

Code CT5302

Dichtheidsstromen

September 1998

Faculteit Civiele Techniek en
Geowetenschappen

C. Kranenburg


TU Delft Delft
University of
Technology



69311071
Bestelnummer: 06917300049



VOORWOORD

Van deze handleiding bij het college b81 - Dichtheidsstromen behoort slechts een deel tot de tentamenstof. De betreffende onderdelen zijn:

de hoofdstukken 1, 2, 3 en 4

de paragrafen 1, 3.1 en 3.2 van hoofdstuk 5

de paragrafen 1, 3 en 4 van hoofdstuk 6

de paragrafen 1, 1.1, 1.2, 2.2 en 3 van hoofdstuk 7

de bladzijden 7.21 t/m 7.24 (voorbeeld) van hoofdstuk 7

De gedeelten van de tekst die niet tot de tentamenstof behoren, zijn weergegeven in een kleinere letter.

Voor het afleggen van het (mondelinge) tentamen en vragen kan men zich wenden tot de docent, dr.ir. C. Kranenburg, Laboratorium voor Vloeistofmechanica, kamer 0.08, tel. 015.2781971. Het afleggen van een tentamen is niet aan een bepaalde periode gebonden.



ERRATA

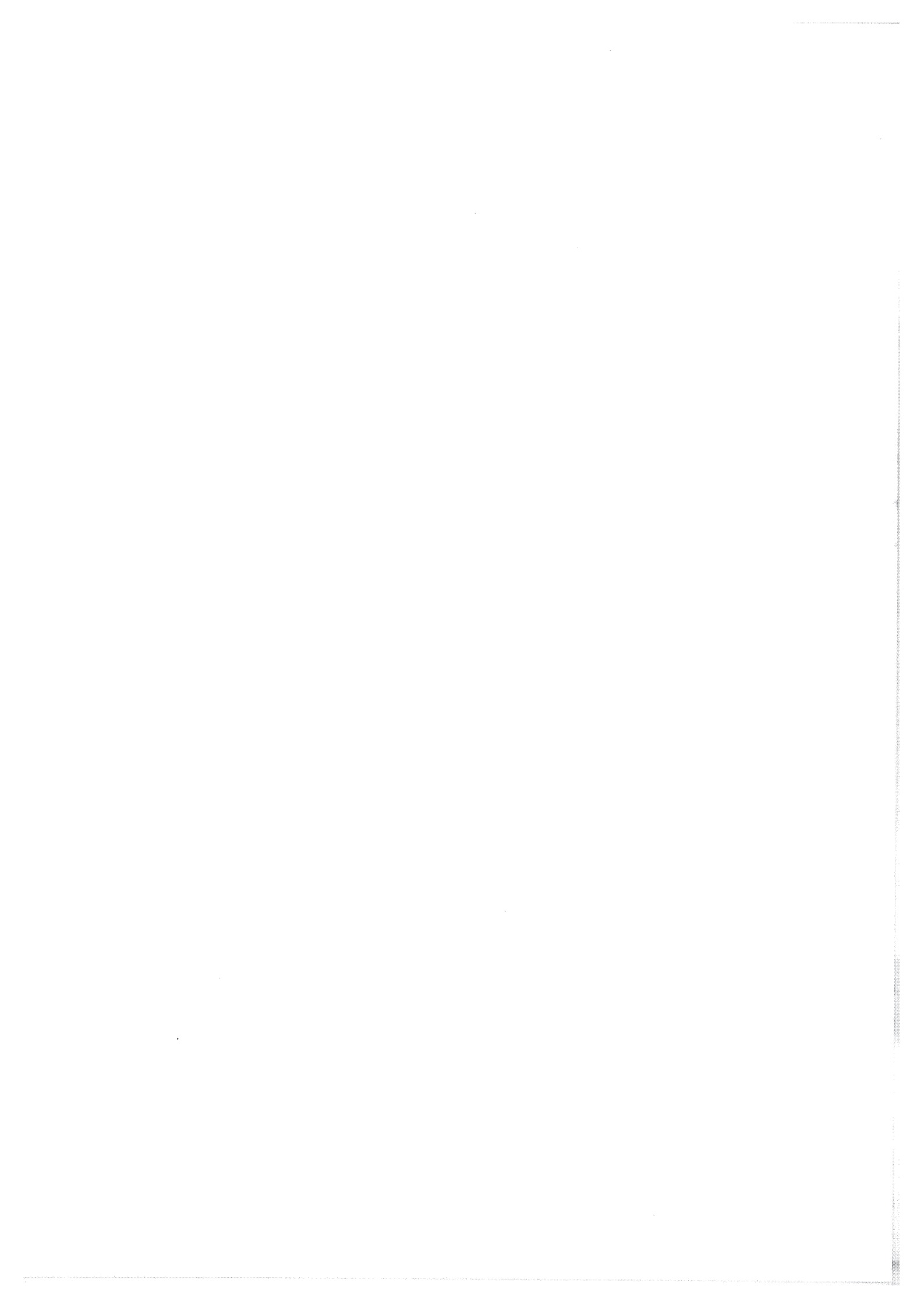
Handleiding college b81/wa5302, Dichtheidsstromen

April 1998

(r. = regel; v.o. = van onder; m.z. = moet zijn)

- blz. 1.2, r. 5 en 4 v.o.: b70 m.z. me2100
b71 en b73 (Lange golven) m.z. wa3310 (Stroming in open waterlopen)
- blz. 1.3, r. 14 v.o.: Aanvulling A m.z. par. 3 van dit hoofdstuk
- blz. 1.4, r. 10: zout m.z. zeezout
- blz. 1.5, Tabel: verwissel θ ($^{\circ}\text{C}$) en S ($\%$)
- blz. 2.2, r. 1: b71 m.z. me2100
b73 m.z. wa3310
- blz. 3.1, r. 10: b73 m.z. wa3310
- blz. 3.17, Figuur 3.11: de uitwijking van het grensvlak t.g.v. de externe lange golf is te groot (ongeveer een factor 2) weergegeven.
- blz. 3.24, Literatuur 1 wordt: J.A. Battjes, Stroming in waterlopen (handleiding college wa3310).
- blz. 4.6, Vergelijking 4.15: $\epsilon g a$ m.z. $\epsilon \rho g$
- blz. 4.12, r. 3: voorbeelden 1 en 2 m.z. de eerste twee voorbeelden
- blz. 4.15, r. 2 v.o.: stoming m.z. stroming
- blz.4.17, Figuur 4.14: een aantal getrokken lijnen moet vervangen worden door streeplijnen (overgang kanaal - zee, grensvlakken rechts boven en links onder de interne sprong, horizontale lijn door het punt met kritische stroming).
- blz. 4.18, Literatuur 3: b71)1989. m.z. me2100).
- blz. 5.12, r. 7: stroomsnelheid m.z. stroomsnelheid u_0 (positief naar rechts)
Figuur 5.9: vervang $c - u_n$ door $c + u_0 - u_n$ ($n = 1$ of 2).
De vervorming van het vrije oppervlak is in Figuur 5.9 overdreven weergegeven.
Vergelijkingen 5.24 en 5.25: vervang $c - u_1$ door $c + u_0 - u_1$
- blz. 5.14, eerste vergelijking: vervang $u_1 - c$ door $c + u_0 - u_1$
- blz. 5.16, Literatuur 1: b70 m.z. me2100
- blz. 6.1, r. 16: b76 m.z. wa4320
- blz. 6.9, r. 4 v.o.: subkritisch m.z. intern subkritisch
- blz. 7.2, r. 2: b82 m.z. b82/wa5312
- blz. 7.8, Figuur 7.4: wandturbulentie m.z. bodemturbulentie
- blz. 7.9, midden: massatransport m.z. turbulente massatransport
- blz. 7.38, Literatuur 1: b82 m.z. b82/wa5312
Literatuur 3: b71 m.z. me2100

Deze lijst van errata kan onvolledig zijn; andere verbeteringen e.d. zijn welkom!



INHOUD	blz.
VOORWOORD	
Hoofdstuk 1 - INLEIDING	
1. Inhoud van het college	1.1
2. De dichtheid van water	1.3
3. Basisvergelijkingen voor wrijvingloze gelaagde stromen	1.6
Hoofdstuk 2 - HET LAGENMODEL	
1. Inleiding	2.1
2. Vergelijkingen	2.2
3. Voorbeelden	2.10
Hoofdstuk 3 - LANGE GOLVEN IN EEN TWEELAGENSYSTEEM	
1. Inleiding	3.1
2. Toepassing van de methode der karakteristieken	3.1
3. Golven met kleine amplitude	3.9
3.1. Uitwerking karakteristiekenmethode	3.10
3.2. Voorbeelden	3.16
4. Afzonderlijke vergelijkingen voor interne en externe golven	3.21
Hoofdstuk 4 - STATIONAIRE TWEELAGENSTROMING	
1. Inleiding	4.1
2. Vergelijkingen	4.1
3. Kritische, sub- en superkritische stroming; dubbelkritische stroming	4.3
4. Aanpassing aan de randvoorwaarden	4.8
5. Voorbeelden	4.10
Hoofdstuk 5 - INTERNE SPRONGEN EN FRONTEN	
1. Inleiding	5.1
2. Ontstaan en stabiliteit van een interne sprong	5.2
3. De sprongvergelijkingen	5.5
3.1 Het geval dat één van de debieten nul is	5.10
3.2. Het geval dat slechts één van de lagen doorloopt (fronten)	5.11

Hoofdstuk 6 - INTERNE KORTE GOLVEN EN STABILITEIT VAN GELAAGDE STROMING	
1. Inleiding	6.1
2. Korte golven bij scherp grensvlak	6.2
3. Kelvin-Helmholtz instabiliteit	6.7
4. Stabiliteit bij geleidelijk dichtheidsverloop	6.11
Hoofdstuk 7 - TURBULENTIE EN MENGING	
1. Fysische uitgangspunten	7.1
1.1. Enkele opmerkingen over turbulentie waarbij gelaagdheid geen rol speelt	7.2
1.2. De invloed van gelaagdheid	7.7
1.3. Het behoud van volume bij menging	7.16
2. Wiskundige modellen	7.17
2.1. Tweelagensysteem met menging tussen de lagen	7.18
2.2. Continue gelaagdheid	7.24
2.3. Dispersie	7.29
3. Zoutindringing in een goed gemengd estuarium	7.31

Literatuurverwijzingen aan het eind van de hoofdstukken

Hoofdstuk 1 - INLEIDING

1 Inhoud van het college

In verschillende voor de civiele praktijk van belang zijnde gevallen wordt de stroming van vloeistoffen beïnvloed door verschillen in soortelijk gewicht. Het soortelijk gewicht γ van een vloeistof is gedefiniëerd als

$$\gamma = \rho g \quad (1.1)$$

waarin ρ de dichtheid van de vloeistof en g de versnelling van de zwaartekracht voorstelt. Het college b81 handelt over stromingen waarbij verschillen in soortelijk gewicht een rol spelen. De versnelling van de zwaartekracht is nagenoeg constant nabij het aardoppervlak en over niet te grote afstanden, zodat verschillen in soortelijk gewicht corresponderen met verschillen in dichtheid. Het college beperkt zich tot die gevallen waarin de stroming ontstaat of in belangrijke mate beïnvloed wordt door de werking van de zwaartekracht op een vloeistof waarin dichtheidsverschillen voorkomen. De samendrukbaarheid van een vloeistof is bij vele toepassingen niet van belang. Als tweede beperking wordt daarom verondersteld dat de vloeistof onsamendrukbaar is. Hierdoor kan de invloed van de druk op de dichtheid, die wel een rol speelt bij b.v. waterslag en op grotere diepten in oceanen, buiten beschouwing blijven. Het aldus beperkte gebied is nog zeer ruim, en omvat b.v. nog de interactie tussen lucht (wind) en water. Een derde, minder ingrijpende, beperking is nu dat hoofdzakelijk aandacht besteed zal worden aan gevallen, waarbij de dichtheidsverschillen relatief klein zijn, dus

$$\frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{min}} \ll 1 \quad (1.2)$$

waarin ρ_{max} en ρ_{min} de maximale resp. minimale dichtheid van de vloeistof voorstellen. Dergelijke relatief kleine dichtheidsverschillen kunnen ontstaan door o.a. temperatuurverschillen in de vloeistof, variaties in hoeveelheid opgeloste stof (b.v. zout in water) en (geringe) concentraties van gesuspendeerd materiaal zoals slib. Ook kunnen hieronder systemen vallen bestaande uit verschillende vloeistoffen, b.v. water en olie.

Toepassingsgebieden van het aldus geselecteerde onderdeel van de vloeistofmechanica betreffen in het algemeen gevallen waarbij vloeistoffen van verschillende herkomst en daardoor verschillende dichtheid met elkaar in aanraking komen. Dichtheidsverschillen kunnen ook ontstaan door plaatselijke verwarming of afkoeling van de vloeistof.

Voorbeelden uit de waterbouwkunde waarbij dichtheidsverschillen in de vloeistof(fen) een rol kunnen spelen, zijn:

- Een estuarium waar zoet water uitstroomt in een zee met zout water. Bij geringe invloed

van het getij ontstaat een z.g. zoutwig langs de bodem.

- Het openen van een zeeluis tussen een kanaalpand met zoet water en een zee met zout water. Dit leidt in eerste instantie tot een z.g. uitwisselingsstroming waarbij een zoute laag (bij de bodem) en een zoete laag (bij het vrije oppervlak) in tegengestelde richting stromen.
- De uitwisseling van zoet rivierwater en zeewater in een zeehaven onder invloed van de getijbeweging. Het uitwisselingsproces kan aanleiding geven tot sterke aanslibbing in de haven.
- De stroming door een kanaal dat de verbinding vormt tussen twee bekkens met water van verschillende dichtheid.
- De uitstroming van relatief warm water (b.v. koelwater) in kouder water.
- Het vrijkomen van olie bij oliewinning op zee.
- Het ontstaan van thermische gelaagdheid in een diep meer onder invloed van zoninstraling door het vrije oppervlak en menging door wind.
- De onttrekking van koud water uit een bekken met thermische gelaagdheid.
- Het ontstaan van modderstromen aan de bodem van estuaria en kustwateren (fluid mud).

De dichtheidsgelaagdheid is in de hierboven genoemde gevallen (statisch) stabiel: de dichtheid neemt toe met de diepte, of is constant over een deel van de diepte.

De vloeistoffen kunnen mengend zijn (zoet en zout water, warm en koud water, water en alcohol) of niet-mengend (olie en water, benzine en alcohol). In het eerste geval vindt menging plaats tot op moleculair niveau (verg. het oplossen van een vaste stof in een vloeistof). Het mengproces is dan onomkeerbaar. In het geval van niet-mengende vloeistoffen is dat niet zo: ook na intensief roeren van de vloeistoffen ontstaat slechts tijdelijk een gemengde toestand; uiteindelijk scheiden de vloeistoffen zich weer.

Het is praktisch zinvol onderscheid te maken naar de aard van de gelaagdheid. De dichtheid kan in verticale richting of geleidelijk verlopen, of meer sprongsgewijs ter plaatse van z.g. grensvlakken. Een grensvlak vormt dan de overgang tussen twee lagen met bij benadering constante dichtheid, zie fig. 1.1. In dit college zal veel aandacht besteed worden aan het tweede type gelaagdheid (hoofdstukken 2, 3, 4 en 5). De reden hiervoor is dat een aantal praktisch belangrijke gevallen redelijk goed beschreven kan worden door de stroming op te vatten als een dergelijk lagensysteem, terwijl slechts een beperkte kennis van de turbulente processen vereist is en de wiskundige (eventueel numerieke) behandeling ervan relatief eenvoudig is.

De stroming in open leidingen zoals behandeld in de colleges b70, b71 (Vloeistofmechanica) en b73 (Lange golven) is op te vatten als de stroming in een systeem bestaande uit een enkele laag. De stroming in een meerlagensysteem vertoont hiermee verwantschap, maar is gecompliceerder. De theorie voor een meerlagensysteem is een uitbreiding van die voor een éénlaagsysteem. Golven in een meerlagensysteem kunnen worden onderverdeeld in interne en

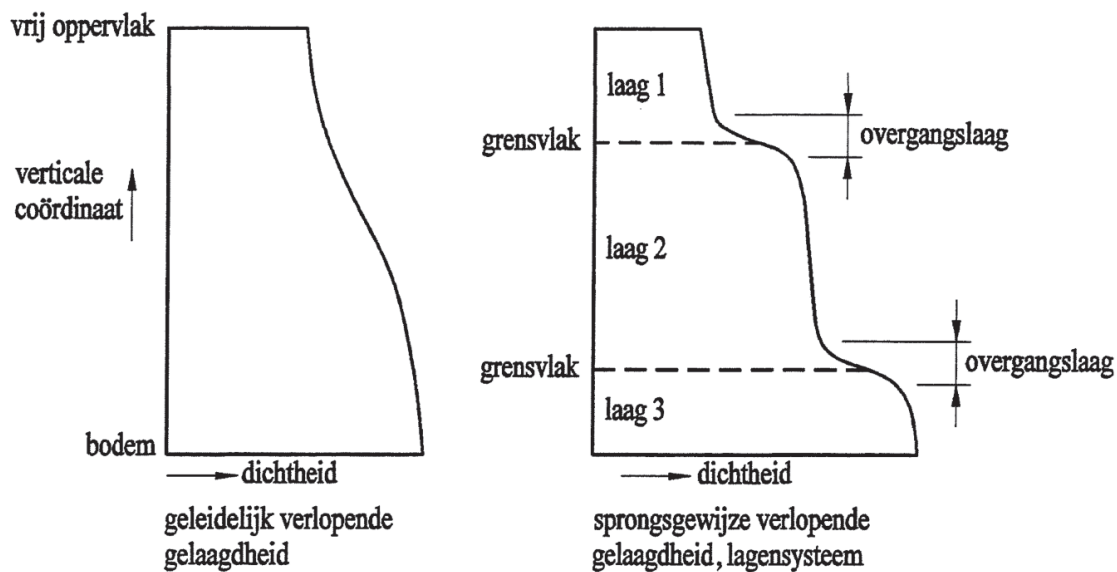


Fig. 1.1 - Aard van de gelaagdheid.

externe golven. Bij interne golven is de vervorming van het grensvlak (of de grensvlakken) groot t.o.v. die van het vrije oppervlak; bij externe golven is dit niet het geval. Dit type golven wordt slechts in geringe mate beïnvloed door dichtheidsverschillen. Evenals in een éénlaagsysteem kan in een meerlagensysteem onderscheid gemaakt worden tussen lange en korte golven. (Quasi-)stationaire stromingen in een dergelijk systeem worden wel aangeduid als dichtheidsstromen. Analoog aan de watersprong in een éénlaagsysteem kunnen in een meerlagensysteem interne sprongen en fronten optreden.

Enkele aspecten van geleidelijk verlopende gelaagdheid komen in Aanvulling A aan de orde, en aan het eind van het college in verband met de instabiliteit van gelaagde stroming en turbulente menging in de verticaal.

2 De dichtheid van water

De dichtheid van een als onsamendrukbaar opgevatte vloeistof hangt o.a. af van de aard van de vloeistof - de dichtheid van b.v. olie is anders dan die van water. Beperken we ons tot water als vloeistof, dan hangt de dichtheid nog af van

- de temperatuur θ
- concentraties c_1, c_2, \dots van stoffen in oplossing, en
- de concentraties $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ van quasi-zwevende (gesuspendeerde) stoffen (quasi-zwevende stof: stof waarvan de deeltjes zo klein zijn dat de val- of stijgsnelheden ten opzichte van de omringende vloeistof gering zijn).

Er geldt dan dus

$$\rho = \rho(\theta, c_1, c_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \quad (1.3)$$

Het verband tussen ρ enerzijds en θ en c_1, c_2, \dots anderzijds moet empirisch worden vastgesteld (zie het eind van deze paragraaf voor de invloed van een gesuspendeerde stof op de dichtheid).

Voor zeewater blijkt de samenstelling van het opgeloste zout vrij constant te zijn voor de verschillende plaatsen op aarde (ongeveer drie-kwart bestaat uit NaCl). De totale concentratie van het zeezout varieert wel. Er is een aantal grootheden waarin het zoutgehalte uitgedrukt kan worden, zoals

- de **saliniteit** S , Het aantal kg zout per 1000 kg zeewater uitgedrukt in promillen,
- de **chloriniteit** Cl , het aantal kg chloorionen per 1000 kg zeewater uitgedrukt in promillen, en
- de **geleidendheid**.

De relatie tussen saliniteit en chloriniteit is

$$S \approx 0,03 + 1,805Cl \quad (1.4)$$

De saliniteit is verschillend voor oceanen en zeeën:

oceanen	:	$S = 34 \text{ à } 36\text{‰}$
Middellandse zee:		$S = 38 \text{ à } 39\text{‰}$
Noordzee	:	$S = 31 \text{ à } 33\text{‰}$
Rode zee	:	$S \approx 40\text{‰}$
Oostzee	:	$S < 31\text{‰}$, tot 0‰ in de uiterste punt van de Botnische golf (invloed rivierafvoeren)
zeearmen en		
Nederlandse kust:		$S < 31\text{‰}$

Een benaderingsformule voor de dichtheid van zeewater eventueel verdund met gedestilleerd water is ($0 < S < 40\text{‰}$, $0 < \theta < 20^\circ\text{C}$, fout ca. $0,1 \text{ kg/m}^3$)

$$\rho \approx 1000 + 0,805S - 0,0166|\theta - 4 + 0,212S|^{1,69} \quad (1.5)$$

waarin ρ is uitgedrukt in kg/m^3 en θ in $^\circ\text{C}$. Voor b.v. verontreinigd rivierwater gelden in het algemeen andere relaties. Onderstaande tabel geeft een indruk van de dichtheidsvariaties van (verdund) zeewater als gevolg van variaties in temperatuur en saliniteit.

θ (°C)	S (‰)	0	10	20
0		999,8	999,7	998,2
20		1016,1	1015,3	1013,4
40		1032,0	1030,7	1028,5

De invloed van saliniteit en temperatuur op de dichtheid van zeewater (in kg/m³). Lit. 1 geeft een meer nauwkeurige bepalingsmethode.

De relatieve dichtheidsverschillen door variaties in saliniteit (0 - 40 ‰) liggen in de orde van procenten, die door variaties in temperatuur (0 - 20 °C) in de orde van promillen. In estuaria met bovenafvoer overheersen daardoor in het algemeen de dichtheidsverschillen ontstaan door verschillen in saliniteit. Dichtheidsverschillen ten gevolge van temperatuurvariaties kunnen echter wel van belang zijn als de saliniteit constant is of weinig varieert. Dit is b.v. het geval in zoetwaterbekkens en oceanen, en bij koelwaterproblemen.

Vergelijking (1.5) geeft het anomale temperatuurgedrag van water weer: dit bereikt zijn maximale dichtheid voor

$$\theta = 4 - 0,212S \text{ (°C)} \quad (1.6)$$

Het anomale temperatuurgedrag heeft belangrijke gevolgen voor het thermisch gedrag van bekkens en meren. Als in het najaar het water gaat afkoelen, daalt de temperatuur aan het oppervlak het snelst. Zolang de temperatuur aldaar hoger is dan de waarde volgens (1.6), is het soortelijk gewicht aan het oppervlak groter dan dat op grotere diepte. Deze gelaagdheid is instabiel en de inhoud van het bekken "keert om": het oppervlaktewater zakt naar beneden en water op grotere diepte stijgt op. Water afkomstig van verschillende diepten vermengt zich hierbij. Dit proces zet zich voort totdat de temperatuur aan het oppervlak daalt beneden de waarde volgens (1.6). Bij verdere temperatuurdaling blijft het soortelijk gewicht aan het oppervlak kleiner dan dat op grotere diepte en wordt de gelaagdheid weer stabiel, zodat b.v. ijsvorming aan het oppervlak optreedt.

De invloed van quasi-zwevend materiaal op de dichtheid is als volgt in rekening te brengen: als 1 kg mengsel bestaat uit $(1-\alpha)$ kg water met dichtheid ρ_0 , en α kg gesuspendeerd materiaal met dichtheid ρ_1 dan volgt de dichtheid ρ van het mengsel uit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-\alpha}{\rho_0} + \frac{\alpha}{\rho_1} \quad (1.7)$$

Dit is als volgt in te zien: het rechter lid van (1.7) geeft het volume van 1 kg mengsel weer; de dichtheid van het mengsel is de reciproke waarde hiervan. Quasi-zwevend materiaal kan relatief grote dichtheidsverschillen veroorzaken, waardoor een zeer stabiele gelaagdheid kan

ontstaan (b.v. sliblagen in havens en scheepvaartgeulen).

3 Basisvergelijkingen voor wrijvingloze gelaagde stromen

De beschouwde stroming is twee-dimensionaal in het verticale vlak. De vloeistof wordt onsamendrukbaar, wrijvingloos en niet-diffusief verondersteld.

De massabalans luidt dan in cartesische coördinaten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (1.8)$$

Hierin is ρ de dichtheid, u de horizontale snelheidscomponent, w de verticale snelheidscomponent, t de tijd, x de horizontale coördinaat en z de verticale coördinaat (de positieve richting is omhoog), zie fig. 1.2. De grootheden ρ , u en w hangen in het algemeen af van x , z en t .

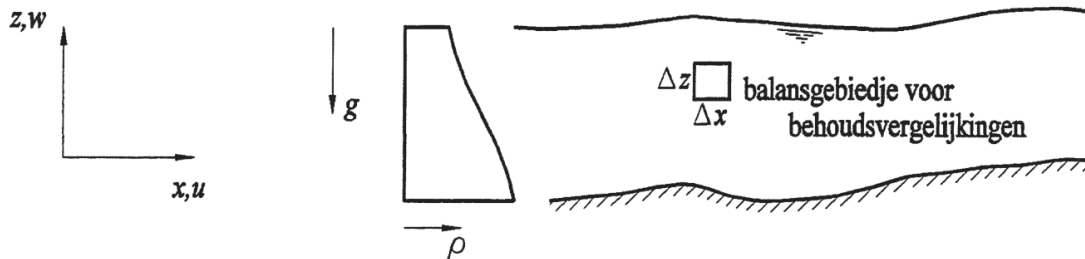


Fig. 1.2 - Definitieschets.

Omdat de vloeistof onsamendrukbaar is, zal de dichtheid van een vloeistofelementje niet veranderen als het elementje zich door de vloeistof verplaatst. Voor kleine willekeurige verplaatsing dx en dz en tijdverschuiving dt wordt de verandering $d\rho$ van de dichtheid gegeven door

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \quad (1.9)$$

Volgen we nu een vloeistofelementje dan geldt

$$\begin{aligned} dx &= u dt \\ dz &= w dt \end{aligned} \quad (1.10)$$

De tijdsafgeleide van een grootheid als wordt meebewogen met de vloeistof wordt aangeduid met het symbool D/Dt . Uit (1.9) en (1.10) volgt als voorwaarde voor onsamendrukbaarheid

van de vloeistof

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

Als de dichtheidsverschillen b.v. veroorzaakt worden door verschillen in saliniteit, dan geldt

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dS} \frac{DS}{Dt}$$

dus, vanwege (1.11),

$$\frac{DS}{Dt} \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + w\frac{\partial S}{\partial z} = 0$$

Uit (1.8) en (1.11) volgt nog de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.12)$$

De impulsvergelijkingen voor x - en z -richting luiden

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (1.14)$$

waarin p de druk is en g de versnelling van de zwaartekracht. Door gebruik te maken van (1.8) leveren (1.13) en (1.14) de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (1.16)$$

Om de invloed van dichtheidsgelaagdheid op een stroming na te gaan, is het zinvol een vergelijking voor de vorticeiteit (werveling) ξ op te stellen. De definitie van ξ is (in twee dimensies)

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.17)$$

De vorticeit is een maat voor de hoeksnelheid waarmee een vloeistof-elementje roteert, zie fig. 1.3. Aangetoond kan b.v. worden dat voor starre rotatie met hoeksnelheid ω de vorticeit gelijk is aan 2ω .

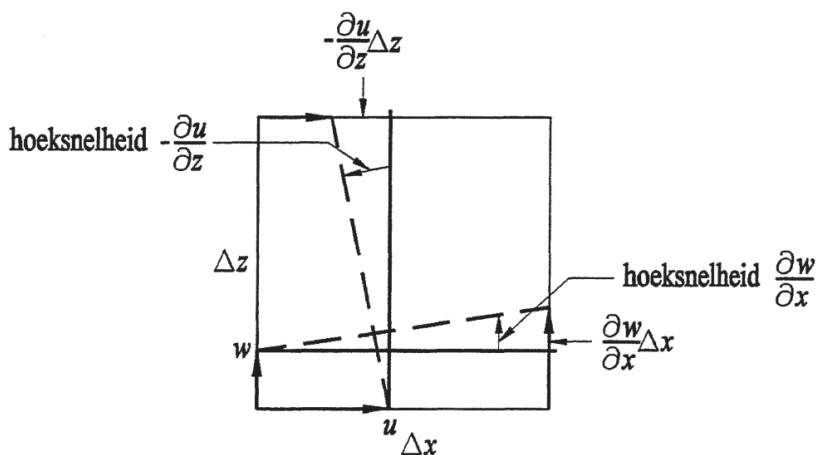


Fig. 1.3 - De componenten $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $-\frac{\partial u}{\partial z}$ van de vorticeit.

Door (1.15) te differentiëren naar z en (1.16) naar x en af te trekken ontstaat, gebruik makend van (1.12), de vorticeitsvergelijking

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (1.18)$$

In een vloeistof in rust is de vorticeit gelijk aan nul; (1.18) geeft aan dat door het inwendig produkt van de vectoren

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial z}, -\frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

vorticeit gegenereerd kan worden bij een beweging die vanuit rust begint. In een homogene vloeistof ($\partial \rho / \partial x = \partial \rho / \partial z = 0$) is $D\xi / Dt = 0$, zodat geen vorticeit opgewekt wordt: de stroming is rotatievrij. Er kan dan gewerkt worden met een snelheidspotential (potentialstroming). Het rechter lid van (1.18) is ook gelijk aan nul als de twee genoemde vectoren loodrecht op elkaar staan. Omdat de vector $(\partial p / \partial z, -\partial p / \partial x)$ loodrecht staat op de vector $\nabla p = (\partial p / \partial x, \partial p / \partial z)$, is het rechter lid van (1.18) dus gelijk aan nul als de vectoren ∇p en $\nabla \rho$ dezelfde richting hebben. Dit is in gelaagde stroming in het algemeen niet het geval.

Beschouw nu het eenvoudige geval van een horizontale parallelstroming waarin $w = 0$, zie fig. 1.4. In het ongelaagde geval geldt $\xi = 0$ dus $\partial u / \partial z = 0$. Het snelheidsprofiel is dan uniform. In het geval van gelaagde stroming zal in het algemeen gelden $\xi \neq 0$ (b.v. doordat onder invloed van de geometrie bovenstrooms daar geen parallelstroming optreedt). Als $\xi \neq 0$

dan is dus $\partial u/\partial z \neq 0$. Er kan zo een snelheidsprofiel ontstaan dat sterk afwijkt van dat in homogene (ongelaagde) stroming.

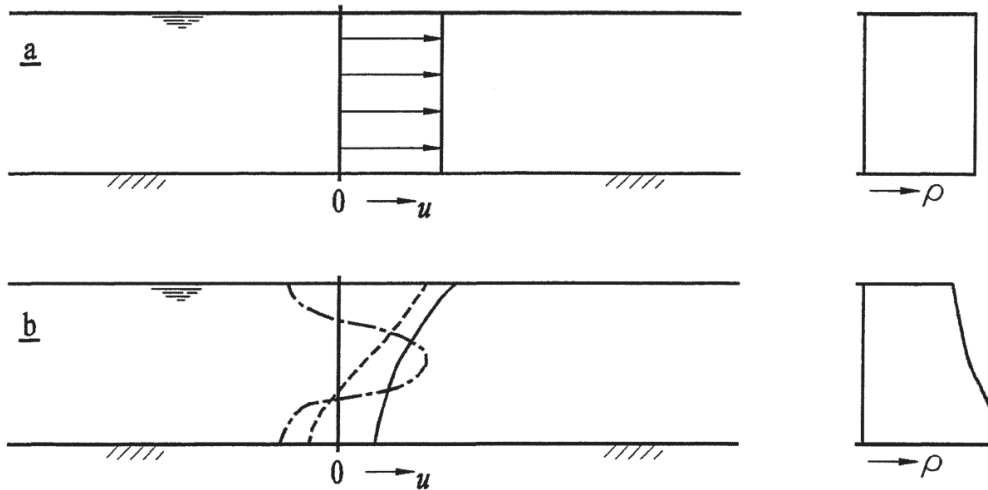


Fig. 1.4 - Snelheidsprofielen in horizontale parallelstroming. *a.* ongelaagd; *b.* gelaagd, er zijn als voorbeeld drie mogelijke profielen geschetst.

In een stationaire stroming geldt $\partial/\partial t = 0$, dus $D/Dt = u\partial/\partial x + w\partial/\partial z$. De bewegingsvergelijkingen (1.15) en (1.16) leveren dan na vermenigvuldiging met ρu resp. ρw en optellen

$$\rho \left(u \frac{Du}{Dt} + w \frac{Dw}{Dt} \right) + \frac{Dp}{Dt} + \rho g w = 0$$

Met (1.11) kan dit geschreven worden als

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + p \right] + \rho g w = 0$$

Integratie langs de baan van een vloeistofelementje (een stroomlijn) levert dan, omdat $w = dz/dt$ (zie (1.10)),

$$\frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + p + \rho g z = \text{constant langs stroomlijn} \quad (1.19)$$

Dit is de vergelijking van Bernoulli voor een stationaire gelaagde stroming. De constante in het rechter lid van (1.19) is in principe voor elke stroomlijn verschillend.

Volgens (1.19) varieert de druk langs een stroomlijn (waarlangs de dichtheid constant is) als de snelheid varieert. De eerder genoemde vectoren ∇p en $\nabla \rho$ hebben dan verschillende richtingen, zodat vorticeiteit gegenereerd wordt.

De Boussinesq-benadering voor kleine dichtheidsverschillen

Als de verschillen in dichtheid klein zijn ten opzichte van de dichtheid zelf, kunnen de bewegingsvergelijkingen wat vereenvoudigd worden. Om dit te laten zien elimineren we de druk uit (1.15) en (1.16),

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{Du}{Dt} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{Dw}{Dt} \right) = g \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

of

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Du}{Dt} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{Dw}{Dt} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Dw}{Dt} \right) = g \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (1.20)$$

Om de orden van grootte van de termen in (1.20) af te schatten, voeren we z.g. schaalgrootheden in:

Grootheid	Schaalgrootheid
snelheid	U
lengte	L (b.v. een waterdiepte)
tijd	L/U
dichtheid	ρ_0
dichtheidsverschil	$\Delta\rho$

De orde van grootte van b.v. $\partial\rho/\partial z$ is $\Delta\rho/L$. De orden van grootte van de termen in (1.20) worden nu

$$\frac{\Delta\rho U^2}{L^2}, \frac{\rho_0 U^2}{L^2}, \frac{\Delta\rho U^2}{L^2}, \frac{\rho_0 U^2}{L^2}, \frac{\Delta\rho g}{L}$$

Vermenigvuldiging van alle termen met $L/(\Delta\rho g)$ geeft voor de verhoudingen tussen de orden van grootte van de termen

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} F_i^2, F_i^2, \frac{\Delta\rho}{\rho_0} F_i^2, F_i^2, 1$$

Hierin is F_i een z.g. intern Froudegetal,

$$F_i^2 = \frac{U^2}{\frac{\Delta\rho g L}{\rho_0}} \quad (1.21)$$

Een zinvolle keuze van de schaalgrootheden blijkt overeen te komen met het geval dat F_i van de orde één is. Als nu de dichtheidsverschillen relatief klein zijn ($\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$), zijn dus de eerste en derde term in (1.20) klein. Verwaarlozen van deze termen komt neer op het

verwaarlozen van dichtheidsverschillen in de traagheidstermen in de bewegingsvergelijkingen. De vergelijkingen (1.15) en (1.16) worden dan

$$\rho_0 \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} \approx 0 \quad (1.22)$$

en

$$\rho_0 \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \approx -\rho g \quad (1.23)$$

Dit is de Boussinesq benadering. ρ_0 is een constante referentiedichtheid (b.v. 1000 kg/m³ voor water). Dichtheidsverschillen spelen alleen nog een rol in de dynamica voor zover ze voorkomen in combinatie met de versnelling van de zwaartekracht. Uit (1.21) blijkt nog dat als $F_i \sim 1$ en $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$, het "gewone" Froude getal F , gegeven door

$$F^2 = \frac{U^2}{gL}$$

klein is. Dat betekent dat de vervorming van het vrij oppervlak dan relatief gering is. Vervorming van deeltjesbanen kan nog wel voorkomen, maar deze vindt nu voornamelijk in het inwendige van de vloeistof ("intern") plaats. Het vrije oppervlak gedraagt zich dan soms min of meer als een wrijvingloos deksel ("rigid-lid benadering"), zie fig. 1.5.

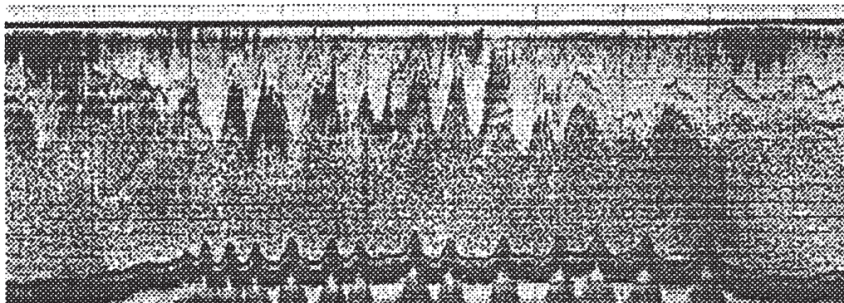
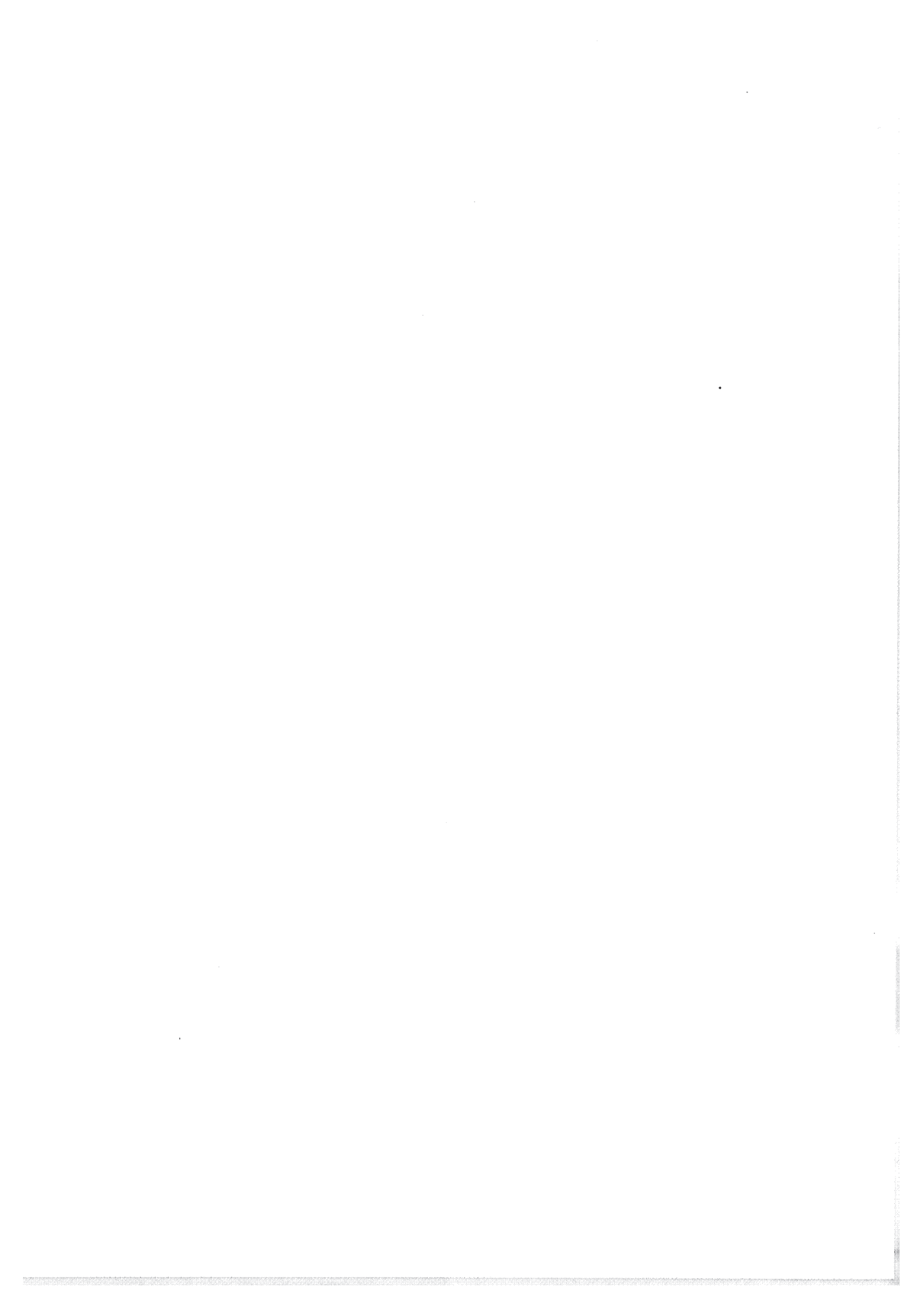


Fig. 1.5 - Gelaagde stroming met $F_i \approx 0,7$ over bodemribbels in de Nieuwe Waterweg. De bovenzijde van deze echolodopname valt samen met het vrije oppervlak. De waterdiepte is 16,5 tot 18,5 m, de horizontale afstand tussen de verticale lijnen is 100 m en de stroming is van rechts naar links. De hier weergegeven z.g. interne golven werden gedurende ca. een half uur aan het einde van een vloedperiode waargenomen.

Literatuur hoofdstuk 1

1. H.B. Fischer et al., *Mixing in inland and coastal waters*, Academic Press, 1979.



Hoofdstuk 2 - HET LAGENMODEL

1 Inleiding

Als twee vloeistoffen van verschillende dichtheid met elkaar in aanraking komen en er niet te veel vermenging van de vloeistoffen optreedt, zal de lichtere vloeistof onder invloed van de werking van de zwaartekracht de neiging vertonen als een laag op de zwaardere te gaan drijven. De aldus ontstane gelaagdheid is (binnen zekere grenzen) stabiel: als een pakketje vloeistof uit b.v. de zwaardere onderlaag door een of andere oorzaak in de bovenlaag terecht komt, zal dit weer terugzakken naar de onderlaag. Iets analoogs geldt voor een pakketje vloeistof dat vanuit de bovenlaag de onderlaag binnendringt, zie fig. 2.1. In hoofdstuk 6 blijkt dat deze redenering opgaat zolang de snelheidsverschillen tussen beide vloeistoffen niet te groot zijn. Voorlopig zullen we aannemen dat dit het geval is en er van uitgaan dat de vloeistoffen in lagen over elkaar bewegen. We spreken dan van een lagenmodel. In Nederland leidde de zoet-zout problematiek tot het werken met lagenmodellen (1, 2). Een inleidende beschouwing over het lagenmodel wordt gegeven in (3).

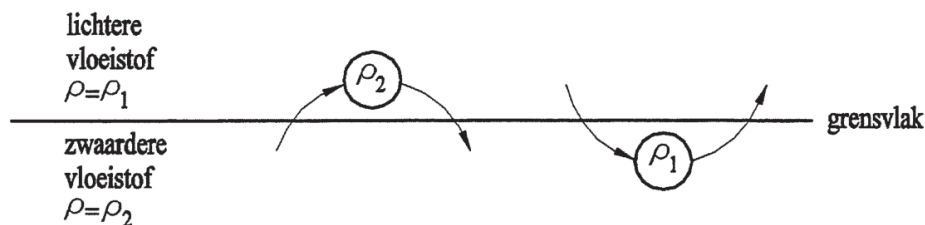


Fig. 2.1 - *Statisch stabiele gelaagdheid.*

We voeren nog de volgende vereenvoudigingen in:

- Het eventuele transport van vloeistof, warmte, zout enz. van de ene laag naar de andere door het er tussen gelegen grensvlak wordt (voorlopig) buiten beschouwing gelaten.
- De dichtheid van een laag wordt constant in plaats en tijd verondersteld. Het grensvlak wordt als volkomen scherp opgevat. In het geval van mengende vloeistoffen zal dat slechts bij benadering opgaan en zal in werkelijkheid de dichtheid ter plaatse van het grensvlak een meer geleidelijk verloop vertonen (overgangslaag, zie fig. 1.1).
- De drukverdeling in de verticaal wordt hydrostatisch verondersteld. Deze veronderstelling, die inhoudt dat de golflengte groot moet zijn ten opzichte van de waterdiepte, is ook van

toepassing bij b.v. verhanglijnen (b71) en lange golven (b73). De drukverdeling noemen we nu quasi-hydrostatisch, omdat de drukgradient in horizontale richting in het algemeen niet gelijk aan nul zal zijn. Een quasi-hydrostatische drukverdeling geldt niet voor plotselinge veranderingen in stromingsrichting. Fig. 2.2 geeft als voorbeeld het verticale drukverloop in een tweelagensysteem.

- De verdeling in de verticaal van de horizontale snelheidscomponent wordt per laag uniform verondersteld, zie fig. 2.2. We werken dus met een per laag gemiddelde snelheid. De motivering voor deze veronderstelling is gelegen in het feit dat nabij grensvlakken en bodem de turbulentie onderdrukt wordt (zie voor grensvlakken de redenering bij fig. 2.1.). Bij gelijkblijvende schuifspanning kunnen de snelheidsgradienten daardoor ter plaatse groot worden, zie het werkelijke snelheidsverloop in fig. 2.2.

Een niet-essentiële beperking is verder dat we alleen stroming in één horizontale dimensie (coördinaat: x) beschouwen. Uitbreiding naar twee horizontale dimensies is in principe eenvoudig.

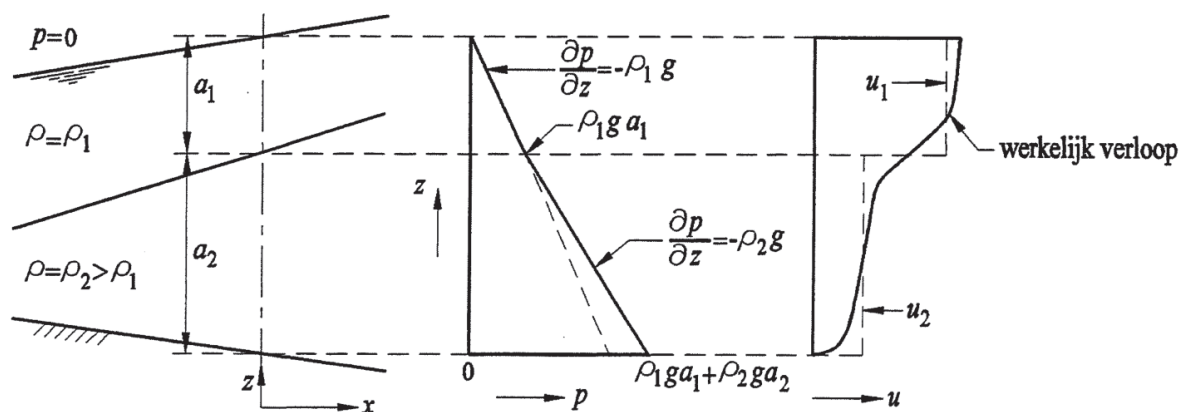


Fig. 2.2 - Druk- en snelheidsverdeling in een tweelagensysteem.

2 Vergelijkingen

Voor het meermalagenmodel voeren we een nomenclatuur in volgens fig. 2.3. De lagen worden genummerd van boven naar beneden. Voor een willekeurige laag gebruiken we hiervoor de index n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$). Zo is ρ_n de dichtheid, a_n de dikte en u_n de horizontale component van de stroomsnelheid in de n^{de} laag. De laatste twee variabelen hangen af van plaats en tijd. Schuif- en normaalspanningen (drukken) in de grensvlakken duiden we aan met s_n resp. p_n . De index 0 heeft betrekking op de lucht boven het lagensysteem. We leiden de vergelijkingen af voor N willekeurig. Bij verdere uitwerking zullen we ons beperken tot het

tweelagensysteem ($N = 2$). De laaghellingen in fig. 2.3. zijn overdreven weergegeven. De werkelijk optredende hellingen zijn in het algemeen aanzienlijk kleiner. Deze opmerking geldt voor de meeste figuren in dit en de twee volgende hoofdstukken.

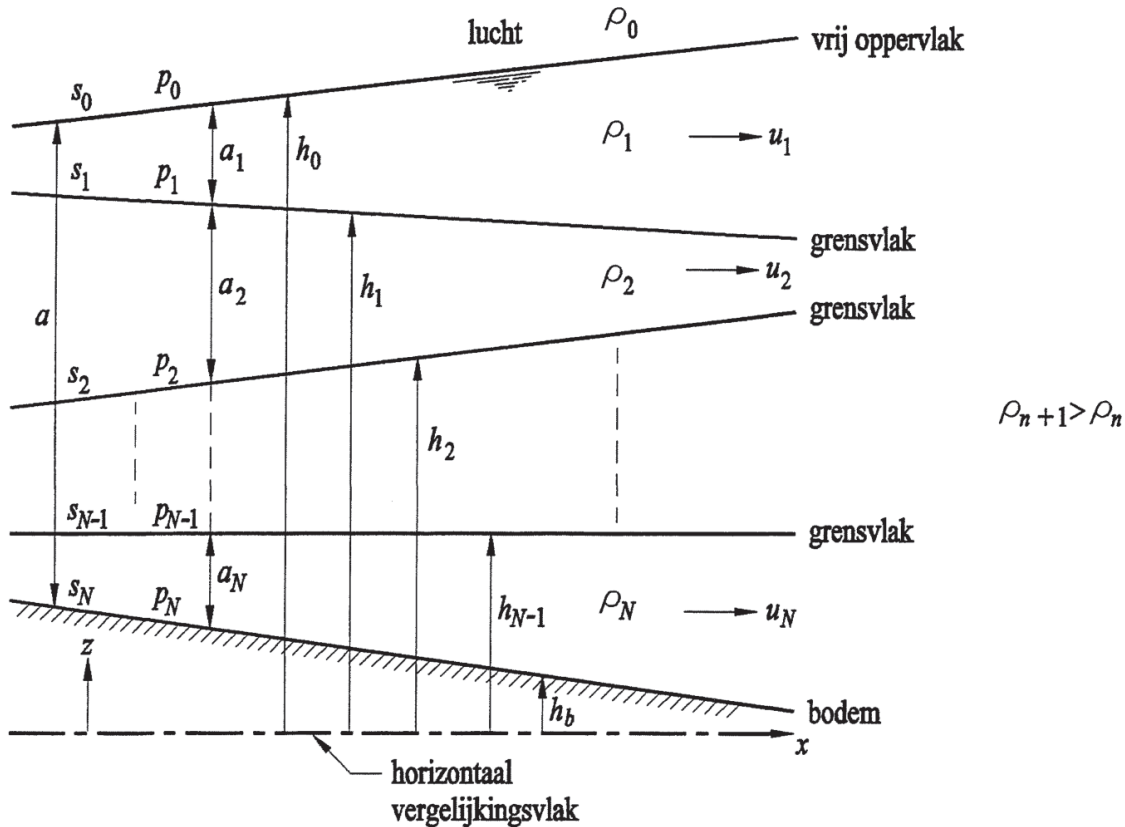


Fig. 2.3 - Nomenclatuur voor het lagenmodel.

