BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

Het maken van een rating systeem voor zeilwedstrijden
(The making of a rating system for sailing competions)

ISA VAN DER BENT

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. F.J. van de Bult

Overige commissieleden

Dr.ir. J. Bierkens

Juni, 2021 Delft

Samenvatting voor de geïnteresseerde

Het huidige systeem om een ranglijst te maken van de beste zeilers van de wereld is ingewikkeld en niet wiskundig onderbouwd. Bovendien is het onduidelijk hoe accuraat het is. In dit verslag wordt een systeem beschreven dat een schatting maakt van hoe goed drie zeilers zijn op basis van wedstrijduitslagen. We schatten de sterkte van een zeiler met een normaal verdeling. De verwachtingswaarde is een benadering voor de echte sterkte van de zeiler en de standaardafwijking geeft aan hoe zeker we zijn over de benadering. Na een zeilwedstrijd wordt de schatting voor elke speler aangepast, in de hoop dat de verwachtingswaarde dichter bij de echte sterkte komt te liggen. Ook de standaardafwijking wordt aangepast: we worden zekerder als de zeiler met de hoogste schatting eerste wordt en onzekerder als iemand heel lang niet heeft gevaren. De formules die gebruikt worden voor het updaten van de schatting zijn gebaseerd op kansrekening en statistiek. De schattingen kunnen gebruikt worden om een ranglijst te maken van de zeilers die accurater is dan de huidige ranglijst die wordt gemaakt door de internationale zeil-organisatie. Of het systeem daadwerkelijk een accurater ranglijst produceert is onduidelijk, omdat het nog niet is getest.

Samenvatting voor de wiskundig-onderlegde

Het huidige systeem om een ranglijst te maken van de beste zeilers van de wereld is ingewikkeld en niet wiskundig onderbouwd. Hoe hoger een zeiler eindigt op een evenement (serie van zeven tot negen wedstrijden verspreid over een paar dagen), hoe meer punten hij krijgt in de ranglijst. Het is echter de vraag of dit systeem een goede afspiegeling is de daadwerkelijke sterktes van de zeilers.

In dit verslag wordt een systeem beschreven dat de sterktes van spelers schat met behulp van statistiek en kansrekening. Het systeem is gebaseerd op een systeem van de wiskundige Mark Glickman (Glickman, 1999). Hij maakte een systeem dat schattingen maakt voor de sterktes van schakers. Deze schattingen zijn normaal verdeeld met een verwachtingswaarde, de rating, die de sterkte benaderd en een standaardafwijking die aangeeft hoe zeker we zijn van de benadering. Glickman gebruikt Bayesiaanse statistiek om zijn schattingen aan te passen na een wedstrijd: de schatting na de wedstrijd is proportioneel aan de aannemelijkheid van de rating, gegeven de uitslag, maal de schatting van de sterkte vóór de uitslag. Glickman past de schatting ook aan op basis van tijd tussen wedstrijden: hoe langer iemand niet speelt, hoe onzekerder we zijn over zijn schatting. In zijn afleiding van de aanpassing van de schattingen maakt Glickman een aantal benaderingen om uiteindelijk op directe formules voor een nieuwe verwachtingswaarde en standaardafwijking te komen. In een analyse aan het eind van zijn artikel laat hij zien dat er ondanks de benaderingen nog steeds een accuraat systeem uit komt.

Het systeem van Glickman is gericht op sporten waarin duels worden gespeeld, terwijl zeilen een racesport is. We stellen daarom een nieuwe kansdichtheid op die de kans op een uitslag geeft als de sterktes van de zeilers bekend zijn. Vervolgens worden er updates van de schattingen van de sterktes afgeleid door dezelfde stappen te volgen als Glickman in zijn verslag heeft gedaan. Omdat het ingewikkeld wordt om een de updates gelijk voor N zeilers af te leiden, beperkt dit verslag zich tot een systeem voor drie zeilers.

Of het systeem voor de drie zeilers accuraat is, is onduidelijk, omdat het nog niet getest is. Intuïtief lijkt het systeem te doen wat het moet doen. Het ziet er naar uit dat het systeem uitgebreid kan worden naar meer zeilers.

1 Inleiding

Zeilen is een competitieve sport waarin veel gebeurt. Een enkele tactische beslissing kan een wedstrijd veranderen, waardoor het behoorlijk spannend kan worden. Er zijn verschillende vormen van wedstrijdzeilen, waarvan het fleetracen, een race tussen meerdere boten, de bekendste is.

Om wedstrijden eerlijk te houden, worden ze meestal gevaren tussen boten van hetzelfde type. Alle boten van hetzelfde type noemen we een klasse. In een aantal van deze klassen worden wereldkampioenschappen gevaren en worden er wereldranglijsten bijgehouden. Deze ranglijsten zijn gebaseerd op punten. Een zeiler kiest per jaar een paar evenementen uit die hij wil laten meetellen. Een zeiler krijgt meer punten als hij een groter evenement heeft gevaren en als hij hoger is geëindigd tijdens het evenement (Sailing, 2021).
Tijdens een evenement worden er meerdere races gevaren en worden de posities die een zeiler haalt als punten bij elkaar opgeteld. Een zeiler die een keer eerste wordt en een keer derde, krijgt dus vier punten. Omdat een goede zeiler door omstandigheden nog wel eens laatste kan worden, mag iedere deelnemer zijn slechtst gevaren wedstrijd wegstrepen. De zeiler met de minste punten wint het evenement (World Sailing, 2020).

Het huidige systeem waarop de ranglijsten gebaseerd zijn zou men ingewikkeld en omslachtig kunnen noemen. Bovendien is het niet wiskundig onderbouwd en is het onduidelijk hoe goed de ranglijst overeenkomt met de werkelijke sterkte van de zeilers. Daarnaast kan een slecht gevaren evenement behoorlijk wat invloed hebben op de score van een zeiler. De zeilsport zou gebaat kunnen zijn bij een nieuw systeem.

In dit verslag wordt gekeken of het mogelijk is om een accuraat en wiskundig onderbouwd rating systeem te maken voor het fleetracen binnen de Laser Radial klasse.

Het rating systeem zal gebaseerd zijn op kansrekening en statistiek. Verder is er gekozen om het systeem voor de Laser Radial klasse te maken, omdat dit een actieve wedstrijdklasse is, waarvan veel wedstrijduitslagen beschikbaar zijn. Met deze data kan het nieuwe systeem getest worden. Bovendien is het een eenpersoonsboot, waardoor er bij het maken van het systeem geen rekening gehouden hoeft te worden met meerdere bemanningsleden en wisselingen in de bemanning.

Omdat de aanduidingen "accuraat" en "wiskundig onderbouwd" subjectief zijn, volgen hieronder een aantal specifieke eisen (op willekeurige volgorde). De eisen zijn voor het gemak opgedeeld in eisen die een (internationale) watersportverbond zou kunnen stellen en wiskundige eisen.

Eisen vanuit een watersportverbond

1. De rating van een zeiler moet, tot op zekere hoogte, overeenkomen met hoe goed de zeiler is.
2. Een zeiler die tijdens een wedstrijd beter eindigde dan alle zeilers met een lager rating gaat omhoog.
3. De geüpdatete rating van een zeiler die derde wordt is hoger dan wanneer die vierde was geworden.
4. Eén slechte uitslag van een goede zeiler mag er niet voor zorgen dat de rating van de zeiler sterk daalt.
5. Het rating systeem moet transparant zijn en enigszins te begrijpen voor iemand die zich in de wiskunde wil verdiepen.
6. Het model moet aan te passen zijn naar hoe de huidige puntentelling gaat:
   (a) De slechtste score die een zeiler tijdens een evenement vaart wordt weggestreept.
   (b) Zeilers kiezen welke evenementen ze mee laten tellen in hun rating.
   (c) Sommige evenementen hebben meer gewicht dan anderen.

De eerste eis kan getest worden door het systeem te testen op data van gevaren wedstrijden. De ranglijst die daaruit komt kan vergeleken worden met de werkelijke ranglijst. De vierde eis is omdat zeilen een onvoorspelbare sport is. Uitslagen fluctueren sterk en één slecht evenement van een goede zeiler zou de rating niet moeten doen kelderen. Eis zes is niet een noodzakelijke eis. Het zou mooi zijn als het kan, omdat het rating systeem dan meer overeenkomt met de huidige puntentelling. Een eventuele overgang tussen de systemen wordt zo kleiner.

Wiskundige eisen

1. Als de ratings van alle zeilers voor een wedstrijd gelijk zijn, dan is de kans op elke mogelijke uitslag gelijk aan $\frac{1}{N!}$, waarbij N het aantal zeilers is dat meedoet aan de wedstrijd.
2. Som van de kansen op alle mogelijke uitslagen moet, bij benadering, gelijk zijn aan 1.

Deze eisen zullen verderop in de tekst meer context krijgen. De eerste eis zorgt ervoor dat de kans zich gedraagt zoals we dat intuïtief verwachten. De tweede eis dat de kans logisch is binnen de kansrekening. In hoofdstuk 2 staat hoe de data is verzameld waarmee het rating systeem getest kan worden.

Het systeem dat we in dit verslag gaan afleiden is gebaseerd op een systeem wat de wiskundige Mark Glickman heeft bedacht voor het schaken. In hoofdstuk 3 zal een samenvatting gegeven worden van het artikel dat hij over zijn systeem geschreven heeft.
In hoofdstuk 4 wordt vervolgens een model opgesteld dat de uitslag van een wedstrijd voorspelt op basis van de sterktes van de deelnemers. Vervolgens wordt een update van de ratings van de zeilers afgeleid, waarbij het artikel van Glickman als inspiratie dient.

Tot slot worden in hoofdstuk 5 conclusies getrokken over het nieuwe systeem en worden in hoofdstuk 6 een aantal discussiepunten besproken.

2 Het maken van een geschikte dataset

De data die gebruikt kan worden om het systeem te testen bestaat uit de uitslagen van de World Cup Series van de Laser Radial klasse voor vrouwen. Dit is een van de klassen waarin gevaren wordt op de Olympische Spelen, waardoor het een goed gedocumenteerde klasse is. Voor alle evenementen van 2011 tot 2020 zijn de algehele resultaten genomen. Het voordeel daarvan is dat de slechtste wedstrijd van elke zeiler al is weggestreept. Zo voldoet het systeem automatisch al aan van de eisen uit de inleiding. Als datum van een evenement is de laatste dag van het evenement toegevoegd aan de data.

Er was één geval waarbij twee deelnemers van het evenement dezelfde score hadden en daardoor dezelfde positie in de uitslag. Dat is niet erg handig, dus heb ik een muntje opgegooid om te bepalen welk van de twee een positie lager terecht zou komen.
Vervolgens is er gecheckt of er geen deelnemers onder twee verschillende namen of twee verschillende landcodes in de dataset stonden.
Ik heb ervoor gekozen om de laatste dag van een evenement als datum bij de uitslag te gebruiken. Dat is niet helemaal accuraat, aangezien de laatste race niet altijd op de laatste dag wordt gevaren. De datum van de laatste race was echter voor sommige evenementen, zeker voor de oudere evenementen, niet goed te achterhalen. De laatste dag van het hele evenement is in dit geval dichtbij genoeg, zeker aangezien er vaak minstens een maand tussen evenementen zit.
Het is ook handig om te checken of de data van de evenementen niet overlappen. Dat is in deze dataset niet het geval.
De dataset kan opgevraagd worden bij de schrijver van dit verslag.

3 Het rating systeem van Glickman

Vrijwel alle sporten maken gebruik van een rating systeem om te bepalen wie er na een periode van een aantal wedstrijden de beste is. Voor de meeste sporten komt dat neer op een puntensysteem zoals het huidige systeem voor het zeilen: de winnaar krijgt de meeste punten en de verliezer de minste. In de praktijk werken dit soort systemen goed genoeg om bijvoorbeeld gelijkwaardige teams of sporters bij elkaar in een poule te zetten. Het is echter de vraag of dit soort systemen een goede indicatie van de (onbekende) werkelijke sterkte van een sporter of een team kunnen geven.

In 1959 bedacht natuur- en wiskundige Arpad Elo een rating systeem voor het schaken dat erop gericht was om de werkelijke sterkte van een schaker zo goed mogelijk te benaderen (Elo, 1978). Zijn systeem is gebaseerd op het idee dat we de werkelijke sterkte van een schaker kunnen benaderen met een normaal verdeling rond een bepaalde rating met een bepaalde standaardafwijking. De standaardafwijking geeft aan hoe zeker we er van zijn dat de rating overeenkomt met de werkelijke sterkte. Na een wedstrijd wordt de rating aangepast op basis van de uitslag en de verwachting van de uitslag vooraf.

Er zijn een heleboel mensen die met het idee van Elo aan de slag zijn gegaan. Zo zijn er meerdere sportbonden, zoals de internationale schaakfederatie (de FIDE), die het systeem adopteerden om het niveau van hun schakers bij te houden. Ook zijn er veel wiskundigen die op het systeem hebben doorgeborduurd. Eén daarvan is de in de inleiding genoemde Mark Glickman.

In zijn artikel gebruikt Glickman het idee van Elo om de werkelijke sterkte van een schaker te benaderen met een normaal verdeling (Glickman, 1999). Het updaten van deze benadering doet hij alleen net anders. Ten eerste voert Glickman zijn update uit over meerdere wedstrijden tegelijk, bijvoorbeeld alle wedstrijden gedurende een periode van twee maanden. Ten tweede past hij de standaardafwijking niet alleen aan op basis van de wedstrijduitslagen, maar ook op basis van verstreken tijd tussen evenementen. Als een schaker veel wedstrijden speelt, kunnen we zijn sterkte steeds beter benaderen en gaat de onzekerheid over deze benadering, de standaardafwijking, omlaag. Als een schaker echter langere tijd geen wedstrijden speelt, kunnen we steeds minder zeker zijn over zijn werkelijke sterkte. In de tijd dat hij niet speelt zou hij immers heel veel kunnen trainen en beter worden of juist kunnen stoppen met schaken en slechter worden. Tot slot gebruikt Glickman de ideeën van Bayesiaanse statistiek als basis voor zijn update van een rating.

De Bayesiaanse en Frequentistische methodes zijn twee stromingen binnen de statistiek. Een Bayesiaan en Frequetist kijken op een fundamenteel andere manier naar statistiek. In dit verslag zal ik alleen ingaan op de aspecten van de Bayesiaanse methode die hier van belang zijn. Mocht de lezer verder geïnteresseerd zijn in Bayesiaanse statistiek en het verschil met Frequentistische statistiek, dan kan ik een inleidend hoofdstuk aanraden wat Glickman samen met David van Dyk heeft geschreven (Glickman & Van Dyk, 2007).

Binnen de Bayesiaanse statistiek kiest men eerst een verdelingsfunctie die de kans op een bepaalde uitkomst geeft als een zekere parameter bekend is. Het is echter de parameter die we niet kennen en die we willen vinden. Om dit te doen stellen we eerst een a priori-verdeling (verkort: de prior) van de parameter op. De prior is een "educated guess", omdat we niet precies weten wat de parameter is, maar wel ongeveer een idee hebben. Vervolgens gebruiken we de stelling van Bayes om een posterior, ofwel een betere verdeling van de parameter, te vinden:

Stelling 3.1.

$$posterior \propto likelihood \cdot prior$$

De stelling zegt dat de posterior proportioneel is aan de likelihood maal de prior. De likelihood geeft de aannemelijkheid van een zekere parameter aan, gegeven een aantal geobserveerde uitkomsten. De likelihood wordt geconstrueerd uit de verdelingsfunctie voor de kans op een bepaalde uitkomst door het product van de kansen op op de geobserveerde uitslagen te nemen.

