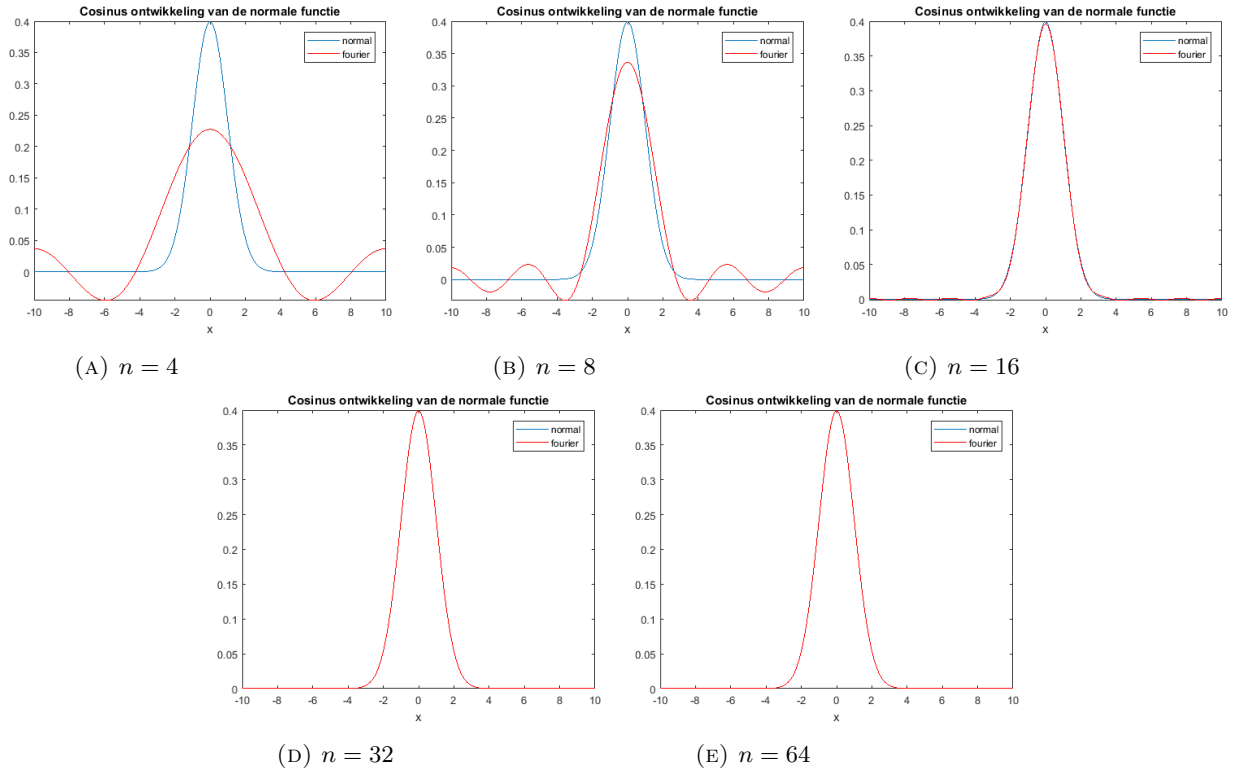
$$A_k \approx \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) dx = \frac{2}{b-a} \Re\left\{\phi_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) e^{-i \frac{k\pi a}{b-a}}\right\}. \quad (3.20)$$

Nu kunnen we het resultaat in (3.20) gebruiken om bijvoorbeeld de standaardnormale functie te benaderen.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Hiervoor benaderen we de oneindige reeks in (3.15) met de eindige reeks

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} {}'A_k \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) \quad (3.21)$$



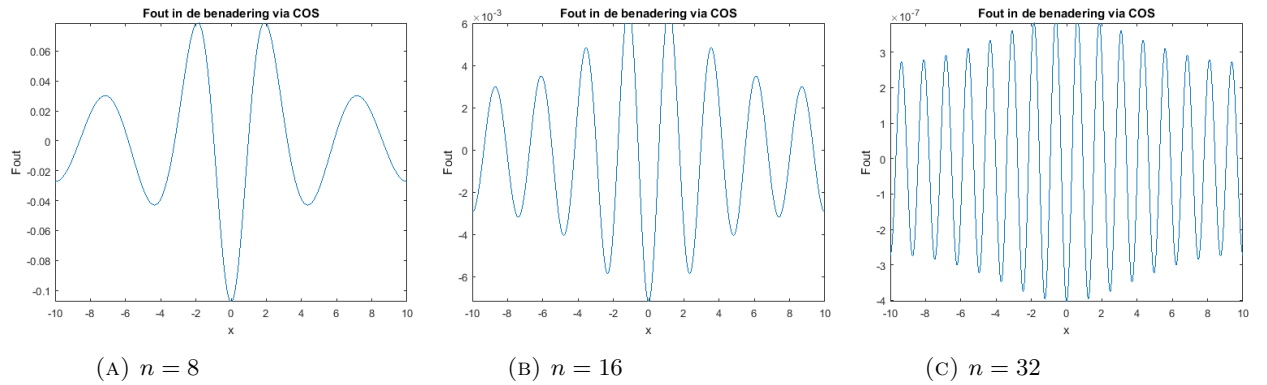
FIGUUR 9. Cosinus ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling.

We zien de benadering van de cosinus ontwikkeling in figuur 9. De maximale fout hiervan is weergegeven in tabel 1. We zien dat de fout exponentieel convergeert.

n	4	8	16	32	64
Benadering via COS	0.18	0.07	0.003	8e-8	8e-18

TABEL 1. Maximale fout in de benadering van de standaardnormale verdeling.

Deze fout is ook grafisch weergegeven in figuur 10. Dit is interessant, omdat je duidelijk terugziet dat we de functie via sinusoïden bepalen.



FIGUUR 10. Fout in de benadering van de standaardnormale verdeling via COS methode.

3.2.2. *Sinus.* Zoals we eerder zagen, kunnen we in de fourierreksen drie onderscheiden maken. De benadering met alleen cosinus, benadering met alleen sinus en de benadering met zowel de sinus als cosinus. Ook voor deze laatste twee reeksen zullen we de relatie tot de karakteristieke functie afleiden.

Allereerst passen we weer verandering van variabelen toe. De sinus versie is gegeven door

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}), \quad (3.22)$$

$$\text{met } B_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}) dx. \quad (3.23)$$

Vervolgens gaan we dezelfde stappen door, maar in plaats van het reële deel te nemen, nemen we het imaginaire gedeelte. Aangezien $\Im\{e^{i\omega}\} = \sin(\omega)$.

$$\Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \frac{k\pi}{b-a}} f_X(x) e^{-i \frac{k\pi a}{b-a}} dx\right\} = \Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} f_X(x) dx\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}) f_X(x) dx. \quad (3.24)$$

Als we dit vergelijken met (3.23) kunnen we concluderen dat

$$B_k \approx \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}) dx = \frac{2}{b-a} \Im\left\{\phi_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) e^{-i \frac{k\pi a}{b-a}}\right\}. \quad (3.25)$$

3.2.3. *Fourierreks.* Als laatste willen we werken naar de fourierreks

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}), \quad (3.26)$$

$$\text{met } A_0 = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f(x) dx, \quad (3.27)$$

$$A_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) dx, \quad (3.28)$$

$$B_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}) dx. \quad (3.29)$$

Vrij eenvoudig volgt nu, door (3.20) en (3.25) te combineren dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\pi \frac{x-a}{b-a}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}), \quad (3.30)$$

$$\text{met } A_k = \frac{1}{b-a} \Re\left\{\phi_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) e^{-i \frac{k\pi a}{b-a}}\right\}, \quad (3.31)$$

$$B_k = \frac{1}{b-a} \Im\left\{\phi_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) e^{-i \frac{k\pi a}{b-a}}\right\}. \quad (3.32)$$

Nu kunnen we tabel 1 uitbreiden tot tabel 2. Hier zijn ook de benaderingen voor de lognormale verdeling weergegeven met $\mu = 0$ en $\sigma = 0.25$. We hebben voor deze σ gekozen, omdat deze waarde vaker wordt gebruikt voor lognormale processen.¹ De lognormale verdeling is gegeven door