Voor het afleiden van vergelijkingen voor het lagenmodel maken we gebruik van het behoud van massa en impuls. We kiezen een balansgebied waarvan de zijvlakken verticaal en vast in de ruimte zijn. Boven- en ondervlak laten we samenvallen met de twee grensvlakken ter weerszijden van de n^{de} laag. Deze behoeven niet vast in de ruimte te zijn, omdat een grensvlak zich in verticale richting kan verplaatsen, zie fig. 2.4. Het balansgebied heeft dus een gemengd Eulers - Lagrangiaans karakter.

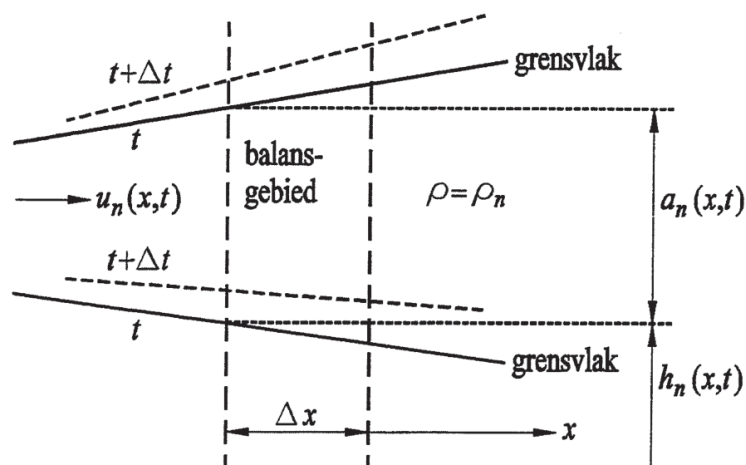


Fig. 2.4 - Balansgebied.

Behoud van massa

Instroming door linker zijvlak in tijd Δt : $\rho_n a_n u_n \Delta t$

Instroming door rechter zijvlak in tijd Δt : $-\left[\rho_n a_n u_n + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_n a_n u_n) \Delta x\right] \Delta t$

Netto instroming van massa: $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_n a_n u_n) \Delta x \Delta t$

Toename van massa in het balansgebied in tijd Δt : $\frac{\partial}{\partial t}(\rho_n a_n) \Delta t \Delta x$

De toename van massa moet gelijk zijn aan de netto instroming, dus

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_n a_n) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_n a_n u_n) = 0$$

Omdat de dichtheid constant verondersteld is, kan deze uitgedeeld worden. Zo vinden we de **continuïteitsvergelijking**

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a_n u_n) = 0 \quad (2.1)$$

Behoud van impuls in horizontale richting

De horizontale component van de impuls van de vloeistof in het balansgebied bedraagt: $\rho_n a_n u_n \Delta x$. De toename van de impuls (in een tijdje Δt) is

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t}(a_n u_n) \Delta x \Delta t$$

Deze toename wordt veroorzaakt door:

- Transport van impuls door de zijvlakken. De netto instroming bedraagt (vergelijk de

overeenkomstige grootheid bij het behoud van massa)

$$- \rho_n \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n u_n^2) \Delta x \Delta t$$

- Volumekrachten. We beschouwen hiervan alleen de zwaartekracht. Deze is echter verticaal gericht en levert daardoor geen directe bijdrage tot de impulsbalans in horizontale richting. Wel werkt de invloed ervan door in de druk (zie onder).
- Oppervlaktekrachten. Deze kunnen we ontbonden denken in een normale en een tangentiële component (druk en schuifspanning).

We beschouwen nu eerste de invloed van de druk. Uit de aanname van de quasi-hydrostatische drukverdeling volgt dat in laag n

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_n g$$

zodat in deze laag geldt

$$p = p(x, z, t) = p_{n-1}(x, t) + \rho_n g [h_{n-1}(x, t) - z] \quad (h_n < z \leq h_{n-1}) \quad (2.2a)$$

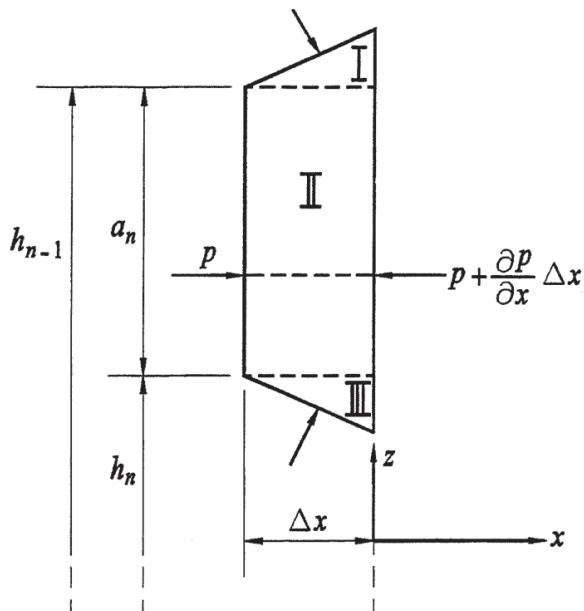


Fig. 2.5 - Drukken op de begrenzingen van het balansgebied.

Uit (2.2a) volgt, omdat $h_n = h_{n-1} - a_n$,

$$p_n = p_{n-1} + \rho_n g \alpha_n \quad (2.2b)$$

We splitsen het balansgebied nu in drie delen, zie fig. 2.5. We bekijken eerst het gedeelte II. De netto normaalkracht op de zijvlakken bedraagt

$$- \int_{h_n}^{h_{n-1}} \frac{\partial p}{\partial x} dz \Delta x$$

Met (2.2a) geeft dit als netto impulsoverdracht in een tijdje Δt

$$- \alpha_n \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} + \rho_n g \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x} \right) \Delta x \Delta t$$

Vervolgens bekijken we gedeelte I, zie ook fig. 2.6.

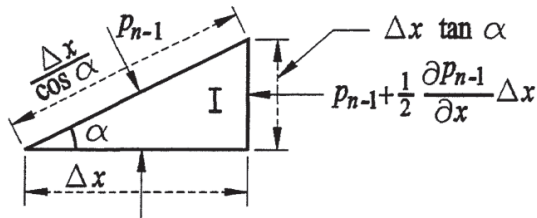


Fig. 2.6 - Drukken op de begrenzingen van het balansgebied.

De resulterende horizontale component van de kracht ten gevolge van de drukken is in dit geval

$$p_{n-1} \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \sin \alpha - \left(p_{n-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta x \tan \alpha = - \frac{1}{2} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} \Delta x^2 \tan \alpha$$

Deze bijdrage is kwadratisch in Δx en is dus verwaarloosbaar ten opzichte van bijdragen die evenredig zijn met Δx , als we Δx tot nul laten naderen. Iets dergelijks geldt voor de bijdrage van gedeelte III.

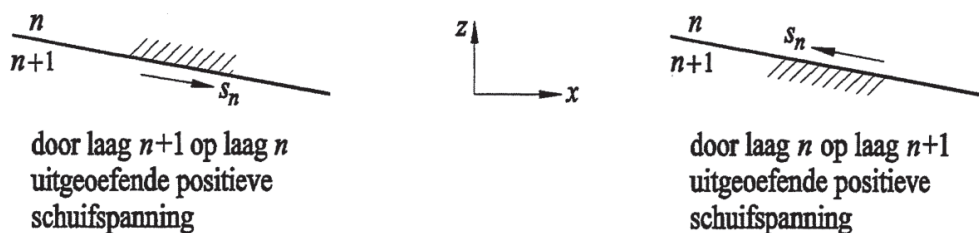


Fig. 2.7 - Het teken van de schuifspanning in een grensvlak.

Vervolgens beschouwen we de schuifspanningen. Eventuele schuifspanningen op de zijvlakken leveren geen bijdrage in horizontale richting. De lagen $n-1$ en $n+1$ oefenen schuifkrachten op laag n uit via de respectieve grensvlakken. We noemen hier een schuifspanning positief als laag $n+1$ op laag n een schuifspanning in positieve x -richting uitoefent. Laag n oefent op laag $n+1$ een even grote maar tegengesteld gerichte schuifspanning uit (actie is reactie).

Omdat we de impuls in horizontale richting beschouwen, moeten we de horizontale componenten van de schuifkrachten in rekening brengen. De bijdrage van de schuifspanning s_{n-1} , die aan de bovenzijde van laag n werkt, is

$$- s_{n-1} \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \cos \alpha = - s_{n-1} \Delta x$$

Een dergelijke uitkomst vinden we voor de schuifspanning s_n . De netto horizontale impulsoverdracht naar het balansgebied door de schuifspanningen wordt dan

$$(s_n - s_{n-1}) \Delta x \Delta t$$

Samennemen van alle termen en delen door $\Delta x \Delta t$ levert nu de **impulsvergelijking**

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (a_n u_n) + \rho_n \frac{\partial}{\partial x} (a_n u_n^2) + a_n \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} + \rho_n g a_n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x} - s_n + s_{n-1} = 0 \quad (2.3)$$

De combinatie [(2.3) - $\rho_n u_n \times (2.1)$]/ $\rho_n a_n$ levert de kracht- of bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} + g \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x} + \frac{s_{n-1} - s_n}{\rho_n a_n} = 0 \quad (2.4)$$

Let op de sterke overeenkomst tussen deze vergelijkingen en die voor gewone lange golven. Alleen de drukterm vormt een nieuw element.

Beschouwen we de laagdikten a_n en de snelheden u_n als afhankelijk variabelen (de drukken p_n volgen uit (2.2b); op de grootte van de schuifspanningen gaan we hieronder in), dan zijn er $2N$ onbekenden. Per laag hebben we twee vergelijkingen. Er zijn dus ook $2N$ vergelijkingen, zodat een oplossing in principe mogelijk is als voldoende begin- en randvoorwaarden gegeven zijn.

Vergelijkingen voor het tweelagenmodel

Voor het praktisch belangrijke geval van de tweelagenstroming geven we de continuïteits- en

bewegingsvergelijkingen (gebruikmakend van (2.2b)) expliciet. Ook zullen we ingaan op de grootte van de verschillende schuifspanningen. De continuïteitsvergelijkingen zijn (zie ook fig. 2.8)

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_1 u_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_2 u_2 = 0 \quad (2.6)$$

De bewegingsvergelijkingen zijn (de luchtdruk wordt constant genomen)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_b + a_1 + a_2) = - \frac{s_0 - s_1}{\rho_1 a_1} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial a_1}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_b + a_2) = - \frac{s_1 - s_2}{\rho_2 a_2} \quad (2.8)$$

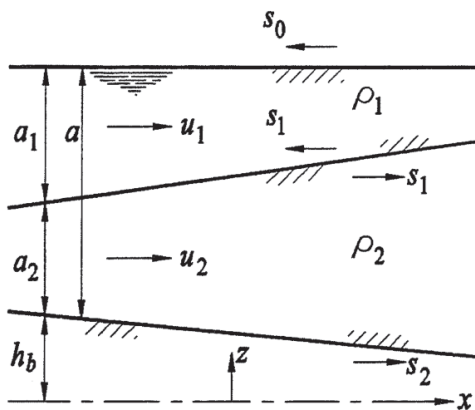


Fig. 2.8 - Tweelagensysteem.

In hoofdstuk 1 bleek dat in vele gevallen ρ_1 en ρ_2 weinig van elkaar verschillen. Toch mag in (2.8) de verhouding ρ_1/ρ_2 niet benaderd worden met één, omdat dan de invloed van dichtheidsverschillen uit het model zou verdwijnen.

Over de grootte van de schuifspanningen het volgende. Het ligt voor de hand de

schuifspanning te koppelen aan het snelheidsverschil tussen de lagen. Bij volledig ontwikkelde turbulentie (b.v. Reynoldsgetal $> 10^4$) denken we in eerste instantie aan een kwadratische relatie (verg. de bodemschuifspanning bij een éénlaagsysteem):

$$s_n = -k_n \rho_n |u_n - u_{n+1}| (u_n - u_{n+1}) \quad (2.9)$$

waarin k_n een coëfficiënt is die experimenteel bepaald moet worden. We gaan nu de verschillende mogelijkheden bij een tweelagensysteem na.

Vrij oppervlak - In het algemeen is de watersnelheid klein ten opzichte van de windsnelheid, zodat de eerste verwaarloosd mag worden ten opzichte van de tweede. Dan ontstaat

$$s_0 = -k_0 \rho_0 |u_0| u_0$$

Uit metingen afgeleide waarden voor k_0 liggen tussen (u_0 is de windsnelheid op 10 m boven het wateroppervlak)

$$k_0 = 8 \cdot 10^{-4} \quad (\text{zwakke wind})$$

en

$$k_0 = 25 \cdot 10^{-4} \quad (\text{zware storm})$$

De schuifspanning neemt in dit geval dus wat sterker dan kwadratisch toe met de windsnelheid.

Bodem - De snelheid van de bodem is gelijk aan nul, dus (verg. éénlaagsysteem)

$$s_2 = -k_2 \rho_2 |u_2| u_2$$

met

$$k_2 = g/C^2 = 30 \text{ à } 40 \cdot 10^{-4}$$

Hierin is C de coëfficiënt van Chézy.

Grensvlak - Beide lagen kunnen een snelheid ongelijk aan nul hebben, dus

$$s_1 = -k_1 \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2)$$

De coëfficiënt k_1 blijkt nog af te hangen van het type stroming (4):

$$k_1 \approx 4 \cdot 10^{-4} \quad (\text{stromende bovenlaag, onderlaag in rust, geen wind})$$

$$k_1 \approx 7 \cdot 10^{-4} \quad (\text{snelheden in beide lagen gelijk maar tegengesteld, geen wind})$$

$$k_1 \approx 15 \cdot 10^{-4} \quad (\text{stromende onderlaag, bovenlaag in rust, geen wind})$$

Deze variatie in de coëfficiënten wordt veroorzaakt door verschillen in turbulentie-intensiteit bij het grensvlak. Als de onderlaag stroomt wordt bij de bodem turbulentie opgewekt. Deze laat zijn invloed gelden bij het grensvlak, vergroot daar de turbulentie-intensiteit en daarmee de schuifspanning (bij een zeker snelheidsverschil $u_1 - u_2$) (4). Een formule die dit effect in rekening brengt is

$$s_1 = -\rho_1 \sqrt{[k_{11}(u_1 - u_2)]^2 + [k_{12}u_2]^2} (u_1 - u_2) \quad (2.10)$$

De waarden van de coëfficiënten k_{11} en k_{12} die corresponderen met de hierboven genoemde, zijn

$$k_{11} \approx 4 \cdot 10^{-4}$$

$$k_{12} \approx 14 \cdot 10^{-4}$$

3 Voorbeelden

In deze paragraaf behandelen we enkele eenvoudige gevallen van stationaire stroming ($\partial/\partial t = 0$) in een tweelagensysteem.

Lange overlaat

De bovenlaag van een tweelagensysteem is in rust. De onderlaag stroomt over een lange overlaat als geschetst in fig. 2.9. Voor het beschrijven van deze stroming over relatief korte afstand verwaarlozen we de wrijving langs bodem en grensvlak. Vergelijkingen 2.5 t/m 2.8 leveren nu

$$a_1 u_1 = q_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$a_2 u_2 = q_2 = \text{constant} \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dx}(h_b + a_1 + a_2) = 0 \quad (2.13)$$

$$u_2 \frac{du_2}{dx} + \frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{da_1}{dx} + g \frac{d}{dx}(h_b + a_2) = 0 \quad (2.14)$$

Hierin zijn q_1 en q_2 de debieten per eenheid van breedte in de lagen. Vergelijking 2.13 geeft aan dat de waterspiegel horizontaal is. Elimineren van u_2 en a_1 uit (2.14) met behulp van (2.12) en (2.13) geeft

$$\left(1 - \frac{q_2^2}{\Delta\rho g a_2^3}\right) \frac{da_2}{dx} + \frac{dh_b}{dx} = 0 \quad (2.15)$$

waarin $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ het dichtheidsverschil tussen de lagen is. Ter plaatse van de kruin van de overlaat is $dh_b/dx = 0$. Er moet daar dus gelden, dat of

$$\frac{da_2}{dx} = 0 \quad (2.16)$$

of

$$\frac{q_2^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho_2} g a_2^3} = 1 \quad (2.17)$$

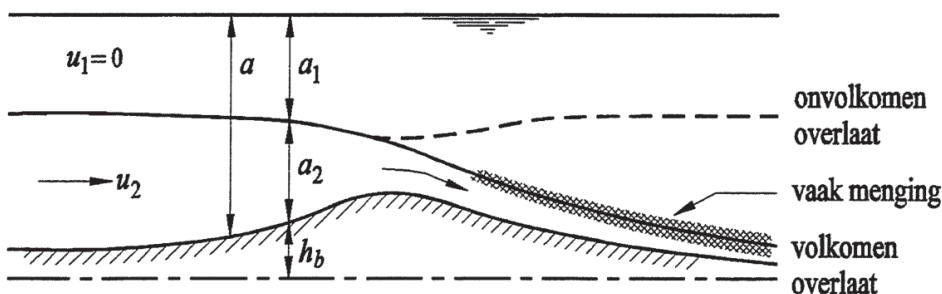


Fig. 2.9 - Lange overlaat.

Vergelijking 2.16 is van toepassing in het geval van een onvolkomen overlaat (gestuwde benedenafvoer, zie het gestreepte grensvlakverloop in fig. 2.9); vergelijking 2.17 geldt voor een volkomen overlaat (ongestuwde afvoer, het getrokken grensvlakverloop in genoemde figuur). Het linker lid van 2.17 wordt wel aangeduid als (het kwadraat van) een intern Froude getal, F_2 (de index 2 heeft betrekking op de onderlaag), dus

$$F_2^2 = \frac{u_2^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho_2} g a_2} = \frac{q_2^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho_2} g a_2^3} \quad (2.18)$$

Uit (2.17) volgt dat ter plaatse van de kruin van een volkomen overlaat geldt $F_2 = 1$. We spreken in dat geval van **(intern) kritische stroming**. Voor de situatie als aangegeven in fig. 2.9 is de stroming bovenstrooms van de kruin dan (intern) subkritisch en die benedenstrooms (intern) superkritisch.

Merk op dat als $\Delta\rho/\rho_2$ klein is, de intern kritische stroomsnelheid u_2 klein is t.o.v. die in een éénlaagsysteem ($= \sqrt{ga}$).

Integratie van (2.15) naar x geeft een equivalent voor gelaagde stroming van de vergelijking van Bernoulli,

$$\frac{q_2^2}{2 \frac{\Delta\rho}{\rho_2} g a_2^2} + a_2 + h_b = \text{constant} \quad (2.19)$$

Bij een volkomen overlaat kunnen met (2.12), (2.17) en (2.19) en bovenstroomse randvoorwaarden stroomsnelheid en laagdikten boven de kruin berekend worden. Bij een onvolkomen overlaat is ook een benedenstroomse randvoorwaarde benodigd.

Selectieve onttrekking

Een prismatisch kanaal met horizontale bodem sluit aan de ene zijde aan op een als oneindig groot te beschouwen bekken en is aan de andere zijde gedeeltelijk afgesloten door een verticale wand. Tussen wand en bodem bevindt zich een spleet over de volle breedte van het kanaal. In bekken en kanaal bevindt zich een tweelagensysteem. Zie fig. 2.10. Door de spleet wordt water onttrokken aan de onderlaag.

Spleethoogte, hoogte van het grensvlak in het bekken en debiet zijn constant. De vraag is nu wat het maximale debiet is dat door de spleet aan de onderlaag onttrokken kan worden zonder dat water uit de bovenlaag aangezogen wordt (vandaar de benaming: selectieve onttrekking). Deze vraag kan van belang zijn bij het onttrekken van relatief koud water uit een meer of het verminderen van het zoutbezwaar in een kanaal dat door een sluis van de zee gescheiden is.

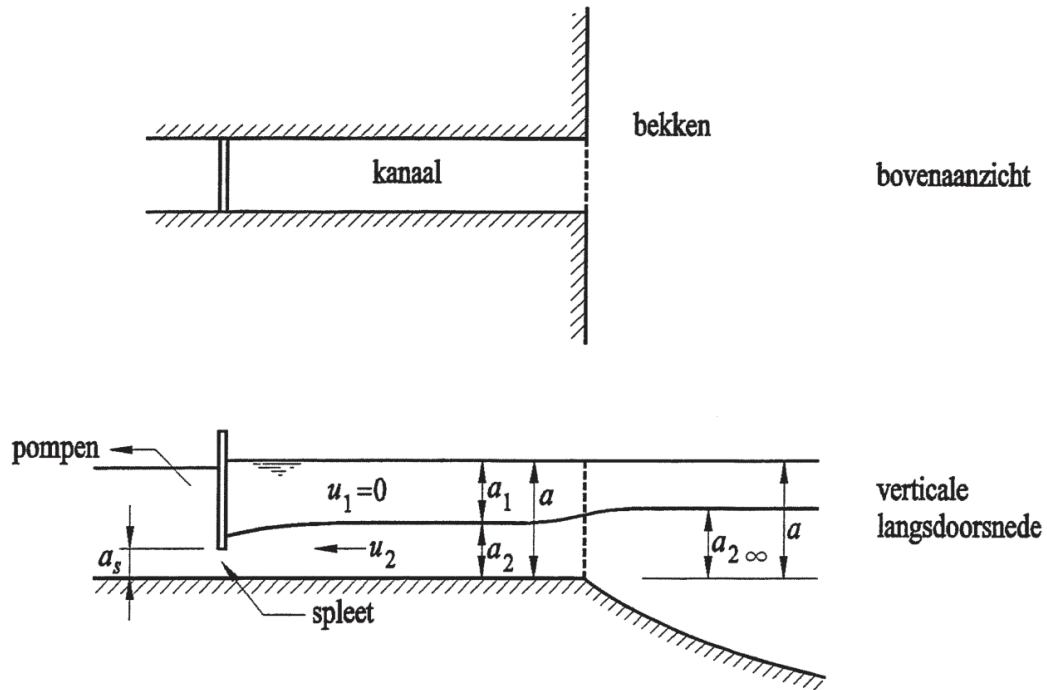
Om dit probleem in zijn eenvoudigste vorm op te lossen nemen we aan dat het kanaal van fig. 2.10 betrekkelijk kort is, zodat wrijving weer verwaarloosd mag worden. Verder verwaarlozen we verticale versnellingen en menging tussen de lagen. We kunnen dan dus gebruik maken van het tweelagenmodel. We zullen de stroming als stationair beschouwen.

De gemiddelde snelheid in de bovenlaag zal gelijk aan nul zijn, omdat daaraan geen water onttrokken wordt. Vergelijkingen 2.7 en 2.8 worden nu

$$\frac{d}{dx}(a_1 + a_2) = 0$$

$$u_2 \frac{du_2}{dx} + \frac{\Delta\rho}{\rho_2} g \frac{da_2}{dx} = 0$$

waarin $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ weer het dichtheidsverschil tussen de lagen is. Integratie levert (verg. het eerste voorbeeld)

Fig. 2.10 - *Selectieve onttrekking.*

$$a_1 + a_2 = \text{constant}$$

$$\frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\Delta\rho}{\rho_2}ga_2 = \text{constant (vergelijking van Bernoulli)}$$

Aanpassing aan de randvoorwaarden in het bekken (de snelheden daarin zijn verwaarloosbaar) geeft

$$a_1 + a_2 = a \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\Delta\rho}{\rho_2}ga_2 = \frac{\Delta\rho}{\rho_2}ga_{2\infty} \quad (2.21)$$

Invoeren van het debiet $q_2 (= a_2u_2)$ in (2.21) geeft

$$q_2 = a_2 \sqrt{2 \frac{\Delta \rho}{\rho_2} g (a_{2\infty} - a_2)} \quad (2.22)$$

Omdat de stroming stationair is, is q_2 onafhankelijk van de plaats x . Dit geldt dus ook voor a_2 .

We kunnen nu met behulp van (2.22) het maximum bepalen van q_2 als functie van a_2 (de stroming is dan intern kritisch, verg. het eerste voorbeeld en de theorie van de stroming over een overlaat zoals behandeld in het college b70). Dit geeft

$$a_2 = \frac{2}{3} a_{2\infty}$$

en als maximaal debiet

$$(q_2)_{\max} = \frac{2}{3} a_{2\infty} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\Delta \rho}{\rho_2} g a_{2\infty}} \quad (2.23)$$

De toestand met maximaal debiet kan echter niet altijd optreden. Duiden we de spleethoogte aan met a_s , dan kunnen we twee gevallen onderscheiden, n.l.

$$a_{2\infty} > a_s > \frac{2}{3} a_{2\infty} \quad \text{en} \quad a_s < \frac{2}{3} a_{2\infty}$$

In het eerste geval zou bij maximaal debiet ($a_2 = 2/3 a_{2\infty}$, dus kleiner dan a_s) het grensvlak dalen tot beneden de bovenzijde van de spleet en zou ook water uit de bovenlaag worden aangezogen. Dit is in tegenspraak met het uitgangspunt. In dit geval vinden we het grootste debiet q_{2s} dat aan de onderlaag onttrokken kan worden door a_2 gelijk te stellen aan a_s (grensvlak in het kanaal samenvallend met de bovenzijde van de spleet), dus

$$q_{2s} = a_s \sqrt{2 \frac{\Delta \rho}{\rho_2} g (a_{2\infty} - a_s)}$$

In het tweede geval bestaat het hierboven genoemde probleem niet en kan wel het maximale debiet onttrokken worden, dus (zie (2.23))

$$q_2 = (q_2)_{\max}$$

Door de eerder genoemde verwaarlozingen, vooral die wat betreft menging t.g.v. turbulentie, geven de hier gevonden uitkomsten een bovengrens aan van de te onttrekken maximale debieten. De werkelijke waarden kunnen 10 tot 20 procent lager liggen (5, 6).

Wind op een gelaagd bekken

Een afgesloten bekken bevat een vaste hoeveelheid verontreinigd water met dichtheid ρ_2 . Daarboven bevindt zich een laag met een vaste hoeveelheid niet-verontreinigd water (dichtheid $\rho_1 < \rho_2$). De bodem van het bekken nemen we voor het gemak horizontaal (neem daar $z = 0$). Er waait een wind met constante snelheid in de lengterichting van het bekken. Hierdoor zullen zowel het vrije oppervlak als het grensvlak tussen de twee lagen een helling gaan vertonen. Eén en ander is weergegeven in fig. 2.11.

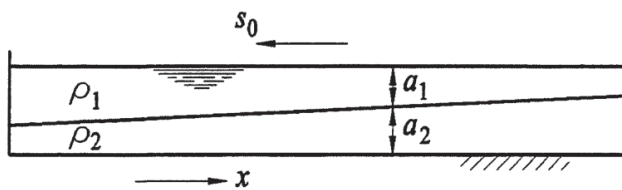


Fig. 2.11 - *Gelaagd bekken.*

Men vraagt zich nu af of de helling van het grensvlak nadat zich een stationaire toestand heeft ingesteld zo groot kan worden dat het verontreinigde water uit de onderlaag aan de oppervlakte komt.

Het gaat hier om een tweelagenprobleem. De gemiddelde snelheden u_1 en u_2 in de lagen zijn gelijk aan nul omdat een stationaire (eind-)toestand wordt beschouwd en in beide lagen geen toevoer of afvoer van water plaats vindt. Aan de continuïteitsvergelijkingen (2.5) en (2.6) is dan voldaan. De lokale snelheden zullen echter niet gelijk aan nul zijn. Zie hiervoor fig. 2.12. De schuifspanningen in de lagen kunnen alleen optreden als er ook snelheidsgradienten $\partial u/\partial z$ aanwezig zijn.

De turbulentie, opgewekt bij het vrije oppervlak door de wind, wordt sterk onderdrukt ter plaatse van het grensvlak en de retoursnelheid is relatief klein. De schuifspanningen aldaar zijn dan ook klein ten opzichte van s_0 . We verwaarlozen daarom de schuifspanningen in de onderlaag en daarmee de snelheden daarin.

De schuifspanning s_0 langs het vrije oppervlak maakt evenwicht met een drukgradient en een impulstransport in de bovenlaag (zie ook de impulsvergelijking). De versnellingen in het beschouwde probleem zijn in het algemeen klein ten opzichte van de druktermen, zodat de impulstransporten hier verwaarloosd mogen worden. De bewegingsvergelijkingen (2.7) en (2.8) worden nu

$$g \frac{d}{dx}(a_1 + a_2) + \frac{s_0}{\rho_1 a_1} = 0 \quad (2.24)$$

$$\rho_1 g \frac{da_1}{dx} + \rho_2 g \frac{da_2}{dx} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{d}{dx}(\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2) = 0 \quad (2.25)$$

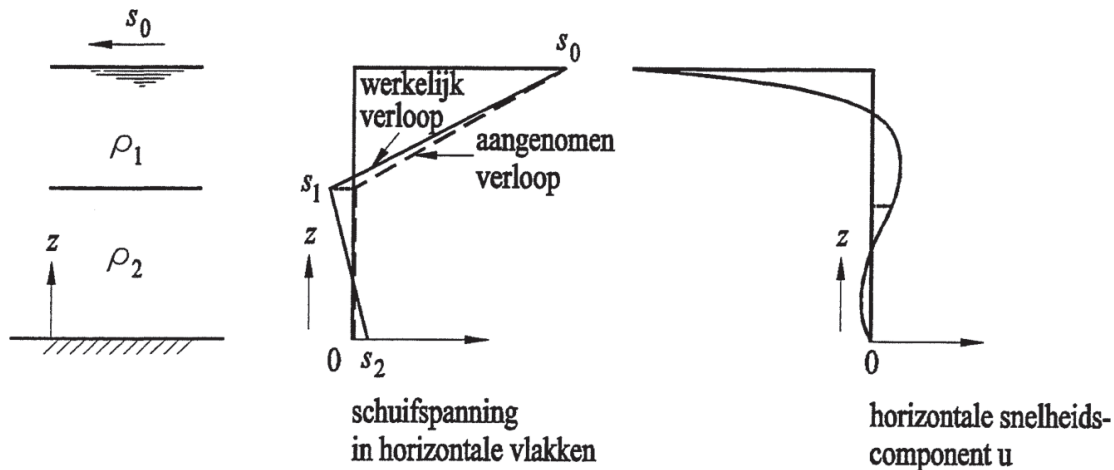


Fig. 2.12 - *Verdeling van schuifspanning en stroomsnelheid.*

Gemakkelijk is na te gaan dat (2.25) de hydrostatische drukverdeling in de onderlaag weergeeft (waardoor daar $\partial p/\partial x = 0$). Dit is het gevolg van het verwaarlozen van snelheden en schuifspanningen in deze laag. We kunnen deze vergelijking in een nog wat andere vorm schrijven, n.l.:

$$\frac{da_2}{dx} = - \frac{\rho_1}{\Delta\rho} \frac{d}{dx}(a_1 + a_2)$$

Waarin $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ weer het dichtheidsverschil tussen de lagen is. We zien dat de helling van het grensvlak tegengesteld gericht is aan die van het vrije oppervlak. De factor $\rho_1/\Delta\rho$ is in het algemeen veel groter dan één, dus in absolute zin zullen de hellingen van het grensvlak aanzienlijk groter zijn dan die van het vrije oppervlak.

Integratie naar x van de twee bewegingsvergelijkingen geeft, zie fig. 2.13,

$$a_1 = \sqrt{2 \frac{\rho_2}{\rho_1 \Delta\rho} \frac{s_0}{g} (L - x)}$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \Delta\rho}{\rho_2} \frac{g a_0^2}{s_0} \quad (\text{uit de voorwaarde: } a_1 = a_0 \text{ op } x = 0) \quad (2.26)$$

$$a_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(a_0 - a_1)$$

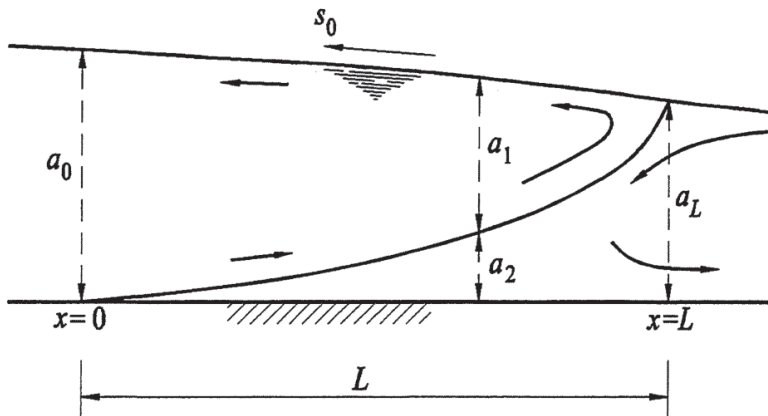


Fig. 2.13 - Vorm van het grensvlak.

De laatste uitdrukking levert nog (voor $x = L$)

$$a_0 - a_L = \frac{\Delta\rho}{\rho_1} a_L$$

waaraan weer te zien is dat het verval (over de lengte L) van het vrije oppervlak een factor $\Delta\rho/\rho_1$ kleiner is dan dat van het grensvlak. Op $x < 0$ en $x > L$ is een éénlaagsysteem aanwezig.

Aan vergelijking 2.26 voor de lengte L waarover het grensvlak zich uitstrekt is te zien dat deze kleiner wordt naarmate het dichtheidsverschil kleiner wordt. Een getallenvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll} u_0 = -15 \text{ m/s} & \Delta\rho = 10 \text{ kg/m}^3 \text{ geeft } L \approx 8500 \text{ m} \\ k_0 = 2.10^{-3} & \Delta\rho = 1 \text{ kg/m}^3 \text{ geeft } L \approx 850 \text{ m} \\ a_0 = 10 \text{ m} & \\ \rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3 & \end{array}$$

Bij kleine dichtheidsverschillen zal de onderlaag dus eerder aan de oppervlakte komen dan bij grote dichtheidsverschillen.

Of het grensvlak zoals hier berekend in een feitelijke situatie in zijn geheel gerealiseerd zal worden hangt af van de sterkte van de wind en de hoeveelheden water in onder- en bovenlaag, zie fig. 2.14.

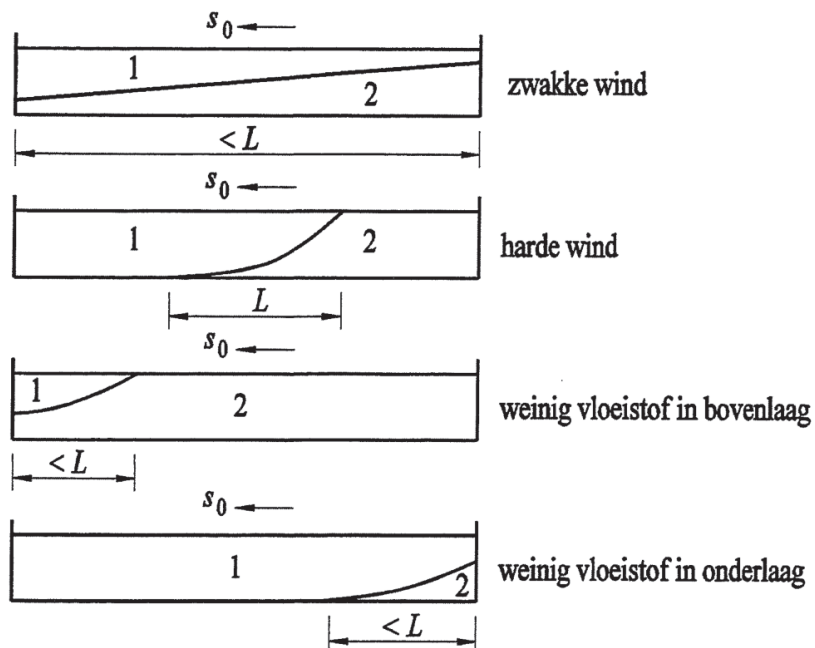


Fig. 2.14 - *Overzicht van de verschillende vormen van gelaagdheid.*

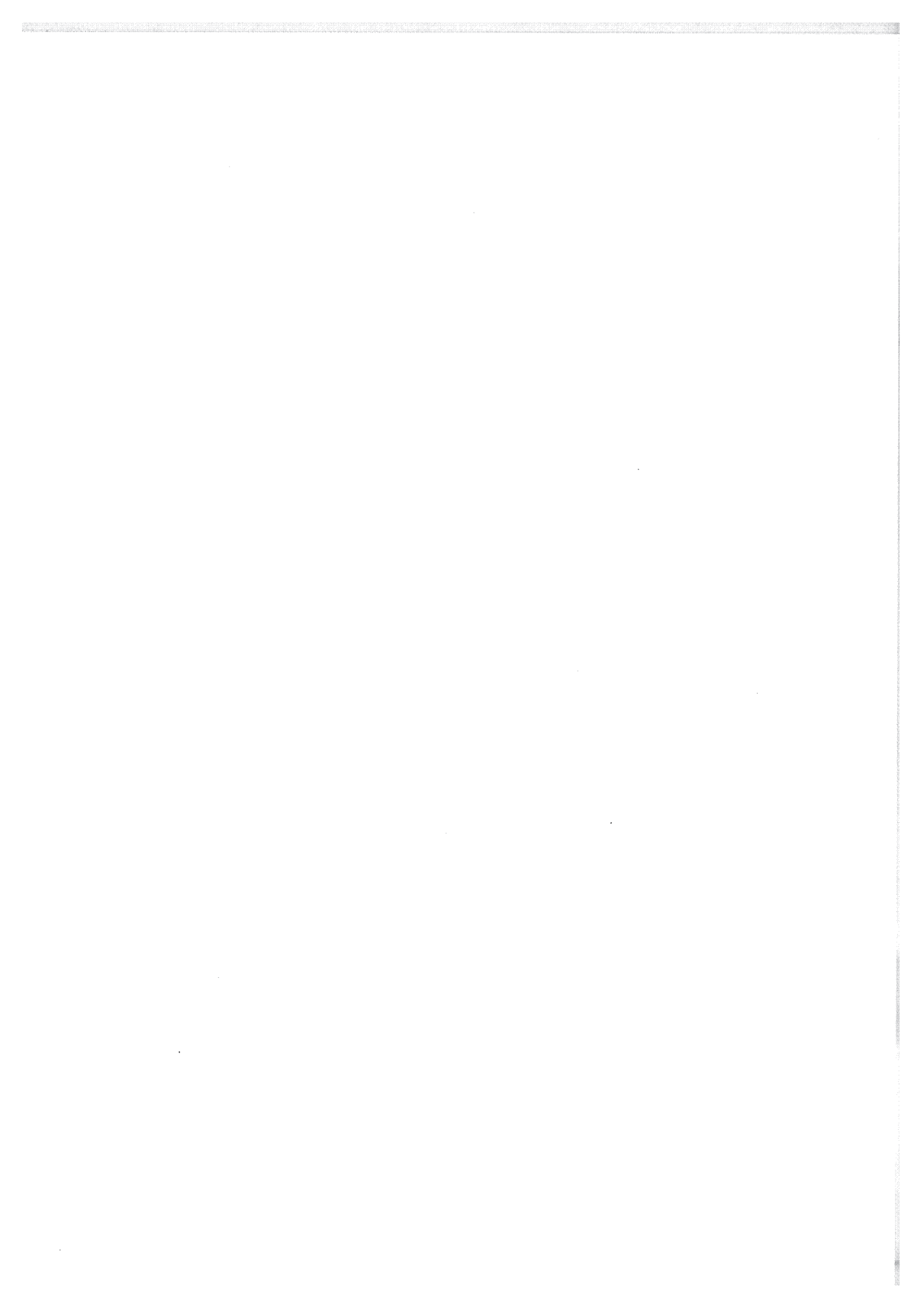
Opmerkingen:

- De tijd nodig voor het bereiken van de stationaire toestand is gewoonlijk groot ten opzichte van de tijd dat de wind (min of meer) constant is. Een stationaire eindtoestand wordt daardoor meestal niet bereikt (verg. voorbeeld 2 van hoofdstuk 3).
- In het algemeen treedt behalve circulatie in het verticale vlak ook circulatie in het horizontale vlak op (7).
- Door turbulente menging vertoont de bovenlaag de tendens om dikker te worden (zie hoofdstuk 7). Op de plaats waar het grensvlak aan de oppervlakte komt treedt sterke menging op.

Literatuur hoofdstuk 2

1. J.B. Schijf en J.C. Schönfeld, Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water, Proc. Minnesota International Hydraulics Convention. Minnesota, 1953.
2. C. B. Vreugdenhil, Computation of gravity currents in estuaries, proefschrift Delft, 1970.
3. E. Plate, Hydraulik zweidimensionaler Dichteströmungen, Mitt. Inst. Wasserbau III, Karlsruhe, 1974, Heft 3.
4. G. Abraham, M. Karelse en A.G. van Os, On the magnitude of interfacial shear of

- subcritical stratified flows in relation with interfacial stability, *Journal of Hydraulic Research*, 17, no. 4, 1979, p. 273.
5. D.R.F. Harleman en R.A. Elder, Withdrawal from two-layer stratified flows, *Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division*, 91, no. HY4, 1965, p. 43.
 6. A. Lohmeyer, *Selektive Entnahme aus einem Dichtegeschichteten Gewässer*, Proefschrift Karlsruhe, 1978.
 7. G.T. Csanady, Water circulation and dispersal mechanisms. In: *Lakes (Chemistry, Geology, Physics)*, A. Lerman (ed.), Springer, 1978, p. 21.
 8. J.E. List en G.H. Jirka (eds.), *Stratified flows*, American Society of Civil Engineers, 1990.



Hoofdstuk 3 - LANGE GOLVEN IN EEN TWEELAGENSISTEEM

1 Inleiding

Instationaire stroming in aanwezigheid van een vrij oppervlak of grensvlak heeft in het algemeen gesproken een golfkarakter. In het lagenmodel hebben we de verticale versnellingen van de waterdeeltjes verwaarloosd. Als gevolg hiervan is dit model slechts geldig voor z.g. **lange golven**, dus voor golven waarvan de golflengte (of een andere karakteristieke lengtemaat) groot is ten opzichte van de laagdikten. Deze situatie is geheel analoog aan die bij lange golven in een éénlaagsysteem (college b73).

We zullen zien, dat als het dichtheidsverschil tussen de lagen relatief klein is, we onderscheid kunnen maken tussen twee typen lange golven, n.l.

- Externe (of oppervlakte-) lange golven. Hierbij gedragen de lagen zich in zekere zin als één enkele laag. De voortplantingssnelheid van deze golven ligt dan ook dicht bij die in een éénlaagsysteem van dezelfde diepte.
- Interne lange golven. Deze golven vervormen voornamelijk het grensvlak en in veel mindere mate het vrije oppervlak. De voortplantingssnelheid ervan is aanzienlijk kleiner dan die van de externe golven.

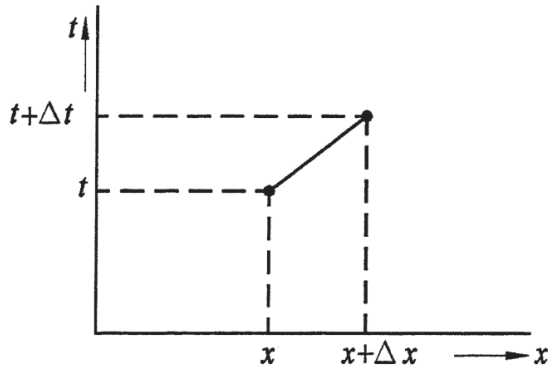
Voor het onderzoek van lange golven in een lagensysteem is de methode der karakteristieken het meest geschikt. We maken in het onderstaande gebruik van deze methode voor de analyse van lange golven in een tweelagensysteem. De theorie ervan wordt bekend verondersteld (1), zie ook (2).

2 Toepassing van de methode der karakteristieken

De vergelijkingen (2.5) t/m (2.8) vormen een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen, dat we quasi-lineair noemen omdat de afgeleiden naar x en t tot de eerste macht voorkomen (de vergelijkingen zijn lineair in de partiële afgeleiden).

We onderzoeken nu het gedrag van deze afgeleiden. Daartoe beschouwen we de afhankelijk variabelen a_1 , a_2 , u_1 en u_2 in een zekere richting in het (x,t) -vlak. Hieronder blijkt dat we door deze richting geschikt te kiezen, de voortplantingseigenschappen van verstoringen kunnen onderzoeken. Voor een differentiëerbare functie F van x en t geldt, zie fig. 3.1,

$$F(x + \Delta x, t + \Delta t) = F(x, t) + \Delta x \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + \text{hogere orde termen}$$

Fig. 3.1 - (x, t) -vlak.

We stellen nu

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

$$F(x + \Delta x, t + \Delta t) - F(x, t) = \Delta F$$

zodat

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \text{hogere orde termen}$$

Na limietovergang, waarbij we c constant houden, ontstaat

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_c = \frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial x}$$

In het linkerlid staat de afgeleide van de functie F naar de tijd in de richting $dx/dt = c$; vandaar de index c . De grootte c heeft de dimensie van een snelheid en is vooralsnog willekeurig. Bovenstaande relatie kunnen we opstellen voor de vier afhankelijk variabelen a_1 , a_2 , u_1 en u_2 . In totaal hebben we dan acht vergelijkingen. Er zijn ook acht partiële afgeleiden. We vatten deze laatste op als onbekenden en krijgen dan het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & a_1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & a_2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & g & g & u_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\rho_1}{\rho_2}g & g & 0 & u_2 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \frac{\partial a_1}{\partial t} \\
 \frac{\partial a_2}{\partial t} \\
 \frac{\partial u_1}{\partial t} \\
 \frac{\partial u_2}{\partial t} \\
 \frac{\partial a_1}{\partial x} \\
 \frac{\partial a_2}{\partial x} \\
 \frac{\partial u_1}{\partial x} \\
 \frac{\partial u_2}{\partial x}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -S_1 \\
 -S_2 \\
 \left(\frac{da_1}{dt}\right)_c \\
 \left(\frac{da_2}{dt}\right)_c \\
 \left(\frac{du_1}{dt}\right)_c \\
 \left(\frac{du_2}{dt}\right)_c
 \end{bmatrix}
 \quad (3.1)$$

waarin

$$S_1 = g \frac{dh_b}{dx} + \frac{s_0 - s_1}{\rho_1 a_1} \quad \text{en} \quad S_2 = g \frac{dh_b}{dx} + \frac{s_1 - s_2}{\rho_2 a_2}$$

Als de hoofddeterminant van dit stelsel ongelijk aan nul is, kunnen de partiële afgeleiden uit (3.1) bepaald worden. Het uitzonderingsgeval dat de hoofddeterminant wel gelijk is aan nul is echter het meest interessant, omdat de afgeleiden dan onbepaald zijn. We vinden zo de richtingen $dx/dt = c$ van de z.g. grondkarakteristieken in het (x, t) -vlak, waarlangs zich discontinuïteiten in de partiële afgeleiden kunnen voortplanten. De grootheid c is dan de voortplantingssnelheid daarvan (een discontinuïteit in de afgeleiden betekent een "knik" in het verloop van de afhankelijk variabelen als functie van x en t). Nul stellen van de hoofddeterminant van (3.1) levert

$$[(c - u_1)^2 - g a_1][(c - u_2)^2 - g a_2] - (1 - \epsilon) g^2 a_1 a_2 = 0 \quad (3.2)$$

waarin

$$\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

het relatieve dichtheidsverschil tussen de lagen is. Vergelijking (3.2) stelt een vierdegraadsvergelijking in c voor. Er zijn dus in principe ook vier voortplantingssnelheden. We zullen later echter zien dat in bepaalde gevallen complexe wortels kunnen voorkomen.

De regel van Cramer zegt dat we een onbekende in een stelsel lineaire vergelijkingen kunnen bepalen door in de hoofddeterminant een kolom te vervangen door de kolom in het rechterlid en de uitkomst daarvan te delen door de waarde van de hoofddeterminant. Door het nul stellen van de hoofddeterminant is het stelsel (3.1) afhankelijk geworden. Dan moet, om strijdigheid van het stelsel te vermijden, ook de eerstgenoemde determinant gelijk aan nul gesteld worden, dus b.v.

$$\left[\begin{array}{l} \text{eerste 7 kolommen van de} \\ \text{hoofddeterminant} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -S_1 \\ -S_2 \\ \left(\frac{da_1}{dt}\right)_c \\ \left(\frac{da_2}{dt}\right)_c \\ \left(\frac{du_1}{dt}\right)_c \\ \left(\frac{du_2}{dt}\right)_c \end{array} \right] = 0$$

Vervangen van andere kolommen door die van het rechterlid leidt niet tot nieuwe resultaten. Uitwerken van bovenstaande determinant levert de z.g. compatibiliteitsrelatie

$$\begin{aligned}
& (1 - \epsilon)g(c - u_1)(c - u_2)\left(\frac{da_1}{dt}\right)_c + g[(c - u_1)^2 - \epsilon ga_1]\left(\frac{da_2}{dt}\right)_c + \\
& + (1 - \epsilon)ga_1(c - u_2)\left(\frac{du_1}{dt}\right)_c + (c - u_2)[(c - u_1)^2 - ga_1]\left(\frac{du_2}{dt}\right)_c + \\
& + (c - u_2)[\{(c - u_1)^2 - ga_1\}S_2 + (1 - \epsilon)ga_1S_1] = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Uit (3.3) blijkt dat het oorspronkelijke stelsel partiële differentiaalvergelijkingen met behulp van de methode der karakteristieken herleid kan worden tot een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen.