De parameter die Glickman dus wil benaderen is de sterkte van een schaker. Met behulp van de stelling van Bayes zet hij een benadering van de sterkte vóór een periode van wedstrijden om in een geüpdatete

benadering ná de periode. De gevonden posterior is de prior voor de volgende reeks wedstrijden.
Naast een prior heeft Glickman een verdelingsfunctie voor de kans op een bepaalde wedstrijd-uitslag, gegeven de werkelijke sterktes van de schakers, nodig om een likelihood mee te contrueren. Hij gebruikt voor zijn model voor de kans op een uitslag een logistische kansdichtheid:

$$P(i \text{ wint}) = \frac{e^{\frac{log(10)}{400}\cdot(\theta_i-\theta_j)}}{1+e^{\frac{log(10)}{400}\cdot(\theta_i-\theta_j)}} = \frac{10^{(\theta_i-\theta_j)/400}}{1+10^{(\theta_i-\theta_j)/400}}.$$

De factor $\frac{log(10)}{400}$ in de exponent van e is zo gekozen dat de ratings van de schakers tussen de 0 en 3000 uitkomen. Dit is de schaal die de FIDE aanhoudt. Verder zien we in deze functie dat de kans precies $\frac{1}{2}$ is als de sterktes gelijk zijn. Als de sterkte van schaker i hoger is dan die van j, dan is de kans dat i wint hoger. De kans dat j wint is gelijk aan $1-P$.

Laten we nu kijken naar een benadering van een bepaalde schaker. Zijn werkelijke sterkte noemen we θ en we nemen de prior voor de benadering van θ als volgt:

$$\theta \sim N(\mu, \sigma^2).$$

De tegenstanders van onze schaker hebben werkelijke sterktes $\theta_1, ..., \theta_m$, waarbij θ_j normaal verdeeld is rondom μ_j met standaardafwijking σ_j^2. De set met uitslagen van de gespeelde wedstrijden noemen we $\mathbf{s}$ met elementen s_j voor de wedstrijd tegen de j-de tegenstander. Als onze schaker de wedstrijd wint is s_j gelijk aan 1, bij verlies gelijk aan 0 en bij gelijkspel gelijk aan 0.5. De likelihood van de sterktes van de schakers gegeven de uitslagen van de wedstrijden wordt dan:

$$L(\theta,\ \theta_1,\ ...,\ \theta_m \mid \mathbf{s}) = \prod_j \frac{(10^{(\theta-\theta_j)/400})^{s_j}}{1+10^{(\theta-\theta_j)/400}}.$$

Gecombineerd met de prior verdeling van alle schakers tegelijk krijgen we de volgende posterior van alle schakers tegelijk, waarin ϕ de normale dichtheidsfunctie is:

$$\begin{aligned} &f(\theta \mid \theta_1, \dots,\ \theta_m,\ \mathbf{s}) f(\theta_1 \mid \theta, \dots,\ \theta_m,\ \mathbf{s}) \dots f(\theta_m \mid \theta_1, \dots,\ \theta_{m-1},\ \mathbf{s}) \\ &\qquad \propto \phi(\theta \mid \mu, \sigma^2)\phi(\theta_1 \mid \mu_1, \sigma_1^2) \dots \phi(\theta_m \mid \mu_m, \sigma_m^2) \prod_j \frac{(10^{(\theta-\theta_j)/400})^{s_j}}{1+10^{(\theta-\theta_j)/400}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Uiteindelijk willen we de posterior van alle schakers apart kunnen bepalen. Om de posterior van de schaker met sterkte θ onafhankelijk te maken van de sterktes van de anderen, neemt Glickman de marginale posterior. Hiervoor integreert hij (1) over de ratings van de tegenstanders.

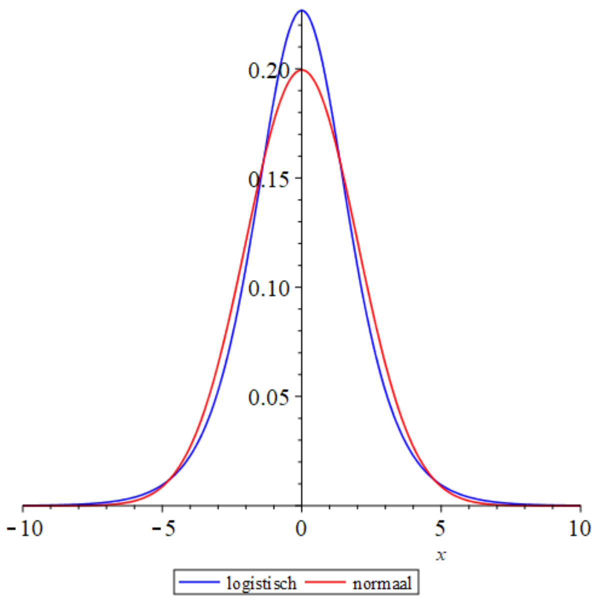
$$f(\theta|\mathbf{s}) \propto \int \dots \int \phi(\theta|\mu,\sigma^2)\ \phi(\theta|\mu,\sigma^2)\ \phi(\theta_1|\mu_1,\sigma_1^2) \dots \phi(\theta_m|\mu_m,\sigma_m^2)\ L(\theta,\ \theta_1,\ ...,\ \theta_m|\mathbf{s})\ d\theta_1 \dots d\theta_m \tag{2}$$

Bij een volledige Bayesiaanse analyse wordt deze posterior voor alle schakers tegelijk bepaalt, wat een behoorlijke klus is, zeker als er veel schakers zijn. Daarnaast hebben we vaak te maken met een groot aantal wedstrijden per jaar, waardoor de update regelmatig uitgevoerd moet worden.
Zoveel werk per update lijkt Glickman niet wenselijk, dus hij leidt in de rest van zijn artikel een directe manier af om de posterior te vinden met de priors van de schaker en zijn tegenstanders. Hiervoor doet hij wel een aantal benaderingen, waarbij er wat informatie verloren gaat en de posterior minder nauwkeurig is dan die had kunnen zijn. Uit de nauwkeurigheidsanalyse die hij in het artikel uitvoert blijkt zijn methode in de praktijk nauwkeurig genoeg.

De eerste benadering die Glickman doet is om in (2) de priors van de andere schakers te gebruiken in plaats van de posteriors. Vervolgens schrijft hij (2) om naar

$$\begin{aligned} f(\theta \mid \mathbf{s}) &\propto \phi(\theta \mid \mu, \sigma^2) \int \dots \int L(\theta,\ \theta_1,\ ...,\ \theta_m \mid \mathbf{s})\ \phi(\theta_1 \mid \mu_1, \sigma_1^2)\ \dots\ \phi(\theta_m \mid \mu_m, \sigma_m^2)\ d\theta_1 \dots d\theta_m \\ &= \phi(\theta \mid \mu, \sigma^2) \prod_j \int \frac{(10^{(\theta-\theta_j)/400})^{s_j}}{1+10^{(\theta-\theta_j)/400}} \phi(\theta_j \mid \mu_j, \sigma_j^2)\ d\theta_j \end{aligned} \tag{3}$$

(3) staat nu in de vorm van prior maal likelihood. De eerste term in die integraal, is een logistische cumulatieve verdelingsfunctie, kortweg een logistische functie. Deze kan benadert worden met een normale cumulatieve verdelingsfunctie met dezelfde verwachtingswaarde en standaardafwijking. Dit kan omdat de logistische verdeling en normale verdeling bijna gelijk zijn. De cumulatieve verdelingsfuncties zijn daardoor ook nagenoeg gelijk. In figuur 1 is goed te zien dat de verdelingen sterk op elkaar lijken.



Figuur 1: De dichtheidsfuncties van een logistische en een normale verdeling met verwachtingswaarde 0 en standaardafwijking 2

In het geval dat $s_j = 1$ wordt de integraal wordt als volgt benaderd, waarin α^2 de standaardafwijking van de logistische functie is:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(10^{(\theta-\theta_j)/400})}{1+10^{(\theta-\theta_j)/400}} \phi(\theta_j \mid \mu_j, \sigma_j^2)\, d\theta_j \\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{-(t+\theta_j-\theta)^2}{2\alpha^2}})}{\alpha\sqrt{2\pi}}\, dt\, \frac{e^{\frac{-(\theta_j-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}})}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\, d\theta_j && (4) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{-(t+\theta_j-\theta)^2}{2\alpha^2}})}{\alpha\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{-(\theta_j-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}})}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\, dt\, d\theta_j \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(t+\theta_j-\theta)^2}{2\alpha^2}})}{\alpha\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{-(\theta_j-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}})}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\, d\theta_j\, dt && (5)
\end{aligned}
$$

Het omkeren van de integratievolgorde zorgt ervoor dat we de volgende gelijkheid mogen gebruiken:

Lemma 3.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

In (5) wordt het kwadraat van θ_j afgesplitst in de exponent van e. Het kwadraat wordt vervangen door een factor met behulp van lemma 3.2. Wat er overblijft is een integraal die gelijk is aan de cumulatieve verdelingsfunctie van een normale verdeling. Dit betekent dat de integraal benaderd kan worden met een logistische functie. Op dezelfde manier kunnen we de integraal voor $s_j = 0$ en $s_j = 0.5$ benaderen. Zo verkrijgt Glickman de volgende benadering voor de likelihood:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(10^{(\theta-\theta_j)/400})^{s_j}}{1+10^{(\theta-\theta_j)/400}} \phi(\theta_j \mid \mu_j, \sigma_j^2)\, d\theta_j \approx \frac{(10^{g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400})^{s_j}}{1+10^{g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400}}$$

waarin

$$g(\sigma_j^2) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{log(10)}{400})^2 \frac{3\sigma_j^2}{\pi^2}}}$$

Het doel is nu om de prior maal de benadering van de likelihood te benaderen met een normale verdeling. Daarvoor gaat Glickman eerst op zoek naar een waarde van θ waarvoor het product van prior en likelihood maximaal is. Dit wordt de verwachtingswaarde van de posterior, μ_n. Om die μ_n te vinden neemt Glickman eerst het logaritme van de likelihood maal prior om de afleiding te versimpelen.

$$log(L(\theta \mid \mathbf{s})\phi(\theta \mid \mu, \sigma^2)) = \sum_j (\frac{log(10)}{400} g(\sigma_j^2) s_j (\theta - \mu_j) - log(1 + 10^{g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400})) - \frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2} - log(\sigma\sqrt{2\pi}) \tag{6}$$

Om het maximum te vinden differentieert hij (6) naar θ en stelt deze gelijk aan 0.

$$\frac{\partial(log(L(\theta \mid \mathbf{s})\phi(\theta \mid \mu, \sigma^2)))}{\partial\theta} = \frac{log(10)}{400} \sum_j g(\sigma_j^2)(s_j - \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400}}) - \frac{(\theta-\mu)}{\sigma^2}.$$

Het oplossen van deze vergelijking doet Glickman met een enkele stap van de Newton-Raphson methode. Die stelt:

Lemma 3.3. *De oplossing p van functie $f(p) = 0$ kan als volgt benaderd worden:*

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}.$$

Voor p_0 dicht genoeg bij p convergeert de rij p_n.

Voor de verwachtingswaarde van de posterior, μ_n, krijgen we dus:

$$\mu_n = \mu - \frac{\left.\frac{\partial(log(L(\theta \mid \mathbf{s})\phi(\theta \mid \mu,\sigma^2)))}{\partial\theta}\right|_{\theta=\mu}}{\left.\frac{\partial^2(log(L(\theta \mid \mathbf{s})\phi(\theta \mid \mu,\sigma^2))}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\mu}}$$

Hierin hebben we ook de tweede afgeleide van (6) nodig:

$$\frac{\partial^2(log(L(\theta \mid \mathbf{s})\phi(\theta \mid \mu, \sigma^2)))}{\partial\theta^2} = -(\frac{log(10)}{400})^2 \sum_j g(\sigma_j^2)^2 \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400}}(1 - \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400}}) - \frac{1}{\sigma^2}.$$

Bij een normaal verdeling is de tweede afgeleide van de logaritme van de dichtheidsfunctie gelijk aan de negatieve omgekeerde van de standaardafwijking. Omdat de tweede afgeleide in dit geval vrijwel constant is, kunnen we standaardafwijking van de normaal verdeelde posterior gelijk nemen aan de tweede afgeleide met μ, de rating van de prior, gesubstitueerd voor θ.

We krijgen nu voor update op basis van de wedstrijd de volgende benadering van θ en nieuwe standaardafwijking:

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \mu + \sigma_n^2 \cdot \frac{log(10)}{400} \sum_j g(\sigma_j^2)(s_j - \frac{1}{1 + 10^{-g(\sigma_j^2)(\theta - \theta_j)/400}}), \\
\sigma_n &= \frac{1}{(\frac{log(10)}{400})^2 \sum_j g(\sigma_j^2)^2 \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400}}(1 - \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_j^2)(\theta-\theta_j)/400}}) - \frac{1}{\sigma^2}}, \\
g(\sigma_j^2) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{log(10)}{400})^2 \frac{3\sigma_j^2}{\pi^2}}}
\end{aligned}$$

Tot slot voegt Glickman de invloed van verstreken tijd tussen de wedstrijden toe aan de posterior. Hij telt daarvoor de factor $\nu^2 t$ op bij de standaardafwijking. Hierin is t de tijd tussen de zojuist uitgevoerde update en die daarvoor. De waarde van ν^2 volgt uit een data-analyse die Glickman uitvoert. De nieuwe benadering van de sterkte van de schaker, na een periode van wedstrijden en na verloop van tijd, is:

$$\theta \sim N(\mu_n, \sigma_n^2 + \nu^2 t)$$

4 Een rating systeem voor een zeilrace

Voor het rating systeem gebruik ik het idee van Elo en Glickman om de sterkte van een zeiler te schatten met een normale verdeling. De verwachtingswaarde, μ, van deze verdeling nemen we als de huidige rating van de zeiler en de standaardafwijking, σ^2, geeft de onzekerheid van deze rating aan, net als bij Glickman. De verwachtingswaarde en standaardafwijking worden na elke gevaren wedstrijd aangepast op basis van de uitkomst van de wedstrijd en de verstreken tijd. De nieuwe verdeling die de sterkte van de zeiler benadert met de geüpdatete μ en σ^2 noemen we de posterior.

Om een rating systeem te maken hebben we eerst een functie nodig die de kans op een zekere uitslag bepaalt op basis van de scores van de zeilers. Hiermee kunnen we, samen met de benadering van de sterktes van de zeilers voor de wedstrijd, de priors, gaan afleiden hoe μ en σ^2 veranderen na een wedstrijd. Voor de kans dat zeiler 1 eerste wordt, zeiler 2 tweede, zeiler 3 derde enzovoort gebruiken we de volgende formule, waarin r_i de score van zeiler i is, x een variabele die bepaalt binnen welk bereik de ratings vallen en N het aantal deelnemers aan de wedstrijd:

$$P = \frac{1-e^{-x(r_1-\frac{r_1+r_2+\ldots+r_n}{N})}}{1-e^{-Nx(r_1-\frac{r_1+r_2+\ldots+r_N}{N})}} \cdot \frac{1-e^{-x(r_2-\frac{r_2+r_3+\ldots+r_N}{N-1})}}{1-e^{-(N-1)x(r_2-\frac{r_2+r_3+\ldots+r_N}{N-1})}} \cdot \ldots \cdot \frac{1-e^{-x(r_{N-1}-\frac{r_{N-1}+r_N}{2})}}{1-e^{-2x(r_{N-1}-\frac{r_{N-1}+r_N}{2})}} \tag{7}$$

De inspiratie voor deze functie komt uit het artikel van Glickman. De functie is afgeleid van een logistische dichtheidsfunctie, maar zo aangepast dat de kans op elke uitslag $\frac{1}{N!}$ is bij gelijke ratings van alle deelnemers. Intuïtief lijkt de functie te kloppen, bijvoorbeeld als we stellen dat zeiler 1 een veel hogere rating heeft dan de rest. Dan wordt de kans op een wedstrijd waarin zeiler 1 eerste wordt bijna gelijk aan 1, wat precies is wat we verwachten.

