

Spectraalanalyse van getijden en hun
voorspelling volgens Munk en Cartwright

Intern Rapport no 1-78

J.P.Th. Kalkwijk
Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek
Laboratorium voor Vloeistofmechanica

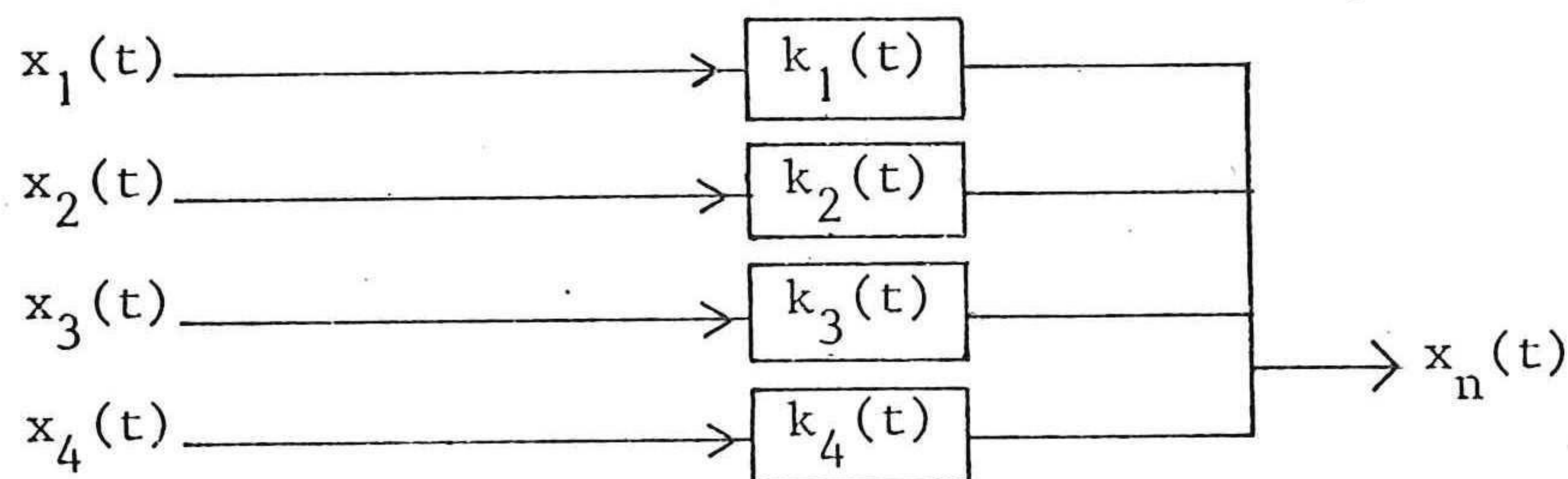
Inhoud

1. Inleiding
2. Enige opmerkingen over lineaire systemen
 - 2.1. Systemen met één ingangssignaal en één uitgangssig
 - 2.2. Systemen met één ingangssignaal en één uitgangssig
met ruis daarop gesuperponeerd
 - 2.2.1. Directe bepaling van de impulsresponsiefun
 - 2.2.2. Directe bepaling van de frequentieresponsi
 - 2.3. Tweevoudig systeem met twee ingangssignalen en één
signaal met ruis daarop gesuperponeerd
3. Het systeem volgens Munk en Cartwright
4. De ingangssignalen
 - 4.1. De getijpotentialiaal
 - 4.2. Zonnestraling
5. Eisen te stellen aan de overdrachtsfuncties
 - 5.1. Maximale bemonsteringsinterval van de impulsres
 - 5.2. Tijdsinterval, waarover i.r.p.'s bepaald moeten
6. Bepaling van de responsiefuncties

1. Inleiding

Bij de analyse en de voorspelling van het getij wordt er van oudsher vanuit gegaan, dat de frequenties van de getijcomponenten bekend zijn. Zij volgen namelijk uit een analyse van de getijpotentiaal of de getijverwekkende kracht. Van iedere component moeten de amplitude en de fase, de getijconstanten, berekend worden uit een waarnemingsreeks. Achteraf moet dan nog onderzocht worden of het residu, het verschil tussen waarneming en theoretisch berekende waarde nog significante bijdragen bevat. Een veel gebruikte analysemethode is die der kleinste kwadraten. Hoewel de methode met behulp van de Fourier-transformatie en daarna de toepassing van de methode der kleinste kwadraten in het frequentiedomein veel informatie geeft, wordt deze methode minder gebruikt. Eén der redenen kan zijn, dat 'gaten' in een registratie uitermate hinderlijk zijn, doch voor de methode der kleinste kwadraten geldt dit bezwaar niet.

M. en C. hebben in hun methode de gedachte laten varen, dat voor een analyse, of deze nu in het tijdsdomein of in het frequentiedomein wordt uitgevoerd, de van belang zijnde frequenties van te voren gekozen moeten worden. Daarentegen baseren M. en C. zich op de systeemaanpak door het verloop van b.v. een waterspiegel te beschouwen als de gesommeerde responsie (uitgangssignaal) van een aantal systemen, die ieder hun eigen ingangssignaal hebben. Op het uitgangssignaal is dan nog storing, ruis, aanwezig in de vorm van meteorologische invloeden. Schematisch zou een dergelijk systeem voorgesteld kunnen worden in de vorm van een blokdiagram, waarin x_1, x_2, \dots , de respectieve ingangssignalen



voorstellen en $x_n(t)$ de gesommeerde responsie, waarin dan nog storing is opgenomen. Responsie en storing vormen tezamen b.v. een gemeten waterspiegel.

^x Munk, W.H. and Cartwright, D.E.,
Tidal spectroscopy and prediction
Philosophical Transactions of the Royal Society of London
vol. 259, A 1105, pp 533-581, 1966

De ingangssignalen worden ontleend aan de gravitatie-invloeden van zon en maan, en zijn derhalve als functie van de tijd bekend. Het gaat er nu om uit de gemeten waterspiegel en de bekende ingangssignalen de eigenschappen van ieder systeem afzonderlijk te bepalen. Hierbij gaat het als het lineaire systemen betreft om de impulsieresponsiefuncties $k(t)$, of hun equivalent de frequentieresponsies $K(\sigma)$.

M. en C. besteden ook aandacht aan een geval waarbij het systeem zwak niet-lineair is. Gezien het feit dat de nadruk van de methode toch wel ligt op de lineaire systemen, zal daarom in een volgende paragraaf eerst aandacht besteed worden aan de theorie van de lineaire systemen, zoals die van toepassing is in dit geval. Daarna worden successievelijk in de volgende paragrafen behandeld de ingangssignalen, het aantal te bepalen punten van de overdrachtsfuncties, de twee bruikbare analysemethoden en tenslotte de behaalde resultaten voor een 'lineair' station als Honolulu.

De laatste paragraaf zal handelen over de uitbreiding van de methode voor een (zwak) niet-lineair geval.

2. Enige opmerkingen over lineaire systemen

Achtereenvolgens zullen beschouwd worden

- a) systemen met één ingangs- en één uitgangssignaal
- b) systemen volgens a), echter op het uitgangssignaal is ruis gesuperponeerd; alleen de superpositie van uitgangssignaal en ruis is bekend.
- c) systemen met twee ingangssignalen en één uitgangssignaal plus ruis; dit geval is eenvoudig uit te breiden voor systemen met meer dan twee ingangssignalen.

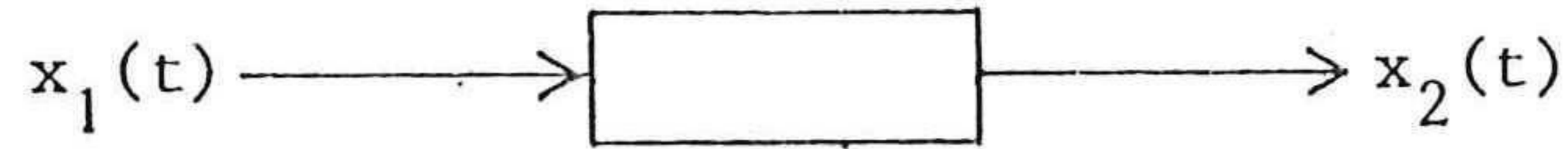
In alle gevallen zal aandacht worden geschonken aan de wijze waarop uit ingangs- en uitgangssignalen (plus ruis), de systeemeigenschappen kunnen worden bepaald.

Nadere informatie kan worden gevonden in Jenkins en Watts^x.

Jenkins, G.M. and Watts, D.G. Spectral analysis and its applications,
1968, San Fransisco.

2.1 Systemen met één ingangssignaal en één uitgangssignaal

Schematisch kan een dergelijk systeem als volgt weergegeven worden.



Indien $k(t)$ de responsie is op een stoot als ingangssignaal op het tijdstip $t = 0$, dan geldt voor de responsie van een lineair systeem op een willekeurig ingangssignaal:

$$x_2(t) = \int_0^{\infty} x_1(t - \tau)k(\tau)d\tau \quad (1)$$

Omdat volgens het causaliteitsbeginsel $k(t) = 0$ voor $t < 0$ kan de ondergrens vervangen worden door $-\infty$:

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)k(\tau)d\tau \quad (2)$$

Het equivalent in het frequentiedomein is:

$$X_2(\sigma) = X_1(\sigma) K(\sigma) \quad (3)$$

waarbij de hoofdletters in het vervolg de Fouriertransform zullen aangeven van tijdsfuncties, die aangeduid worden met overeenkomstige kleine letter, volgens:

$$X(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi i\sigma t} dt \quad (4)$$

Voorts zullen $k(t)$ en zijn transform $K(\sigma)$ in het vervolg aangeduid worden met de benamingen impulsresponsiefunctie (irp) resp. frequentieresponsiefunctie (frp).