Er zijn vier onbekende afgeleiden in deze relatie, n.l.

$$\left(\frac{da_1}{dt}\right)_c, \left(\frac{da_2}{dt}\right)_c, \left(\frac{du_1}{dt}\right)_c, \left(\frac{du_2}{dt}\right)_c$$

Er zijn ook vier karakteristieke richtingen $dx/dt = c$, zodat we vier compatibiliteitsrelaties voor de vier onbekenden kunnen opstellen. Evenals bij lange golven in een eenlaagsysteem kunnen we op deze resultaten een rekenmethode baseren. Zie fig. 3.2. Stel dat de toestand op het tijdstip t bekend is en dat we de toestand op een wat later tijdstip $t + \Delta t$ willen berekenen. Op het tijdstip t kunnen voor een zekere x de vier voortplantingssnelheden c_1 t/m c_4 uit (3.2) bepaald worden (zie onder). Voor een punt P in het (x,t) -vlak kunnen zo de vier grondkarakteristieken gevonden worden waarlangs de vier compatibiliteitsrelaties gelden. Discretiseren van de differentiaalquotienten in (3.3) volgens

$$\left(\frac{da_1}{dt}\right)_{c_1} \approx \frac{(a_1)_P - (a_1)_A}{\Delta t}, \quad \left(\frac{da_1}{dt}\right)_{c_2} \approx \frac{(a_1)_P - (a_1)_B}{\Delta t}, \quad \text{enz.}$$

maakt het dan mogelijk de vier onbekende grootheden $(a_1)_P$, $(a_2)_P$, $(u_1)_P$ en $(u_2)_P$ in het punt

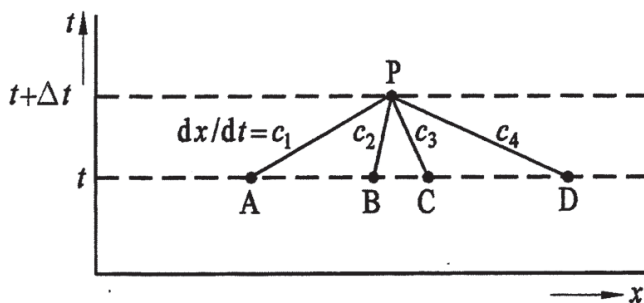


Fig. 3.2 - Grondkarakteristieken in het (x,t) -vlak.

P te bepalen. Deze berekening kan herhaald worden voor andere punten op de x -as en het tijdstip $t + \Delta t$, en daarna voor latere tijdstippen.

Deze rekenmethode is voor praktische toepassingen in het algemeen te omslachtig. Men maakt meestal gebruik van een eindigedifferentiemethode, zie b.v. (4) en (5).

We onderzoeken nu de oplossingen van (3.2) voor de verschillende voortplantingsnelheden.

Daartoe stellen we

$$\begin{aligned}c - u_1 &= X \\ c - u_2 &= Y\end{aligned}$$

Het snelheidsverschil Δu tussen de lagen wordt hiermee

$$\Delta u = u_1 - u_2 = Y - X \quad (3.4)$$

Vergelijking 3.2 wordt met deze substituties

$$(X^2 - ga_1)(Y^2 - ga_2) - (1 - \epsilon) g^2 a_1 a_2 = 0 \quad (3.5)$$

Deze vergelijking stelt een hyperbool in het (X^2, Y^2) -vlak voor, zie fig. 3.3. Omdat X^2 en Y^2 positief of nul zijn, is alleen het eerste kwadrant van het (X^2, Y^2) -vlak van belang. In het (X, Y) -vlak levert dit de krommen van fig. 3.4.

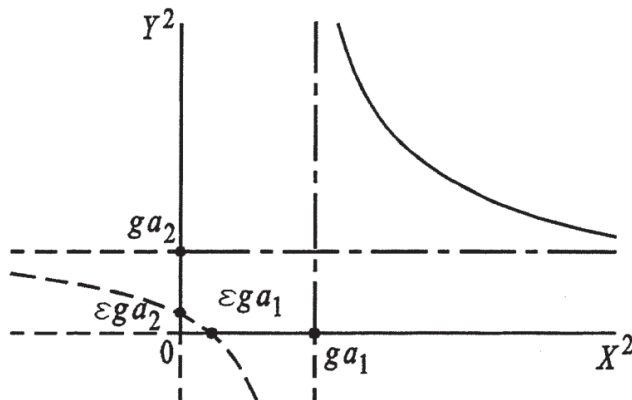


Fig. 3.3 - Oplossing van vergelijking 3.2.

In deze figuur is ook (3.4) als een rechte weergegeven. De oplossingen van (3.2) vinden we nu als snijpunten van deze rechte met de krommen. We kunnen daarbij de volgende gevallen onderscheiden voor wat betreft de absolute waarde van het snelheidsverschil Δu :

1. $|\Delta u|$ is zo klein dat er twee snijpunten met de centrale ovale kromme zijn en twee met de buitentakken.
2. $|\Delta u|$ is groter, zodat we alleen twee snijpunten met de buitentakken vinden. Dit betekent dat de andere twee wortels complex zijn. In hoofdstuk 6 wordt uiteengezet, dat oplossingen dan instabiel zijn.
3. $|\Delta u|$ is zo groot dat er vier snijpunten met de buitentakken zijn. Dit geval is niet van belang, omdat de veronderstellingen waarop het lagenmodel gebaseerd is niet meer opgaan.

Van werkelijke betekenis is alleen het stabiele geval 1. Het snelheidsverschil $\Delta u = u_1 - u_2$ is dan van de orde $\sqrt{\epsilon ga}$.

Hierin is de a de totale diepte,

$$a = a_1 + a_2$$

De grootheden $c_i - u_1$ en $c_i - u_2$ behorend bij de snijpunten met de centrale kromme zijn dan ook van de orde $\sqrt{\epsilon ga}$ (a_1 en a_2 zijn van de orde a). De grootheden $c_e - u_1$ en $c_e - u_2$ behorend bij de snijpunten met de buitentakken zijn van de orde \sqrt{ga} . Zie fig. 3.4.

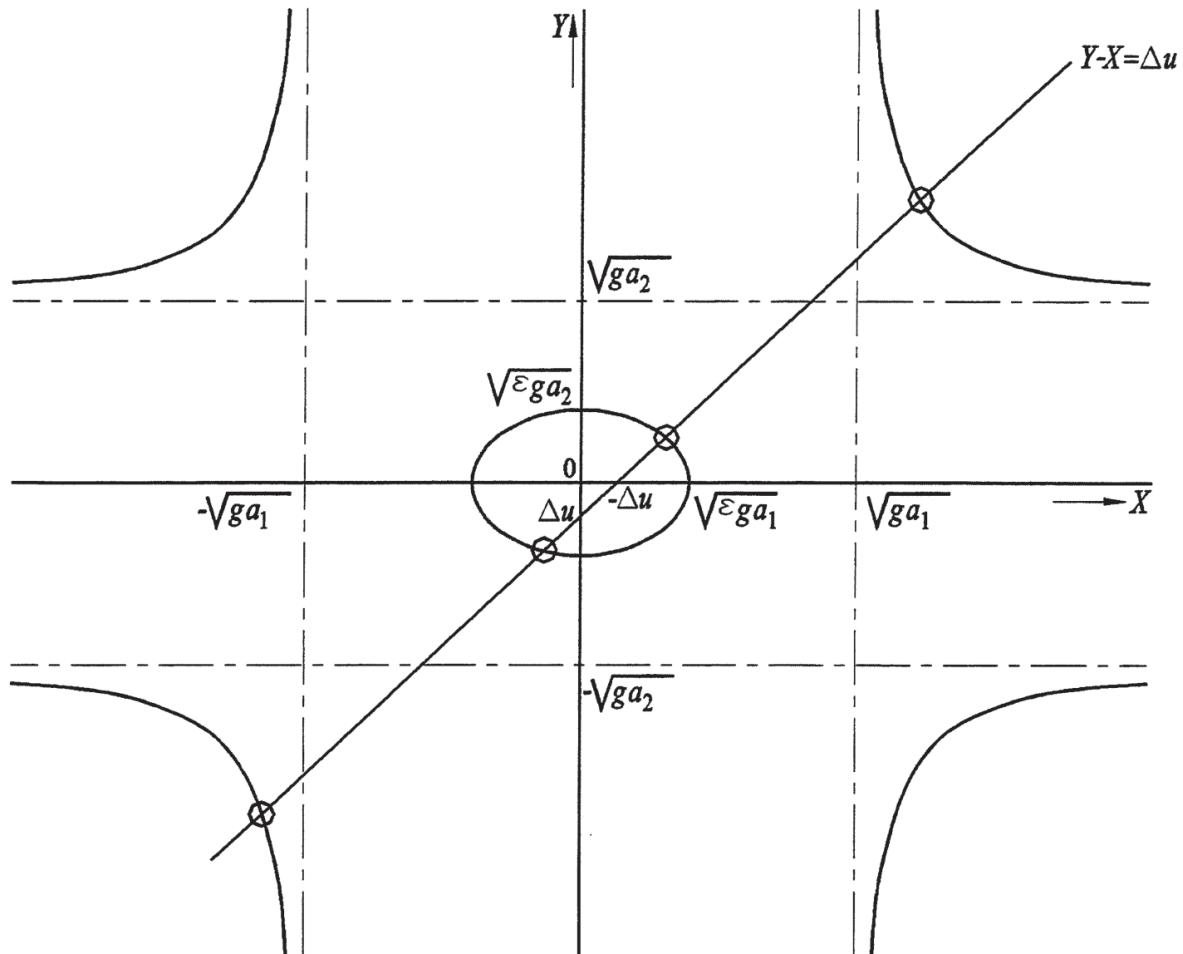


Fig. 3.4 - *Oplossing van vergelijking 3.2.*

Nu we de orden van grootte van Δu , $c_i - u_n$ en $c_e - u_n$ kennen, kunnen we benaderingsoplossingen van (3.2) geven voor waarden van het relatieve dichtheidsverschil ϵ , die klein zijn ten opzichte van één. We gaan daarvoor als volgt te werk.

De voortplantingssnelheid c_i . Vermenigvuldig de termen in (3.2) uit en verwaarloos de termen van de orde $(\epsilon ga)^2$ ten opzichte van de resterende (grotere) termen. Maak hierbij

gebruik van het feit dat $c_i - u_1$ en $c_i - u_2$ van de orde $\sqrt{\epsilon ga}$ en a_1 en a_2 van de orde a zijn.

Oplossen van de resulterende vierkantsvergelijking in c_i :

$$c_i^2 - 2\frac{a_1 u_2 + a_2 u_1}{a} c_i + \frac{u_1^2 a_2 + u_2^2 a_1}{a} - \epsilon g \frac{a_1 a_2}{a} \approx 0$$

geeft

$$c_i = \frac{a_1 u_2 + a_2 u_1}{a} \pm \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a^2} [\epsilon ga - (u_1 - u_2)^2]} \quad (\epsilon \ll 1) \quad (3.6)$$

De voortplantingssnelheid c_e . Maak gebruik van het feit dat $c_e - u_1$ en $c_e - u_2$ van de orde \sqrt{ga} , $u_1 - u_2$ van de orde $\sqrt{\epsilon ga}$, en a_1 en a_2 van de orde a zijn. Verwaarloos nu de termen van de orde $\epsilon(ga)^2$. De resulterende vergelijking is dan

$$c_e^4 - 2c_e^3(u_1 + u_2) - gac_e^2 + 2g(a_1 u_2 + a_2 u_1)c_e \approx 0 \quad (3.7)$$

De oplossing $c_e = 0$ voldoet niet, want deze is niet van de orde \sqrt{ga} . Een benaderingsoplossing die wel voldoet is

$$c_e \approx \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{a} \pm \sqrt{ga} \quad (\epsilon \ll 1) \quad (3.8)$$

Bij het invullen van (3.8) in (3.7) blijkt de gemaakte fout van de orde $\epsilon(ga)^2$ te zijn, dus van dezelfde orde als de eerder genoemde verwaarlozing.

Vergelijking (3.6) laat zien dat de voortplantingssnelheden c_i complex worden als

$$(u_1 - u_2)^2 > \epsilon ga \quad (3.9)$$

Er is dan dus geen snijpunt met de centrale kromme in fig. 3.4. In hoofdstuk 6 wordt aangetoond dat complexe voortplantingssnelheden duiden op instabiliteit van het lagensysteem. Ook wordt daar aangetoond dat bij een scherp grensvlak (afwezigheid van een overgangslaag) instabiliteit al bij geringere snelheidsverschillen dan die gegeven door (3.9) optreedt. Als echter voldaan is aan de eis

$$(u_1 - u_2)^2 < \epsilon ga \quad (3.10)$$

en de interne Froudegetallen F_n gedefinieerd door $F_n^2 = u_n^2 / (\epsilon ga_n)$, niet te groot ten opzichte van één worden, dan is het lagenmodel toch vaak praktisch bruikbaar.

Merk op dat de voortplantingssnelheid c_i sterk afhangt van de verhouding tussen de laagdikten a_1 en a_2 . Dit is veel minder het geval met de voortplantingssnelheid c_e . De eerste term in het rechter lid van (3.8) stelt de over de verticaal gemiddelde stroomsnelheid (\bar{u}) voor. Vergelijk dit resultaat met dat voor de voortplantingssnelheid van lange golven in een één-laagsysteem; ook daarvoor geldt $c = \bar{u} \pm \sqrt{ga}$.

In de hierna volgende paragraaf zullen we zien dat c_i de voortplantingssnelheid van de eerder genoemde interne golven voorstelt en c_e die van externe golven.

3 Golven met kleine amplitude

Om inzicht te verkrijgen in de voortplanting van lange golven in een tweelagensysteem passen we de methode der karakteristieken toe op een relatief eenvoudig geval, n.l. een tweelagensysteem waarin kleine verstoringen optreden. We veronderstellen hierbij dat

- de snelheden in ongestoorde toestand gelijk aan nul zijn,
- de verstoringen in grensvlak en vrij oppervlak klein zijn ten opzichte van de laagdikten; de stroomsnelheden samenhangend met de verstoringen zullen dan ook klein zijn ten opzichte van de voortplantingssnelheid van interne golven,
- de bodem horizontaal is,
- de wrijving verwaarloosbaar is, en
- het relatieve dichtheidsverschil klein is.

We noemen de verstoringen in de laagdikten nu η_1 resp. η_2 , zodat

$$\eta_n = a_n - a_{n0} \quad (n = 1 \text{ of } 2)$$

waarin a_{n0} de laagdikte in ongestoorde toestand is. Omdat a van plaats noch tijd afhangt, geldt voor afgeleiden van de laagdikten

$$\left(\frac{da_n}{dt}\right)_c = \left(\frac{d\eta_n}{dt}\right)_c$$

enz. De variaties in de laagdikten zelf, dus het verschil tussen a_n en a_{n0} zullen we verder verwaarlozen. De verstoring in de totale diepte noemen we η . We hebben dus (zie fig. 3.5)

$$\eta = \eta_1 + \eta_2.$$

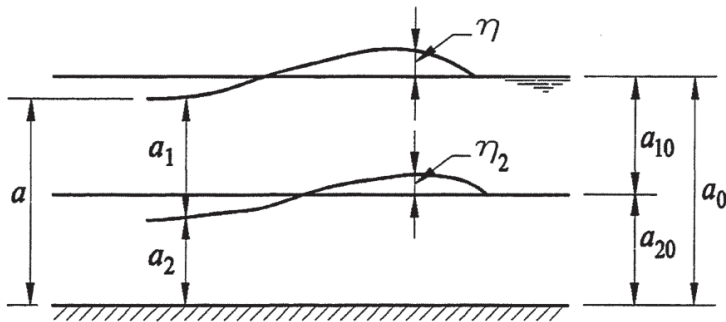


Fig. 3.5 - Lange golven met kleine amplitude.

3.1 Uitwerking karakteristiekenmethode

Met gebruikmaking van bovenstaande verwaarlozingen kunnen we de vergelijkingen vereenvoudigen (lineariseren). Voor de voortplantingssnelheden vinden we, zie (3.6) en (3.8),

$$c_i \approx \pm \sqrt{\epsilon g \frac{a_1 a_2}{a}} \quad (3.11)$$

$$c_e \approx \pm \sqrt{ga} \quad (3.12)$$

De voortplantingssnelheden zijn bij benadering constant, zodat de grondkarakteristieken in dit geval rechten zijn.

De compatibiliteitsrelatie vereenvoudigt tot

$$c^2 \left(\frac{d\eta_1}{dt} \right)_c + (c^2 - \epsilon g a_1) \left(\frac{d\eta_2}{dt} \right)_c + a_1 c \left(\frac{du_1}{dt} \right)_c + \frac{c}{g} (c^2 - g a_1) \left(\frac{du_2}{dt} \right)_c = 0$$

Omdat de coëfficiënten in deze relatie nu bij benadering constant zijn, is analytische integratie langs een karakteristiek mogelijk:

$$\begin{aligned} c^2 \eta_1 + (c^2 - \epsilon g a_1) \eta_2 + a_1 c u_1 + \frac{c}{g} (c^2 - g a_1) u_2 = \\ = \text{constant langs karakteristiek} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Voor de karakteristieken met $c = dx/dt = \pm c_e$ (c_e nu positief gedacht) levert (3.13), met verwaarlozing van de term met de factor ϵ ,

$$c_e \eta_1 + c_e \eta_2 \pm a_1 u_1 \pm a_2 u_2 = \text{constant} \quad (3.14)$$

Voor de karakteristieken met $c = dx/dt = \pm c_i$ (c_i nu positief) vinden we, met verwaarlozing van c^2 in de laatste term in het linker lid van (3.13) (c^2 is nu evenredig met ϵ , zie (3.11)),

$$\epsilon g a_2 \eta_1 - \epsilon g a_1 \eta_2 \pm a c_i u_1 \mp a c_i u_2 = \text{constant} \quad (3.15)$$

We beschouwen nu achtereenvolgens een golf die met een snelheid c_e en één die met een snelheid c_i loopt.

Golf met voortplantingssnelheid c_e - externe lange golf

De compatibiliteitsrelaties (3.14) en (3.15) worden voor dit geval

$$\frac{dx}{dt} = -c_e : \quad c_e \eta_1 + c_e \eta_2 - a_1 u_1 - a_2 u_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -c_i : \quad \epsilon g a_2 \eta_1 - \epsilon g a_1 \eta_2 - a c_i u_1 + a c_i u_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = +c_i : \quad \epsilon g a_2 \eta_1 - \epsilon g a_1 \eta_2 + a c_i u_1 - a c_i u_2 = 0$$

Deze karakteristieken komen uit een ongestoord gebied (zie fig. 3.6). Golfhoogten en stroomsnelheden zijn daar gelijk aan nul. De rechter leden in de compatibiliteitsrelaties zijn dus ook gelijk aan nul. De vierde compatibiliteitsrelatie, n.l. die langs de karakteristiek met $dx/dt = +c_e$, maakt aansluiting aan begin- of randvoorwaarden mogelijk. Door schuiven met het punt A langs deze karakteristiek blijkt dat de golf in de tijd niet van vorm verandert, omdat het "schuiven" geen invloed heeft op de compatibiliteitsrelaties.

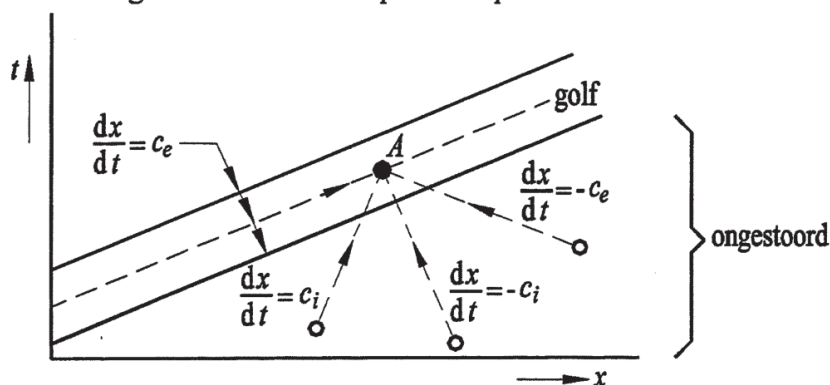


Fig. 3.6 - (x,t) -vlak voor externe lange golf.

Uitwerking van bovenstaande drie relaties geeft

$$u_1 = u_2 = \frac{c_e}{a} \eta \quad \text{en} \quad \eta_2 = \frac{a_2}{a} \eta \quad (3.16)$$

Dit type golf wordt dus gekenmerkt door de volgende eigenschappen (zie fig. 3.7):

- de voortplantingssnelheid is $c_e = \pm \sqrt{ga}$,
- de stroomsnelheden in de lagen zijn gelijk, en
- de verstoring in het grensvlak verhoudt zich tot die in het vrije oppervlak als de dikte van de onderlaag tot de totale diepte.

De externe golven komen overeen met die in een éénlaagsysteem. De twee lagen gedragen zich hier samen als één laag.

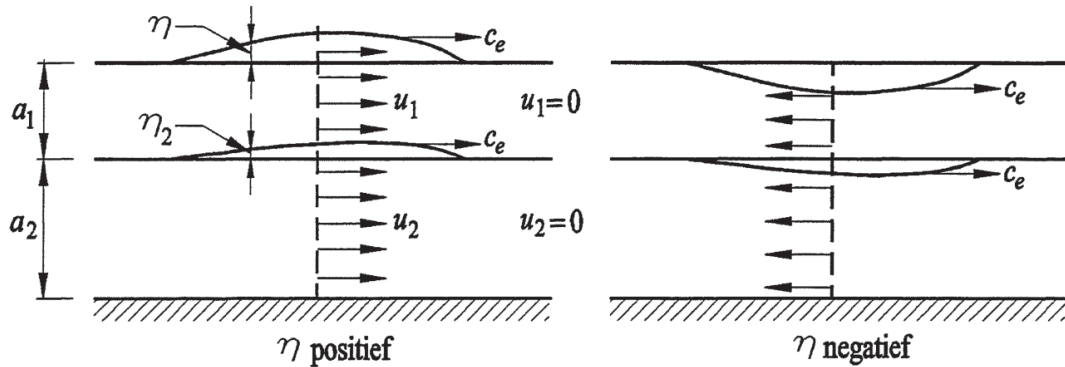


Fig. 3.7 - Externe lange golf.

Golf met voortplantingssnelheid c_i - interne lange golf

compatibiliteitsrelaties (3.14) en (3.15) worden nu, zie ook fig. 3.8,

$$\frac{dx}{dt} = -c_e : \quad c_e \eta_1 + c_e \eta_2 - a_1 u_1 - a_2 u_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -c_i : \quad \epsilon g a_2 \eta_1 - \epsilon g a_1 \eta_2 - a c_i u_1 + a c_i u_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = +c_e : \quad c_e \eta_1 + c_e \eta_2 + a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$$

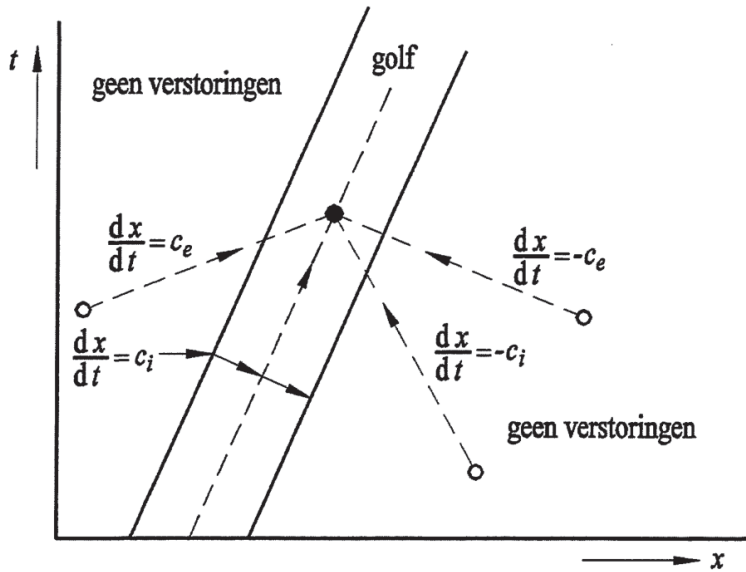


Fig. 3.8 - (x,t) -vlak voor interne lange golf.

Nu geldt dat de karakteristiek met $dx/dt = +c_i$ gebruikt kan worden voor het opleggen van rand- of beginvoorwaarden. Ook interne lange golven met kleine amplitude veranderen in de tijd niet van vorm. Uitwerking van bovenstaande relaties geeft

$$u_1 = -\frac{c_i}{a_1}\eta_2 = \frac{c_i}{a_1}\eta_1, \quad u_2 = \frac{c_i}{a_2}\eta_2 \quad \text{en} \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 = 0 \quad (3.17)$$

We vinden hier $\eta = 0$, omdat ϵ klein verondersteld is. We kunnen dit corrigeren door in de compatibiliteitsrelaties voor de richtingen $dx/dt = \pm c_e$ termen van de orde ϵ in de beschouwing te betrekken:

$$\frac{dx}{dt} = c_e : (1 - \epsilon)c_e^2\eta_1 + (c_e^2 - \epsilon ga_1)\eta_2 + (1 - \epsilon)ga_1c_e u_1 + c_e ga_2 u_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -c_e : (1 - \epsilon)c_e^2\eta_1 + (c_e^2 - \epsilon ga_1)\eta_2 - (1 - \epsilon)ga_1c_e u_1 - c_e ga_2 u_2 = 0$$

waaruit volgt

$$\eta_1 \approx -\left(1 + \frac{a_2}{a}\epsilon\right)\eta_2 \quad \text{en} \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 \approx -\epsilon\frac{a_2}{a}\eta_2$$

De uitwijking van het vrije oppervlak η is inderdaad evenredig met ϵ .

Interne golven hebben dus de volgende eigenschappen (zie fig. 3.9):

- de voortplantingssnelheid is $c_i = \pm \sqrt{\epsilon g a_1 a_2 / a}$; dit is aanzienlijk lager dan die van externe golven. Voorbeeld: $a_1 = a_2 = 5$ m, $\epsilon = 0,02$ (zoet-zout) geeft $c_e \approx 10$ m/s en $c_i \approx 0,7$ m/s,
- de stroomsnelheden in de twee lagen zijn van tegengesteld teken, en wel zodanig dat het netto debiet gelijk aan nul is ($a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$), en
- de verstoring in het vrije oppervlak is een orde (n.l. een factor $-\epsilon a_2 / a$) kleiner dan die in het grensvlak.

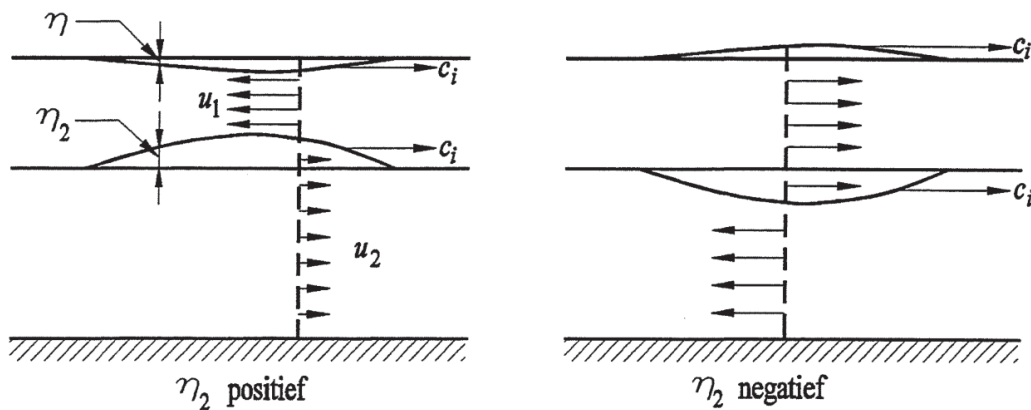


Fig. 3.9 - Interne lange golf.

Door de ingevoerde verwaarlozingen zijn de vergelijkingen lineair geworden. Dit betekent dat we het superpositiebeginsel kunnen toepassen. Een willekeurige verstoring met een langegolfkarakter kan dan opgebouwd worden uit een lineaire combinatie van

- een in positieve richting lopende externe lange golf,
- een in negatieve richting lopende externe lange golf,
- een in positieve richting lopende interne lange golf en
- een in negatieve richting lopende interne lange golf,

dus (de termen in de rechter leden vertegenwoordigen de genoemde golven, in dezelfde volgorde)

$$\begin{aligned}
 \eta(x,t) &= \eta_{e+}(x - c_e t) + \eta_{e-}(x + c_e t) + \eta_{i+}(x - c_i t) + \eta_{i-}(x + c_i t) \\
 \eta_2(x,t) &= \eta_{2e+}(x - c_e t) + \eta_{2e-}(x + c_e t) + \eta_{2i+}(x - c_i t) + \eta_{2i-}(x + c_i t) \\
 u_1(x,t) &= u_{1e+}(x - c_e t) + u_{1e-}(x + c_e t) + u_{1i+}(x - c_i t) + u_{1i-}(x + c_i t) \\
 u_2(x,t) &= u_{2e+}(x - c_e t) + u_{2e-}(x + c_e t) + u_{2i+}(x - c_i t) + u_{2i-}(x + c_i t)
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

(3.19)

type golf	golven in positieve x -richting	golven in negatieve x -richting
extern	$\eta_{2e+} = \frac{a_2}{a} \eta_{e+}$ $u_{1e+} = \frac{c_e}{a} \eta_{e+}$ $u_{2e+} = \frac{c_e}{a} \eta_{e+}$	$\eta_{2e-} = \frac{a_2}{a} \eta_{e-}$ $u_{1e-} = -\frac{c_e}{a} \eta_{e-}$ $u_{2e-} = -\frac{c_e}{a} \eta_{e-}$
intern	$\eta_{i+} = -\epsilon \frac{a_2}{a} \eta_{2i+}$ $u_{1i+} = -\frac{c_i}{a_1} \eta_{2i+}$ $u_{2i+} = \frac{c_i}{a_2} \eta_{2i+}$	$\eta_{i-} = -\epsilon \frac{a_2}{a} \eta_{2i+}$ $u_{1i-} = \frac{c_i}{a_1} \eta_{2i-}$ $u_{2i-} = -\frac{c_i}{a_2} \eta_{2i-}$

Hierin zijn η_{e+} enz. nog onbekende functies van de argumenten $x - c_e t$ enz. Aan te tonen is dat een argument van deze vorm een translatiegolf oplevert. De indices e of i van genoemde functies duiden op externe of interne golven, de indices $+$ of $-$ verwijzen naar de voortplantingsrichting van de betreffende golf. Er zijn zestien onbekende functies in (3.18). We kunnen dit aantal echter verminderen door gebruik te maken van (3.16) voor externe en (3.17) voor interne golven. De verschillende relaties zijn samengevat in het bovenstaande schema 3.19.

Er zijn nu nog vier onbekende functies: $\eta_{e+}(x - c_e t)$, $\eta_{e-}(x + c_e t)$, $\eta_{2i+}(x + c_i t)$ en $\eta_{2i-}(x + c_i t)$. Deze onbekende functies moeten bepaald worden met behulp van begin- en randvoorwaarden.

3.2 Voorbeelden

Lang kanaal met toevoer in bovenlaag

Een tweelagensysteem, bestaande uit een zoete en een zoute laag is op $t = 0$ in rust. Op dit moment begint men op $x = 0$ een (klein) debiet $q(t)$ aan zoet water in de bovenlaag te pompen, zie fig. 3.10. In de onderlaag wordt geen water toegevoerd.

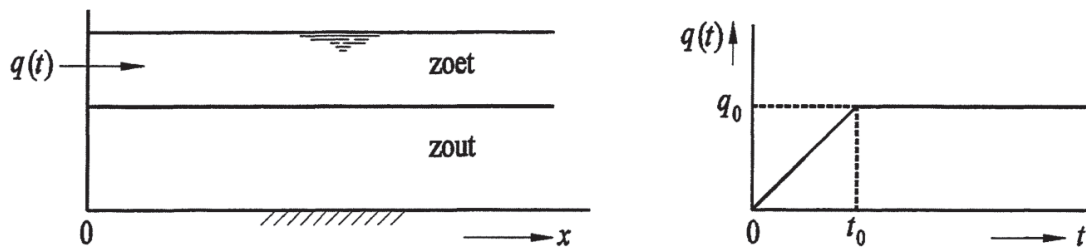


Fig. 3.10 - Tweelagensysteem met toevoer in de bovenlaag.

Op $t = 0$ zullen er golven in positieve x -richting gaan lopen. Golven in negatieve richting laten we buiten beschouwing, omdat het kanaal lang verondersteld is, en golfreflecties pas na lange tijd bij $x = 0$ merkbaar worden. Voor niet te lange tijden kunnen we dus stellen

η_{e+} en η_{2i+} zijn hierin de onbekende functies. De tweede term in het rechterlid van de eerste uitdrukking is klein vanwege de factor ϵ .

Het opleggen van de randvoorwaarden op $x = 0$ geeft nu voor de bovenlaag

$$u_1(0,t) = \frac{q(t)}{a_1} = \frac{c_e}{a} \eta_{e+}(-c_e t) - \frac{c_i}{a_1} \eta_{2i+}(-c_i t)$$

en voor de onderlaag

$$u_2(0,t) = 0 = \frac{c_e}{a} \eta_{e+}(-c_e t) + \frac{c_i}{a_2} \eta_{2i+}(-c_i t)$$

waaruit volgt

$$\eta_{e+}(-c_e t) = \frac{1}{c_e} q(t) \quad \text{en} \quad \eta_{2i+}(-c_i t) = -\frac{1}{c_i} \frac{a_2}{a} q(t)$$

of

$$\eta_{e+}(\alpha) = \frac{1}{c_e} q\left(-\frac{\alpha}{c_e}\right) \quad \text{en} \quad \eta_{2i+}(\beta) = -\frac{1}{c_i} \frac{a_2}{a} q\left(-\frac{\beta}{c_i}\right)$$

Stel nu $\alpha = x - c_e t$ en $\beta = x - c_i t$, dan vinden we als oplossing (zie ook fig. 3.11 voor de toestand op een tijdstip $t > 0$)

$$\eta_{e+}(x - c_e t) = \frac{1}{c_e} q(t - \frac{x}{c_e})$$

$$\eta_{2i+}(x - c_i t) = -\frac{1}{c_i} \frac{a_2}{a} q(t - \frac{x}{c_i})$$

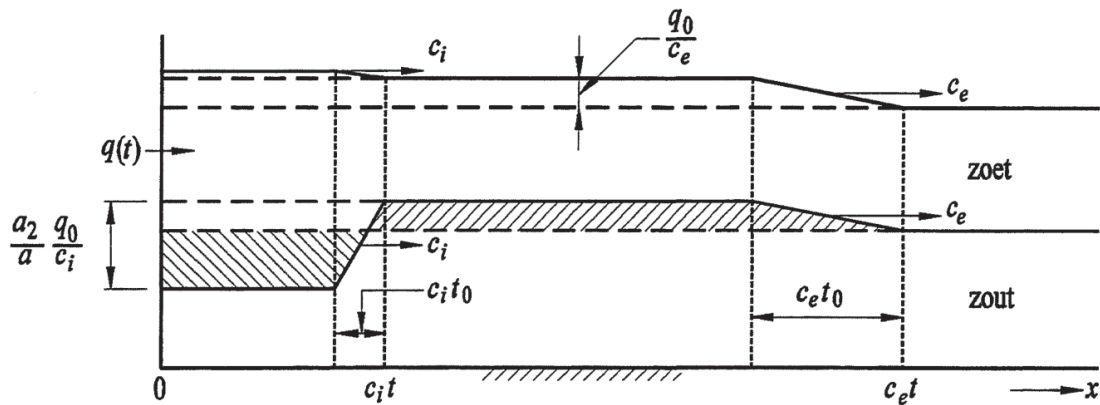


Fig. 3.11 - Interne en externe lange golven op tijdstip t .

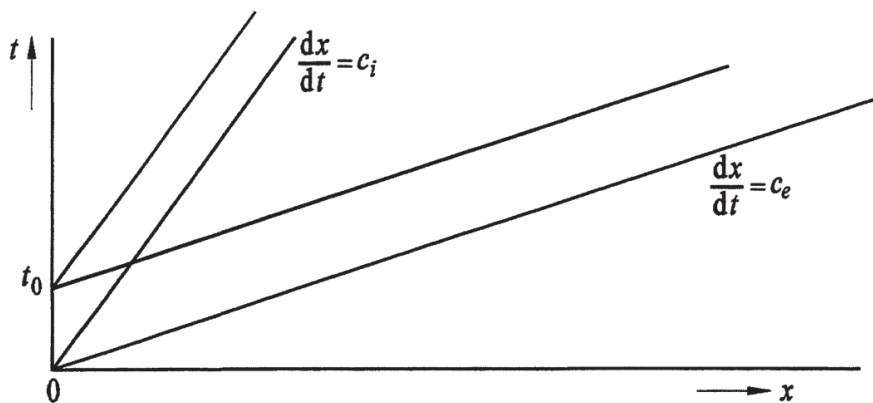
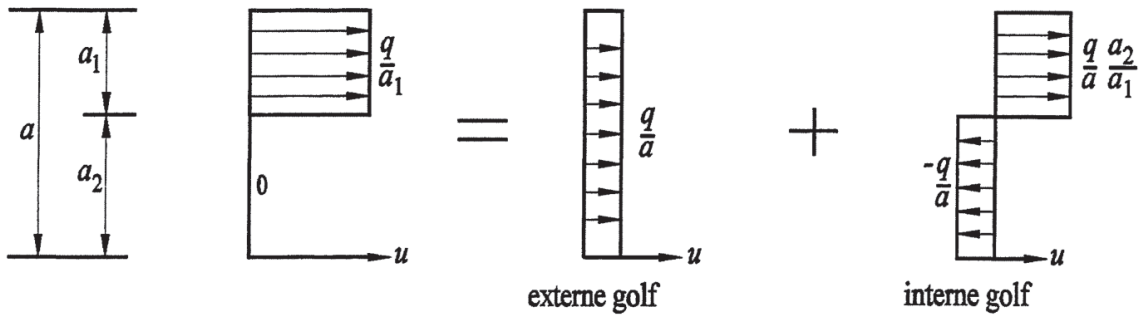


Fig. 3.12 - (x,t) -vlak.

Omdat de hoeveelheid water in de onderlaag niet verandert, moeten de twee gearceerde oppervlakken in deze figuur aan elkaar gelijk zijn. De externe golven lopen aanzienlijk sneller dan de interne, en hebben dus op een zeker tijdstip een grotere weg afgelegd dan de laatste. Dit

is ook duidelijk te maken met het verloop van de betrokken grondkarakteristieken in het (x,t) -vlak, zie fig. 3.12.

Het opleggen van de randvoorwaarden kan men zich als volgt voorstellen: het snelheidsprofiel dat op $x = 0$ is voorgeschreven, moet worden samengesteld uit het snelheidsprofiel behorend bij een externe golf (fig. 3.7) en dat behorend bij een interne golf (fig. 3.9), dus:



De relaties (3.19) leveren dan weer de eerder gevonden verstoringen in de laagdikten.

Eigentrillingen van een afgesloten bekken

We beschouwen een bekken met horizontale bodem en lengte L waarin zich een tweelagensysteem bevindt (fig. 3.13). Er wordt geen water toe- of afgevoerd. De randvoorwaarden zijn dus

$$\begin{aligned}
 u_1(0,t) &= 0 & u_1(L,t) &= 0 \\
 & & \text{en} & \\
 u_2(0,t) &= 0 & u_2(L,t) &= 0
 \end{aligned}$$

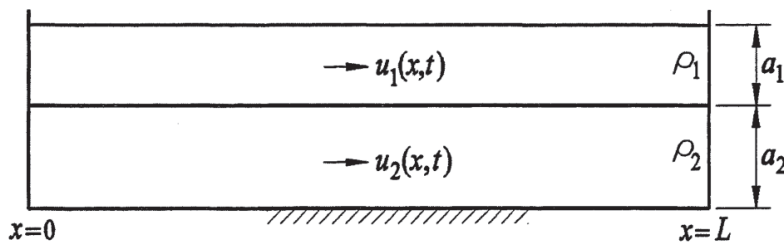


Fig. 3.13 - Tweelagensysteem in afgesloten bekken.

In een dergelijk systeem kunnen periodieke bewegingen (eigentrillingen, seiches) optreden, b.v. als gevolg van het opsteken of wegvallen van de wind (verg. het derde voorbeeld van

hoofdstuk 2). We kunnen weer een extern en een intern verschijnsel onderscheiden.

Voor het interne verschijnsel geeft (3.18) (de geringe vervorming van het vrije oppervlak laten we buiten beschouwing)

$$\eta_2 = \eta_{2i+}(x - c_i t) + \eta_{2i-}(x + c_i t)$$

$$u_1 = u_{1i+}(x - c_i t) + u_{1i-}(x + c_i t)$$

$$u_2 = u_{2i+}(x - c_i t) + u_{2i-}(x + c_i t)$$

Opleggen van de randvoorwaarden in b.v. de laatste vergelijking geeft

$$u_{2i+}(-c_i t) + u_{2i-}(c_i t) = 0$$

$$u_{2i+}(L - c_i t) + u_{2i-}(L + c_i t) = 0$$

Vervang in de eerste relatie t door $t - L/c_i$, dan ontstaat

$$u_{2i+}(L - c_i t) + u_{2i-}(-L + c_i t) = 0$$

Vergelijk dit resultaat met de tweede relatie. Er moet blijkbaar gelden

$$u_{2i-}(L + c_i t) = u_{2i-}(-L + c_i t)$$

Deze vergelijking brengt tot uitdrukking dat u_{2i-} na een tijdsinterval $2L/c_i$ weer dezelfde waarde aanneemt (de vergelijking is van de vorm: $f(t + 2L/c) = f(t)$). Er zullen daarom periodieke bewegingen optreden, in het algemeen met perioden

$$k \frac{2L}{c_i}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Beperken we ons tot de eerste harmonische ($k = 1$ en sinusvormige golven), dan kunnen we stellen

$$u_{2i+}(x - c_i t) = \frac{1}{2} A \cos \pi \frac{x - c_i t}{L}$$

$$u_{2i-}(x - c_i t) = -\frac{1}{2} A \cos \pi \frac{x + c_i t}{L}$$

zodat¹

$$u_2 = A \sin \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{c_i t}{L}$$

en, gebruikmakend van (3.19),

$$u_1 = - \frac{a_2}{a_1} A \sin \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{c_i t}{L}$$

$$\eta_2 = \frac{a_2}{c_i} A \cos \pi \frac{x}{L} \cos \pi \frac{c_i t}{L}$$

Hierin is A de grootste amplitude van de snelheid in de onderlaag. Merk op dat aan de randvoorwaarden is voldaan. Op elke plaats in het bekken variëren de snelheden en golfhoogten als een sinusfunctie (harmonisch) met de tijd. De amplitude hangt van de plaats af. De gevonden oplossing betreft een staande golf. Zie fig. 3.14.

De periode T_i van de eerste harmonische van de interne golven is dus

$$T_i = \frac{2L}{c_i}$$

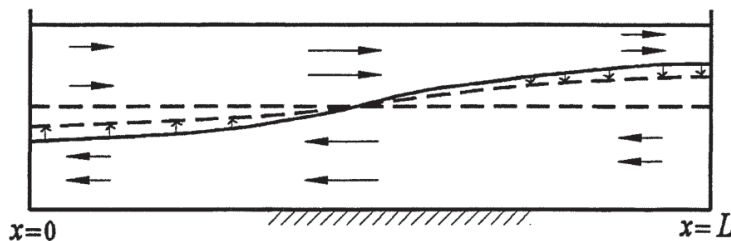


Fig. 3.14 - *Staaende interne lange golf in afgesloten bekken.*

Voor een sluiscolk met een lengte van 350 m en $c_i = 0,7$ m/s (zie par. 3.1) vinden we $T_i = 1000$ s ≈ 17 min. Voor een afgesloten zeearm met een lengte van 14 km is $T_i = 40.000$ s ≈ 11 uur.

Het overeenkomstige probleem voor externe golven (zie fig. 3.15) levert als grootste periode

¹Maak gebruik van $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

$$T_e = \frac{2L}{c_e}$$

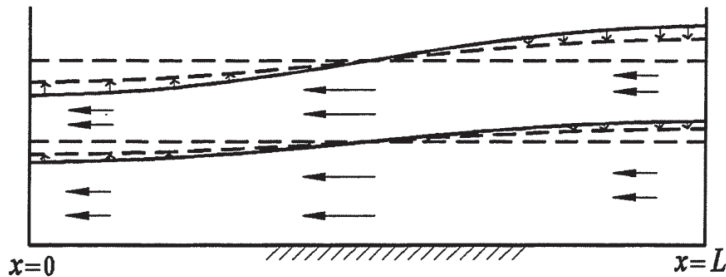


Fig. 3.15 - *Staannde externe lange golf in afgesloten bekken.*

Met $c_e = 10$ m/s (zie par. 3.1) vinden we voor de twee hierboven genoemde gevallen: $T_e = 70$ s \approx 1 min., resp. $T_e = 2800$ s \approx 47 min. De periode van de interne golf is aanzienlijk groter dan die van de externe golf. Een interne waterbeweging past zich daardoor aanzienlijk trager aan een nieuwe situatie aan dan een externe waterbeweging.

Vaak is de interne golfbeweging niet harmonisch of lineair, zie b.v. (3).

4 Afzonderlijke vergelijkingen voor interne en externe waterbeweging

In de vorige paragraaf werd verondersteld dat de verstoringen klein zijn. In veel praktisch voorkomende gevallen zal dit echter niet zo zijn. Het lineariseren van de vergelijkingen is dan niet meer toegestaan. Gevolgen van het optreden van grotere verstoringen zijn:

- de voortplantingssnelheden (zie (3.6) en (3.8)) zijn niet meer constant, omdat de veranderingen in laagdikten en stroomsnelheden niet meer verwaarloosbaar zijn. Dit heeft als gevolg dat de grondkarakteristieken nu gekromd zijn. Ook zullen in het algemeen verschillende delen van een golf zich met verschillende snelheden voortplanten: er treedt golfvervorming op.
- De wrijving langs de bodem, grensvlak en eventueel vrij oppervlak is niet meer verwaarloosbaar als het beschouwde verschijnsel zich over een relatief grote lengte afspeelt.

Analytische resultaten zijn nu niet meer te verkrijgen, al blijft stapsgewijze integratie langs karakteristieken in principe mogelijk. Er is nog wel sprake van externe en interne golven, omdat de voortplantingssnelheden c_e en c_i bestaan, onafhankelijk van de grootte van de

verstoringen. Door het niet-lineaire karakter van de golfvoortplanting bij grotere verstoringen zal nu in het algemeen onderlinge beïnvloeding van interne en externe golven optreden. Het superpositiebeginsel zoals gehanteerd in par. 3 is dus niet meer bruikbaar.

We zullen hieronder echter aannemelijk maken dat een belangrijke vereenvoudiging mogelijk is in het geval van relatief kleine dichtheidsverschillen, dus in het geval dat

$$\epsilon \ll 1$$

De externe golven (in het algemeen: de externe waterbeweging) blijken (blijkt) dan toch tot op zekere hoogte als onafhankelijk van de interne golven (waterbeweging) beschouwd te mogen worden (het omgekeerde is niet het geval!), ook al zijn de interne verstoringen relatief groot, zie ook (4). Van deze aanpak zullen we gebruik maken in hoofdstuk 4, Stationaire Tweelagenstroming.

Vergelijkingen voor de externe waterbeweging

Als de dichtheidsverschillen relatief klein zijn, zal dat ook gelden voor de daarmee samenhangende krachten en versnellingen. Het ligt dan voor de hand aan te nemen dat de externe waterbeweging slechts zwak beïnvloed wordt door dichtheidsverschillen. Dit is ook wat we in par. 3 voor de gelineariseerde theorie vonden. Verwaarlozen we, vanwege het feit dat $\epsilon \ll 1$, de dichtheidsverschillen dan vinden we de gewone lange-golfvergelijkingen (college b73) terug. We kunnen deze vergelijkingen samenstellen uit (2.5) t/m (2.8) met behulp van de combinaties (2.5) + (2.6), resp. $a_1 \times (2.7) + u_1 \times (2.5) + a_2 \times (2.8) + u_2 \times (2.6)$. We vinden zo als continuïteits- en impulsvergelijkingen voor een stroming opgevat als een éénlaagsysteem

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a_1 u_1 + a_2 u_2) = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (a_1 u_1 + a_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x} (a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2) + g a \frac{\partial}{\partial x} (h_b + a) + \frac{s_0 - s_2}{\rho} = 0 \quad (3.21)$$

Hierin is $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ (het verschil tussen ρ_1 en ρ_2 is voor wat de wrijvingstermen betreft onbelangrijk), en

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = q \quad (3.22)$$

het totale debiet per eenheid van breedte. De tweede (advectieve) term in (3.21) kan geschreven worden als

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \frac{q^2}{a} + \frac{a_1 a_2}{a} (u_1 - u_2)^2$$

De laatste term in deze uitdrukking is te verwaarlozen vanwege (3.10) en het feit dat ϵ klein verondersteld is. De schuifspanning s_2 is evenredig gesteld met $u_2|u_2|$. Hierin kan u_2 vaak benaderd worden met de gemiddelde snelheid q/a ; de motivering hiervoor is dezelfde als die voor de verwaarlozing in de advectieve term. De vergelijkingen 3.20 en 3.21 zijn nu in eerste benadering te schrijven in de afhankelijk variabelen a en q ,

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{a} + g a \frac{\partial}{\partial x} (h_b + a) + \frac{s_0 - s_2}{\rho} \approx 0 \quad (3.23)$$

Deze vergelijkingen leveren de waterdiepte en het totale debiet; de wisselwerking met de interne waterbeweging is hierbij verwaarloosd. Ook bij een andere gelaagdheidsstructuur is deze aanpak bruikbaar.