Met deze functie kan de aannemelijkheid (likelihood) van een bepaalde uitslag bepaald worden. Zoals gezien in stelling 3.1 is de aannemelijkheid vermenigvuldigt met de prior proportioneel aan de posterior benadering voor de sterkte van de zeiler.

Het wordt vrij ingewikkeld om voor N deelnemers de update van μ en σ^2 na een wedstrijd af te leiden. Daarom zullen we eerst voor een wedstrijd met drie deelnemers bepalen hoe de verdeling van de sterkte verandert. De afleiding kan daarna uitgebreid worden naar vier deelnemers en vervolgens naar N deelnemers.

4.1 Afleiding van de update bij drie deelnemers

We gaan kijken naar een wedstrijd tussen drie zeilers, A, B en C. De sterktes van deze zeilers, respectievelijk a, b en c, kunnen we benaderen met de volgende verdelingen:

$$\begin{aligned} a &\sim N(\mu_a, \sigma_a^2) \\ b &\sim N(\mu_b, \sigma_b^2) \\ c &\sim N(\mu_c, \sigma_c^2) \end{aligned}$$

Als we (7) omschrijven voor drie personen, dan is de kans dat A eerste, B tweede en C derde wordt als volgt:

$$P = \frac{1-e^{-x(a-\frac{a+b+c}{3})}}{1-e^{-3x(a-\frac{a+b+c}{3})}} \cdot \frac{1-e^{-x(b-\frac{b+c}{2})}}{1-e^{-2x(b-\frac{b+c}{2})}}$$

Hierin zijn a, b en c de werkelijke sterktes van A, B en C.

De som van de kans op de zes mogelijke uitslagen bij drie zeilers is niet gelijk aan 1 voor de meeste waardes van a, b en c. Het model voldoet daarom niet aan een van de eisen in 1. In de discussie zal ik dit verder bespreken.

4.1.1 Afleiding van een posterior voor A

Om de posterior van a te bepalen hebben we dus eerst een marginale likelihood van de uitslag nodig: hoe aannemelijk is de score a, gegeven de uitslag? In formule-vorm kunnen we de marginale likelihood zo opschrijven:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(uitslag|a,b,c)\ \phi(b|\mu_b,\sigma_b^2)\ \phi(c|\mu_c,\sigma_c^2)\ db\ dc$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-x(a-\frac{a+b+c}{3})}}{1-e^{-3x(a-\frac{a+b+c}{3})}} \cdot \frac{1-e^{-x(b-\frac{b+c}{2})}}{1-e^{-2x(b-\frac{b+c}{2})}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2}}{\sigma_b\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{c-\mu_c}{\sigma_c})^2}}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}\ db\ dc \tag{8}$$

De eerste twee termen in de integraal in (8) kunnen we zo schrijven dat de teller 1 is. Dit doen we, omdat deze termen dan meer lijken op een logistische functie, wat we later nodig zullen hebben. De integraal wordt dan:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-x(a-\frac{a+b+c}{3})}+e^{-2x(a-\frac{a+b+c}{3})}} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x(b-\frac{b+c}{2})}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2}}{\sigma_b\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{c-\mu_c}{\sigma_c})^2}}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}\ db\ dc$$

Het exact oplossen van deze integraal is ingewikkeld vanwege alle machten van e en de breuken, dus gaan we benaderingen doen. Nu de eerste twee termen in de integraal lijken op logistische functies, kunnen we ze gaan benaderen met normale cumulatieve verdelingsfuncties met dezelfde verwachtingswaarde en standaardafwijking, zoals Glickman dat doet in (4). We moeten hiervoor wel eerst μ en σ^2 van de logistische functie met a (vanaf nu μ_1 en σ_1^2) en de logistische functie met b (μ_2 en σ_2^2) bepalen. Dit doen we door gebruik te maken van het volgende lemma:

Lemma 4.1. *Laat $p(x)$ de dichtheidsfunctie van een bepaalde stochastische variabele zijn. Dan geldt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)dx = \mu$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x)dx = \mu^2+\sigma^2$$

De eerste twee termen in (8) zijn verdelingsfuncties. Door ze te differentiëren naar respectievelijk a en b krijgen we dichtheidsfuncties. Nu kunnen we gebruik maken van lemma 4.1. De integratie zou uitgevoerd kunnen worden door gebruik te maken van complexe functie theorie. In appendix B staat beschreven hoe dit in zijn werk gaat. De integratie kan ook met behulp van Maple uitgevoerd worden, wat ik in dit geval heb gedaan. Voor de berekeningen, zie appendix A.1. Dit leidt tot de volgende waardes:

$$\mu_1 = \frac{b+c}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6x}, \qquad \sigma_1^2 = \frac{5\pi^2}{12x^2}$$
$$\mu_2 = c, \qquad \sigma_2^2 = \frac{4\pi^2}{3x^2}$$

Als we nu de twee termen benaderen, krijgen we:

$$\frac{1}{1+e^{-x(a-\frac{a+b+c}{3})}+e^{-2x(a-\frac{a+b+c}{3})}} \approx \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{(t_1-\frac{b+c}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6x})^2\cdot\frac{12x^2}{2\cdot5\pi^2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{5\pi^2}{12x^2}}}dt_1$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(t_1+a-\frac{b+c}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6x})^2\cdot\frac{12x^2}{10\pi^2}}}{\sqrt{\frac{10\pi^3}{12x^2}}}dt_1$$

$$\frac{1}{1+e^{-x(b-\frac{b+c}{2})}} \approx \int_{-\infty}^{b} \frac{e^{(t_2-c)^2\cdot\frac{3x^2}{2\cdot4\pi^2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{4\pi^2}{3x^2}}}dt_2$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(t_2+b-c)^2\cdot\frac{3x^2}{8\pi^2}}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{3x^2}}}dt_2$$

Als we de benaderingen substitueren in (8) krijgen we de volgende integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(t_1+a-\frac{b+c}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6x})^2\cdot\frac{12x^2}{10\pi^2}}}{\sqrt{\frac{10\pi^3}{12x^2}}}\cdot\frac{e^{(t_2+b-c)^2\cdot\frac{3x^2}{8\pi^2}}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{3x^2}}}dt_1\,dt_2\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2}}{\sigma_b\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{c-\mu_c}{\sigma_c})^2}}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}db\,dc \tag{9}$$

Omdat de laatste twee termen van (9) geen t_1 of t_2 bevat, mogen we dt_1 en dt_2 achter die termen plaatsen. Daarnaast mogen we ook de integratie volgorde omwisselen. Dit resulteert in de onderstaande integraal:

$$\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(t_1+a-\frac{b+c}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6x})^2\cdot\frac{12x^2}{10\pi^2}}}{\sqrt{\frac{10\pi^3}{12x^2}}}\cdot\frac{e^{(t_2+b-c)^2\cdot\frac{3x^2}{8\pi^2}}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{3x^2}}}\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2}}{\sigma_b\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{c-\mu_c}{\sigma_c})^2}}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}db\,dc\,dt_1\,dt_2 \tag{10}$$

Nu kunnen we gebruik gaan maken van lemma 3.2 om (10) op te lossen.

Lemma 4.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

We splitsen daarvoor de kwadraten van b en c af in de exponent van e. We houden zo een dubbele integraal over t_1 en t_2 over van een van een functie waar alleen a, t_1 en t_2 nog in voor komen als onbekenden.

$$factor\cdot\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} e^{f(a,t_1,t_2)}dt_1\,dt_2 \tag{11}$$

De factor voor de integraal staat bevat onder andere de factoren ontstaan door het oplossen van de integralen over b en c. We kunnen de factor echter negeren, omdat de posterior proportioneel is aan de likelihood maal de prior. De exponent van e die we overhouden in de integraal, aangegeven met $f(a,t_1,t_2)$, is behoorlijk groot en kan daarom teruggevonden worden in vergelijking 8 van appendix A.2. De integraal in (11) gaan we splitsen in een product van twee integralen door naar de marginale verdelingen van t_1 en t_2 van de uitdrukking in de integraal te kijken. De marginale verdeling van t_1 vinden we door $e^{f(a)}$ over het hele domein van t_2 te integreren. Hetzelfde doen we voor t_2. In appendix A.2 is te vinden hoe dit in Maple gedaan kan worden. We kunnen nu de integraal in (11) benaderen als een product van een integraal van de marginale verdeling van t_1 over t_1 en een integraal van de marginale verdeling van t_2 over t_2. Dit is een benadering, omdat er een correlatie tussen de t_1 en t_2 kan zitten. We gaan er echter vanuit dat de correlatie te verwaarlozen is. We krijgen het volgende product:

$$factor\cdot\int_{-\infty}^{0} e^{-(t_1+a-\frac{1}{2}\mu_b-\frac{1}{2}\mu_c-\frac{\pi}{2x\sqrt{3}})^2\cdot\frac{12x^2}{6x^2\sigma_b^2+6x^2\sigma_c^2+10\pi^2}}\,dt_1\int_{-\infty}^{0} e^{-(t_2+\mu_b-\mu_c)^2\cdot\frac{3x^2}{6x^2\sigma_b^2+6x^2\sigma_c^2+8\pi^2}}\,dt_2. \tag{12}$$

Ook hier is de factor voor de integralen niet erg belangrijk, omdat de posterior uiteindelijk proportioneel is met het product van de likelihood en de prior. De tweede integraal in (12) is alleen afhankelijk van t_2 en niet meer van a. De tweede integraal is daardoor een constante en kan bij de factor getrokken worden. De eerste integraal in (12) is en een cumulatieve verdelingsfunctie van een normale verdeling en kunnen we benaderen met een logistische functie:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(t_1+a-\frac{1}{2}\mu_b-\frac{1}{2}\mu_c-\frac{\pi}{2x\sqrt{3}})^2\cdot\frac{12x^2}{6x^2\sigma_b^2+6x^2\sigma_c^2+10\pi^2}}\,dt_1 \approx \frac{1}{1+e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}},$$

waarin

$$g = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3x^2}{5pi^2}(\sigma_b^2+\sigma_c^2)}}$$

Nu we de marginale likelihood benaderd hebben met een logistische functie, kunnen we met stelling 3.1 de posterior gaan bepalen. We hebben volgende proportionaliteit afgeleid:

$$posterior = \phi(a\mid\mu_{a,n},\sigma_{a,n}^2) \propto \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(a-\mu_a)^2}{\sigma_a^2}}\cdot\frac{1}{1+e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}} \tag{13}$$

Uiteindelijk willen we dat de posterior normaal verdeeld is. Daarom gaan we de rechterzijde van (13) benaderen met een normale verdeling. Daarbij gebruiken we dezelfde methode als Glickman om $mu_{a,n}$ en $\sigma^2_{a,n}$, de nieuwe rating en standaardafwijking, uit te drukken in bekende variabelen.
Eerst nemen we de logaritme van de rechterzijde van (13):

$$j(a) = -log(1 + e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}) - \frac{1}{2}\frac{(a-\mu_a)^2}{\sigma_a^2} - log(\sigma_a\sqrt{2\pi})$$

We willen a vinden waarvoor $j(a)$ maximaal is, dus nemen we de afgeleide van $j(a)$ en stellen die gelijk aan 0.

$$j'(a) = \frac{\partial j(a)}{\partial a} = \frac{2gxe^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})} + 4gxe^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}}{3(1+e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})})} - \frac{a-\mu_a}{\sigma_a^2} = 0.$$

Dit zou exact opgelost kunnen worden, maar aangezien we in de rest van de afleiding al veel benaderingen hebben gedaan, lijkt dat hier onnodig precies. Daarnaast gaan we ervan uit dat $\mu_{a,n}$ niet ver van μ_a ligt. Daarom gaan we de oplossing benaderen met een enkele stap van de Newton-Raphson methode:
In ons geval is de functie die we gelijk aan 0 stellen $j'(a)$ en dus hebben we voor de benadering van a ook de tweede afgeleide van $j(a)$ nodig.

$$j''(a) = \frac{\partial^2 j(a)}{\partial a^2} = -\frac{4x^2g^2e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})}(1+4e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})})}{9(1+e^{-gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2gx(a-\frac{a+\mu_b+\mu_c}{3})})^2} - \frac{1}{\sigma_a^2}$$

Dan krijgen we dus voor de benadering van a:

$$\begin{aligned} a \approx \mu_{a,n} &= \mu_a - \frac{j'(\mu_a)}{j''(\mu_a)} \\ &= \mu_a - \frac{\frac{2gxe^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+4gxe^{-2gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}}{3(1+e^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})} - \frac{\mu_a-\mu_a}{\sigma_a^2}}{-\frac{4x^2g^2e^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}(1+4e^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})}{9(1+e^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})^2} - \frac{1}{\sigma_a^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

(15)

Voor de variantie van de posterior, $\sigma^2_{a,n}$, gebruiken we dat de variantie van een normale verdeling gelijk is aan de negatieve omgekeerde van de tweede afgeleide van de logaritme van de dichtheidsfunctie. Die tweede afgeleide, $j''(a)$ hangt af van a, maar om hem constant te maken benaderen we $\sigma^2_{a,n}$ door a te vervangen door μ_a. Dan krijgen we

$$\sigma^2_{a,n} = -\frac{1}{j''(\mu_a)}.$$

We kunnen nu ook (14) iets eenvoudiger opschrijven:

$$\mu_{a,n} = \mu_a + \sigma^2_{a,n} \cdot (\frac{2gxe^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + 4gxe^{-2gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}}{3(1+e^{-gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2gx(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})})$$

We hebben nu de invloed van een gevaren evenement op de rating afgeleid. Verder zouden we ook nog de invloed van verstreken tijd tussen evenementen mee willen nemen in de posterior. We doen dit door, net als Glickman, na elke wedstrijd een bepaalde factor, ν^2, maal de verstreken tijd op te tellen bij de standaardafwijking. De waarde van ν^2 volgt uit een analyse van data van evenementen door de jaren heen. Als we voor nu ν^2 laten staan wordt de posterior, de nieuwe benadering van a, met t de verstreken tijd:

$$a \sim N(\mu_{a,n}, \sigma^2_{a,n} + \nu^2 t)$$

4.1.2 Afleiding van posteriors voor b en c

De afleiding van posteriors voor een benadering van b en c gaat op vrijwel dezelfde manier als bij a. De marginale likelihood voor b wordt echter

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(uitslag|a,b,c)\ \phi(a|\mu_a,\sigma_a^2)\ \phi(c|\mu_c,\sigma_c^2)\ da\ dc$$

en de marginale likelihood voor c wordt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(uitslag|a,b,c)\ \phi(a|\mu_a,\sigma_a^2)\ \phi(b|\mu_b,\sigma_b^2)\ da\ db.$$

Verder zijn de afleidingen van de logistische functies hetzelfde, draaien we wederom de integratie-volgorde om en splitsen de kwadraten af, zodat alleen nog de score van de zeiler voor wie we aan het afleiden zijn in de exponent van e staat. De e-machten die overblijven zijn te vinden in appendix A.3 vergelijking 8 voor b en appendix A.4 vergelijking 8 voor c

