

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
LABORATORIUM VOOR FYSISCH TECHNISCHE

BEPALING VAN DE RHEOLOGIE VAN POLYMEEROPLOSSINGEN

Afstudeerverslag

J. Bac (T)

november 1969

SAMENVATTING

Veel oplossingen van hoogmoleculaire stoffen vertonen geen lineair verband tussen de schuifspanning en de afschuifsnelheid, zoals Newtonse vloeistoffen. Door dit verband in een bepaald interval van afschuifsnelheden te meten wordt de rheologie in dit interval gevonden.

Er werd een kapillairviskosimeter ontwikkeld, waarmee voor iedere vloeistof het verband tussen de schuifspanning en de afschuifsnelheid kan worden bepaald, mits geen zwichtspanning aanwezig is. Voor pseudoplastische vloeistoffen ontstaan echter nog fouten door de bouw van de opstelling. Met een computerprogramma worden deze fouten gecorrigeerd, waarna de meetmethode zeer betrouwbare resultaten oplevert. De resultaten van metingen aan pseudoplastische vloeistoffen worden vergeleken met die van twee industriële viskosimeters.

SUMMARY

To determine the rheology of non-Newtonian liquids a capillary viscometer has been built. With this apparatus we can determine the relation between shear-stress and shear-rate over a large range of shear-rates, provided that the liquid has no yield value.

With power law liquids a correction is necessary for the pressure-fall in the apparatus outside the capillair. This correction is achieved at by using a computer for which a program is written. The results of the measurements for power law liquids are compared with that of two industrial viscometers.

<u>INHOUDSOPGAVE</u>	<u>blz.</u>
SAMENVATTING	1
INHOUDSOPGAVE	2
1. INLEIDING	3
2. DE THEORIE	4
2.1 De rotatieviskosimeters	4
2.2 De kapillairviskosimeter	5
3. DE APPARATUUR EN DE WERKWIJZE	8
3.1 De meetopstelling	8
3.2 Het meten van de drukval	9
3.3 Het meten van het debiet	10
3.4 De drukval in de toevoerleidingen	11
4. DE IJKING VAN DE KAPILLAIREN	12
5. DE METINGEN EN RESULTATEN	14
6. DE INTERPRETATIE VAN DE MEETRESULTATEN	16
6.1 De kapillairviskosimeter	16
6.2 De Rotovisko	17
6.3 De Rheomat 15	18
7. CONCLUSIES	20
SYMBOLENLIJST	21
LITERATUUR	22
GRAFIEKEN	23 t/m 26
APPENDICES 1 t/m 4	27 t/m 33

1. INLEIDING

Om de viskositeit van vloeistoffen te meten zijn veel uiteenlopende apparaten ontwikkeld. Als de rheologie bepaald wordt moet een viskosimeter gebruikt worden waarin één wel gedefinieerde schuifspanning optreedt, die gevarieerd en gemeten kan worden over het gewenste gebied. De meeste technische viskosimeters vervallen omdat die een gemiddelde viskositeit meten over een geheel gebied van schuifspanningen (1). De meest gebruikte "absolute" viskosimeters zijn van het kapillaire type of zijn rotatieviskosimeters bestaande uit twee concentrische cilinders. Op ons laboratorium zijn twee industriële rotatieviskosimeters aanwezig. Dit zijn de Rotovisko van Gebrüder Haake k.G. en de Rheomat 15 van Contraves A.G. Deze viskosimeters geven echter verschillende resultaten voor niet-Newtonse vloeistoffen, door fouten die bij deze opstellingen niet te vermijden zijn. Voor deze fouten is moeilijk te corrigeren, zoals in het volgende hoofdstuk wordt aangetoond. Om de betrouwbaarheid van deze viskosimeters te testen en ook om bij lagere afschuifsnelheden te kunnen meten moest een nauwkeurige, absolute viskosimeter worden gebouwd. De rotatieviskosimeter geeft naast bovengenoemde bezwaren moeilijkheden bij lage afschuifsnelheden i.v.m. de stabiliteit, terwijl ook het bepalen van de afschuifspanning over een groot gebied moeilijkheden geeft. Dit komt omdat het gedrag van de veer waarmee de schuifspanning wordt gemeten slechts over een beperkt gebied een Hooke's gedrag vertoont. Met een kapillair zijn interpretatiemoeilijkheden wegens een afwijkende rheologie gemakkelijker te overwinnen. De druk over het kapillair kan onbeperkt gevarieerd worden, terwijl ook het uitstromende debiet nauwkeurig te bepalen is. Hoewel de kapillairviskosimeter praktische bezwaren heeft zoals de grootte van het monster, de tijdrovende meting en het schoonmaken werd voor deze viskosimeter gekozen.

2. DE THEORIE

2.1 De rotatieviskosimeters

Het moment M dat door de vloeistof op de ronddraaiende binnenste cilinder wordt uitgeoefend wordt gemeten met een veer. Uit deze meting kan de schuifspanning berekend worden volgens

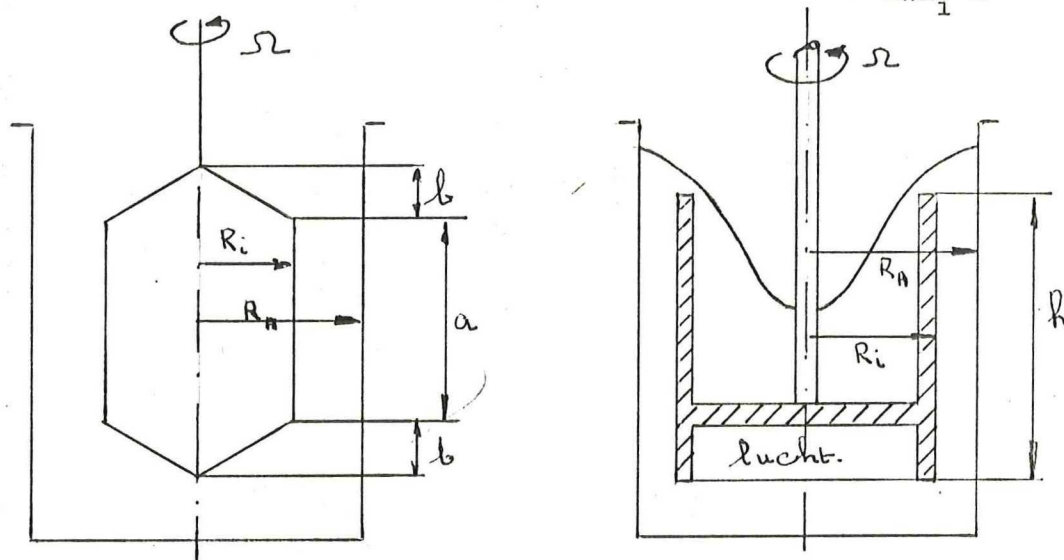
$$\tau = \frac{M}{2\pi R_i^2 h}$$


Fig. 1. MEETLICHAMEN VAN RHEOMAT 15 EN VAN DE ROTOVISKO

Bij de Rheomat 15 moet voor h dan ingevuld worden $h = a + 2 \cdot \frac{1}{3} b$. (zie fig. 1). Het verschil tussen de twee viskosimeters is de constructie van de eindvlakken van de binnenste cilinder. Voor Newtonse vloeistoffen geeft bovenstaande waarde voor h bij de Rheomat 15 de goede correctie, terwijl bij de Rotovisko de eindvlakken door de luchtbel geen impuls overdragen.

De afschuifsnelsheid bij Newtonse vloeistoffen aan de wand van de binnenste cilinder is $\dot{\gamma} = \frac{2\Omega}{1 - (\frac{1}{S})^2}$.

Hierbij is S gelijk aan R_i/R_A .

Voor pseudoplastische vloeistoffen wordt de afschuifsnelsheid echter groter dan uit deze formule blijkt. Hiervoor kan bij de Rotovisko gecorrigeerd worden, waarbij de correctiefactor afhankelijk is van S^2 en n . Deze correctiefactor is voor het algemene geval afgeleid door Krieger en Maron (3), terwijl Visser (4) de afleiding voor Ostwaldse vloeistoffen heeft gegeven. De correctiefactor C_R voor de afschuifsnelsheid aan de wand wordt dan:

$$C_R = \frac{1 - (\frac{1}{S})^2}{n \{1 - (\frac{1}{S})^{2/n}\}}$$

Bij de Rheomat 15 gaan bij pseudoplastische vloeistoffen ook de eindvlakken van de cilinder een belangrijkere rol spelen, zodat voor h een te kleine waarde wordt genomen. Bij meting wordt dus voor de afschuifspanning een te grote waarde gevonden. Als de afschuifsnelheid, die volgens een tabel bij een bepaalde omwentelingssnelheid hoort, aan de wand van de binnenste cilinder berekend is zal een te kleine waarde gevonden worden. Dit betekent dat een te grote viskositeit wordt gevonden. Als echter de afschuifsnelheid en de afschuifspanning betrokken worden op de wand van de buitenste cilinder, dan zal voor beide een te grote waarde worden gevonden, zodat de fouten elkaar tegenwerken. Of de fouten elkaar opheffen zal afhangen van een juiste keuze van de cilinder, waarop de tabellen zijn gebaseerd. Dit aannemende wordt er geen correctie op de metingen van de Rheomat 15 aangebracht.

Om deze moeilijke correcties, die noodzakelijk zijn voor enkele cilinders, en om het door de veer beperkte gebied van te meten schuifspanningen te vermijden is naar een andere meetmethode gezocht.