Vergelijkingen voor de interne waterbeweging

Uit deze vergelijkingen zullen de laagdikten a_1 en a_2 , en de stroomsnelheden u_1 en u_2 moeten volgen. Er zijn dus vier onbekenden. We hebben in de eerste plaats de relaties

$$a_1 + a_2 = a \quad (3.24)$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = q \quad (3.22)$$

waarin a en q volgen uit (3.20) en (3.23). Als continuïteitsvergelijking kunnen we (2.6) kiezen (of (2.5), maar niet beide omdat (3.20) al gebruikt is voor de externe waterbeweging),

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_2 u_2 = 0 \quad (2.6)$$

Voor het opstellen van een vierde (bewegings-)vergelijking gaan we uit van de volgende overweging: de verhangtermen in (2.7) en (2.8) (derde, resp. derde en vierde term) bevatten behalve het verhang van het grensvlak ook dat van het vrije oppervlak. Dit laatste ($\partial(h_b + a)/\partial x$) is een grootheid behorend bij de externe waterbeweging, zie (3.23). Om de interne waterbeweging zo goed mogelijk af te splitsen, elimineren we nu het verhang van het vrije oppervlak door (2.8) van (2.7) af te trekken. De resulterende vergelijking kunnen we schrijven als

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(u_1^2 - u_2^2) + \epsilon g \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{s_0 - s_1}{\rho a_1} - \frac{s_1 - s_2}{\rho a_2} = 0 \quad (3.25)$$

De vergelijkingen (3.24), (3.22), (2.6) en (3.25) beschrijven de interne waterbeweging. De externe waterbeweging beïnvloedt de interne via (3.24) en (3.22).

Opmerkingen:

- De vergelijkingen voor de interne waterbeweging leveren de grootheden a_1 , a_2 , u_1 en u_2 . Deze zouden gebruikt kunnen worden om de verwaarloosde termen in de vergelijkingen voor de externe waterbeweging te bepalen. Hierna zou de externe waterbeweging opnieuw doorgerekend kunnen worden, gebruik makend van (3.20) en (3.21), daarna weer de interne, enz. Dit iteratieproces wordt in de praktijk echter in het algemeen achterwege gelaten, niet alleen vanwege het betrekkelijk klein zijn van de verwaarloosde termen, maar ook omdat vaak benaderingen van andere aard (b.v. ten aanzien van de verticale dichtheidsverdeling) een rol spelen. Nauwkeurig rekenen heeft dan weinig zin.
- De wrijvingstermen in (3.25) zijn van dezelfde orde van grootte als die in (3.23). De grootheden $u_1 - u_2$ en ϵa_1 in (3.25) zijn echter klein ten opzichte van q/a resp. a in (3.23). Interne golven zullen dan ook sterker dempen ten gevolge van wrijving dan externe, bij voortplanting over een zelfde afstand.
- Bij de berekening van gelaagdheid in b.v. een estuarium vormt turbulente menging in de verticaal doorgaans een complicerende factor, zie ook hoofdstuk 7.

Literatuur hoofdstuk 3

1. C. Verspuy, Lange golven (handleiding college b73).
2. M.B. Abbott en I. Torbe, On flows and fronts in a stratified fluid, Proceedings of the Royal Society, 273A, 1963, p. 12.
3. D.M. Farmer, Observations of long nonlinear internal waves in a lake, Journal of Physical Oceanography, 8, 1, 1978, p. 63.
4. C.B. Vreugdenhil, Computation of gravity currents in estuaries, proefschrift Delft, 1970.
5. C.B. Vreugdenhil, Computational Hydraulics, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
6. P.G. Baines, A unified description of two-layer flow over topography, Journal of Fluid Mechanics, 146, 1984, p. 127.

Hoofdstuk 4 - STATIONAIRE TWEELAGENSTROMING

1 Inleiding

In dit hoofdstuk beschouwen we stationaire (niet-tijdsafhankelijke) stromingen, ook wel aangeduid als dichtheidsstromen, in een tweelagensysteem. De voorbeelden van hoofdstuk 2 handelen over gevallen van stationaire stroming waarin de stroomsnelheid in één van de lagen (eventueel bij benadering) nul is en de wrijving langs bodem en grensvlak verwaarloosbaar is. We gaan nu in op het meer algemene geval dat beide lagen stromen en/of de bodem- en grensvlakwrijving een rol spelen. De schuifspanning door wind laten we buiten beschouwing ($s_0 = 0$). Het zal blijken dat in het geval van stationaire stroming het verloop van het grensvlakniveau als functie van de plaats, afhangt van o.a. bodemligging (verg. voorbeeld 1 van hoofdstuk 2) en wrijving. We maken gebruik van de vergelijkingen voor externe en interne waterbeweging zoals in het voorgaande hoofdstuk afgeleid uit de vergelijkingen van het tweelagenmodel onder de voorwaarde dat het relatieve dichtheidsverschil klein is. De afgeleiden naar de tijd in deze vergelijkingen zijn nu gelijk aan nul. Voorts besteden we aandacht aan de aard van de stroming (intern subkritische, intern kritische, intern superkritische stroming), en aan het opleggen van randvoorwaarden.

2 Vergelijkingen

Vergelijkingen 3.20 en 3.23 voor de externe stroming geven

$$q = \text{constant} \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2a^2} + gh_b + ga \right) = \frac{s_2}{\rho a} \quad (4.2)$$

Het totale debiet q is dus niet alleen onafhankelijk van de tijd, maar ook van de plaats. Met vergelijkingen 4.1 en 4.2 kunnen z.g. verhanglijnberekeningen worden uitgevoerd (3). Als de wrijvingsterm in (4.2) verwaarloosd mag worden, levert deze vergelijking na integratie naar x de vergelijking van Bernoulli. In het onderstaande zullen we aannemen dat het totale debiet q en de waterdiepte a bekend zijn, b.v. als resultaat van een berekening met behulp van (4.1) en (4.2).

De continuïteitsvergelijkingen (2.5) en (2.6) (of (4.1) en (2.6)) leveren voor de interne stroming

$$a_1 u_1 = q_1 = \text{constant} \quad (4.3)$$

$$a_2 u_2 = q_2 = \text{constant} \quad (4.4)$$

Ook de debieten in beide lagen afzonderlijk zijn onafhankelijk van tijd en plaats. De bewegingsvergelijking voor de interne stroming, (3.25), is nu te schrijven als

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u_1^2 - \frac{1}{2} u_2^2 + \epsilon g a_1 \right) = \frac{s_1}{\rho a_1} + \frac{s_1 - s_2}{\rho a_2} \quad (4.5)$$

Voor gevallen waarin de wrijving te verwaarlozen is, b.v. de tweelagenstroming over een niet te lange overlaat (verg. voorbeelden 1 en 2 van hoofdstuk 2), vinden we uit (4.5) het equivalent van de vergelijking van Bernoulli voor interne tweelagenstroming

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} + \epsilon a_1 = \text{constant} \quad (4.6)$$

Zie b.v. (1) en (2) voor toepassingen van (4.6). Is de wrijving niet verwaarloosbaar, wat het geval is bij stroming over grotere afstanden, dan levert combinatie van (4.3), (4.4) en (4.5) voor de verandering in de dikte van de onderlaag, zie fig. 4.1,

$$\frac{da_2}{dx} = \frac{\frac{1}{\epsilon \rho g} \left(\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_1 - s_2}{a_2} \right) - \left(1 - \frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} \right) \frac{da}{dx}}{\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} - 1} \quad (4.7)$$

De schuifspanningen s_1 en s_2 kunnen met behulp van (2.9) en eventueel (2.10) uitgedrukt worden in de snelheden in de lagen en met (4.3) en (4.4) in de debieten en laagdikten. Omdat we het niveau van de waterspiegel bekend verondersteld hebben, kunnen we uit (4.7) nog de bovenlaagdikte a_1 elimineren ($a_1 = a - a_2$). De enige onbekende in (4.7) die van x afhangt is dan de dikte a_2 van de onderlaag. Vergelijking 4.7 is dus een differentiaalvergelijking voor deze grootte, en levert oplossingen voor z.g. **interne verhanglijnen** (verg. (3) voor een eenlaagsysteem). Deze vergelijking is van de eerste orde, dus zal na integratie één integratieconstante in het resultaat voorkomen. De debieten q_1 en q_2 zijn i.h.a. ook onbekend. Wel hebben we de relatie

$$q_1 + q_2 = q \quad (4.8)$$

waarin q bekend verondersteld is. Er blijven na integratie van (4.7) dus twee onbekende constanten over. Er moeten dan ook twee randvoorwaarden gegeven worden om een probleem op te kunnen lossen. Het zal blijken dat soms ook de lengte waarover de dichtheidsstroming zich uitstrekt een onbekende is; dan zijn drie randvoorwaarden vereist. Op het vraagstuk van het opleggen van randvoorwaarden komen we terug in par. 4.

Langzaam in de tijd variërende stroming is als quasi-stationair op te vatten, als de veranderingen binnen een looptijd L/c , van een interne golf gering zijn (L = lengte waarover de tweelaagstroming zich uitstrekt).

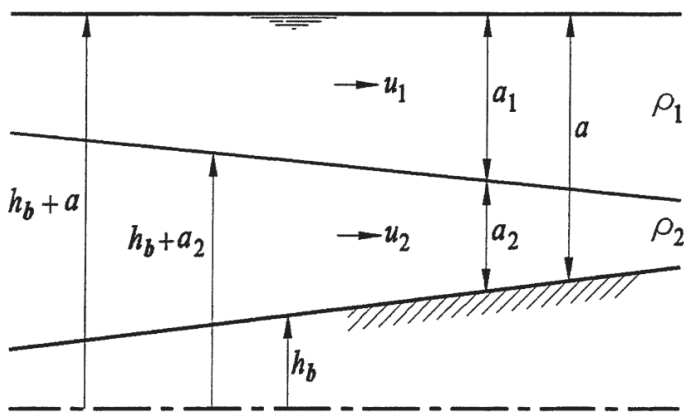


Fig. 4.1 - Stationaire tweelagenstroming.

3 Intern kritische, sub- en superkritische stroming; dubbelkritische stroming

De helling van het grensvlak zou volgens (4.7) onbegrensd toenemen als de noemer in het rechterlid van deze vergelijking nul wordt terwijl de teller ongelijk aan nul is¹. De noemer is gelijk aan nul als

$$\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} = 1 \quad (4.9)$$

¹In werkelijkheid blijft de helling eindig ten gevolge van verticale versnellingen, verg. de (extern) kritische stroming in een éénlaagsysteem.

Om inzicht te verkrijgen in de betekenis van dit speciale geval, is het nuttig het verband met de voortplantingssnelheden van interne lange golven na te gaan. Volgens (3.6) zijn er twee interne voortplantingssnelheden. We duiden de voortplantingssnelheid waarvoor het + teken geldt aan als c_i^+ , en die waarvoor het - teken geldt als c_i^- . Voor het product van c_i^+ en c_i^- vinden we (met (4.3) en (4.4))

$$c_i^+ c_i^- = \epsilon g \frac{a_1 a_2}{a} \left(\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} - 1 \right) \quad (4.10)$$

We zien dus dat aan (4.9) voldaan wordt als één van de voortplantingssnelheden gelijk aan nul is (op het geval dat beide nul zijn komen we later terug). We spreken dan van **intern kritische stroming**. Het nul worden van de noemer in (4.7) impliceert dus intern kritische stroming en omgekeerd. Dit resultaat zal van belang blijken te zijn bij het opleggen van randvoorwaarden, waaraan we later aandacht besteden.

Bij kleine stroomsnelheden u_1 en u_2 zal c_i^+ positief (golfvoortplanting in positieve x -richting) en c_i^- negatief (golfvoortplanting in negatieve x -richting) zijn. We noemen de stroming dan **intern subkritisch**. Blijkens (4.10) is hiervoor de voorwaarde

$$\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} < 1 \quad (4.11)$$

Bij grotere stroomsnelheden kunnen c_i^+ en c_i^- of beide positief (alle verstoringen lopen in positieve x -richting) of beide negatief (alle verstoringen lopen in negatieve x -richting) worden. In dit geval spreken we van **intern superkritische stroming**. Uit (4.10) volgt als voorwaarde voor dit type stroming

$$\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} > 1 \quad (4.12)$$

Eén en ander is weergegeven in fig. 4.2. Hierin zijn F_1 en F_2 interne Froude getallen, gedefinieerd door

$$F_n = \frac{|q_n|}{(\epsilon g a^3)^{1/2}}, \quad n = 1 \text{ of } 2$$

(In de literatuur komen ook andere definities van interne Froudegetallen voor). In fig. 4.2 is

verticaal uitgezet de dikte a_2 van de onderlaag dimensieloos gemaakt met de totale diepte a , en horizontaal het linkerlid van (4.9), (4.11) en (4.12), waarin a_1 vervangen is door $a - a_2$. Als zowel F_1 als $F_2 > 0$, dan blijken er twee waarden van a_2 te zijn waarvoor één van de voortplantingssnelheden nul wordt, mits $F_1^{1/2} + F_2^{1/2} < 1$ (hieraan is bij tweelagenstroming vaak voldaan). Als in één van de punten c_i^+ nul is, dan is in het andere c_i^- nul. Punt A in fig. 4.2 geeft een toestand met subkritische stroming aan.

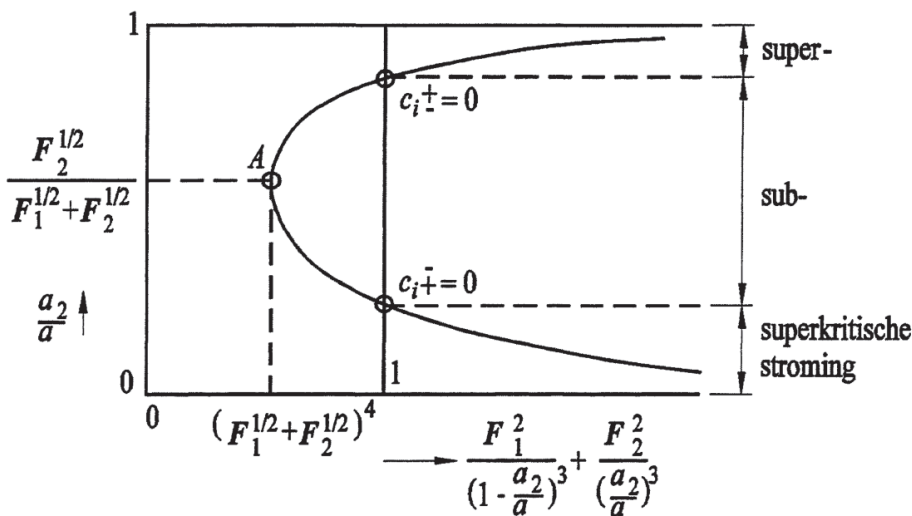


Fig. 4.2 - Kritische, sub-en superkritische stroming (zowel F_1 als $F_2 > 0$).

Laten we in gedachten de stroomsnelheden u_1 en u_2 dus F_1^2 en F_2^2 toenemen, dan zal het punt A naar rechts verschuiven en naderen de waarden van a_2 waar c_i^+ en c_i^- nul zijn elkaar. Als geldt

$$F_1^{1/2} + F_2^{1/2} = 1 \quad (4.13)$$

dan is voor één bepaalde dikte van de onderlaag zowel c_i^+ als c_i^- gelijk aan nul. We spreken dan van **dubbelkritische stroming**. Uit (3.6) volgt dat dan moet gelden (als a_1 en a_2 ongelijk aan nul zijn)

$$a_1 u_2 + a_2 u_1 = 0 \quad \text{en} \quad (u_1 - u_2)^2 = \epsilon g a \quad (4.14)$$

Hieruit volgt

$$u_1 = \pm \frac{a_1}{a} \sqrt{\epsilon g a} \quad \text{en} \quad u_2 = \mp \frac{a_2}{a} \sqrt{\epsilon g a}$$

en als relatie tussen laagdikten en het totale debiet

$$q = u_1 a_1 + u_2 a_2 = \pm (a_1 - a_2) \sqrt{\epsilon g a}$$

Dubbelkritische stroming kan dus slechts optreden als $|q| < a\sqrt{\epsilon g a}$. Dit volgt ook uit (4.13).

Vergelijken we de tweede uitdrukking van (4.14) met het criterium (3.10) voor het bestaan (de stabiliteit) van een lagensysteem, dan blijkt dat dubbelkritische stroming juist op de grens van instabiliteit verkeert. In de praktijk kan de instabiliteit nog wel meevallen, doordat dit type stroming alleen plaatselijk op kan treden. Verstoringen in de laagdikten kunnen zich dan niet zo gemakkelijk ontwikkelen tot instabiliteiten.

Uit fig. 4.2 blijkt nog dat slechts superkritische stroming kan optreden als geldt

$$F_1^{1/2} + F_2^{1/2} > 1$$

Sterk superkritische stroming in een lagensysteem blijkt instabiel te zijn, waardoor menging in de verticaal doorgaans niet meer verwaarloosbaar is. We komen hier op terug in hoofdstuk 7.

Hoe is nu het verloop van het grensvlakniveau met de plaats (x)? We beantwoorden deze vraag voor een wat vereenvoudigd geval. We nemen aan dat de bodem horizontaal² is en dat het kwadraat van het externe Froudegetal,

$$\frac{q^2}{g a^3}$$

klein is ten opzichte van één (hieraan is meestal voldaan in het geval van lagenstroming met gering dichtheidsverschil, verg. (3.10)). Met behulp van (4.2) is dan aan te tonen dat de term met het verhang da/dx in (4.7) verwaarloosbaar is, mits weer ϵ klein is ten opzichte van één. De interne-verhanglijvergelijking 4.7 is dan te schrijven als

$$\frac{da_2}{dx} = \frac{1}{\epsilon g a} \frac{\frac{a}{a_2} \frac{s_1}{a_1} - \frac{s_2}{a_2}}{\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} - 1} \quad (4.15)$$

²Zie het eerste voorbeeld van hoofdstuk 2 voor een geval met variabele bodemligging.

Verder beschouwen we uitsluitend het praktisch belangrijke geval dat de stroming in de twee lagen tegengesteld gericht is. Nemen we u_1 positief en u_2 negatief dan is s_1 negatief en s_2 positief, zodat de teller van (4.15) dan altijd negatief is. In het geval van subkritische stroming is de helling da_2/dx van het grensvlak dus positief (zie (4.11)), in het geval van superkritische stroming negatief (we laten de eventuele instabiliteit van deze stromingsvorm hier buiten beschouwing). In fig. 4.3 zijn de drie mogelijke verlopen van het grensvlak geschetst voor het geval dat $F_1^{1/2} + F_2^{1/2} < 1$. Nabij de punten met kritische stroming zijn de verticale versnellingen niet meer verwaarloosbaar. In werkelijkheid zal het grensvlak in deze punten dan ook een eindige helling vertonen.

Bij het opleggen van randvoorwaarden (par. 4 en 5) blijkt dat vaak maar een deel van de totale oplossing (de "takken" in fig. 4.3) een rol speelt.

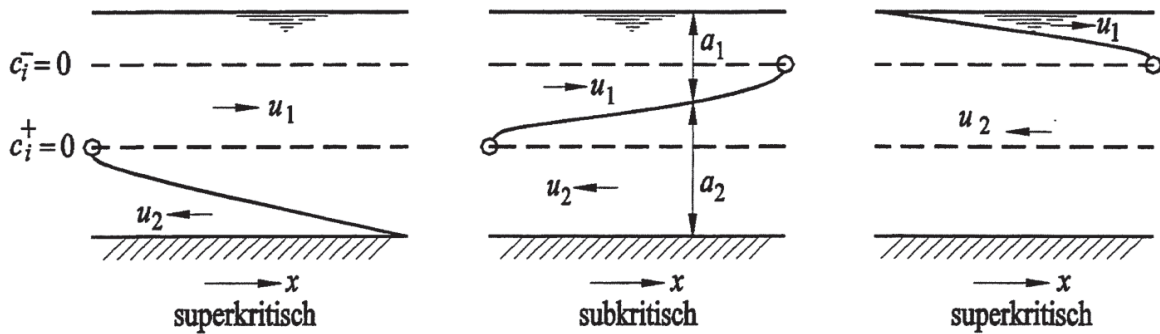


Fig. 4.3 - Het verloop van het grensvlak bij tegengesteld gerichte stroming als

$$F_1^{1/2} + F_2^{1/2} < 1.$$

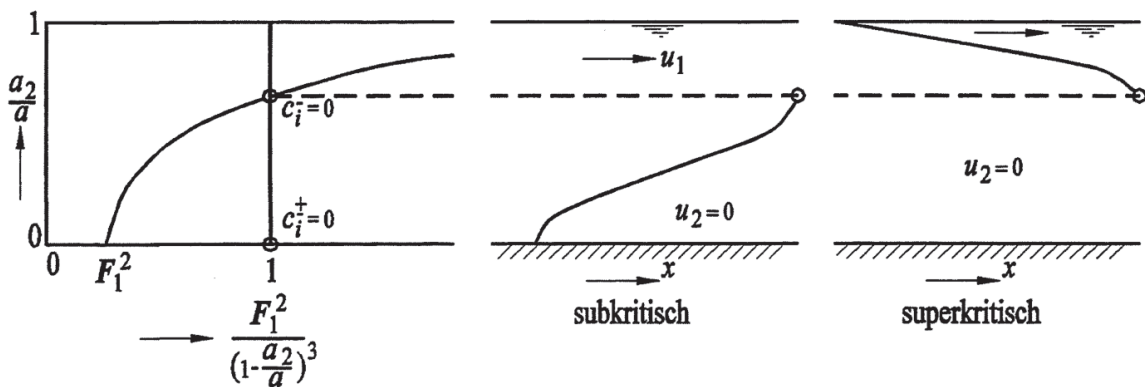


Fig. 4.4 - Verloop van het grensvlak als $u_2 = 0$ en $F_1 < 1$.

Van belang is ook het geval dat één van de stroomsnelheden gelijk aan nul is. Als voorbeeld nemen we het geval dat u_2 gelijk aan nul en u_1 positief is (een toepassing is de

zoutwig, zie de volgende paragraaf). In fig. 4.4 zijn het verloop van (het kwadraat van) het interne Froudegetal in de noemer van (4.15) als functie van a_2/a en de verlopen van het grensvlak geschetst. Subkritische stroming is alleen mogelijk als $F_1 < 1$.

Een soortgelijke oplossing geldt voor het geval $u_1 = 0$ en $u_2 \neq 0$.

4 Aanpassing aan de randvoorwaarden

Zoals in de vorige paragraaf uiteengezet is, kunnen (4.7) en (4.15) opgevat worden als differentiaalvergelijkingen voor de variabele $a_2 = a_2(x)$. Vergelijking (4.15), die geldt voor het geval dat de bodem horizontaal is, kan geïntegreerd worden tot

$$x - x_a = \epsilon \rho g \int_{a_{2a}}^{a_2} \frac{\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2'^3} - 1}{\frac{a}{a_2'} \frac{s_1}{a_1} - \frac{s_2}{a_2'}} da_2' \quad (4.16)$$

Hierin is $a_{2a} = a_2(x_a)$ en $x = x_a$ een rand van het tweelagensysteem. De integrand in (4.16) is op te vatten als een functie van a_2 , zie de opmerking na (4.7). In de integrand is a_2 vervangen door a_2' om aan te geven dat het een integratievariabele betreft (in (4.16) geldt $a_1 = a - a_2'$). Vergelijking 4.16 geeft in impliciete vorm de onderlaagdikte a_2 als functie van x . Integratie is in het meest algemene geval alleen mogelijk langs numerieke weg (4).

Voor het vinden van een volledig bepaalde oplossing zijn randvoorwaarden vereist. Bij het opleggen van randvoorwaarden blijkt het noodzakelijk onderscheid te maken tussen subkritische en superkritische stroming. Stel we hebben randen (begrenzingsen van het gebied waarbinnen de stroming plaatsvindt) op $x = x_a$ en $x = x_b$, zie fig. 4.5. Is de stroming subkritisch, dan lopen er zowel verstoringen in positieve als in negatieve x -richting, er zijn in het (x,t) -vlak grondkarakteristieken met positieve en negatieve helling. Langs de karakteristieken plant zich informatie voort, denk aan de compatibiliteitsrelaties behandeld in par. 2.2. De invloed van beide randen, die op $x = x_a$ en die op $x = x_b$, is dus in het gehele stromingsveld $x_a \leq x \leq x_b$ merkbaar. Dit betekent dat we in dit geval op beide randen randvoorwaarden moeten geven (fig. 4.5a). In de vorige paragraaf is uiteengezet dat er twee randvoorwaarden gegeven moeten worden (als $x_b - x_a$ bekend is). In het geval van subkritische stroming betekent dit dat er zowel op $x = x_a$ als op $x = x_b$ één randvoorwaarde gegeven moet worden. Op het geval dat $x_b - x_a$ niet van te voren bekend is komen we terug in voorbeeld 1 van par. 5. Vergelijking 4.16 geeft voor $x = x_b$:

$$x_b - x_a = \epsilon \rho g \int_{a_{2a}}^{a_{2b}} \frac{\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} - 1}{\frac{a}{a_2} \frac{s_1}{a_1} - \frac{s_2}{a_2}} da_2 \quad (4.17)$$

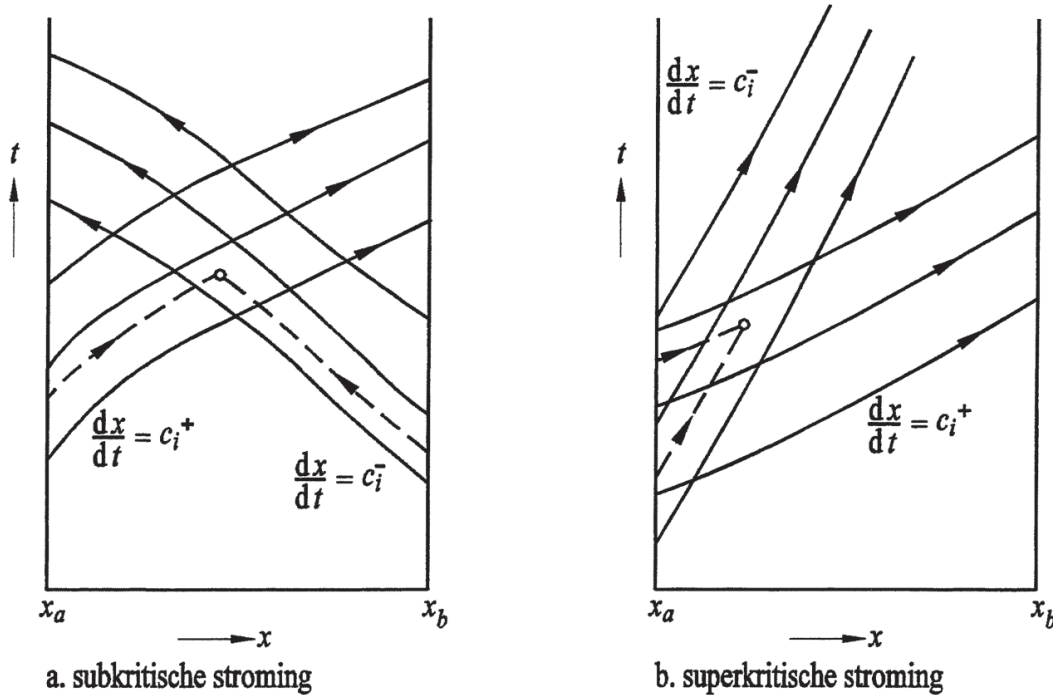


Fig. 4.5 - Het opleggen van randvoorwaarden

De randvoorwaarden betreffen a_{2a} , a_{2b} en q_2 (q_1 volgt uit $q_1 = q - q_2$). De randvoorwaarden voor subkritische stroming kunnen in de meest algemene vorm geschreven worden als

$$G_a(a_{2a}, q_2) = 0 \quad \text{op} \quad x = x_a \quad (4.18)$$

$$G_b(a_{2b}, q_2) = 0 \quad \text{op} \quad x = x_b \quad (4.19)$$

waarin G_a en G_b bekende functies van a_{2a} en q_2 resp. a_{2b} en q_2 zijn.

Anders is het gesteld bij superkritische stroming. Als alle verstoringen in positieve x -richting lopen (fig. 4.5b) dan heeft alleen de bovenstroomse rand $x = x_a$ invloed op de stroming. Veranderingen die benedenstrooms worden aangebracht kunnen zich niet in stroomopwaartse

richting voortplanten. Dit betekent dat beide randvoorwaarden nu op $x = x_a$ opgelegd moeten worden. Deze randvoorwaarden hebben betrekking op a_{2a} en q_2 . We moeten daarom in dit geval deze twee grootheden voorschrijven op $x = x_a$.

Als alle verstoringen in negatieve x -richting lopen, dan moeten zowel a_2 als q_2 op de rand $x = x_b$ gegeven worden.

Naast het onderscheid tussen subkritische in superkritische stroming speelt ook het verschijnsel van kritische stroming een belangrijke rol bij het vaststellen van de randvoorwaarden. Dit zal blijken bij de voorbeelden die we in de volgende paragraaf behandelen. Zie ook hoofdstuk 2, voorbeelden 1 en 2. Analyses van stationaire tweelagenstroming worden ook gegeven in (5, 6 en 7).

5 Voorbeelden

De stationaire zoutwig

Een rivier met zoet water mondt uit in een zee met zout water. De niveauveranderingen in de zee ten gevolge van het getij zijn verwaarloosbaar; het debiet van de rivier is constant. De rivier mag als prismatisch worden opgevat en de bodem als horizontaal, zie fig. 4.6. We vragen ons nu af hoe het grensvlak tussen zoet en zout water zich zal instellen. Het zeewater is zwaarder dan het rivierwater en zal dan ook de rivier (over een zekere lengte) binnen kunnen dringen. Als een stationaire eindsituatie bereikt is, zal er geen zeewater de rivier meer instromen. Er geldt dan dus

$$q_2 = 0 \quad (4.20)$$

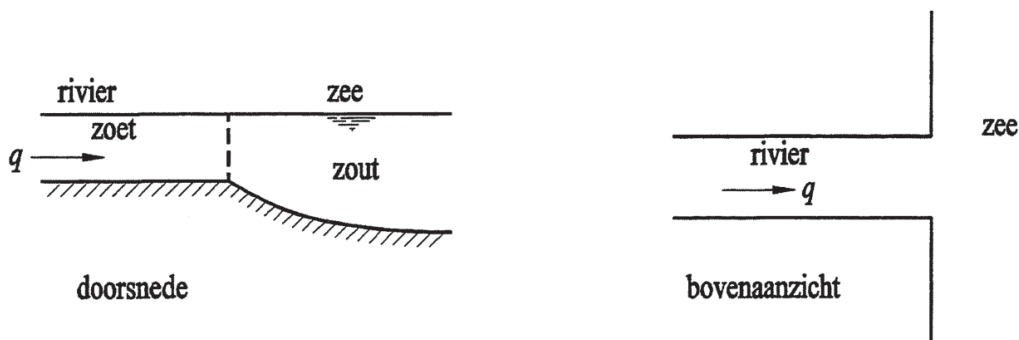


Fig. 4.6 - Estuarium met verwaarloosbaar getij.

en hebben we te maken met het geval weergegeven in fig. 4.4. De mogelijkheid van superkritische tweelagenstroming kunnen we uitsluiten, omdat ver stroomopwaarts niet uitsluitend zout water aanwezig kan zijn. De stroming in de rivier moet dus subkritisch zijn. De lengte waarover zoutindringing plaatsvindt is van te voren niet bekend. Hier hebben we dus een geval waarin een extra (derde) voorwaarde nodig is. Vergelijking 4.20 vormt een eerste voorwaarde, een tweede is

$$a_{2a} = \alpha_2(x_a) = 0$$

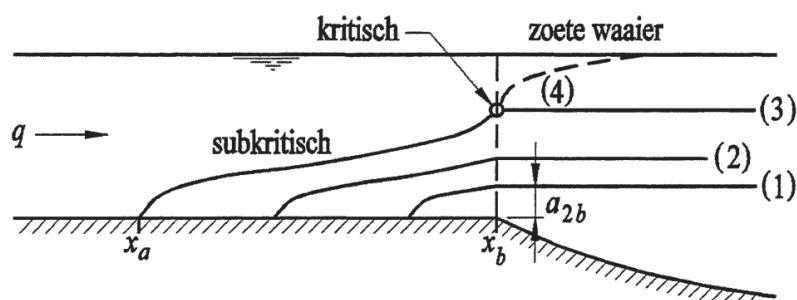


Fig. 4.7 - Zoutwig (randvoorwaarde bij de zee).

waarin $x = x_a$ het punt is waar het grensvlak bij de bodem komt. Vergelijking 4.21 is een speciaal geval van (4.18). Wat is nu de derde randvoorwaarde? Voor het beantwoorden van deze vraag voeren we een gedachtenexperiment uit. We beschouwen het geval dat de zee niet geheel zout is, maar bestaat uit een zoute onderlaag en een zoete bovenlaag. Zie fig 4.7, toestand (1). Als grensvlak vinden we nu een gedeelte van de subkritische tak in fig. 4.4. De randvoorwaarde op $x = x_b$ is nu $\alpha_2 = a_{2b}$. We verhogen nu de stand van het grensvlak in de zee tot die van toestand (2). Er zullen vanaf $x = x_b$ interne golven in stroomopwaartse richting gaan lopen, die weerkaatsen bij het punt waar $\alpha_2 = 0$. Dit punt zal zich verder landinwaarts verplaatsen. Na verloop van tijd zullen de interne golven uitgedempt zijn en is een nieuwe stationaire toestand ontstaan. We kunnen deze procedure voortzetten totdat de stroming in de monding $x = x_b$ kritisch geworden is (toestand (3)). De voortplantingssnelheid in negatieve x -richting wordt dan gelijk aan nul, zie fig. 4.4. Als we het grensvlak in zee nog verder verhogen, kunnen er daardoor geen verstoringen meer landinwaarts bewegen. De toestand in de rivier, dus de vorm van het grensvlak aldaar, wordt niet langer beïnvloed door verdere verhoging van het grensvlak in zee. Dit geldt dus ook voor het geval dat het grensvlak in de zee samenvalt met het vrije oppervlak, dus de gehele zee zout is. Dat is het geval waarvan we zijn uitgegaan. Het rivierwater stroomt in de zee dan superkritisch als een zoete waaier af over het zeewater. In de waaier spreidt het

rivierwater zich en mengt geleidelijk met zeewater door turbulentie (toestand (4)). In het geval van een geheel zoute zee werkt de riviermonding dus als een volkomen (interne) overlaat, verg. voorbeelden 1 en 2 van hoofdstuk 2. De derde randvoorwaarde, die dus tot uiting brengt dat de stroming in de monding kritisch is, wordt nu (zie (4.9))

$$\frac{q^2}{\epsilon g (a - a_{2b})^3} = 1 \quad (4.22)$$

Dit is een speciaal geval van de randvoorwaarde (4.19). Het verloop van de grondkarakteristieken is weergegeven in fig. 4.8.

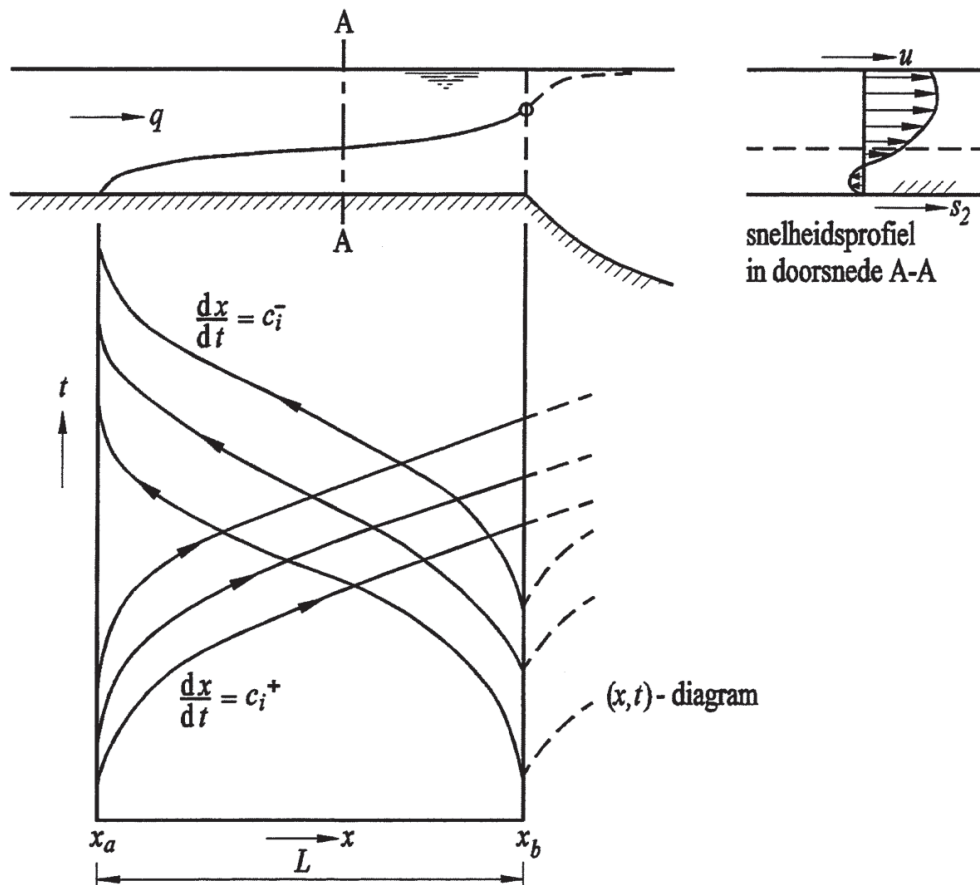


Fig. 4.8 - Zoutwig (grondkarakteristieken en snelheidsprofiel).

De lengte van de zoutwig volgt uit (4.17) en (4.20) t/m (4.22). De bodemschuifspanning wordt in het algemeen gelijk aan nul gesteld. Dit is slechts bij benadering juist, omdat er in de onderlaag toch enige stroming optreedt al is q_2 gelijk aan nul, zie fig. 4.8. Verwaarlozen van de bodemschuifspanning geeft een wat te hoge schatting voor de lengte L van de zoutwig.

Vergelijking 4.17 gaat nu over in

$$L = \frac{1}{k_1 a} \int_0^{a_2} \left[\frac{\epsilon g (a - a_2)^3}{q^2} - 1 \right] a_2 \, da_2$$

Met (4.22) geeft dit (analytische integratie is nu wel mogelijk)

$$L = x_b - x_a = \frac{a}{k_1} \left(\frac{1}{20 F_1^2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} F_1^{2/3} - \frac{3}{10} F_1^{4/3} \right) \quad (4.23)$$

waarin F_1 weer een intern Froudegetal voorstelt,

$$F_1^2 = \frac{q_1^2}{\epsilon g a^3} = \frac{q^2}{\epsilon g a^3}$$

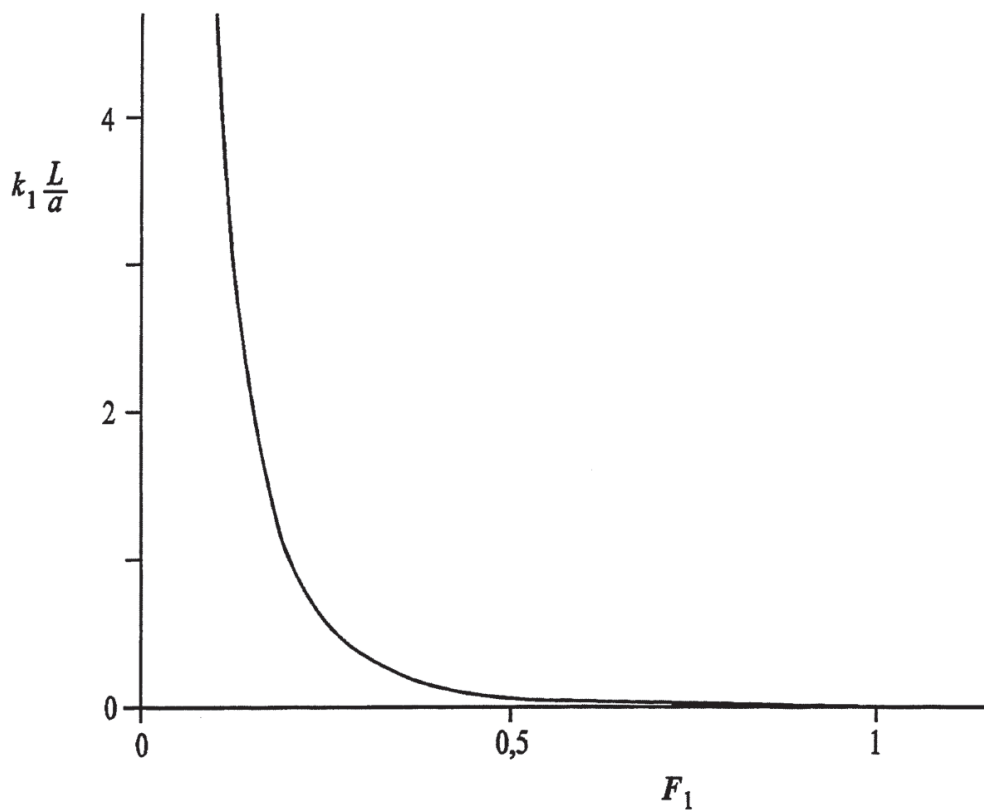


Fig. 4.9 - Lengte van de zoutwig volgens (4.23).

Volgens (4.23) is de lengte van de zoutwig omgekeerd evenredig met de wrijvingsfactor k_1 . Omdat k_1 een niet nauwkeurig bekende empirische grootte is, kan uit (4.23) slechts een benadering voor de werkelijke lengte gevonden worden.

Uit (4.23) blijkt dat een zoutwig alleen optreedt als F_1 kleiner dan één is, zie ook fig. 4.4 en 4.9. Voor waarden van F_1 groter dan één vindt geen zoutingdringing plaats. De voorwaarde voor het spuidebiet dat nodig is om zoutingdringing in een kanaal te voorkomen is dus $F_1 > 1$.

Voor kleine waarden van F_1^2 is de lengte L zeer gevoelig voor de grootte van F_1^2 . Dit kan blijken uit het volgende getallenvoorbeeld:

Voor $a = 5$ m, $q = 2$ m²/s, $\epsilon = 0,024$, $k_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ geeft (4.23):

$$L = 2200 \text{ m} \quad (F_1^2 = 0,133)$$

Verkleining van het debiet q tot 1,5 m²/s (lagere rivierafvoer, of verbreding van de rivier) geeft

$$L = 5300 \text{ m} \quad (F_1^2 = 0,075)$$

Vergroting van de diepte tot 7 m (als gevolg van ontgronding, of baggeren ten behoeve van de scheepvaart) geeft met $q = 2$ m²/s

$$L = 13400 \text{ m} \quad (F_1^2 = 0,049)$$

In de literatuur is veel aandacht besteed aan de zoutwig, zie b.v. (2) (overzicht), (7), (8) (elementaire beschouwingen), (9), (10) en (11) (experimenten). De experimenteel gevonden vorm van de zoutwig blijkt goed overeen te komen met (4.16) (waarin nu $q_2 = 0$ en $s_2 = 0$).

Een soortgelijk probleem als hierboven uiteengezet kan zich voordoen bij de lozing van relatief warm water (b.v. koelwater) in een stroom. Er kan zich dan stroomopwaarts een stationaire warmwatertong aan het vrije oppervlak vormen (12), zie ook fig. 4.10.

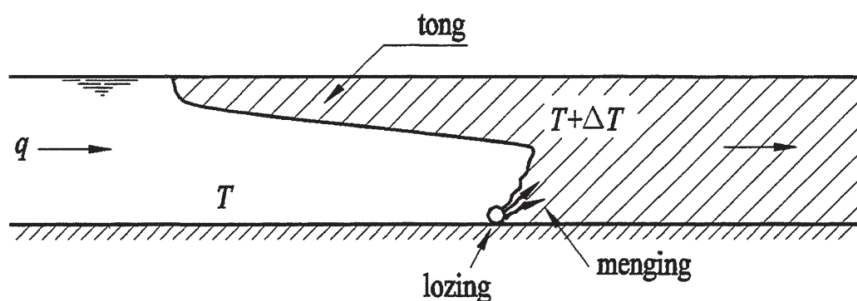


Fig. 4.10 - Koelwaterlozing in een stroom.

Verbindingskanaal tussen twee bekkens

Een prismatisch kanaal met horizontale bodem verbindt twee bekkens, in elk waarvan zich een tweelagensysteem bevindt, zie fig. 4.11. Het totale debiet in het verbindingskanaal is bekend (en relatief klein), b.v. doordat in een der bekkens een rivier met bekend debiet uitmondt. De niveaus van de grensvlakken in de twee bekkens verschillen, zodat zich in het verbindingskanaal een dichtheidsstroom zal instellen.

We beschouwen eerst het geval dat het niveauverschil tussen de grensvlakken zo klein is dat overal in het kanaal de stroming intern subkritisch is. De randvoorwaarden aan begin ($x = x_a$) en eind ($x = x_b$) zijn dan (zie fig. 4.12a)

$$a_2(x_a) = a_{2a}$$

$$a_2(x_b) = a_{2b}$$

De debieten q_1 en q_2 in boven- resp. onderlaag volgen dan uit (4.17) en $q_1 + q_2 = q$. Het verloop van het grensvlak is dat van de middelste figuur 4.3, maar er wordt slechts een deel van de totale tak gerealiseerd.

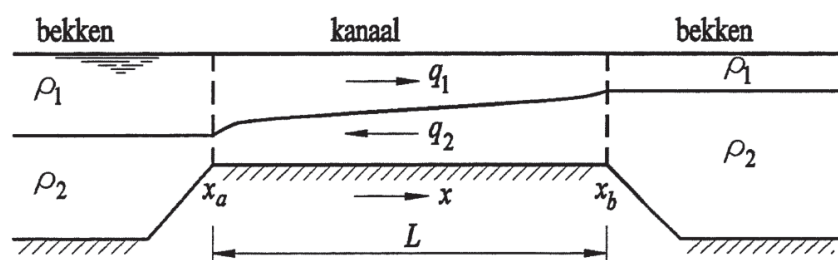


Fig. 4.11- Verbindingskanaal tussen twee gelaagde bekkens.

Vergroten we nu het niveauverschil tussen de grensvlakken in de bekkens, dan kan aan een of beide einden van het kanaal kritische stroming op gaan treden. Dan geldt (4.9) als randvoorwaarde. Of en waar kritische stroming optreedt moet proberenderwijs worden vastgesteld: neem eerst aan dat aan beide zijden de stroming subkritisch blijft. Uit de dan berekende debieten zijn de niveaus te bepalen waar c_i^+ en c_i^- nul zijn, zie fig. 4.2. Liggen de grensvlakken in de bekkens tussen deze niveaus in, dan is de aanname van subkritische stroming aan de einden van het kanaal juist geweest. Ligt het laagste grensvlak (hier dat van het linker bekken) lager dan het niveau waar $c_i^+ = 0$, of ligt het hoogste grensvlak hoger dan het niveau waar $c_i^- = 0$, dan kan aan de betreffende zijde kritische stroming worden aangenomen. Dan kunnen opnieuw de debieten berekend worden, evenals de nieuwe niveaus waar c_i^+ en c_i^- nul zijn.

Achteraf kan dan gecontroleerd worden of de aanname van kritische stoming aan begin en/of eind van het kanaal juist was. Als de stroming aan beide kanten van het kanaal kritisch is (fig. 4.12b), dan wordt de gehele subkritische tak (fig. 4.3) gerealiseerd en blijken de debieten q_1 en q_2 maximaal te zijn (13). Een stroming als afgebeeld in fig 4.12b doet zich b.v. voor in de Bosporus, die de verbinding vormt tussen Zwarte Zee en Zee van Marmara (14).

Als we in het geval van fig. 4.12b de lengte van het kanaal in gedachten laten afnemen, dan naderen de niveaus met kritische stroming elkaar. In het limietgeval van een kanaal met lengte nul wordt de stroming dubbelkritisch, zie (4.13), (4.14) en fig. 4.13. In werkelijkheid zal wrijving toch enige rol spelen. De toestand met dubbelkritische stroming zal daardoor niet helemaal bereikt worden.

In (15) worden experimenten en berekeningen betreffende de gelaagde stroming in een verbindingskanaal beschreven.

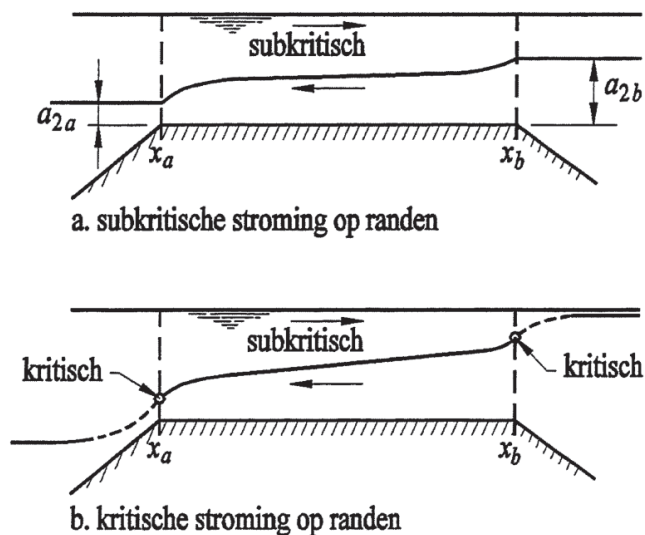


Fig. 4.12 - Het opleggen van de randvoorwaarden.

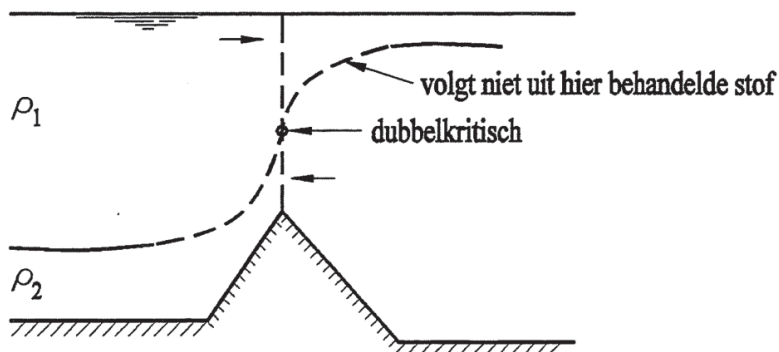


Fig. 4.13 - Dubbelkritische stroming tussen twee bekkens.

Superkritische oppervlaktelozing

Een spuikanaal staat aan één zijde in open verbinding met een zee (fig. 4.14). Aan de andere zijde wordt aan het oppervlak zoet water gespuid. De uitstroomsnelheid is zo hoog dat de stroming superkritisch is. Er moeten ter plaatse dus twee randvoorwaarden gegeven worden, het debiet q_1 en de hoogte van de uitstroomopening $a - a_{2a}$.

Het grensvlak in het kanaal kan verschillende vormen aannemen. Is het kanaal relatief kort dan kan de superkritische stroming zich tot in zee handhaven (fig. 4.14a). Is het kanaal langer, dan zal er vanwege de eindige lengte van de superkritische tak (zie fig. 4.3) een overgang naar subkritische stroming plaatsvinden (fig. 4.14b). Deze overgang is plaatselijk: er treedt een z.g. interne sponng op. Over dit verschijnsel handelt het hiernavolgende hoofdstuk 5.