Vervolgens bepalen we de marginale verdelingen van t_1 en t_2 over wat er nog in de integraal staat, zodat we de dubbele integraal kunnen splitsen in twee enkele integralen. We gaan er hierbij weer vanuit dat de correlatie tussen t_1 en t_2 verwaarloosbaar is, waardoor we dit kunnen doen. De overgebleven integraal voor b ziet er als volgt uit:

$$factor \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-(t_1+\mu_a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\mu_c-\frac{\pi}{2x\sqrt{3}})^2\cdot\frac{12x^2}{24x^2\sigma_a^2+6x^2\sigma_c^2+10\pi^2}}\ dt_1 \int_{-\infty}^{0} e^{-(t_2+b-\mu_c)^2\cdot\frac{3x^2}{6x^2\sigma_c^2+8\pi^2}}\ dt_2, \tag{16}$$

en die van c zo:

$$factor \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-(t_1+\mu_a-\frac{1}{2}\mu_b-\frac{1}{2}c-\frac{\pi}{2x\sqrt{3}})^2\cdot\frac{12x^2}{24x^2\sigma_a^2+6x^2\sigma_b^2+10\pi^2}}\ dt_1 \int_{-\infty}^{0} e^{-(t_2+\mu_b-c)^2\cdot\frac{3x^2}{6x^2\sigma_b^2+8\pi^2}}\ dt_2. \tag{17}$$

Waar in (12) voor a de tweede integraal niet meer afhankelijk was van a, is de tweede integraal bij (16) nog wel afhankelijk van b en de tweede integraal van (17) afhankelijk van c. Daarom benaderen we deze ook met een logistische functie. Voor de posteriors van b en c, respectievelijk $\phi(b \mid \mu_{b,n},\sigma_{b,n}^2)$ en $\phi(c \mid \mu_{c,n},\sigma_{c,n}^2)$, krijgen we nu:

$$\phi(b \mid \mu_{b,n},\sigma_{b,n}^2) \propto \frac{1}{\sigma_b\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(b-\mu_b)^2}{\sigma_b^2}} \cdot \frac{1}{1+e^{-g_{b,1}x(\mu_a-\frac{\mu_a+b+\mu_c}{3})}+e^{-2g_{b,1}x(\mu_a-\frac{\mu_a+b+\mu_c}{3})}} \cdot \frac{1}{1+e^{-g_{b,2}x(b-\frac{b+\mu_c}{2})}} \tag{18}$$

$$\phi(c \mid \mu_{c,n},\sigma_{c,n}^2) \propto \frac{1}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(c-\mu_c)^2}{\sigma_c^2}} \cdot \frac{1}{1+e^{-g_{c,1}x(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+c}{3})}+e^{-2g_{c,1}x(\mu_a-\frac{\mu_a+\mu_b+c}{3})}} \cdot \frac{1}{1+e^{-g_{c,2}x(\mu_b-\frac{\mu_b+c}{2})}}, \tag{19}$$

waarin

$$g_{b,1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3x^2}{5\pi^2}(4\sigma_a^2+\sigma_c^2)}}, \qquad g_{b,2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3x^2}{4\pi^2}\sigma_c^2}},$$
$$g_{c,1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3x^2}{5\pi^2}(4\sigma_a^2+\sigma_b^2)}}, \qquad g_{c,2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3x^2}{4\pi^2}\sigma_b^2}}.$$

We nemen de logaritme van (18), $j_b(b)$, en van (19), $j_c(c)$. Op dezelfde manier als bij a zeggen we dat

$$\mu_{b,n} = \mu_b + \sigma_{b,n}^2 \cdot j_b'(\mu_b), \qquad \sigma_{b,n}^2 = -\frac{1}{j_b''(\mu_b)}$$
$$\mu_{c,n} = \mu_c + \sigma_{c,n}^2 \cdot j_c'(\mu_c), \qquad \sigma_{c,n}^2 = -\frac{1}{j_c''(\mu_c)}$$

De invloed van de tijd op de posterior wordt hetzelfde geacht bij alle zeilers, dus ν^2 is gelijk voor a, b, en c. Als we deze invloed toevoegen aan de invloed van de wedstrijd, krijgen we voor de nieuwe benaderingen van b en c:

$$b \sim N(\mu_{b,n},\sigma_{b,n}^2+\nu^2 t)$$
$$c \sim N(\mu_{c,n},\sigma_{c,n}^2+\nu^2 t).$$

4.2 Samenvatting van de updates

Voor de posterior van a hebben we:

$$
\begin{aligned}
a &\sim N(\mu_{a,n}, \sigma^2_{a,n} + \nu^2 t) \\
\mu_{a,n} &= \mu_a + \sigma^2_{a,n} \cdot (\frac{2gxe^{-gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + 4gxe^{-2gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}}{3(1 + e^{-gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})}) \\
\sigma^2_{a,n} &= \frac{1}{\frac{4x^2g^2e^{-gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}(1+4e^{-gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})}{9(1+e^{-gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2gx(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}} \\
g &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{5pi^2}(\sigma_b^2 + \sigma_c^2)}}
\end{aligned}
$$

Voor de posterior van b hebben we:

$$
\begin{aligned}
b &\sim N(\mu_{b,n}, \sigma^2_{b,n} + \nu^2 t) \\
\mu_{b,n} &= \mu_b + \sigma^2_{b,n}(-\frac{g_{b,1}xe^{-g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + 2g_{b,1}xe^{-2g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}}{3(1 + e^{-g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})} + \frac{g_{b,2}xe^{-g_{b,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})}}{2(1 + e^{-g_{b,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})})}) \\
\sigma^2_{b,n} &= \frac{1}{\frac{x^2g^2_{b,1}(e^{-g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+4e^{-2g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-3g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})}{9(1+e^{-g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2g_{b,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})^2} + \frac{x^2g^2_{b,2}e^{g_{b,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})}}{4(1+e^{-g_{b,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})})^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}} \\
g_{b,1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{5\pi^2}(4\sigma_a^2 + \sigma_c^2)}} \\
g_{b,2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{4\pi^2}\sigma_c^2}}.
\end{aligned}
$$

Voor de posterior van c hebben we:

$$
\begin{aligned}
c &\sim N(\mu_{c,n}, \sigma^2_{c,n} + \nu^2 t) \\
\mu_{c,n} &= \mu_c + \sigma^2_{c,n}(-\frac{g_{c,1}xe^{-g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + 2g_{c,1}xe^{-2g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}}{3(1 + e^{-g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})} + e^{-2g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})} - \frac{g_{c,2}xe^{-g_{c,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})}}{2(1 + e^{-g_{c,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})})}) \\
\sigma^2_{c,n} &= \frac{1}{\frac{x^2g^2_{c,1}(e^{-g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+4e^{-2g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-3g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})}{9(1+e^{-g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})}+e^{-2g_{c,1}x(\mu_a - \frac{\mu_a+\mu_b+\mu_c}{3})})^2} + \frac{x^2g^2_{c,2}e^{-g_{c,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})}}{4(1+e^{-g_{c,2}x(\mu_b - \frac{\mu_b+\mu_c}{2})})^2} + \frac{1}{\sigma_c^2}} \\
g_{c,1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{5\pi^2}(4\sigma_a^2 + \sigma_b^2)}} \\
g_{c,2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{4\pi^2}\sigma_b^2}}
\end{aligned}
$$

In de vergelijking hierboven zien we dat de rating van de eerste zeiler hoger wordt na de wedstrijd. De rating van de tweede zeiler verliest wat omdat een zeiler hoger is geëindigd, maar wint wat omdat de andere zeiler lager is geëindigd. De rating van de derde verliest twee keer wat, omdat zijn beide tegenstanders boven hem zijn geëindigd. Dit is precies zoals verwacht. Wat verder opvalt is dat de grote gelijkenis tussen de updates van $\mu_{b,n}$ en $\mu_{c,n}$.

5 Conclusie

Het doel van dit verslag was om te proberen een rating systeem te maken voor een fleetrace binnen de Laser Radial klasse. Het systeem moest "accuraat" en "wiskundig onderbouwd" zijn en er waren een aantal eisen om dit te kwantificeren. Dit is ten dele gelukt. In dit verslag staat een afleiding gegeven voor een update van de ratings van drie zeilers na een evenement en na verstreken tijd tussen de evenementen.

Het systeem voldoet aan de eisen 3, 5 en 6 van een watersportverbond en aan eis 1 van de wiskundige eisen. Uit de updates voor de ratings in hoofdstuk 4.2 kunnen we afleiden dat rating voor iemand die tweede is geworden hoger is dan wanneer die derde zou zijn geworden. We zien namelijk dat bij de rating voor b de eerste term wordt afgetrokken en de tweede term wordt opgeteld. Bij c wordt een term gelijkend op de eerste term van b afgetrokken en een term gelijkend op de tweede term van b afgetrokken. Het lijkt er dus op dat bij b beide termen afgetrokken zouden worden als hij derde was geëindigd in plaats van tweede. Het rating systeem is in dit verslag zo goed mogelijk uitgelegd en iemand met enige basis in statistiek of iemand met veel enthousiasme zou het systeem, als het goed is, kunnen begrijpen. Door de uiteindelijke eindstand van het hele evenement te nemen om mee te updaten in plaats van de losse wedstrijden tijdens het evenement, kan een zeiler ook in dit systeem één slechte wedstrijd wegstrepen. De update van een rating hangt volledig af van de priors van de zeiler in kwestie en zijn tegenstanders en staat zo toe dat een zeiler zelf kiest welke wedstrijden meetellen. Sommige wedstrijden meer gewicht geven dan anderen zou gedaan kunnen worden door een factor aan te brengen in de update van de rating. een kleinere factor voor de update bij een kleiner evenement kan ervoor zorgen dat dat evenement minder invloed heeft op de rating. De kans op elke mogelijke uitslag bij gelijke sterktes van de zeilers is gelijk aan $\frac{1}{N!}$. Dit is direct af te leiden uit (7), de functie voor de kans op een bepaalde uitkomst.

Van eis 1, 2 en 4 van de eisen van een watersport verbond kan niet gezegd worden of eraan is voldaan. Het systeem zal getest moeten worden om te zien of het accurate ratings voor de zeilers geeft. Of de rating van een zeiler omhoog gaat als die hoger eindigt dan iedereen met een lagere rating, is nog niet duidelijk. Als we kijken naar de nieuwe rating van b bijvoorbeeld in hoofdstuk 4.2, is er te zien dat er zowel iets wordt afgetrokken van de rating als iets wordt opgeteld. Uit de formule is niet met zekerheid te halen of dat uiteindelijk leidt tot een hogere rating. Om te bekijken wat één slechte uitslag voor invloed heeft op de rating van een goede zeiler, zal het systeem getest moeten worden.

De laatste eis, eis 2 van de wiskundige eisen, is niet behaald met dit model. In het geval dat de sterktes van alle zeilers gelijk zijn, is de som precies gelijk aan 1. Als we de rating van een van de zeilers veel groter nemen dan de rest is de som ook nagenoeg gelijk aan 1. Bij de meeste andere combinaties van sterktes is dit echter niet het geval. De waardes liggen dicht genoeg bij 1 om de gekozen kansdichtheid toch te gebruiken.

6 Discussie

Zoals in de conclusie te lezen valt, is het doel van dit verslag maar ten dele behaalt.

Ten eerste is het niet gelukt om het rating systeem voor drie mensen te testen met de data. Hierdoor is het lastig om een beeld te krijgen van hoe goed het systeem werkt. Uit de formules van de updates van de ratings is wel af te leiden dat het wel ongeveer werkt zoals het zou moeten: voor elke tegenstander die lager eindigt wordt er iets bij de rating opgeteld en voor elke tegenstander die hoger eindigt iets afgetrokken. Om te bepalen hoe accuraat dit uiteindelijk is, zal het systeem echt getest moeten worden. In appendix C staat een opzetje voor een python-programma dat een dataset kan laden en updates kan uitvoeren.

Omdat het systeem uiteindelijk niet getest is, is er geen waarde voor x vastgesteld. x bepaalt het bereik waarbinnen de ratings van de zeilers terechtkomen. Voor een test zou de waarde $x = \frac{log(10)}{400}$, die Glickman gebruikt in zijn systeem, prima gebruikt kunnen worden. Als het systeem echt gebruikt gaat worden, is deze waarde natuurlijk in overleg met opdrachtgever voor het systeem.

Voor het gebruik van het systeem zijn ook een beginwaarde voor μ en σ^2 en een waarde voor ν^2 nodig zijn. Een beginrating voor een zeiler die nieuw het systeem binnenkomt zou vastgesteld kunnen op het midden van het bereik of op het gemiddelde van de andere zeilers. De beginwaarde voor σ en ν zijn niet zomaar vast te zetten en moeten benaderd worden. Er zijn methodes om deze waardes te optimaliseren op basis van data. In het artikel van Glickman staat zo'n methode beschreven.

Daarnaast is het niet gelukt om een systeem te maken dat de ratings van meer dan drie zeilers kan updaten. De afleidingen in hoofdstuk 4 lijken echter niet heel moeilijk om uit te breiden naar meer zeilers. Het zou interessant zijn om daar nog een keer naar te kijken.

Het systeem heeft de tweede eis van de wiskundige eisen niet behaald. De eis stelt dat som van de kansen op alle mogelijke uitslagen gelijk is aan 1. Dit was voor de gekozen kansdichtheid (7) dus niet het geval. Het is wellicht de moeite waard om op zoek te gaan naar een kansdichtheid die wel aan de eis voldoet. Dit zou een correcter kansmodel opleveren en misschien ook wel een beter systeem.

Referenties

Elo, A. (1978). *The Rating of Chessplayers, Past and Present*. Batsford.

Glickman, M. & Van Dyk, D. (2007). Basic Bayesian Methods.

Glickman, M. (1999). Parameter estimation in large dynamic paired comparison experiments. *Journal of Applied Statistics*, *48*(3), 377–394.

Sailing, W. (2021). *Fleet race rankings: method of calculation*. sailing.org/rankings/fleet/method_of_calculation.php

World Sailing. (2020). *The racing rules of sailing for 2021-2024* (tech. rap.).

Appendix

A Berekeningen in Maple

De volgende bestanden bevatten alle berekeningen die in Maple zijn gedaan om de formules voor de updates te vinden. In een aantal van de berekeningen is x weggelaten om de berekening te versimpelen. Er is wel op gelet of x invloed had in de betreffende berekening.