Een eenvoudige methode om de responsiefuncties te bepalen zou zijn de berekeningen uit te voeren in het frequentiedomein en gebruik te maken van (3). De frp kan echter ook via het auto-(energiedichtheids)spectrum en het kruisspectrum bepaald worden. Deze kunnen berekend worden met behulp van de covariantiefuncties.

Deze uitdrukking wordt ook wel geschreven als

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau)k(t - \tau)d\tau$$

Deze kan worden verkregen door in (1) $t - \tau$ te vervangen door τ' .

Zo is de autocovariantie van een functie $x_1(t)$ gedefinieerd als:

$$\text{autocovariantie} = c_{11}(\tau) = E[x_1(t), x_1(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_1(t)x_1(t+\tau)dt \quad (5)$$

waarin E = mathematische verwachting
 $2T$ = tijdsinterval

Dit levert voor het spectrum op:

$$C_{11}(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}^{cc}(\sigma) X_1(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_1(\sigma)|^2 = \text{reëel}^* \quad (6)$$

waarin \dots^{cc} = complex toegevoegde

De kruiscovariantie tussen ingangs- en uitgangssignaal is per definitie:

$$c_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_1(t) x_2(t + \tau) dt \quad (7)$$

zodat het kruisspectrum wordt:

$$C_{12}(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}^{cc}(\sigma) X_2(\sigma) \quad (8)$$

Uit (6) en (8), auto- en kruisspectrum, kan eveneens de frp van het systeem bepaald worden. Immers:

$$\frac{C_{12}(\sigma)}{C_{11}(\sigma)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{1T}^{cc}(\sigma) X_2(\sigma)}{X_{1T}^{cc}(\sigma) X_1(\sigma)} = \frac{X_2(\sigma)}{X_1(\sigma)} = K(\sigma) \quad (9)$$

2.2 Systemen met één ingangssignaal en één uitgangssignaal, met ruis daarop gesuperponeerd

Schematisch wordt dit systeem hetzelfde weergegeven als in de vorige paragraaf, doch nu geldt:

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) k(\tau) d\tau + z(t) \quad (10)$$

**

Het equivalent van $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t - \tau) dt$ is in het frequentiedomein $X^2(\sigma)$ (complex)

Hierin is $z(t)$ een storing, waarvan aangenomen zal worden, dat deze zich gedraagt als witte ruis. Dit houdt in, dat de ruis in het van belang zijnde frequentie-interval in het energiedichtheidsspectrum een bandstructuur heeft.

Voorts wordt gesteld, dat de ruis niet gecorreleerd is aan het in- of uitgangssignaal van het systeem.

Opnieuw is het probleem de systeemeigenschappen te bepalen uit het ingangssignaal en uitgangssignaal + ruis. De methode om de frp te bepalen volgens (3), d.w.z. rechtstreekse transformatie van $x_1(t)$ en de gemeten $x_2(t)$ levert nu geen juist resultaat omdat $X_2(\sigma)$ tevens de ruis bevat. Er zal een procedure gevolgd moeten worden waarmee de ruis geëlimineerd kan worden. In principe zijn daarvoor twee methoden bruikbaar, nl.

- i bepaling van de irp in het tijdsdomein met behulp van de methode der kleinste kwadraten
- ii bepaling van de frp in het frequentiedomein met behulp van $x_1(t)$ en $x_2(t)$

In de volgende paragrafen zal hier verder aandacht aan worden gegeven.

2.2.1. Directe bepaling van de impulsresponsiefunctie

De methode houdt in, dat de integraal in (10) gediscrètiseerd wordt volgens

$$\int_0^{\infty} x_1(t-\tau)k(\tau)d\tau = \sum_{m=0}^{\tilde{n}} k_m x_z(t-m\Delta\tau)\Delta\tau \quad (11)$$

De gewichten k_m zijn de parameters, die nader bepaald moeten worden met behulp van de methode der kleinste kwadraten. De berekeningswijze is zoals gebruikelijk.

Jenkins en Watts (blz. 422 e.v.) plaatsen de volgende kritische kanttekeningen bij deze methode:

- i Het aantal mee te nemen punten van de irp, $k(t)$, kan nog wel eens groot zijn. Bovendien is het vaak mogelijk het probleem te 'parameteriseren', vooral in het geval dat het probleem met lineaire differentiaalvergelijkingen zou kunnen worden beschreven.

ii de schatters voor dicht bij elkaar gelegen punten van $k(t)$ zijn sterk aan elkaar gecorreleerd. Dit uit zich in instabiel gedrag en grote varianties. Daarom verdient de methode om de frp te bepalen, zoals beschreven in de volgende paragraaf vaak de voorkeur.

2.2.2. Direkte bepaling van de frequentieresponsiefunctie

Bij deze methode wordt gebruik gemaakt van het feit dat de ruis en hetingangssignaal niet gecorreleerd zijn, zodat de covariantie tussen deze twee signalen nul is:

$$\text{cov} [x(t+\tau), z(t)] = 0 \quad \text{voor alle } \tau \quad (12)$$

Van deze eigenschap kan gebruik gemaakt worden om de frp van het systeem te berekenen, waarbij de ruis a.h.w. is uitgemiddeld door systematisch gebruik te maken van covariantie-functies. Dus:

$$C_{12}(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}^{cc}(\sigma) X_2(\sigma) \quad (13)$$

Deze uitdrukking gaat met behulp van

$$X_2(\sigma) = X_1(\sigma)K(\sigma) + Z(\sigma) \quad (14)$$

over in:

$$\begin{aligned} C_{12}(\sigma) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[X_{1T}^{cc}(\sigma) X_1(\sigma) K(\sigma) + X_{1T}^{cc}(\sigma) Z(\sigma) \right] \\ &= C_{11}(\sigma) K(\sigma) + \lim_{T \rightarrow \infty} X_{1T}^{cc}(\sigma) Z(\sigma) \end{aligned} \quad (15)$$

Het equivalent van de tweede term in het rechterlid in het tijdsdomein is:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) z(t+\tau) dt = 0$$

zodat ook:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}^{cc}(\sigma) Z(\sigma) = 0$$

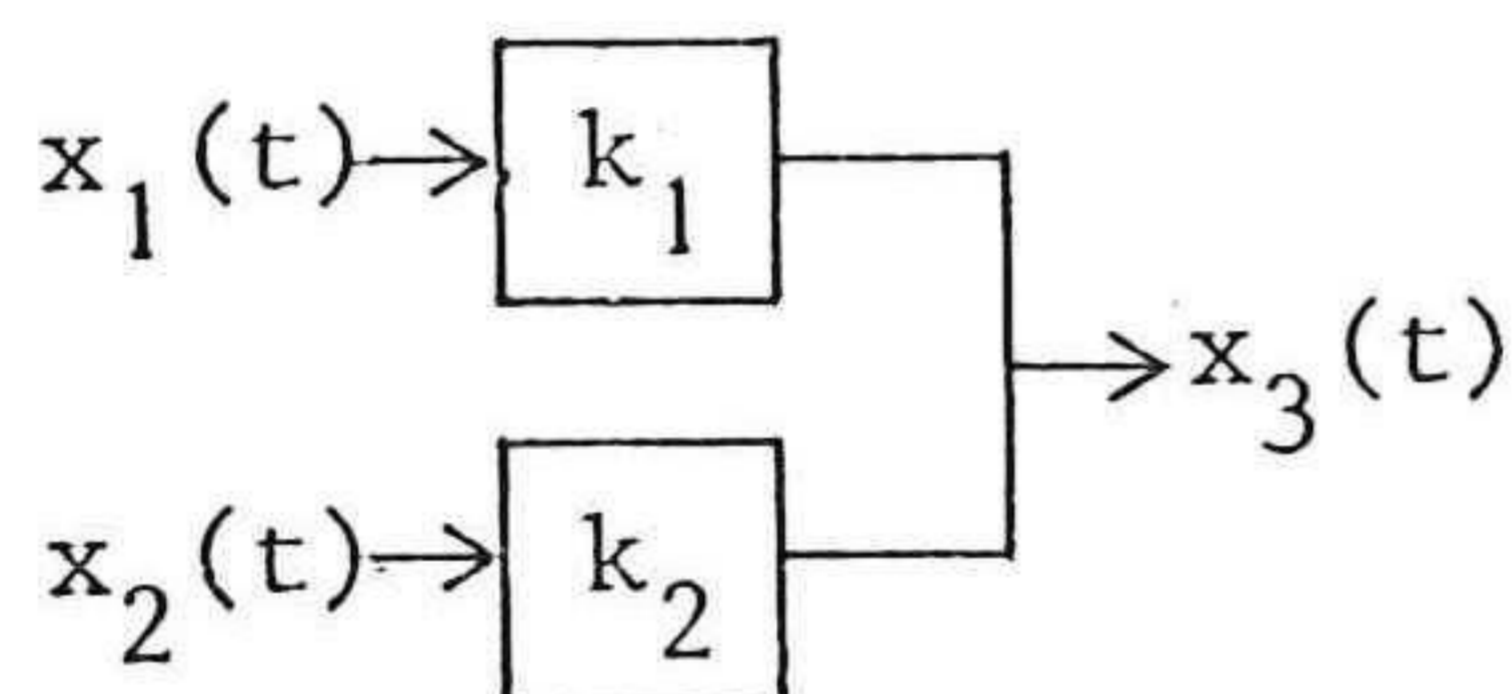
waardoor (15) overgaat in de bekende uitdrukking:

$$C_{12}(\sigma) = C_{11}(\sigma)K(\sigma) \tag{9}$$

die ook voor het storingsvrije signaal gold. Het gebruik van de kruiscovariantie $C_{12}(\tau)$ heeft dus ingehouden, dat daarin de ruis is uitgemiddeld.