In het superkritische deel van de stroming zal als gevolg van turbulentie menging tussen de lagen optreden. Dit deel van de stroming heeft het karakter van een straal (b.v. 16). Zie ook hoofdstuk 7.

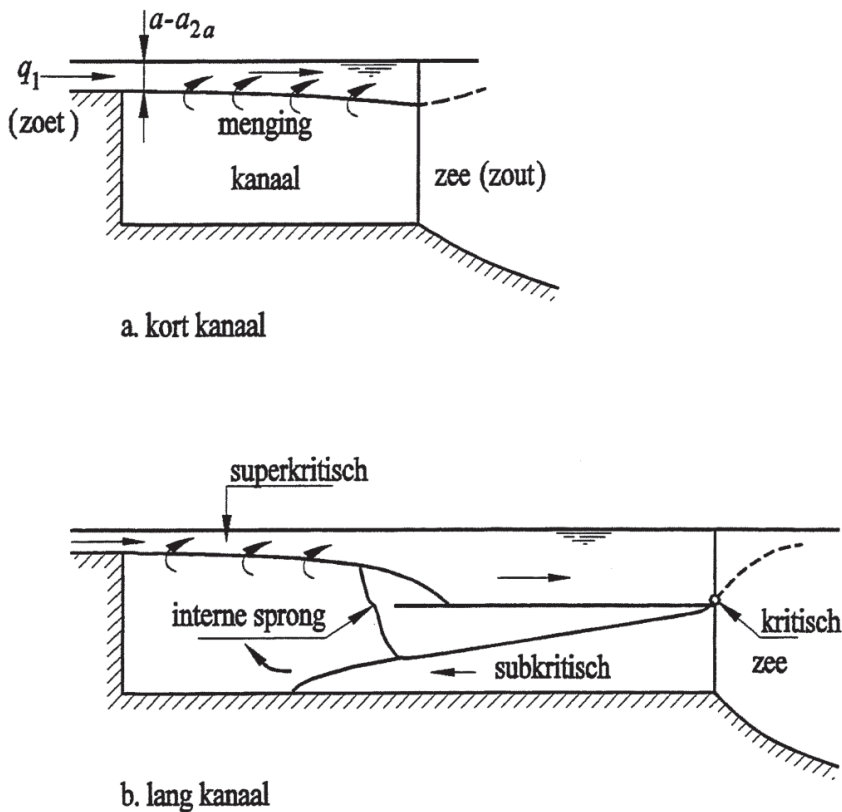


Fig. 4.14 - Spuikanaal.

Literatuur hoofdstuk 4

1. I.R. Wood en K.K. Lai, Flow of layered fluid over broad crested weir, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 98, no. HY1, p. 87, 1972.
2. H.W. Shen (ed.), river Mechanics, vol. 2, Hoofdstuk 26, 1971.
3. J.A. Battjes, Vloeistofmechanica (handleiding college b 71), 1989.
4. W.H.C. Maxwell, Interface geometry for two-layered stratified flow, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 103, no. HY2, p. 183, 1977.
5. G.H. Jirka en D.R.F. Harleman, Stability and mixing of a vertical plane buoyant jet in confined depth, Journal of Fluid Mechanics, 94, part 2, p. 275, 1979.
6. D.N. Brocard en D.R.F. Harleman, Two-layer model for shallow horizontal convective circulation, Journal of Fluid Mechanics, 100, part 1, p. 129, 1980.
7. A.A. Smith en E.E. Elsayed, Gradually-varied stratified flows, Proceedings Second International Symposium on Stratified Flows, IAHR, Trondheim 1980, vol. 1, p. 595.
8. J.B. Hinwood, Estuarine salt wedges, Dock and Harbour Authority, 45, no. 525, p. 79, 1964.
9. J.F. Riddell, Densimetric exchange flow in rectangular channels. IV The arrested salt wedge, La Houille Blanche, 25, no. 4, p. 317, 1970.
10. G.H. Keulegan, Hoofdstuk II in: Estuary and Coastline Hydrodynamics, A.T. Ippen (ed.), McGraw-Hill, 1966.
11. J.P. Grubert, Experiments on arrested saline wedge, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 106, no. HY6, p. 945, 1980.
12. G.L. Bata, Recirculation of cooling water in rivers and canals, ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 83, no. HY3, paper 1265, 1957.
13. B.P. Rigter, Density induced return currents in outlet channels, ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 96, no. HY2, p. 529, 1970.
14. M. Bayazit en A. Anil, Mathematical model of the two-layer current system in the Bosphorus strait, Proceedings 18^{de} Congres IAHR, Cagliari 1979, vol. 3, p. 287.
15. S.T. Hsu en K.D. Stolzenbach, Density currents in a canal connecting stratified reservoirs, Proceedings 16^{de} Congres IAHR, Sao Paulo 1975, vol. 3, p. 104.
16. H.B. Fischer, E.J. List, R.C.Y. Koh, J. Imberger en N.H. Brooks, Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press, 1979.
17. M. Arita en G.H. Jirka, Two-layer model of saline wedge, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 115, no. 6, p. 1229, 1989.

Hoofdstuk 5 - INTERNE SPRONGEN EN FRONTEN

1 Inleiding

In de karakteristiekentheorie van hoofdstuk 3 werd de voortplanting van een discontinuïteit in de eerste afgeleiden van de afhankelijke variabelen laagdikten en stroomsnelheden beschouwd. Bij een dergelijke "knik" in het verloop van deze grootheden bleven zij zelf echter continu. In dit hoofdstuk houden we ons bezig met het geval dat er wel een sprong in laagdikten en stroomsnelheden optreedt. Van een discontinuïteit in wiskundige zin is daarbij evenwel geen sprake: over een zekere eindige lengte zullen de grootheden sterk, maar continu, variëren. Deze lengte heeft de orde van grootte van één van de laagdikten, zodat de helling van het grensvlak niet klein meer is ten opzichte van één. Verticale versnellingen zijn daardoor in het algemeen niet meer te verwaarlozen zoals bij de langegolfbeschouwing. In sprongen en fronten treedt doorgaans energiedissipatie op.

Een sprong in het vrije oppervlak wordt aangeduid als een watersprong. Bij een plotsellende verandering in het niveau van een grensvlak waarbij het vrije oppervlak niet of nauwelijks vervormt, spreken we van een interne sprong. In een tweelagensysteem kunnen we twee typen interne sprongen onderscheiden:

- een type waarbij twee doorlopende lagen aanwezig zijn (fig. 5.1a), en
- een type waarbij slechts een van de lagen doorloopt (fig. 5.1b en 5.1c). In dit geval spreken we van een (intern) front.

Aan beide typen zullen we aandacht besteden.

Er is een analogie tussen de interne sprong enerzijds en de gewone watersprong in het geval dat geen dichtheidsverschillen aanwezig zijn anderzijds. Voor deze laatste zie (1). Beide kunnen stilstaan ten opzichte van een waarnemer op de oever, of in beweging zijn (lopende interne sprong, en lopende watersprong of bore). De behoudswetten voor massa en impuls kunnen op dezelfde wijze worden toegepast, n.l. op een balansgebied waarin de sprong zich bevindt.

Een verschijnsel dat verwant is aan het interne front, doet zich voor als een vloeistof met dichtheid ρ_3 met $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$ een tweelagensysteem binnendringt. Er kan zich dan een front, ook wel aangeduid als intrusie, aan het grensvlak vormen. Zie fig. 5.2, en (11) en (12).

2 Ontstaan en stabiliteit van een interne sprong

Het ontstaan van een interne sprong kan gedemonstreerd worden aan het vervormen van een lopende interne golf. We beschouwen een interne golf die in positieve x -richting loopt. De voortplantingssnelheid

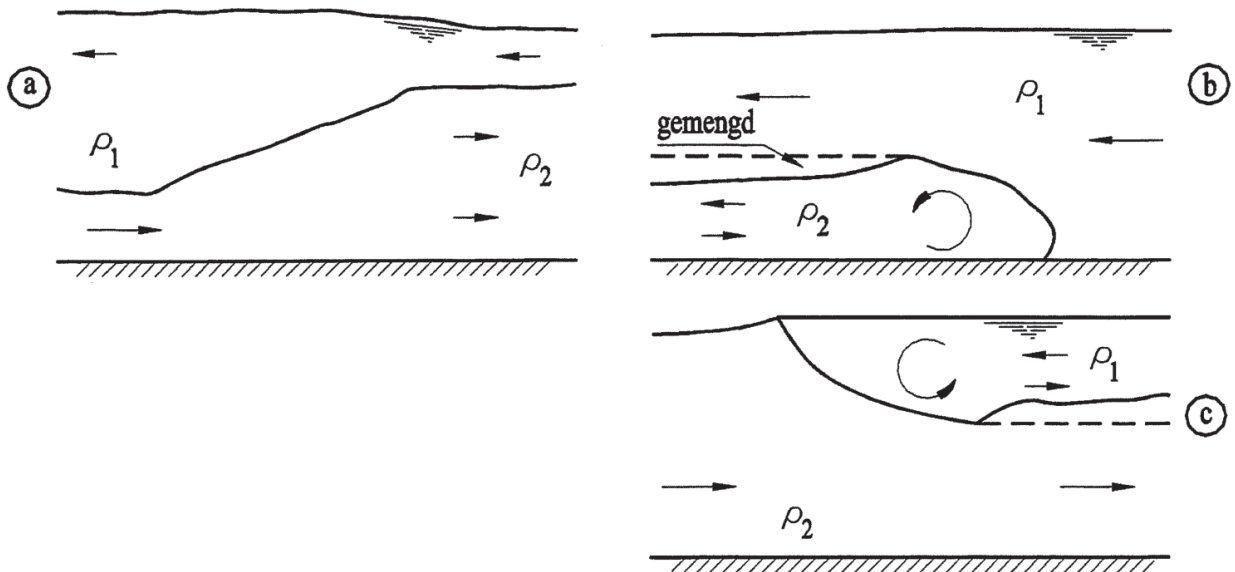


Fig. 5.1 - *a. Interne sprong met stroming in beide lagen; b. Intern front aan de bodem; c. Intern front aan het vrije oppervlak. Achter de "kop" van het front ontstaat een gemengde overgangslaag door instabiliteit van het grensvlak, zie hoofdstuk 6. In deze figuur is de vervorming van het vrije oppervlak overdreven weergegeven.*

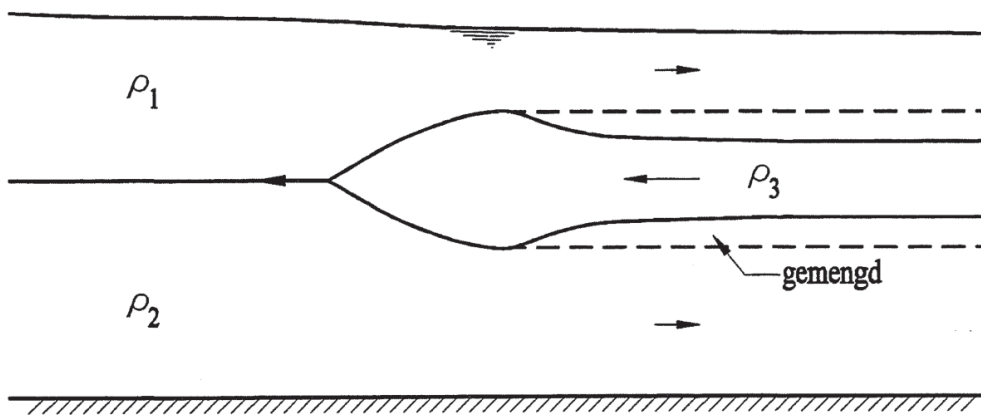


Fig. 5.2 - *Intern front (intrusie) aan het grensvlak ($\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$).*

$$c_i = \frac{a_1 u_2 + a_2 u_1}{a} + \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a^2} [\epsilon g a - (u_1 - u_2)^2]}$$

zal ter plaatse van de golf van punt tot punt variëren. We noemen c_{i+} de golfsnelheid in positieve x -richting juist links van de golf, die juist rechts ervan c'_{i+} (fig. 5.3a). Er zijn wat betreft de golfvorm twee mogelijkheden:

- de golf vlakt in de loop der tijd af, of vervormt niet ($c_{i+} \leq c'_{i+}$), of
- de golf wordt geleidelijk steiler ($c_{i+} > c'_{i+}$).

In het eerste geval ontstaan geen problemen. We beschouwen nu het tweede geval, waarin:

$$c_{i+} > c'_{i+} \quad (5.2)$$

Het veronderstelde verloop van c_i als functie van de laagdikte α_2 is weergegeven in fig. 5.3b. In deze figuur is de golfvorm die dan ontstaat getekend voor drie tijdstippen: $t = 0$, $t = t_1$ en $t = t_2$. Op een bepaald moment zouden de grondkarakteristieken, gegeven door:

$$\frac{dx}{dt} = c_{i+} \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = c'_{i+}$$

elkaar snijden en zou een verticaal front ontstaan (een discontinuïteit in de laagdikten). De langegolftheorie gaat nu echter niet meer op. In werkelijkheid zal een golf ontstaan met een eindige, niet meer toenemende, helling. We duiden de voortplantingssnelheid van de aldus ontstane interne sprong aan met het symbool c .

Als zou gelden $c < c'_{i+}$ dan zou een verstoring aan de rechter zijde van de sprong (punt A in fig. 5.3c) harder lopen dan de sprong zelf en zou weer afvlakking optreden. Dit verschijnsel zou zich ook voordoen als een verstoring juist links van de sprong (punt B) langzamer zou lopen dan de sprong, dus als $c > c_{i+}$. We vinden zo voor de sprong als stabiliteitsvoorwaarde (niet te verwarren met de stabiliteitsvoorwaarden voor het lagenmodel behandeld in hoofdstuk 6):

$$c'_{i+} < c < c_{i+} \quad (5.3)$$

De bijbehorende grondkarakteristieken lopen als in fig. 5.4a is aangegeven. Langs drie karakteristieken betrekking hebbend op interne golven komt op een bepaald tijdstip informatie, afkomstig van een voorafgaand tijdstip, bij de sprong aan. Hierbij is er rekening mee gehouden, dat moet gelden $c_{i-} < c$ in verband met stabiliteit van de gelaagde stroming aan weerszijden van de

sprong. Daarnaast komt nog informatie aan langs twee karakteristieken betrekking hebbend op externe golven.

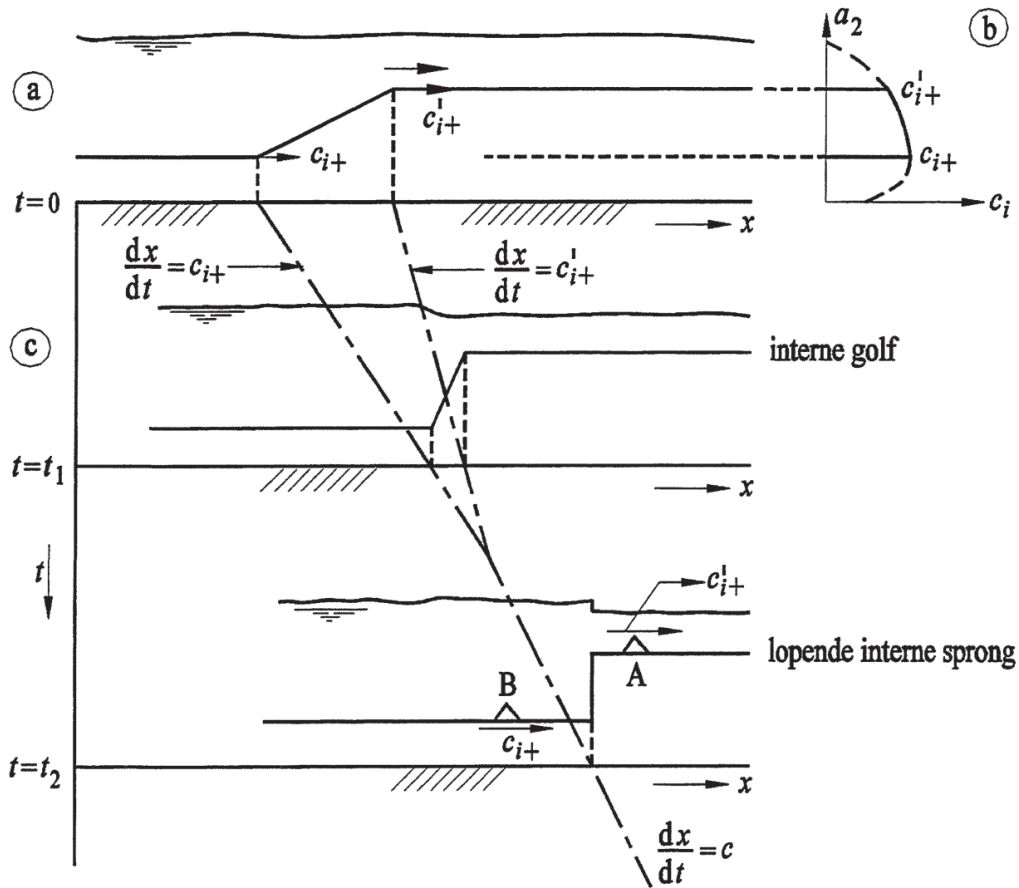


Fig. 5.3 - *Ontstaan van een interne sprong.*

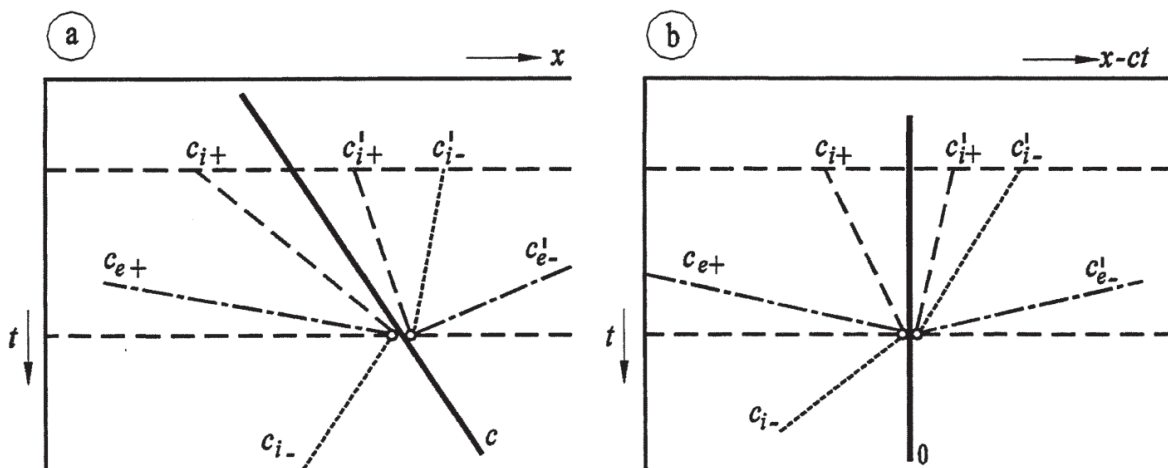


Fig. 5.4 - *Voortplanting van storingen nabij een interne sprong.*

We beschouwen vervolgens een stilstaande interne sprong door met de sprong mee te bewegen. De hiervoor gegeven beschouwing geldt eveneens voor een interne sprong die stilstaat ten opzichte van een waarnemer. Deze situatie is weergegeven in fig. 5.4b. Aan de linker zijde geldt nu:

$$c_{i+} > 0 \quad \text{en} \quad c_{i-} < 0$$

De stroming is daar dus intern subkritisch. Aan de rechter zijde geldt:

$$c'_{i+} < 0 \quad \text{en} \quad c'_{i-} < 0$$

De stroming is daar dus superkritisch¹. Ook hier zien we weer de analogie met een gewone watersprong, die een overgang vormt tussen schietend en stromend water. Wat hier voor een speciaal geval aannemelijk is gemaakt, geldt algemeen: een stationaire interne sprong vormt de overgang tussen intern subkritische en superkritische stroming. Hanteren we het criterium van Hoofdstuk 4 voor de overgang tussen beide soorten stromingen, dan vinden we dat als:

$$\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} < 1 \quad (5.4)$$

(subkritische stroming) aan de ene zijde van de sprong, dan moet gelden

$$\frac{q_1^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\epsilon g a_2^3} > 1 \quad (5.5)$$

(superkritische stroming) aan de andere zijde.

In par. 3.1 en 3.2 zullen we voorbeelden geven van de toepassing van de voorwaarden (5.4) en (5.5).

3 De sprongvergelijkingen

We kiezen een assenstelsel en een balansgebied die met de sprong meebewegen en beperken ons tot sprongen die in de loop der tijd niet of nauwelijks van vorm veranderen. De voortplantingssnelheid van de sprong zal dan constant zijn, zodat we ons in een inertiaalsysteem bevinden. Ook is dan de hoeveelheid massa en impuls binnen het balansgebied constant, en behoeft alleen met transport van deze grootheden door de begrenzingen ervan rekening te worden gehouden. De grootheden duiden

¹ c_{i-} zou ook positief kunnen zijn. Dan zou de stroming aan beide zijden van de sprong superkritisch zijn. Dit geval is echter niet van praktische betekenis.

we aan als aangegeven in fig. 5.5. De stroomsnelheden u zijn met een bedrag c verminderd in verband met het meebewegen. De bodem is horizontaal genomen.

We nemen aan dat de eventuele uitwisseling van massa (menging) tussen de lagen optreedt in de (superkritische) aanstroming. Laboratoriumexperimenten wijzen er op, dat de menging in de sprong zelf betrekkelijk gering is. De invloed van menging wordt beschouwd in (3, 4 en 13).

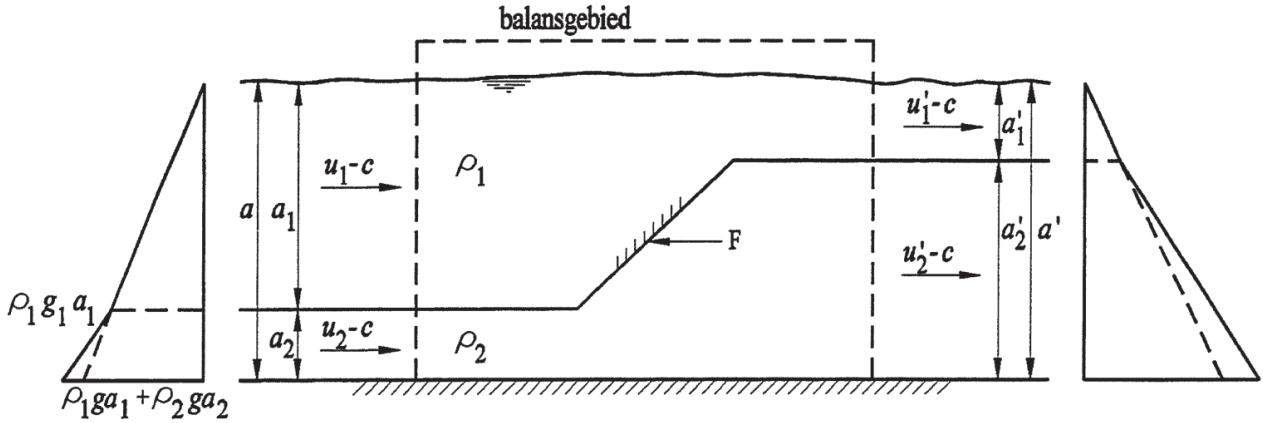


Fig. 5.5 - Balansgebied voor een interne sprong.

De massabalans voor laag 1 luidt dan:

$$\rho_1(u_1 - c)a_1 = \rho_1(u_1' - c)a_1' \quad (5.6)$$

of

$$(u_1 - c)a_1 = (u_1' - c)a_1' \equiv q_{1c} \quad (5.7)$$

q_{1c} is het debiet in laag 1. De index c is toegevoegd, omdat het een debiet betreft in het meebewegende stelsel. Evenzo vinden we voor laag 2:

$$(u_2 - c)a_2 = (u_2' - c)a_2' \equiv q_{2c} \quad (5.8)$$

Vervolgens stellen we voor elk van de lagen de impulsbalans op. De zijvlakken van het balansgebied nemen we zo ver van de sprong af als nodig is om in het gebied met hydrostatische drukverdeling te komen. We verwaarlozen wrijving tussen de lagen en bodemwrijving (de sprong strekt zich slechts over korte afstand uit), en eventuele door de lucht boven het oppervlak uitgeoefende krachten. De impulsbalansvergelijkingen toegepast in horizontale richting worden dan voor laag 1 en laag 2:

$$\frac{1}{2}\rho_1 g a_1^2 + \rho_1(u_1 - c)^2 a_1 = F + \frac{1}{2}\rho_1 g a_1'^2 + \rho_1(u_1' - c)^2 a_1' \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
 F + (\rho_1 g a_1 + \frac{1}{2} \rho_2 g a_2) a_2 + \rho_2 (u_2 - c)^2 a_2 &= \\
 = (\rho_1 g a_1' + \frac{1}{2} \rho_2 g a_2') a_2' + \rho_2 (u_2' - c)^2 a_2' &
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

De grootte F duidt de horizontale component aan van de kracht die laag 2 uitoefent op laag 1 ter plaatse van het hellende deel van het grensvlak. Laag 1 oefent op laag 2 een gelijke maar tegengesteld gerichte kracht uit (actie is reactie).

We vragen ons nu af of het aantal ter beschikking staande vergelijkingen voldoende is. In gedachten voeren we een karakteristiekenberekening uit, zoals weergegeven in fig. 5.4b. Om de toestand op een nieuw tijdstip te berekenen uit die op een voorafgaand tijdstip hebben we de volgende vergelijkingen:

- 3 compatibiliteitsrelaties met betrekking tot interne golven,
- 2 compatibiliteitsrelaties met betrekking tot externe golven,
- 2 massabalansvergelijkingen, en
- 2 impulsbalansvergelijkingen;

in totaal dus 9 vergelijkingen. De onbekenden zijn:

- 4 laagdikten (a_1, a_2, a_1', a_2'),
- 4 stroomsnelheden (u_1, u_2, u_1', u_2'),
- 1 voortplantingssnelheid (c), en
- 1 kracht op het grensvlak (F);

dus 10 onbekenden. Dit betekent dat het probleem zo niet oplosbaar is. Als extra relatie zou men kunnen denken aan de vergelijking van Bernoulli (een relatie voor het transport van energie), ev. uitgebreid met een term voor de optredende hydromechanische verliezen. Het is hier echter i.h.a. niet juist om zowel impulsbalans als een energierelatie toe te passen, omdat de verliezen in de laatste geheel of voor een belangrijk deel afhangen van wat de impulsbalans oplevert vergelijk hiermee het geval van de gewone watersprong, en b.v. de afleiding van de regel van Carnot (1). We komen hierop terug in par 3.2. Als in één van de lagen t.p.v. de sprong versnellende stroming optreedt, kan in die laag de vergelijking van Bernoulli (zonder verliezen) wel worden toegepast (19).

De vergelijkingen (5.7) t/m (5.10) laten behalve interne sprongen ook nog gewone watersprongen toe. Evenals bij de lange golven en de dichtheidsstromen kunnen we het probleem vereenvoudigen door het geval te beschouwen dat alleen een intern verschijnsel, hier een interne sprong, optreedt (het hiervoor genoemde probleem blijft echter bestaan). We vormen nu twee combinaties van (5.9) en (5.10). De eerste is (5.9) + (5.10), die geschreven kan worden als:

$$\frac{1}{2}\rho_1 g(a + a')(a - a') = -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)g(a_2 + a_2')(a_2 - a_2') + \rho_1(u_1 - c)^2 a_1 + \rho_1(u_1' - c)^2 a_1' - \rho_2(u_2 - c)^2 a_2 + \rho_2(u_2' - c)^2 a_2' \quad (5.11)$$

Er geldt (het teken \sim staat voor: "heeft de orde van grootte van")

$$c \sim \sqrt{\epsilon g a}, \quad u_1 \sim \sqrt{\epsilon g a}, \quad u_2 \sim \sqrt{\epsilon g a}, \quad u_1' \sim \sqrt{\epsilon g a}, \quad u_2' \sim \sqrt{\epsilon g a}, \quad (5.12)$$

$$a_1 \sim a, \quad a_2 \sim a, \quad a_1' \sim a', \quad a_2' \sim a'.$$

en:

$$\rho_2 - \rho_1 = \epsilon \rho_2 \quad \text{met} \quad \epsilon \ll 1 \quad (5.13)$$

Het rechter lid van (5.11) is daardoor $\sim \rho \epsilon g a^2$ ($\rho = \rho_1$ of ρ_2 , het verschil is $\sim \epsilon \rho$, dus klein). We vinden zo voor het verschil in waterdiepten links en rechts van de interne sprong:

$$a - a' \sim \frac{\rho \epsilon g a^2}{\rho g a} = \epsilon a \quad (5.14)$$

De verstoringen in het vrije oppervlak zijn bij een interne sprong dus, evenals bij interne lange golven en dichtheidsstromen, klein. Dit resultaat zullen we gebruiken in de tweede combinatie van (5.9) en (5.10), n.l. (5.9)/($a_1 + a_1'$) - (5.10)/($a_2 + a_2'$), zie ook par. 3.4. Met gebruikmaking van (5.7) en (5.8) leidt deze bewerking tot

$$\frac{a + a'}{a_2 + a_2'} \left[\frac{1}{2} \rho_1 g(a_2' - a_2) - \frac{F}{a_1 + a_1'} \right] = -\frac{1}{2} \epsilon \rho_2 g(a_2' - a_2) + \rho_1 q_{1c}^2 \frac{a_1' - a_1}{a_1 a_1' (a_1 + a_1')} + \rho_2 q_{2c}^2 \frac{a_2' - a_2}{a_2 a_2' (a_2 + a_2')} \quad (5.15)$$

Het rechter lid en dus het linker lid in deze uitdrukking zijn $\sim \rho \epsilon g a$. We mogen daarom in deze vergelijking het verschil tussen a en a' , dat immers $\sim \epsilon a$ is, verwaarlozen omdat de fout die we zo maken kwadratisch in ϵ is. In de oorspronkelijke vergelijkingen (5.9) en (5.10) is deze verwaarlozing niet toegestaan, omdat daarin termen $\sim \rho g a^2$ voorkomen. De gemaakte fout zou dan lineair zijn in ϵ , en van dezelfde orde van grootte zijn als de impulstransporttermen.

Verwaarlozing van het verschil tussen a en a' in (5.15) (zodat ook $a_1' - a_1 \approx a_2 - a_2'$), en herschrijven geeft met enkele verwaarlozingen die kwadratisch in ϵ zijn:

$$a_2' - a_2 = \frac{\frac{2}{\epsilon} \frac{a}{a_2' + a_2} \left[-\frac{2F}{\rho_1 g (a_1 + a_1')} + (a_2' - a_2) \right]}{\frac{q_{1c}^2}{\epsilon g a_1 a_1' \frac{a_1 + a_1'}{2}} + \frac{q_{2c}^2}{\epsilon g a_2 a_2' \frac{a_2 + a_2'}{2}}} - 1$$

Let op de overeenkomst tussen deze uitdrukking en de differentiaalvergelijking (4.15) voor dichtheidsstromen. In (5.16) mogen we stellen:

$$a_1 \approx a - a_2 \quad (5.17)$$

$$a_1' \approx a - a_2' \quad (5.18)$$

De verstoring in het vrije oppervlak is ook te verwaarlozen in (5.7) en (5.8). Zo wordt (5.7) + (5.8):

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 = u_1' a_1' + u_2' a_2' + c(a - a') \quad (5.19)$$

De eerste vier termen zijn $\sim ca$, de laatste is $\sim \epsilon ca$. Deze term is daarom verwaarloosbaar. Voor het totale debiet q geldt dan:

$$q \equiv u_1 a_1 + u_2 a_2 \approx u_1' a_1' + u_2' a_2' \equiv q' \quad (5.20)$$

De totale diepte a en het totale debiet q kunnen we ons evenals bij b.v. dichtheidsstromen bepaald denken uit een berekening waarin de dichtheidsverschillen verwaarloosd zijn.

Hoe staat het nu met aantal onbekenden en het aantal ter beschikking staande vergelijkingen? Zoals uiteengezet in par. 2 is de stroming aan één zijde van de interne sprong superkritisch. Dit betekent dat de aanwezigheid van de sprong de laagdikten en stroomsnelheden aan die zijde niet beïnvloedt, en dat we deze bekend kunnen veronderstellen. Stel dat dit a_1' , a_2' , u_1' en u_2' zijn. We hebben dan nog de zes onbekenden: a_1 , a_2 , u_1 , u_2 , c en F . Hiervoor staan ter beschikking vijf vergelijkingen:

- 1 compatibiliteitsrelatie betrekking hebbend op interne golven aan de zijde met subkritische stroming,
- 2 massabalansvergelijkingen (5.20 en 5.7, of 5.20 en 5.8),
- 1 vergelijking afgeleid uit de impulsbalansvergelijkingen (5.16), en
- 1 relatie tussen twee laagdikten (5.17).

De situatie waarin geldt dat er een vergelijking te weinig is, blijft dus bestaan. Dit geldt ook voor stationaire stromen ($c = 0$). Met uitzondering van het hiervoor genoemde geval waarin de vergelijking van Bernoulli toegepast kan worden is er geen algemeen geldige methode bekend om aan dit probleem te ontkomen.

Een benaderingsoplossing voor interne sprongen (maar niet voor fronten), die experimenteel redelijk goed blijkt te voldoen (2, 3, 4, 9 en 13), kan echter gevonden worden door er vanuit te gaan dat de kracht F gelijk is aan het gemiddelde van de drukken t.p.v. het grensvlak links en rechts van de sprong, vermenigvuldigd met de spronghoogte, dus

$$F \approx \frac{1}{2} \rho_1 g (a_1 + a_1') (a_2' - a_2) \quad (5.21)$$

Deze benadering houdt in dat een eventuele netto bijdrage van de niet-hydrostatische drukken verwaarloosd wordt.

Met (5.21) blijkt dat de teller in (5.16) nul wordt. Omdat $a_2' - a_2$ ongelijk aan nul is moet de noemer in (5.16) ook nul zijn (vermenigvuldigd beide leden van (5.16) eerst met de noemer!). Dit geeft als relatie tussen de laagdikten aan beide zijden van de sprong (vergelijkingen 5.17 en 5.18

zijn ook hier van toepassing)

$$\frac{q_{1c}^2}{\epsilon g a_1 a_1' \frac{a_1 + a_1'}{2}} + \frac{q_{2c}^2}{\epsilon g a_2 a_2' \frac{a_2 + a_2'}{2}} \approx 1 \quad (5.22)$$

Vergelijk dit resultaat met de voorwaarde voor kritische stroming, vergelijking 4.9. Als de spronghoogte tot nul nadert, gaat (5.22) over in (4.9). In de hiernavolgende paragraaf behandelen we een speciaal geval van (5.22).

3.1 Het geval dat één van de debieten gelijk aan nul is

Als één van de lagen niet stroomt ten opzichte van de sprong $q_{1c} = 0$, fig. 5.6a; of $q_{2c} = 0$, fig. 5.6b), kan in de betreffende laag een hydrostatisch drukverloop verondersteld worden. Als de stroomsnelheden in één van de lagen relatief klein zijn, zal de drukverdeling aldaar bij benadering hydrostatisch zijn. In deze gevallen is (5.21) zeker acceptabel.

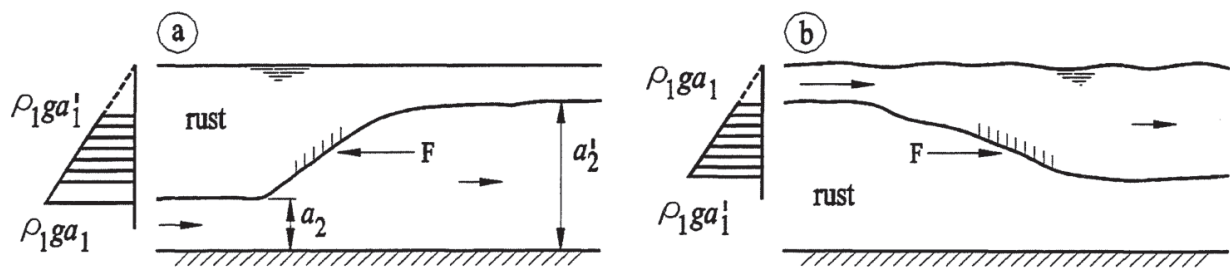


Fig. 5.6 - Interne sprong in het geval dat één van de lagen in rust is.

Voor het geval $q_{1c} = 0$ (of $|q_{1c}| \ll |q_{2c}|$) wordt (5.22)²

$$q_{2c}^2 = \epsilon g a_2 a_2' \frac{a_2 + a_2'}{2} \quad (5.23)$$

We controleren nu of aan de voorwaarden (5.4) en (5.5) voor sub en superkritische stroming is voldaan. We vinden voor (5.5) aan de bovenstroomse zijde van de sprong (fig. 5.6a)

$$\frac{q_{1c}^2}{\epsilon g a_1^3} + \frac{q_{2c}^2}{\epsilon g a_2^3} = \frac{q_{2c}^2}{\epsilon g a_2^3} = \frac{a_2' (a_2 + a_2')}{2 a_2^2} > 1$$

²Vergelijking 5.23 is ook op eenvoudige wijze direct af te leiden.

Hieraan is voldaan als $a_2' > a_2$. Superkritische stroming treedt dus op aan de zijde met de kleinste onderlaagdikte. De stroming is daar naar de sprong toe gericht. De toestand is als aangegeven in fig. 5.6a. Natuurlijk is ook de gespiegelde toestand mogelijk (fig. 5.7).

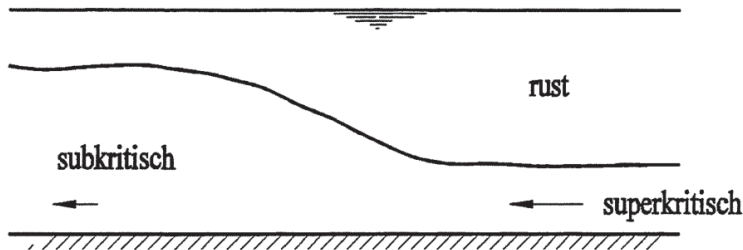


Fig. 5.7 - Super en subkritische stroming bij een interne sprong, bovenlaag in rust.

Opmerkingen:

- Het geval $q_{2c} = 0$ (of $|q_{2c}| \ll |q_{1c}|$) kan op dezelfde wijze behandeld worden.
- (5.23) is dezelfde vergelijking als die voor de gewone watersprong, zij het dat g vervangen is door eg en de totale diepte door de dikte van de onderlaag.
- Een voorbeeld van het optreden van een interne sprong is beschreven in par. 4.5 (voorbeeld 3).

3.2 Het geval dat slechts één van de lagen doorloopt (fronten)

Een intern front kan zich b.v. voordoen als een schuif tussen twee kanaalpannen gevuld met water van verschillende dichtheden, geheel of gedeeltelijk geopend wordt. Zie fig. 5.11 aan het eind van deze paragraaf. Een ander voorbeeld is het begin van lozing van water in ontvangend water van een andere dichtheid. In f. 5.8 is de oppervlaktelozing van relatief licht (b.v. koel-)water weergegeven.

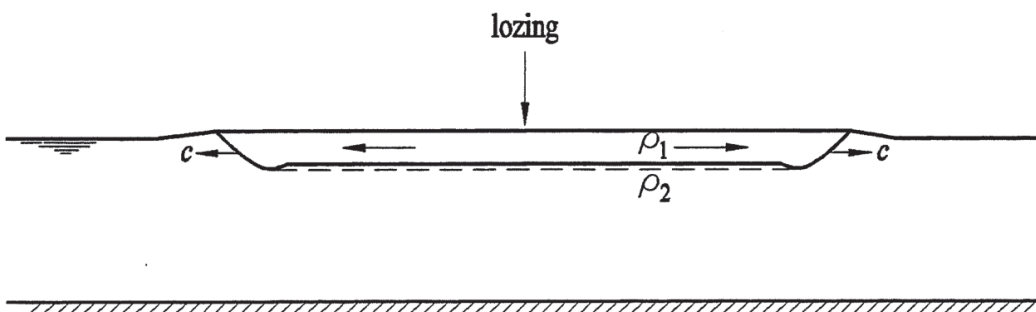


Fig. 5.8 - Interne fronten na het op gang komen van een oppervlaktelozing.

Bij voortplanting van een front over grotere afstanden gaat de bodem- en/of grensvlakschuifspanning een rol spelen. Het front wordt dan geleidelijk lager en krijgt uiteindelijk meer een karakter als dat van de punt van de zoutwig (hoofdstuk 4).

Voor het opstellen van vergelijkingen voor fronten beschouwen we de situatie weergegeven in fig. 5.9. Bewegen we met het front mee dan is de relatieve snelheid in de enkele laag gelijk aan c , en de gemiddelde stroomsnelheid in het front gelijk aan nul; c is de voortplantingssnelheid van het front t.o.v. de stroomsnelheid voor het front. De invloed van wrijving en mengingsprocessen laten we buiten beschouwing.

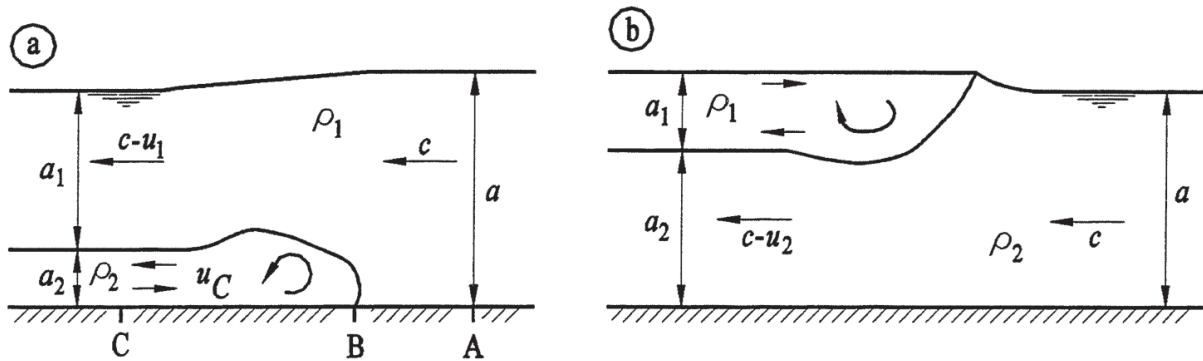


Fig. 5.9 - *a. Front aan de bodem, b. Front aan het oppervlak. Door de menging achter de kop van het front ontstaat in het front een circulatiestroming.*

We gaan nu eerst in op het geval van het front aan de bodem. Doordat de geometrie van de lagen afwijkt van die van interne sprongen, blijkt een wat andere aanpak nodig te zijn. De massabalans voor de bovenlaag levert

$$(c - u_1) a_1 = c a \quad (5.24)$$

Voor het opstellen van een (horizontale)impulsbalans beschouwen we de twee lagen tezamen om de onbekende kracht F te elimineren,

$$\frac{1}{2} \rho_1 g a^2 + \rho_1 c^2 a + \left[\frac{1}{2} \rho_1 g (a_1 + a_2)^2 + \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g a_2^2 + \rho_1 (c - u_1)^2 a_1 \right] = 0 \quad (5.25)$$

Hierin zijn onbekend: a_1 , a_2 , u_1 en c . We hebben drie vergelijkingen: (5.24), (5.25) en een compatibiliteitsrelatie voor interne golven aan de gelaagde zijde (of b.v. het debiet q_2 is gegeven; er geldt $q_2/a_2 = (q_1 + q_2)/a + c$).

Een vierde vergelijking kunnen we opstellen door de vergelijking van Bernoulli toe te passen langs de stroomlijn ABC in fig. 5.9a (6, 7). Langs AB geldt (punt B vatten we op als een stuwpunt)

$$a + \frac{c^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho_1 g} \quad (5.26)$$

In de onderlaag zal bij de bodem een zwakke stroming naar rechts aanwezig zijn, terwijl in het front door turbulentie verliezen zullen optreden. We schrijven daarom voor het gedeelte CB:

$$\frac{\rho_1 g a_1 + \rho_2 g a_2}{\rho_2 g} + \frac{u_c^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho_2 g} + \Delta H \quad (5.27)$$

De laatste term is een verliesterm. We stellen de snelheden in het front evenredig met c , en de verliezen evenredig met $c^2/2g$, zodat

$$\Delta H - \frac{u_c^2}{2g} = \beta_2 \frac{c^2}{2g} \quad (5.28)$$

De coëfficiënt β_2 veronderstellen we constant³.

We kunnen nu de voortplantingssnelheid uitdrukken in de dikte van de onderlaag a_2 . Uitwerking van (5.24) t/m (5.28) geeft

$$c = \sqrt{\epsilon g \frac{a_2}{a} \frac{(a - a_2)(2a - a_2)}{(1 - \beta_2)a_2 + (1 + \beta_2)a}} \quad (5.29)$$

De voortplantingssnelheid neemt toe als β_2 afneemt. In het geval zonder wrijving en verliezen hebben we $\beta_2 = 0$. Omdat niet aannemelijk is dat c door wrijving en verliezen toeneemt, zal dus gelden $\beta_2 > 0$. De voortplantingssnelheid c is gelijk aan nul voor $a_2 = 0$ en $a_2 = a$. De maximale voortplantingssnelheid treedt op voor $a_2 = a_2^*$, met

$$(1 - \beta_2) \left(\frac{a - a_2^*}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{a - a_2^*}{a} \right)^2 + 1 = 0 \quad (5.30)$$

De waarden voor a_2^*/a en de maximale voortplantingssnelheid c_{\max} volgen voor enkele waarden van β_2 uit onderstaande tabel.

β_2	$\frac{a_2^*}{a}$	$\frac{c_{\max}}{\sqrt{\epsilon g a}}$
0	0,35	0,53
0,5	0,39	0,48
1	0,42	0,44

³Dit geldt slechts als de debieten niet te groot zijn (bij benadering: $|q_2| < 0,3a \sqrt{\epsilon g a}$ en $|q_1/q_2| < 1,5$).

De stabiliteit van het front vereist subkritische stroming achter het front - voorwaarde (5.4) - of

$$\frac{(u_1 - c)^2}{\epsilon g a_1} < 1$$

Uitwerking van deze ongelijkheid geeft de voorwaarde

$$(1 - \beta_2) \left(\frac{a - a_2}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{a - a_2}{a} \right)^2 + 1 < 0$$

Vergelijking met (5.30) laat zien dat een front aan de bodem slechts kan bestaan als:

$$0 < a_2 < a_2^*$$

Het geval dat de voortplantingsnelheid maximaal is vormt dus de grens tussen stabiliteit en instabiliteit (fig. 5.10).

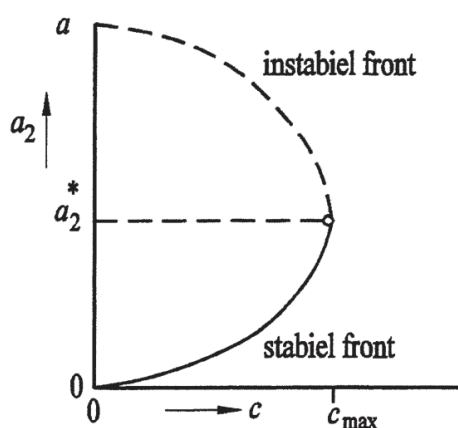


Fig. 5.10 - Verband tussen voortplantingsnelheid en dikte van de onderlaag.

Het geval van een front aan het oppervlak is op dezelfde wijze te behandelen. We vinden de volgende analoge resultaten

$$c = \sqrt{\epsilon g \frac{a_1 (a - a_1)(2a - a_1)}{a (1 - \beta_1)a_1 + (1 + \beta_1)a}}$$

c is maximaal voor $a_1 = a_1^*$, met

$$(1 - \beta_1) \left(\frac{a - a_1^*}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{a - a_1^*}{a} \right)^2 + 1 = 0$$

Het stabiliteitscriterium is

$$0 < a_1 < a_1^*$$

De hiervoor gegeven tabel met numerieke waarden geldt eveneens voor dit geval, mits β_2 door β_1 en a_2^* door a_1^* vervangen wordt.

Experimenten en een meer gedetailleerde theorie, waarin onder meer menging is opgenomen, zijn in de literatuur beschreven (experimenten: 5, 7, 8, 10, 11 (hierin verscheidene artikelen over fronten), 14, 15, 16, 17; theorie: 15). Fronten langs een hellende bodem worden beschouwd in (18).

Als voorbeeld behandelen we de z.g. uitwisselingsstroming. Deze ontstaat b.v. als een sluisdeur die zoet en zout water van elkaar scheidt, plotseling wordt geopend (fig. 5.11). We nemen aan dat vóór het openen van de deur de door zoet en zout water op de deur uitgeoefende krachten evenwicht met elkaar maken (als dit niet zo is, ontstaat naast een intern verschijnsel ook een externe golf die een netto stroming veroorzaakt, verg. voorbeeld 3.1). Na het openen ontstaat een zoete tong die langs het oppervlak de zoute laag binnendringt, en tegelijkertijd een zoute tong die langs de bodem de zoete laag binnendringt. De dikte van de tongen is bij de deur ongeveer gelijk aan $a/2$, maar moet zoals hierboven bleek nabij de fronten kleiner zijn. Dit is in overeenstemming met de metingen van Barr (8). De gemeten voortplantingssnelheid van de zoete tong is $(0,52 \text{ à } 0,54)\sqrt{ega}$, zodat $\beta_1 \approx 0$ (zie tabel). De zoute tong plant zich door de invloed van de bodem langzamer voort: $c = (0,42 \text{ à } 0,46)\sqrt{ega}$, hetgeen wijst op waarden van β_2 van ongeveer 1. Uit (5) volgt een waarde voor β_2 van ongeveer 0,6. Ook door o.a. Yih (9), en Abraham en Eysink (10) is onderzoek verricht naar uitwisselingsstroming.

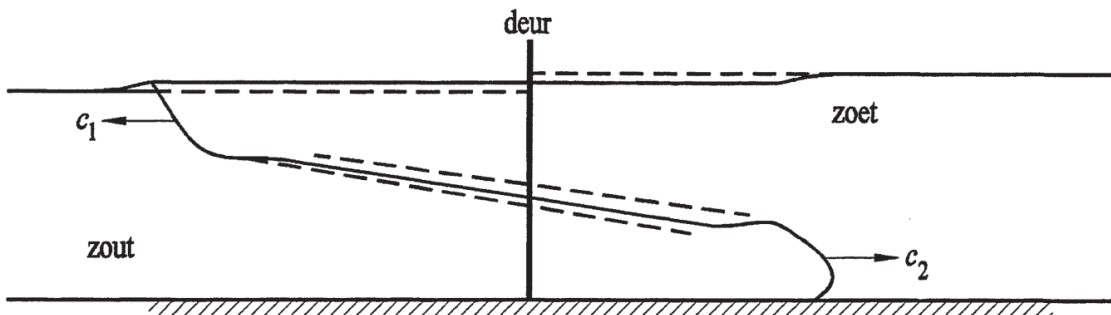


Fig. 5.11 - *Uitwisselingsstroming*.