2.2 De kapillairviskosimeter.

Voor de isotherme, ingestelde vloeistofspanning door een kapillair geldt de impulsbalans:

$$\tau_{r.z.} = \frac{r}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) = \frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} \quad (1)$$

De schuifspanning van de stroming aan de wand is:

$$\tau_w = \tau_{r.z.}|_R = \frac{R}{2} \frac{\Delta p}{L} \quad (2)$$

De schuifspanning loopt dus altijd lineair van een waarde 0 in het midden van het kapillair tot τ_w aan de wand. Rabinowitsch heeft aangegeven hoe uit drukval-debiet metingen het verband tussen de afschuifsnelheid en de drukval, dus de schuifspanning is te berekenen, onafhankelijk van de rheologie van de vloeistof. Voor de afleiding hiervan wordt verwezen naar appendix 1:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\pi R^3} \left\{ 3 \dot{\phi}_v + \Delta p \frac{d\dot{\phi}_v}{d\Delta p} \right\} \quad (3)$$

De fouten die bij het gebruik van de viskosimeter kunnen optreden zijn eindeffecten, wandeffecten en fouten veroorzaakt door de invloed van de oppervlaktetension indien er een vrij vloeistofoppervlak aanwezig is of een warmte-effekt.

De eindeffecten geven een drukval bij de overgang van de vloeistof van de leiding naar het kapillair en omgekeerd, omdat de snelheidsverdeling niet direkt de energetisch meest gunstige is.

Deze drukval wordt voor Newtonse vloeistoffen beschreven als (2) :

$$\Delta p = 10 \frac{\eta \phi_v}{d^3} \quad \text{voor } d \ll D$$

$$\text{en } \Delta p = 8 \frac{\eta \phi_v}{d^3} \quad \text{voor } 5d = 2D.$$

Voor pseudoplastische vloeistoffen is deze drukval kleiner.

In de formules is d de diameter van het kapillair en D de diameter van de toevoerleiding. Omdat voor de drukval over het kapillair geldt:

$$\Delta p = \frac{128}{\pi} \frac{L}{d} \frac{\eta \phi_v}{d^3}$$

is dit effect voor Newtonse vloeistoffen te beschrijven als een effectieve lengtevermeerdering l van het kapillair. Deze is voor de in- en uitstroming bij het kapillair gelijk aan:

$$\frac{l}{d} = 2 \cdot \frac{10 \pi}{128} = 0,50.$$

Als de vloeistof visko-elastisch is kunnen de eindeffecten een effectieve lengtevermeerdering veroorzaken die veel groter is. Het effect is dan alleen te bepalen door met meerdere kapillairen van dezelfde diameter, maar een verschillende lengte te meten.

Het wandeffect wordt veroorzaakt door ontmenging aan de wand. Dit zal alleen van belang zijn als gemeten wordt aan vloeistoffen waarin grote vaste deeltjes zijn gesuspendeerd.

De oppervlaktetension veroorzaakt een extra druk als bij een vrije in- of uitstroomopening gekromde oppervlakken aanwezig zijn. Dit is o.a. belangrijk als het uitstromende debiet gemeten wordt als druppels. De overdruk in de vloeistofdruppel is $2\sigma/R$, en deze druk vermindert de drukval over het kapillair.

Het warmte-effekt door energiedissipatie bij hoge afschuifsnellheden zal de viskositeit van de vloeistof verlagen. De energiedissipatie geeft een productie van warmte : $\phi_w = \phi_v \Delta p$.

De adiabatistische temperatuurverhoging is gelijk aan:

$$\Delta T = \frac{\Delta p}{C_{p\varphi}}$$

De grootte van de fout wordt bepaald door de temperatuurafhankelijkheid van de viskositeit.

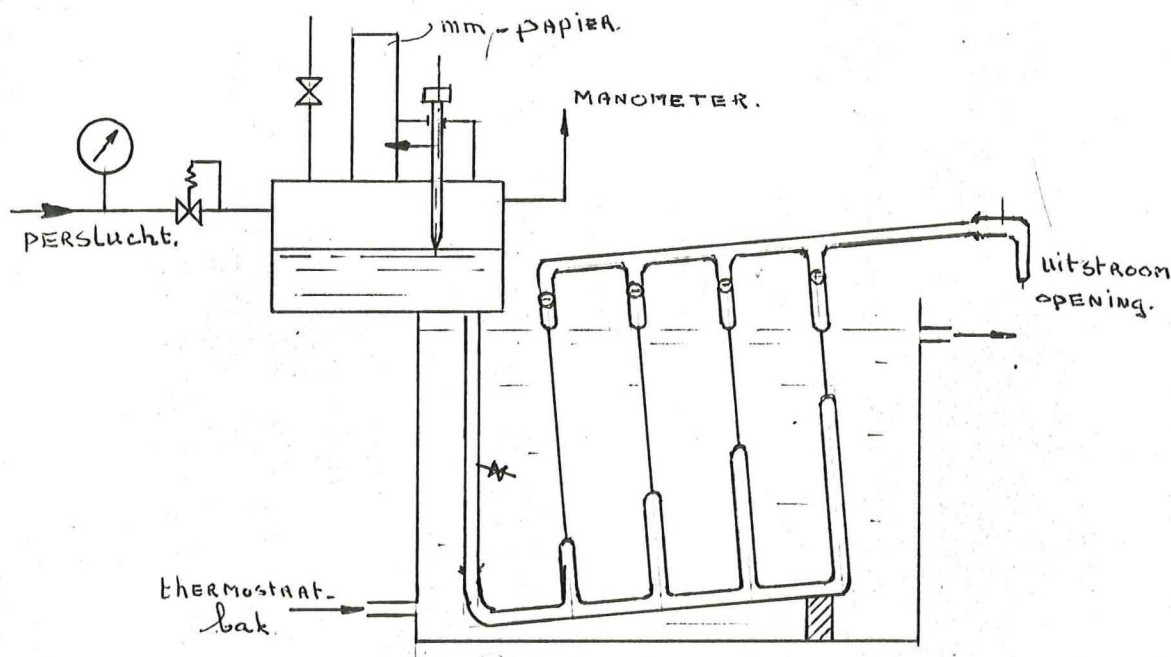
Deze fouten zijn door de bouw van onze opstelling òf te verwaarlozen òf uit metingen te bepalen zoals in het volgende hoofdstuk wordt beschreven. De voor de opstelling noodzakelijke toevoerleidingen en kranen kunnen echter ook een fout veroorzaken. Deze fout, veroorzaakt door een drukval in dit deel van het leidingsysteem, kan voor psuedoplastische vloeistoffen groot worden, zodat hier wel een correctie noodzakelijk is. De correctie wordt beschreven in 3.4.

3. DE APPARATUUR EN DE WERKWIJZE

3.1 De meetopstelling

Om over een groot gebied van afschuifsnelheden bij een ongeveer constant debiet te kunnen meten werden een aantal kapillairen parallel gezet. Na ieder kapillair komt een afsluiter, zodat één gewenst kapillair open gezet kan worden. Om de weerstand buiten de kapillairen zo klein mogelijk te houden zijn enkele extra grote kranen gemonteerd (de geometrie van de hele opstelling wordt gegeven in appendix 2). De kapillairen zijn zo gekozen dat de lengte-diameter verhouding constant is. Dit betekent dat de schuifspanning, ook bij overschakelen op een ander kapillair, alleen maar afhankelijk is van het drukverschil. Voor de vier kapillairen, waarin de rheologie is gemeten, is als diameterverhouding voor twee opeenvolgende kapillairen ongeveer 1,4 gekozen. Deze kapillairen zijn samengebracht in een kapillairenset.

Om te bepalen of de einddeffekten belangrijk zijn en ze te schatten is een tweede kapillairenset gemaakt. Deze set bevat kapillairen met constante diameters, maar een verschillende lengte. De glazen kapillairensets worden met bolkoppelingen parallel in de opstelling geplaatst. In onderstaande tekening is er maar één aangegeven. Om te zorgen dat er bij het vullen geen lucht in de leidingen blijft, staan de kapillairensets schuin.



Na de meting laat men de op constante temperatuur gehouden bak leeglopen, waarna de meetvloeistof afgetapt wordt bij de kraan onder het drukvat. Om de vloeistof door de kapillairen te persen wordt bij de uitstroomtuit een persluchtaansluiting gemaakt. Deze lucht kan ook verwarmd worden, zodat na het schoonmaken de opstelling droog geblazen kan worden. Het schoonmaken kan snel gebeuren omdat door de bolkoppelingen de kapillairensets verwijderd kunnen worden, waarna ook het drukvat met toebehoren gemakkelijk gedemonsteerd wordt.

3.2 Het meten van het drukverschil

De drijvende kracht om de vloeistof door de kapillairen te laten stromen is vooral de luchtdruk in het drukvat. Eerst was dit een hoogteverschil door een vloeistofreservoir in verticale richting verplaatsbaar te maken. Door de lange toevoerleidingen ontstond echter voor pseudoplastische vloeistoffen met kleine n een belangrijke fout door drukverlies in de leiding. De overdruk in het drukvat wordt geregeld met een reduceerventiel van Negretti en Zambra. Dit reduceerventiel houdt ook een zeer lage overdruk constant als de voordruk ruwweg geregeld wordt op het in te stellen drukverschil. De overdruk wordt afgelezen op een watermanometer. Omdat de overdruk maximaal 2,5 meter water is zal de warmteproductie door energiedissipatie maar een kleine temperatuurstijging veroorzaken. Voor waterige oplossingen is ΔT kleiner dan de afleesfout van de thermometer, en dus te verwaarlozen.

