



Delft University of Technology

Document Version

Proof

Licence

CC BY

Citation (APA)

van Woudenberg, T. R., Oskam, I. L. A., & Westerhof, M. (2025). *Online interactief boek constructiemechanica 3*. Delft University of Technology. <https://oit.tudelft.nl/CTB2210/2025>

Important note

To cite this publication, please use the final published version (if applicable).
Please check the document version above.

Copyright

In case the licence states "Dutch Copyright Act (Article 25fa)", this publication was made available Green Open Access via the TU Delft Institutional Repository pursuant to Dutch Copyright Act (Article 25fa, the Taverne amendment). This provision does not affect copyright ownership.
Unless copyright is transferred by contract or statute, it remains with the copyright holder.

Sharing and reuse

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download, forward or distribute the text or part of it, without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license such as Creative Commons.

Takedown policy

Please contact us and provide details if you believe this document breaches copyrights.
We will remove access to the work immediately and investigate your claim.

This work is downloaded from Delft University of Technology.

PDF generegeerd
voor archivering. Zie
boek met volledige
functionaliteit op
[https://oit.tudelft.nl/
CTB2210/2025](https://oit.tudelft.nl/CTB2210/2025)

Welkom bij Constructiemechanica 3

Dit online interactieve boek bevat de lesstof voor de lessen over statisch onbepaaldheid van Constructiemechanica 3. Voor meer informatie over het gebruik van dit boek, zie [Hoe gebruik je dit boek?](#) .

Hoe gebruik je dit boek?

Inhoud

- Gekoppelde literatuur en tools 
- Interactieve functies 
- Fout gevonden? 
- Persoonlijk boek 
- Versie 

Dit boek combineert theorie en oefeningen zoals behandeld tijdens de lessen.

Gekoppelde literatuur en tools

Dit boek verwijst naar relevante delen van andere literatuur voor extra voorbeelden en oefeningen:

- Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse, door Hartsuijker and Welleman ([2007](#)). Onder andere verkrijgbaar bij **Boom**.
- Mechanica: Evenwicht, door Hartsuijker and Welleman ([2015](#)). Onder andere verkrijgbaar bij **Boom**.
 - Dit boek is ook in het Engels beschikbaar: Engineering Mechanics: Volume 1: Equilibrium, door Hartsuijker and Welleman ([2006](#)). EBook gratis beschikbaar via TU Delft bij  Springer.
- Mechanica: Spanningen, vervormingen en verplaatsingen Hartsuijker and Welleman ([2016](#)). Onder andere verkrijg bij **Boom**.
 - Dit boek is ook in het Engels beschikbaar: Engineering Mechanics: Volume 2: Stresses, strains and displacements, door Hartsuijker and Welleman ([2007](#)). EBook gratis beschikbaar via TU Delft bij  Springer.
- Opnames van colleges (publiek/open beschikbaar) voor het onderwerp statisch onbepaalde constructies: <https://collegerama.tudelft.nl/Mediasite/Channel/public-ceg-ctb2210>

Interactieve functies

Dit TeachBook bevat interactieve functies!

- Interactieve quizen: Sommige pagina's bevatten interactieve 'H5p'-quizen. Hiermee kun je je begrip toetsen. Interacties worden niet opgeslagen, tenzij je inlogt bij H5p.
- Python-interactiviteit: Klik op  →  → [Live Code](#) rechtsboven op een interactieve pagina om een python-kernel in je browser te starten! Interacties worden niet opgeslagen.

Fout gevonden?

Zie je een fout? Klik op  → , log in met een GitHub-account en meld je probleem. Het wordt snel opgelost!

Persoonlijk boek

Wil je dit TeachBook persoonlijker maken door (privé of publieke) annotaties toe te voegen? Dan raad ik de [Hypothesis-extensie](#) aan. Dit is alleen voor eigen gebruik, ik monitor geen publieke posts op dit platform.

Versie

Dit is de 2025-2026-versie van het TeachBook. Ga naar <https://oit.tudelft.nl/CTB2210> voor de meest recente versie van dit TeachBook, of pas het jaartal aan in </CTB2210/2025> naar het jaar waarin je de cursus volgde.