2.3. Tweevoudig systeem met twee ingangssignalen en één uitgangssignaal met ruis daarop gesuperponeerd

Schematisch kan dit systeem weergegeven worden als:



Er geldt:

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)k_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\tau)k_2(\tau)d\tau + z(t) \tag{16}$$

Met als equivalente representatie in het frequentiedomein:

$$X_3(\sigma) = X_1(\sigma)K_1(\sigma) + X_2(\sigma)K_2(\sigma) + Z(\sigma) \tag{17}$$

Om uit de ingangs- en uitgangssignalen de frp's te bepalen moet opnieuw gebruik worden gemaakt van covarianties tussen de verschillende signalen.

Voor de kruisspectra wordt dan gevonden:

$$C_{13}(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} X_{1T}^{cc}(\sigma) X_3(\sigma) \tag{18}$$

$$C_{23}(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} X_{2T}^{cc}(\sigma) X_3(\sigma) \tag{19}$$

Door het resultaat voor $X_3(\sigma)$ volgens (17) te superponeren in bovenstaande uitdrukkingen ontstaan opnieuw kruisspectra van de ruis en de ingangssignalen. Deze zijn gelijk aan nul, zodat:

$$C_{13}(\sigma) = C_{11}(\sigma)K_1(\sigma) + C_{12}(\sigma)K_2(\sigma) \quad (20)$$

$$C_{23}(\sigma) = C_{21}(\sigma)K_1(\sigma) + C_{22}(\sigma)K_2(\sigma) \quad (21)$$

Uit deze twee vergelijkingen kunnen de onbekenden $K_1(\sigma)$ en $K_2(\sigma)$ opgelost worden. Door Fouriertransformatie zijn $k_1(t)$ en $k_2(t)$ dan weer te bepalen. Uiteraard kunnen deze irp's ook rechtstreeks in het tijdsdomein bepaald worden met behulp van een kleinste kwadraten-procedure.

Het is duidelijk, dat het beschouwde systeem eenvoudig uit te breiden is voor meerdere ingangssignalen, zoals M. en C. dat toegepast hebben. Het aantal vergelijkingen met een structuur volgens (20) en (21) blijft gelijk aan het aantal te bepalen irp's. Als gevolg van enkele specifieke eigenschappen van de ingangssignalen bij M. en C. zijn nog een aantal vereenvoudigingen mogelijk. Deze zullen in de volgende paragrafen aan de orde komen.

3. Het systeem volgens M. en C.

Het getij op aarde wordt opgewekt door de getijverwekkende kracht, zoals deze ontstaat uit de gravitatiewerking van maan en zon op de aarde. Bij astronomische analyse wordt echter vaak gebruik gemaakt van de getijpotentiaal V . Voor de getijverwekkende kracht \vec{F} geldt dan, dat

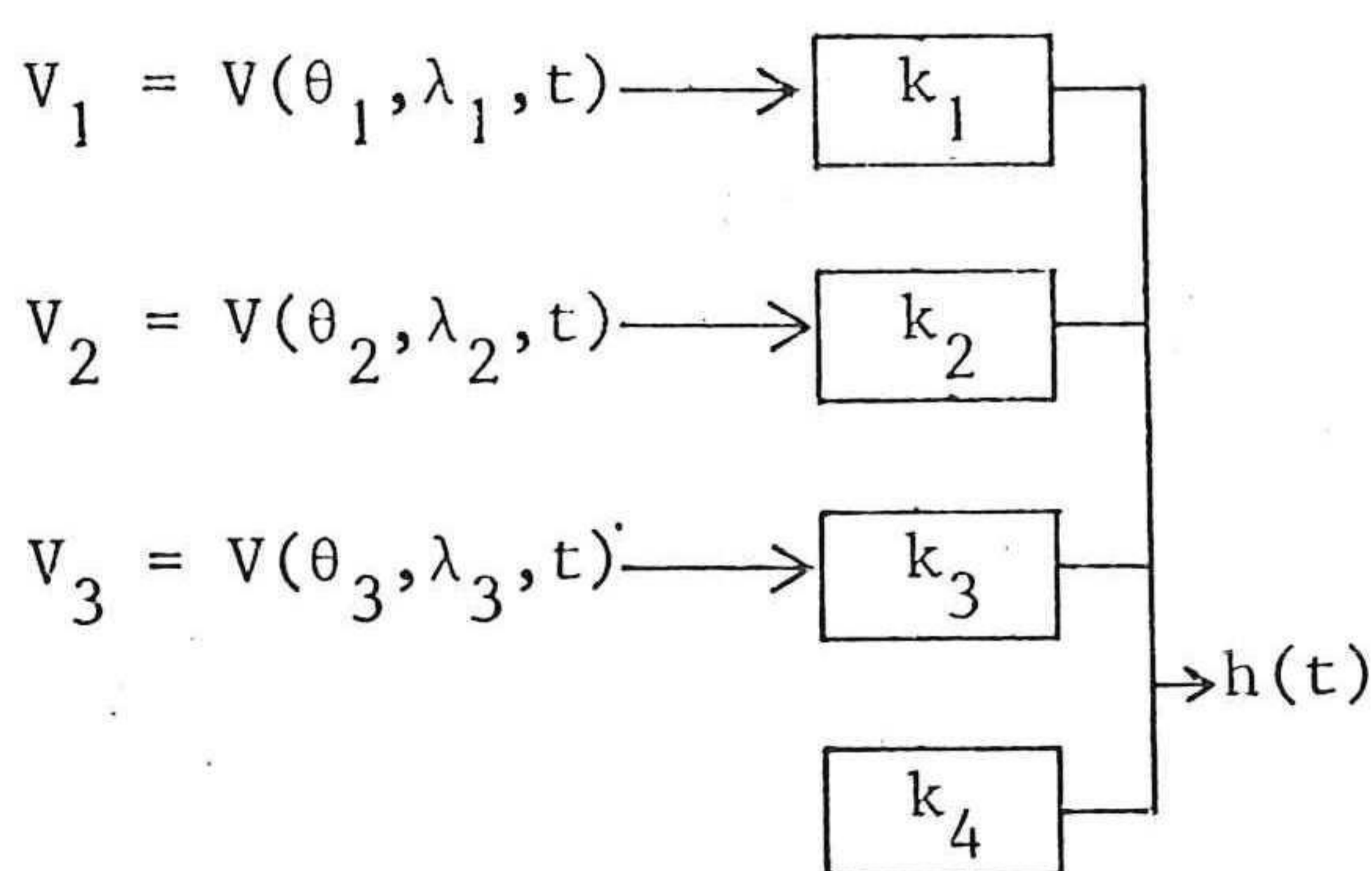
$$\vec{F} = \text{grad } V \quad (22)$$

Dit houdt in, dat het oppervlak van gelijke potentiaal op het aardoppervlak het evenwichtsgetij oplevert, terwijl dan de getijverwekkende kracht evenwicht maakt met het hydrostatisch drukverhang.

In principe is de getijpotentiaal afhankelijk van de tijd, alsmede van de beschouwde plaats op aarde (breedte θ , lengte λ):

$$V = V(\theta, \lambda, t)$$

Om tot een systeembenadering te komen zou men zich voor kunnen stellen, dat het werkelijke getij op een bepaalde plaats niet alleen beïnvloed wordt door de potentiaal op die plaats, maar ook door de potentialen in de plaatsen daar omheen, in feite dus alle plaatsen op aarde. De potentiaal van ieder plaats levert a.h.w. zijn eigen specifieke bijdrage tot het getij in de beschouwde plaats. Voor een lineair systeem zou men op de volgende manier schematisch kunnen aangeven hoe het getij door de verschillende potentialen gegenereerd wordt.



Of in formule vorm (ruis op dit moment verwaarloosd).

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(t-\tau)k_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} V_2(t-\tau)k_2(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \quad (23)$$

In dit schema is het aantal subsystemen, ieder met hun eigen ingangssignalen niet aan beperkingen gebonden, zodat vermoedelijk op deze wijze een onhanteerbaar totaal systeem ontstaat vanwege het grote aantal te bepalen irp's.

Nu blijkt evenwel, dat de potentiaal geschreven kan worden als een som van termen, waarbij iedere term bestaat uit een product van een tijdsafhankelijk deel en een plaatsafhankelijk deel, volgens:

$$V(\theta, \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_n^m(t)U_n^m(\theta, \lambda) + b_n^m(t)V_n^m(\theta, \lambda) \right] \quad (24)$$

In deze uitdrukking hangen de coëfficiënten a en b niet af van de plaats op aarde en U en V niet van de tijd.