Ook de statische vloeistofhoogte in het drukvat verandert en moet dus steeds bepaald worden. De pseudoplastische vloeistof blijft als een film op de perspexwand van het drukvat hangen, zodat de hoogte van de meniscus niet nauwkeurig is af te lezen. Daarom werd een pen in het drukvat gemonteerd die zeer nauwkeurig tot op het vloeistofoppervlak kan worden gedraaid omdat het spiegelbeeld van de pen in de vloeistof en de pen zelf elkaar dan juist raken. Een wijzer die aan de pen is gelast schuift langs grafiekpapier zodat de vloeistofhoogte nu gemakkelijk te bepalen is. Omdat de opstelling voor het schoonmaken demontabel is gemaakt, is het hoogteverschil tussen het drukvat en de uitstroomopening niet constant. Als hoogte voor de uitstroomopening wordt het buigpunt in het zadeloppervlak genomen, zoals dit in 3.3. is aangegeven. Om dit laatste hoogteverschil te bepalen wordt een kathetometer gebruikt.

3.3 Het meten van het debiet

Omdat het erg moeilijk is om het debiet te bepalen aan een uitstroomopening waar geen gekromde vloeistof-lucht oppervlakken zijn, zodat de oppervlaktespanning te verwaarlozen zou zijn, is de hieronder geschetste uitstroomtuit bedacht.

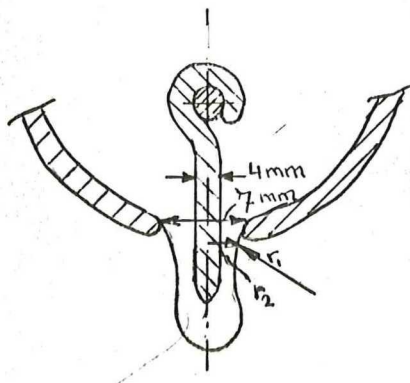


FIG. 3. UITSTROOMVOORZIENING.

Er ontstaat nu een zadeloppervlak: r_1 geeft een onderdruk en r_2 een overdruk. Omdat r_1 en r_2 nu tamelijk groot zijn zal een eventueel resterend drukverschil door de oppervlaktespanning te verwaarlozen zijn. Het was niet mogelijk om het debiet te bepalen door het tellen van druppels, omdat de druppelgrootte niet constant bleek te zijn. Bij een korte druppeltijd is de druppel groot, terwijl pas bij 3 tot 6 minuten druppeltijd de druppel zijn constante grootte krijgt (zie ook (5)). De verklaring hiervoor blijkt een achterblijvende zgn. druppelmeniscus te zijn die de afvallende druppel (gewicht = $2\pi r \sigma$) kleiner maakt (6). Pas bij lange druppeltijden krijgt deze meniscus zijn constante maximale waarde. Het debiet wordt nu bepaald door de vloeistof een bepaalde tijd op te vangen in een bekerglas, en dan het gewicht van de vloeistof (en q) te bepalen. De stopwatch werd ingedrukt als de 1e druppel in het bekerglas viel en stopgezet als de eerste druppel viel na het verwijderen van het bekerglas. Uit de proeven blijkt dat bij kleine debieten de tuit met plastic moet worden afgeschermd om verdamping tegen te gaan.

3.4 De drukval in de toevoerleidingen

Het drukverschil dat over de kapillairen staat is niet gelijk aan het gemeten drukverschil omdat ook in de toevoerleidingen, de kraan, de uitstroomopening en door de eindeffekten een drukverlies ontstaat. Voor Newtonse vloeistoffen is deze correctie klein, maar voor pseudoplastische vloeistoffen kan hij wel groot worden. De correctie is voor ieder kapillair, berekend m.b.v. het Ostwald-de Waele model. Met de bekende diameterverhoudingen is de correctie op de drukval te berekenen als functie van n .

$$\text{Ostwald-de Waele: } \tau_{r,z} = -K \left(\frac{dv}{dr} \right)^n$$

$$\text{Voor dit model geldt: } \langle V_z \rangle = \frac{\phi_v}{\pi R^2} = \frac{n}{3n+1} R \left(\frac{R \Delta p}{2KL} \right)^{1/n}$$

$$\text{dus } \phi_v = \pi R^3 \frac{n}{3n+1} \left(\frac{R \Delta p}{2KL} \right)^{1/n}.$$

Omdat ϕ_v door de leidingen en het kapillair gelijk is, en verondersteld wordt dat K en n constant zijn voor de stroming in kapillair en leiding geldt:

$$\left\{ R^3 \left(\frac{R}{L} \Delta p \right)^{1/n} \right\}_{\text{kapillair}} = \left\{ R^3 \left(\frac{R}{L} \Delta p \right)^{1/n} \right\}_{\text{leiding}}$$

Voor een aantal waarden van n is dan het drukverlies in de toevoerleidingen, de kraan en druppelaar per kapillair te berekenen in procenten van het totale drukverschil. Als hierbij dan nog een half procent ($want L/d = 100$) van het drukverschil over het kapillair, ter correctie van het inloopeffekt, wordt opgeteld ontstaan de in figuur 1 gegeven correctie-grafieken. Deze curven werden door de computer benaderd met de kleinste kwadraten methode als de polynoom:

correctie = $a + bn + cn^2 + dn^3$, waarbij de correctie in procenten gegeven is. De variantie loopt van 0,02 tot 0,08, zodat de "curve-fitting" goed is. De voor a , b , c en d gevonden waarden staan vermeld bij grafiek 1. Deze correctie is alleen berekend voor $n < 1$, omdat voor dilatante stoffen de fout kleiner is dan 1%. Om voor pseudoplastische vloeistoffen ondanks deze correctie de goede schuifspanning en afschuifsnelheid uit de drukval-debiet karakteristiek te vinden is een computerprogramma geschreven. Het programma en de manier waarop de getallen moeten worden ingevoerd wordt beschreven in appendix 3.

4. DE IJKING VAN DE KAPILLAIREN

Om de diameter van de kapillairen nauwkeurig te bepalen is een meting met een Newtonse vloeistof, waarvan de viscositeit nauwkeurig bekend is, de gemakkelijkste manier. Metingen aan glycerol bleken niet reproduceerbare resultaten op te leveren. Dit kwam door het hygroscopische karakter, waardoor water aangetrokken werd en de viscositeit snel daalde. Dit water is moeilijk homogeen te mengen met het glycerol, zodat plaatselijke verschillen in de viscositeit optreden. Meting met een olie (Talpa Olie 40 van Shell) bleek wel reproduceerbare resultaten te leveren. In een drukval-debiet karakteristiek lagen de gemeten waarden nauwkeurig op een rechte lijn. Een foutenschatting geeft per meetpunt een fout van $\pm 0,5 \%$, zodat de fout in een lijn door een aantal meetpunten te verwaarlozen zal zijn. Dit geldt te meer omdat de viscositeit van de olie zo sterk afhankelijk is van de temperatuur, dat binnen de afleesfout van de thermometer ($\pm 0,1^\circ\text{C}$) de viscositeit een afwijking van $\pm 1\%$ heeft. Om de viscositeit van de olie te meten werden de Rotovisko en de Rheomat 15 gebruikt. De op de Rheomat 15 gemeten viscositeit is ongeveer 2% hoger, en wordt als de meest betrouwbare beschouwd. Al deze metingen werden herhaald na 4 maanden, waarin de kapillairen vele malen gevuld en weer schoongemaakt waren.

Na correctie voor de leidingweerstand werd gevonden:

TABEL 1: DE DIAMETERS VAN DE KAPILLAIREN

Kapillair	1e meting	2e meting	verschil
	D (mm)	D (mm)	(%)
1	4,20	4,23	+0,7
2	2,85	2,88	+1,0
3	2,07	2,08	+0,5
4	1,44	1,45	+0,7
5	2,89	2,92	+1,0
6	2,90	2,92	+0,7
7	2,04	2,05	+0,5
8	2,04	2,05	+0,5

Omdat bij de 1e meetserie nog gemeten werd met het reservoir met de lange toevoerleiding wordt de 2e meting als de meest betrouwbare beschouwd. De resultaten hiervan zijn dan ook gebruikt bij de berekening van de correctie op de drukval en in het computerprogramma.

5. DE METINGEN EN DE RESULTATEN

Als niet Newtonse vloeistof werd gemeten aan een carbopoloplossing in water. Carbopol is een hoog moleculaire stof die al bij een concentratie van 0,1 gew.% in water een pseudoplastische vloeistof geeft, Dit is te zien als een druppel op het oppervlak valt: het duurt heel lang voor het oppervlak zich weer recht getrokken heeft, terwijl de vloeistof zich bij overschenken niet erg viskeus gedraagt.

De oplossingen werden gemaakt door onder heftig roeren de carbopol langzaam op het gedestilleerde water te strooien. Als de berekende hoeveelheid carbopol ^{toegevoegd} goed was werd nog enige tijd geroerd, zodat alle carbopol goed was "opgelost". De vloeistof is nu nog dun, en de luchtbelllen die erin zitten moeten nu de tijd krijgen om op te stijgen. De zure vloeistof wordt geneutraliseerd met ammonia en wordt dan pseudoplastisch.