Opmerking:

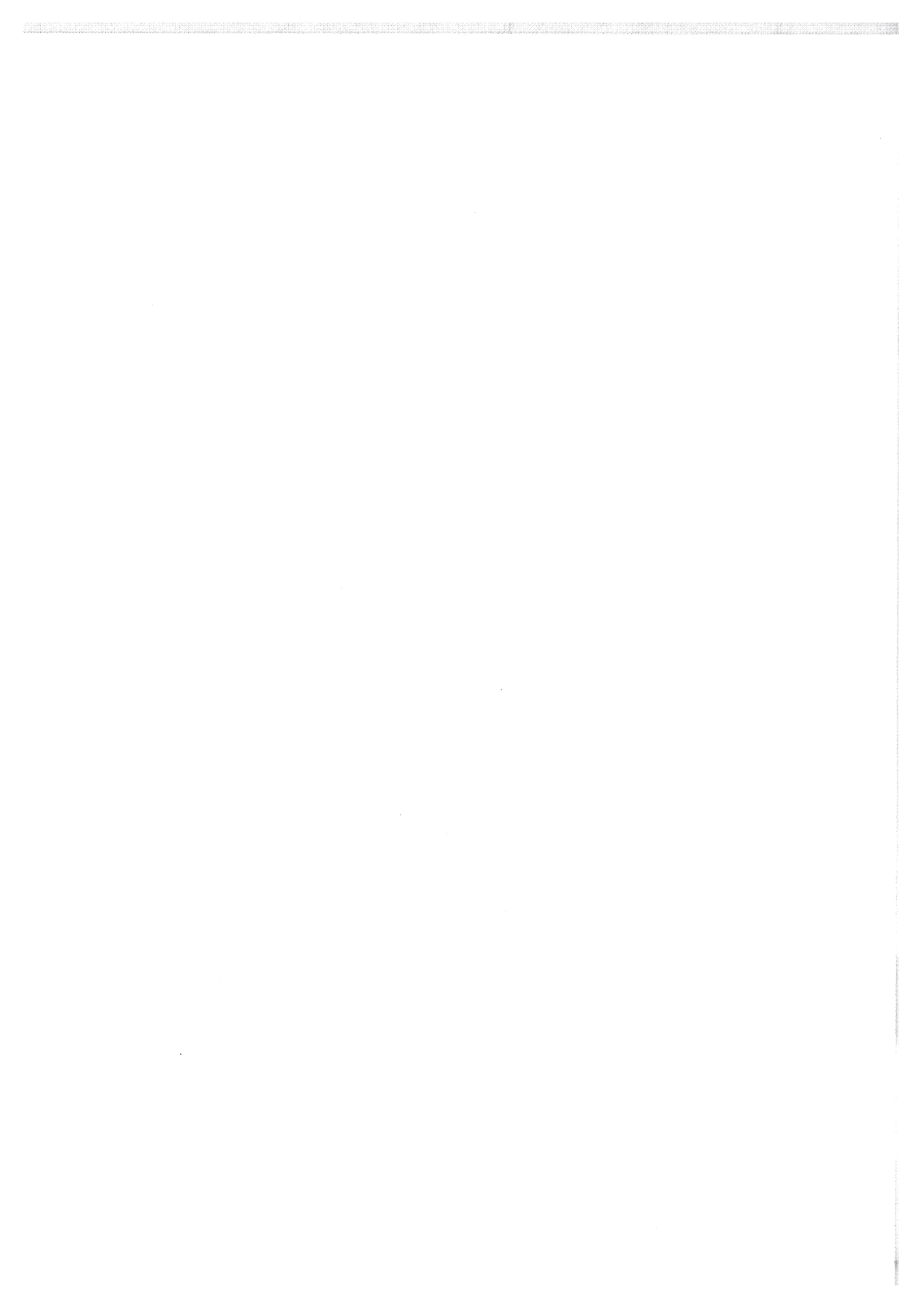
Verwaarlozen we alle verliezen en stellen we $a_1 = a_2 = a/2$, dan vinden we voor het snelheidsverschil tussen de lagen $\Delta u = 2c = \sqrt{ega}$. Verder zou dan gelden $u_1 = -c$ en $u_2 = c$, zodat $c_{i+} = 0$ en $c_{i-} = 0$. De stroming zou dan juist dubbelkritisch zijn. In werkelijkheid wordt deze stromingsvorm wel benaderd, maar blijft de stroming overall subkritisch.

Literatuur hoofdstuk 5

1. J.A. Battjes, Vloeistofmechanica (handleiding college b70).
2. C.S. Yih en C.R. Guha, Hydraulic jump in a fluid system of two layers, *Tellus*, 7, 1955, p. 358.
3. E. O. Macagno, Interactions between circulation and density stratification, Proc. International Symposium on Stratified Flows (IAHR), Novosibirsk, 1972, p. 343.
4. E.O. Macagno en M.C. Macagno, Mixing in interfacial hydraulic jumps, Proc. 16th Congress IAHR, Vol. III, 1975, p. 373.
5. G. Abraham en C.B. Vreugdenhil, Discontinuities in stratified flows, *Journal of Hydraulic Research*, 9, no. 3, 1971, p.293.
6. T.B. Benjamin, Gravity currents and related phenomena, *Journal of Fluid Mechanics*, 31, no. 2, 1968, p. 209.
7. D.L. Wilkinson en I.R. Wood, Some observations on the motion of the head of a density current, *Journal of Hydraulic Research*, 10, no. 3, 1972, p. 305.
8. D.I.H. Barr, Densimetric exchange flow in rectangular channels, *La Houille Blanch*, 7, 1963, p.739 en: 6, 1967, p. 619.
9. C.S. Yih, Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, 1965, MacMillan.
10. G.Abraham en W.D. Eysink, Magnitude of interfacial shear in exchange flow, *Journal of Hydraulic Research*, 9, no. 2, 1971, p. 125.
11. J.E. Simpson en R.E. Britter, Experiments on the dynamics of the front of a gravity current, Proc. Second International Symposium on Stratified Flows (IAHR), Trondheim, 1980, Vol. 1, p. 174.
12. J.Y. Holyer en H.E. Huppert, Gravity currents entering a twolayer fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 100, no. 4, 1980, p. 739.
13. N. Hayakawa, An analytical study of twolayered rapidly varied flow, *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, 6, 1975, p. 84.
14. J.P.Grubert, Estuarine front formation and propagation, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* 106, no. HY6,1980, p. 961.
15. J.E. Simpson en R.E. Britter, The dynamics of the head of a gravity current advancing over a horizontal surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 94, no. 3, 1979, p. 477.
16. R.E. Britter en J.E. Simpson, Experiments on the dynamics of a gravity current head, *Journal of Fluid Mechanics*, 88, no. 2, 1978, p. 223.
17. H.O. Anwar, The flow structure in the front of a moving surface layer, *IngenieurArchiv*, 46, 1977, p. 143.
18. R.E. Britter en P.F. Linden, The motion of the front of a gravity current travelling down an incline, *Journal of Fluid Mechanics*, 99, no. 3, 1980, p. 531.
19. I.R. Wood en J.E. Simpson, Jumps in layered miscible fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 140,

1984, p. 329.

20. G.H. Jirka en M. Arita, Density currents or density wedges: boundary layer influence and control methods, *Journal of Fluid Mechanics*, 177, 1987, p. 187.



Hoofdstuk 6 - INTERNE KORTE GOLVEN EN STABILITEIT VAN GELAAGDE STROMING

1 Inleiding

In het lagenmodel zoals ontwikkeld in hoofdstuk 2, zijn de verticale versnellingen van de vloeistofdeeltjes verwaarloosd. Met dit model kunnen interne lange golven en externe lange golven beschreven worden. De verwaarlozing van de verticale versnellingen is niet meer geoorloofd, als een karakteristieke horizontale lengtemaat van de golven (bij sinusvormige golven: de golflengte) kleiner wordt dan een zeker aantal malen de grootste laagdikte. Dit bleek b.v. het geval te zijn bij interne fronten.

Hier beschouwen we weer het geval dat de genoemde lengtemaat klein kan zijn. De golven die we zo vinden duiden we aan als korte golven. Ook hier kunnen we bij kleine dichtheidsverschillen onderscheid maken tussen externe golven, waarbij dichtheidsverschillen van ondergeschikt belang zijn (zie het college b76, Korte golven), en interne golven die voornamelijk bij het grensvlak optreden, zie fig. 6.1. We veronderstellen dat de uitwijkingen van de vloeistofdeeltjes ten opzichte van een ongestoorde toestand klein zijn.

De theorie van de interne golven blijkt inzicht te geven in de stabiliteit van een grensvlak en daarmee van een tweelagensysteem. We beschouwen eerst het geval van een scherp grensvlak tussen de twee lagen. Omdat zal blijken dat dan altijd enige menging op moet treden, komt daarna een meer geleidelijke overgang tussen de lagen ter sprake en beschouwen we de stabiliteit van een stroming met in de verticaal continu verlopende dichtheid en snelheid.

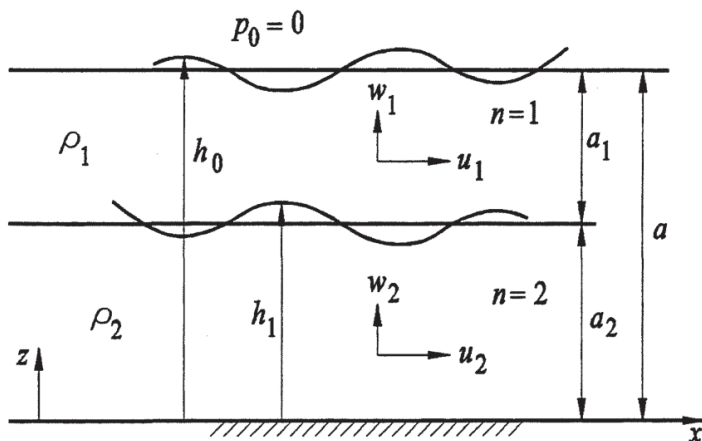


Fig. 6.1 - Externe en interne korte golven in een tweelagensysteem.

2 Korte golven bij scherp grensvlak

We beschouwen een tweedimensionale stroming met per laag een constante dichtheid, en een horizontale bodem (fig. 6.1.). We verwaarlozen de viscositeit van de vloeistof.

Vergelijkingen

Voor elk van de twee lagen staan de volgende vergelijkingen ter beschikking: continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

bewegingsverg. in x -richting :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.2)$$

bewegingsverg. in z -richting :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (6.3)$$

De verticale versnelling van de vloeistof is nu niet verwaarloosd.

Door (6.2) naar z en (6.3) naar x te differentiëren en af te trekken ontstaat, met (6.1)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{D\xi}{Dt} = 0 \quad (6.4)$$

waarin

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.5)$$

de vorticeiteit is. (6.4) zegt dat als we met een willekeurig vloeistofdeeltje meebewegen, de vorticeiteit een constante is. Denken we ons in dat de golfbeweging vanuit rust is ontstaan door een wervelvrij krachtveld, dan is deze constante voor alle vloeistofdeeltjes gelijk aan nul. De beweging van de hier beschouwde ideale vloeistof is dan wervelvrij. (6.5) wordt nu

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (6.6)$$

Dit is een stelling van Thomson (de latere Lord Kelvin), zie Lamb (1, p. 31).

Het blijkt nu mogelijk een potentiaalfunctie $\phi = \phi(x, z, t)$ in te voeren volgens (voor een meer uitvoerige behandeling van de potentiaaltheorie wordt verwezen naar het college b76 en naar (1))

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.3

Aan (6.6) wordt zo voldaan. De continuïteitsvergelijking gaat met (6.7) over in de vergelijking van Laplace,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.8)$$

Integratie van de bewegingsvergelijkingen 6.2 en 6.3 naar x resp. z levert met (6.6)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = F(t) \quad (6.9)$$

Hierin is $F(t)$ een nog te kiezen functie van de tijd. De vergelijkingen 6.7, 6.8 en 6.9 vormen een stelsel van vier vergelijkingen voor de vier afhankelijk variabelen u , w , p en ϕ .

Randvoorwaarden

We onderscheiden twee soorten randvoorwaarden: kinematische randvoorwaarden en dynamische randvoorwaarden.

Kinematische randvoorwaarden

Een vloeistofdeeltje dat zich aan een scheidingsvlak (vrij oppervlak, grensvlak, bodem) bevindt, zal daarlangs blijven bewegen. Geven we de ordinaat van zo'n scheidingsvlak aan met $z = h(x,t)$, dan geldt algemeen voor een kleine verandering dz in de ordinaat (fig. 6.2)

$$dz = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (6.10a)$$

Voor een deeltje dat de verandering volgt, geldt

$$dx = u(x,h,t) dt \quad (6.10b)$$

$$dz = w(x,h,t) dt \quad (6.10c)$$

Als kinematische randvoorwaarde vinden we met (6.10)

$$w(x,h,t) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x,h,t) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.11)$$

Deze randvoorwaarde moeten we op vier plaatsen opleggen: bij het vrije oppervlak ($n = 1$, $h = h_1$), juist boven het grensvlak ($n = 1$, $h = h_1$), juist onder het grensvlak ($n = 2$, $h = h_1$) en aan de bodem ($n = 2$, $h = 0$, dus $w(x,0,t) = 0$).

Dynamische randvoorwaarden

Afgezien van oppervlaktespanningen verlopen de spanningen in een continu medium geleidelijk, ook al bevinden er zich scheidingsvlakken in. Voor het hier beschouwde geval, waarin schuifspanningen en oppervlaktespanningen verwaarloosd worden, komt dit erop neer dat we moeten eisen dat de normaalspanningen (drukken) aan beide zijden van het grensvlak en het vrije oppervlak (ook een grensvlak) gelijk zijn.

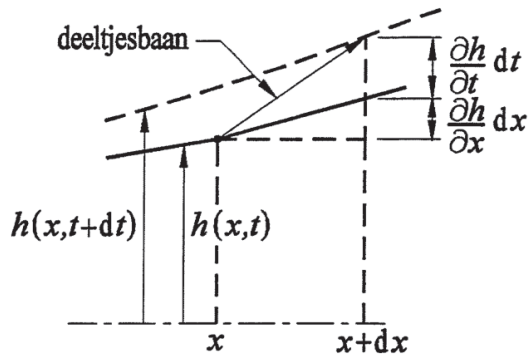


Fig. 6.2 - Beweging van een vloeistofdeeltje nabij een scheidingsvlak.

Linearisering van het probleem

De geïntegreerde krachtvergelijking 6.9 en de kinematische randvoorwaarden 6.11 bevatten termen die het product zijn van afhankelijk variabelen. Daardoor is het stelsel vergelijkingen met de genoemde randvoorwaarden in zijn algemeenheid niet analytisch oplosbaar. Hierbij speelt ook een rol dat het gebied waarin we de vergelijkingen moeten oplossen, niet eenvoudig van vorm is. Om aan deze moeilijkheden te ontkomen beschouwen we een vereenvoudigd probleem: in beide lagen is een parallelstroming aanwezig met snelheden \bar{u}_1 resp. \bar{u}_2 . Op deze ongestoorde toestand superponeren we verstoringen in de vorm van golven met een amplitude die klein is ten opzichte van de laagdikten en de golflengte. We kunnen voor de storingen, aangeduid met $'$, schrijven (de index n die de betreffende laag aanduidt, wordt vanaf dit punt meegenomen, $n = 1$ of 2).

$$\begin{aligned}
 u_n' &= u_n - \bar{u}_n = \frac{\partial \phi_n'}{\partial x} \\
 w_n' &= w_n = \frac{\partial \phi_n'}{\partial z} \\
 \phi_n' &= \phi_n - \bar{u}_n x \\
 h_0' &= h_0' - a \\
 h_1' &= h_1 - a_2
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Invullen in (6.8), (6.9) en (6.11) geeft, met verwaarlozing van de (relatief kleine) termen die het product zijn van twee op de verstoring betrekking hebbende grootheden (b.v. $u_1' h_1'$, lineariseren van het probleem):

$$\frac{\partial^2 \phi_n'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_n'}{\partial z^2} = 0
 \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial \phi_n'}{\partial t} + \bar{u}_n \frac{\partial \phi_n'}{\partial x} + \frac{p_{n-1}'}{\rho_n} + g h_{n-1}' \approx 0
 \tag{6.14}$$

$$w_n'(x, h_m, t) \approx \frac{\partial h_m'}{\partial t} + \bar{u}_n \frac{\partial h_m'}{\partial x} \quad (m = n - 1 \text{ of } m = n) \quad (6.15)$$

In (6.14) is gebruik gemaakt van de relatie $p = \rho_n g(h_{n-1} - z) + p_{n-1}$ en van het feit dat in de ongestoorde toestand $p/\rho_n + gz$ een constante is; de functie F in het rechter lid is gelijk gesteld aan deze constante.

De randvoorwaarde voor de verstoring mogen we nu als benadering opleggen ter plaatse van de ongestoorde scheidingsvlakken ($z = 0$, $z = a_2$, $z = a$). Zij worden (de strepen boven ongestoorde stroomsnelheden u_n zijn weggelaten)

vrij oppervlak

$$\begin{aligned} \text{kinematisch: } \quad & \frac{\partial \phi_1'(x, a, t)}{\partial z} = \frac{\partial h_0'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_0'}{\partial x} \\ \text{dynamisch: } \quad & \frac{\partial \phi_1'(x, a, t)}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1'(x, a, t)}{\partial x} + gh_0' = 0 \end{aligned}$$

grensvlak

$$\begin{aligned} \text{laag 1, kinematisch: } \quad & \frac{\partial \phi_1'(x, a_2, t)}{\partial z} = \frac{\partial h_1'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1'}{\partial x} \\ \text{laag 2, kinematisch: } \quad & \frac{\partial \phi_2'(x, a_2, t)}{\partial z} = \frac{\partial h_1'}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_1'}{\partial x} \\ \text{dynamisch: } \quad & -\rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2'(x, a_2, t)}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \phi_2'(x, a_2, t)}{\partial x} \right] + \\ & -\rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1'(x, a_2, t)}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1'(x, a_2, t)}{\partial x} \right] + \\ & + (\rho_2 - \rho_1)gh_1' = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

bodem

$$\text{kinematisch: } \quad \frac{\partial \phi_2'(x, 0, t)}{\partial z} = 0$$

Harmonische oplossing van het gelineariseerde probleem

Als bijzonder geval beschouwen we verstoringen in de vorm van sinusoidale golven. Omdat de vergelijkingen (6.13) tot en met (6.16) lineair zijn, vervormen golven van dit type niet. Willekeurige verstoringen kunnen opgebouwd worden door superpositie van sinusvormige golven (Fouriertransformatie).

Voor het gemak introduceren we voor de oplossing complexe grootheden en stellen

$$h_{n-1}'(x,t) = A_n e^{ik(ct-x)}$$

$$\phi_n'(x,z,t) = [B_n \cosh k(z - a_2) + C_n \sinh k(z - a_2)] e^{ik(ct-x)} \quad (6.17)$$

waarin c de voortplantingssnelheid is van een verstoring met golfgetal k ($= 2\pi/\text{golflengte}$). De vorm $ct - x$ in de exponentiële functies brengt het niet-gevormde van een lopende golf tot uitdrukking. Door substitutie in de vergelijkingen blijkt dat de relaties (6.17) voldoen.

De voortplantingssnelheid c en de coëfficiënten A_n , B_n , en C_n moeten zodanige waarden hebben dat aan de randvoorwaarden wordt voldaan. Substitutie van (6.17) in (6.16) geeft achtereenvolgens

$$\begin{aligned} B_1 \sinh ka_1 + C_1 \cosh ka_1 &= A_1 i(c - u_1) \\ ik(c - u_1)(B_1 \cosh ka_1 + C_1 \sinh ka_1) + gA_1 &= 0 \\ C_1 &= A_2 i(c - u_1) \\ C_2 &= A_2 i(c - u_2) \\ ik(c - u_2)B_2 - (1 - \epsilon)ik(c - u_1)B_1 + \epsilon gA_2 &= 0 \\ B_2 \sinh ka_2 - C_2 \cosh ka_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

met $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$. De vergelijkingen (6.18) vormen een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen voor de coëfficiënten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 .

Niet-triviale oplossingen worden slechts dan gevonden als de hoofddeterminant van het stelsel gelijk aan nul is. Dit levert als uitdrukking voor de voortplantingssnelheid c

$$\begin{aligned} (c - u_1)^2 (c - u_2)^2 - \frac{gT_2}{k}(c - u_1)^2 - \frac{gT_1}{k}(c - u_2)^2 + \\ + \epsilon \frac{g^2 T_1 T_2}{k^2} + (1 - \epsilon)(c - u_1)^4 T_1 T_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

waarin

$$T_n = \tanh k\alpha_n \quad (6.20)$$

Het bepalen van oplossingen van (6.19) verloopt op overeenkomstige wijze als bij de lange golven (hoofdstuk 3). In het onderstaande veronderstellen we weer kleine dichtheidsverschillen ($\epsilon \ll 1$).

Externe korte golven vinden we door in (6.19) de termen met ϵ te verwaarlozen. Voor het geval $u_1 = u_2 = u$ levert (6.19) dezelfde oplossing als voor een éénlaagsysteem met diepte a

wordt gevonden:

$$c_e \approx u \pm \sqrt{\frac{g}{k} \frac{T_1 + T_2}{1 + T_1 T_2}} = u \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh ka} \quad (6.21)$$

De voortplantingssnelheid van interne korte golven vinden we door c_i^2 en u_n^2 weer van de orde $\epsilon g a$ te veronderstellen, en termen van de orde ϵ^2 te verwaarlozen ten opzichte van die van de orde ϵ . Dit geeft

$$\frac{(c_i - u_1)^2}{\frac{\epsilon g}{k} T_1} + \frac{(c_i - u_2)^2}{\frac{\epsilon g}{k} T_2} \approx 1$$

waaruit volgt

$$c_i = \frac{T_2 u_1 + T_1 u_2}{T_1 + T_2} \pm \sqrt{\frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \left[(T_1 + T_2) \frac{\epsilon g}{k} - \Delta u^2 \right]} \quad (6.22)$$

waarin $\Delta u = u_1 - u_2$ weer het snelheidsverschil tussen de lagen is. Voor grote golflengten ($k \rightarrow 0$) vinden we uit (6.22) de voortplantingssnelheid van interne lange golven terug.

3 Kelvin-Helmholtz instabiliteit

De voortplantingssnelheid van interne korte golven is reëel zolang het snelheidsverschil tussen de lagen voldoende klein is, zodat geldt

$$\Delta u^2 < (T_1 + T_2) \frac{\epsilon g}{k} \quad (6.23)$$

Als het snelheidsverschil groter is, dan wordt de voortplantingssnelheid complex. Wat moeten we ons hierbij voorstellen? We schrijven in dit geval

$$c_i = c_R \pm i c_I$$

waarbij c_R en c_I reële constanten zijn, en $c_I > 0$. We beschouwen nu de vervorming van het grensvlak. Deze wordt gegeven door (het reële deel van)

$$h_1' = A_2 e^{ik(c_R t - x)}$$

Omdat er volgens (6.22) twee oplossingen van c_i voldoen, is de algemene oplossing voor dit geval (A_{21} en A_{22} zijn constanten)

$$\begin{aligned} h_1' &= A_{21} e^{ik(c_R t - x) + c_I k t} + A_{22} e^{ik(c_R t - x) - c_I k t} \\ &= [A_{21} e^{c_I k t} + A_{22} e^{-c_I k t}] e^{ik(c_R t - x)} \end{aligned}$$

De amplitude van deze golf is

$$|h_1'| = |A_{21} e^{c_I k t} + A_{22} e^{-c_I k t}| \quad (6.24)$$

Na verloop van tijd zal de eerste term in het rechter lid van (6.24) gaan overheersen: een gedeelte van de golven groeit exponentieel. Wegens dit explosieve karakter zal het grensvlak instabiel zijn als $c_I \neq 0$. Dit is de z.g. Kelvin-Helmholtz instabiliteit. De stabiliteitsgrens wordt gegeven door (zie (6.22) en (6.20)):

$$\frac{\Delta u^2}{\epsilon g a} = \frac{\tanh k a_1 + \tanh k a_2}{k a} \quad (6.25)$$

In fig. 6.3 zijn enkele stabiliteitsgrenzen weergegeven voor verschillende waarden van de verhouding tussen de laagdikten.

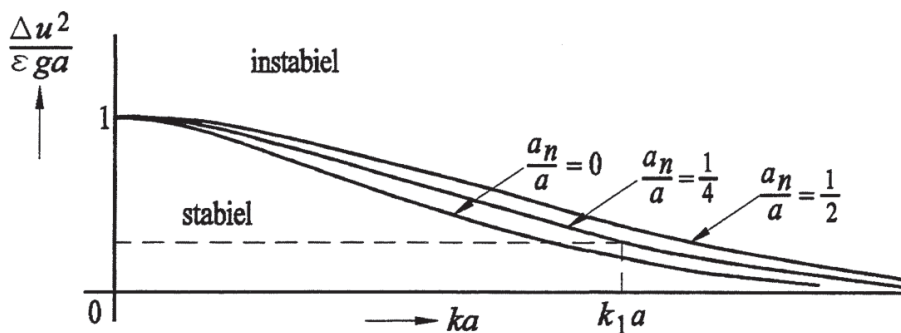


Fig. 6.3 - Stabiliteitsgrenzen voor een tweelagensysteem.

Conclusies uit deze beschouwing zijn:

- als $\Delta u^2 / \epsilon g a > 1$ treedt bij elke golflengte instabiliteit op,
- als $0 < \Delta u^2 / \epsilon g a < 1$ is er altijd een golfgetal (in fig. 6.3 het golfgetal k_1) aan te geven,

waarvoor geldt dat golven met een golfgetal $k > k_1$ instabiel zijn. Kortere golven (grotere k) zijn dus eerder instabiel dan langere.

Deze conclusies leiden tot een somber beeld voor wat betreft het lagenmodel: ook al is $\Delta u^2/\epsilon g a < 1$, dan is bij elk snelheidsverschil tussen de lagen een golflengte aan te geven, waaronder de golven instabiel zijn. Het lagenmodel zou dus altijd instabiel zijn als $\Delta u \neq 0$. In werkelijkheid blijkt dit echter mee te vallen. Fig. 6.4, gebaseerd op de experimenten van Thorpe (2), kan hier als toelichting dienen. De snelheden u_1 en u_2 zijn gelijk maar van tegengesteld teken, en constant. Als een golf instabiel wordt en exponentieel gaat groeien wordt al snel de grens overschreden waarboven de niet-lineaire termen in de vergelijkingen een belangrijke rol spelen. De golfvorm gaat dan afwijken van de sinusvorm (fig. 6.4 b-e), de golven rollen na verloop van tijd op en breken. De golflengte blijkt nog wel in overeenstemming met de lineaire theorie (vergelijking 6.25). Het breken van de golven leidt tot plaatselijke turbulentie en menging, zodat een meer geleidelijke overgang tussen de lagen ontstaat (fig. 6.4 f-h). De turbulentie wordt onderdrukt door de gelaagdheid en dempt geleidelijk uit. De dikte van de overgangs(of tussen-) laag neemt dan niet verder toe. We kunnen aannemen dat het lagenmodel zoals opgesteld in hoofdstuk 2 nog bruikbaar is, zolang deze dikte niet te groot ten opzichte van de laagdikten wordt.

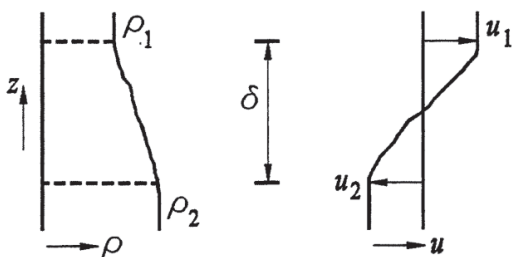
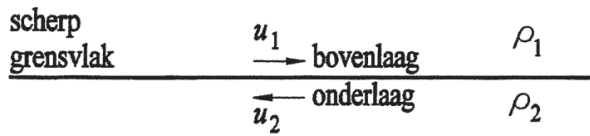
Voor de dikte δ van de overgangslaag werd empirisch gevonden (2, 11, 12)

$$\delta \approx 0,3 \frac{\Delta u^2}{\epsilon g} \quad (6.26)$$

Voor de bruikbaarheid van het tweelagenmodel moeten we tenminste eisen, dat δ duidelijk kleiner is dan de waterdiepte a . Als praktisch criterium wordt wel gehanteerd $\Delta u^2/(\epsilon g) < a$, of

$$\frac{\Delta u^2}{\epsilon g a} < 1 \quad (6.27)$$

Aan te tonen is, dat aan deze ongelijkheid is voldaan als de stroming subkritisch is. Vandaar dat bij deze stromingsvorm het lagenmodel vaak bruikbaar is. Ook zijn lange interne golven nog juist stabiel als aan (6.27) voldaan is, zie (3.6) en (3.9). Turbulentie in onder- of bovenlaag kan de stabiliteit eveneens beïnvloeden (hoofdstuk 7, 10, 13).



- a. Vanuit de rusttoestand beginnen de lagen in tegengestelde richtingen te stromen; u_1 en u_2 blijven verder constant.
- b. Er ontstaan instabiele korte golven.
- c. De golfamplitude neemt toe, de golf wordt scheef.
- d. De scheefheid neemt toe.
- e. De golven rollen op.
- f. Het oprollen leidt tot breken en turbulente menging, waardoor een overgangslaag van eindige dikte ontstaat.
- g. De invloed van de oorspronkelijke golven verdwijnt.
- h. De turbulentie wordt door de gelaagdheid onderdrukt; de dikte van de overgangslaag neemt niet verder toe.

Dichtheids- en snelheidsprofiel in de eindtoestand.

Fig. 6.4 - Kelvin-Helmholtz instabiliteit (2).

4 Stabiliteit bij geleidelijk dichtheidsverloop

Tijdens het in fig. 6.4 weergegeven proces wordt een gedeelte van de kinetische energie van de aanvankelijk horizontale stroming omgezet in potentiële energie van de gelaagde vloeistof. Het proces kan dan ook (benaderend) beschreven worden met een energiebeschouwing.

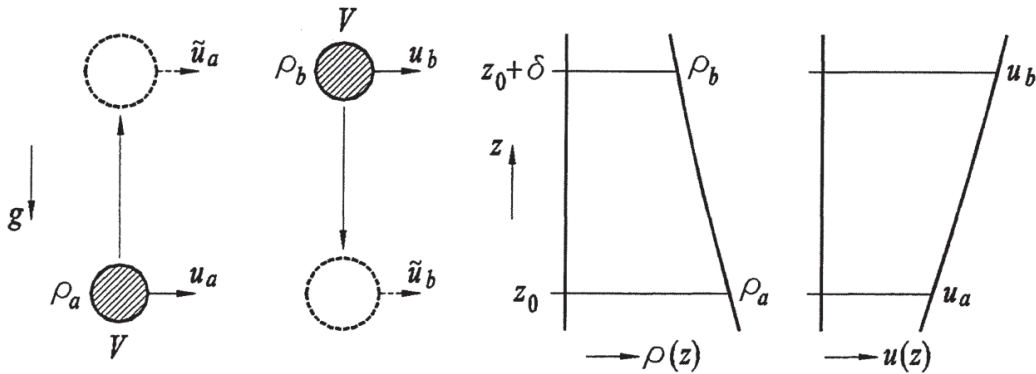


Fig. 6.5 - *Verticale uitwisseling van twee vloeistofpakketjes onder invloed van een interne golfbeweging. Dichtheids- en snelheidsprofielen gelden voor de toestand voordat uitwisseling optreedt.*

We nemen eerst eens aan dat twee vloeistofpakketjes, die zich op verschillende niveaus bevinden, onder invloed van een interne golfbeweging van niveau verwisselen, zie fig. 6.5. De twee pakketjes hebben een even groot volume V (behoud van volume), dichtheden ρ_a en ρ_b , horizontale beginsnelheden u_a en u_b , en horizontale eindsnelheden \tilde{u}_a en \tilde{u}_b . De pakketjes verplaatsen over een verticale afstand δ . Voor de uitwisseling is benodigd een hoeveelheid arbeid W . De beschikbare kinetische energie uit de hoofdstroom is K . De gelaagde stroming zal nu stabiel zijn als de benodigde arbeid groter is dan de beschikbare kinetische energie, dus als

$$W > K \quad (6.28)$$

We berekenen vervolgens W en K . Voor W geldt

$$W = \int_{z_0}^{z_0 + \delta} [\rho_a - \rho(z)]gV dz + \int_{z_0 + \delta}^{z_0} [\rho_b - \rho(z)]gV dz$$

of

$$W = \Delta\rho gV \delta \quad (6.29)$$

waarin $\Delta\rho = \rho_a - \rho_b$. Voor de berekening van K mogen we de dichtheidsverschillen

verwaarlozen, mits deze klein zijn ($\rho_a \approx \rho_b = \rho$, verg. paragraaf 3 van hoofdstuk 1), zodat

$$K \approx \frac{1}{2}\rho V(u_a^2 - \tilde{u}_a^2) + \frac{1}{2}\rho V(u_b^2 - \tilde{u}_b^2) \quad (6.30)$$

Verder nemen we aan, dat tijdens de uitwisseling de horizontale impuls behouden blijft. Dit geeft (weer met $\rho_a \approx \rho_b = \rho$)

$$\rho V u_a + \rho V u_b \approx \rho V \tilde{u}_a + \rho V \tilde{u}_b \quad (6.31)$$

Met (6.31) als nevenvoorwaarde is uit (6.30) een maximale waarde voor K af te leiden. Er blijkt, dat

$$K \leq \frac{1}{4}\rho V \Delta u^2 \quad (6.32)$$

waarin $\Delta u = u_a - u_b$. Als in (6.32) het gelijkteken geldt, dan is $\tilde{u}_a = \tilde{u}_b = (u_a + u_b)/2$.

Blijkens (6.28), (6.29) en (6.32) is de stroming zeker stabiel als

$$\Delta \rho g V \delta > \frac{1}{4}\rho V \Delta u^2$$

dus als

$$\delta > \frac{1}{4} \frac{\Delta u^2}{\epsilon g} \quad (6.33)$$

waarin $\epsilon = \Delta \rho / \rho$.

Om het effect van de menging die tijdens Kelvin-Helmholtz instabiliteit optreedt, te simuleren beschouwen we nog een wat ander proces. In plaats van de pakketjes van niveau te laten verwisselen, nemen we nu aan dat ze elkaar halverwege ontmoeten en vervolgens vermengen, zie fig. 6.6. De te verrichten arbeid is nu kleiner:

$$W = \int_{z_0}^{z_0 + \delta/2} [\rho_a - \rho(z)] g V dz + \int_{z_0 + \delta}^{z_0 + \delta/2} [\rho_b - \rho(z)] g V dz \quad (6.34)$$

Benaderen we $\rho(z)$ met $\rho(z) \approx \rho_a - \Delta \rho (z - z_0) / \delta$, dan wordt (6.34)

$$W \approx \frac{1}{4} \Delta \rho g V \delta$$

We nemen aan dat na vermenging \tilde{u}_a en \tilde{u}_b gelijk zijn. Dan geldt (zie de opmerking na (6.32))

$$K = \frac{1}{4}\rho V \Delta u^2$$

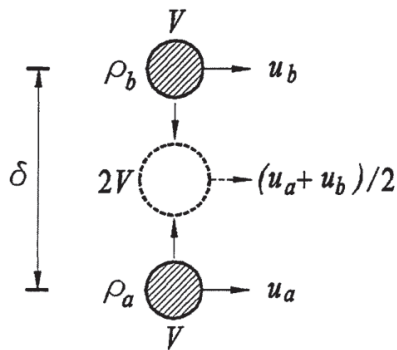


Fig. 6.6 - Eenvoudig model van het mengproces in een brekende interne golf. De toestand na vermenging van de twee vloeistofpakketjes is met een streeplijn weergegeven.

Weer het criterium (6.28) hanterend, vinden we nu als stabiliteitsvoorwaarde

$$\frac{1}{4}\Delta\rho g V \delta > \frac{1}{4}\rho V \Delta u^2$$

of

$$\delta > \frac{\Delta u^2}{\epsilon g} \quad (6.35)$$

Vergelijking met het empirische resultaat (6.26) laat zien, dat (6.33) een wat te lage, en (6.35) een te hoge schatting van de stabiliteitsgrens geeft.

Als volgende stap beschouwen we de stabiliteit van een stroming met willekeurig (in verticale richting) verlopende gelaagdheid. Onderzoek hiernaar met behulp van de basisvergelijkingen (par. 3 van hoofdstuk 1) is uitgevoerd door o.a. Miles (4), Howard (5) en Hazel (6), zie ook de boeken van Yih (7) en Turner (3). De gelineariseerde theorie voor kleine verstoringen in stroming en dichtheidsverdeling levert het volgende resultaat: als overal in de vloeistof geldt dat (ρ en u zijn weer functies van z)

$$\frac{-g \frac{d\rho}{dz}}{\rho \left(\frac{du}{dz}\right)^2} > \frac{1}{4} \quad (6.36)$$

dan is de stroming stabiel. Het linker lid van deze ongelijkheid is het z.g. **(gradient-)getal van Richardson**, aangeduid met Ri . (6.36) geeft aan dat een grotere dichtheidsgradient $|d\rho/dz|$ de stroming stabiel maakt, terwijl een toename van de snelheidsgradient $|du/dz|$ destabiliserend werkt. Ook Ri hangt in het algemeen van z af. In een ongelaagde stroming met een snelheidsgradient ongelijk aan nul is $Ri = 0$; deze stroming is (bij voldoende groot Reynoldsgetal) dus instabiel. De stroming wordt daardoor turbulent.

Het criterium 6.36 is slechts een voldoende voorwaarde voor stabiliteit. Nabij vaste wanden kan een stroming al stabiel zijn bij $Ri \sim 0,1$.

Voor eindige, driedimensionale verstoringen ver van vaste wanden is, weer met behulp van de basisvergelijkingen, als (strengere) voorwaarde voor stabiliteit gevonden

$$Ri > 1 \quad (6.37)$$

We kunnen de resultaten (6.36) en (6.37) aannemelijk maken met de hierboven gegeven energiebeschouwing. Substitutie van de benaderingen

$$\Delta u \approx \frac{du}{dz} \delta \quad \text{en} \quad \Delta \rho \approx - \frac{d\rho}{dz} \delta$$

in (6.33) voor verplaatsing van vloeistofpakketjes door een nietbrekende interne golf, of in (6.35) voor een brekende interne golf (die dan ook een grote amplitude zal hebben) levert juist (6.36) resp. (6.37) op. Een eenvoudige energiebeschouwing blijkt in dit geval dus dezelfde resultaten op te leveren als een meer exacte analyse.

Literatuur hoofdstuk 6

1. H. Lamb, Hydrodynamics, 1932, 6de ed. Cambridge University Press.
2. S.A. Thorpe, Experiments on the stability of stratified shear flows: miscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 46, 1971, p. 299.
3. J.S. Turner, Buoyancy effects in Fluids, 1973, Cambridge University Press
4. J.W. Miles, On the stability of heterogeneous shear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 1961, p. 496.
5. L.N. Howard, Note on a paper of John W. Miles, *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 1961, p. 509.
6. P. Hazel, Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 51, 1972, p. 39.
7. C.S. Yih, Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, 1965, MacMillan Comp.
8. F.H. Ludlam, Characteristics of billow clouds and their relation to clear air turbulence, *Quarterly Journal Royal Meteorological Society*, 93, 1967, p. 419.

9. R.R. Long, Some aspects of turbulence in stratified flow, Applied Mechanics Reviews, 1972, p. 1297.
10. R.H. French, Interfacial stability in channel flow, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 105, no. HY8, 1979, p. 955. Discussie door P. Jensen, 106, no. HY9, p. 1547.
11. C.G. Koop en F.K. Browand, Instability and turbulence in a stratified fluid with shear, Journal of Fluid Mechanics, 93, 1979, p. 135.
12. G. Gartrell Jr., Studies on the mixing in a densitystratified shear flow, Rapport no. KHR39, W.M. Keck Laboratory, California Institute of Technology, 1979.
13. R. Friedrich, Die Stabilität der Zwischenfläche in einer zweischichtigen Gerinneströmung, Rapport no. SFB80/ET/151, Universität Karlsruhe, 1979.
14. W.R. Geyer en J.D. Smith, Shear instability in a highly stratified estuary, Journal of Physical Oceanography, 17, 1987, blz. 1668.

Hoofdstuk 7 - TURBULENTIE EN MENGING

1 Fysische uitgangspunten

In de voorgaande hoofdstukken zijn onderwerpen behandeld die een vrij nauwkeurige theoretische beschrijving toelieten. Dit is niet meer het geval bij het onderwerp van dit hoofdstuk. Bij de beschrijving van turbulentie is men voor een belangrijk deel op experimenten aangewezen. Theoretische beschouwingen hebben vaak het karakter van hypothesen (met een beperkt geldigheidsgebied), die het soms echter wel mogelijk maken tendensen aan te geven.

In een turbulente stroming beïnvloedt de turbulentie de snelheidsverdeling en schuifspanningen, maar ook de verdeling van de dichtheid, saliniteit, temperatuur e.d. In een ongelaagde stroming beïnvloeden deze laatste grootheden de stroming en de turbulentie niet. In een gelaagde stroming echter beïnvloedt de dichtheidsverdeling in het algemeen niet alleen de stroming, maar ook de intensiteit en structuur van de turbulentie. Er ontstaat dan behalve door dichtheidsverschillen ook door turbulentie een wederzijdse beïnvloeding van snelheids- en dichtheidsverdelingen.

Afhankelijk van de geometrie van de begrenzingen en de opgelegde stroming aan de randen van het stromingsveld kunnen er zich verschillende processen voordoen. We zullen ons hier beperken tot een enkel geval, n.l. de afschuifstroming over een flauw hellende of horizontale bodem waarbij de diepte klein is t.o.v. een karakteristieke horizontale lengtemaat van de stroming. Dit geval dekt een aantal stromings- en stofverspreidingsproblemen in estuaria, kanalen en bekkens. Voor de eenvoud beschouwen we alleen tweedimensionale gevallen (één horizontale en de verticale coördinaat), zie fig. 7.1. De behandeling van b.v. stralen, pluimen en de stroming om lichamen valt buiten het kader van deze handleiding, zie voor deze onderwerpen (5).

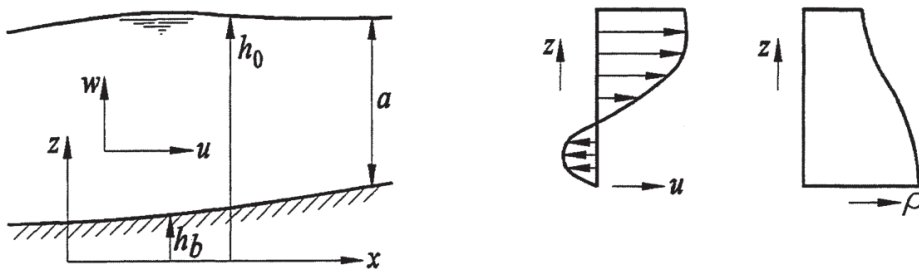


Fig. 7.1 - *Quasi-horizontale afschuifstroming.*

De hypothesen (modellen) die we zullen hanteren voor de turbulente uitwisseling van impuls en massa zijn de eenvoudigste waarmee tot op zekere hoogte zinvolle resultaten verkregen kunnen worden. Alvorens aandacht te schenken aan turbulentie in een gelaagd medium beschouwen we enkele eigenschappen van turbulentie waarbij gelaagdheid geen rol speelt. Voor een meer volledige

behandeling van dit onderwerp wordt verwezen naar het college Turbulentie in de waterloopkunde (b82, 1), 2 en 6.

Na bespreking van een aantal aspecten van turbulentie bij gelaagdheid, worden in par. 2 wiskundige modellen voor de verschillende stromingsvormen opgesteld. In par. 3 wordt aandacht besteed aan zoutindringing in estuaria.

1.1 Enkele opmerkingen over turbulentie waarbij gelaagdheid geen rol speelt

We beschouwen de stroming door een buis, waarbij we als randvoorwaarden aan de boven- en benedenstroomse einden constante (maar verschillende) drukken kiezen. Als het getal van Reynolds ($= DU/\nu$, waarin D = buisdiameter, U = gemiddelde stroomsnelheid en ν = kinematische viscositeit) voldoende klein is, zal de stroming laminair zijn: alle waterdeeltjes bewegen evenwijdig aan de buisas. De stroomsnelheden zijn onafhankelijk van de tijd. Vergroten we nu het drukverval, dan zullen de stroomsnelheden en het getal van Reynolds toenemen. Bij grotere waarden van dit getal wordt de stroming instabiel: de waterdeeltjes gaan grillig gevormde banen afleggen en de stroomsnelheden fluctueren. De stroming is dan turbulent. De productie van turbulentie vindt voornamelijk plaats bij de wand. De stroomsnelheid in een bepaald punt is nu een z.g. stochastische grootheid: de grootte ervan op een bepaald tijdstip na aanvang van de stroming is onvoorspelbaar. Injecteren we in een bepaald punt van de dwarsdoorsnede een kleurstof, dan zal deze zich vanwege de grillige deeltjesbanen snel over de dwarsdoorsnede verspreiden. Ook de kleurstofconcentratie is een fluctuerende (stochastische) grootheid. In de (civiele) praktijk zijn de Reynoldsggetallen meestal zo groot, dat een ongelaagde stroming turbulent is.

Er kunnen (over een zekere tijd) gemiddelde grootheden bepaald worden (b.v. de gemiddelde snelheid, turbulente spanningen en transporten, de gemiddelde concentratie), die wel onafhankelijk van de tijd en voorspelbaar (niet veranderend bij herhaling van het experiment) zijn. Deze gemiddelden verschaffen in het algemeen voldoende informatie over de stroming. Turbulentiemodellen zijn dan ook meestal opgesteld met het doel verbanden tussen twee of meer van deze gemiddelde grootheden aan te geven.

Zoals uit het hierboven gegeven voorbeeld kan blijken, is een belangrijk aspect van turbulentie de sterke toename van het transport (ten opzichte van het moleculaire transport) van impuls en b.v. opgeloste stof of warmte.

Voor de turbulente transporten in een richting loodrecht op de gemiddelde stromingsrichting zijn van belang, omdat in deze richting geen meevoering (advectie) door de gemiddelde stroming zelf plaats vindt.¹ Om voor deze transporten benaderende uitdrukkingen op te stellen beschouwen we een eenvoudig model voor eenparige stroming (fig. 7.2): door een vlakje samenvallend met de

¹Deze transporten spelen een rol in de later op te stellen balansvergelijkingen (par.2.2).

gemiddelde (horizontale) stromingsrichting bewegen als gevolg van de turbulentie pakketjes vloeistof afwisselend omhoog en omlaag (er is geen netto volumetransport). De betrokken snelheidscomponenten in z -richting zijn w en $-w$. De horizontale component van de impuls van het omhoog bewegende pakketje bedraagt ongeveer: ρu_a per volume-eenheid. Hierin is u de voor turbulentie gemiddelde horizontale snelheidscomponent. Het transport van de x -component van de impuls door het vlakje bedraagt dan $\rho w u_a$. Het omlaag bewegende pakketje levert een bijdrage $-\rho w u_b$. Het netto verticale transport van horizontale impuls s_{xz} is dan

$$s_{xz} \approx -\frac{1}{2}\rho w (u_b - u_a) \quad (7.1)$$

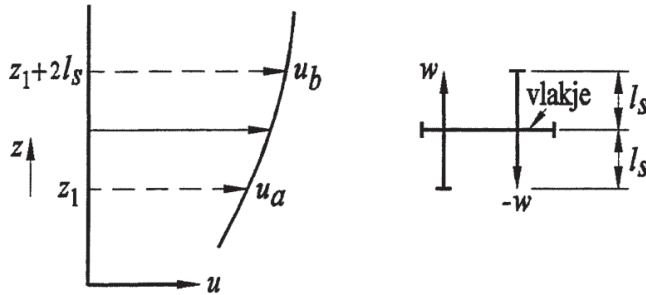


Fig. 7.2 - *Uitwisseling van impuls.*

De grootheid s_{xz} heeft het karakter van een (turbulente) schuifspanning: als b.v. u_b groter is dan u_a , dan wordt de vloeistof boven het beschouwde vlakje afgeremd door het omhoog vewegende pakketje, en de vloeistof eronder versneld door het omlaag bewegende pakketje. We nemen aan dat de z.g. mengweglengte l_s (zie fig. 7.2) klein genoeg is om voor afschuifstroming te mogen stellen

$$u_b - u_a \approx 2l_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Een overstreepte grootheid geeft een gemiddelde weer, waarbij turbulente fluctuaties zijn uitgefilterd. (7.1) wordt nu

$$s_{xz} \approx -\rho w l_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Hierin zijn w en l_s grootheden die betrekking hebben op de eigenschappen van de turbulentie. Er zijn twee gangbare methoden om tot turbulentiemodellen te komen. In één er van - de z.g. mengweglengtehypothese van Prandtl - wordt gesteld

$$w \approx l_s \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (7.2)$$

en

$$s_{xz} \approx \rho l_s^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (7.3)$$

De tweede methode is de z.g. Boussinesqhypothese. Daarbij stelt men $w l_s = K_s$, zodat

$$s_{xz} \approx -\rho K_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (7.4)$$

Hierin is K_s de z.g. turbulente viscositeit (de index s duidt op - turbulente - schuifspanning). Zowel l_s in (7.3) als K_s in (7.4) worden door de aard van de stroming bepaald en zullen daardoor in het algemeen van de plaats en eventueel van de tijd afhangen. De in par. 1 genoemde stroming (nog zonder dichtheidsverschillen) kan vaak redelijk goed met (7.3) of (7.4) beschreven worden. Voor andere stromingsvormen behoeft dit echter niet het geval te zijn. Voor toepassingen zie ook (3).