Wordt de uitdrukking voor V volgens (24) gesubstitueerd in (23) dan ontstaat:

$$\begin{aligned}
 h(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^m (t-\tau) U_n^m(\theta_1, \lambda_1) + b_n^m (t-\tau) V_n^m(\theta_1, \lambda_1) \right] k_1(\tau) d\tau + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^m (t-\tau) U_n^m(\theta_2, \lambda_2) + b_n^m (t-\tau) V_n^m(\theta_2, \lambda_2) \right] k_2(\tau) d\tau + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\dots \right] k_3(\tau) d\tau + \\
 & \text{enz.}
 \end{aligned}$$

(25)

Door de termen met gelijke a en b bij elkaar te nemen wordt verkregen:

$$\begin{aligned}
 h(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^m (t-\tau) \left[U_n^m(\theta_1, \lambda_1) k_1(\tau) + U_n^m(\theta_2, \lambda_2) k_2(\tau) + \dots \right] d\tau + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n^m (t-\tau) \left[U_n^m(\theta_1, \lambda_1) k_1(\tau) + \dots \right] d\tau
 \end{aligned}$$

(26)

Bovenstaande uitdrukking bevat opnieuw een aantal convolutie-integralen. De gedeelten tussen grote haken in (26) zijn functies van de tijd en kunnen derhalve beschouwd worden als de irp's van systemen die als ingangssignalen a(t) en b(t) hebben:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^m (t-\tau) u_n^m(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n^m (t-\tau) v_n^m(\tau) d\tau$$

(27)

Naderhand zal blijken, dat hiermede belangrijke winst is behaald, omdat slechts enkele coëfficiënten a en b waarden hebben, die niet gelijk aan nul zijn. Vooruitlopend op de behandeling van de ingangssignalen wordt hier vermeld, dat voor de coëfficiënten a slechts van groot belang zijn a_2^0, a_2^1 en a_2^2 en van veel minder belang a_3^0, a_3^1, a_3^2 en a_3^3 .

4. De ingangssignalen

M. en C. beschouwen 2 soorten ingangssignalen, namelijk enerzijds de

getijpotentialen, die bepaald worden door de invloed van maan en zon en anderzijds de zonnestraling. Met name het rekening houden met de laatste invloed was en is nog tamelijk nieuw. Men kan op deze manier min of meer rekening houden met meteorologische invloeden, waarin een zekere regelmaat te herkennen valt.

4.1. De getijpotentialiaal

De gravitatiepotentialiaal van een massa M (maan of zon) in een willekeurig punt op aarde P(α, θ, λ) is:

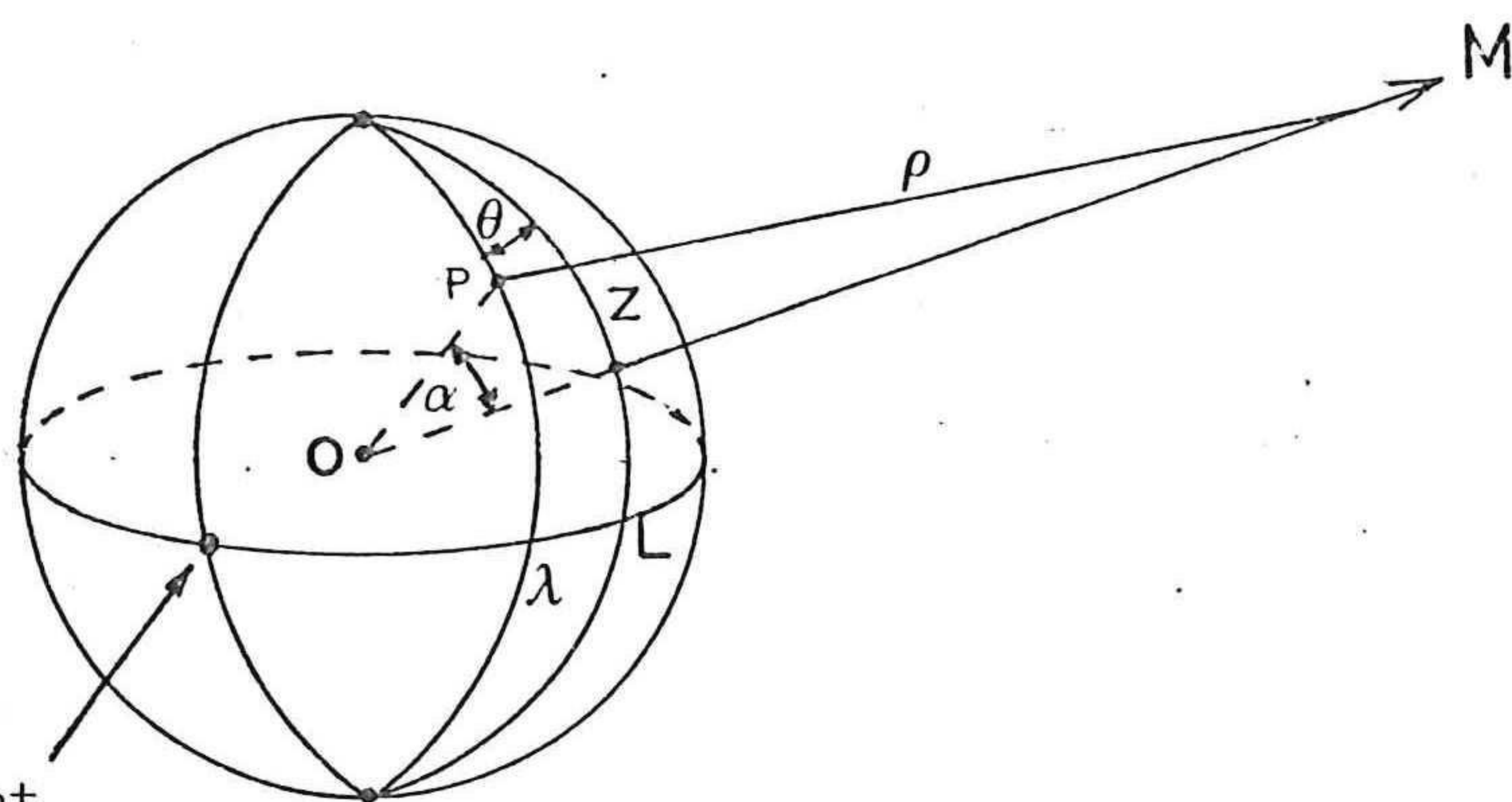
$$V = \frac{GM}{\rho} \tag{25}$$

waarin:

G = gravitatieconstante

M = massa hemellichaam

ρ = afstand tussen het punt P en het hemellichaam



Met behulp van de parallax $\xi = \frac{r}{R}$ ($r = OP$, $R =$ afstand zwaartepunt aarde tot hemellichaam) kan geschreven worden als:

$$V = \frac{GM}{R} \sqrt{\frac{1}{1-2\xi\mu-\xi^2}} \tag{2}$$

$$= \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(\mu)$$

waarin $P_n(\mu)$ de polynomen van Legendre voorstellen, b.v.

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \mu$$

$$P_2 = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \mu$$

In (26) heeft de eerste term (n=0) geen betekenis. De tweede term (n=1) vertegenwoordigt slechts in de richting OM een constante kracht, die gelijk is aan de kracht benodigd voor het doorlopen van de aarde in zijn baan. Pas de derde term wordt van belang. Gezien de relatie, die er bestaat tussen de universele gravitatieconstante en de zwaartekracht g:

$$G = \frac{gr^2}{M_a}$$

M_a = massa aarde

r = straal aarde

g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht

gaat (26) over in:

$$\begin{aligned} \frac{V}{g} &= r \frac{M}{M_a} \sum_{n=2}^{\infty} \xi^{n+1} P_n(\mu) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} K_n \left[\frac{R}{R} \right]^{n+1} P_n(\mu) \quad \text{met } K_n = r \frac{M}{M_a} \xi^{n+1} \end{aligned}$$

met $R = OM =$ afstand tussen de zwaartepunten van de hemellichamen

$\bar{\xi}, \bar{R} =$ gemiddelde ξ, R .

Dit is de gebruikelijke formulering (Schureman, Doodson^{**})

^{**} Schureman, P. Manual of harmonic analysis and prediction of tides, 1941, Washington

Doodson, A.T. Proc. Royal Soc., A, 100, 305-329

Waarden voor K zijn gegeven in onderstaande tabel.

	maan	zon
M/M_a	0,01229	332700
ξ	0,01659	$4,2635 \times 10^{-5}$
K_2	0,35785 m	0,16427 m
K_3	0,00593 m	0.000007 m

Uit deze tabel blijkt, dat termen met index drie zeer klein zijn t.o.v. de termen met index 2.

De vergelijking (27) geeft het evenwichtsgetij en is aldus een functie van α . Deze hoek zal voor een vaste plaats op aarde (coördinaten θ, λ) uitgedrukt worden in de variabele coördinaten van Q, de plaats van het hemellichaam op de aardbol.