Met carbopol oplossingen van verschillende concentraties is de rheologie bepaald met de eigen kapillair viskosimeter, met de Rheomat 15 en met de Rotovisko. De resultaten zijn weergegeven in de volgende tabel.

TABEL 2: DE MET VERSCHILLENDE RHEOMETERS BEPAALDE RHEOLOGIE

Meting no.	Kapillair viskosimeter				Rheomat 15		Rotovisko	
	K	n	fout(%)	meetp.	K	n	K	n
1	2,12	0,447	67	22	2,46	0,436	1,52	0,476
2	3,62	0,391	91	23	3,81	0,409	1,47	0,504
3	4,25	0,353	116	22	4,45	0,392	2,98	0,421
4	0,59	0,568	22	23	0,62	0,573	0,22	0,665
5	7,51	0,325	175	25	8,10	0,340		
6	6,20	0,341	88	25	6,90	0,354		

Met de kapillair viskosimeter werd over een afschuifsnelheidsgebied van ongeveer 0,5-500 sec⁻¹ gemeten. De fout is de som van de absolute waarde van de afwijkingen van alle meetpunten, die berekend zijn volgens:

$$\frac{\tau - K (\dot{\gamma})^n}{\tau} \cdot 100 \%$$

Omdat inloop en einddeffekten verwaarloosbaar bleken te zijn bij deze oplossingen, zijn de metingen alleen uitgevoerd met de eerste vier kapillairen.

Op de Rheomat 15 is steeds gemeten met meetlichaam B-B, behalve bij meting 4, waar A-A werd gebruikt. Het gemeten gebied loopt van 3 tot maximaal 200 sec^{-1} . Als meetlichaam voor de Rotovisko werd steeds MVI gebruikt. Het gemeten gebied is ongeveer gelijk aan dat bij de Rheomat 15.

In de grafieken 2, 3 en 4 worden enige metingen geïllustreerd. Dit zijn meting 4 en 5, en meting 2 als een gemiddelde van de rest van de metingen. De in deze grafieken door de meetpunten getrokken lijn is door de computer bepaald, en voldoet dus aan de hierboven gegeven K en n.

Na de eerste drie metingen bleek dat de meetpunten bij lage afschuif-snelheden steeds boven de getrokken lijn liggen. Het is onwaarschijnlijk dat n hier kleiner wordt, zodat een fout gemaakt wordt, of door verdamping aan de uitstroomtuit, of door een zwichtspanning van de vloeistof, waardoor het drukverlies over de leiding groter wordt. Uit een proefje waarin de verdamping uit een bekersglas werd gemeten bleek, dat verdamping een niet te verwaarlozen fout kan geven bij lage debieten (10^{-3} ml/sec). Om deze fout te elimineren is de uitstroomtuit bedekt met plastic, waar het bekersglas, dat als opvang-vaatje wordt gebruikt, ingeschoven kan worden. Het volume van de aanwezige lucht is dan niet groter dan 100 cm^3 , zodat bij 20°C maximaal 1,8 mg water kan verdampen. De verdamping aan de uitstroomtuit zal in de verdere metingen dan ook te verwaarlozen zijn.

6. DE INTERPRETATIE VAN DE MEETRESULTATEN

6.1 De kapillair viskosimeter

De door de computer uitgevoerde punten $\dot{\gamma}$ en τ voldoen bij hogere concentraties niet geheel aan de Ostwaldse vergelijking; ook niet na het elimineren van de verdamping.

De meetpunten liggen zoals in de volgende figuur is aangegeven.

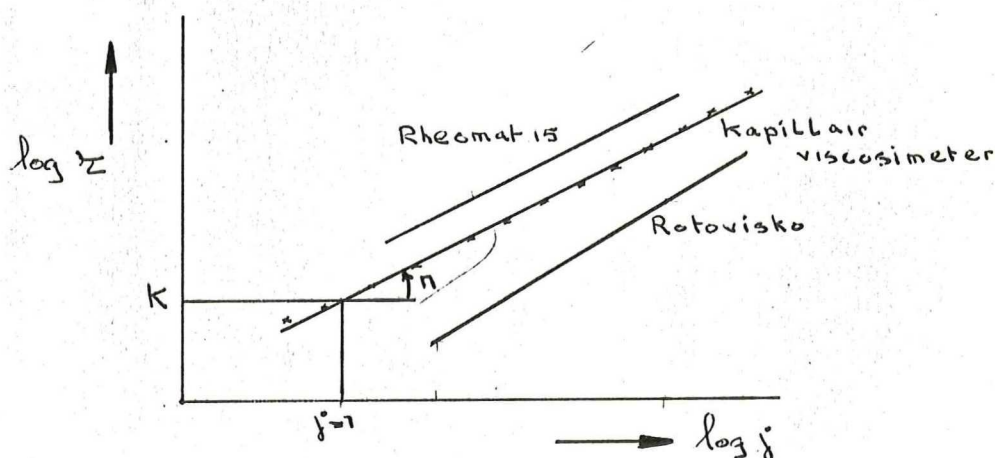


Fig. 4. ALGEMEEN BEELD VAN DE METINGEN

De verklaring voor de hogere τ bij hoge afschuifsnelheden is dat de vloeistof zich meer Newtons gaat gedragen. Dit geldt algemeen voor pseudoplastische vloeistoffen, en is te verklaren uit het feit dat bij hogere afschuifsnelheden de ketens steeds minder kans krijgen om een netwerk te vormen. Juist door het uit elkaar trekken van dit netwerk wordt het pseudoplastisch gedrag veroorzaakt. De te hoge τ waarden bij lage afschuifsnelheden worden veroorzaakt door een zwichtspanning. Dit is vooral duidelijk te zien bij meting 5, waar bij overschakelen op een kleiner kapillair bij dezelfde (berekende) afschuifspanning een lagere afschuifsnelheid wordt gevonden. Dit komt omdat het zonder zwichtspanning berekende, kleinere drukverlies in de leiding groter wordt ten koste van de drukval over het kapillair. De hierdoor veroorzaakte fout blijkt af te nemen met de drukval tot de $(3n+1)^e$ macht (zie Appendix 4). Omdat behalve bij meting 5 de afwijkingen van de meetpunten, ook als op een kleiner kapillair wordt overgeschakeld, geleidelijk verloopt, mag verondersteld worden dat de zwichtspanning hier geen grote fout veroorzaakt.

Alleen in meting 4 is de rheologie in het meetgebied wel goed te beschrijven met het Ostwaldse model. Omdat de positieve en negatieve afwijkingen hier voorkomen bij ieder kapillair is de veronderstelling dat de ijking van de kapillairen goed is gerechtvaardigd. De afwijking bedraagt gemiddeld $\pm 1\%$, en ook bij de andere metingen (behalve bij 5) hebben de afwijkingen een regelmatig verloop van positief via negatief naar positief. Dit betekent dat de meetfout, onafhankelijk van de rheologie $\pm 1\%$ is. Deze fout is gelijk aan de absolute fout als geen zwichtspanning optreedt, omdat voor alle andere fouten wordt gecorrigeerd.

6.2 De Rotovisko

Uit de metingen blijkt dat de Rotovisko steeds een te lage viskositeit geeft. De verschillen blijken uit de volgende tabel, waarbij de fout gedefinieerd is als de afwijking van de met de Rotovisko gemeten waarden t.o.v. de met de kapillair viskosimeter bepaalde rheologie.

TABEL 3: DE MET DE ROTOVISKO BEPAALDE RHEOLOGIE

Meting no.	Rheologie		fout (%)	
	K	n	K	n
1	2,12	0,45	-28	+ 7
2	3,62	0,39	-60	+29
3	4,25	0,35	-30	+19
4	0,59	0,57	-63	+17

Uit de tabel blijkt dat de afwijkingen groot zijn, zodat geconcludeerd moet worden dat de Rotovisko met meetlichaam MVI geen betrouwbare resultaten geeft voor niet-Newtonse vloeistoffen. Er is geen enkele correlatie tussen de gemaakte fout en een andere parameter te vinden, zodat ook een correctietabel niet zinvol is. Als verklaring voor de fouten wordt de smalle spleet tussen de beide cilinders genoemd (0,6 mm).

De kleinste afwijking van de symmetrie-as geeft voor niet-Newtonse vloeistoffen grote afwijkingen.

6.3 De Rheomat 15

Met de Rheomat 15 wordt steeds een te hoge viskositeit gemeten, zoals uit onderstaande tabel blijkt. De gemaakte fout is hier afhankelijk van n , zodat een correctietabel gegeven kan worden. Om een goede foutenschatting te maken is de rheologie bepaald in het gebied waarin ook de Rheomat meet. We vinden dan het volgende.

TABEL 4: DE MET DE RHEOMAT 15 BEPAALDE RHEOLOGIE

Meting no.	Rheologie		fout(%)		Correctie op K (%)
	K	n	K	n	
1	2,28	0,440	- 7,2	+1,0	- 7,4
2	3,45	0,407	- 9,5	-0,5	- 9,0
3	3,88	0,398	-14,7	-1,5	-12,2
4	0,59	0,568	- 4,7	-1,0	- 4,6
6	6,00	0,354	-13,2	0	-13,2

De fout voor n is zo klein dat alleen een correctie op K zinvol is. Daarom is bij een afschuifsnelheid van 30 sec^{-1} , als een logaritmisch gemiddelde, het verschil tussen beide n 's nul gemaakt. Met de nieuwe K wordt de correctie op de met de Rheomat 15 gevonden K berekend, waarbij de volgende grafiek ontstaat.