Het turbulente transport van een opgeloste stof of warmte kunnen we op dezelfde wijze analyseren als het impulstransport. We veronderstellen in deze paragraaf dat de aanwezigheid van de opgeloste stof of temperatuurverschillen de turbulentie niet beïnvloedt. Als $\bar{c} = \bar{c}(z, t)$ de voor turbulentie gemiddelde concentratie (b.v. in kg per m³ vloeistof) van een opgeloste stof voorstelt, vinden we analoog aan (7.1) t/m (7.4), zie ook fig. 7.3,

$$C_z \approx -\frac{1}{2} w(c_b - c_a) \approx -wl_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$$

en

$$C_z \approx -l_c^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (7.5)$$

of

$$C_z \approx -K_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (7.6)$$

Hierin is C_z het turbulente transport van de opgeloste stof in z -richting en K_c de turbulente diffusiviteit. Experimenteel blijkt dat de transportcoëfficiënten voor opgeloste stof kunnen afwijken van die voor impuls. Er geldt

$$\frac{K_c}{K_s} \approx \frac{l_c^2}{l_s^2} \approx 1 \text{ à } 2$$

De waarde 1 geldt bij benadering voor turbulentie nabij een bodem of wand, de waarde 2 voor turbulentie waarvan de structuur niet door begrenzingen wordt beïnvloed (vrije turbulentie).

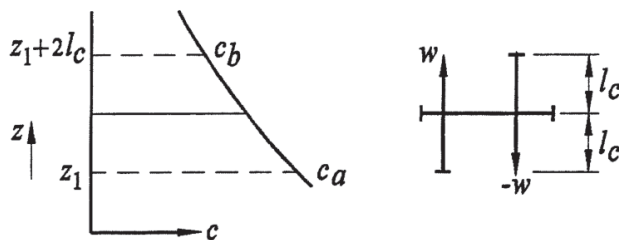


Fig. 7.3 - *Uitwisseling van opgeloste stof.*

Bij het transport van warmte kunnen we een verband aannemen tussen de inwendige energie E per massa-eenheid en de absolute temperatuur T . Voor vloeistoffen geldt $E \approx c_p T$, waarin c_p de soortelijke warmte is. Voor de warmtestroom (transport van inwendige energie) Q_z in z -richting vinden we dan

$$Q_z \approx -c_p l_Q^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (7.7)$$

resp.

$$Q_z \approx -c_p K_Q \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (7.8)$$

waarin $l_Q = l_c$ en $K_Q = K_c$ als moleculaire effecten geen rol spelen.

Door de aanwezige concentratie -en temperatuursverschillen zal er in het algemeen ook een turbulent transport van massa plaats vinden. Omdat $\rho = \rho(c, T)$, zie (1.3), geldt

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.9)$$

Nemen we aan dat de turbulente diffusiviteiten voor opgeloste stof, warmte en massa dezelfde zijn, dan vinden we voor het verticale massatransport m_z

$$m_z \approx \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} C_z + \frac{1}{c_p} \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial T} Q_z \quad (7.10)$$

Deze relatie geldt strikt genomen slechts als de relatie tussen ρ en de toestandsgrotheden c en T lineair is. Zie ook par. 1.3.

Opmerkingen:

- De verdelingen van l_{\dots} en K_{\dots} over de verticaal worden uit experimenten afgeleid. Daartoe meet men turbulente transporten, snelheids- en concentratie (temperatuur-) profielen en bepaalt l_{\dots} en K_{\dots} uit (7.3) t/m (7.8).
- De hier opgestelde gradiënt-transporthypothese zijn in verschillende gevallen aanvechtbaar. Als er b.v. plotselinge veranderingen in de stroming optreden door een lichaam in de stroom, een oneffenheid in de bodem of iets dergelijks, dan is toepassing van (7.3) t/m (7.8) vaak niet gemotiveerd. Turbulentiemodellen met een groter geldigheidsbereik, zoals het z.g. $k-\epsilon$ model, worden behandeld in o.a. (6), (7), (15) en (16).
- Vergelijkingen 7.5 en 7.7 voorspellen dat het transport van opgeloste stof resp. warmte gelijk aan nul zou worden als $\partial \bar{u} / \partial z = 0$. In werkelijkheid is dit in het algemeen niet zo (in de as van een buis is $\partial \bar{u} / \partial z = 0$, de transporten van opgeloste stof en warmte zijn dit niet als ter plaatse $\partial \bar{c} / \partial z \neq 0$ resp. $\partial \bar{T} / \partial z \neq 0$).
- In voorkomende gevallen behoeven (7.5 en (7.7) een correctie.

1.2 De invloed van gelaagdheid

In par. 1.1 werd er van uitgegaan dat de dichtheid voor wat de turbulentie betreft constant genomen mocht worden. Nu veronderstellen we dat de dichtheid een (nog onbekende) functie van plaats en tijd is, zodanig dat de dichtheidsverschillen de turbulentie wel beïnvloeden.

Bij voldoende kleine dichtheidsverschillen zal de in par. 1.1. beschouwde afschuifstroming nog turbulent kunnen zijn. Zoals echter aangetoond is in par. 4 van hoofdstuk 6 werkt een dichtheidsgradiënt $\partial\rho/\partial z$ stabiliserend als deze negatief is, dus als de dichtheid afneemt met de hoogte. Een maat voor de stabiliteit van de stroming bleek het gradiëntgetal van Richardson Ri te zijn. In de definitie van Ri gebruiken we nu gemiddelde grootheden,

$$Ri = \frac{-g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}}{\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} \quad (7.11)$$

Omdat $\bar{\rho}$ en \bar{u} van plaats (x,z) en eventueel tijd afhangen, zal dit ook het geval zijn met Ri . In par. 4 van hoofdstuk 6 werd gevonden dat de stroming instabiel, dus turbulent, kan worden als $Ri < 1/4$. Reeds bestaande turbulentie kan zich in bepaalde gevallen nog bij grotere waarden van Ri handhaven, zie ook (6.37). Wand- of bodemturbulentie kan voorkomen bij Ri kleiner dan ongeveer 0,2 (4, 11). Voor vrije turbulentie kan de grenswaarde van Ri aanzienlijk hoger liggen. We komen hierop later terug.

Het in par. 1.1 gebruikte model voor de turbulente transporten is tot op zekere hoogte ook bruikbaar in de gelaagde situatie. Voor het uitvoeren van de verticale bewegingen van de vloeistofpakketjes moet nu echter arbeid worden verricht. Als gevolg hiervan zullen de verticale snelheidscomponent van de pakketjes en de mengweglengte gaan afhangen van de mate van gelaagdheid, hier gekarakteriseerd door het getal van Richardson. De eenvoudigste hypothese voor het in rekening brengen van gelaagdheid in afschuifstroming is de mengweglengte, en de turbulente viscositeit en diffusiviteit afhankelijk te stellen van het getal van Richardson. (7.3) en (7.6) worden dan (iets soortgelijks geldt voor (7.4), en (7.6) en (7.7))

$$s_{xz} = - \rho l_s^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| F(Ri) \quad (7.12)$$

$$C_z = - l_c^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right| G(Ri) \quad (7.13)$$

waarin $F(Ri)$ en $G(Ri)$ z.g. dempingsfuncties zijn die van Ri afhangen, met als eigenschappen:

$$F = G = 1 \text{ voor } Ri = 0$$

$$F \text{ en } G \rightarrow 0 \text{ voor } Ri \rightarrow \infty$$

$$dF/dRi \text{ en } dG/dRi \leq 0$$

(7.12) en (7.13) resulteren in verticale turbulente transporten van impuls en stof die van Ri , dus van de snelheids- en dichtheidsverdeling afhangen. Deze transporten beïnvloeden omgekeerd snelheid en dichtheid, zodat een onderlinge beïnvloeding van deze grootheden ontstaat.

Fig. 7.4 toont kwalitatief het verloop van F en G als functies van Ri zoals afgeleid uit metingen (4, 18, 24), waarbij onderscheid gemaakt is tussen bodemturbulentie en vrije turbulentie. De dempingsfuncties voor bodemturbulentie zijn van belang als de gelaagdheid zich tot aan de bodem uitstrekt, b.v. bij mobiele sliblagen of bij de stroming van warm water over een koude bodem. In wateren waarin deze sliblagen niet voorkomen is Ri aan de bodem meestal klein, en treedt demping van bodemturbulentie niet op. De laag met de hogere waarden van Ri (het grensvlak) bevindt zich doorgaans hoger in de verticaal. De turbulentie is hier meer op te vatten als vrije turbulentie.

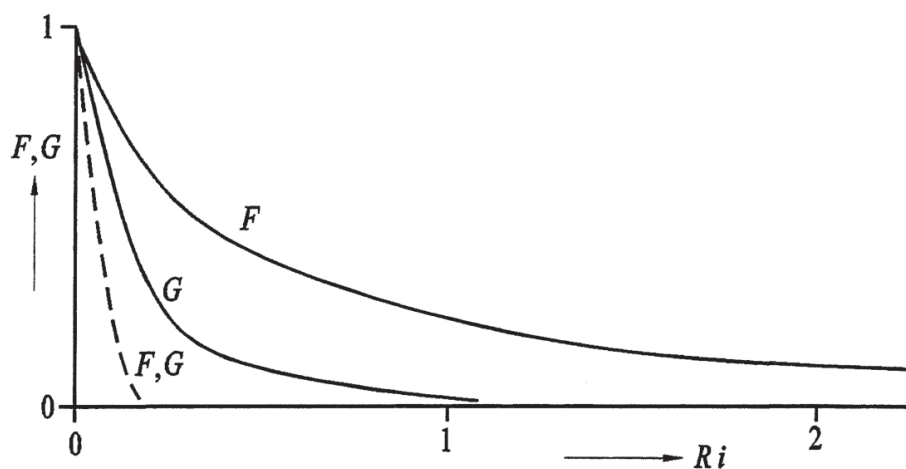


Fig. 7.4 - Kwalitatief verloop van de dempingsfuncties F en G . De streeplijn heeft betrekking op wandturbulentie, een getrokken lijn op vrije turbulentie.

Voor het feit dat in vrije turbulentie nog verticaal transport optreedt bij waarden van Ri waarvoor de stroming stabiel zou moeten zijn (hoofdstuk 6), zijn twee oorzaken aan te geven:

- Het Richardsongetal volgens (7.11) is gebaseerd op gemiddelde grootheden. Het Richardsongetal gebaseerd op gradiënten van momentane dichtheid en snelheid, zal een fluctuerend gedrag vertonen en kan tijdelijk kleiner worden dan de waarde waarbij de stroming stabiel is. Dan kan turbulentie ontstaan, die weer uitdempt als het momentane Richardsongetal groter wordt dan de grenswaarde (intermitterend gedrag).

- Het hier gepresenteerde eenvoudige model gaat uit van z.g. lokaal evenwicht van de turbulentie (lokaal geproduceerde kinetische energie van de turbulentie wordt op dezelfde plaats gedissipeerd). Door turbulente diffusie van turbulente kinetische energie en door de aanwezigheid van kleinschalige (chaotische) interne golven kan echter turbulentie ontstaan, ook al is Ri ter plaatse groot.

Bij vrije turbulentie blijkt voor grote waarden van Ri de turbulente viscositeit groter te zijn dan de turbulente diffusiviteit. De oorzaak hiervan is dat de genoemde kleinschalige niet-brekende interne golven wel horizontale impuls in verticale richting kunnen overdragen, maar geen opgeloste stof.

Een moeilijkheid bij het hier beschouwde turbulentiemodel (de vergelijkingen 7.12 en 7.13) is het bepalen van de mengweglengten l_s en l_c . Men kiest hiervoor in het algemeen de waarden die gelden voor ongelaagde stroming. Dit is echter niet juist in (eventueel plaatselijk) sterk gelaagde stroming. Meer geavanceerde turbulentiemodellen, zoals het al genoemde $k - \epsilon$ model, hebben dit bezwaar in veel mindere mate.

Een andere grootte die de mate van gelaagdheid karakteriseert, is het z.g. **fluxgetal van Richardson**, R_f . Het is gedefinieerd als de verhouding van de arbeid die nodig is voor het verticale massatransport m_z en de arbeid verricht door de turbulente schuifspanning s_{xz} (deze arbeid levert de kinetische energie van de turbulentie, zie b.v. 2, 6, 7),

$$R_f = \frac{gm_z}{-s_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}$$

Omdat turbulentie gepaard gaat met dissipatie van mechanische energie, moet in afschuifstroming die in lokaal evenwicht is gelden $R_f < 1$. Experimenteel blijkt R_f dan niet groter dan 0,15 à 0,2 te worden (b.v. 4, 26). Met de eerder gegeven uitdrukkingen voor m_z en s_{xz} vinden we voor het fluxgetal

$$R_f = \frac{l_c^2}{l_s^2} Ri \frac{G(Ri)}{F(Ri)}$$

R_f is bij lokaal evenwicht dus een functie van Ri .

Voor de functies F en G wordt in het geval van bodemturbulentie wel de empirische relatie van Monin-Obukov gekozen,

$$F(Ri) = G(Ri) = \begin{cases} (1 - 5,2Ri)^2 & (0 \leq Ri < 1/5,2) \\ 0 & (Ri \geq 5,2) \end{cases} \quad (7.14)$$

In wandturbulentie geldt $l_c \approx l_s$, zodat het fluxgetal van Richardson dan ten hoogste $1/5,2 \approx 0,19$ wordt. (7.14) is afgeleid uit waarnemingen in de atmosfeer.

In het geval van vrije turbulentie gaat men wel uit van uitdrukkingen van de vorm

$$F(Ri) = (1 + \gamma_F Ri)^{-n_F}$$

$$G(Ri) = (1 + \gamma_G Ri)^{-n_G}$$

waarin γ_F , γ_G , n_F en n_G positieve empirische coëfficiënten zijn. Uit de eis $R_\gamma < 1$ volgt voor $Ri \rightarrow \infty$

$$n_G \geq n_F + 1$$

Uit een stabiliteitsanalyse, die buiten het kader van deze handleiding valt, volgt

$$n_G \leq \frac{3}{2}n_F + 1$$

De empirische waarden van n_F liggen meestal tussen 0,5 en 1; die van n_G tussen 1,5 en 2,5. De waarden gevonden voor γ_F en γ_G vertonen een grote spreiding. Het gemeten verloop van R_γ met Ri geeft hier enige houvast. R_γ is gelijk aan nul voor $Ri = 0$, neemt dan toe tot een maximale waarde ($\sim 0,15$ à $0,2$) voor Ri tussen ca. 0,2 en 1, en neemt vervolgens af. Een dergelijk verloop wordt bijvoorbeeld gevonden voor ($l_c^2 \approx 1,5 l_s^2$)

$$n_F = 1 \quad n_G = 2,5 \quad \gamma_F = \gamma_G = 4$$

De bijbehorende dempingsfuncties F en G lijken redelijk te voldoen (4, 18).

Tot nu toe hebben we aandacht besteed aan al bestaande turbulentie in een gelaagde stroming. Van belang is echter ook na te gaan hoe de turbulentie die in een bepaald deel van de verticaal wordt geproduceerd, zich uitbreidt over delen van de verticaal waarin nog geen turbulentie aanwezig is. Gelaagdheid kan dit proces sterk vertragen. Voor wat de hier beschouwde klasse van problemen betreft kan turbulentie geproduceerd worden door:

- snelheidsverschillen tussen de vloeistof en de begrenzingen van het stromingsveld, hier dus vrij oppervlak (wind) en bodem (wandturbulentie), en door
- snelheidsverschillen in het inwendige van de vloeistof (vrije turbulentie).

We behandelen van beide gevallen een voorbeeld, zie verder (10, 30, 33).

Turbulentie opgewekt aan bodem en/of vrij oppervlak

Als voorbeeld van de eerste mogelijkheid behandelen we het geval van een gelaagd systeem dat oorspronkelijk in rust is en aangedreven wordt door een windschuifspanning aan het vrije oppervlak. We nemen aan dat de horizontale afmetingen van het systeem zo groot zijn dat (tijdelijk) de invloed van de oevers niet merkbaar is. Door de windschuifspanning ontstaat een stromende en turbulente bovenlaag, zie fig. 7.5. De onderlaag blijft in rust.

Als gevolg van de turbulentie in de bovenlaag komen er regelmatig vloeistofpakketjes (wervels) uit deze laag bij het grensvlak aan. Doordat deze pakketjes een zekere hoeveelheid kinetische energie bezitten, kunnen ze bij zwakke gelaagdheid de onderlaag over een bepaalde (meestal relatief kleine) afstand binnendringen en stijgen vervolgens weer op naar de bovenlaag. Tijdens dit proces wordt wat vloeistof uit de onderlaag meegesleurd. Bij sterke gelaagdheid en relatief zwakke turbulentie wordt dit proces onderdrukt en wordt de menging voornamelijk veroorzaakt door het breken van korte interne golven in het grensvlak. De vloeistof uit de onderlaag wordt vervolgens geheel of gedeeltelijk door de turbulente bewegingen over de bovenlaag gemengd. Op deze wijze neemt de hoeveelheid vloeistof die in turbulente beweging is geleidelijk toe. Het niveau van het grensvlak moet dus geleidelijk dalen. Anders gezegd: de vloeistof uit de onderlaag beweegt zich met een snelheid $w_2 = da_1/dt$ in opwaartse richting door het grensvlak (op $z = a_2$). Dit verschijnsel wordt als "aanzuiging" aangeduid (Engels: entrainment). Een zelfde verschijnsel als hierboven beschreven treedt op als de dichtheid van de onderlaag toeneemt met de diepte.

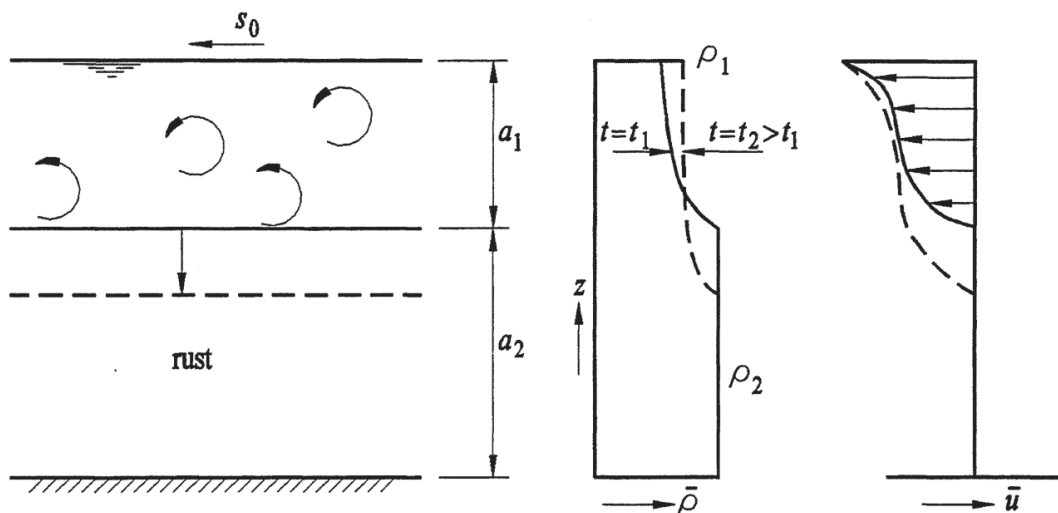


Fig. 7.5 - Menging in een gelaagd systeem door wind.

Binnen de turbulente laag zijn de formules 7.11 t/m 7.13 bruikbaar². Voor het opstellen van een uitdrukking voor de mengsnelheid w_2 kunnen we ook gebruik maken van dimensie-analyse (9). Bepalende grootheden voor w_2 zijn

$u_* = \sqrt{s_0/\rho_1}$	de schuifspanningssnelheid t.g.v. de wind,
a_1	de dikte van de bovenlaag,
$(\rho_2 - \rho_1) g$	het (tijdsafhankelijke) verschil in soortelijk gewicht van de lagen, en
ρ_2	de dichtheid van de onderlaag.

Uit dimensieoverwegingen volgt dan ($\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$)

$$\frac{w_2}{u_*} = f\left(\frac{u_*^2}{\epsilon g a_1}\right) \quad (7.15)$$

waarin f een experimenteel of theoretisch te bepalen functie voorstelt. Zowel experimenteel (27) als theoretisch (28) kan (7.15) benaderd worden met

$$\frac{w_2}{u_*} \approx \alpha_1 \sqrt{\frac{u_*^2}{\epsilon g a_1}} \quad (7.16)$$

$$\left(\text{mits } \frac{\epsilon g a_1}{u_*^2} > \text{ca. } 10; \frac{w_2}{u_*} \approx 0,3 \text{ in het ongelaagde geval}\right)$$

waarin $\alpha_1 \approx 0,6$ voor een tweelagensysteem (fig. 7.5) en ongeveer half zo groot voor een oorspronkelijk lineair gelaagd systeem. Als (7.16) geldt, is de stroming sterk gelaagd³.

In het geval dat de invloed van de oevers wel merkbaar is en de situatie van voorbeeld 3 in hoofdstuk 2 is ontstaan, geldt een andere relatie, b.v.

$$\frac{w_2}{u_*} \approx \alpha_2 \frac{u_*^2}{\epsilon g a_1}$$

²De mengweglengten zijn evenredig met de dikte van de turbulente laag.

³Dit is als volgt in te zien: benader in (6.33) of (6.35) δ met α_1 en Δu met u_1 . Elimineren van u_1 met behulp van de impulsvergelijking $\frac{d}{dt}(u_1 a_1) \approx u_1 w_2 \approx u_*^2$ geeft een uitdrukking als (7.16).

met $\alpha_2 \approx 0,1$ à $0,2$ (29, 30). In dit geval treedt alleen bij het grensvlak sterke gelaagdheid op.

Als in het hierboven beschouwde geval de schuifspanning aan de bodem wordt uitgeoefend, wat het geval is als de onderlaag stroomt en de bovenlaag in rust is, zal de onderlaag turbulent worden en zich in opwaartse richting uitbreiden. Het grensvlak beweegt zich dan omhoog.

We kunnen ons afvragen wat er gebeurt als we zowel aan oppervlak als bodem een schuifspanning uitoefenen (in onderling tegengestelde richtingen). De turbulentie in de bovenlaag zal ervoor zorgen dat vloeistof vanuit de onderlaag door het grensvlak omhoog getransporteerd wordt, terwijl de turbulentie in de onderlaag transport in tegenovergestelde richting zal veroorzaken. Omdat het meesleuren van vloeistof door het grensvlak een betrekkelijk zeldzame gebeurtenis is, mogen deze twee processen vaak als onafhankelijk van elkaar beschouwd worden (10, p. 292). Vergelijking 7.16 of 7.15 geldt dan weer voor w_2 ; voor de transportsnelheid w_1 van bovenlaag naar onderlaag geldt een dergelijke uitdrukking. In de loop van de tijd zal de dichtheid van de bovenlaag toenemen, en die van de onderlaag afnemen, zie fig. 7.6. Het grensvlak kan zich zowel omhoog als omlaag bewegen, of op zijn plaats blijven. Experimenten over dit type stroming worden beschreven in (8).

In de hier beschouwde gevallen zijn de stroming en de dichtheidsverdeling tijdsafhankelijk. Aanzuiging kan ook optreden in stationaire stromingen. Veranderingen in dichtheid treden dan op in stromingsrichting. Zie hiervoor de voorbeelden bij fig. 7.7 en 7.11.

Opmerking:

Ondanks het feit dat er transport door plaats vindt, is het nog wel zinvol om van een grensvlak te spreken. Het is ook nu het vlak waar de (absolute waarde van de) dichtheidsgradiënt het grootst is.

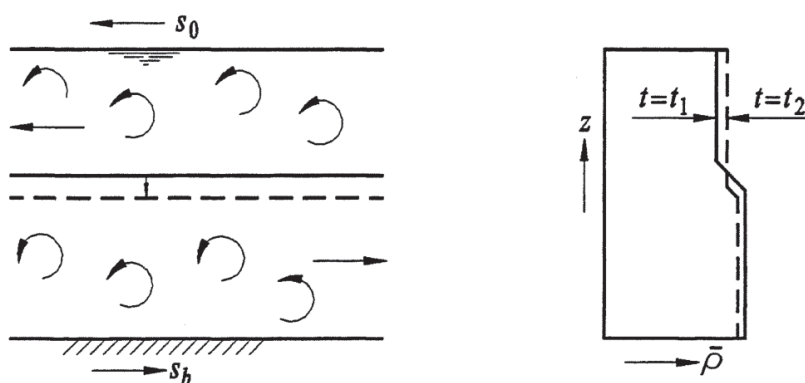


Fig. 7.6 - *Menging in een tweelagensysteem met turbulente onder- en bovenlaag. Deze situatie doet zich 's zomers voor in de Centrale Noordzee. De (thermische) gelaagdheid ontstaat door zoninstraling. Getijstroming en wind veroorzaken schuifspanningen aan bodem resp. vrij oppervlak.*

Turbulentie opgewekt aan het grensvlak

Aan dit onderwerp is uitvoerig aandacht besteed in par. 3 en 4 van hoofdstuk 6. We beschouwen hier menging in stationaire stroming. Om de gedachten te bepalen nemen we het geval van de uitstroming van zoet water over zout water, zie fig. 7.7. Het zoete water en de zoute laag zijn beide niet-turbulent.

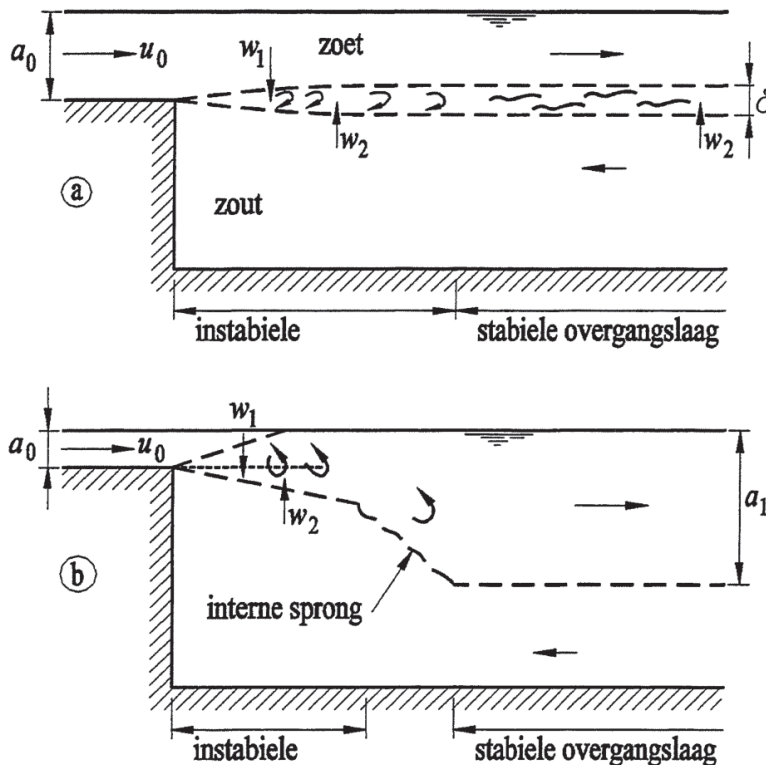


Fig. 7.7 - *Turbulentie ontstaan door het uitstromen van een lichtere laag over een zwaardere, a. subkritische uitstroming, b. sterk superkritische uitstroming.*

We beschouwen eerst het geval dat de uitstroomsnelheid zo laag is, dat het zich vormende turbulente gebied (de overgangslaag) niet in aanraking komt met het vrije oppervlak (fig. 7.7a). Dit is het geval als $\frac{1}{2}\delta < a_0$. Gebruiken we de metingen van Thorpe (zie par. 3 van hoofdstuk 6) voor de schatting van δ , dan vinden we als voorwaarde voor dit geval $u_0^2/\epsilon g a_0 < \text{ca. } 7$. De stroming zou dus nog superkritisch kunnen zijn. We beschouwen echter eerst het geval van subkritische uitstroming ($u_0^2/\epsilon g a_0 < 1$). Het grensvlak zal aanvankelijk (nabij het uitstroompunt) instabiel zijn. Door breken van interne golven en daardoor ontstane turbulentie zal zich geleidelijk (in stromingsrichting) een stabiele overgangslaag vormen. Bij afwezigheid van andere versturende invloeden zullen turbulentie en menging daarna geleidelijk verdwijnen. De stromende bovenlaag ondervindt echter weerstand van de oevers en kan daardoor toch wat turbulent blijven. In dat geval zal er stroomafwaarts nog enige menging optreden. Experimenteel vindt men wel een relatie

van de volgende vorm:

$$\frac{w_2}{|\Delta u|} \approx \beta_1 \frac{\Delta u^2}{\varepsilon g a_1} \quad (7.17)$$

waarin Δu het snelheidsverschil tussen de lagen is en w_2 de aanzuigsnelheid. De waarden van de coëfficiënt β_1 variëren sterk, b.v. van $5 \cdot 10^{-4}$ tot $3 \cdot 10^{-3}$ (4, e.a.).

Vervolgens beschouwen we het geval van sterk superkritische uitstroming (fig. 7.7b), zie ook voorbeeld 3 van hoofdstuk 4. De overgangslaag wordt nu zo dik dat de gehele bovenlaag er onderdeel van gaat uitmaken. De stroming heeft dan het karakter van een straal (5, 6, 10, 12, 13). Het experimentele verband tussen aanzuigsnelheid en intern Froudegetal is nu ongeveer als aangegeven in fig. 7.8. De overgang naar een op den duur stabiele situatie met subkritische stroming vindt, als het kanaal lang genoeg is, plaats via een interne sprong. Stroomafwaarts wordt de situatie dan als die van de stabiele stroming in fig. 7.7a.

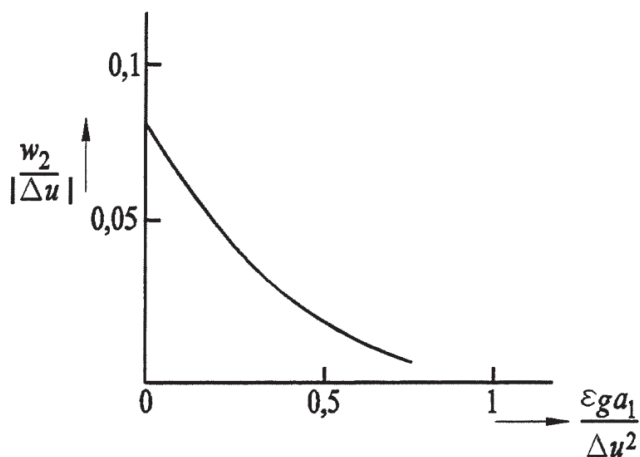


Fig. 7.8 - Aanzuigsnelheid in superkritische oppervlaktestroming.

Opmerkingen:

- Hierboven zijn gevallen beschouwd waarbij de turbulentie of bij de begrenzingen of bij de overgangslaag wordt opgewekt. Beide mechanismen kunnen echter ook gelijktijdig werkzaam zijn. Als b.v. de lozing van fig. 7.7 aan de bodem plaats vindt, wordt turbulentie zowel door bodemweerstand als door snelheidsverschillen aan het grensvlak opgewekt. Een dergelijke situatie is beschreven in (14, 28, 31).
- De hier gegeven behandeling van turbulentie in een gelaagde vloeistof steunt in hoge mate op empirische resultaten, en de verschillende hypothesen hebben een beperkte geldigheid. In meer geavanceerde turbulentiemodellen wordt uitgegaan van de basisvergelijkingen, waarbij toetsing en ijking plaats vindt met behulp van experimentele resultaten. Op deze wijze is een meer

algemeen geldige turbulentiemodellering mogelijk (6, 7, 15, 16, 28).

1.3 Het behoud van volume bij menging

Als twee verschillende vloeistoffen gemengd worden, zal in het algemeen het volume V_3 na menging niet gelijk zijn aan de som van de twee volumes (V_1 en V_2) voor menging. Alleen onder bepaalde omstandigheden blijft het volume bij benadering behouden. We zullen de voorwaarde hiervoor nagaan, omdat bij het opstellen van vergelijkingen (par. 2) vereenvoudigingen mogelijk zijn als van het behoud van volume uitgegaan mag worden.

We beschouwen het geval dat we een hoeveelheid zout water (volume V_1 , saliniteit S_1 , dichtheid ρ_1) mengen met een hoeveelheid water met een ander zoutgehalte (volume V_2 , saliniteit S_2 , dichtheid ρ_2). Voor andere toestandsgrootheden, zoals de temperatuur, verloopt de afleiding analoog. Het behoud van massa, toegepast op de vloeistof en het zout, levert

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho_3 V_3 \quad (7.18)$$

$$\rho_1 S_1 V_1 + \rho_2 S_2 V_2 = \rho_3 S_3 V_3 \quad (7.19)$$

waarin de index 3 duidt op de toestand na menging. Verder hebben we de toestandsvergelijking

$$\rho = \rho(S) \quad (7.20)$$

We beschikken dus over drie vergelijkingen waaruit we V_3 , S_3 , ρ_3 en kunnen oplossen. Ondanks de elementaire vorm van deze vergelijkingen is het oplossen ervan niet eenvoudig.

Om na te gaan in welke gevallen het behoud van volume geldt, dus dat

$$V_1 + V_2 = V_3 \quad (7.21)$$

beschouwen we daarom een wat ander probleem: we onderzoeken, uitgaande van (7.18) en (7.19), voor welke toestandsvergelijking het behoud van volume (7.21) exact geldt. Deel daartoe beide leden van (7.18), (7.19) en (7.21) door V_3 , en elimineer V_1/V_3 en V_2/V_3 . Dan ontstaat de relatie

$$(\rho_1 - \rho_2)\rho_3 S_3 + (\rho_2 - \rho_3)\rho_1 S_1 + (\rho_3 - \rho_1)\rho_2 S_2 = 0 \quad (7.22)$$

De toestandsvergelijking 7.20 kunnen we ook schrijven in de vorm

$$\rho S = f(\rho) \quad (7.23)$$

Ontwikkeling van (7.23) in een Taylorreeks ten opzichte van $\rho = \rho_0$ geeft een uitdrukking van de vorm

$$\rho S = \rho_0 S_0 + b_1(\rho - \rho_0) + b_2(\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

waarin b_1, b_2, \dots constanten zijn. Substitutie in (7.22) geeft dan als resultaat dat de coëfficiënten b_k gelijk aan nul moeten zijn voor $k = 2, 3, \dots$. Het behoud van volume geldt dus exact als het verband tussen ρ en ρS lineair is, dus als

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{b_1}(\rho S - \rho_0 S_0) \quad \text{of} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{b_1 - S_0}{b_1 - S} \quad (7.24)$$

Nu zal in het algemeen niet aan (7.24) voldaan worden - zie b.v. de toestandsvergelijking 1.5 - zodat ook het behoud van volume dan niet exact zal gelden.

In het geval van kleine relatieve dichtheidsverschillen echter kan een willekeurige toestandsvergelijking lokaal gelineariseerd worden. Vergelijkingen 7.20 en 7.24 geven dan respectievelijk

$$\rho = \rho_0 + \frac{d\rho(S_0)}{dS}(S - S_0) + \text{hogere orde termen}$$

en

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{b_1}(S - S_0) + \text{hogere orde termen}$$

Bij verwaarlozing van de hogere orde termen zijn deze twee uitdrukkingen wel van de zelfde vorm.

Samenvattend: saliniteit (of temperatuur) en dichtheid na menging mogen bepaald worden uit het behoud van volume en het behoud van massa van de vloeistof, als de relatieve dichtheidsverschillen voldoende klein zijn om het verband tussen dichtheid en saliniteit (temperatuur) lineair te mogen veronderstellen. Aan deze eis wordt voor wat betreft de watertemperatuur zeker niet voldaan bij temperaturen nabij 4°C (het anomale temperatuurgedrag van zoet water, zie (1.5) en (1.6)). Bij hogere temperaturen wordt er bij benadering aan voldaan als de temperatuurverschillen klein zijn. Het verband tussen dichtheid en saliniteit is over een relatief groot interval nagenoeg lineair, zodat in dit geval aan deze eis wel voldaan zal zijn.

2 Wiskundige modellen

De bespreking van turbulentie en menging in par. 1.2 brengt ons op twee modellen voor gelaagde stroming waarbij rekening gehouden wordt met menging:

- een (twee-)lagenmodel met uitwisseling van massa en impuls (fig. 7.5, 7.6 en de gedeelten met subkritische stroming in fig. 7.7); de overgangslaag wordt geschematiseerd tot een grensvlak, en
- een model met continu verlopende dichtheids- en snelheidsprofielen (fig. 7.1 en het gedeelte met superkritische stroming in fig. 7.7b).

We zullen in par. 2.1 en 2.2 de behoudswetten voor deze modellen opstellen, en enkele eigenschappen ervan nagaan. Daarna (par. 2.3) komt een derde model - het z.g. dispersiemodel - ter sprake, dat zinvol is als de menging in verticale richting zo sterk is dat de dichtheidsverschillen tussen bodem en oppervlak klein zijn ten opzichte van de dichtheidsverschillen in horizontale

richting, b.v. het dichtheidsverschil tussen een zee en een rivier. In par. 2.4 maken we enkele opmerkingen over gekoppelde modellen, zoals hierboven beschreven voor het geval van fig. 7.7b.

De overstreping van variabelen die voor turbulentie gemiddeld zijn, wordt hierna weggelaten (vergelijking 7.41 is een uitzondering).

2.1 Tweelagensysteem met menging tussen de lagen

Dit model kan van toepassing zijn als er een relatief dunne overgangslaag aanwezig is die tot een discreet grensvlak geschematiseerd mag worden. Transporten van vloeistof door het grensvlak vinden plaats van een niet-turbulente naar een turbulente laag, of van de ene turbulente laag naar de andere. Transport van een turbulente naar een niet-turbulente laag treedt, zoals bleek in par. 1.2, niet op. We nemen aan dat de door het grensvlak getransporteerde vloeistof momentaan mengt over de gehele hoogte van de binnengetroden laag. Als gevolg hiervan zal de dichtheid in een laag niet van de verticale coördinaat z afhangen. De dichtheid zal door de menging wel van de horizontale coördinaat en de tijd afhangen, dus $\rho_n = \rho_n(x,t)$. Evenals in hoofdstuk 2 veronderstellen we dat we de stroomsnelheden mogen benaderen met de over de hoogte van de laag gemiddelde snelheden, dus $u_n = u_n(x,t)$.

Bij het opstellen van de behoudsvergelijkingen voor massa, impuls, en eventueel warmte en volume moeten we rekening houden met de transporten van de betrokken grootheden door het grensvlak. Door turbulentie in de bovenlaag wordt vanuit laag 2 naar laag 1 getransporteerd een volume w_2 (per eenheid van oppervlakte van het grensvlak en per tijdseenheid), door turbulentie in de onderlaag een volume w_1 in tegengestelde richting, zie fig. 7.9. De grootheden w_1 en w_2 hebben de dimensie van een snelheid en kunnen in bepaalde gevallen benaderd worden met uitdrukkingen als (7.15), (7.16) of (7.17). Omdat de van laag 2 naar laag 1 getransporteerde vloeistof de dichtheid, saliniteit, temperatuur e.d. van de onderlaag bezit, bedraagt het massatransport van laag 2 naar laag 1: $\rho_2 w_2$ per eenheid van oppervlak, het massatransport van zout alleen: $S_2 \rho_2 w_2$, van warmte $c_p T_2 \rho_2 w_2$, enz. De overeenkomstige transporten van laag 1 naar laag 2 zijn: $\rho_1 w_1$, $S_1 \rho_1 w_1$ en $c_p T_1 \rho_1 w_1$. De netto transporten in opwaartse richting zijn: $\rho_2 w_2 - \rho_1 w_1$, $S_2 \rho_2 w_2 - S_1 \rho_1 w_1$ en $c_p T_2 \rho_2 w_2 - c_p T_1 \rho_1 w_1$.

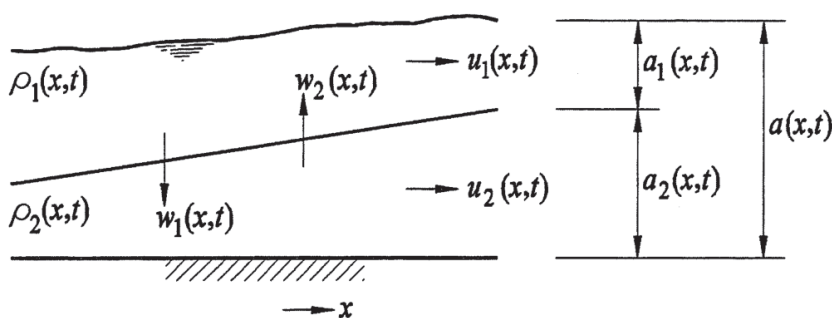


Fig. 7.9 - Tweelagensysteem met menging tussen de lagen.

We kunnen de netto transporten nog wat anders schrijven. Zo vinden we voor b.v. het netto massatransport

$$\rho_2 w_2 - \rho_1 w_1 = \rho(w_2 - w_1) + \epsilon \rho w \quad (7.25)$$

met $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$, $w = (w_1 + w_2)/2$ en $\epsilon = \epsilon(x,t) = (\rho_2 - \rho_1)/\rho$. De eerste term in het rechterlid vertegenwoordigt het

massatransport dat gekoppeld is aan het netto volumetransport $w_2 - w_1$. De tweede term is een uitwisselingsterm, die het deel van het massatransport weergeeft dat niet gekoppeld is aan een netto volumetransport.

We gaan nu over tot het opstellen van de behoudswetten voor de lagen 1 en 2. De afleidingen verlopen analoog aan die in hoofdstuk 2. De transporten door het grensvlak leiden tot extra termen. Het behoud van massa van de vloeistof inclusief eventuele opgeloste stof levert

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 a_1 + \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 a_1 u_1 + \rho_1 w_1 - \rho_2 w_2 = 0 \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_2 a_2 + \frac{\partial}{\partial x} \rho_2 a_2 u_2 - \rho_1 w_1 + \rho_2 w_2 = 0 \quad (7.27)$$

Als de dichtheidsverschillen worden veroorzaakt door verschillen in saliniteit, levert het behoud van massa toegepast op het zout de z.g. saliniteitsvergelijkingen,

$$\frac{\partial}{\partial t} S_1 \rho_1 a_1 + \frac{\partial}{\partial x} S_1 \rho_1 a_1 u_1 + S_1 \rho_1 w_1 - S_2 \rho_2 w_2 = 0 \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_2 \rho_2 a_2 + \frac{\partial}{\partial x} S_2 \rho_2 a_2 u_2 - S_1 \rho_1 w_1 + S_2 \rho_2 w_2 = 0 \quad (7.29)$$

Als temperatuurverschillen een rol spelen, kunnen warmtebalansvergelijkingen opgesteld worden. Deze zijn van dezelfde gedaante als (7.28) en (7.29), waarbij echter $S_n \rho_n$ vervangen moet worden door $c_p T_n \rho_n$.

Zoals blijkt uit par. 1.3, kunnen onder bepaalde voorwaarden de saliniteits- en warmtebalansvergelijkingen vervangen worden door volumebalansvergelijkingen (continuïteitsvergelijkingen). Deze luiden

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_1 u_1 + w_1 - w_2 \approx 0 \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_2 u_2 - w_1 + w_2 \approx 0 \quad (7.31)$$

Uit de massabalansvergelijkingen voor de vloeistof (7.26) en (7.27), en de saliniteitsvergelijkingen (7.28) en (7.29) valt af te leiden (vermenigvuldig (7.26) met S_1 , en trek het resultaat af van (7.28), enz):

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{\rho_2}{\rho_1} (S_2 - S_1) \frac{w_2}{a_1} \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial S_2}{\partial x} = - \frac{\rho_1}{\rho_2} (S_2 - S_1) \frac{w_1}{a_2} \quad (7.33)$$

In de linkerleden van deze vergelijkingen staan "meebewegende afgeleiden". Vergelijking 7.32 brengt tot uitdrukking

dat, als we met de vloeistof in de bovenlaag meebewegen, veranderingen in S_1 alleen ontstaan door het transport vanuit de onderlaag. Dit is ook begrijpelijk, want het verlies van vloeistof uit de bovenlaag (het transport $S_1 \rho_1 w_1$) beïnvloedt S_1 dan niet. Vergelijking 7.32 geeft iets dergelijks aan voor de onderlaag. Als we van het behoud van volume mogen uitgaan, vinden we voor ρ_1 en ρ_2 vergelijkingen van dezelfde vorm:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \approx (\rho_2 - \rho_1) \frac{w_2}{a_1} \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \approx -(\rho_2 - \rho_1) \frac{w_1}{a_2} \quad (7.35)$$

Het behoud van horizontale impuls levert voor laag 1 en laag 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 a_1 u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 a_1 u_1^2 + \rho_1 g a_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_b + a_2 + a_1) + \\ + \frac{1}{2} g a_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + s_0 - s_1 + \rho_1 u_1 w_1 - \rho_2 u_2 w_2 = 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_2 a_2 u_2 + \frac{\partial}{\partial x} \rho_2 a_2 u_2^2 + \rho_2 g a_2 \frac{\partial a_1}{\partial x} + \rho_2 g a_2 \frac{\partial}{\partial x} (h_b + a_2) + \\ + g a_1 a_2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{2} g a_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + s_1 - s_2 - \rho_1 u_1 w_1 + \rho_2 u_2 w_2 = 0 \end{aligned} \quad (7.37)$$

Vergelijkingen (2.2), die de quasi-hydrostatische drukverdeling weergeven, gelden ook in het geval dat menging optreedt, ρ_n is echter geen constante meer. Hierdoor ontstaan termen met afgeleiden van ρ_n naar x . Het transport van laag 2 naar laag 1 van de horizontale impulscomponent samenhangend met menging bedraagt $\rho_2 u_2 w_2$, dat in tegengestelde richting $\rho_1 u_1 w_1$. Deze bijdragen hebben het effect van een schuifspanning.

Bewegingsvergelijkingen kunnen worden opgesteld door (7.26) met u_1 en (7.27) met u_2 te vermenigvuldigen, en de resultaten van (7.36) resp. (7.37) af te trekken.

Voor de zes onbekenden ρ_1 , a_1 , u_1 , ρ_2 , a_2 en u_2 hebben we nu een stelsel van zes vergelijkingen, n.l.

2 massaverelijkingen,

2 saliniteitsvergelijkingen (als $\rho = \rho(S)$), of anders b.v.,

2 warmtebalansvergelijkingen als $\rho = \rho(T)$, en

2 impulsvergelijkingen, of daarvan afgeleide bewegingsvergelijkingen.

Op dit stelsel kunnen we weer de methode der karakteristieken toepassen, zoals beschreven in par. 2. van hoofdstuk 3. Er zijn nu zes voortplantingssnelheden, gegeven door

$$\left[\{(c - u_1)^2 - g a_1\} \{(c - u_2)^2 - g a_2\} - (1 - \epsilon) g^2 a_1 a_2 \right] (c - u_1) (c - u_2) = 0$$

Het gelijk aan nul stellen van de vorm tussen vierkante haken levert weer (3.2). We vinden dus dezelfde uitdrukkingen voor interne en externe golfsnelheden als in het geval zonder menging. Dit betekent dat de beschouwingen in de

hoofdstukken 2 t/m 5 zinvol zijn, al is daar het aspect van de menging buiten beschouwing gelaten. We vinden nu echter twee extra wortels, n.l. $c = u_1$ en $c = u_2$, dus verstoringen die met de vloeistof in laag 1 en die in laag 2 meebewegen. De compatibiliteitsrelaties die langs deze richtingen gelden, zijn

$$\left(\frac{dS_1}{dt} \right)_{c = u_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} (S_2 - S_1) \frac{w_2}{a_1} \quad (7.38)$$

$$\left(\frac{dS_2}{dt} \right)_{c = u_2} = - \frac{\rho_1}{\rho_2} (S_2 - S_1) \frac{w_1}{a_2} \quad (7.39)$$

dus de vergelijkingen 7.32 en 7.33, zie ook het commentaar bij deze vergelijkingen.

Het integreren langs karakteristieken (of numerieke integratie) vereist rand- en beginvoorwaarden. Behalve de in de hoofdstukken 3 en 4 genoemde, moeten nu ook rand- en beginvoorwaarden voor S_1 en S_2 gegeven worden om integratie, o.a. van (7.38) en (7.39), mogelijk te maken. Stel we willen in een punt gelegen in het gebied tussen de randen $x = x_a$ en $x = x_b$ de saliniteit berekenen (fig. 7.10, vergelijk ook par. 4 van hoofdstuk 4). Voor het bepalen van S_1 en S_2 in het punt A in fig. 7.10 moeten S_1 en S_2 op $t = 0$ bekend zijn (beginvoorwaarden). Voor het punt B moet, als $u_1 < 0$, S_1 bekend zijn op $x = x_a$, zie (7.38). In fig. 7.10 is aangenomen dat $u_2 < 0$. Dan moet S_2 gegeven worden op de rand $x = x_b$ om integratie van (7.39) mogelijk te maken. Als $u_1 < 0$ dan moet S_1 op $x = x_b$ gegeven worden, enz. We moeten dus ter plaatse van "instroomranden" de saliniteit, temperatuur e.d. opleggen. Dit kan soms moeilijkheden opleveren, b.v. het opleggen van de saliniteit in de monding van een rivier, waarbij in een aangrenzend deel van de zee al menging tussen rivier- en zeewater heeft plaatsgevonden (17).

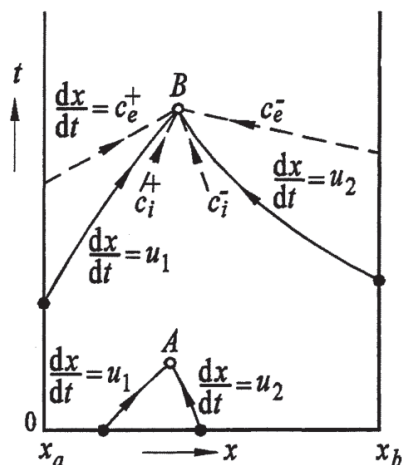


Fig. 7.10 - Het opleggen van randvoorwaarden.

Voorbeeld - stromende onderlaag in diep kanaal

We beschouwen de stationaire subkritische stroming in een tweelagensysteem, waarvan de dikte van de onderlaag klein is t.o.v. de diepte ($a_2 \ll a$). De bodem is horizontaal; de bovenlaag is

nagenoeg in rust ($u_1 \approx 0$) en heeft een constante dichtheid ρ_1 . De dichtheidsverschillen zijn relatief klein. De stroming in de onderlaag is turbulent als gevolg van de bodemweerstand; de gemiddelde snelheid u_2 is positief (fig. 7.11). We schrijven daarom op de linker rand de dichtheid ($\rho_{2a} = \rho_2(x_a)$) voor. We leggen daar ook een debiet $q_{2a} = a_{2a} u_{2a}$ op. Ter plaatse van de uitmonding in het bekken (fig. 7.11), dus op de rand $x = x_b$, veronderstellen we kritische stroming. De transportsnelheid w_2 zal gelijk aan nul zijn, vanwege het feit dat de bovenlaag niet turbulent is. We gaan uit van het behoud van volume (par. 1.3).