Met behulp van z.g. geassocieerde polynomen van Legendre gaat (27) over in (Z= co-latitude, L = length w.r.t. vernal equinox):

$$\begin{aligned} \frac{V}{g} = & K_2 \left(\frac{\bar{R}}{R}\right)^3 \left[\sqrt{\frac{4\pi}{5}} P_2^0(Z) U_2^0(\theta, \lambda) + \right. \\ & - \sqrt{\frac{8\pi}{15}} P_2^1(Z) \cos L U_2^1(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{8\pi}{15}} P_2^1(Z) \sin L V_2^1(\theta, \lambda) \\ & \left. + \sqrt{\frac{2\pi}{15}} P_2^2(Z) \cos 2L U_2^2(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{2\pi}{15}} P_2^2(Z) \sin 2L V_2^2(\theta, \lambda) \right] + \\ & + K_3 \left(\frac{\bar{R}}{R}\right)^4 \left[\sqrt{\frac{4\pi}{7}} P_3^0(Z) U_3^0(\theta, \lambda) \right. \\ & - \sqrt{\frac{4\pi}{21}} P_3^1(Z) \cos L U_3^1(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{4\pi}{21}} P_3^1(Z) \sin L V_3^1(\theta, \lambda) \\ & + \sqrt{\frac{4\pi}{210}} P_3^2(Z) \cos 3L U_3^2(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{4\pi}{210}} P_3^2(Z) \sin 2L V_3^2(\theta, \lambda) \\ & \left. - \sqrt{\frac{\pi}{315}} P_3^3(Z) \cos 3L U_3^3(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{315}} P_3^3(Z) \sin 3L V_3^3(\theta, \lambda) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

waarin de coëfficiënten P, welke alleen afhangen van Z zijn:

$$\begin{aligned}
 P_1^0 &= \cos Z & P_2^0 &= \frac{3}{2} \cos^2 Z - \frac{1}{2} & P_3^0 &= \frac{5}{2} \cos^3 Z - \frac{3}{2} \cos Z \\
 P_1^1 &= \sin Z & P_2^1 &= 3 \sin Z \cos Z & P_3^1 &= \frac{3}{2} \sin Z (5 \cos^2 Z - 1) \\
 & & P_2^2 &= 3 \sin^2 Z & P_3^2 &= 15 \sin^2 Z \cos Z \\
 & & & & P_3^3 &= 15 \sin^3 Z
 \end{aligned}$$

Qua structuur bestaat iedere term in (28) uit $P \cos nL$ ($n = 1, 2, \dots$), of m.a.w. uit een langzaam variërend gedeelte P en een sneller variërend gedeelte in de vorm van $\cos nL$.

Deze laatste term bepaalt het karakter van het getij, d.w.z. enkeldaags, dubbeldaags, enz. Voorts is er nog een langzame variatie in R, die eveneens nog in rekening moet worden gebracht. Door Z, L en R als functies van de tijd te geven ontstaat nu een vorm, die overeenkomt met vergelijking (24). Voor de uitdrukkingen voor Z, L en R wordt verwezen naar het originele artikel van M. en C.

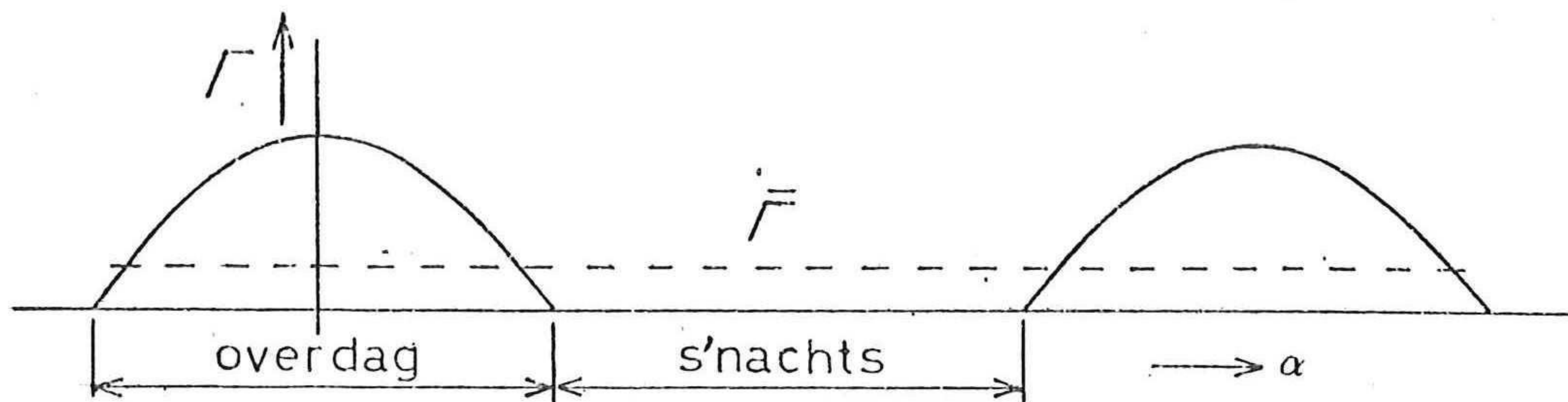
4.2. Zonnestraling

Teneinde ook regelmatig optredende meteorologische invloeden in rekening te brengen, stellen M. en C. een ingangsfunctie voor de straling, Γ , voor in de vorm van

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= S \frac{\bar{R}}{\rho} \cos \alpha \quad * \quad 0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2} \quad \text{overdag} \\
 &= 0 \quad \frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi \quad \text{s'nachts}
 \end{aligned} \tag{28}$$

waarin $S = \text{constante}$

* Het lijkt meer voor de hand te liggen de instraling evenredig te veronderstellen met $1/\rho^2$ dan met $1/\rho$, omdat aangenomen mag worden dat per tijdseenheid een constante energieflex door de zon afgegeven wordt, die getransporteerd moet worden door een bol met oppervlakte $4\pi\rho^2$.



Deze functie van de straling $\frac{1}{\rho}$ wordt weer ontwikkeld naar polynomen van Legendre, waardoor het resultaat wordt:

$$\Gamma = S \frac{\bar{R}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n P_n(\mu) = S \frac{\bar{R}}{R} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \mu + \dots \right)$$

In (29) stelt κ_n een constante voor:

$$\kappa_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \xi \quad (\xi = \frac{r}{R})$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \xi$$

$$\kappa_2 = \frac{5}{16} + \frac{1}{3} \xi$$

De eerste term (n=0) in (29) stelt de gemiddelde straling voor. Deze draagt niet bij tot de opwekking van het getij. De volgende term (n=1) doet dat wel, dit in tegenstelling tot de getijpotentialiaal, waar pas voor n=2 een getijverwekkende invloed ontstaat. Zoals bij de getijpotentialiaal kan het polynoom in (29) weer geschreven worden met behulp van geassocieerde polynomen van Legendre.

Het uiteindelijke resultaat wordt dan:

$$\Delta\Gamma = S \frac{\bar{R}}{R} \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}} P_1^0(Z) U_1^0(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} P_1^1(Z) \cos LU_1^1(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} P_1^1(Z) \sin LV_1^1(\theta, \lambda) \right]$$

+ eventueel 2e harmonische

In eerste instantie gaat het dus om een enkeldaags getij, zoals dat door sin L en cos L bepaald wordt. Voorts zijn lang-periodieke invloeden wederom aanwezig.

Een punt van zorg zal nog zijn hoe de afzonderlijke overdrachtsfuncties voor potentialiaal en straling als ingangssignalen van verschillende systemen bepaald moeten worden, omdat in beide ingangssignalen dezelfde frequenties voorkomen (b.v. die van S2)

5. Eisen te stellen aan de overdrachtsfuncties

Aangezien in de ingangssignalen niet alle frequenties voorkomen mag niet verwacht worden, dat over het gehele frequentiegebied een irp of frp bepaald kan worden. Alleen voor die frequenties, die in het ingangssignaal voorkomen kunnen de functies bepaald worden. Voor een efficiënte gang van zaken verdient het aanbeveling een voorspelling met zo weinig mogelijk bewerkingen uit te voeren. Dit houdt in dat met name voor de frp's slechts zoveel punten bepaald moeten worden als absoluut noodzakelijk is voor de berekening. Twee aspecten bepalen het aantal punten van een irp.

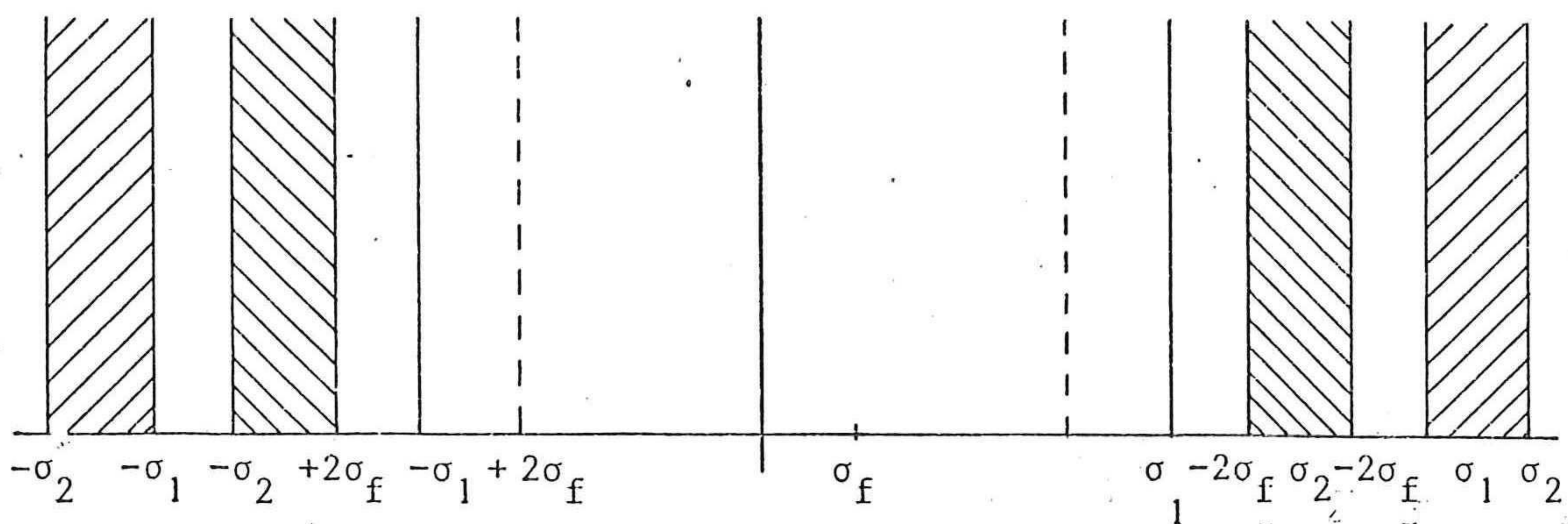
- i het maximaal toelaatbare bemonsteringsinterval van de irp's
- ii de minimale tijdsinterval waarover de irp's bepaald moeten worden

In de volgende twee paragrafen zal aan deze aspecten aandacht worden geschonken.