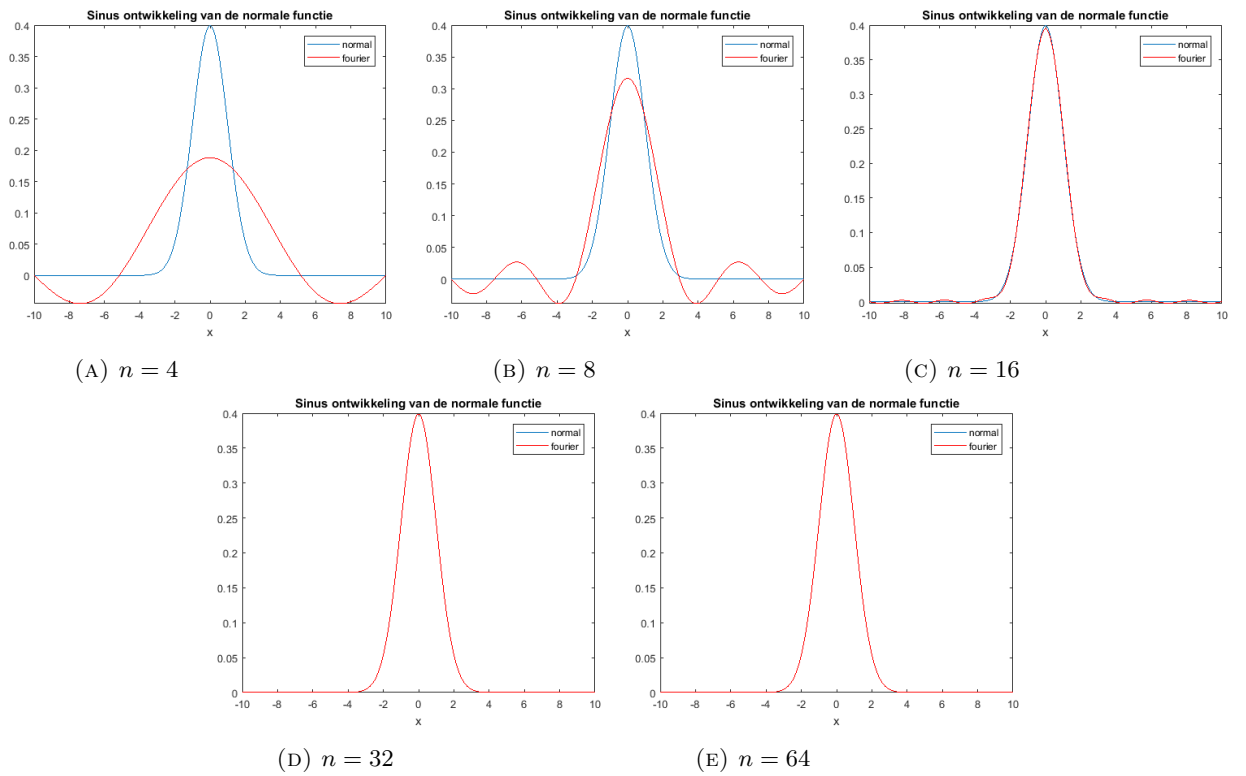
$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (3.33)$$

¹Voor andere waardes wordt de functie ook juist benaderd. Dus dat laten we hier niet zien.

n		4	8	16	32	64
Normaal(0,1)	cos	0.18	0.07	0.003	8e-8	8e-18
	sin	0.25	0.09	0.005	1.5e-7	8e-18
	fourier	0.19	0.08	0.0038	13e-8	8e-18
Lognormaal(0,0.25)	cos	1.1	0.9	0.4	0.05	9e-4
	sin	1.2	0.7	0.3	0.05	6e-4
	fourier	1.2	0.8	0.3	0.028	6e-4

TABEL 2. Maximale fout in de benadering van de standaardnormale en de lognormale verdeling.

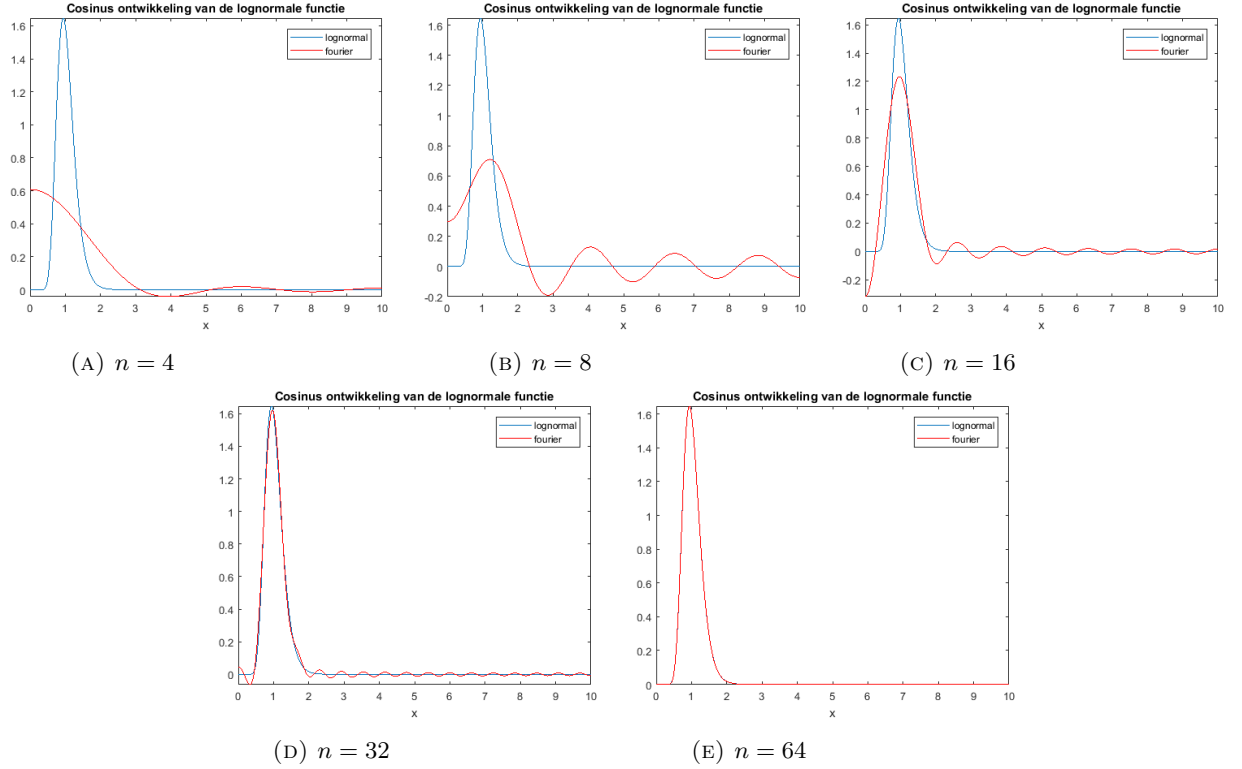
Voor de normale verdelingsfunctie zijn de benaderingen via de sinus expansie visueel weergegeven in figuur 11.



FIGUUR 11. Sinus ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling.

De fourier ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling is vergelijkbaar met de sinus en cosinus ontwikkeling en is daarom weergegeven in de Appendix.

Voor de lognormale verdelingsfunctie met $\sigma = 0.25$ zijn de benaderingen visueel weergegeven in figuur 12. Dit doen we enkel voor de cosinus benadering, omdat de sinus en fourier benadering een soortgelijk resultaat geven.



FIGUUR 12. Cosinus ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de lognormale verdeling.

3.3. Opties prijzen met de karakteristieke functie. Zoals we in 3.1 zagen, kunnen we een optie prijzen met

$$v(x, t) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int v(y, T) f(y|x) dy \quad (3.34)$$

waar $f(y|x)$ de kandichtheidsfunctie van het onderliggende proces is. Zoals we in hoofdstuk 3.2 zagen, is dit om te schrijven als een verhouding tussen de karakteristieke functie en de fourierreeks. In dit geval de cosinus reeks.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 'A_k \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}), \quad (3.35)$$

$$\text{met } A_k = \frac{2}{b-a} \Re\{\phi_X(\frac{k\pi}{b-a}) e^{-i \frac{ka\pi}{b-a}}\}, \quad (3.36)$$

Als we dit substitueren in (3.34) volgt

$$v(x, t) = e^{-r(\Delta t)} \int v(y, T) \sum_{k=0}^{\infty} 'A_k \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy, \quad (3.37)$$

$$\text{met } A_k = \frac{2}{b-a} \Re\{\phi_X(\frac{k\pi}{b-a}) e^{-i \frac{ka\pi}{b-a}}\}. \quad (3.38)$$

Door de sommatie en integraal te verwisselen volgens de stelling van Fubini en de volgende term te introduceren

$$V_k = \frac{2}{b-a} \int v(y, T) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad (3.39)$$

krijgen we een formule om opties te prijzen.

$$v(x, t) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k. \quad (3.40)$$

In veel gevallen blijkt V_k om te schrijven tot een analytische uitdrukking. Zo ook voor Europese call en put opties. Dit zullen we in de volgende paragraaf laten zien.

3.4. Europese call en put opties prijzen. Voor velen soorten opties valt V_k , gegeven door,

$$V_k = \frac{2}{b-a} \int v(y, T) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad (3.41)$$

om te schrijven tot een analytische uitdrukking. Dit kan een hoop rekenwerk en zo eventuele fouten besparen.