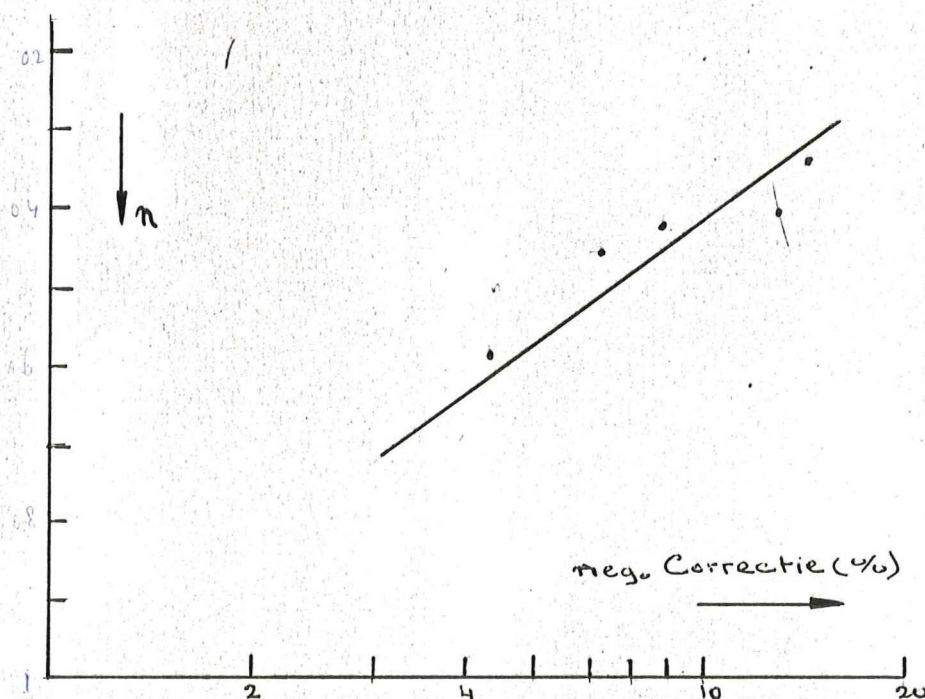


FIG. 5. CORRECTIE VOOR DE CONTRAVES OP DE GEVONDEN K

Uit de metingen blijkt dat de twee fouten, die in 2.2 worden genoemd elkaar niet opheffen.

De eindvlakken, die voor de te grote K zorgen, zouden iets vlakker moeten zijn, waardoor de afstand b , en dus ook de gemaakte fout kleiner wordt.

7. DE CONCLUSIES

1. Met de gebouwde kapillair viskosimeter kan de rheologie over een groter gebied bepaald worden dan met de Rotovisko en de Rheomat 15. Als grenzen van de schuifspanning gelden $0,1$ tot 50 N/m^2 . Om een meetbaar debiet te krijgen gelden als praktische grenzen van de afschuifsnelheid $0,5 - 500 \text{ sec}^{-1}$.
2. De viskosimeter is een betrouwbaar instrument, omdat voor alle fouten gecorrigeerd wordt als de rheologie te beschrijven is met het Ostwald-de Waele model. Alleen de fouten, veroorzaakt door een zwichtspanning zijn moeilijk te corrigeren.
3. De meting met de kapillairenset geeft fouten van $\pm 1\%$. Als door een aantal van deze punten een kromme wordt getrokken, zodat de meetfouten stochastisch rond de kromme verdeeld zijn, dan zal deze kromme binnen de meetfout voldoen aan de rheologie. Dit is het geval bij meting 4.
4. Meting van de rheologie van deze carbopoloplossingen op de Rotovisko, waarbij meetlichaam MVI wordt gebruikt, geeft foutieve resultaten.
5. Meting van de rheologie van deze carbopoloplossingen op de Rheomat 15 met de meetlichamen A-A of B-B geeft een te hoge K, waarbij de gemaakte fout alleen afhankelijk is van n.
6. Voor een snelle rheologiebepaling, waarbij niet over een groot gebied gemeten hoeft te worden, kan de Rheomat 15 worden gebruikt. De viskositeit dient dan gecorrigeerd te worden volgens figuur 5 op blz. 18.

SYMBOLENLIJST

C_p	Soortelijke warmte	$J/kg^{\circ}C$
K	Consistentie index	
L	Lengte van het kapillair	m
n	vloei-index	- -
p	druk	N/m^2
r	afstand tot het midden van de kapillair	m
R	straal	m
ΔT	temperatuurverschil	$^{\circ}C$
$\dot{y}$	afschuifsnelheid	sec^{-1}
η	viskositeit	Ns/m^2
φ	dichtheid	kg/m^3
σ	oppervlaktespanning	N/m^2
τ	schuifspanning	N/m^2
ϕ_v	debiet	$m^3/sec.$
ϕ_w	warmtestroom	$J/sec.$
Ω	hoeksnelheid	sec^{-1}

LITERATUUR

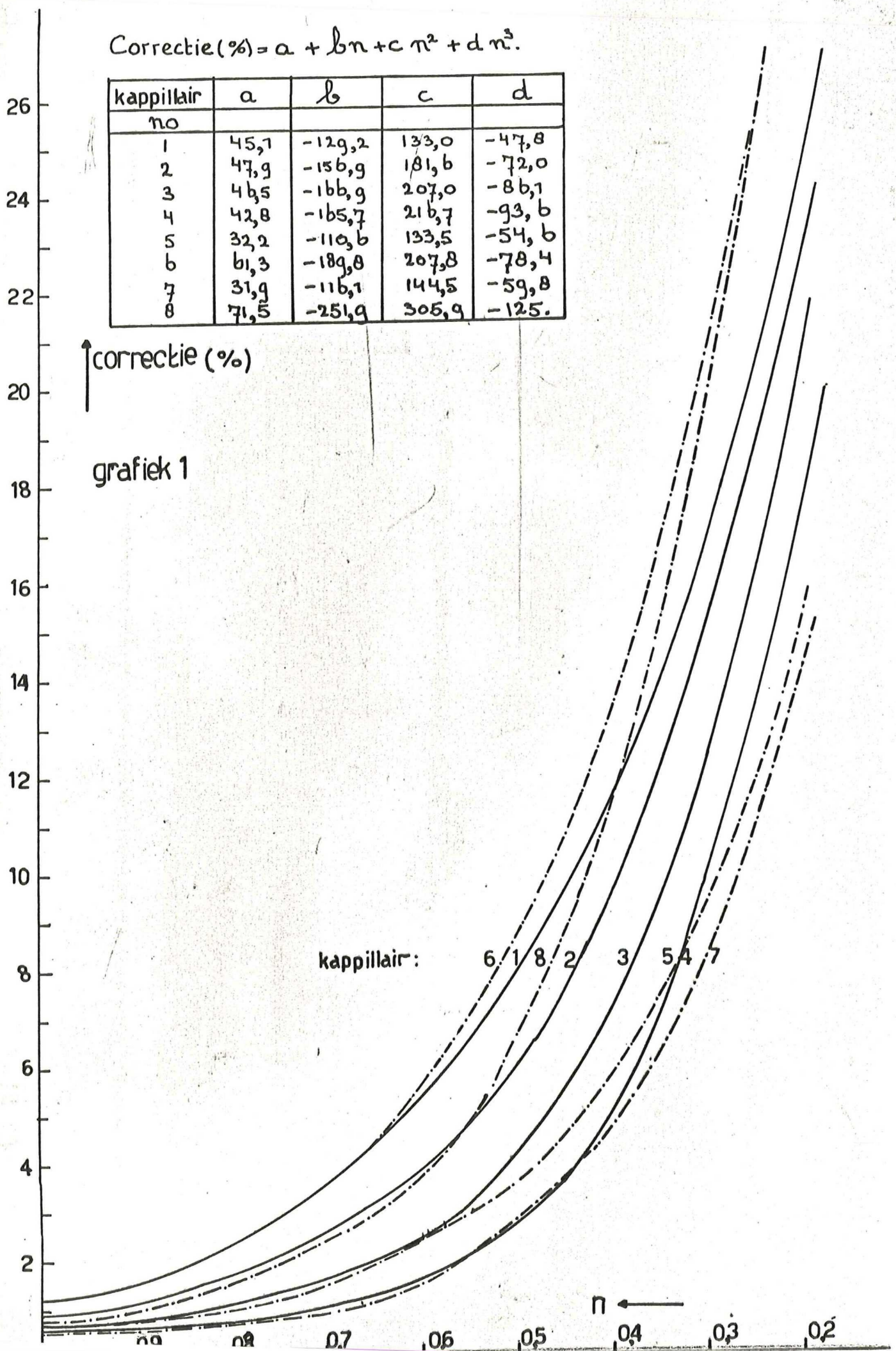
- (1) Eirich, F.R. Rheology vol. 3.
Academic Press New York 1960, 125.
- (2) Beek, J.W., Holmes, D.B. Collegediktaat TH, Delft, 1964, 83.
- (3) Krieger, I.M., Maron, H. J. Appl. Phys. 25 72(1954).
- (4) Visser, P.R. Vermogenskonsumptie bij roeren in
al dan niet beluchte niet-Newtonse
vloeistoffen.
Laboratorium voor Fysische Techno-
logie T.H. Delft, juni 1969, 8.
- (5) Harkins, W.D., Brown, F.E. J.Am.Chem.Soc. 41 499 (1919).
- (6) Lohnstein, T. Ann. Physik. 22 767 (1907).