A.1 μ en $sigma^2$ voor de benaderingen van de logistische functies

$$Fa := (a,b,c) \rightarrow \frac{1}{1 + e^{-\left(a - \frac{(a+b+c)}{3}\right)} + e^{-2\left(a - \frac{(a+b+c)}{3}\right)}}$$

$$Fa := (a,b,c) \mapsto \frac{1}{1 + e^{-\frac{2 \cdot a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}} + e^{-\frac{4 \cdot a}{3} + \frac{2 \cdot b}{3} + \frac{2 \cdot c}{3}}} \tag{1}$$

$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. 1}}$

$$(a,b,c) \mapsto -\frac{-\frac{2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}}}{3} - \frac{4 \cdot e^{-\frac{4 \cdot a}{3} + \frac{2 \cdot b}{3} + \frac{2 \cdot c}{3}}}{3}}{\left(1 + e^{-\frac{2 \cdot a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}} + e^{-\frac{4 \cdot a}{3} + \frac{2 \cdot b}{3} + \frac{2 \cdot c}{3}}\right)^2} \tag{2}$$

$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$

$$pa \tag{3}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} a^2 \cdot pa(a,b,c) \, \mathrm{d}a$ assuming $b > 0$ **and** $c > 0$

$$\frac{b\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{c\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{b\,c}{2} + \frac{c^2}{4} \tag{4}$$

=

$\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot pa(a,b,c) \, \mathrm{d}a$ assuming $b > 0$ **and** $c > 0$

$$\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} \tag{5}$$

$$Fb := (b,c) \rightarrow \frac{1}{1 + e^{-\left(b - \frac{(b+c)}{2}\right)}}$$

$$Fb := (b,c) \mapsto \frac{1}{1 + e^{-\frac{b}{2} + \frac{c}{2}}} \tag{6}$$

$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. 1}}$

$$(b,c) \mapsto \frac{e^{-\frac{b}{2} + \frac{c}{2}}}{2 \cdot \left(1 + e^{-\frac{b}{2} + \frac{c}{2}}\right)^2} \tag{7}$$

$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$

$$pb \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b^2 \cdot pb(b, c)\, \mathrm{d}b \text{ assuming } c > 0$$

$$\frac{4\,\pi^2}{3} + c^2 \tag{9}$$

$=$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b \cdot pb(b, c)\, \mathrm{d}b \text{ assuming } c > 0$$

$$c \tag{10}$$

A.2 De berekeningen voor a

$$pref := \frac{(3\,x^2)}{4\sqrt{5}\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c}$$

$$pref := \frac{3\,x^2\sqrt{5}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c} \tag{1}$$

$$ex := -\left(t1 + a - \frac{(b+c)}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 \cdot \frac{12\,x^2}{10\,\pi^2} - (t2 + b - c)^2 \cdot \frac{3\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2} - \frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}$$

$$ex := -\frac{6\left(t1 + a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2} - \frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2} \tag{2}$$

$$\overset{\text{complete square}}{=}$$

$$\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma b^2}\right)\left(b + \frac{-\frac{6\left(-t1 - a + \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(2\,t2 - 2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2} + \frac{\mu b}{\sigma b^2}}{2\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma b^2}\right)}\right)^2 - \frac{6\left(t1 + a - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(t2-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2} - \frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2} - \frac{\left(-\frac{6\left(-t1 - a + \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(2\,t2 - 2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2} + \frac{\mu b}{\sigma b^2}\right)^2}{4\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma b^2}\right)} \tag{3}$$

$$pref2 := pref \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma b^2}\right)}}$$

$$pref2 := \frac{3\,x^2\sqrt{5}\,\sqrt{\dfrac{\pi}{-\dfrac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\dfrac{1}{2\,\sigma b^2}}}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c} \tag{4}$$

$$ex2 := -\frac{6\left(t1+a-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}$$
$$-\frac{\left(-\dfrac{6\left(-t1-a+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\dfrac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\dfrac{\mu b}{\sigma b^2}\right)^2}{4\left(-\dfrac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\dfrac{1}{2\,\sigma b^2}\right)}$$

$$ex2 := -\frac{6\left(t1+a-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}$$
$$-\frac{\left(-\dfrac{6\left(-t1-a+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\dfrac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\dfrac{\mu b}{\sigma b^2}\right)^2}{-\dfrac{27\,x^2}{10\,\pi^2}-\dfrac{2}{\sigma b^2}} \tag{5}$$

$$\overset{\text{complete square}}{=}$$

$$\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma c^2}-\frac{9\,x^4}{400\,\pi^4\left(-\dfrac{27\,x^2}{10\,\pi^2}-\dfrac{2}{\sigma b^2}\right)}\right)\Bigg(c+\Bigg(-\frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}$$
$$+\frac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2}+\frac{\mu c}{\sigma c^2}-\frac{3\left(\dfrac{\mu b}{\sigma b^2}-\dfrac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\dfrac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2}\right)x^2}{10\,\pi^2\left(-\dfrac{27\,x^2}{10\,\pi^2}-\dfrac{2}{\sigma b^2}\right)}\Bigg)\Bigg/$$

$$2$$

$$\left.\left(2\left(-\frac{27x^2}{40\pi^2}-\frac{1}{2\sigma c^2}-\frac{9x^4}{400\pi^4\left(-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}\right)}\right)\right)\right)-\frac{6\left(t1+a-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6x}\right)^2x^2}{5\pi^2}$$

$$-\frac{3x^2t2^2}{8\pi^2}-\frac{\mu b^2}{2\sigma b^2}-\frac{\mu c^2}{2\sigma c^2}-\frac{\left(\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6x}\right)x^2}{5\pi^2}-\frac{3\,t2\,x^2}{4\pi^2}\right)^2}{-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}}$$

$$-\left(-\frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6x}\right)x^2}{5\pi^2}+\frac{3\,t2\,x^2}{4\pi^2}+\frac{\mu c}{\sigma c^2}-\frac{3\left(\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6x}\right)x^2}{5\pi^2}-\frac{3\,t2\,x^2}{4\pi^2}\right)}{10\pi^2\left(-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}\right)}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{9x^4}{400\pi^4\left(-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}\right)}\right)\right)$$

$$pref3 := pref2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\left(-\frac{27x^2}{40\pi^2}-\frac{1}{2\sigma c^2}-\frac{9x^4}{400\pi^4\left(-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}\right)}\right)}}$$

$$pref3 := \qquad \textbf{(7)}$$

$$\frac{1}{20\pi^4\,\sigma b\,\sigma c}\left(3x^2\sqrt{5}\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{27x^2}{40\pi^2}-\frac{1}{2\sigma b^2}}}\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{27x^2}{40\pi^2}-\frac{1}{2\sigma c^2}-\frac{9x^4}{400\pi^4\left(-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}\right)}}}\right)$$

$$ex3 := -\frac{6\left(t1+a-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,x^2\,t2^2}{8\,\pi^2} - \frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2} - \frac{\mu c^2}{2\,\sigma c^2} - \frac{\left(\frac{\mu b}{\sigma b^2} - \frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2}\right)^2}{-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2} - \frac{2}{\sigma b^2}} - \left(-\frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} + \frac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2} + \frac{\mu c}{\sigma c^2} - \frac{9\,x^4}{400\,\pi^4\left(-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2} - \frac{2}{\sigma b^2}\right)}\right)\bigg)$$

$$ex3 := -\frac{6\left(t1+a-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,x^2\,t2^2}{8\,\pi^2} - \frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2} - \frac{\mu c^2}{2\,\sigma c^2} - \frac{\left(\frac{\mu b}{\sigma b^2} - \frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2}\right)^2}{-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2} - \frac{2}{\sigma b^2}} - \frac{1}{-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2} - \frac{2}{\sigma c^2} - \frac{9\,x^4}{100\,\pi^4\left(-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2} - \frac{2}{\sigma b^2}\right)}}\left(-\frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} + \frac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2} + \frac{\mu c}{\sigma c^2} - \frac{3\left(\frac{\mu b}{\sigma b^2} - \frac{6\left(-t1-a+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,t2\,x^2}{4\,\pi^2}\right)x^2}{10\,\pi^2\left(-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2} - \frac{2}{\sigma b^2}\right)}\right)^2 \qquad \textbf{(8)}$$

simplify(*pref3*) assuming $\sigma b > 0$ **and** $\sigma c > 0$ **and** $x > 0$

$$-\frac{3\,x^2}{\pi\sqrt{20\,\pi^4 + 27\,x^2\left(\sigma b^2 + \sigma c^2\right)\pi^2 + 36\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2}} \qquad \textbf{(9)}$$

simplify(*ex3*) assuming $\sigma b > 0$ **and** $\sigma c > 0$ **and** $x > 0$

$$\frac{1}{72\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2 + 54\,x^2\left(\sigma b^2 + \sigma c^2\right)\pi^2 + 40\,\pi^4}\Bigg(16\Bigg(\Bigg(\Bigg(\left(\frac{3\,a}{4} + \frac{3\,t1}{4} + \frac{3\,t2}{8} - \frac{3\,\mu c}{4}\right)\sigma b^2 \tag{10}$$

$$+ \frac{3\,\sigma c^2\left(a + t1 - \frac{t2}{2} - \mu b\right)}{4}\Bigg)x^2 + \left(a + t1 - \frac{\mu b}{2} - \frac{\mu c}{2}\right)\pi^2\Bigg)\pi\,x\sqrt{3} + \Bigg(-36\Big(a$$

$$+ t1 + \frac{t2}{2} - \mu c\Big)^2\sigma b^2 - 36\left(a + t1 - \frac{t2}{2} - \mu b\right)^2\sigma c^2\Bigg)x^4 - 48\Bigg(\frac{\sigma b^2}{16} + \frac{\sigma c^2}{16} + t1^2$$

$$+ \left(2\,a - \mu b - \mu c\right)t1 + a^2 + \left(-\mu b - \mu c\right)a + \frac{5\,t2^2}{16} + \left(\frac{5\,\mu b}{8} - \frac{5\,\mu c}{8}\right)t2 + \frac{9\,\mu b^2}{16}$$

$$- \frac{\mu b\,\mu c}{8} + \frac{9\,\mu c^2}{16}\Bigg)\pi^2\,x^2 - 4\,\pi^4\Bigg)$$

$$mvt1 := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{72\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2 + 54\,x^2\left(\sigma b^2 + \sigma c^2\right)\pi^2 + 40\,\pi^4}\left(16\left(\left(\left(\left(\frac{3\,a}{4} + \frac{3\,t1}{4} + \frac{3\,t2}{8} - \frac{3\,\mu c}{4}\right)\sigma b^2\right.\right.\right.\right.\right.}$$

$$+ \frac{3\,\sigma c^2\left(a + t1 - \frac{t2}{2} - \mu b\right)}{4}\Bigg)x^2 + \left(a + t1 - \frac{\mu b}{2} - \frac{\mu c}{2}\right)\pi^2\Bigg)\pi\,x\sqrt{3} + \Bigg(-36\left(a + t1 + \frac{t2}{2} - \mu c\right)^2\sigma b^2 - 36\Big(a + t1$$

$$- \frac{t2}{2} - \mu b\Big)^2\sigma c^2\Bigg)x^4 - 48\Bigg(\frac{\sigma b^2}{16} + \frac{\sigma c^2}{16} + t1^2 + \left(2\,a - \mu b - \mu c\right)t1 + a^2 + \left(-\mu b - \mu c\right)a + \frac{5\,t2^2}{16} + \left(\frac{5\,\mu b}{8} - \frac{5\,\mu c}{8}\right)t2$$

$$+ \frac{9\,\mu b^2}{16} - \frac{\mu b\,\mu c}{8} + \frac{9\,\mu c^2}{16}\Bigg)\pi^2\,x^2 - 4\,\pi^4\Bigg)\Bigg)\,\mathrm{d}t2 \text{ assuming } \sigma b > 0 \textbf{ and } \sigma c > 0 \textbf{ and } x > 0$$

$$mvt1 := \tag{11}$$

$$\Bigg(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(3\,x^2\,\sigma b^2 + 3\,x^2\,\sigma c^2 + 5\,\pi^2\right)}\left(3\,\mu b^2\,x^2 + 6\,\mu b\,\mu c\,x^2 + 2\,\mu b\sqrt{3}\,\pi\,x - 12\,\mu b\,a\,x^2 - 12\,\mu b\,t1\,x^2 + 3\,\mu c^2\,x^2\right.}$$

$$^{\left.+ 2\,\mu c\sqrt{3}\,\pi\,x - 12\,\mu c\,a\,x^2 - 12\,\mu c\,t1\,x^2 - 4\sqrt{3}\,\pi\,a\,x - 4\sqrt{3}\,\pi\,t1\,x + 12\,x^2\,a^2 + 24\,x^2\,a\,t1 + 12\,x^2\,t1^2 + \pi^2\right)}$$

$$\sqrt{3}\,\sqrt{2}\left(36\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2 + 27\,\pi^2\,x^2\,\sigma b^2 + 27\,\pi^2\,x^2\,\sigma c^2 + 20\,\pi^4\right)\sqrt{\pi}\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(3\,x\sqrt{\left(3\,x^2\,\sigma b^2 + 3\,x^2\,\sigma c^2 + 5\,\pi^2\right)\left(36\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2 + 27\,\pi^2\,x^2\,\sigma b^2 + 27\,\pi^2\,x^2\,\sigma c^2 + 20\,\pi^4\right)}\right)$$

$$mvt2 := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{72\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2 + 54\,x^2\left(\sigma b^2 + \sigma c^2\right)\pi^2 + 40\,\pi^4}\left(16\left(\left(\left(\left(\frac{3\,a}{4} + \frac{3\,t1}{4} + \frac{3\,t2}{8} - \frac{3\,\mu c}{4}\right)\sigma b^2\right.\right.\right.\right.\right.}$$

$$+\frac{3\,\sigma c^2\left(a+t1-\frac{t2}{2}-\mu b\right)}{4}\Bigg)x^2+\left(a+t1-\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)\pi^2\Bigg)\pi x\sqrt{3}+\Bigg(-36\left(a+t1+\frac{t2}{2}-\mu c\right)^2\sigma b^2-36\Big(a+t1$$

$$-\frac{t2}{2}-\mu b\Big)^2\sigma c^2\Bigg)x^4-48\left(\frac{\sigma b^2}{16}+\frac{\sigma c^2}{16}+t1^2+(2\,a-\mu b-\mu c)\,t1+a^2+(-\mu b-\mu c)\,a+\frac{5\,t2^2}{16}+\left(\frac{5\,\mu b}{8}-\frac{5\,\mu c}{8}\right)t2\right.$$

$$\left.+\frac{9\,\mu b^2}{16}-\frac{\mu b\,\mu c}{8}+\frac{9\,\mu c^2}{16}\right)\pi^2x^2-4\,\pi^4\Bigg)\Bigg)$$

$\mathrm{d}t1$ assuming $\sigma b>0$ **and** $\sigma c>0$ **and** $x>0$

$$mvt2:=\left(\mathrm{e}^{-\frac{3\left(\mu b^2-2\,\mu b\,\mu c+2\,t2\,\mu b+\mu c^2-2\,t2\,\mu c+t2^2\right)x^2}{2\left(3\,x^2\sigma b^2+3\,x^2\sigma c^2+4\,\pi^2\right)}}\sqrt{6}\left(36\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma b^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma c^2+20\,\pi^4\right)\sqrt{\pi}\right)\Bigg/\left(6\,x\sqrt{\left(3\,x^2\,\sigma b^2+3\,x^2\,\sigma c^2+4\,\pi^2\right)\left(36\,x^4\,\sigma b^2\,\sigma c^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma b^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma c^2+20\,\pi^4\right)}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-g\cdot x\cdot\left(a-\frac{(a+b+c)}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-g\cdot 2\cdot\,x\cdot\left(a-\frac{(a+b+c)}{3}\right)}}\right)$$

$$-\frac{-\frac{2\,g\,x\,\mathrm{e}^{-g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,g\,x\,\mathrm{e}^{-2\,g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}}{\left(1+\mathrm{e}^{-g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^2} \tag{13}$$

$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$

$$pa \tag{14}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} a^2\cdot pa\,\mathrm{d}a$ assuming $g>0$ **and** $b>0$ **and** $c>0$ **and** $x>0$

$$\frac{3\,b^2\,g^2\,x^2+6\,b\,c\,g^2\,x^2+3\,c^2\,g^2\,x^2+2\,\pi\,b\sqrt{3}\,x\,g+2\,\pi\,c\sqrt{3}\,x\,g+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} \tag{15}$$