Stel we willen een Europese optie prijzen met als onderliggend proces de lognormale verdeling gegeven door (2.8). De log-prijzen noteren we als

$$x = \ln(\frac{S(0)}{K}), \quad y = \ln(\frac{S(T)}{K})$$

waar $S(t)$ de prijs is van het aandeel op tijdstip t en K de uitoefenprijs. De uitbetalingsfunctie van Europese opties is

$$v(y, T) = \max(\alpha(S(T) - K), 0) = [\alpha(S(T) - K)]^+ \quad \text{met } \alpha = \begin{cases} 1 & \text{voor een call} \\ -1 & \text{voor een put} \end{cases}$$

of in log-prijzen

$$v(y, T) = \max(\alpha(K(e^y - 1)), 0) = [\alpha K(e^y - 1)]^+.$$

De cosinusreeks coëfficiënten van de functie $g(y) = e^y$ en $h(y) = 1$ op het interval (c, d) in $[a, b]$ zijn gegeven door resp.

$$B_k(c, d) = \int_c^d e^y \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad \text{en} \quad (3.42)$$

$$C_k(c, d) = \int_c^d \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad (3.43)$$

Via partiël integreren kunnen we laten zien dat

$$\begin{aligned} B_k(c, d) &= \frac{1}{1 + (\frac{k\pi}{b-a})^2} (\cos(k\pi \frac{d-a}{b-a}) e^d - \cos(k\pi \frac{c-a}{b-a}) e^c \\ &\quad + \frac{k\pi}{b-a} \sin(k\pi \frac{d-a}{b-a}) e^d - \frac{k\pi}{b-a} \sin(k\pi \frac{c-a}{b-a}) e^c), \end{aligned} \quad (3.44)$$

en

$$C_k(c, d) = \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} (\sin(k\pi \frac{d-a}{b-a}) - \sin(k\pi \frac{c-a}{b-a})) & k \neq 0, \\ (d - c) & k = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Vergelijking (3.41) kunnen we nu schrijven tot

$$V_k^{call} = \frac{2}{b-a} K ((B_k(0, b) - C_k(0, b))) \quad \text{en} \quad (3.46)$$

$$V_k^{put} = \frac{2}{b-a} K (-B_k(a, 0) + C_k(a, 0)) \quad (3.47)$$

De onderliggende functie in (3.34) is de lognormale functie. Dit is de verdeling van de aandelenkoersen bij het model van een Geometrische Brownse beweging. De karakteristieke functie is als volgt weergegeven

$$\phi(\omega) = e^{i\omega((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t) - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \Delta t} \quad (3.48)$$

Nu kunnen we een call- en putprijs berekenen door deze karakteristieke functie toe te passen. Hiervoor gebruiken we de volgende waarden:

$$\begin{aligned} S_0 &= 5, \\ K &= 4, \\ \sigma &= 0.25, \\ r &= 0.05, \\ \Delta t &= T - t_0 = 1. \end{aligned}$$

Als we nog eenmaal een blik op (3.48) werpen, zien we dat de variabele μ nog geen waarde heeft. De verwachtingswaarde, μ , stellen we in de rest van dit verslag gelijk aan de risico-vrije rentevoet r . Dit doen we omdat we niet de kansmaat gebruiken die gebaseerd is op de historische koersdata, maar de risico-neutrale kansmaat. Dit wordt ook wel de risico-neutraliteitsaannname genoemd. Vergelijking (2.8) en zijn karakteristieke functie (3.48) vallen binnen de eerste kansmaat. Door $\mu = r$ te stellen, kunnen we de overstap maken naar de risico-neutrale kansmaat. Dit is het punt voor μ waar (3.34) en Black-Scholes elkaar snijden. Het idee dat opties geprijsd moeten worden binnen de risico-neutrale kansmaat komt van Cox, Ross en Rubinstein. [1]

Voor het interval $[a, b]$ gebruiken we de volgende waarden:

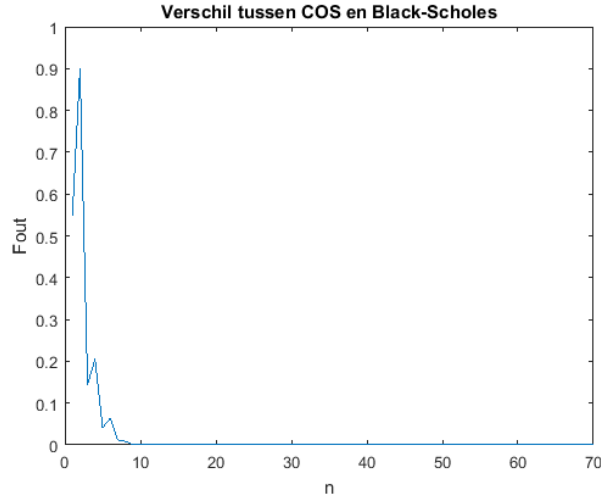
$$\begin{aligned} c_1 &= \mu T, \\ c_2 &= \sigma^2 T, \\ L &= 10, \\ a &= c_1 - L\sqrt{c_2}, \\ b &= c_1 + L\sqrt{c_2}. \end{aligned}$$

Het resultaat is weergegeven in tabel 3.

n	4	8	16	32	64
COS methode	1.1182	0.9217	0.9124	0.9132	0.9132
Fout	0.2050	0.0085	8.3783e-04	6.0718e-10	1.2212e-15

TABEL 3. COS put optie waarden voor verschillende n met referentiewaarde 0.9132 via Black-Scholes.

In figuur 13 is de convergentie van de fout van de COS methode grafisch weergegeven.



FIGUUR 13. Verschil COS en Black-Scholes voor verschillende n .

3.5. **SIN methode.** Net zoals we de optie-prijzings formule

$$v(x, t) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, T) f(y|x) dy$$

in sectie (3.3) hebben aangepast tot (3.38), kunnen we dit ook doen met een sinusontwikkeling. Dit kunnen we doen door het imaginaire deel te nemen. Herinner,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin(k\pi \frac{x-a}{b-a}),$$

$$\text{met } B_k = \frac{2}{b-a} \Im \left\{ \phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) e^{-i \frac{ka\pi}{b-a}} \right\}.$$

Substitueren geeft

$$v(x, t) = e^{-r\Delta t} \int v(y, T) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy, \quad (3.49)$$

$$\text{met } B_k = \frac{2}{b-a} \Im \left\{ \phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) e^{-i \frac{ka\pi}{b-a}} \right\}. \quad (3.50)$$

Door weer de sommatie en integraal te verwisselen volgens de stelling van Fubini en de volgende term te introduceren

$$W_k = \frac{2}{b-a} \int v(y, T) \sin(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad (3.51)$$

krijgen we een nieuwe formule om opties te prijzen.

$$v(x, t) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} B_k W_k \quad (3.52)$$

W_k is opnieuw vaak analytisch te bepalen voor verschillende uitbetalingsfuncties $v(y, T)$. We nemen nogmaals de uitbetalingsfunctie van Europese opties in log-prijzen.

$$v(y, T) = [\alpha K (e^y - 1)]^+$$

Door de sinusreeks coëfficiënten te berekenen voor e^y en 1 kunnen we de uitbetalingsfunctie analytisch bepalen. Deze zijn resp. weergegeven door:

$$D_k(c, d) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} \left(\sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right. \\ \left. - \frac{k\pi}{b-a} \cos\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d + \frac{k\pi}{b-a} \cos\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right) \quad (3.53)$$

en

$$E_k(c, d) = \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} (-\cos(k\pi \frac{d-a}{b-a}) + \cos(k\pi \frac{c-a}{b-a})) & k \neq 0, \\ 0 & k = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Zo krijgen we een nieuwe functie voor W_k

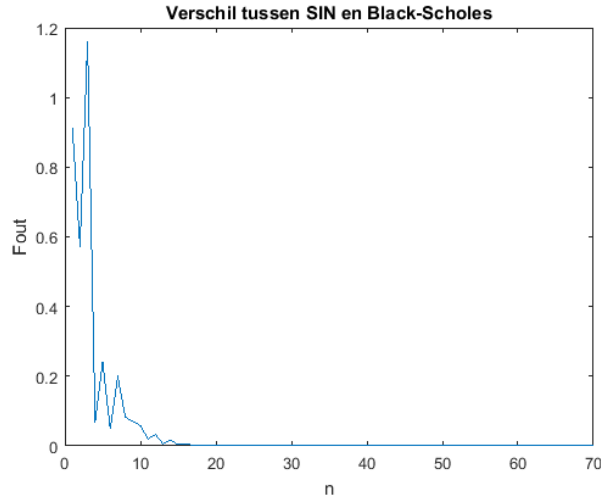
$$W_k^{call} = \frac{2}{b-a} K(D_k(0, b) - E_k(0, b)) \quad \text{en} \quad (3.55)$$

$$W_k^{put} = \frac{2}{b-a} K(-D_k(a, 0) + C_k(a, 0)) \quad (3.56)$$

n	4	8	16	32	64
SIN methode	0.9807	0.9955	0.9191	0.9132	0.9132
Fout	0.0674	0.0823	0.0059	2.8715e-07	1.1102e-16

TABEL 4. SIN put optie waarden voor verschillende n met referentiewaarde 0.9132 via Black-Scholes.