$$\text{Correctie}(\%) = a + bn + cn^2 + dn^3$$

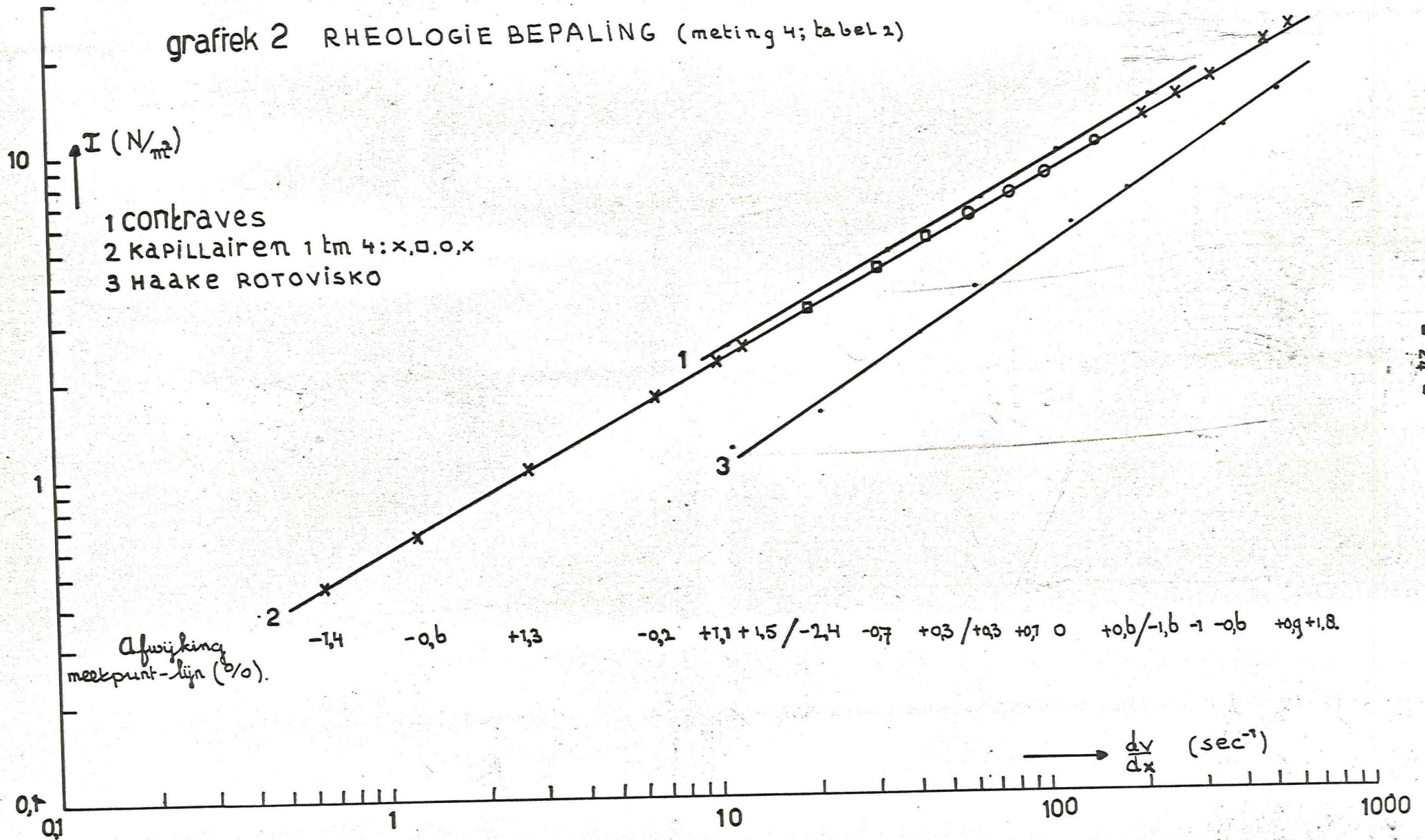
kappillair no	a	b	c	d
1	45,1	-129,2	133,0	-47,8
2	47,9	-156,9	181,6	-72,0
3	46,5	-166,9	207,0	-86,1
4	42,8	-165,7	216,7	-93,6
5	32,2	-110,6	133,5	-54,6
6	61,3	-189,8	207,8	-78,4
7	31,9	-116,1	144,5	-59,8
8	71,5	-251,9	305,9	-125,0

↑ correctie (%)