$=$

$\int_{-\infty}^{\infty} a\cdot pa\,\mathrm{d}a$ assuming $g>0$ **and** $b>0$ **and** $c>0$ **and** $x>0$

$$\frac{3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi}{6\,g\,x} \tag{16}$$

$$\frac{3\,b^2\,g^2\,x^2+6\,b\,c\,g^2\,x^2+3\,c^2\,g^2\,x^2+2\,\pi\,b\sqrt{3}\,x\,g+2\,\pi\,c\sqrt{3}\,x\,g+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2}$$

$$-\left(\frac{3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi}{6\,g\,x}\right)^2$$

$$\frac{3 b^2 g^2 x^2 + 6 b c g^2 x^2 + 3 c^2 g^2 x^2 + 2 \pi b \sqrt{3}\, x g + 2 \pi c \sqrt{3}\, x g + 6 \pi^2}{12 x^2 g^2} - \frac{\left(3 g x b + 3 g x c + \sqrt{3}\, \pi\right)^2}{36 g^2 x^2} \tag{17}$$

$$\xrightarrow{\text{normal 1/12*(3*b^2*g^2*x^2+6*b*c*g^2*x^2+3*c^2*g^2*x^2+2*Pi*b*3^(1/2)*x*g+2*Pi*c*3^(1/2)*x*g+6*Pi^2)/x^2/g^2-1/36*(3*g*x*b+3*}}$$

$$\frac{5 \pi^2}{12 g^2 x^2} \tag{18}$$

$$subs\left(g = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12 x^2}{5 \pi^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\sigma b^2 + \sigma c^2\right)}}, \frac{5 \pi^2}{12 g^2 x^2}\right) \text{assuming } b > 0 \textbf{ and } c > 0 \textbf{ and } x > 0 \textbf{ and } \sigma b > 0 \textbf{ and } \sigma c > 0$$

$$\frac{\left(25 + \frac{15 x^2 \left(\sigma b^2 + \sigma c^2\right)}{\pi^2}\right) \pi^2}{60 x^2} \tag{19}$$

$$\xrightarrow{\text{normal 1/60*(25+15*x^2/Pi^2*(σb^2+σc^2))/x^2*Pi^2}}$$

$$\frac{3 x^2 \sigma b^2 + 3 x^2 \sigma c^2 + 5 \pi^2}{12 x^2} \tag{20}$$

$$loglikelihood := -\ln\left(1 + e^{-x \cdot g \cdot \left(a - \frac{(a + \mu b + \mu c)}{3}\right)} + e^{-2 \cdot x \cdot g \cdot \left(a - \frac{(a + \mu b + \mu c)}{3}\right)}\right) - \frac{(a - \mu)^2}{2 \sigma^2} - \ln\left(\sigma \sqrt{2 \pi}\right)$$

$$loglikelihood := -\ln\left(1 + e^{-x g \left(\frac{2 a}{3} - \frac{\mu b}{3} - \frac{\mu c}{3}\right)} + e^{-2 x g \left(\frac{2 a}{3} - \frac{\mu b}{3} - \frac{\mu c}{3}\right)}\right) - \frac{(a - \mu)^2}{2 \sigma^2} - \ln\left(\sigma \sqrt{2}\, \sqrt{\pi}\right) \tag{21}$$

$$j := \frac{d}{d a}(loglikelihood)$$

$$j := -\frac{-\frac{2 x g\, e^{-x g \left(\frac{2 a}{3} - \frac{\mu b}{3} - \frac{\mu c}{3}\right)}}{3} - \frac{4 x g\, e^{-2 x g \left(\frac{2 a}{3} - \frac{\mu b}{3} - \frac{\mu c}{3}\right)}}{3}}{1 + e^{-x g \left(\frac{2 a}{3} - \frac{\mu b}{3} - \frac{\mu c}{3}\right)} + e^{-2 x g \left(\frac{2 a}{3} - \frac{\mu b}{3} - \frac{\mu c}{3}\right)}} - \frac{a - \mu}{\sigma^2} \tag{22}$$

$$j2 := \frac{d^2}{d a^2}(loglikelihood)$$

$$j2 := -\frac{\frac{4\,x^2\,g^2\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{16\,x^2\,g^2\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}} + \frac{\left(-\frac{2\,x\,g\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2} - \frac{1}{\sigma^2} \tag{23}$$

$$j3 := -\frac{\frac{4\,x^2\,g^2\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{16\,x^2\,g^2\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}} + \frac{\left(-\frac{2\,x\,g\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}$$

$$j3 := -\frac{\frac{4\,x^2\,g^2\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{16\,x^2\,g^2\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}} + \frac{\left(-\frac{2\,x\,g\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2} \tag{24}$$

$\overset{\text{simplify}}{=}$

$$-\frac{4\,x^2\,g^2\,e^{\frac{x\,g\,(-2\,a+\mu b+\mu c)}{3}}\left(e^{\frac{2\,x\,g\,(-2\,a+\mu b+\mu c)}{3}}+4\,e^{\frac{x\,g\,(-2\,a+\mu b+\mu c)}{3}}+1\right)}{9\left(1+e^{\frac{x\,g\,(-2\,a+\mu b+\mu c)}{3}}+e^{\frac{2\,x\,g\,(-2\,a+\mu b+\mu c)}{3}}\right)^2} \tag{25}$$

$munieuw := \frac{j}{j2}$ assuming $\mu b > 0$ **and** $\mu c > 0$ **and** $g > 0$ **and** $x > 0$

$$munieuw := \left(-\frac{-\frac{2\,x\,g\,e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}}{1+e^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}\right. \tag{26}$$

$$-\frac{a-\mu}{\sigma^2}\Bigg)\Bigg/\Bigg(-\frac{\frac{4\,x^2\,g^2\,\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{16\,x^2\,g^2\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}$$

$$+\frac{\left(-\frac{2\,x\,g\,\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}-\frac{1}{\sigma^2}\Bigg)$$

$$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$$

$$mun(a) \tag{27}$$

$mun(\mu)$

$$-\left(-\frac{2\,x\,g\,\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)\Bigg/\Bigg(\Bigg(1 \tag{28}$$

$$+\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\Bigg)\Bigg($$

$$-\frac{\frac{4\,x^2\,g^2\,\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{16\,x^2\,g^2\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}$$

$$+\frac{\left(-\frac{2\,x\,g\,\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,x\,g\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g\left(\frac{2\,\mu}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}-\frac{1}{\sigma^2}\Bigg)\Bigg)$$

A.3 De berekeningen voor b

$$pref := \frac{(3\,x^2)}{4\sqrt{5}\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c}$$

$$pref := \frac{3\,x^2\sqrt{5}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c} \tag{1}$$

$$ex := -\left(t1 + a - \frac{(b+c)}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 \cdot \frac{12\,x^2}{10\,\pi^2} - (t2 + b - c)^2 \cdot \frac{3\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{(a-\mu a)^2}{2\,\sigma a^2} - \frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}$$

$$ex := -\frac{6\left(t1 + a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{(a-\mu a)^2}{2\,\sigma a^2} - \frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2} \tag{2}$$

$\overset{\text{complete square}}{=}$

$$\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)\left(a + \frac{-\frac{6\left(2\,t1 - b - c - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2}}{2\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)}\right)^2 - \frac{6\left(t1 - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2} - \frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2} - \frac{\left(-\frac{6\left(2\,t1 - b - c - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)^2}{4\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)} \tag{3}$$

$$pref2 := pref \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)}}$$

$$pref2 := \frac{3\,x^2\sqrt{5}\,\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}}}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c} \tag{4}$$

$$ex2 = -\frac{6\left(t1-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}-\frac{\left(-\frac{6\left(2\,t1-b-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}+\frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)^2}{4\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)}$$

$$ex2 = -\frac{6\left(t1-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}-\frac{\left(-\frac{6\left(2\,t1-b-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}+\frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)^2}{-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}} \tag{5}$$

$$\overset{\text{complete square}}{=}$$

$$ex2 = \left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma c^2}-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)\Bigg(c+\Bigg(-\frac{6\left(-t1+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(-2\,t2-2\,b)\,x^2}{8\,\pi^2}+\frac{\mu c}{\sigma c^2}-\frac{12\left(-\frac{6\left(2\,t1-b-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}+\frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)x^2}{5\,\pi^2\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\Bigg)\Bigg/\Bigg(2\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma c^2}\right.$$

$$2$$

$$- \frac{36 x^4}{25 \pi^4 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)} \Bigg) \Bigg) \Bigg) - \frac{6 \left(t1 - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6 x} \right)^2 x^2}{5 \pi^2} - \frac{3 (t2 + b)^2 x^2}{8 \pi^2}$$

$$- \frac{\mu a^2}{2 \sigma a^2} - \frac{\mu c^2}{2 \sigma c^2} - \frac{\left(-\frac{6 \left(2 t1 - b - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3 x} \right) x^2}{5 \pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2} \right)^2}{-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2}} - \Bigg(-\frac{6 \left(-t1 + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6 x} \right) x^2}{5 \pi^2} - \frac{3 (}{}$$

$$- \frac{36 x^4}{25 \pi^4 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)} \Bigg) \Bigg)$$

$$pref3 := pref2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\left(-\frac{27 x^2}{40 \pi^2} - \frac{1}{2 \sigma c^2} - \frac{36 x^4}{25 \pi^4 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)} \right)}}$$

$$pref3 := \frac{3 x^2 \sqrt{5} \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{6 x^2}{5 \pi^2} - \frac{1}{2 \sigma a^2}}} \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{27 x^2}{40 \pi^2} - \frac{1}{2 \sigma c^2} - \frac{36 x^4}{25 \pi^4 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)}}}}{20 \pi^4 \sigma b \sigma c} \tag{7}$$

$$ex3 := -\frac{6 \left(t1 - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6 x} \right)^2 x^2}{5 \pi^2} - \frac{3 (t2 + b)^2 x^2}{8 \pi^2} - \frac{\mu a^2}{2 \sigma a^2} - \frac{\mu c^2}{2 \sigma c^2}$$

$$- \frac{\left(-\frac{6 \left(2 t1 - b - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3 x} \right) x^2}{5 \pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2} \right)^2}{-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2}} - \Bigg(-\frac{6 \left(-t1 + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6 x} \right) x^2}{5 \pi^2} - \frac{3 (-2 t2 - 2 b) x^2}{8 \pi^2} + \cdot$$

$$- \frac{36 x^4}{25 \pi^4 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)} \Bigg) \Bigg)$$

$$ex3 := -\frac{6 \left(t1 - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6 x} \right)^2 x^2}{5 \pi^2} - \frac{3 (t2 + b)^2 x^2}{8 \pi^2} - \frac{\mu a^2}{2 \sigma a^2} - \frac{\mu c^2}{2 \sigma c^2} \tag{8}$$

$$- \frac{\left(-\frac{6 \left(2 t1 - b - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3 x} \right) x^2}{5 \pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2} \right)^2}{-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2}}$$

$$- \frac{1}{-\frac{27 x^2}{10 \pi^2} - \frac{2}{\sigma c^2} - \frac{144 x^4}{25 \pi^4 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)}} \left(-\frac{6 \left(-t1 + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6 x} \right) x^2}{5 \pi^2} \right.$$

$$\left. - \frac{3 (-2 t2 - 2 b) x^2}{8 \pi^2} + \frac{\mu c}{\sigma c^2} - \frac{12 \left(-\frac{6 \left(2 t1 - b - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3 x} \right) x^2}{5 \pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2} \right) x^2}{5 \pi^2 \left(-\frac{24 x^2}{5 \pi^2} - \frac{2}{\sigma a^2} \right)} \right)^2$$

$simplify(pref3)$ assuming $\sigma a > 0$ **and** $\sigma c > 0$ **and** $x > 0$

$$-\frac{3 x^2 \sigma a}{\pi \sqrt{20 \pi^4 + (48 \sigma a^2 + 27 \sigma c^2) x^2 \pi^2 + 36 x^4 \sigma a^2 \sigma c^2}\ \sigma b} \tag{9}$$

$simplify(ex3)$ assuming $\sigma a > 0$ **and** $\sigma c > 0$ **and** $x > 0$

$$\frac{1}{72 x^4 \sigma a^2 \sigma c^2 + (96 \sigma a^2 + 54 \sigma c^2) \pi^2 x^2 + 40 \pi^4} \left(-8 \pi x \left(\frac{3 \left(b - t1 + \frac{t2}{2} - \mu a \right) \sigma c^2 x^2}{2} \right. \right. \tag{10}$$

$$\left. + \pi^2 (b - 2 t1 - 2 \mu a + \mu c) \right) \sqrt{3} + \left(-36 \left(b - t1 + \frac{t2}{2} - \mu a \right)^2 \sigma c^2 - 36 \sigma a^2 (b \right.$$

$$\left. + t2 - \mu c)^2 \right) x^4 - 27 \pi^2 \left(\frac{\sigma c^2}{9} + b^2 + \left(-\frac{16 t1}{9} + \frac{10 t2}{9} - \frac{16 \mu a}{9} - \frac{2 \mu c}{9} \right) b + \frac{5 t2^2}{9} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{10 \mu c\, t2}{9} + \frac{16 \mu a^2}{9} + \left(\frac{32 t1}{9} - \frac{16 \mu c}{9} \right) \mu a + \frac{16 t1^2}{9} - \frac{16 \mu c\, t1}{9} + \mu c^2 \right) x^2 - 4 \pi^4 \right)$$

mvt1 :=

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{72 x^4 \sigma a^2 \sigma c^2+\left(96 \sigma a^2+54 \sigma c^2\right) \pi^2 x^2+40 \pi^4}\left(-8 \pi x\left(\frac{3\left(b-t1+\frac{t2}{2}-\mu a\right) \sigma c^2 x^2}{2}+\pi^2(b-2 t1-2 \mu a+\mu c)\right) \sqrt{3}+\left(-36\left(b-t1+\frac{t2}{2}-\mu a\right)^2 \sigma c^2-36 \sigma a^2(b+t2-\mu c)^2\right) x^4-27 \pi^2\left(\frac{\sigma c^2}{9}+b^2+\left(-\frac{16 t1}{9}+\frac{10 t2}{9}-\frac{16 \mu a}{9}-\frac{2 \mu c}{9}\right) b+\frac{5 t2^2}{9}-\frac{10 \mu c\, t2}{9}+\frac{16 \mu a^2}{9}+\left(\frac{32 t1}{9}-\frac{16 \mu c}{9}\right) \mu a+\frac{16 t1^2}{9}-\frac{16 \mu c\, t1}{9}+\mu c^2\right) x^2-4 \pi^4\right)\right)} \, \mathrm{d}t2$$

assuming $\sigma a > 0$ **and** $\sigma c > 0$ **and** $x > 0$

mvt1 := **(11)**

$$\left(e^{-\frac{1}{2\left(12 x^2 \sigma a^2+3 x^2 \sigma c^2+5 \pi^2\right)}\left(12 \mu a^2 x^2-12 \mu a \mu c x^2-4 \mu a \sqrt{3} \pi x-12 \mu a b x^2+24 \mu a t1 x^2+3 \mu c^2 x^2+2 \mu c \sqrt{3} \pi x+6 \mu c b x^2-12 \mu c t1 x^2+2 \sqrt{3} \pi b x-4 \sqrt{3} \pi t1 x+3 x^2 b^2-12 x^2 b t1+12 x^2 t1^2+\pi^2\right)} \sqrt{3} \sqrt{2}\left(36 x^4 \sigma a^2 \sigma c^2+48 \pi^2 x^2 \sigma a^2+27 \pi^2 x^2 \sigma c^2+20 \pi^4\right) \sqrt{\pi}\right) \Big/ \left(3 x \sqrt{\left(12 x^2 \sigma a^2+3 x^2 \sigma c^2+5 \pi^2\right)\left(36 x^4 \sigma a^2 \sigma c^2+48 \pi^2 x^2 \sigma a^2+27 \pi^2 x^2 \sigma c^2+20 \pi^4\right)}\right)$$