Contactinformatie

Inhoud

- Tom van Woudenberg
- Studentassistenten

Het onderdeel statisch onbepaalde constructies wordt gegeven door Tom van Woudenberg. Neem gerust contact met ons op als je vragen, feedback hebt of als er persoonlijke omstandigheden zijn waar wij van op de hoogte moeten zijn.

Als je vastloopt met een bepaald onderwerp, kun je terecht bij de studentassistenten in kamer 6.41 tijdens het lunchvragenuurtje.

Tom van Woudenberg

- Kamer 6.45
- 015-2789739
- T.R.vanWoudenberg@tudelft.nl



Studentassistenten

- Kamer 6.41
- Vragenuur tijdens elke lunchpauze
- 015-2783654
- SA-mech-CITG@tudelft.nl



- Alexander Dzhanibekyan
- Gweneira van Koot
- Iris Oskam
- Jelke Janssen
- Laurens van Bavel
- Martijn Westerhof

2 september: Statisch onbepaaldheid

In deze les leer je hoe je een structurele aanpak moet toepassen voor het bepalen van de inwendige en uitwendige graad van statisch onbepaaldheid

Instructie

Inhoud

- Bepalen graad van uitwendig statisch onbepaaldheid
- Bepalen graad van inwendig statisch onbepaaldheid
- Instructies in collegevorm
- Opgaves

Een constructie is statisch onbepaald wanneer deze niet meer enkel met evenwichtsvergelijkingen kan worden opgelost. Er kan hierbij onderscheid worden gemaakt tussen:

- Enkel oplegreacties kunnen worden bepaald (uitwendig statisch bepaald)
- Inwendige krachten kunnen worden bepaald (inwendig statisch bepaald)

Als evenwichtsvergelijkingen niet genoeg zijn is een constructie statisch onbepaald. De mate van statisch onbepaaldheid wordt uitgedrukt in de graad van statisch onbepaaldheid.

Het is nodig de graad van statisch onbepaaldheid te bepalen om deze constructies met behulp van de krachtenmethode op te kunnen lossen.

Deze twee categorieën worden samen behandeld in hoofdstuk 4.5.2 en 4.5.3 van het boek *Mechanica: Evenwicht* ([Hartsuijker and Welleman, 2015](https://oie.tudelft.nl/CT1000/2024/week_2/session_1/intro.html)). Voor vakwerken is de analyse versimpeld zoals beschreven in hoofdstuk 9.2.2 van het boek *Mechanica: Evenwicht* ([Hartsuijker and Welleman, 2015](https://oie.tudelft.nl/CT1000/2024/week_2/session_1/intro.html)). Alhoewel de getoonde vergelijkingen met r , v en e effectief kunnen zijn bij simpele constructies, leiden deze bij sommige complexere constructies tot verkeerde resultaten. Een aanpak die altijd werkt is hieronder getoond voor afzonderlijk uitwendig en inwendig statisch onbepaaldheid.

“ Attribution

Deze pagina is aangepast van https://oie.tudelft.nl/CT1000/2024/week_2/session_1/intro.html

Bepalen graad van uitwendig statisch

onbepaaldheid

Voor de berekening van uitwendig statisch onbepaaldheid gelden de volgende stappen:

► Algoritme (Graad van uitwendig statisch onbepaaldheid)

1. Splits de constructie in zo vormvaste delen die los van de opleggingen ten opzichte van elkaar kunnen roteren. Teken het vrijlichaamsschema van deze scharnierende delen. Hierop werken in ieder geval de oplegreacties en eventuele uitwendige krachten. In de scharnierende verbinding werken twee onbekende krachten: horizontaal en verticaal. Deze krachten in de verbinding hebben een even grote tegengestelde reactiekracht op het aansluitende deel.
2. Tel het aantal onbekende krachten: de oplegreacties en verbindingskrachten in de scharnieren (de reactiekrachten tellen niet apart mee)
3. Tel het evenwichtsvergelijkingen: 3 evenwichtsvergelijkingen per vormvaste deel van de constructie
4. De graad van statisch onbepaaldheid is het aantal oplegreacties + verbindingskrachten - aantal evenwichtsvergelijkingen

🔍 Voorbeeld

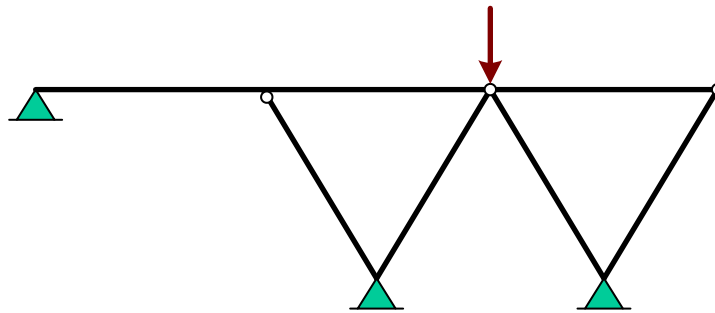


Fig. 1 Voorbeeldconstructie

Als voorbeeld bepalen we de uitwendige statisch onbepaaldheid van deze constructie.