5.1. Maximale bemonsteringsinterval van de irp's

Het uitvoeren van convolutie-operaties in het tijdsdomein ten behoeve van getijvoorspelling moet in de berekening gebaseerd zijn op het gebruik van discrete punten van de irp's. Een en ander houdt in, dat bij de equivalente operatie in het frequentiedomein extra, verschoven spectra optreden, die eventueel het eindresultaat in ongunstige zin kunnen beïnvloeden. Dit zal gebeuren, indien de verschoven spectra bijdragen leveren in de van belang zijnde frequentiegebieden. De theoretische spectra van de ingangssignalen en dus ook van de te bepalen irp's, de frp's zijn gegeven op nauwe frequentiebanden. Voor de enkeldaagse getijden zijn er bijdragen voor $0,8 < \sigma < 1,1$ (omw/dag) en voor de dubbeldaagse getijden voor $1,75 < \sigma < 2,05$ (omw./dag).

Als het bemonsteringsinterval van de irp's Δt is, dat ontstaan in het frequentiedomein extra spectra, die gelijk zijn aan het oorspronkelijke maar verschoven zijn op de frequentie-as over een afstand $\frac{n}{\Delta t} = 2\sigma_f$ (σ_f = vouwfrequentie).



Bijgaande figuur illustreert dit nog eens voor een willekeurig spectrum dat theoretisch alleen op het interval $\pm (\sigma_1, \sigma_2)$ waarden heeft.

Om te voldoen aan de eis, dat het originele spectrum niet verstoord wordt door de verschoven spectra kan voor de vouwfrequentie aangetoond worden, dat:

$$\frac{\sigma_2}{n+1} < \sigma_f = \frac{1}{2\Delta t} < \frac{\sigma_1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(31)

Voor de enkeldaagse getijden ($0,8 < \sigma < 1,1$ omw/dag) levert dit voor de grootste Δt op, dat $1,25 < \Delta t < 1,35$ dagen. M.en C. hebben voor $\Delta t = 2$ dagen gekozen. Dit houdt dan in, dat het theoretische spectrum voor de enkeldaagse getijden moet liggen op het frequentieinterval $0,75 < |\sigma| < 1,0$ (omw/dag) ($n=3$) of $1,0 < |\sigma| < 1,25$ (omw/dag). De keus van $\Delta t = 2$ dagen lijkt derhalve voor de enkeldaagse getijden minder gelukkig. De verklaring inzake de toch wel bevredigende werking moet gezocht worden in het feit, dat op het interval $1,0 < |\sigma| < 1,1$ (omw/dag) de ingangssignalen klein zijn. Voor de dubbeldaagse getijden, $1,75 < |\sigma| < 2,05$ (omw/dag), levert het criterium (31) dat met de keuze van $\Delta t = 2$ dagen een frequentieinterval toelaatbaar is van $1,75 < |\sigma| < 2,0$ (omw/dag). Dit stemt redelijk overeen met het werkelijke frequentieinterval.

Resumerend kan gesteld worden, dat voor de irp's met een groot bemonsteringsinterval gewerkt kan worden; in ieder geval veel

groter dan men op grond van de eis dat de vouwfrequentie groter moet zijn, dan de hoogste frequentie, die nog in het spectrum voorkomt, normaal zou nemen. Deze methode is hier mogelijk vanwege de begrensde frequentiebanden van de enkel- en dubbeldaagse ingangssignalen.

5.2. Tijdsinterval, waarover irp's bepaald moeten worden

De lengte van de irp's bepalen volgens het criterium van Rayleigh het scheidende vermogen in het frequentiedomein. Als aangenomen wordt, dat de frp's glad verlopen (credo of smoothness) behoeven aan de lengten geen grote eisen worden gesteld. M. en C. stellen, dat in de frp's geen 'oscillaties' voorkomen met een 'periode kleiner dan $\Delta\sigma = \frac{1}{6}$ (omw/dag). Dit levert dan volgens van Rayleigh een minimaal benodigde lengte van de irp's op van $\frac{1}{\Delta\sigma} = 6$ dagen.

6. De bepaling van de responsiefuncties

De rechtstreekse bepaling van de frp's in het frequentiedomein geschiedt met de methode der kruisspectra, zoals beschreven in § 2.3. Als bijzonderheid kan daarbij opgemerkt worden, dat met name voor de langere waarnemingsperioden de correlatie tussen de ingangssignalen van verschillende soorten getijden gering is, waardoor de matrix van kruisspectra in blokken uiteen valt, die afzonderlijk geïnverteerd kunnen worden. Dit is verder niet zo essentieel; belangrijker is, dat in één bewerking alle frp's verkregen worden. M. en C. duiden dit aan met 'lumped analysis'. M. en C. beschrijven ook een methode, waarbij eerst voor de belangrijkste ingangssignalen (P_2^m) de analyse wordt uitgevoerd. Het resultaat wordt afgetrokken van het gemeten signaal, waarna het residu met behulp van een ander ingangssignaal, b.v. P_3^m , opnieuw geanalyseerd wordt enz. M. en C. noemen dit 'sequential analysis'. Formeel bezien lijkt deze handelwijze echter minder correct, omdat dit zou impliceren, dat de ingangssignalen P_2^m en P_3^m in geen enkel opzicht gecorreleerd zijn. Dit valt echter te betwijfelen, aangezien beide ingangssignalen zowel enkeldaagse,

als dubbeldaagse getijden bevatten, waarvan de frequenties met elkaar overeenkomen en derhalve dus wel gecorreleerd zijn.

Als eenmaal de frp's bepaald zijn, kunnen uiteraard de irp's uit de frp's via de Fourriertransformatie bepaald worden. De directe bepaling van de irp's kan ook gebeuren met de methode zoals beschreven in § 2.2.1.* In één procedure zullen alle coëfficiënten (punten van de irp's) opgelost moeten worden. Ook hier zal blijken, dat vanwege de geringe correlatie tussen de verschillende soorten getijden de coëfficiënten matrix uiteen zal vallen in een aantal afzonderlijke blokken, die apart geïnverteerd kunnen worden

7. Opmerkingen over de resultaten bereikt voor Honolulu

M. en C. passen de methode toe voor twee stations, nl. Honolulu en Newlyn. Daarvan is Honolulu aantrekkelijk, omdat niet-lineaire invloeden slechts een geringe rol spelen. De volgende resultaten zijn verkregen:

- fig. 1 spectra en admittanties voor ingangssignalen betrekking hebbend op
P₂⁰, P₂¹ en P₂², resolutie 1 omw/maand
- fig. 2 idem voor P₂⁰, resolutie 1 omw/jaar
- fig. 3 " " P₂¹, " " "
- fig. 4 " " P₂², " " "
- fig. 5 " " P₃⁰, P₃¹, P₃² en P₃³, resolutie 1 omw/maand
- fig. 6 zonnestralingsgetijden

In alle figuren zijn afgebeeld voor positieve frequenties

* M. en C. verlaten het causaliteitsbeginsel door toe te laten, dat k(t) ongelijk aan nul kan zijn voor t < 0, d.w.z. de waarden van k(t) worden symmetrisch om t = 0 gegroepeerd.

- a) het energiedichtheidsspectrum van de ingangssignalen, gebaseerd op het evenwichtsgetij
- b) idem van de waterspiegel met daarin met zwarte kolommen aangegeven dat deel van de energie, dat afkomstig van de ingangssignalen (coherente energie) is. Zowel bij a) als bij b) zijn de energieën van het linker- en van het rechterhalfvlak samen genomen
- c) de frp's gedefinieerd volgens

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a(t) + ib(t)) e^{-2\pi i \sigma t} dt \quad (32)$$

De admittanties zijn op twee wijzen berekend. De cirkels (zwart voor reële deel en open voor imag. deel) zijn berekend in het frequentiedomein; de lijnen stellen de Fouriertransform voor van de irp's zoals berekend in het tijdsdomein.

Bij de figuren kunnen de volgende opmerkingen gemaakt worden.

- a) er is een 'plateau' van ruis aanwezig, waarvan de sterkte ongeveer $0,01 \text{ m}^2$ dag bedraagt over het gehele beschouwde frequentieinterval
- b) het coherente energiepatroon vertoont veel overeenkomst met dat van de ingangssignalen; de ruis neemt wat toe (tidal cusp), waar sterke componenten als b.v. M2 voorkomen
- c) het relatief grote deel niet-coherente energie in de zongroepen (11) en (22) moet worden toegeschreven aan stralingsprocessen
- d) alle frp's verlopen betrekkelijk vlak
- e) de energie van P_3^m is circa 4 ordes van grootte kleiner dan die van P_2^m ; voorts zijn de frp's heel anders dan bij P_2^m

* M. en C. geven geen resultaten voor negatieve frequentie. Dit lijkt in dit geval wel noodzakelijk, omdat bij een complexe functie de Fouriertransform in het linkerhalfvlak niet de complex toegevoegde is van die van het rechterhalfvlak.