mvt2 :=

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{72 x^4 \sigma a^2 \sigma c^2+\left(96 \sigma a^2+54 \sigma c^2\right) \pi^2 x^2+40 \pi^4}\left(-8 \pi x\left(\frac{3\left(b-t1+\frac{t2}{2}-\mu a\right) \sigma c^2 x^2}{2}+\pi^2(b-2 t1-2 \mu a\right.\right.\right.}$$

$$+\mu c)\Big)\sqrt{3}+\Big(-36\left(b-t1+\frac{t2}{2}-\mu a\right)^2\sigma c^2-36\,\sigma a^2(b+t2-\mu c)^2\Big)x^4-27\,\pi^2\Big(\frac{\sigma c^2}{9}+b^2+\Big(-\frac{16\,t1}{9}+\frac{10\,t2}{9}-\frac{16\,\mu a}{9}$$

$$-\frac{2\,\mu c}{9}\Big)b+\frac{5\,t2^2}{9}-\frac{10\,\mu c\,t2}{9}+\frac{16\,\mu a^2}{9}+\left(\frac{32\,t1}{9}-\frac{16\,\mu c}{9}\right)\mu a+\frac{16\,t1^2}{9}-\frac{16\,\mu c\,t1}{9}+\mu c^2\Big)x^2-4\,\pi^4\Big)\Big)\,\mathrm{d}t1$$

assuming $\sigma a>0$ **and** $\sigma c>0$ **and** $x>0$

$$mvt2 := \left(\mathrm{e}^{-\frac{3\left(\mu c^2-2\,b\,\mu c-2\,\mu c\,t2+b^2+2\,t2\,b+t2^2\right)x^2}{2\left(3\,x^2\,\sigma c^2+4\,\pi^2\right)}}\sqrt{6}\,\left(36\,x^4\,\sigma a^2\,\sigma c^2+48\,\pi^2\,x^2\,\sigma a^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma c^2+20\,\pi^4\right)\sqrt{\pi}\right)\Big/\left(6\,x\sqrt{\left(3\,x^2\,\sigma c^2+4\,\pi^2\right)\left(36\,x^4\,\sigma a^2\,\sigma c^2+48\,\pi^2\,x^2\,\sigma a^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma c^2+20\,\pi^4\right)}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-g\cdot x\cdot\left(a-\frac{(a+b+c)}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\cdot g\cdot x\cdot\left(a-\frac{(a+b+c)}{3}\right)}}\right)$$

$$-\frac{-\frac{2\,g\,x\,\mathrm{e}^{-g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,g\,x\,\mathrm{e}^{-2\,g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}}{\left(1+\mathrm{e}^{-g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^2} \tag{13}$$

$$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$$

$$pa \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^2\cdot pa\,\mathrm{d}a \text{ assuming } g>0 \textbf{ and } b>0 \textbf{ and } c>0 \textbf{ and } x>0$$

$$\frac{3\,g^2\,x^2\,b^2+6\,g^2\,x^2\,b\,c+3\,g^2\,x^2\,c^2+2\,\pi\,g\,x\,b\sqrt{3}+2\,\pi\,g\,x\,c\sqrt{3}+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} \tag{15}$$

$=$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\cdot pa\,\mathrm{d}a \text{ assuming } g>0 \textbf{ and } b>0 \textbf{ and } c>0 \textbf{ and } x>0$$

$$\frac{3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi}{6\,g\,x} \tag{16}$$

$$\frac{3\,g^2\,x^2\,b^2+6\,g^2\,x^2\,b\,c+3\,g^2\,x^2\,c^2+2\,\pi\,g\,x\,b\sqrt{3}+2\,\pi\,g\,x\,c\sqrt{3}+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2}-\left(\frac{3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi}{6\,g\,x}\right)^2$$

$$\frac{3\,g^2\,x^2\,b^2+6\,g^2\,x^2\,b\,c+3\,g^2\,x^2\,c^2+2\,\pi\,g\,x\,b\sqrt{3}+2\,\pi\,g\,x\,c\sqrt{3}+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} \tag{17}$$

$$-\frac{\left(3 g x b+3 g x c+\sqrt{3}\,\pi\right)^2}{36 g^2 x^2}$$

$\xrightarrow{\text{normal 1/12*(3*g^2*x^2*b^2+6*g^2*x^2*b*c+3*g^2*x^2*c^2+2*Pi*g*x*b*3^(1/2)+2*Pi*g*x*c*3^(1/2)+6*Pi^2)/x^2/g^2-1/36*(3*g*x*b+3*}}$

$$\frac{5 \pi^2}{12 x^2 g^2} \tag{18}$$

$$subs\left(g=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{12 x^2}{5 \pi^2}\cdot\frac{1}{4}\left(4\,\sigma a^2+\sigma c^2\right)}}, \frac{5 \pi^2}{12 x^2 g^2}\right) \text{assuming } x>0 \textbf{ and } \sigma a>0 \textbf{ and } \sigma c>0$$

$$\frac{\left(25+\frac{15 x^2\left(4\,\sigma a^2+\sigma c^2\right)}{\pi^2}\right)\pi^2}{60 x^2} \tag{19}$$

$\xrightarrow{\text{normal 1/60/x^2*(25+15*x^2/Pi^2*(4*σa^2+σc^2))*Pi^2}}$

$$\frac{12 x^2\,\sigma a^2+3 x^2\,\sigma c^2+5 \pi^2}{12 x^2} \tag{20}$$

$$\frac{d}{db}\left(\frac{1}{1+e^{-g\cdot x\cdot\left(b-\frac{(b+c)}{2}\right)}}\right)$$

$$\frac{g x\, e^{-g x\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{2\left(1+e^{-g x\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2} \tag{21}$$

$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$

$$pb \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b^2\cdot pb\, db \text{ assuming } g>0 \textbf{ and } c>0 \textbf{ and } x>0$$

$$\frac{3 g^2 x^2 c^2+4 \pi^2}{3 x^2 g^2} \tag{23}$$

$=$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b\cdot pb\, db \text{ assuming } g>0 \textbf{ and } c>0 \textbf{ and } x>0$$

$$c \tag{24}$$

$$subs\left(g=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3 x^2}{4 \pi^2}\cdot\sigma c^2}}, \frac{4 \pi^2}{3 g^2 x^2}\right)$$

$$\frac{\left(4+\frac{3\,x^{2}\,\sigma c^{2}}{\pi^{2}}\right)\pi^{2}}{3\,x^{2}} \tag{25}$$

$$\xrightarrow{\text{normal 1/3/x^2*(4+3*x^2*σc^2/Pi^2)*Pi^2}}$$

$$\frac{3\,x^{2}\,\sigma c^{2}+4\,\pi^{2}}{3\,x^{2}} \tag{26}$$

$$loglikelihood := -\ln\left(1+e^{-x\cdot g1\cdot\left(\mu a-\frac{(\mu a+b+\mu c)}{3}\right)}+e^{-2\cdot x\cdot g1\cdot\left(\mu a-\frac{(\mu a+b+\mu c)}{3}\right)}\right)-\ln\left(1+e^{-x\cdot g2\cdot\left(b-\frac{(b+\mu c)}{2}\right)}\right)-\frac{(b-\mu b)^{2}}{2\,\sigma b^{2}}-\ln\left(\sigma b\sqrt{2\,\pi}\right)$$

$$loglikelihood := -\ln\left(1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)-\ln\left(1+e^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)-\frac{(b-\mu b)^{2}}{2\,\sigma b^{2}}-\ln\left(\sigma b\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\right) \tag{27}$$

$$j := \frac{d}{d\,b}(loglikelihood)$$

$$j := -\frac{\frac{x\,g1\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}}{1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}+\frac{x\,g2\,e^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{2\left(1+e^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}-\frac{b-\mu b}{\sigma b^{2}} \tag{28}$$

$$j2 := \frac{d^{2}}{d\,b^{2}}(loglikelihood)$$

$$j2 := -\frac{\frac{x^{2}\,g1^{2}\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^{2}\,g1^{2}\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}+\frac{\left(\frac{x\,g1\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^{2}}{\left(1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^{2}} \tag{29}$$

$$-\frac{x^2\,g2^2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}+\frac{x^2\,g2^2\left(\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}-\frac{1}{\sigma b^2}$$

$$j3 := -\frac{\frac{x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}$$
$$+\frac{\left(\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}$$
$$-\frac{x^2\,g2^2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}+\frac{x^2\,g2^2\left(\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}$$

$$j3 := -\frac{\frac{x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}$$
$$+\frac{\left(\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}$$
$$-\frac{x^2\,g2^2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{4+4\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}+\frac{x^2\,g2^2\left(\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2} \tag{30}$$

$munieuw := -\frac{j}{j2}$ assuming $\mu a > 0$ **and** $\mu c > 0$ **and** $g1 > 0$ **and** $g2 > 0$ **and** $x > 0$

$$munieuw := -\left(-\frac{\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}\right. \tag{31}$$

$$+\frac{x\,g2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}-\frac{b-\mu b}{\sigma b^{2}}\Bigg)\Bigg/\Bigg($$

$$-\frac{\frac{x^{2}\,g1^{2}\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^{2}\,g1^{2}\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}$$

$$+\frac{\left(\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^{2}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^{2}}$$

$$-\frac{x^{2}\,g2^{2}\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}+\frac{x^{2}\,g2^{2}\left(\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^{2}}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^{2}}-\frac{1}{\sigma b^{2}}\Bigg)$$

$$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$$

$$mun(b) \tag{32}$$

$mun(\mu b)$

$$-\left(-\frac{\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}\right. \tag{33}$$

$$\left.+\frac{x\,g2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}\right)\Bigg/\Bigg($$

$$-\frac{\frac{x^{2}\,g1^{2}\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^{2}\,g1^{2}\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}$$

$$
+\frac{\left(\frac{x\,g1\,e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}
$$

$$
\left.-\frac{x^2\,g2^2\,e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{4\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}+\frac{x^2\,g2^2\left(e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}-\frac{1}{\sigma b^2}\right)
$$

A.4 De berekeningen voor c

$$pref := \frac{(3\,x^2)}{4\sqrt{5}\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c}$$

$$pref := \frac{3\,x^2\sqrt{5}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c} \tag{1}$$

$$ex := -\left(t1 + a - \frac{(b+c)}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 \cdot \frac{12\,x^2}{10\,\pi^2} - (t2+b-c)^2 \cdot \frac{3\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{(a-\mu a)^2}{2\,\sigma a^2} - \frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2}$$

$$ex := -\frac{6\left(t1 + a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{(a-\mu a)^2}{2\,\sigma a^2} - \frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2} \tag{2}$$

$$\overset{\text{complete square}}{=}$$

$$\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)\left(a + \frac{-\frac{6\left(2\,t1 - b - c - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2}}{2\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)}\right)^2 - \frac{6\left(t1 - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2} - \frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2} - \frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2} - \frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2} - \frac{\left(-\frac{6\left(2\,t1 - b - c - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2} + \frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)^2}{4\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)} \tag{3}$$

$$pref2 := pref \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)}}$$

$$pref2 := \frac{3\,x^2\sqrt{5}\,\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2} - \frac{1}{2\,\sigma a^2}}}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c} \tag{4}$$

$$ex2 := -\frac{6\left(t1-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{\left(-\frac{6\left(2\,t1-b-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}+\frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)^2}{4\left(-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma a^2}\right)}$$

$$ex2 := -\frac{6\left(t1-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2+b-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{(b-\mu b)^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{\left(-\frac{6\left(2\,t1-b-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}+\frac{\mu a}{\sigma a^2}\right)^2}{-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\overset{\text{complete square}}{=}$$

$$\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma b^2}-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)\left(b+\left(-\frac{6\left(-t1+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{12\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)x^2}{5\,\pi^2\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)\Bigg/\left(2\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma b^2}-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)\right)\right)^2-\frac{6\left(t1-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}$$

$$-\frac{3\,(t2-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)^2}{-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}}$$

$$-\Bigg(-\frac{6\left(-t1+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{12\,\Bigg(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}}{5\,\pi^2\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}$$

$$-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\Bigg)\Bigg)$$

$$pref3 := pref2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\left(-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma b^2}-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)}}$$

$$pref3 := \tag{7}$$

$$\frac{3\,x^2\,\sqrt{5}\,\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{6\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma a^2}}}\,\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{27\,x^2}{40\,\pi^2}-\frac{1}{2\,\sigma b^2}-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}}}}{20\,\pi^4\,\sigma b\,\sigma c}$$

$$ex3 := -\frac{6\left(t1-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2}$$

$$-\frac{\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)^2}{-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}}-\Bigg(-\frac{6\left(-t1+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\frac{\mu b}{\sigma b^2}$$

$$-\frac{36\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\Bigg)\Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
ex3 := & -\frac{6\left(t1-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2-c)^2\,x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2} \\
& -\frac{\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)^2}{-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}} \\
& -\frac{1}{-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}-\frac{144\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}}\left(-\frac{6\left(-t1+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right. \\
& \left.-\frac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{12\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)x^2}{5\,\pi^2\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$mvt1 :=$

$$\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\mathrm{e}^{\left(-\frac{6\left(t1-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)^2 x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(t2-c)^2 x^2}{8\,\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)^2}{-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}} - \frac{\left(-\frac{6\left(-t1+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}-\frac{3\,(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\,\pi^2}+\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{12\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\,x}\right)x^2}{5\,\pi^2}\right)x^2}{5\,\pi^2\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)^2}{-\frac{27\,x^2}{10\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}-\frac{144\,x^4}{25\,\pi^4\left(-\frac{24\,x^2}{5\,\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}}\right)}\,\mathrm{d}t2$$

assuming $\sigma a > 0$ **and** $\sigma b > 0$ **and** $x > 0$

$mvt1 :=$ **(9)**

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\,(12\,x^2\,\sigma a^2+3\,x^2\,\sigma b^2+5\,\pi^2)}\left(12\,\mu a^2\,x^2-12\,\mu a\,\mu b\,x^2-4\,\mu a\sqrt{3}\,\pi\,x-12\,\mu a\,c\,x^2+24\,\mu a\,t1\,x^2+3\,\mu b^2\,x^2+2\,\mu b\sqrt{3}\,\pi\,x+6\,\mu b\,c\,x^2-12\,\mu b\,t1\,x^2+2\sqrt{3}\,\pi\,c\,x-4\sqrt{3}\,\pi\,t1\,x+3\,c^2\,x^2-12\,x^2\,t1\,c+12\,x^2\,t1^2+\pi^2\right)}\sqrt{3}\,\sqrt{2}\,\left(36\,x^4\,\sigma a^2\,\sigma b^2+48\,\pi^2\,x^2\,\sigma a^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma b^2+20\,\pi^4\right)\sqrt{\pi}\right)\Big/\left(3\,x\sqrt{\left(12\,x^2\,\sigma a^2+3\,x^2\,\sigma b^2+5\,\pi^2\right)\left(36\,x^4\,\sigma a^2\,\sigma b^2+48\,\pi^2\,x^2\,\sigma a^2+27\,\pi^2\,x^2\,\sigma b^2+20\,\pi^4\right)}\right)$$