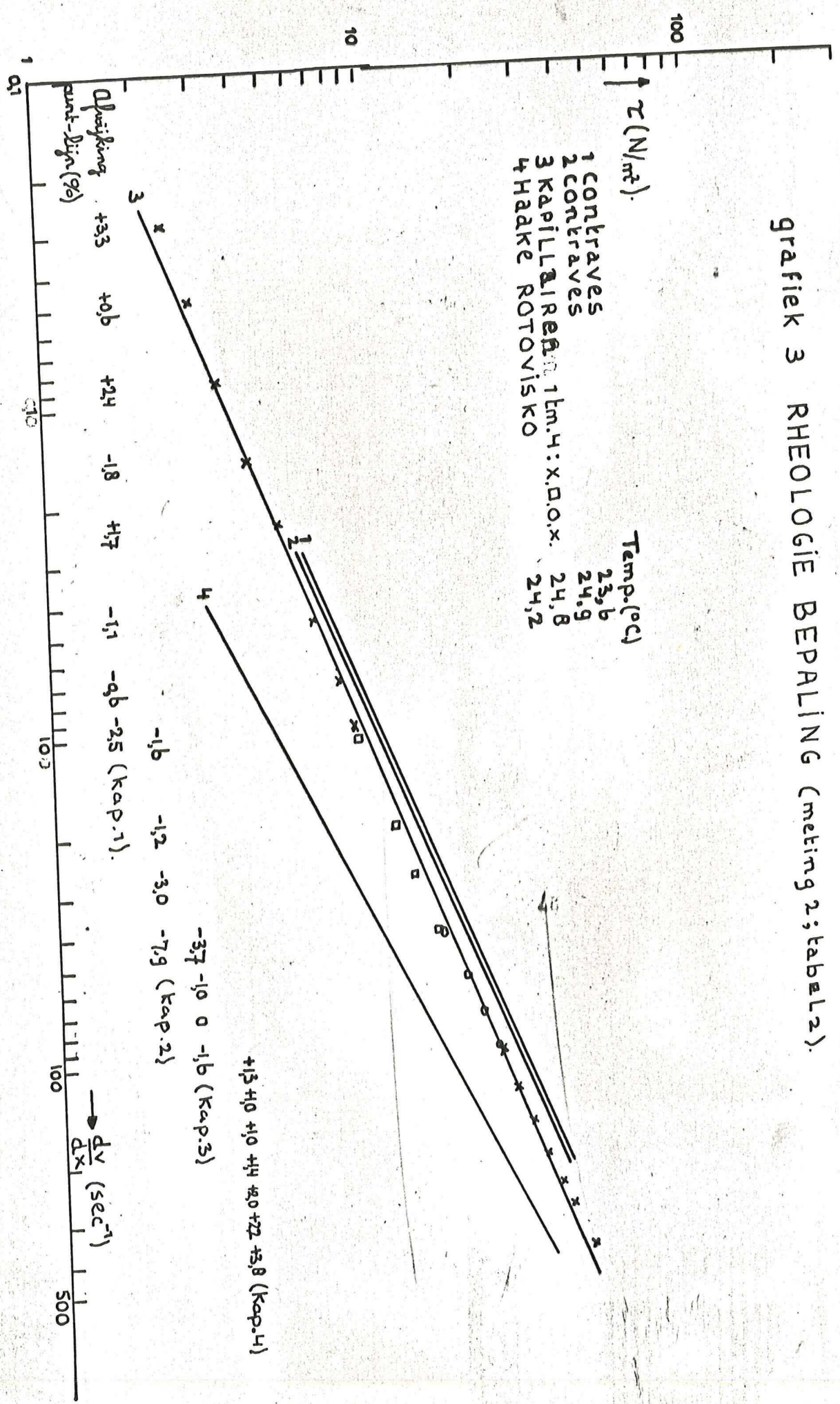
grafiek 1



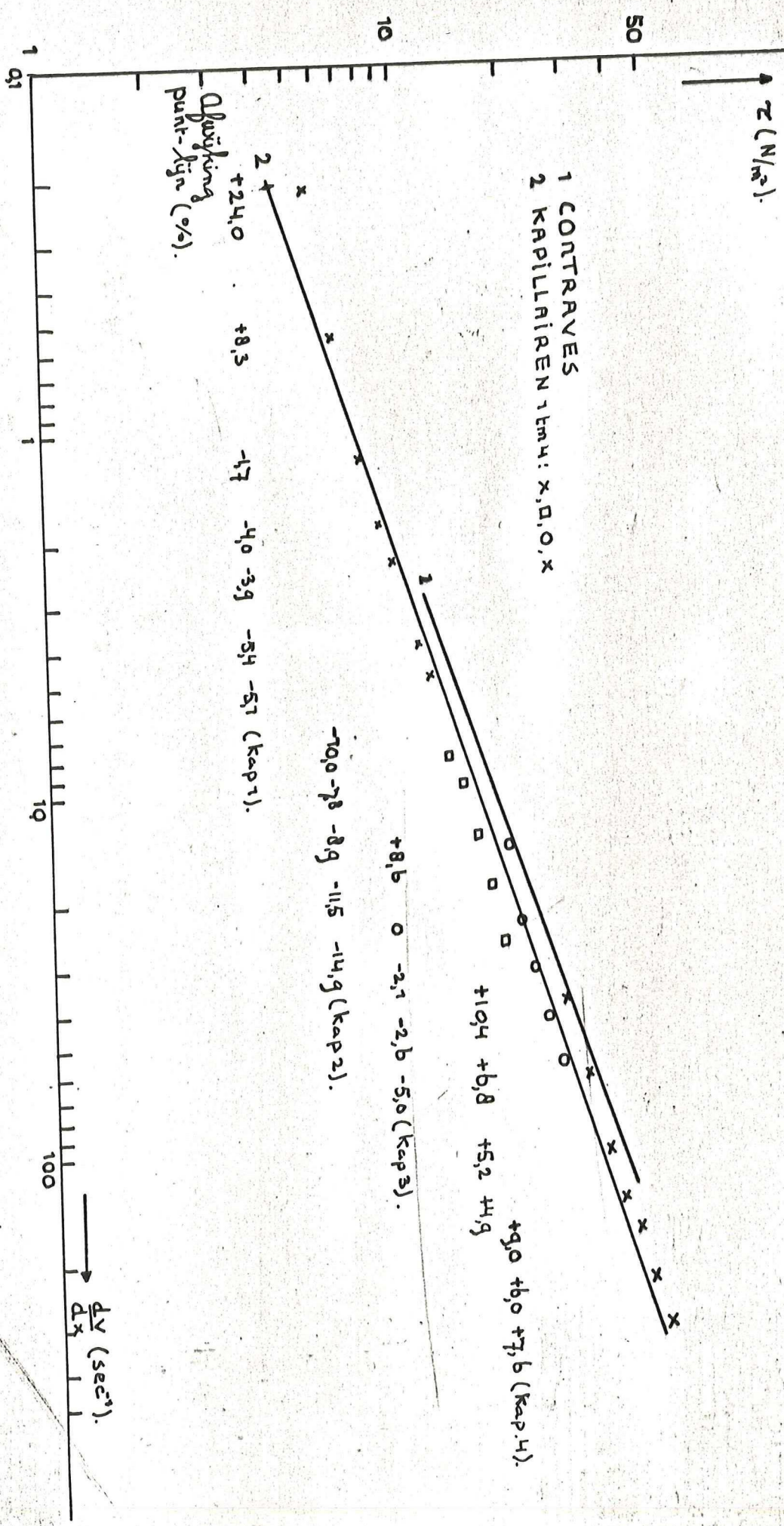
grafiek 2 RHEOLOGIE BEPALING (meting 4; tabel 2)



grafiek 3 RHEOLOGIE BEPALING (meting 2; tabel 2).



grafiek RHEOLOGIE BEPALING (meting 5; tabel 2).



APPENDIX 1

Afleiding van de vergelijking van Rabinowitsch:

Voor de debiet geldt: $\phi_v = 2\pi \int_0^R r v_z dr = \pi \int_0^R v_z dr^2 :.$

$$\phi_v = \pi \left\{ r^2 v_z \right\}_0^R - \int_0^R r^2 dv_z = -\pi \int_0^R r^2 dv_z = \pi \int_0^R r^2 \left(\frac{dv_z}{dr} \right) dr.$$

Voor de schuifspanning geldt: $\tau_{r,z} = \frac{r}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right)$

zodat $\frac{\tau_{r,z}}{\tau_w} = \frac{r}{R}$

Substitutie geeft: $\phi_v = \frac{\pi R^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau_{r,z}^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) d\tau_{r,z} :.$

$$\frac{d\phi_v}{d\tau_w} = \pi R^3 \left[-3 \frac{1}{\tau_w^4} \int_0^{\tau_w} \tau_{r,z}^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) d\tau_{r,z} + \frac{1}{\tau_w^3} \left\{ \tau_{r,z}^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) \right\}_R \right]$$

$$\frac{\tau_w^3}{\pi R^3} \cdot \frac{d\phi_v}{d\tau_w} = \frac{-3}{\tau_w} \phi_v + \tau_w^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)_R$$

ook geldt: $\frac{d\phi_v}{d\tau_w} = \frac{d\phi_v}{dap} \cdot \frac{dap}{d\tau_w} = \frac{d\phi_v}{dap} \cdot \frac{4L}{D} \text{ (2.1 vergl. 2)}$

$$\therefore \frac{\tau_w^3}{\pi R^3} \cdot \frac{d\phi_v}{dap} \cdot \frac{dap}{d\tau_w} = -\frac{3\phi_v \tau_w^2}{\pi R^3} + \tau_w^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)_R$$

Dit betekent dus dat

$$\gamma = \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)_R = \frac{1}{\pi R^3} \left\{ 3\phi_v + dap \frac{d\phi_v}{dap} \right\}.$$

APPENDIX 2

De geometrie van de kapillairviskosimeter

Voor de berekening van de drukval buiten de kapillairen (zie 3.4) is de geometrie van belang. De diameters van de kapillairen werden met een Newtonse vloeistof bepaald (zie hoofdstuk 4). De diameters van leiding, kranen en uitstroomtuit werden bepaald met een micrometer. De diameter van de leiding en de kranen van het 1e en 5e kapillair is 20 mm. De totale lengte van de leidingen van deze diameter voor het 1e t/m het 8e kapillair is respectievelijk 153,147,154,159,151,153,143 en 163 mm. De kranen van het 2e t/m 4e en 6e t/m 8e kapillair hebben een diameter van 10 mm (lengte 25 mm), terwijl de aanzetstukken van deze kranen een diameter van 6,3 mm hebben (lengte 150 mm). De uitstroomopening heeft een diameter van 7 mm, terwijl de hierin hangende druppelaar een diameter van 4 mm heeft.

APPENDIX 3

Het computerprogramma en de werkwijze

De drukval-debiet karakteristiek wordt benaderd met een 4e graads polynoom (regel 23). Om deze kromme door (0,0) te laten gaan zijn voor ieder kapillair 5 punten (0,0) ingevoerd. Omdat voor deze bewerking steeds hetzelfde aantal invoergegevens per kapillair nodig is, moet dit gelijk gemaakt worden aan het aantal meetpunten van het 1e kapillair. Dit gebeurt door extra punten (0,0) in te voeren.

Met de afgeleide van de berekende polynoom wordt de afschuifsnellheid, evenals de schuifspanning, voor ieder meetpunt bepaald. Het verband tussen deze grootheden wordt benaderd door de rechte $\log \tau = \log k + n \log j$, die dus $\log k$ en n bepaalt (regel 53).

Met de nu gevonden n wordt de drukval over het kapillair gecorrigeerd, waarna de hele berekening wordt herhaald. Dit gaat door tot twee achtereenvolgend gevonden waarden van n voldoen aan de gestelde eis. Daarna wordt de afwijking van ieder meetpunt tot de gevonden rheologie berekend volgens regel 68 en 69. Bij invoer van de gegevens moet het drukverschil gegeven worden in 1/10 mm water, en het debiet in ml/sec.

SOURCE PROGRAM

SOURCE STATEMENT

```

00000 BEGIN, PROCEDURE KLEPOL(X, Y, M, K, SIGMA, P);
00001   INTEGER M, K; ARRAY X, Y, SIGMA, P; CODE;
00002   INTEGER I1, I2, I3, I4;
00003   REAL SOMKWD, COEFFUND;
00004   INTEGER ARRAY N1(1:4); INARRAY(0, N);
00005   INARRAY(0, R); INARRAY(0, L);
00006   INARRAY(0, DPGEM); INARRAY(0, PHIV);
00007   INARRAY(0, A);
00008   BEGIN ARRAY;
00009     TAU(1:N(1/1)+N(2/2)+N(3/3)+N(4/4));
00010     FOR I1:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO
00011       BEGIN
00012         FOR I2:=1 STEP 1 UNTIL N(1/1)+5 DO
00013           DP(11, B/1):=0.98*DPGEM(11, B/1);
00014         END;
00015       ITERATE; I1:=1;
00016       CORD:=FOR I1:=1 STEP 1 UNTIL N(1/1)+5 DO
00017         BEGIN PHIV(1/1):=PHIV(11, I/1);
00018         D(1/1):=DP(11, I/1);
00019         END;
00020       KLEPOL(D, PHIV, N(1/1)+5, 4, SIGPAR, C);
00021       OUTARRAY(1, C); OUTARRAY(1, SIGPAR); CC(11, 0/1):=C(10/1);
00022       CC(11, 1/1):=C(1/1); CC(11, 2/2):=C(2/2);
00023       CC(11, 3/3):=C(3/3); CC(11, 4/4):=C(4/4);
00024       I1:=I1+1;
00025       IF I1<5 THEN GOTO CORD;
00026       I1:=I1+1;
00027       FOR I1:=1 STEP 1 UNTIL N(1/1)+5 DO
00028         BEGIN
00029           DVDX(1/1):=1/(3.14159*R(1/1)**3)*(3*PHIV(1, 1/1)+DP(1, 1, 1)
00030             +3*CC(1, 3/3)*DP(1, 1/1)**2+4*CC(1, 4/4)*DP(1, 1/1)**3;
00031           D(1/1):=1/(3.14159*R(1/1)**3)*(3*PHIV(1, 1/1)+DP(1, 1, 1)
00032             +3*CC(1, 3/3)*DP(1, 1/1)**2+4*CC(1, 4/4)*DP(1, 1/1)**3;
00033           DPHIVDDP(1/1):=CC(2, 1/1)+2*CC(2, 2/2)*DP(2, 1-N(1/1)/1)+
00034             3*CC(2, 3/3)*DP(2, 1-N(1/1)/1)**2+4*CC(2, 4/4)*DP(2, 1-N(1/1)/1)**3;
00035           D(2, 1-N(1/1)/1)*DPHIVDDP(1/1);
00036           TAU(1/1):=DP(2, 1-N(1/1)/1)*R(1/1)/(2*L(2/2));
00037         END;
00038       FOR I1:=N(1/1)+1 STEP 1 UNTIL N(1/1)+N(2/2) DO
00039         BEGIN
00040           DPHIVDDP(1/1):=CC(2, 1/1)+2*CC(2, 2/2)*DP(2, 1-N(1/1)/1)+
00041             3*CC(2, 3/3)*DP(2, 1-N(1/1)/1)**2+4*CC(2, 4/4)*DP(2, 1-N(1/1)/1)**3;
00042           D(2, 1-N(1/1)/1)*DPHIVDDP(1/1);
00043           TAU(1/1):=DP(2, 1-N(1/1)/1)*R(1/1)/(2*L(2/2));
00044         END;
00045       FOR I1:=N(2/2)+N(1/1)+1 STEP 1 UNTIL N(1/1)+N(2/2)+N(3/3)