In figuur 14 is de convergentie van de fout van de SIN methode grafisch weergegeven.



FIGUUR 14. Verschil SIN en Black-Scholes voor verschillende n .

4. ddCOS methode

In het vorige hoofdstuk hebben we de COS methode behandeld. Met deze methode kunnen we opties waarderen op basis van de karakteristieke functie. Dit is handig in het geval dat alleen deze beschikbaar is. In de ddCOS methode[8] gaan we nog een stapje verder. Hier wordt de karakteristieke functie met datapunten benaderd. Hierdoor hebben we genoeg aan het koersverloop van een aandeel om een optieprijs te bepalen.

Het idee van de ddCOS methode is als volgt. Een kansverdelingsfunctie heeft een relatie tot de cumulatieve verdelingsfunctie door

$$\int_{-\infty}^x f(y)dy = F(x). \quad (4.1)$$

Functie $F(x)$ kan daaropvolgend empirisch benaderd worden door

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi(x - X_j). \quad (4.2)$$

Met X_j het aantal datapunten en χ de stapfunctie. De empirische verdelingsfunctie telt alle punten waar $X_j \leq x$ en neemt hier het gemiddelde van. Vergelijking (4.2) heeft als fourier-getransformeerde

$$\hat{F}_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int F_n(x) e^{-iux} dx \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \int \sum_{j=1}^n \chi(x - X_j) e^{-iux} dx = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{e^{-iuX_j}}{iu}. \quad (4.4)$$

Nu willen we het verschil tussen $\int_{-\infty}^x f(y)dy$ en F_n minimaliseren. Hiervoor stellen we de risk functional op.² [9]

$$R_{\gamma_n}(f, F_n) = \int \left(\int_0^x f(y)dy - F_n(x) \right)^2 dx + \gamma_n \int \left(\int \kappa(z - x) f(x) dx \right)^2 dx \quad (4.5)$$

Met $\kappa(x)$ de p^{de} -afgeleide van de Diracdelta functie, oftewel $\kappa(x) = \delta^{(p)}(x)$. We zullen in de rest van het verslag $\gamma_n = \frac{\log \log n}{n}$ gebruiken.

Door Parseval's identiteit toe te passen kunnen de functies in (4.5) vervangen worden door de fourier getransformeerde. Ook passen we de definitie van de fourier getransformeerde toe van $F_n(x)$ en

$$\int_0^x f(y)dy = \frac{\hat{f}(u)}{iu}$$

Dit geeft

$$R_{\gamma_n}(f, F_n) = \int \left(\frac{\hat{f}(u) - \sum_{j=1}^n e^{-iuX_j}}{iu} \right)^2 du + \gamma_n \int \left(\int \kappa(z - x) f(x) dx \right)^2 dx. \quad (4.6)$$

Nu passen de convolutie theorie voor fourier getransformeerden toe.

$$R_{\gamma_n}(f, F_n) = \int \left(\frac{\hat{f}(u) - \sum_{j=1}^n e^{-iuX_j}}{iu} \right)^2 du + \gamma_n \int \left(\kappa(u) \hat{f}(u) \right)^2 du. \quad (4.7)$$

Dit is equivalent met

$$R_{\gamma_n}(f, F_n) = \left\| \frac{\hat{f}(u) - \sum_{j=1}^n e^{-iuX_j}}{iu} \right\|^2 + \gamma_n \left\| \kappa(u) \hat{f}(u) \right\|^2. \quad (4.8)$$

De functie in (4.8) wordt geminimaliseerd als $\hat{f}(u)$ aan de volgende eis voldoet

$$\hat{f}_n(u) = \left(\frac{1}{1 + \gamma_n u^2 \hat{\kappa}(u) \hat{\kappa}(-u)} \right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-iuX_j}. \quad (4.9)$$

²We laten hier een paar stappen weg, maar de rest is terug te lezen in het originele ddCOS artikel.[8]

We willen $f_n(\theta)$ weer benaderen door een cosinus expansie gegeven door

$$f_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k \cos(k\theta) \quad (4.10)$$

met

$$\tilde{A}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_n(\theta) \cos(k\theta) dy = \langle f_n(\theta), \cos(k\theta) \rangle \quad (4.11)$$

$$= \langle \hat{f}_n(u), \frac{1}{2}(\delta(u-k) + \delta(u+k)) \rangle \quad (4.12)$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{1}{1 + \gamma_n u^2 \hat{\kappa}(u) \hat{\kappa}(-u)} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-iu\theta_j} \right) \right) \frac{1}{2}(\delta(u-k) + \delta(u+k)) du \quad (4.13)$$

De fourier getransformeerde van $\cos(k\theta)$ in de integraal in (4.13) bespaart veel rekenwerk. Dit komt door de eigenschappen van de Diracdelta functie.

$$\tilde{A}_k = \frac{1}{2n} \left(\left(\frac{1}{1 + \gamma_n (-k)^2 \hat{\kappa}(-k) \hat{\kappa}(k)} \right) \sum_{j=1}^n e^{ik\theta_j} \right) \quad (4.14)$$

$$+ \frac{1}{1 + \gamma_n (k)^2 \hat{\kappa}(k) \hat{\kappa}(-k)} \sum_{j=1}^n e^{ik\theta_j} \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{1 + \gamma_n k^2 \hat{\kappa}(k) \hat{\kappa}(-k)} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(k\theta_j) \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{1 + \gamma_n k^{2(p+1)}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(k\theta_j) \quad (4.17)$$

In de laatste stap gebruiken we $\hat{\kappa}(u) = (iu)^p$. De fourier getransformeerde van de p^{de} -afgeleide diracdelta functie.

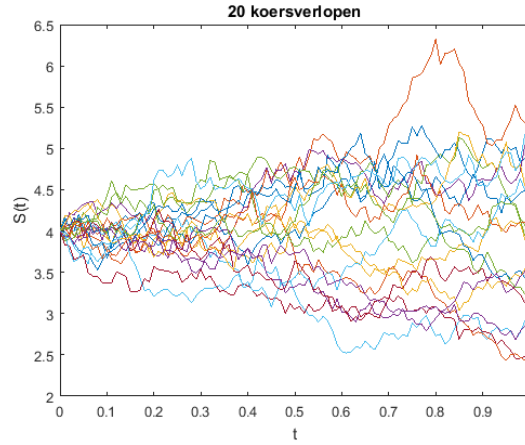
Nu kunnen we de A_k in (3.40) vervangen door de op datapunten gebaseerde $\tilde{A}_k$ waarde.

$$v(x, t) = e^{r\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k V_k \quad (4.18)$$

4.1. Europese call en put opties prijzen. Net zoals in sectie (3.4) kunnen we met de ddCOS methode Europese call en put opties prijzen voor een Geometrische Brownsne beweging. We zullen dit voor dezelfde waardes doen. Hiervoor hebben we echter eerst datapunten nodig. Deze kunnen we genereren door

$$S(T) = S_0 e^{r - \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} Z} \quad \text{met } Z \sim N(0, 1). \quad (4.19)$$

In figuur 15 is dit voor $m = 20$ keer weergegeven.



FIGUUR 15. Koersverloop geometrische Brownse beweging, $S_0 = 4$.