- f) stralingsingangssignaal is relatief sterk voor lang periodieke getijden als Sa en enkeldaags getij (S1) vergeleken met gravitatieingangssignaal
- g) het S2 afkomstig van straling heeft bij Honolulu ongeveer een amplitude van 1,8 cm.

8. Voorspelling

M. en C. hebben de resultaten van de door hun ontwikkelde methode vergeleken met die van de gewone harmonische analyse voor het "lineaire" station Honolulu, waar de berekeningen voor zijn gemaakt. De gegevens voor beide methoden zijn beide ontleend aan eenzelfde lange reeks van waarnemingen. De voorspellingen die met behulp van beide methoden gedaan kunnen worden wijken zeer weinig van elkaar af. Bij de responsiemethode zijn wat minder constanten nodig dan bij de harmonische methode, doch het verschil is nauwelijks significant. Zo geeft b.v. de harmonische methode met 20 stationsconstanten een variantie van het residu van $0,4 \text{ cm}^2$ op een totale variantie van de voorspelling van 155 cm^2 . De responsiemethode bereikt een variantie van het residu van $0,2 \text{ cm}^2$ met de helft van het aantal constanten.

De bijdrage van het getij afkomstig van P_3^m blijken erg klein te zijn t.o.v. de ruis, die bij Honolulu erg laag is.

Bij de harmonische methode komt overigens een 3x- daagse component niet voor.

9. Uitbreiding theorie voor zwak niet-lineaire systemen

Vooraf in de ondiepe kustwateren worden de getijden beïnvloed door niet-lineaire effecten als wrijving en convectieve versnelling. Als deze effecten niet te groot zijn kan geprobeerd worden deze te beschrijven met behulp van een uitbreiding van de lineaire systeemtheorie geldend voor zwak niet-lineaire processen. Met het getij als voorbeeld zal dit inhouden, dat er ook boventonen opgewekt worden, dus bijvoorbeeld een M_4 , MS_4 of componenten met nog hogere frequenties.

In het puur lineaire geval is dit niet mogelijk, zoals ogenblikkelijk blijkt uit vergelijking (3), geldend in het frequentiedomein. Immers, indien in hetingangssignaal deze hoge frequenties niet voorkomen dan zijn zij ook in het uitgangssignaal niet aanwezig.

Voor de uitbreiding van de theorie wordt teruggegrepen op vergelijking (1):

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)k(\tau)d\tau \quad (1)$$

De integraal in het rechterlid kan benaderd worden door

$$\begin{aligned} x_2(t) &\approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1(t - i\Delta\tau)k(i\Delta\tau)\Delta\tau \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x^{(i)}(t)k^{(i)} = k^{(0)}x^{(0)}(t) + k^{(1)}x^{(1)}(t) + k^{(2)}x^{(2)}(t) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

In dit geval is x_2 een lineaire combinatie van vele functies van de tijd. Meer algemeen zou gesteld kunnen worden, dat x_2 een willekeurige functie is van $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$:

$$x_2(t) = \psi(x^{(0)}(t), x^{(1)}(t), \dots)$$

Een benadering voor x_2 wordt verkregen door het rechterlid met behulp van een meer-dimensionale Taylorreeks te ontwikkelen naar $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$, zodat

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \psi(0, 0, 0, \dots) \\ &+ x^{(0)}(t) \psi_0(0, 0, \dots) + x^{(1)}(t) \psi_1(0, 0, \dots) + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left[x^{(0)}(t) \right]^2 \psi_{00}(0, 0, \dots) + x^{(0)}(t)x^{(1)}(t) \psi_{01}(0, 0, \dots) + \right. \\ &\left. + x^{(0)}(t)x^{(2)}(t) \psi_{02}(0, 0, \dots) + x^{(1)}(t)x^{(0)}(t) \psi_{10}(0, 0, \dots) \dots \right] \end{aligned}$$

+ 3e orde termen

waarin $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^{(i)}}$, $\psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}$

Na somming kan dit geschreven worden als:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) = & \psi(0, 0, 0, \dots) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x^{(i)}(t) \psi_i(0, 0, 0, \dots) \\
 & + \frac{1}{2!} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) \psi_{i,j}(0, 0, 0, \dots) \\
 & + \frac{1}{3!} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) x^{(k)}(t) \psi_{i,j,k}(0, 0, 0, \dots) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Voor een systeem zonder ruis $\psi(0, 0, 0, \dots) = 0$ en als dit aangenomen wordt dan gaat bovenstaande relatie door over te gaan op het continue geval over in:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) k(\tau) d\tau \tag{33} \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) k(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) k(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Hierin heet het deel met de dubbele integraal de bi-lineaire bijdrage, het deel met de drievoudige integraal de tri-lineaire enz. Overeenkomstig is $k(\tau_1, \tau_2)$ de bi-lineaire i.r.p. en $k(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ de tri-lineaire i.r.p. van het systeem. Vergelijking (33) toont direct dat nu ook hogere frequenties in het uitgangssignaal kunnen voorkomen dan in het ingangssignaal. Het bi-lineaire deel laat bijvoorbeeld het product van $x_1(t - \tau_1)$ en $x_1(t - \tau_2)$ zien. Als $x_1(t)$ een sinus met frequentie σ is, dan zal het uitgangssignaal een sinuscomponent met frequentie 2σ bevatten. Uit het bovenstaande volgt voor het getij, dat het bi-lineaire deel wel een $M_4 (= M_2 \times M_2)$ of een $MS_4 (= M_2 \times S_2)$ kan bevatten, maar geen M_6 . Deze laatste zal uit het tri-lineaire deel moeten komen.

Een en ander is ook af te leiden voor het frequentiedomein.
Indien de bi-responsie $x_2^2(t)$ wordt genoemd, dan;

$$x_2^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) k(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (34)$$

Aangezien

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma) e^{2\pi i \sigma t} d\sigma$$

kan voor (34) ook worden geschreven:

$$x_2^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma) e^{2\pi i \sigma_1 (t - \tau_1)} \cdot X_1(\sigma) e^{2\pi i \sigma_2 (t - \tau_2)} k(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma_1) X_1(\sigma_2) e^{2\pi i (\sigma_1 + \sigma_2) t} d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau_1, \tau_2) e^{-2\pi i (\sigma_1 \tau_1 + \sigma_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

De laatste integraal stelt de 2-dimensionale Fouriertransform voor van $k(\tau_1, \tau_2)$:

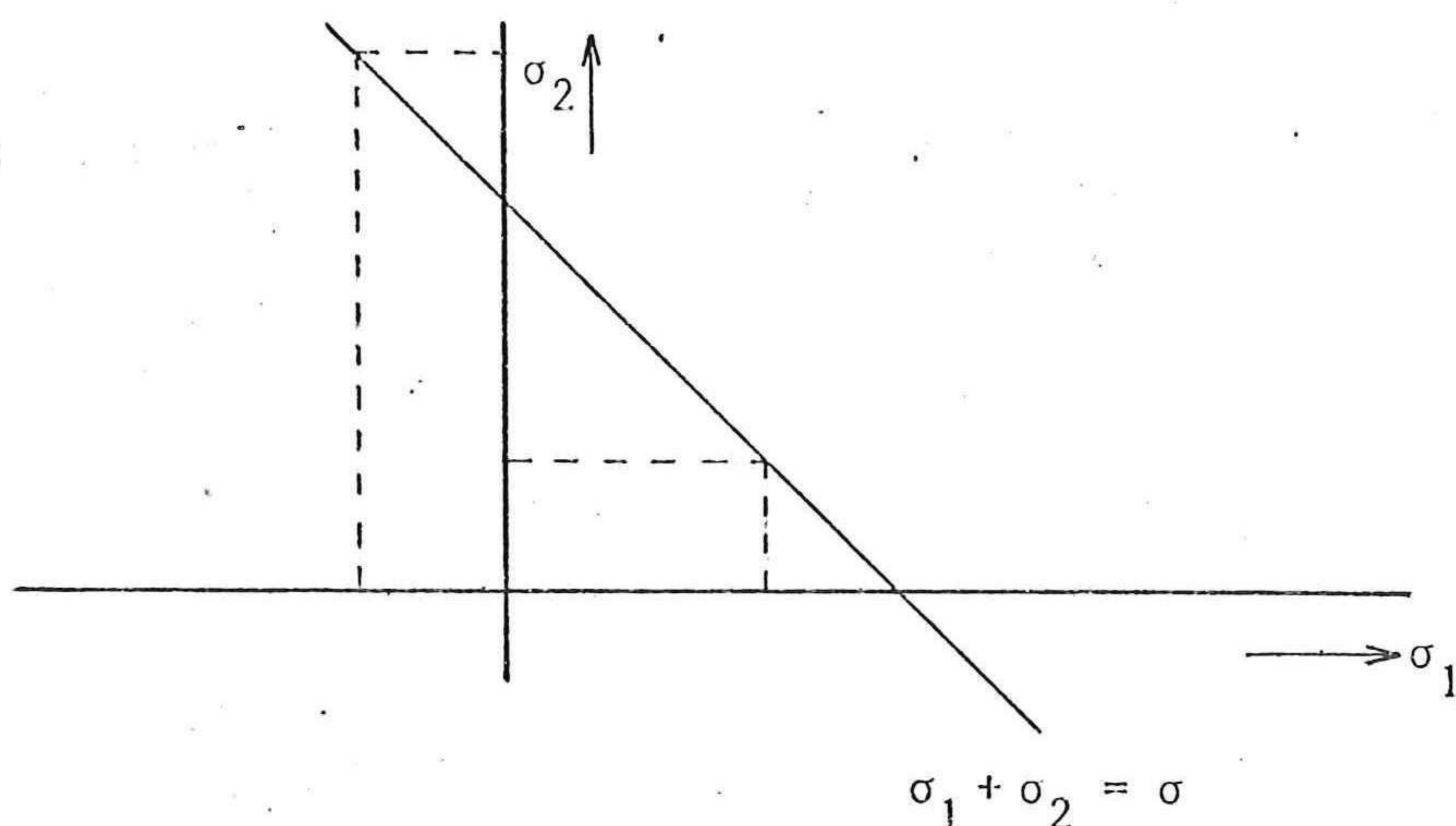
$$K(\sigma_1, \sigma_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau_1, \tau_2) e^{2\pi i (\sigma_1 \tau_1 + \sigma_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (35)$$