```

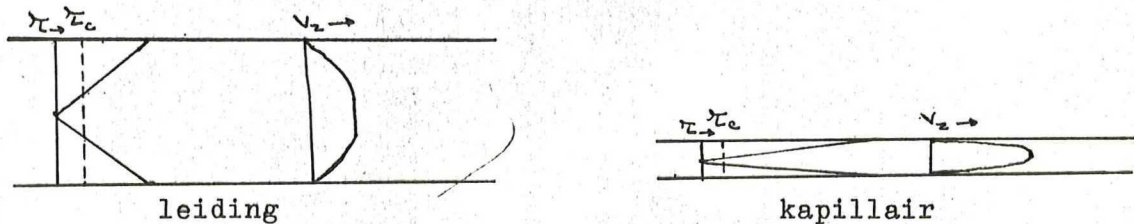
```
00042 'DO'
00042 'BEGIN'
00042 DPHIVDDP(1/1):=CC(3,1/1)+2*CC(3,2/1)*DP(3,1-N(1/1)-N(2/1)/
00042 3*CC(3,3/1)*DP(3,1-N(1/1)-N(2/1)/1)*2*CC(3,4/1)*DP(3,1-N(1/1)-N
00042 1/1)*3;
00043 DVDX(1/1):=1/(3.14159*(3/3)**3)*(3*PHIV(3,1-N(1/1)-N(2/1)/
00043 +DP(3,1-N(1/1)-N(2/1)/1)*DPHIVDDP(1/1));
00044 TAU(1/1):=DP(3,1-N(1/1)-N(2/1)/1)*R(3/1)/(2*L(3/1));
00045 'END';
00046 'FOR' I:=N(1/1)+N(2/1)+N(3/1)+1 'STEP' 1 'UNTIL'
00046 N(1/1)+N(2/1)+N(3/1)+N(4/1) 'DO'
00046 'BEGIN'
00046 DPHIVDDP(1/1):=CC(4,1/1)+2*CC(4,2/1)*DP(4,1-N(1/1)-N(2/1)-
00046 1/1)+3*CC(4,3/1)*DP(4,1-N(1/1)-N(2/1)-N(3/1)/1)**2
00046 +4*CC(4,4/1)*DP(4,1-N(1/1)-N(2/1)-N(3/1)/1)**3;
00047 DVDX(1/1):=1/(3.14159*(4/4)**3)*(3*PHIV(4,1-N(1/1)-N(2/1)-
00047 N(3/1)/1)+DP(4,1-N(1/1)-N(2/1)-N(3/1)/1)*DPHIVDDP(1/1));
00048 TAU(1/1):=DP(4,1-N(1/1)-N(2/1)-N(3/1)/1)*R(4/1)/(2*L(4/1));
00049 'END';
00050 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N(1/1)+N(2/1)+N(3/1)+N(4/1) 'DO'
00050 'BEGIN' LOGDVDX(1/1):=LN(DVDX(1/1))*0.43429-6;
00051 LOGTAU(1/1):=LN(TAU(1/1))*0.43429;
00052 'END';
00053 KLEPOL(LOGDVDX,LOGTAU,N(1/1)+N(2/1)+N(3/1)+N(4/1),1,
00053 SIGMA,COEFF); OUTARRAY(1,SIGMA); OUTARRAY(1,COEFF);
00056 'IF' ABS((COEFF(1/1)-COEFF(0D)/COEFF(1/1))<0.001
00056 'THEN' 'GOTO' OPLSSING;
00057 COEFF(0D)=COEFF(1/1);
00058 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 4 'DO'
00058 CORR(1/1):=A(1/1,1/1)+A(1/1,2/1)*COEFF(0D+A(1/1,3/1)*COEFF
00058 *2+A(1/1,4/1)*COEFF(0D**3; I:=1;
00060 KAPP: 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N(1/1) 'DO'
00060 DP(1/1,1/1):=0.98*DPGEM(1/1,1/1)*(100-CORR(1/1))/100;
00061 I1:=I1+1;
00062 'IF' I1<5 'THEN' 'GOTO' KAPP 'ELSE' 'GOTO' ITERATIE;
00063 OPLSSING: 'BEGIN'
00063 'INTEGER' H;
00064 'REAL' SOM,K,FX; 'ARRAY' FOUT(1:N(1/1)+N(2/1)+N(3/1)+N(4/1)/);
00064 K:=10*COEFF(0/);
00067 SOM:=0;
00068 'FOR' H:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N(1/1)+N(2/1)+N(3/1)+N(4/1) 'DO'
00068 'BEGIN'
00068 FX:=K*(10*(-6)*DVDX(H/1))*COEFF(1/1);
00069 FOUT(H/1):=(TAU(H/1)-FX)/FX;
00070 SOM:=SOM+ARS(FOUT(H/1));
00072 OUTARRAY(1,TAU); OUTARRAY(1,DVDX); OUTARRAY(1,FOUT);
00075 OUTREAL(1,SOM); OUTREAL(1,K);
00077 OUTARRAY(1,COEFF); OUTINTEGER(1,I1);
```

APPENDIX 4

De door de zwichtspanning veroorzaakte fout als functie van de drukval

Omdat in de toevoerleiding de drukval veel kleiner is bij hetzelfde debiet zal hier een zwichtspanning sneller moeilijkheden geven als in het kapillair.

Dit blijkt uit de volgende figuur, waarin τ_c de zwichtspanning is:



Omdat het debiet door leiding en kapillair even groot moet blijven zal de drukval over de leiding toenemen ten koste van die over het kapillair.

Voor het Ostwald-de Waele model geldt:

$$\begin{aligned} \tau_{r,z} &= -K \left(\frac{dv}{dr} \right)^n \\ \tau_{r,z} &= + \frac{r}{2} \left(- \frac{dp}{dz} \right) \end{aligned} \quad \therefore \quad -K \left(\frac{dv}{dr} \right)^n = \frac{r}{2} \left(- \frac{dp}{dz} \right)$$

Integratie naar r , waarbij K en n constant verondersteld worden, en invullen van de randvoorwaarde $v_z = 0$ bij $r = R$ levert:

$$v_z = \sqrt[n]{\left(- \frac{dp}{dz} \right) \cdot \frac{1}{2K}} \left(\frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} - \frac{r^{1+1/n}}{1+1/n} \right)$$

Als op $r = r_1$ de schuifspanning gelijk wordt aan de zwichtspanning dan is de debiet door de leiding:

$$\phi_v = \int_{r_1}^R 2\pi r v_z dr + \int_0^{r_1} 2\pi r_1 v_z dr$$

Invullen van v_z en integreren geeft:

$$\phi_v = \frac{2\pi}{6+2/n} \sqrt[n]{\left(- \frac{dp}{dz} \right) \cdot \frac{1}{2K}} \left\{ R^{3+1/n} - \frac{r_1^{3+1/n}}{1+1/n} \right\}$$

Zonder τ_c geldt: $\phi_v = \frac{2\pi}{b+2/n} \sqrt[n]{\left(-\frac{dp}{dx}\right)_2 \cdot \frac{1}{2k}} \cdot R^{3+1/n}$.

Het verschil tussen deze twee drukvallen:

$$\Delta \left(-\frac{dp}{dx}\right)^{1/n} = \left(-\frac{dp}{dx}\right)_1^{1/n} - \left(-\frac{dp}{dx}\right)_2^{1/n} = \left(-\frac{dp}{dx}\right)_1^{1/n} \left(\frac{r_1}{R}\right)^{3+1/n}$$

Bij een 2 x zo grote drukval wordt r_1 2 x zo klein, dus het verschil in de drukval

$$\Delta \left(-\frac{dp}{dx}\right) \text{ wordt } 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = 2^{+3n} \text{ zo klein.}$$

De relatieve fout in de drukval wordt dus 2^{3n+1} maal zo klein.