1. Splits de constructie in zo vormvaste delen die los van de opleggingen ten opzichte van elkaar kunnen roteren. Teken het vrijlichaamsschema van deze scharnierende delen. Hierop werken in ieder geval de oplegreacties en eventuele uitwendige krachten. In de scharnierende verbinding werken twee onbekende krachten: horizontaal en verticaal. Deze krachten in de verbinding hebben een even grote tegengestelde reactiekracht op het aansluitende deel.

Voorbeeld

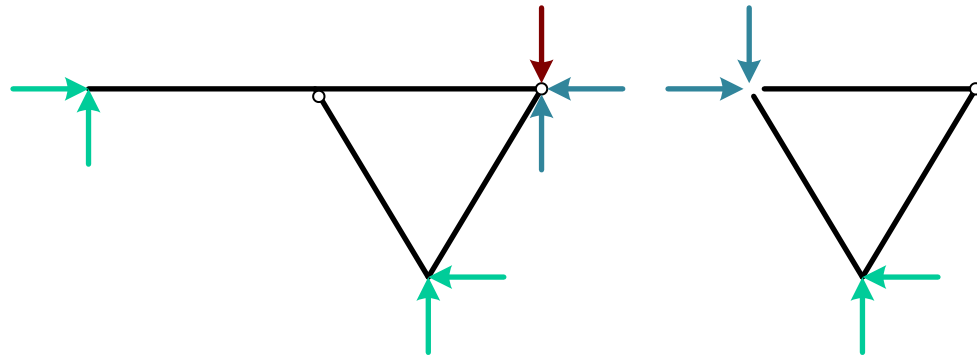


Fig. 2 Gesplitste constructie

De constructie is onder te verdelen in twee vormvaste, scharnierend verbonden delen. De opleggingen zijn vervangen door oplegreacties en de scharnierende verbinding door een horizontale en verticale kracht (en reactiekrachten). De uitwendige kracht werkt slechts op een van de twee delen.

2. Tel het aantal onbekende krachten: de oplegreacties en verbindingskrachten in de scharnieren (de reactiekrachten tellen niet apart mee)

Voorbeeld

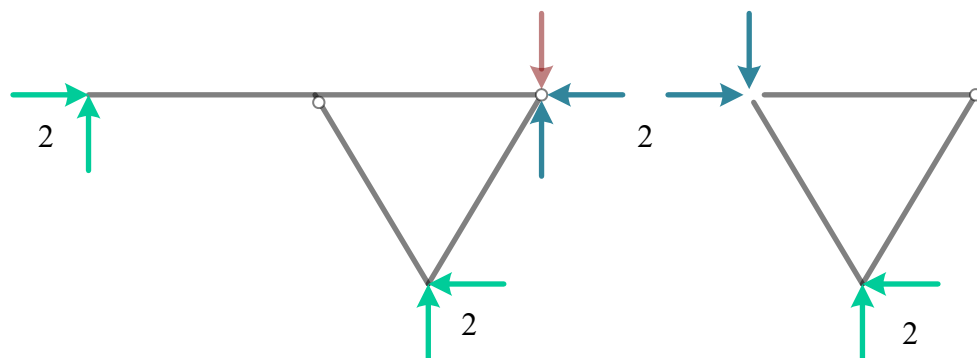


Fig. 3 Aantal onbekende krachten

Er zijn in totaal 6 oplegreacties en 2 verbindingskrachten. Let op: de verbindingskrachten zijn twee keer getoond, maar deze krachten zijn aan beide uiteinden van de verbinding gelijk, dus ze kunnen als één worden geteld.