Zo kunnen we verschillende datapunten $S_1(T), S_2(T), \dots, S_m(T)$ gebruiken voor de ddCOS methode. Allereerst nemen we de log transformatie

$$Y_j = \log\left(\frac{S_j(T)}{K}\right),$$

en omdat de oplossing is gedefinieerd op het interval $(0, \pi)$ moeten we een verandering van variabelen toepassen.³

$$\theta_j = \pi \frac{Y_j - a}{b - a}$$

De variabelen a en b stellen we gelijk aan

$$a = \min_{1 \leq j \leq m} Y_j, \quad b = \max_{1 \leq j \leq m} Y_j.$$

Het aantal datapunten S_j hebben we gelijk genomen aan $m = 1028$. We kunnen nu (4.18) benaderen door

$$v(x, t) = e^{r\Delta t} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k V_k. \quad (4.20)$$

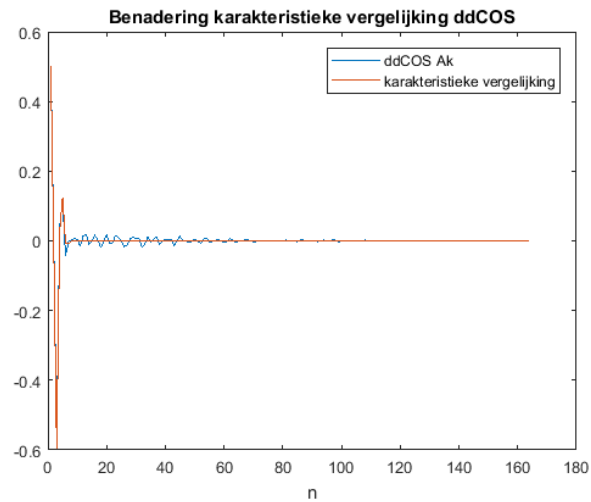
Voor V_k kunnen we dezelfde analytische functie gebruiken. De resultaten zijn weergegeven in tabel 5.

n	4	8	16	32	64
COS methode	1.1182	0.9217	0.9124	0.9132	0.9132
Fout COS	0.2050	0.0085	8.3783e-04	6.0718e-10	1.2212e-15
ddCOS methode	0.9201	0.9249	0.9252	0.9250	0.9250
Fout ddCOS	0.0069	0.0116	0.0120	0.0118	0.0118

TABEL 5. COS en ddCOS put optie waardes voor verschillende n met referentiewaarde 0.9132 via Black-Scholes.

We zien dat de fout nog niet klein genoeg wordt. Hiervoor nemen we een blik op de $\tilde{A}_k$, deze zouden een benadering moeten vormen van de karakteristieke functie. Deze zijn samen weergegeven in figuur 16.

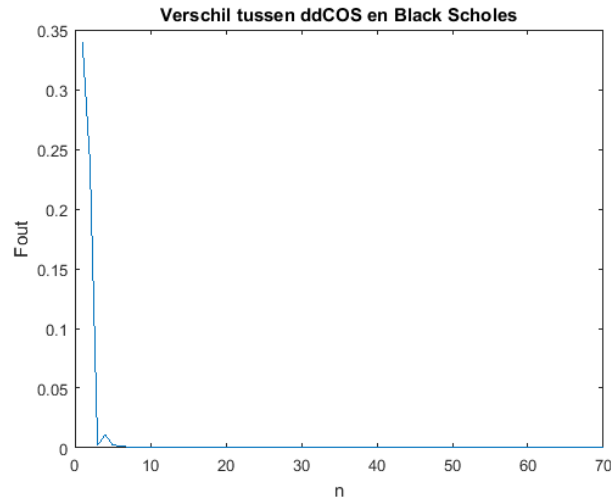
³We hebben slechts de cosinus expansie voor het interval $(0, \pi)$ gebruikt.



FIGUUR 16. $\tilde{A}_k$ en karakteristieke functie voor verschillende $n, m = 1028$.

We zien dat de benadering goed is, maar door de cosinus expansie benadering zien we nog steeds sprongen. Voor grotere n wordt dit effect minder.

Ook het aantal datapunten m is hier erg van belang. Wanneer we deze met een factor 10 vergroten, zien we de fouten richting de nul gaan.



FIGUUR 17. Verschil ddCOS en Black-Scholes voor verschillende $n, m = 10000$.

4.2. Bitcoin opties prijzen. Nu we hebben gezien dat de ddCOS methode werkt voor opties die te prijzen zijn met de Black-Scholes methode en dus koersen waar we de verdeling al van kennen, kunnen we dit doen voor koersen met een onbekende onderliggende verdeling. Hier komen we terug op de Bitcoin.

Laten we beginnen met de BTC koers weergegeven in afbeelding 4. Dit zijn de slotprijzen van de eerste 6 maanden dit jaar. Oftewel, $m = 181$. We nemen dit keer niet de log transformatie, dus we zullen de V_k in (4.18) moeten aanpassen.

De uitbetalingsfunctie wordt nu gegeven door

$$v(y, T) = [\alpha(S(T) - K)]^+ \quad \text{met } \alpha = \begin{cases} 1 & \text{voor een call,} \\ -1 & \text{voor een put.} \end{cases}$$

Definieer $y = S(T)$, we berekenen de cosinus expansie van $g(y) = y$ en $h(y) = 1$ op het interval (c, d) in $[a, b]$. Deze zijn gegeven door resp.

$$F_k(c, d) = \int_c^d y \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad \text{en} \quad (4.21)$$

$$G_k(c, d) = \int_c^d \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy. \quad (4.22)$$

Via partieel integreren kunnen we laten zien dat

$$F_k(c, d) = \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} (\sin(k\pi \frac{d-a}{b-a})d - \sin(k\pi \frac{c-a}{b-a})c) + (\frac{b-a}{k\pi})^2 (\cos(k\pi \frac{d-a}{b-a}) - \cos(k\pi \frac{c-a}{b-a})) & k \neq 0, \\ (\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}c^2) & k = 0, \end{cases}$$

en

$$G_k(c, d) = \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} (\sin(k\pi \frac{d-a}{b-a}) - \sin(k\pi \frac{c-a}{b-a})) & k \neq 0, \\ (d - c) & k = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Vergelijking (3.41) kunnen we nu schrijven tot

$$V_k^{call} = \frac{2}{b-a} K((F_k(0, b) - G_k(0, b)) \quad \text{en} \quad (4.24)$$

$$V_k^{put} = \frac{2}{b-a} K(-F_k(a, 0) + G_k(a, 0)). \quad (4.25)$$

We zullen nu (4.18) benaderen door

$$v(x, t) = e^{r\Delta t} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k V_k \quad (4.26)$$

met $n = 164$, $T = 9$, $r = 0.03$.

K	500	1000	1500	2000	2500	3000
Put	21.182	283.822	546.462	809.102	1071.7	1334.4

TABEL 6. ddCOS methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K .

Om dit te controleren bekijken we naar de dataset van Bitcoin. Het gemiddelde van de afgelopen 6 maanden ligt op $S_{mean} = 1475.4$, $S_{min} = 778.62$ en $S_{max} = 2954.2$. De kans dat $v(y, T) = [K - S(T)]$ positief is, wordt groter naarmate K groter wordt. Het is daarom logisch dat de prijs voor de put ook hoger wordt.

We kunnen deze tabel ook opstellen voor de Monte Carlo methode. Hier bekijken we het verschil tussen K en W_j , mits positief, nemen het gemiddelde en verdisconteren. Oftewel,

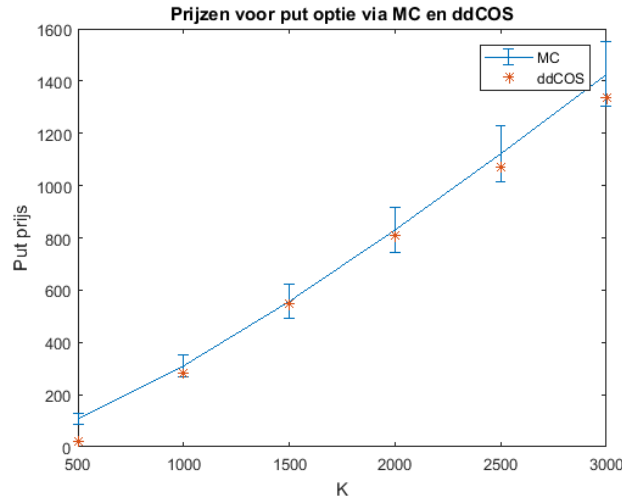
$$v(x, t)_{MC} = e^{-r\Delta t} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [K - W_j]^+ \quad (4.27)$$

Hierin zijn W_j de gegenereerde koersverlopen (4.19) gebaseerd op de laatste koerswaarde $S_0 = 2412$ en een volatiliteit van 0.6. Deze volatiliteit is gekozen afhankelijk van de standaarddeviatie van de returns r_i van de Bitcoin koers in deze 6 maanden. We maken gebruik van $m = 10000$ koersverlopen.

De resultaten zijn weergegeven in tabel 7.

K	500	1000	1500	2000	2500	3000
Put	107.011	310.323	556.729	490.264	830.251	1425.4

TABEL 7. Monte Carlo methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K , 6 maanden.



FIGUUR 18. Put prijzen gewaardeerd met Monte Carlo en ddCOS weergegeven voor verschillende uitoefenprijzen K .

We zien in figuur 18 dat de waardes die voortkomen uit de ddCOS methode in het betrouwbaarheidsinterval liggen van de Monte Carlo methode. Dit werkt alleen, als de variabelen S_0 en σ goed worden gekozen.