$mvt2 :=$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(-\frac{6\left(t1-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6x}\right)^2 x^2}{5\pi^2}-\frac{3(t2-c)^2x^2}{8\pi^2}-\frac{\mu a^2}{2\,\sigma a^2}-\frac{\mu b^2}{2\,\sigma b^2}-\frac{\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3x}\right)x^2}{5\pi^2}\right)^2}{-\frac{24x^2}{5\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}}-\frac{\left(-\frac{6\left(-t1+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6x}\right)x^2}{5\pi^2}-\frac{3(2\,t2-2\,c)\,x^2}{8\pi^2}+\frac{\mu b}{\sigma b^2}-\frac{12\left(\frac{\mu a}{\sigma a^2}-\frac{6\left(2\,t1-c-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3x}\right)x^2}{5\pi^2}\right)x^2}{5\pi^2\left(-\frac{24x^2}{5\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}\right)^2}{-\frac{27x^2}{10\pi^2}-\frac{2}{\sigma b^2}-\frac{144x^4}{25\pi^4\left(-\frac{24x^2}{5\pi^2}-\frac{2}{\sigma a^2}\right)}}\right)}\,\mathrm{d}t1$$

assuming $\sigma a > 0$ **and** $\sigma b > 0$ **and** $x > 0$

$$mvt2 := \left(\mathrm{e}^{-\frac{3\left(\mu b^2-2\,c\,\mu b+2\,\mu b\,t2+c^2-2\,t2\,c+t2^2\right)x^2}{2\left(3x^2\sigma b^2+4\pi^2\right)}}\sqrt{6}\left(36x^4\sigma a^2\sigma b^2+48\pi^2x^2\sigma a^2+27\pi^2x^2\sigma b^2+20\pi^4\right)\sqrt{\pi}\right)\Big/\left(6\,x\sqrt{\left(3x^2\sigma b^2+4\pi^2\right)\left(36x^4\sigma a^2\sigma b^2+48\pi^2x^2\sigma a^2+27\pi^2x^2\sigma b^2+20\pi^4\right)}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-g\cdot x\cdot\left(a-\frac{(a+b+c)}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\cdot g\cdot x\cdot\left(a-\frac{(a+b+c)}{3}\right)}}\right)$$

$$-\frac{-\frac{2\,g\,x\,\mathrm{e}^{-g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}-\frac{4\,g\,x\,\mathrm{e}^{-2\,g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}}{\left(1+\mathrm{e}^{-g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,g\,x\left(\frac{2\,a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^{2}} \tag{11}$$

$$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$$

$$pa \tag{12}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} a^2 \cdot pa \,\mathrm{d}a$ assuming $g > 0$ **and** $b > 0$ **and** $c > 0$ **and** $x > 0$

$$\frac{3\,g^2\,x^2\,b^2+6\,g^2\,x^2\,b\,c+3\,g^2\,x^2\,c^2+2\,\pi\,g\,x\,b\,\sqrt{3}+2\,\pi\,g\,x\,c\,\sqrt{3}+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} \tag{13}$$

$=$

$\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot pa \,\mathrm{d}a$ assuming $g > 0$ **and** $b > 0$ **and** $c > 0$ **and** $x > 0$

$$\frac{3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi}{6\,g\,x} \tag{14}$$

$$\frac{3\,g^2\,x^2\,b^2+6\,g^2\,x^2\,b\,c+3\,g^2\,x^2\,c^2+2\,\pi\,g\,x\,b\,\sqrt{3}+2\,\pi\,g\,x\,c\,\sqrt{3}+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} - \left(\frac{3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi}{6\,g\,x}\right)^2$$

$$\frac{3\,g^2\,x^2\,b^2+6\,g^2\,x^2\,b\,c+3\,g^2\,x^2\,c^2+2\,\pi\,g\,x\,b\,\sqrt{3}+2\,\pi\,g\,x\,c\,\sqrt{3}+6\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} - \frac{\left(3\,g\,x\,b+3\,g\,x\,c+\sqrt{3}\,\pi\right)^2}{36\,g^2\,x^2} \tag{15}$$

$$\xrightarrow{\text{normal 1/12*(3*g^2*x^2*b^2+6*g^2*x^2*b*c+3*g^2*x^2*c^2+2*Pi*g*x*b*3^(1/2)+2*Pi*g*x*c*3^(1/2)+6*Pi^2)/x^2/g^2-1/36*(3*g*x*b+3*}}$$

$$\frac{5\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2} \tag{16}$$

$subs\left(g = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{12\,x^2}{5\,\pi^2}\cdot\frac{1}{4}\left(4\,\sigma a^2+\sigma b^2\right)}}, \frac{5\,\pi^2}{12\,x^2\,g^2}\right)$ assuming $x > 0$ **and** $\sigma a > 0$ **and** $\sigma b > 0$

$$\frac{\pi^2\left(25+\frac{15\,x^2\left(4\,\sigma a^2+\sigma b^2\right)}{\pi^2}\right)}{60\,x^2} \tag{17}$$

$$\xrightarrow{\text{normal 1/60*Pi^2/x^2*(25+15*x^2/Pi^2*(4*σa^2+σb^2))}}$$

$$\frac{12\,x^2\,\sigma a^2+3\,x^2\,\sigma b^2+5\,\pi^2}{12\,x^2} \tag{18}$$

$$\frac{d}{db}\left(\frac{1}{1+e^{-g\cdot x\cdot\left(b-\frac{(b+c)}{2}\right)}}\right)$$

$$\frac{g\,x\,e^{-g\,x\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{2\left(1+e^{-g\,x\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2} \qquad (19)$$

$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$

$$pb \qquad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b^2\cdot pb\, db \text{ assuming } g>0 \textbf{ and } c>0 \textbf{ and } x>0$$

$$\frac{3\,c^2\,g^2\,x^2+4\,\pi^2}{3\,x^2\,g^2} \qquad (21)$$

=

$$\int_{-\infty}^{\infty} b\cdot pb\, db \text{ assuming } g>0 \textbf{ and } c>0 \textbf{ and } x>0$$

$$c \qquad (22)$$

$$subs\left(g=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3\,x^2}{4\,\pi^2}\cdot\sigma b^2}},\ \frac{4\,\pi^2}{3\,g^2x^2}\right)$$

$$\frac{\pi^2\left(4+\frac{3\,x^2\,\sigma b^2}{\pi^2}\right)}{3\,x^2} \qquad (23)$$

$\xrightarrow{\text{normal 1/3*Pi^2/x^2*(4+3*x^2/Pi^2*σb^2)}}$

$$\frac{3\,x^2\,\sigma b^2+4\,\pi^2}{3\,x^2} \qquad (24)$$

$$loglikelihood := -\ln\left(1+e^{-x\cdot g1\cdot\left(\mu a-\frac{(\mu a+\mu b+c)}{3}\right)}+e^{-2\cdot x\cdot g1\cdot\left(\mu a-\frac{(\mu a+\mu b+c)}{3}\right)}\right)-\ln\left(1+e^{-x\cdot g2\cdot\left(\mu b-\frac{(\mu b+c)}{2}\right)}\right)-\frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}-\ln\left(\sigma c\sqrt{2\,\pi}\right)$$

$$loglikelihood := -\ln\left(1+e^{-x g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+e^{-2 x g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)-\ln\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)-\frac{(c-\mu c)^2}{2\,\sigma c^2}-\ln\left(\sigma c\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\right) \qquad (25)$$

$$j := \frac{d}{dc}(loglikelihood)$$

$$j := -\frac{\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}} - \frac{x\,g2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)} - \frac{c-\mu c}{\sigma c^2} \tag{26}$$

$$j2 := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,c^2}(loglikelihood)$$

$$j2 := -\frac{\frac{x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}} + \frac{\left(\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^2} - \frac{x^2\,g2^2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)} + \frac{x^2\,g2^2\left(\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2} - \frac{1}{\sigma c^2} \tag{27}$$

$$j3 := -\frac{\frac{x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^2\,g1^2\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}}{1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}} + \frac{\left(\frac{x\,g1\,\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^2} - \frac{x^2\,g2^2\,\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)} + \frac{x^2\,g2^2\left(\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+\mathrm{e}^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2}$$

$$j3 := -\frac{\frac{x^2\,g1^2\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^2\,g1^2\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}} + \frac{\left(\frac{x\,g1\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^2} - \frac{x^2\,g2^2\,e^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{4+4\,e^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}} + \frac{x^2\,g2^2\left(e^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+e^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2} \tag{28}$$

$munieuw := -\frac{j}{j2}$ assuming $\mu a > 0$ **and** $\mu b > 0$ **and** $g1 > 0$ **and** $g2 > 0$ **and** $x > 0$

$$munieuw := -\left(-\frac{\frac{x\,g1\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}}{1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}} - \frac{x\,g2\,e^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{2\left(1+e^{-x\,g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)} - \frac{c-\mu c}{\sigma c^2}\right) \Bigg/ \left(-\frac{\frac{x^2\,g1^2\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\,x^2\,g1^2\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}} + \frac{\left(\frac{x\,g1\,e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\,x\,g1\,e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}+e^{-2\,x\,g1\left(\frac{2\,\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{c}{3}\right)}\right)^2} \right. \tag{29}$$

$$-\frac{x^2\, g2^2\, e^{-x g2 \left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}}{4\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)}+\frac{x^2\, g2^2 \left(e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{c}{2}\right)}\right)^2}-\frac{1}{\sigma c^2}\Bigg)$$

$$\xrightarrow{\text{assign to a name}}$$

$$mun(c) \tag{30}$$

$mun(\mu c)$

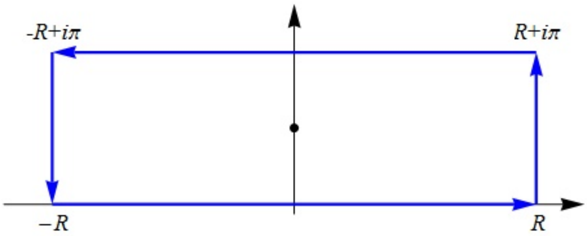
$$-\left(-\frac{\frac{x\, g1\, e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\, x\, g1\, e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}}{1+e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}-\frac{x\, g2\, e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{2\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}\right)\Bigg/\left(-\frac{\frac{x^2\, g1^2\, e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}+\frac{4\, x^2\, g1^2\, e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{9}}{1+e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}+\frac{\left(\frac{x\, g1\, e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}+\frac{2\, x\, g1\, e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}}{3}\right)^2}{\left(1+e^{-x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}+e^{-2 x g1\left(\frac{2\mu a}{3}-\frac{\mu b}{3}-\frac{\mu c}{3}\right)}\right)^2}-\frac{x^2\, g2^2\, e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}}{4\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)}+\frac{x^2\, g2^2\left(e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}{4\left(1+e^{-x g2\left(\frac{\mu b}{2}-\frac{\mu c}{2}\right)}\right)^2}-\frac{1}{\sigma c^2}\right) \tag{31}$$

B Afleiding complexe integraal

Om sigma en mu te vinden voor de benadering van de logistische verdeling door een normale verdeling, proberen we de volgende integraal te bepalen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2 x e^{-x(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c)}}{2(1+e^{-x(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c)})^2} db$$

Deze integraal is op te lossen in Maple of in een ander soortgelijk programma, maar het lijkt ook te kunnen met complexe functie theorie. We zetten hiervoor de integraal om naar een rechthoekige contourintegraal in de complexe ruimte.



Figuur 2: Idee van een rechthoekige contour Γ in het complexe vlak. De punt stelt een simpele pool van de te integreren functie voor.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 x e^{-x(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}c)}}{2(1+e^{-x(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}c)})^2} dz = \int_{\Gamma} g(z)dz$$

Deze contour-integraal kunnen we splitsen in integralen over verschillende stukken van de contour:

$$\int_{\Gamma} g(z)dz = \int_{-R}^{R} g(z)dz + \int_{R}^{R+2yi} g(z)dz + \int_{R+2yi}^{-R+2yi} g(z)dz + \int_{-R+2yi}^{-R} g(z)dz \tag{20}$$

Hierbij is de eerste integraal aan de rechterkant de integraal waarvan we de waarde willen weten. y is het imaginaire deel van de polen van $g(z)$. Volgens de residu stelling is de contour integraal van een functie gelijk aan de som van de residuen van de functie in de simpele polen van de functie:

$$\int_{\Gamma} g(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(g(z), z_j)$$

De waarde van de eerste integraal aan de rechterkant van (20) kunnen we nu bepalen door de derde integraal om te schrijven naar de eerste integraal met een factor ervoor. Verder kunnen we aantonen dat de tweede en vierde integraal aan de rechterkant van (20) naar 0 gaan als R naar oneindig gaat.

C Python code voor het testen van een rating systeem

```
##### libraries #####
import pandas as pd
import numpy as np


##### Import data #####
DATA = pd.read_csv(r'C:\Users\Isa\Documents\TUDelft\Jaar 3\BEP\DATASET.csv', sep = ';',
                                         usecols = ['Date','POSITION','TOTAL', 'CREW'
                                         ])
data_array = np.array(DATA)

## Lijst van de deelnemers waarin je met een naam het bijbehorende nummer kunt opzoeken
                                         ##
```

```python
DEELNEMERS = pd.read_csv(r'C:\Users\Isa\Documents\TUDelft\Jaar 3\BEP\DEELNEMERS.csv', sep
                                                = ';', usecols = ['CREW'])
deelnemers_array = np.array(DEELNEMERS)
deelnemers_dict = {}
for i in range(len(deelnemers_array)):
    naam = deelnemers_array[i,0]
    deelnemers_dict[naam] = i

## Lijst met de data van alle wedstrijden ##
dates = []
n = 0
for i in range(len(data_array)):
    date = data_array[i,0]
    if date != n:
        dates.append(date)
        n = date

## Dataset van de uitslag per wedstrijd, [welke wedstrijd, welke plaats, plaats/totaal/
                                                deelnemer]##
data = np.zeros((len(dates), 98, 3))
d = 0
t = 0
for i in range(len(data_array)):
    date = dates[d]
    if date == data_array[i,0]:
        data[d, i - t, 0] = data_array[i, 1] #positie
        data[d, i - t, 1] = data_array[i, 2] #totaal aantal deelnemers
        naam = data_array[i,3]
        data[d, i - t, 2] = deelnemers_dict[naam] #naam deelnemer
    else:
        d = d+1
        t = data_array[i - 1, 2] + t
        data[d, i - t, 0] = data_array[i, 1] #positie
        data[d, i - t, 1] = data_array[i, 2] #totaal aantal deelnemers
        naam = data_array[i,3]
        data[d, i - t, 2] = deelnemers_dict[naam] #naam deelnemer

## Een lijst waarin de rating per deelnemer terecht komt. Eerste kolom is score, tweede
                                                kolom standaarddeviatie ##
ratings = np.zeros((len(deelnemers_array), 2))

##### Functies voor het aanpassen van een rating op basis van een wedstrijd #####
def update_wedstrijd(wdstr):
    TOTAL = int(data[wdstr, 0, 1])
    for i in range(TOTAL): #TOTAL het totaal aantal deelnemers aan de wedstrijd
        ##### ophalen oude rating #####
        naam = int(data[wdstr, i, 2])
        mu = ratings[naam, 0]
        sigma = ratings[naam, 1]
        ##### aanpassen rating #####
        mu_n = 1
        sigma_n = 1
        ratings[naam, 0] = mu_n
        ratings[naam, 1] = sigma_n
```