zodat

$$x_2^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma_1) X_1(\sigma_2) K(\sigma_1, \sigma_2) e^{+2\pi i (\sigma_1 + \sigma_2) t} d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (36)$$

Fouriertransformatie van deze uitdrukking levert op:

$$x_2^2(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma) X_1(\sigma_1) X_1(\sigma_2) K(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (37)$$



Deze uitdrukking geeft, dat voor de berekening van één waarde van $x_2^2(\sigma)$ de integraal berekend moet worden langs de lijn $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Als er sprake is van een beperkt aantal basiskomponenten, zoals bij getijden het geval is, leveren dus die componenten een bijdrage waarvoor de som of verschil-frequenties gelijk zijn aan σ .

Deze laatste uitdrukking in het bijzonder maakt duidelijk, dat als gevolg van de interactie tussen (getij)componenten met zekere frequentie andere componenten gegenereerd worden. De onderlinge interactie wordt bepaald door de bi-admittantie $K(\sigma_1, \sigma_2)$.

In het algemeen zullen er in een niet-lineair systeem als gevolg van interactie tussen de componenten onderling ook bijdragen komen bij frequenties die bij het lineaire systeem ook al in het systeem zouden voorkomen. Daarom verliezen de bewerkingen in het frequentiedomein hun eenduidigheid. Immers het spectrum van het uitgangssignaal is opgebouwd uit

$$X_2(\sigma) = X_2^1(\sigma) + X_2^2(\sigma) + \dots$$

In deze uitdrukking kan bijvoorbeeld $x_2^2(\sigma)$ niet van $x_2^1(\sigma)$ gescheiden worden. Voorts kan het bi-spectrum opgebouwd zijn uit bijdragen van interacties van verschillende componenten. Ook dit is niet te scheiden. M.a.w. ook als $X_2(\sigma)$ bekend zou zijn, dan nog is $K(\sigma_1, \sigma_2)$ niet te berekenen. Derhalve dienen de bewerkingen in het tijdsdomein plaats te vinden.

10. Voorbeeld

Om een en ander uit 9 toe te lichten zal een gedempt massa-veer systeem beschouwd worden, waarvan de veerconstante van de verplaatsing afhangt volgens

$$C = c(1 - \epsilon x) \quad \epsilon \ll 1$$

Het massa-veer-systeem wordt geëxciteerd door een willekeurige kracht $f(t)$. De vergelijking, die de beweging van het systeem beschrijft wordt:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c(x - \epsilon x^2) = f(t) \quad (38)$$

Er wordt gezocht naar oplossingen van het systeem volgens

$$\tilde{x} = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots$$

Het 0^{de}-orde systeem wordt:

$$a\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + cx_0 = f(t)$$

De oplossing voor x_0 wordt:

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (39)$$

waarin $k_0(r)$ de i.r.p. van het nulde orde systeem voorstelt.

Het 1^e-orde systeem wordt:

$$a\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 = cx_0^2$$

waarvan de oplossing is:

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau') cx_0^2(t - \tau') d\tau' \quad (40)$$

In dit bijzondere geval zijn de i.r.p.'s van het 0^e-orde en 1^e-orde systeem gelijk.

Vergelijking (40) kan m.b.v. (39) geschreven worden als:

$$x_1(t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau) f(t - \tau' - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau'') f(t - \tau' - \tau'') d\tau''$$

Voer in $\tau' + \tau = \tau_1$

$$\tau' + \tau'' = \tau_2$$

zodat

$$x_1(t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau') k(\tau' - \tau_1) k(\tau' - \tau_2) d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau_2) d\tau_2$$

In bovenstaande vergelijking kan de integratie naar τ' uitgevoerd worden:

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau') k(\tau' - \tau) k(\tau' - \tau_2) d\tau' = k'(\tau_1, \tau_2) \quad (41)$$

zodat:

$$x_1(t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k'(\tau_1, \tau_2) f(t - \tau_1) f(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (42)$$

In dit geval is de i.r.p. $k(t)$ van het 0-de orde systeem voor $\alpha^2 = 4ac - b^2 > 0$ (gedempte trilling)

$$k(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{b}{2m} t} \sin \frac{\alpha t}{m}$$

zodat

$$k'(\tau_1, \tau_2) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8\alpha} e^{-\frac{b}{2m}(3\tau' + u + v)} \sin \frac{\alpha \tau'}{m} \sin \frac{\alpha(\tau' - u)}{m} \sin \frac{\alpha(\tau' - v)}{m} d\tau'$$

Het resultaat van de integratie wordt:

$$k'(\tau_1, \tau_2) = 16\alpha m e^{-\frac{b}{2m}(\tau_1 + \tau_2)}$$

$$\frac{2\alpha^2 \cos \alpha/m(\tau_1 - \tau_2) - \alpha b \sin \alpha/m(\tau_1 + \tau_2) + (3/4b^2 - \alpha^2) \sin \alpha/m \tau_1 \sin \alpha/m \tau_2}{(9b^2 + 4\alpha^2)(3b^2 + 12\alpha^2)}$$

(43)

Voor de interpretatie van het laatste resultaat zal de responsie op een eenheidsstoot op $t=0$ beschouwd worden. De responsie is dan:

$$x_2(t) = x_2^1(t) + x_2^2(t)$$

waarbij $x_2^1(t) = k(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \frac{\alpha t}{m}$

en $x_2^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) k'(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$

$$x_2^2(t) = 16\alpha m e^{-\frac{b}{m}t} \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{3}{8} b^2 + (\frac{3}{8} b^2 - \frac{1}{2} \alpha^2) \cos 2\alpha/m t}{(9b^2 + 4\alpha^2)(3b^2 + 12\alpha^2)}$$

Het resultaat voor $x_2^2(t)$ laat zien, dat naast een middenstandsverschuiving een component met een frequentie ontstaat, die het dubbele is van de frequentie, die in $k(t)$ voorkomt.

Er is verder vanaf gezien de bi-admittantie te berekenen.

11. Werkwijze van Munk en Cartwright voor Newlyn

M. en C. hebben uitgaande van vgl. (33) verschillende mogelijkheden voor niet-lineaire interactie onderzocht, nl

- i. de ingangssignalen bestaan uit de getijpotentialen
- ii. de ingangssignalen bestaan uit de uitgangssignalen, die verkregen worden door het systeem als zuiver lineair te beschouwen.

M. en C. vonden geen principiële verschillen in de benaderingen en zijn daarom uitgegaan van ii, d.w.z. de 1e-orde benadering voor de waterspiegel. Hoewel M. en C. dit niet aangeven is wellicht hiervoor de rechtvaardiging dat de hogere orde termen ontstaan als gevolg van de waterbeweging.

De berekeningen voor het niet-lineaire station betreffen Newlyn. De niet-lineaire effecten zijn echter zwak, zodat volstaan kan worden met de bepaling van slechts enkele punten van de bi-irp's. Voorts is nog één punt van de tri-irp bepaald. De voornaamste resultaten worden gepresenteerd in fig. 12.

Symbolen

$a(t), b(t)$	ingangsfuncties afgeleid uit de getijpotentiaal
$c(t)$	covariantiefunctie
g	versnelling van de zwaartekracht
h	waterspiegel
i, m, n	integers
$k(t)$	impulsresponsiefunctie
r	straal aarde
t	tijd
$u(v), v(t)$	impulsresponsiefuncties
$x(t)$	in- of uitgangsfuncties
$z(t)$	ruis
$C(\tau), K(\tau), X(\tau), Z(\tau)$	Fouriergetransformeerde van $c(t), k(t), x(t), z(t)$
F	kracht
G	gravitatieconstante
K_i	constanten
L	lengte
M	massa
M_a	massa aarde
R	afstand tussen aarde en hemellichaam
S	stralingsconstante
T	halve meetperiode
U, V	plaatsfuncties afgeleid uit getijpotentiaal
α	hoek
κ	constante
μ	constante ($= \cos\alpha$)
ρ	afstand tussen hemellichaam en plaats op aarde
θ, λ	coördinaten

σ	frequentie
τ	tijd
ξ	relatieve straal aarde ($=r/R$)