Nu gaan we kijken naar een kortere periode. We nemen het koersverloop van de afgelopen 3 maanden. Hier liggen de waardes tussen 1078.0 en 2954.2 met een gemiddelde van 1908.0. Omdat het verschil tussen de waardes hier minder is, m.a.w. een lagere volatiliteit, verwachten we lagere prijzen.

K	500	1000	1500	2000	2500	3000
Put	0	133.737	356.373	579.009	801.645	1024.3

TABEL 8. ddCOS methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K , 3 maanden.

We zien in tabel 8 inderdaad dat door een lagere volatiliteit in de periode, de prijzen lager uitvallen. Een put met een uitoefenprijs van $K = 500$ valt zelfs af, omdat de waardes in dit tijdsinterval zo hoog liggen.

Als laatste tijdsinterval nemen we de BTC koers in Amerikaanse dollars vanaf 15 april 2014. Dit zijn $m = 1188$ dagen. Zo beschikken we over een dataset die de BTC koers van de jaren goed weergeeft, maar laten we de lage stand van koers in de beginjaren achterwege.

K	500	1000	1500	2000	2500	3000
Put	91.9292	202.2027	312.4761	422.7496	533.0230	643.2964

TABEL 9. ddCOS methode om put opties te prijzen in USD voor Bitcoin met verschillende uitoefenprijzen K , $3\frac{1}{4}$ jaar.

De resultaten in tabel 9 vallen opnieuw lager uit. De waardes van de koers liggen tussen 170.0 en 2950.8 met een gemiddelde van 647.8.

4.3. Verdeling voor Bitcoin. De ddCOS methode maakt een benadering via data gebaseerde $\tilde{A}_k$ voor de karakteristieke functie. Bij de Geometrische Brownse beweging konden we achteraf controleren of deze daaraan voldeden. Voor Bitcoin, en andere koersen met een hoge volatiliteit, is deze verdeling niet

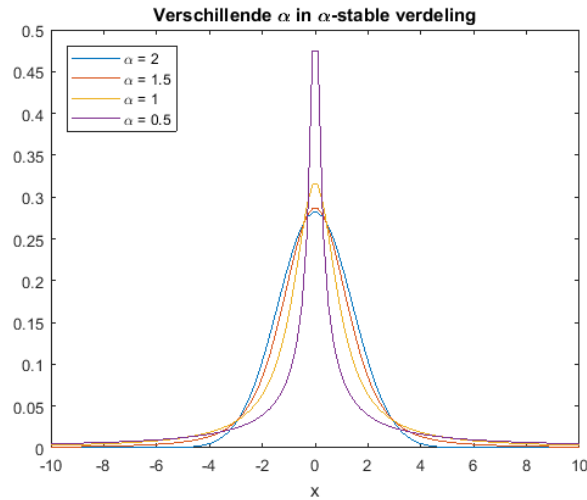
bekend. Hier zullen we proberen een functie te vinden die daar het meest op lijkt. Een interessante functie is de α -stable functie. [10] Dit is een karakteristieke functie met verschillende parameters. Voor bepaalde parameters kennen we deze verdeling al. De normale, Cauchy en de Lévy verdeling zijn namelijk ook als α -stable te herkennen.

De karakteristieke functie van de α -stable is gegeven door

$$\varphi(t; \alpha, \beta, \gamma, \mu) = \exp(it\mu - |\gamma t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi)), \quad (4.28)$$

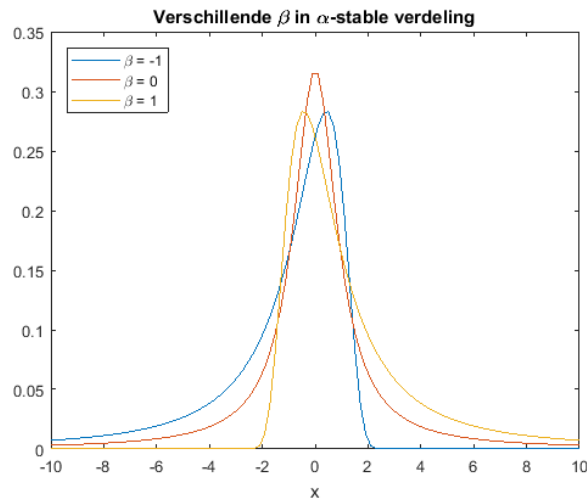
$$\text{met } \Phi = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \log|t| & \alpha = 1. \end{cases} \quad (4.29)$$

Hierin is α de stabiliteitsparameter. α ligt in het interval $(0, 2]$ waar 2 gelijk staat aan de normale verdeling.



FIGUUR 19. α -stable verdeling voor verschillende α , $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = 0$.

$\beta \in [-1, 1]$ is de scheefheids parameter. Een β gelijk aan 1 geeft een scheefheid naar rechts weer.

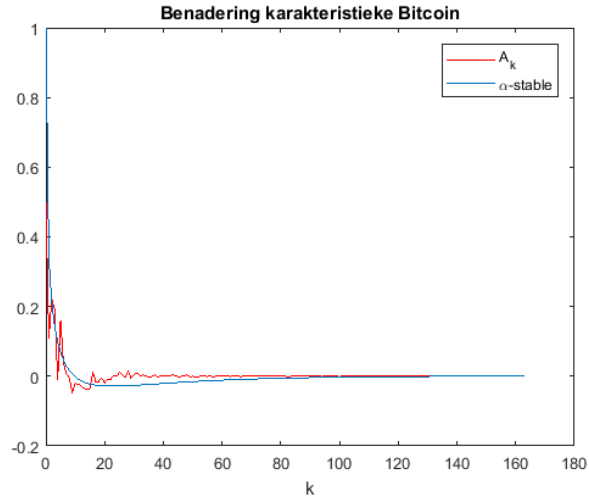


FIGUUR 20. α -stable verdeling voor verschillende β , $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0$.

Daarnaast is γ de schaal-parameter, vergelijkbaar met de standaardafwijking σ . En is μ de locatie-parameter, vergelijkbaar met de verwachtingswaarde.

In paragraaf (2.2) hebben we de scheefheid en kurtosis van de Bitcoin berekend. Hier werd duidelijk dat de returns grote pieken hebben en rechtsscheef verdeeld zijn. Dit zou in parameters van de α -stable overeenkomen met een hoge β en een lage α .

De resultaten voor een benadering van $\tilde{A}_k$ door α -stable met $\alpha = 0.4$, $\beta = 1$, $\mu = 0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zijn weergegeven in figuur 21. Deze benadering heeft volgens de kleinste-kwadratenmethode een fout van 0.0046.



FIGUUR 21. Benadering $\tilde{A}_k$ door α -stable met $\alpha = 0.4$, $\beta = 1$, $\mu = 0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

De benadering lijkt de $\tilde{A}_k$ goed te volgen, maar de α -stable functie is te glad voor het proces van de Bitcoin. We zullen daarom geen opties proberen te prijzen aan de hand van deze formule.

5. Conclusie

De Bitcoin is de laatste jaren populair geworden. Sinds de opmars van de Bitcoin zijn er diverse andere cryptocurrencies ontstaan en op dit moment zijn er 3 grote marktleiders in dit digitale geld: Bitcoin, Ethereum en Ripple. Elk hebben zij hun eigen methodes voor digitale transacties en de versleuteling hiervan. Ze worden allen met de dag populairder.

Waar de ene belegger denkt dat het hier gaat om een grote bubbel, zien anderen de kansen en is er vraag naar meerdere beleggingsproducten. Opties zijn hier een voorbeeld van. Met een optie is vaak meer rendement te halen en daarom is dit een interessant product. Voor de bekende aandelenkoersen wordt hierin al volop gehandeld. Deze koersen volgen de Geometrische Brownse beweging en kunnen daardoor geprijsd worden met de Black-Scholes methode. Wanneer we echter naar de verdeling van de Bitcoin koers kijken, zien we dat dit hier niet het geval is. We zagen dat de returns van de Bitcoin niet normaal verdeeld zijn. Dit zagen we mede door een hoge mate van scheefheid en kurtosis.

De onderliggende verdeling van de Bitcoin koers is dus niet bekend. Om toch opties te kunnen prijzen, maken we de stap naar de COS methode. Hierin leggen we de link tussen de fourierreksen van de onderliggende verdeling en de karakteristieke functie, zo dat we alleen de karakteristieke functie nodig hebben om een optie te prijzen.