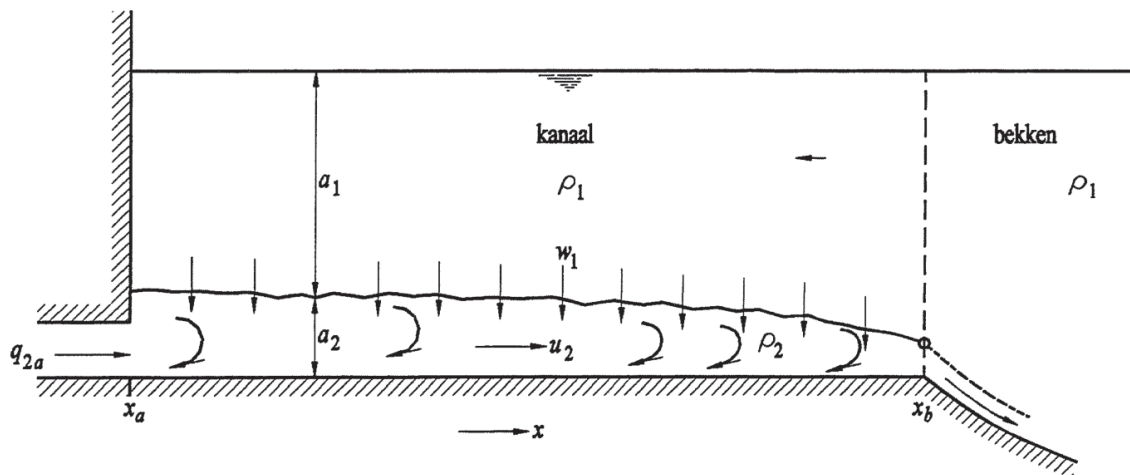


Fig. 7.11 - *Stromende onderlaag in diep kanaal.*

Vergelijking 7.31 wordt dan

$$\frac{d}{dx} a_2 u_2 = w_1$$

Het behoud van massa in de onderlaag (7.27) geeft

$$\frac{d}{dx} \rho_2 a_2 u_2 = \rho_1 w_1$$

In de impulsbalans voor de bovenlaag (7.36) is $u_1 = 0$, $h_b = 0$, $s_0 = 0$ en $d\rho_1/dx = 0$. Verder verwaarlozen we de schuifspanning s_1 . We vinden zo dat het vrije oppervlak horizontaal is,

$$\frac{d}{dx} (a_1 + a_2) = 0$$

De impulsbalans voor de onderlaag (7.37) wordt, weer met verwaarlozing van s_1 ,

$$\frac{d}{dx} \rho_2 a_2 u_2^2 + \rho_1 g a_2 \frac{da_1}{dx} + \rho_2 g a_2 \frac{da_2}{dx} + \frac{1}{2} g a_2^2 \frac{d\rho_2}{dx} - s_2 = 0$$

We nemen aan dat we w_1 en s_2 mogen benaderen met, zie (7.17) en (2.9),

$$w_1 = \beta_2 \frac{u_2^3}{\epsilon g a_2} \quad \text{en} \quad s_2 = -k_2 \rho_2 u_2^2$$

Ook het relatieve dichtheidsverschil $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ is nu afhankelijk van de plaats: ρ_2 en dus ϵ nemen af in stromingsrichting.

Uit bovenstaande vergelijkingen zijn de volgende resultaten af te leiden:

$$\frac{da_2}{dx} = -F \frac{k_2 + \beta_2 (2F - \frac{1}{2})}{1 - F}$$

$$F \equiv \frac{u_2^2}{\epsilon g a_2} = \frac{u_2^3}{\epsilon_a g q_{2a}} < 1$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{u_2}{a_2} F \frac{k_2 + \beta_2 (F + \frac{1}{2})}{1 - F}$$

$$\epsilon q_2 = \epsilon_a q_{2a}$$

waarin $\epsilon_a = \epsilon(x_a)$, en F het kwadraat van een intern Froudegetal is. Uit de vergelijking voor da_2/dx blijkt dat de laagelling niet alleen beïnvloed wordt door wrijving (de coëfficiënt k_2), maar ook door menging (de coëfficiënt β_2). Het product van ϵ en q_2 blijkt onafhankelijk van de plaats te zijn.

De turbulentie dissipeert een deel van de hydrodynamische energie van de hoofdstroming. Deze energie moet dus afnemen in stromingsrichting, of anders gezegd, de productie van energie van de gemiddelde stroming moet negatief zijn. Er zijn drie brontermen in de balansvergelijking voor mechanische energie van de gemiddelde stroming:

- een afname door bodemschuifspanning ($s_2 u_2 = -k_2 \rho_2 u_2^3$),

- een toename van de potentiële energie door menging ($+1/2(\rho_2 - \rho_1) g a_2 w_1$),
- en een afname doordat het aangezogen water uit de bovenlaag oorspronkelijk een snelheid nul heeft en versneld moet worden, waardoor de kinetische energie er van toeneemt ($-1/2\rho_1 u_2^2 w_1$).

We vinden zo de voorwaarde

$$-k_2 u_2^3 + \frac{1}{2} \epsilon g a_2 w_1 - \frac{1}{2} u_2^2 w_1 < 0$$

of

$$k_2 + \beta_2 \left(\frac{1}{2} F - \frac{1}{2} \right) > 0$$

Uit de uitdrukkingen voor da_2/dx en du_2/dx volgt nu dus dat $da_2/dx < 0$ en $du_2/dx > 0$. Ook blijkt uit deze ongelijkheid dat er - bij kleine waarden van F - een bovengrens is aan de aanzuigsnelheid:

$$\beta_2 < 2k_2$$

Op de rand $x = x_b$ is de stroming kritisch. Vergelijking 4.9 geeft dan $F(x_b) = 1$, dus

$$u_{2b} = (\epsilon_a g q_{2a})^{1/3}$$

De stroomsnelheid u_{2b} op $x = x_b$ is dus onafhankelijk van wrijving en menging. Dit geldt niet voor a_{2b} en ϵ_b .

Verdere uitwerking van dit voorbeeld is mogelijk m.b.v. numerieke integratie van de vergelijkingen voor da_2/dx en du_2/dx .

2.2 Continue gelaagdheid

We beschouwen nu het geval dat de turbulentie over de gehele verticaal voorkomt en dat grensvlakken of uitgesproken overgangslagen afwezig zijn. De verschillende grootheden, zoals snelheid, dichtheid, saliniteit en temperatuur, zullen dan continu over de verticaal verlopen zie fig. 7.1. Er geldt dus

$$u = u(x, z, t), \quad w = w(x, z, t) \quad \rho = \rho(x, z, t), \quad \text{enz.}$$

Bij praktisch voorkomende problemen zal meestal ook de variatie van deze grootheden met de derde ruimtelijke coördinaat een rol spelen, zie b.v. (24). Voor de eenvoud laten we deze hier

buiten beschouwing.

De verschillende balansvergelijkingen stellen we nu op voor een gebiedje met zijden x en z in het (x,z) -vlak (fig. 7.12). Deze vergelijkingen bestaan uit drie bijdragen: de verandering in de tijd van de beschouwde grootheid binnen het balansgebied, transporten door de zijvlakken door de stroomsnelheden die voor de turbulentie gemiddeld zijn, en turbulente transporten. Bij de impulsbalans moeten we ook de drukken en schuifspanningen op de zijvlakken in rekening brengen.

De massabalans luidt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u + m_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w + m_z) = 0$$

Hierin zijn m_x en m_z de turbulente massatransporten in x - en z -richting. De turbulente transporten in x -richting zijn vaak verwaarloosbaar ten opzichte van het convectieve (of advection) transport in die richting door de gemiddelde snelheid. Met deze verwaarlozing wordt de massabalans

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w + m_z) \approx 0 \quad (7.40)$$

Worden de dichtheidsverschillen veroorzaakt door verschillen in saliniteit, dan levert het behoud van massa toegepast op het zout de saliniteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho S} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho S u} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho S w} + C_z) \approx 0 \quad (7.41)$$

Hierin is $\overline{\rho S}$ de massa zout (in kg) per m^3 zeewater, gemiddeld voor de turbulentie. Het turbulente zouttransport C_z in z -richting is gekoppeld aan het massatransport m_z , zie ook (7.13). Een vergelijking als (7.41) is ook op te stellen voor het warmtetransport.

Als aan de in par. 1.3. genoemde voorwaarde voor het behoud van volume voldaan wordt, geldt bij benadering de continuïteitsvergelijking voor een onsamendrukbaar medium,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \approx 0 \quad (7.42)$$

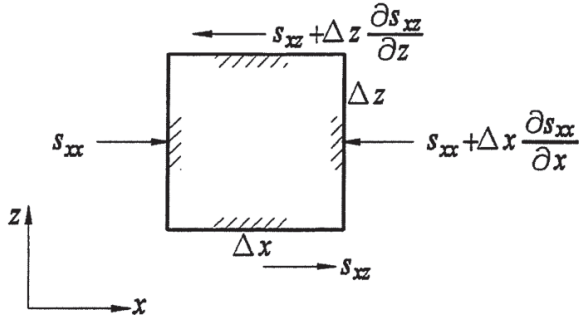


Fig. 7.21 - Balansgebiedje bij continue gelaagdheid.

Bewegingsvergelijkingen kunnen afgeleid worden met behulp van de impulsbalans en de massabalans, zie ook par. 2.1. We vinden als resultaat voor de x -richting

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial s_{xz}}{\partial z} - \frac{m_z}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7.43)$$

Hierin is s_{xz} de turbulente schuifspanning in x -richting in een horizontaal vlakje. s_{xz} kiezen we positief als de vloeistof onder dit vlakje een schuifkracht in positieve x -richting uitoefent op de vloeistof boven het vlakje (fig. 7.12).

In (7.43) is de bijdrage van de turbulente normaalspanning s_{xx} (een impulstransport in x -richting) verwaarloosd ten opzichte van de drukgradient $\partial p/\partial x$. Ook de laatste term is meestal verwaarloosbaar. De bewegingsvergelijking in z -richting heeft dezelfde vorm als (7.43), maar moet worden uitgebreid met een zwaartekrachtterm. Voor de hier beschouwde klasse van problemen - zie fig. 7.1 - zijn de verticale versnellingen meestal te verwaarlozen. Verwaarlozen we ook de turbulente impulstransporten, dan vinden we weer de quasi-hydrostatische drukverdeling, gegeven door

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \approx -g \quad (7.44)$$

De dichtheid ρ hangt nog van z af, dus het drukverloop in de verticaal zal niet-lineair zijn.

De turbulente transporten kunnen we modelleren met de hypothesen (7.3) t/m (7.11) of met een meer geavanceerd turbulentiemodel.

Voor het oplossen van de vergelijkingen zijn randvoorwaarden vereist. Bij de randen die het stromingsveld in horizontale zin begrenzen ($x = x_a$ en $x = x_b$) zal het snelheidsprofiel opgelegd

moeten worden. Als de rand (eventueel gedeeltelijk) een instroomrand is, moet ook de dichtheidsverdeling gegeven worden. Er zijn nu echter ook randvoorwaarden aan bodem en vrij oppervlak vereist. Zo geldt aan de bodem voor de snelheden de kleefconditie

$$u = w = 0, \quad z = h_b \quad (7.45)$$

Ook is er geen transport van massa door de bodem, dus (voor een horizontale bodem)

$$m_z = 0, \quad z = h_b \quad (7.46)$$

Aan het oppervlak gelden dynamische en kinematische randvoorwaarden, zie ook par. 2 van hoofdstuk 6,

$$\begin{aligned} p &= 0, & z &= h_0 = h_b + a \\ s_{xz} &= s_0 + s_{xx} \frac{\partial h_0}{\partial x} \approx s_0, & z &= h_0 \\ w &= \frac{\partial h_0}{\partial t} + u \frac{\partial h_0}{\partial x} \approx \frac{\partial h_0}{\partial t}, & z &= h_0 \\ m_z &= 0, & z &= h_0 \end{aligned} \quad (7.47)$$

De benaderingen in (7.47) gelden voor kleine hellingen $\partial h_0 / \partial x$ van het vrije oppervlak. Resultaten van numerieke berekeningen voor estuaria met modellen van het hier geschetste type en vergelijking ervan met metingen worden vermeld in (18, 32).

Voorbeeld - estuarium met sterke verticale menging

Bij ongelaagde stroming varieert de snelheid u op enige afstand van de bodem niet zo sterk met de diepte. Bij gelaagde stroming is dit vaak wel het geval en kan u zelfs van teken wisselen. De snelheid u kan echter ook sterk met de diepte variëren als er, door menging over de verticaal ten gevolge van een krachtige getijbeweging, voornamelijk nog slechts dichtheidsverschillen in horizontale richting zijn (ρ bij benadering onafhankelijk van z dus $\rho \approx \rho(x, t)$). Dit is als volgt aan te tonen: integratie van (7.44) naar z levert met (7.47) de drukverdeling in de verticaal. Vervolgens differentiëren naar x geeft

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \rho(x, t)g \frac{\partial h_0}{\partial x} + g(h_0 - z) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}$$

Verwaarlozen we de versnellingstermen in de bewegingsvergelijking (7.43), dan vinden we met (7.47) voor het geval dat $s_0 = 0$ als schuifspanningsverdeling

$$s_{xz} \approx \rho g (h_0 - z) \frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{1}{2} g (h_0 - z)^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

De snelheidsverdeling kunnen we dan bepalen met b.v. (7.4). Nemen we voor K_s het voor ongelaaide stroming niet ongebruikelijke parabolische verloop volgens

$$K_s = \kappa z \left(1 - \frac{z}{h_0}\right) u_*$$

waarin u_* bodemschuifspanningssnelheid en κ de coëfficiënt van Von Karman is, dan levert (7.4) voor een horizontale bodem en positieve bodemschuifspanning.

$$s_b (= \rho u_*^2) = \rho g h_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{1}{2} g h_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$u = - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + \frac{1}{2} \frac{g h_0}{\kappa u_*} (z - z_0) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (7.48)$$

Hierin is z_0 een ruwheidsmaat. Naast de bekende logaritmische verdeling vinden we ook een bijdrage die lineair met z verloopt. Als de positieve x -as naar de zee toe gericht is, is $\partial \rho / \partial x$ positief. Fig. 7.13 geeft een voorbeeld van de snelheidsverdeling volgens (7.48), waarbij nabij de bodem zoutindringing plaatsvindt. Daarboven is de stroming naar de zee toe gericht: er ontstaat een circulatiestroming in het verticale vlak: de gravitatiecirculatie (19). Een overzicht van de verschillende transportmechanismen in estuaria is te vinden in (34).

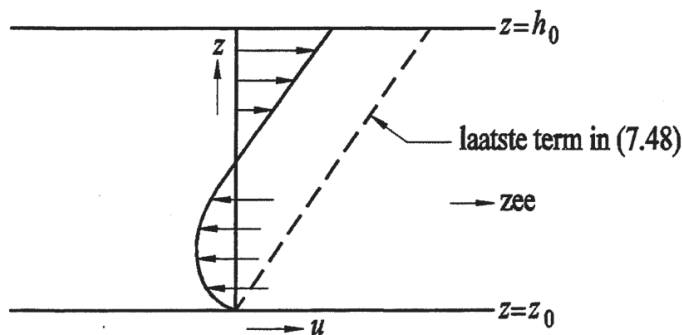


Fig. 7.13 - Gravitatiecirculatie ten gevolge van een longitudinale dichtheidsgradient.

2.3 Dispersie⁴

Zoals opgemerkt in bovenstaand voorbeeld, kan het getij zo sterk zijn dat de daardoor veroorzaakte turbulentie - de bodemweerstand zorgt voor de productie - tot menging over de gehele verticaal leidt. De dichtheidsverschillen tussen bodem en vrij oppervlak zijn dan klein ten opzichte van dichtheidsverschillen in horizontale richting, b.v. die tussen een zee en een rivier. Het wordt dan aantrekkelijk om met over de diepte gemiddelde vergelijkingen te gaan werken, omdat de dichtheid in dit geval nog maar weinig met de verticale coördinaat varieert. Zoals (7.48) en fig. 7.13 laten zien, is dit laatste echter zeker niet het geval voor wat betreft de horizontale snelheden.

De massabalans voor een balansgebied dat zich over de gehele diepte uitstrekt luidt (fig. 7.14, effecten in dwarsrichting zijn verwaarloosd)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_b}^{h_0} \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_b}^{h_0} \rho u dz = 0 \quad (7.49)$$

We voeren nu de over de diepte gemiddelde dichtheid en snelheid in volgens

$$\bar{\rho} = \frac{1}{a} \int_{h_b}^{h_0} \rho dz \quad \text{en} \quad \bar{u} = \frac{1}{a} \int_{h_b}^{h_0} u dz$$

De overstreping duidt nu op dieptemiddeling. (7.49) wordt hiermee

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} a + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \bar{u} a + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_b}^{h_0} (\rho - \bar{\rho})(u - \bar{u}) dz = 0 \quad (7.50)$$

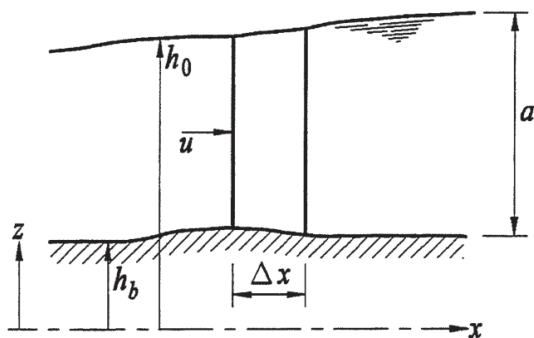


Fig. 7.14 - Balansgebied.

De tweede term in (7.50) geeft het massatransport aan dat betrekking heeft op de over de diepte gemiddelde grootheden. De derde term geeft een transport aan, dat ontstaat door de afwijkingen van deze gemiddelde grootheden. Dit transport wordt het dispersieve transport genoemd.

In de dispersieve transportterm komen ρ en u nog voor. Het werken met een over diepte gemiddelde vergelijking is slechts zinvol, als er alleen over de diepte gemiddelde grootheden in voorkomen. We zouden daarom $\rho - \bar{\rho}$ en $u - \bar{u}$

⁴Zie ook par.3

willen uitdrukken in $\bar{\rho}$, \bar{u} , $\partial\bar{\rho}/\partial x$, $\partial h_0/\partial x$, enz. Het snelheidsprofiel is gegeven door een uitdrukking zoals (7.48). Daaruit is af te leiden dat $u - \bar{u}$ een functie is van z , \bar{u} , h_0 , $\bar{\rho}$, $\partial h_0/\partial x$ en $\partial\bar{\rho}/\partial x$. Uitgaande van de massabalans (7.40) en van (7.6)⁵ is aannemelijk te maken dat hetzelfde moet gelden voor $\rho - \bar{\rho}$, als tijdsafhankelijke termen weer verwaarloosd mogen worden. Gebruikmakend van dimensieoverwegingen vinden we dan voor de dispersieterm een uitdrukking van de vorm

$$M_x = \frac{1}{a} \int_{h_b}^{h_0} (\rho - \bar{\rho})(u - \bar{u}) dz \approx \bar{\rho} \sqrt{ga} f \left(\frac{\bar{u}^2}{ga}, \frac{z_0}{a}, \frac{\partial h_0}{\partial x}, \frac{a}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)$$

Uit een meer gedetailleerde analyse blijkt dat de functie f benaderd kan worden met een Taylorontwikkeling naar $(a/\bar{\rho})\partial\bar{\rho}/\partial x$. De eerste term in deze ontwikkeling is gelijk aan nul, omdat er geen dispersief massatransport is als $\partial\bar{\rho}/\partial x$ gelijk aan nul is. De ontwikkeling geeft dan

$$M_x \approx - \left[D_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + E_x \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)^2 + F_x \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)^3 + \dots \right] \quad (7.51)$$

waarin de coëfficiënten D_x , E_x en F_x nog van de overige grootheden kunnen afhangen.

Als de invloed van de dichtheidsverschillen op de stroming relatief klein is, wat het geval is als (zie de uitdrukking voor s_b bij (7.48))

$$\frac{a}{\bar{\rho}} \left| \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial h_0}{\partial x} \right| \quad (7.52)$$

dan blijkt de reeks in (7.51) na de eerste term af te breken. Het dispersieve massatransport is dan evenredig met $\partial\bar{\rho}/\partial x$. Vergelijk dit resultaat met (7.6), waarin het turbulente transport ook evenredig gesteld is met de gradiënt in de beschouwde richting. Deze benadering voor het dispersieve transport wordt vaak toegepast, zie de overzichten in (20) en (34). De dispersiecoëfficiënt D_x wordt dan soms plaatsafhankelijk verondersteld (en onafhankelijk van de hierboven genoemde grootheden). Als niet aan (7.52) voldaan is, moeten in principe meer termen in (7.51) meegenomen worden, b.v. twee (21) of drie (22). De dispersiecoëfficiënten moeten meestal experimenteel bepaald worden, waardoor de voorspellende waarde van dit model beperkt is. De eenvoud ervan heeft echter toch tot een veelvuldig gebruik van het dispersiemodel geleid.

Opmerkingen:

- Vaak wordt behalve over de diepte ook over de breedte van een rivier of estuarium gemiddeld. Dan zijn effecten in dwarsrichting (de y -richting) vaak belangrijk, of zelfs overheersend, als gevolg van de vorm van het snelheidsprofiel in y -richting en onregelmatigheden in de bodemconfiguratie (23, 34, 35).
- In het tweelagenmodel behandeld in par. 2.1 zijn afwijkingen van de gemiddelde snelheid en dichtheid in een laag verwaarloosd. Deze afwijkingen kunnen eventueel in de vorm van dispersieve termen in rekening worden gebracht.

⁵ Toegepast op het transport van massa, dus $c = \rho$ en $C_z = m_z$.

2.4 Gekoppelde modellen

Het is in bepaalde gevallen mogelijk het probleem van de turbulente menging te vereenvoudigen door het stromingsveld in zones te verdelen, en wel zodanig dat in elke zone één van de hiervoor besproken turbulentiemechanismen overheerst. Als voorbeeld kan dienen de stroming weergegeven in fig. 7.7b. In het gedeelte tussen lozingspunt en interne sprong is de stroming superkritisch en heeft het karakter van een straal. De gelaagdheid kan dan als continu beschouwd worden en is een theorie als die van par. 2.2 (of een geavanceerder model) van toepassing. Na de interne sprong wordt de stroming subkritisch en kan aan een lagenmodel gedacht worden. Het is dan niet altijd nodig om in het lagenmodel menging op te nemen, omdat deze gering kan zijn in vergelijking met die in het gedeelte met superkritische stroming. De twee zones worden wel aangeduid met de angelsaksische benamingen "near field" (hier het gedeelte met superkritische stroming) en "far field". De koppeling tussen near field en far field is soms een probleem. In het gegeven voorbeeld kunnen hiervoor de sprongrelaties van par. 3.1 van hoofdstuk 5 worden gebruikt. Een tweede voorbeeld is het koelwaterprobleem van fig. 4.9. Het near field bestaat hier uit de opwaartse stroming (een straal of pluim) bij het lozingspunt. Het far field bestaat aan de stroomopwaartse zijde uit een tweelagensysteem; voor de stroomafwaartse zijde zou een dispersiemodel van toepassing kunnen zijn. Er zal dan wel rekening gehouden moeten worden met warmteverlies aan het vrije oppervlak. Meer in het algemeen gesproken is het zo dat het far field veel meer dan het near field beïnvloed wordt door de eigenschappen van het ontvangende medium. Bij lozing aan de kust bijvoorbeeld hebben de stroming in de zee en de daar aanwezige turbulentie een sterke invloed op het far field.

Als derde voorbeeld van een geval waar een gekoppeld model mogelijk is, beschouwen we de situatie van fig. 7.15. Aan de landzijde van een spuikanaal naar zee wordt aan de bodem zoet water gespuid. Dit water zal in het gebied tussen $x = 0$ en $x = x_a$ mengen met het zoute zeewater, dat als onderlaag in het kanaal aanwezig is. Het mengwater is lichter dan het zeewater en zal als een bovenlaag afstromen. In het gedeelte tussen $x = x_a$ en $x = x_b$ ontstaat dan een tweelagensysteem. De menging in de zone $0 < x < x_a$ kan zo effectief zijn dat de menging in het tweelagensysteem verwaarloosd mag worden. De koppeling tussen de twee zones is nu minder eenvoudig dan in het eerstgenoemde voorbeeld. De stroming in de doorsnede $x = x_a$ zal subkritisch of ten hoogste kritisch zijn. Is dit laatste het geval, dan kan een eenvoudige oplossing worden gevonden (25). Het door de spuistraal aangezogen debiet is dan maximaal. Als de stroming in de doorsnede $x = x_a$ subkritisch blijft, b.v. omdat het gespuide debiet niet groot genoeg is om een toestand met kritische stroming te bereiken, zal vastgesteld moeten worden hoeveel zeewater de spuistraal aanzuigt.

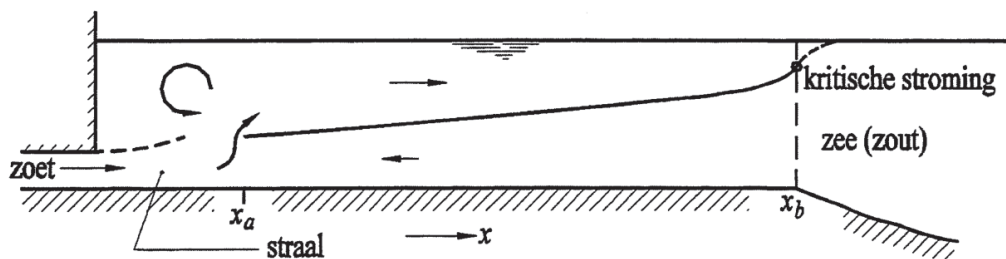


Fig. 7.15 - Spuikanaal.

3 Zoutindringing in een goed gemengd estuarium

Het getij beïnvloedt in het algemeen in sterke mate de waterbeweging in een estuarium. De variërende waterstand op zee veroorzaakt in het estuarium een langegolfbeweging. Door

bodemwrijving neemt in een prismatische rivier de golfamplitude af met de afstand tot de monding⁶. Naast het getij speelt ook de bovenafvoer een rol.

De getijbeweging in het estuarium beïnvloedt de zoutindringing: bij vloed stroomt zout zeewater het estuarium binnen, terwijl bij eb zeewater, in mindere of meerdere mate gemengd met het zoete rivierwater, naar zee afstroomt. Het turbulentieniveau en de menging worden doorgaans bepaald door de sterkte van de getijbeweging. Doordat het soortelijk gewicht van het zeewater groter is dan dat van de zoete bovenafvoer, zal de verdeling van de zoutconcentratie in het estuarium de stroming beïnvloeden. Zo ontstaat een wisselwerking tussen zoutverdeling en waterbeweging.

Gelaagdheidsstructuur

In par. 5 van hoofdstuk 4 is aangegeven dat in gevallen zonder getijbeweging de zoutindringing de vorm aanneemt van een stationaire zoutwig aan de bodem. Bij geringe getijbeweging en relatief grote bovenafvoer treedt een zoutwig nog wel op, maar de indringingslengte gaat variëren met de getijfase en de verticale uitwisseling neemt toe onder invloed van de hogere turbulentieintensiteit (samenhangend met de hogere stroomsnelheden). In dit geval spreekt men van een gelaagd estuarium. Een voorbeeld van een gelaagd estuarium is de Rhône.

Bij sterkere getijbeweging en/of kleinere bovenafvoer kan de verticale uitwisseling van massa zo toenemen dat, hoewel er nog aanmerkelijke dichtheidsverschillen in de verticaal voorkomen, geen zoutwig meer optreedt. Het estuarium is dan gedeeltelijk gemengd. De Nieuwe Waterweg is meestal gedeeltelijk gemengd.

Bij nog sterkere getijbeweging of kleinere bovenafvoer kunnen ten gevolge van de verticale uitwisseling de dichtheidsverschillen tussen bodem en oppervlak klein worden ten opzichte van het dichtheidsverschil tussen zeewater en rivierwater. Men noemt het estuarium dan goed gemengd. Ook in dit geval blijft de zoutverdeling de waterbeweging beïnvloeden, doordat er nu longitudinale dichtheidsgradiënten optreden (zie het voorbeeld in par. 2.2). De Westerschelde is een voorbeeld van een goed gemengd estuarium.

De gelaagdheidsstructuur van een estuarium is niet altijd dezelfde. De oorzaak hiervan is dat de verticale getijamplitude op zee kan variëren (doodtij-springtijcyclus, meteorologische invloeden) en de bovenafvoer aan verandering onderhevig is. Een estuarium dat b.v. in een natte periode gelaagd is, kan in een droge periode goed gemengd zijn. Ook de afstand waarover het zout binnendringt is in het algemeen veranderlijk.

Voor inleidingen in de zoutindringingsproblematiek van estuaria zie (4,36, 37, 38).

⁶Een alluviaal estuarium heeft vaak een trechtervorm. De getijgolf dempt dan veel langzamer met de afstand.

Voorspellen van zoutindringing

Het is meestal niet goed mogelijk zonder meetgegevens de gelaagdheidsstructuur van een bepaald estuarium te voorspellen. De grote variabiliteit in geometrie (bodempligging - b.v. platen en geulen -, zijrivieren, havens, e.d.) en andere omstandigheden (getij, bovenafvoeren, wind, scheepvaart) bemoeilijken sterk het opstellen van algemeen geldige regels. Veldmetingen zijn dan ook vereist om de mate van gelaagdheid en lengte van de zoutindringing vast te stellen. Deze metingen betreffen: de geometrie van het estuarium, de waterbeweging (waterstanden en stroomsnelheden ten gevolge van het getij, bovenafvoeren), verdelingen van zoutconcentraties en eventueel turbulentiemetingen. Bij voorkeur verricht men metingen bij verschillende waterstanden op zee (doodtij- springtijcyclus) en verschillende bovenafvoeren.

De meetresultaten kunnen gebruikt worden voor het ijken van wiskundige modellen voor zoutindringing. Met deze modellen kunnen dan voorspellingen gedaan worden voor de zoutindringing onder andere omstandigheden. Een vaak voorkomend geval betreft de toenemende zoutindringing bij verminderde bovenafvoer in verband met een irrigatieproject. Voor verificatie van de voorspellingen is men weer op metingen aangewezen: er is een wisselwerking tussen meten en rekenen.

De keuze van het te gebruiken wiskundig model zal afhangen van de aard van de gelaagdheid, b.v. een lagenmodel bij een gelaagd, en een over de dwarsdoorsnede geïntegreerd (z.g. dispersie-)model bij een goed gemengd estuarium. Daarnaast kunnen ook redenen van meer praktische aard een rol spelen bij de modelkeuze. Zo is het rekenen met een model voor een gedeeltelijk gemengd estuarium (par. 2.2 van hoofdstuk 7) relatief tijdrovend. Lagenmodel en dispersiemodel zijn in dit opzicht aantrekkelijker. Het dispersiemodel heeft echter meestal een geringere voorspellende waarde dan een drie-dimensionaal (numeriek) model.

Naast het werken met wiskundige modellen heeft men getracht parameters, waarin een aantal gemeten grootheden wordt ondergebracht, op te stellen die de mate van gelaagdheid karakteriseren. Het meest succesvol is gebleken het z.g. estuarium-Richardsongetal (5, 34):

$$Ri_E = \frac{\Delta\rho g A Q_f}{\rho A u_T^3} \quad (7.53)$$

Hierin is $\Delta\rho$ het dichtheidsverschil tussen zeewater en rivierwater, Q_f de zoete bovenafvoer, A de oppervlakte van de dwarsdoorsnede in de monding, en u_T de rms-waarde van de stroomsnelheid ten gevolge van de getijbeweging in de monding. In de teller van (7.54) staat een maat voor de arbeid die per tijdseenheid verricht moet worden om de bovenafvoer op te mengen, de noemer vertegenwoordigt het beschikbare vermogen van de getijbeweging. Een kleine waarde van Ri_E zal overeenkomen met een goed gemengde toestand, een grote waarde met een gelaagde toestand. Het interval van waarden van Ri_E waarbij de overgang tussen beide toestanden plaats vindt, zal van geval tot geval verschillen. Men houdt voor dit interval wel aan $0,08 < Ri_E < 0,8$.

Dispersiemodel voor een goed gemengd estuarium met eenvoudige geometrie

In par 2.1 en 2.2 is aandacht besteed aan gelaagde en gedeeltelijk gemengde stromingen. Hieronder volgt een beschrijving van een dispersiemodel voor de goed gemengde toestand. In dit relatief eenvoudige geval kunnen toch nog verschillende mengmechanismen werkzaam zijn, b.v. samenhangend met een onregelmatige geometrie (eb- en vloedscharen, havens). Beschouwd wordt hier het geval dat het best aansluit bij de in dit hoofdstuk behandelde stromingen, n.l. het geval dat de stroming nagenoeg horizontaal is.

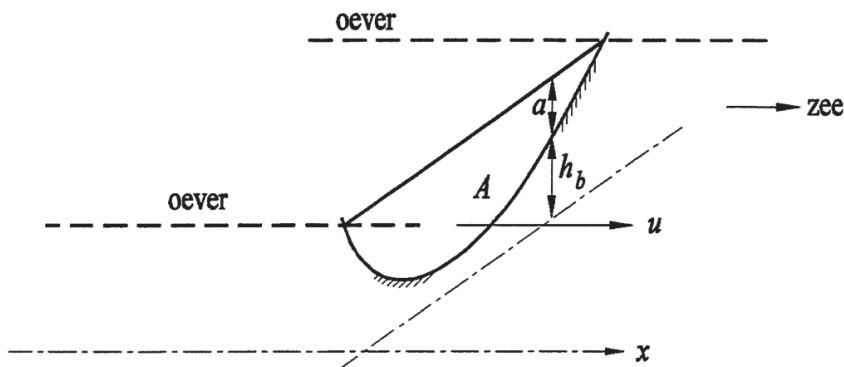


Fig. 7.16 - *Definitieschets.*

De massabalans voor een balansgebied dat zich over de gehele dwarsdoorsnede van het estuarium uitstrekt luidt (zie fig. 7.16)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho u dA = 0 \quad (7.54)$$

waarin A de oppervlakte van de dwarsdoorsnede is. Het is in een goed gemengde situatie zinvol de over de dwarsdoorsnede gemiddelde dichtheid $\bar{\rho}$ en snelheid \bar{u} in te voeren. De overstreping van symbolen duidt hier op middeling over de dwarsdoorsnede. Deze grootheden worden gegeven door

$$\bar{\rho} = \frac{1}{A} \int_A \rho dA \quad \text{en} \quad \bar{u} = \frac{1}{A} \int_A u dA$$

Vergelijking 7.54 wordt hiermee

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} A + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \bar{u} A + \frac{\partial}{\partial x} \int_A (\rho - \bar{\rho})(u - \bar{u}) dA = 0 \quad (7.55)$$

De integraal in (7.55) geeft een transport weer dat ontstaat door afwijkingen van dichtheid en snelheid van de gemiddelde grootheden $\bar{\rho}$ en \bar{u} . Dit transport wordt het dispersieve transport genoemd.

Samen met de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} A \bar{u} = 0$$

kan (7.55) nog geschreven worden als

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \int_A (\rho - \bar{\rho})(u - \bar{u}) dA = 0 \quad (7.56)$$

Omdat er een relatie bestaat tussen dichtheid en saliniteit, beschrijven (7.55) en (7.56) ook de over de dwarsdoorsnede gemiddelde zoutverdeling.

In de uitdrukking voor het dispersieve transport komen de variaties van ρ en u over de dwarsdoorsnede nog voor. Om deze onbekende variaties uit het model te elimineren, maakt men doorgaans gebruik van de gradiënttransport hypothese (vergelijk par. 1.1). Deze hypothese luidt hier

$$\int_A (u - \bar{u})(\rho - \bar{\rho}) dA = -AD_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \quad (7.57)$$

waarin D_x een longitudinale dispersiecoëfficiënt voorstelt. Deze coëfficiënt zal met plaats en tijd variëren, en is vooralsnog onbekend. Er zijn dus ook hier veldmetingen nodig, nu om waarden van de dispersiecoëfficiënt te bepalen. De eenvoudigste aanpak hierbij is te trachten een empirische correlatie op te stellen tussen de dispersiecoëfficiënt D_x , het estuarium-Richardsongetal, en andere karakteristieken van het estuarium (21, 41). De dispersiecoëfficiënt hangt in het algemeen af van de afstand tot de monding.

Uit empirische gegevens blijkt dat in het gebied met zoutindringing de dispersiecoëfficiënt D_x veel groter is dan bovenstrooms van dit gebied. De oorzaak hiervan is de gravitatiecirculatie (zie het voorbeeld in par. 2.2) in het verticale maar vooral ook in het horizontale vlak.

Een beter gefundeerde benadering voor de bepaling van de dispersiecoëfficiënt D_x zou zijn uit te gaan van wiskundige modellen voor de dichtheidsverdeling (ρ) en snelheidsverdeling (u), b.v. zoals aangegeven in 22, 34, 35 en 40, en met behulp van (7.57) een uitdrukking voor de dispersiecoëfficiënt op te stellen. Een dergelijke analyse is echter zeer gecompliceerd, onder meer doordat de stroming en zoutverdeling als gevolg van de variabele bodemligging drie-dimensionaal zijn. Bij vergelijking met meetgegevens blijken deze meer complexe modellen niet beter te voldoen dan de hierboven genoemde eenvoudige empirische modellen (39). In de praktijk wordt daarom meestal uitgegaan van een dergelijk dispersiemodel, aangevuld met veldmetingen. Een alternatief is een drie-dimensionaal numeriek model (waarbij ook veldgegevens vereist zijn!).

Een probleem bij het oplossen van de dispersievergelijking vormt soms de randvoorwaarde aan de zeezijde, doordat de saliniteit in de monding kan variëren met de getijfase. Vooral bij eb zal de

saliniteit aldaar lager zijn dan die op enige afstand uit de kust (21).

De plaats- en tijdsafhankelijke stroomsnelheid \bar{u} in de dispersievergelijking kan, evenals de waterstanden, berekend worden met een waterbewegingsmodel. Figuur 7.17 geeft een indruk van de longitudinale zoutverdelingen voor verschillende getijfasen. In deze figuur is ρ_f de dichtheid van het rivierwater.

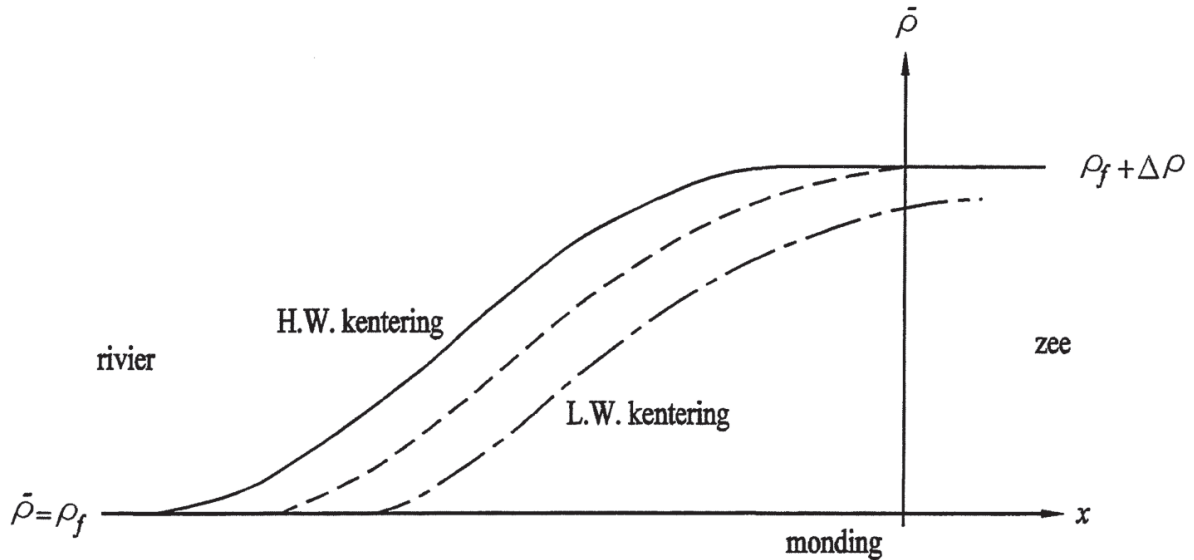


Fig. 7.17 - Longitudinale dichtheidsverdeling.

Invloed van de bovenafvoer

Er wordt niet zelden waargenomen dat in een goed gemengd estuarium de zoutverdeling met de eb- en vloedbeweging heen en weer beweegt, maar verder niet veel van vorm verandert, zie fig. 7.17. Nadere analyse van dit geval geeft een goede indruk van de rol die de bovenafvoer speelt bij de zoutindringing. Stel daarom in (7.56) en (7.57) dat in een met de getijsnelheid u_T heen en weer bewegend assenstelsel - gegeven door $\xi = \xi(x, t)$ - de dichtheid niet meer van de tijd afhangt:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\xi) \quad \text{met} \quad \xi = x - \int_0^t u_T(t') dt' \quad (7.58)$$

De stroomsnelheid \bar{u} in (7.56) is te schrijven als een som van de snelheid u_f ten gevolge van de bovenafvoer ($u_f = Q_f/A$) en de getijsnelheid u_T ,

$$\bar{u} = u_f + u_T \quad (7.59)$$

Substitutie van (7.58), (7.59) en (7.57) in (7.56) geeft

$$u_f \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = \frac{1}{A} \frac{d}{d\xi} \left(AD_x \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} \right) \quad (7.60)$$

Integratie van (7.60) is mogelijk, omdat $u_f A = Q_f = \text{constant}$. Met de randvoorwaarde $d\bar{\rho}/d\xi = 0$ voor $\bar{\rho} = \rho_f$ ontstaat

$$Q_f (\bar{\rho} - \rho_f) = AD_x \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} \quad (7.61)$$

Uit dit resultaat blijkt dat $d\bar{\rho}/d\xi$ toeneemt als Q_f toeneemt (bij gelijke $\bar{\rho} - \rho_f$). De lengte waarover zoutindringing plaats vindt neemt daardoor af als Q_f toeneemt, zie fig 7.18. In par. 5 van hoofdstuk 4 werd een dergelijk resultaat voor de zoutwig gevonden.

In bovenstaande beschouwing is aangenomen dat Q_f niet van de tijd afhangt. In werkelijkheid zal Q_f echter variabel zijn, b.v. doordat droge en natte seizoenen elkaar afwisselen. Het duurt dan een zekere tijd voordat de zoutverdeling zich aan de nieuwe situatie heeft aangepast. Vooral in het geval van lage bovenafvoeren in een groot estuarium kan deze aanpassingstijd zo groot worden, dat een evenwicht nooit bereikt wordt.

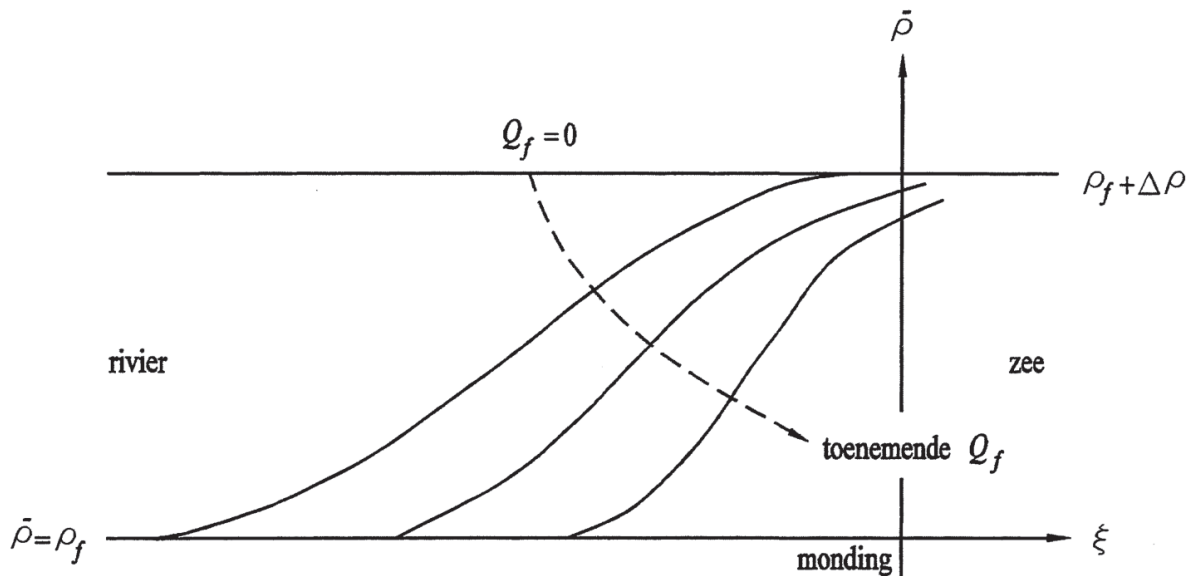


Fig. 7.18 - Invloed van de bovenafvoer op de longitudinale dichtheidsverdeling.

Literatuur hoofdstuk 7

1. R. Booij, Turbulentie in de waterloopkunde (collegehandleiding b82).
2. H. Tennekes en J.L. Lumley, A first course in turbulence, 1972, MIT Press.
3. J.A. Battjes, Vloeistofmechanica (collegehandleiding b71).
4. J. Dronkers en W. van Leussen (red.), Physical processes in estuaries, 1988, p.149 e.v., Springer-Verlag.
5. H.B. Fischer, E.J. List, R.C.Y. Koh, J. Imberger en N.H. Brooks, Mixing in inland and coastal waters, 1979, Academic Press.
6. P. Bradshaw (ed.), Turbulence, 2^{de} ed., 1978, Springer-Verlag.
7. W. Rodi, Turbulence models and their application in hydraulics, 1980, International Association for Hydraulic Research.
8. M.J. Moore en R.R. Long, An experimental investigation of turbulent stratified shearing flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 49, 1971, p. 635.
9. M. de Vries, Waterloopkundig onderzoek (handleiding college b80).
10. J.S. Turner, Buoyancy effects in fluids, 1973, Cambridge University Press.
11. S.P.S. Arya, The critical condition for the maintenance of turbulence in stratified flows, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 98, 1972, p. 264.
12. T.H. Ellison en J.S. Turner, Turbulent entrainment in stratified flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 6, 1959, p. 423.
13. V.H. Chu en M.R. Vanvari, Experimental study of turbulent stratified shearing flow, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 102, HY6, 1976, p. 691.
14. K. Lofquist, Flow and stress near an interface between stratified liquids, *Physics of Fluids*, 3, 1960, p. 158.
15. B.E. Launder, On the effect of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, *Journal of Fluid Mechanics*, 67, 1975, p. 569.
16. M.M. Gibson en B.E. Launder, On the calculation of horizontal turbulent, free shear flows under gravitational influence, *Trans. ASME, Ser. C, Journal of Heat Transfer*, 98, 1976, p. 81.
17. C.B. Vreugdenhil, Computation of gravity currents in estuaries, proefschrift Delft, 1970.
18. S. Bloss, R. Lehfeldt en J.C. Patterson, Modeling turbulent transport in stratified estuary, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 114, 9, 1988, p. 1115.
19. A.T. Ippen (ed.), *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, Hoofdstukken 12 en 13, 1966, McGraw-Hill.
20. H.W. Shen (ed.), *River Mechanics*, 2, Hoofdstuk 26, 1971.
21. M.L. Thatcher en D.R.F. Harleman, Long-term salinity calculation in Delaware Estuary, *Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE*, 107, EE1, 1981, p. 11.
22. P.C. Chatwin, Some remarks on the maintenance of the salinity distribution in estuaries,

- Estuarine and Coastal Marine Science, 4, 1976, p. 555.
23. H.B. Fischer, Mass transport mechanisms in partially stratified estuaries, *Journal of Fluid Mechanics*, 53, 1972, p. 671.
 24. Zie 4, p. 196.
 25. B.P. Rigter, Density induced return currents in outlet channels, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 96, HY2, 1970, p. 529.
 26. G. Gartrell Jr., Studies on the mixing in a density-stratified shear flow, Rapport no. KH-R-39, W.M. Keck Laboratory, California Institute of Technology, 1979.
 27. J.F. Price, On the scaling of stress-driven entrainment experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, 90, 1979, p. 509.
 28. G. Mellor en P.T. Strub, Similarity solutions for the stratified turbulent Rayleigh problem, *Journal of Physical Oceanography*, 10, 1980, p. 455.
 29. J. Imberger, J. Patterson, R.H.B. Hebbert en I. Loh, Dynamics of reservoir of medium size, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 104, HY5, 1978, p. 725.
 30. J.P. Grubert, Interfacial mixing in estuaries and fjords, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 116, 2, 1990, p. 176.
 31. J.-F. Piat en E.J. Hopfinger, A boundary layer topped by a density interface, *Journal of Fluid Mechanics*, 113, 1981, p. 411.
 32. N.V.M. Odd en J.G. Rodger, Vertical mixing in stratified tidal flows, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 104, HY3, 1978, p. 337.
 33. J.S. Turner, Turbulent entrainment, *Journal of Fluid Mechanics*, 173, 1986, p. 431.
 34. H.B. Fischer, Mixing and dispersion in estuaries, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 8, 1976, p. 107.
 35. R. Smith, Buoyancy effects upon longitudinal dispersion in wide well-mixed estuaries, *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A*, 296, 1980, p. 467.
 36. K.R. Dyer, *Estuaries*, Wiley & Sons, 1973.
 37. D.M. McDowell en B.A. O'Connor, *Hydraulic behaviour of estuaries*, Macmillan, 1977.
 38. C.B. Officer, *Physical oceanography of estuaries (and associated coastal waters)*, Wiley & Sons, 1976.
 39. D. Prandle, Salinity intrusion in estuaries, *J. Phys. Oceanography*, 11, 1981, pp. 1311-1324.
 40. J. van de Kreeke en J.T.F. Zimmerman, Gravitational circulation in well- and partially-mixed estuaries. In: *Ocean engineering science (The Sea, vol. 9A, B. 1e Méhauté en D.M. Hanes, red.)*, Wiley & Sons, 1990, p. 495.
 41. H.H.G. Savenije, Rapid assessment technique for salt intrusion in alluvial estuaries. Proefschrift TU Delft, 1992.