Omdat we met alleen de karakteristieke functie nog geen Bitcoin optie kunnen prijzen, gaan we over op de ddCOS methode, de op data-gebaseerde COS methode. Hier benaderen we de karakteristieke functie op basis van datapunten van het koersverloop. Na het controleren of dit werkt op koersen die een Geometrisch Brownse beweging volgen, komen we uiteindelijk bij de Bitcoin. Hier nemen we datapunten van de Bitcoin in Amerikaanse dollars voor meerdere tijdsperiodes. Zo hebben we opties gewaardeerd over tijdsperiodes van 3 maanden, 6 maanden en $3\frac{1}{4}$ jaar. Omdat de volatiliteit in elke periode anders is, krijgen we verschillende optieprijzen. Voor een optieschrijver is het belangrijk te bedenken over welke periode datapunten worden genomen. Een representatief tijdsperiode kiezen is van belang, omdat dit de prijzen sterk beïnvloedt. Een langere tijdsperiode neemt de lagere koersstanden mee van voor Bitcoin populair werd. Daarnaast is het belangrijk om genoeg datapunten te kiezen voor een mooi resultaat.

Als laatste is gekeken naar een benadering van de α -stable functie voor het onderliggende proces van de Bitcoin. Na de analyse van scheefheid en kurtosis van de Bitcoin is dit doorgevoerd in de parameters voor de α -stable. Echter is deze α -stable functie nog te glad om een benadering voor de Bitcoin te vormen.

Wanneer er daadwerkelijk opties voor cryptocurrencies op de markt komen, is het interessant de resultaten te vergelijken. LedgerX hoopt deze herfst een platform voor Bitcoin opties op te zetten en in de maanden daarna ook voor Ethereum opties. De methode die zij gebruiken is (nog) onbekend. De ddCOS methode werkt voor modellen waarvan de optieprijs al bekend is, zoals bijvoorbeeld de Geometrische Brownse modellen. Ook houdt de ddCOS methode rekening met de grote sprongen in het koersverloop van de Bitcoin. Daarom is de methode erg geschikt en kan het daadwerkelijk gebruikt worden door optieschrijvers, als zij immers het risico van de Bitcoin en haar hoge volatiliteit aandurven.

REFERENCES

- [1] J. C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: A simplified approach. 1979.
- [2] <https://www.nytimes.com/reuters/2017/07/24/business/24reuters-usa-cftc-digitalcurrency.html>
- [3] <http://coinmarketcap.com/>
- [4] <https://coinmarketcap.com/currencies/>
- [5] Satoshi Nakamoto, Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, 2008.
- [6] <http://quandl.com>
- [7] Fang Fang and Cornelis W. Oosterlee. A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions. 2008.
- [8] A. Leitao, C.W. Oosterlee, L. Ortiz-Gracia and S.M. Bohte. On the data-driven COS method. 2017.
- [9] Vladimir N. Vapnik. Statistical Learning Theory. Wiley-Interscience, 1998.
- [10] α -stable distribution dilemma, Andrea Fontanari.
- [11] Desmond J. Higham, An Introduction to Financial Option Valuation, 83-84, 2004.
- [12] Desmond J. Higham, An Introduction to Financial Option Valuation, 149, 2004.

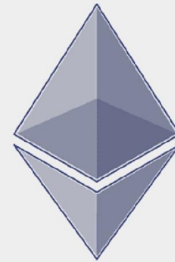
6. Appendix

ETHEREUM EXPLAINED... INFOGRAPHIC

by @angelomilan

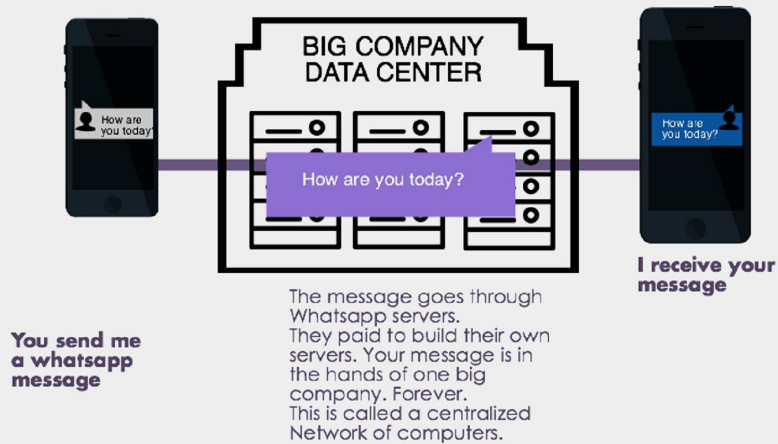


"Ethereum is a network of computers that make a new type of apps possible"

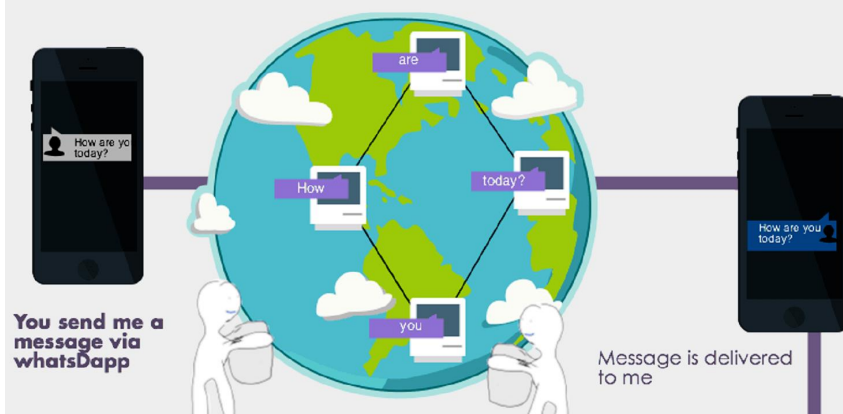


Why the name ethereum?
"It's a metaphor referring to ether, the hypothetical invisible medium that permeates the universe and allows light to travel." - Vitalik

The old way with a regular App



The ethereum way with a dApp = decentralized App



The message goes to a network of independent computers spread all over the world, owned by normal people like you and me, and every computer does a little bit of the work. To connect to the network they installed a special program called Mist. This is a decentralized network

Every participating computer receives a reward for their work
because they paid for hardware, electricity and shared their processing power



they don't get dollars



but a digital asset called **ETHER**

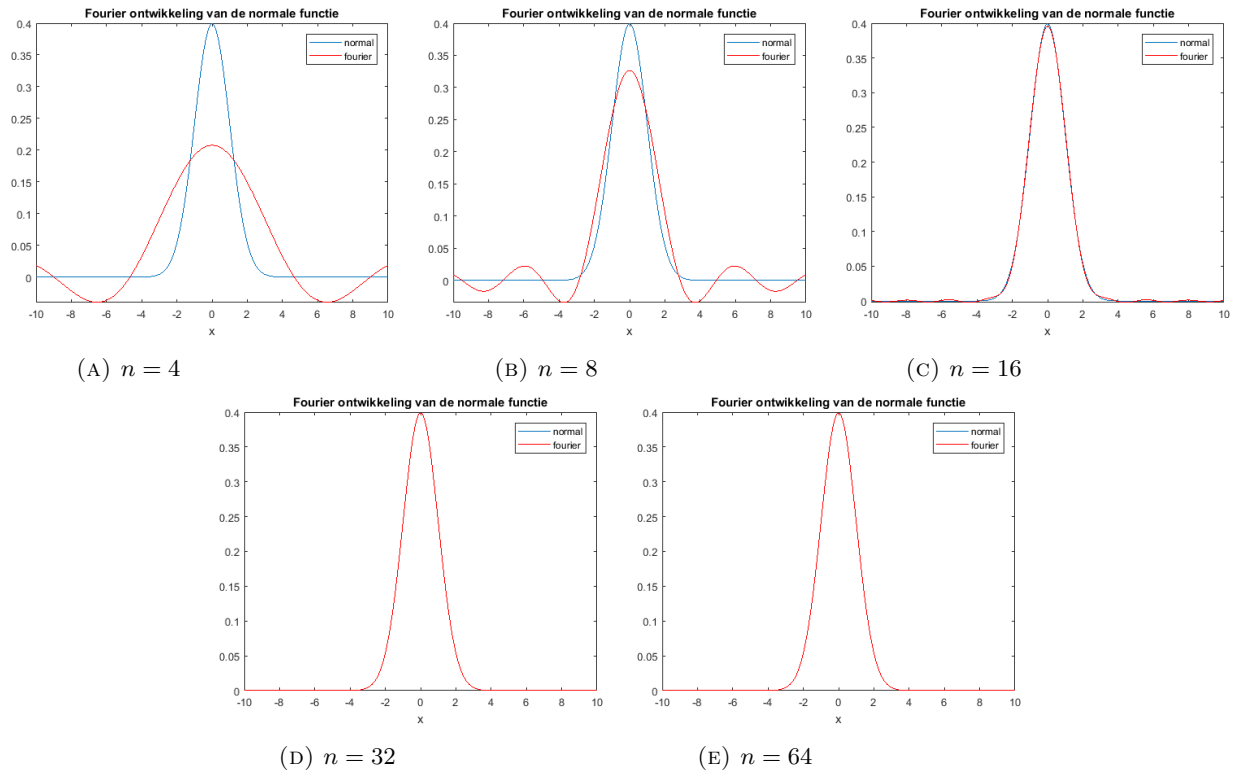
Ether is the fuel that makes dApps run. Like gas makes your car run.

How can I use this "Ether" ?

Computer owners may want to monetize their work and sell ether for real dollars

EXCHANGE

dApp Developers need Ether to run their dapps on the Ethereum network and want to buy some ETH for real dollars



FIGUUR 23. Fourier ontwikkeling op basis van de karakteristieke functie voor de normale verdeling.

7. Matlab code

Code voor het prijzen van opties aan de hand van de Black-Scholes methode [11].

```
function [C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S,E,r,sigma,tau)
% Program for Chapter 8
% This is a MATLAB function
% Input arguments: S = asset price at time t
% E=Exercise price
% r=interest rate
% sigma = volatility
% tau = time to expiry (T-t)
% Output arguments: C = call value, Cdelta = delta value of call
% P=Put value, Pdelta = delta value of put
% function [C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S,E,r,sigma,tau)
if tau > 0
d1 = (log(S/E) + (r + 0.5*sigma^2)*(tau))/(sigma*sqrt(tau));
d2 = d1 - sigma*sqrt(tau);
N1 = 0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2 = 0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
C=S*N1-E*exp(-r*(tau))*N2;
Cdelta = N1;
P=C+E*exp(-r*tau) - S;
Pdelta = Cdelta - 1;
else
C=max(S-E,0);
Cdelta = 0.5*(sign(S-E) + 1);
P=max(E-S,0);
Pdelta = Cdelta - 1;
end
[C, Cdelta, P, Pdelta]
```

Code voor het prijzen van opties door middel van de Monte Carlo methode [12].

```
%CH15 Program for Chapter 15
%
% Monte Carlo for a European put
randn('state',1995)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
S=2412;E=3000;sigma = 0.6;r=0.03;T=9;
Dt = 1e-3;N=T/Dt;M=1e4;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
V=zeros(M,1);
for i = 1:M
Sfinal = S*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*randn);
V(i) = exp(-r*T)*max(E-Sfinal,0);
end
aM = mean(V)
bM = std(V);
conf = [aM - 1.96*bM/sqrt(M), aM + 1.96*bM/sqrt(M)];
```

Code voor het prijzen van een optie met de COS methode

```

%stock gegevens
S0=4;
K=5;
r=0.05;mu=r;
sigma=0.25;
T=1;

%input
m = 64;
k= [0:m-1];

c1 = mu*T;
c2 = sigma^2*T;
L=10;
a = c1-L*sqrt(c2);
b = c1+L*sqrt(c2);
% a=-10;
% b=10;

co=pi/(b-a);
cf = exp(1i * (k*co) * ((mu - 1/2 * sigma^2) * T) - 1/2 * sigma^2 * (k*co).^2 * T);
%karakteristiek voor lognormale
x0=log(S0/K);
fk = real(cf.*exp(1i*k*co*(x0-a)));
fk(1)=1/2*fk(1);

CP=-1; % -1 voor put, 1 voor call
if CP==1
    c=0;d=b;
else
    c=a;d=0;
end

co=pi/(b-a);
dma = (d-a)/(b-a)*pi;
cma= (c-a)/(b-a)*pi;
expd=exp(d);
expc=exp(c);
X = (cos(k*dma)*expd - cos(k*cma)*expc + k*co.* (sin(k*dma)*expd - sin(k*cma)*expc) )...
    ./ (1+(k*co).^2);
Y = (sin(k(2:end)*dma) - sin(k(2:end)*cma))./(co*k(2:end));
Y=[d-c, Y];
vk = 2/(b-a)*K*CP*(X-Y); %payoff functie

%———— Pricing Formula —————
value = exp(-r*T)*sum(fk.*vk);
[C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S0,K,r,sigma,T);
err = abs(P-value);

```

Code voor het prijzen van een optie met de ddCOS methode.

```
%stock gegevens
S0=4;
K=5;
r=0.05;mu=r;
sigma=0.25;
T=1;

%input
m=164;
n=10280;
j = [1:n];
k= [0:m-1];

%MC pad voor stock
randn('state',1995)
Z=randn(n,1);
Sfinal=S0*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*Z); %gegenereerde data
Sfinal=log(Sfinal/K);

a=min(Sfinal); b=max(Sfinal);
theta = pi*((Sfinal-a)/(b-a));
gamma = log(log(n))/n;

for i = 0:(m-1)
    A(i+1) = (1/n)*(1/(1+gamma*i^2))*sum(cos(i*theta)); %ddcos Ak
end
A(1)=A(1)/2;

CP=-1; % -1 voor put, 1 voor call
if CP==1
    c=0;d=b;
else
    c=a;d=0;
end

co=pi/(b-a);
dma = (d-a)/(b-a)*pi;
cma= (c-a)/(b-a)*pi;
expd=exp(d);
expc=exp(c);
X = (cos(k*dma)*expd - cos(k*cma)*expc + k*co.* (sin(k*dma)*expd - sin(k*cma)*expc) )...
    ./ (1+(k*co).^2);
Y = (sin(k(2:end)*dma) - sin(k(2:end)*cma))./(co*k(2:end));
Y=[d-c, Y];
vk = 2/(b-a)*K*CP*(X-Y); %payoff functie

%———— Pricing Formula —————
value = exp(-r*T)*sum(A.*vk);

x0=log(S0/K);
cf = exp(1i * (k*co) * ((mu - 1/2 * sigma^2) * T) - 1/2 * sigma^2 * (k*co).^2 * T);
fk = real(cf.*exp(1i*k*co*(x0-a)));
fk(1)=1/2*fk(1);

figure
plot(A)
hold on
```

```

plot(fk)
legend('ddCOS Ak', 'karakteristieke vergelijking')
title('Benadering karakteristieke vergelijking ddCOS')
xlabel('n')

```

```

[C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S0,K,r,sigma,T);
err = abs(P-value);

```

Code voor een Bitcoin optie prijzen met de ddCOS methode.

```


m=164;
k= [0:m-1];

 stock gegevens
K=3000;
T=9;
r=0.03;

 bitcoin data
BTC.file = 'BCHARTS-BITSTAMPUSD.xls'; %'BITSTAMP-USD.xls'
delimiterIn = ' ';
headerlinesIn = 0;
BTC = importdata(BTC.file,delimiterIn,headerlinesIn);
closebtc = (BTC.data(:,4));
Sfinal=closebtc;

a=min(Sfinal);
b=max(Sfinal);
n=length(Sfinal);
theta = pi*((Sfinal-a)/(b-a));
gamma = log(log(n))/n;

for i = 0:(m-1)
    A(i+1) = (1/n)*(1/(1+gamma*i^2))*sum(cos(i*theta)); ddcos Ak
end
A(1)=A(1)/2;

CP=-1; -1 voor put, 1 voor call
if CP==1
    c=0;d=b;
else
    c=a;d=0;
end

co=pi/(b-a);
dma = (d-a)/(b-a)*pi;
cma= (c-a)/(b-a)*pi;
do= (b-a)/(k(2:end)*pi);
X = d*sin(k(2:end)*dma).*do-c*sin(k(2:end)*cma).*do + cos(k(2:end)*dma).*do.^2 - cos(k(2:end)*cma).*do.^2;
X= [1/2*d^2-1/2*c^2, X];
Y = (sin(k(2:end)*dma) - sin(k(2:end)*cma))./(co*k(2:end));
Y=[d-c, Y];
vk = 2/(b-a)*CP*(K*Y-X); payoff functie

 Pricing Formula 
P = exp(-r*T)*sum(A.*vk);

```

Code voor het prijzen van een Bitcoin optie met de Monte Carlo methode.

```
K=0;
for i = 1:6
    randn('state',1995)
    %%%%%%%%% Problem and method parameters %%%%%%%%%
    S=2412;K=K+500;sigma = 0.6;r=0.03;T=9;
    Dt = 1e-3;N=T/Dt;M=1e4;
    %%%%%%%%%%
    V=zeros(M,1);
    for j = 1:M
        Sfinal = S*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*randn);
        V(j) = exp(-r*T)*max(K-Sfinal,0);
    end

    aM(i) = mean(V);
    bM(i) = std(V);
    hb(i)= 1.96*bM(i)/sqrt(n);
    conf = [aM - 1.96*bM/sqrt(n), aM + 1.96*bM/sqrt(n)];
    end
    errorbar(500:500:3000,aM,hb)
    hold on

    Put = [21.182, 283.822, 546.462, 809.102, 1071.7, 1334.4]; %6maanden
    plot(500:500:3000,Put,'*')
    legend('MC','ddCOS')
    ylabel('Put prijs')
    xlabel('K')
    title('Prijzen voor put optie via MC en ddCOS')
```