3. Tel het evenwichtsvergelijkingen: 3 evenwichtsvergelijkingen per vormvaste deel van de constructie

 Voorbeeld

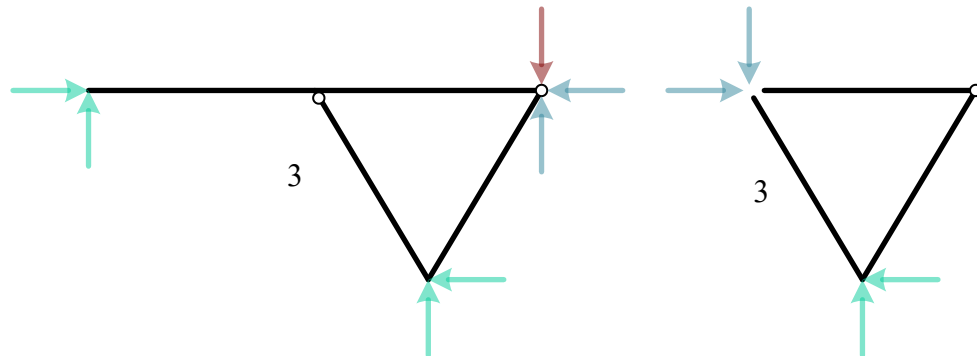


Fig. 4 Aantal onbekende evenwichtsvergelijkingen

Er zijn twee vormvaste delen, dus 6 evenwichtsvergelijkingen

4. De graad van statisch onbepaaldheid is het aantal oplegreacties + verbindingskrachten - aantal evenwichtsvergelijkingen

 Voorbeeld

De graad van uitwendig statisch onbepaaldheid voor dit voorbeeld
 $6 + 2 - 6 = 2$.

Bepalen graad van inwendig statisch onbepaaldheid

Voor de berekening van inwendig statisch onbepaaldheid gelden de volgende stappen:

► Algoritme (Graad van inwendig statisch onbepaaldheid)

1. Splits constructie in alle losse knopen en staven, en teken het vrijlichaamsschema voor alle knopen, rekening houdend met welke staven en opleggingen er aan de knopen verbonden zijn:
 - Op een scharnierende verbinding en vrije- / scharnierende uiteindes werken geen buigende momenten
 - Op een staaf die verbonden is aan een roloplegging werkt enkel een kracht dwars op de rolrichting.
 - Vanuit een pendelstaaf werkt alleen een normaalkracht
2. Teken het vrijlichaamsschema voor de staven: teken de reactiekrachten op de staven ten gevolge van de krachten op de knopen.
3. Tel het aantal onbekende krachten: oplegreacties en staafkrachten (de reactiekrachten tellen niet apart mee)
4. Tel het aantal evenwichtsvergelijkingen: 1 evenwichtsvergelijking per pendelstaaf, 3 evenwichtsvergelijkingen per algemene staaf, 1 evenwichtsvergelijking voor een rolscharnier, 2 evenwichtsvergelijkingen per scharnierende knoop en 3 evenwichtsvergelijkingen per algemene knoop.
5. De graad van statisch onbepaaldheid is het aantal oplegreacties + staafkrachten - aantal evenwichtsvergelijkingen

🔍 Voorbeeld

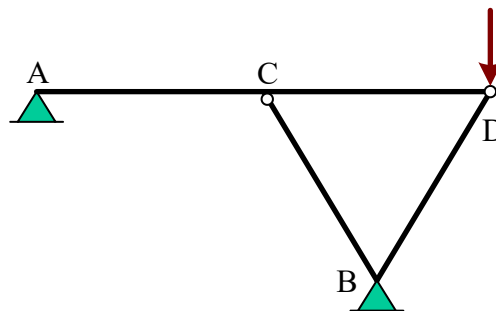


Fig. 5 Voorbeeldconstructie

Als voorbeeld bepalen we de inwendige statisch onbepaaldheid van deze constructie.

1. Splits constructie in alle losse knopen en staven, en teken het vrijlichaamsschema voor alle knopen, rekening houdend met welke staven en opleggingen er aan de knopen verbonden zijn:

- Op een scharnierende verbinding en vrije- / scharnierende uiteindes werken geen buigende momenten
- Op een staaf die verbonden is aan een roloplegging werkt enkel een kracht dwars op de rolrichting.
- Vanuit een pendelstaaf werkt alleen een normaalkracht

Voorbeeld

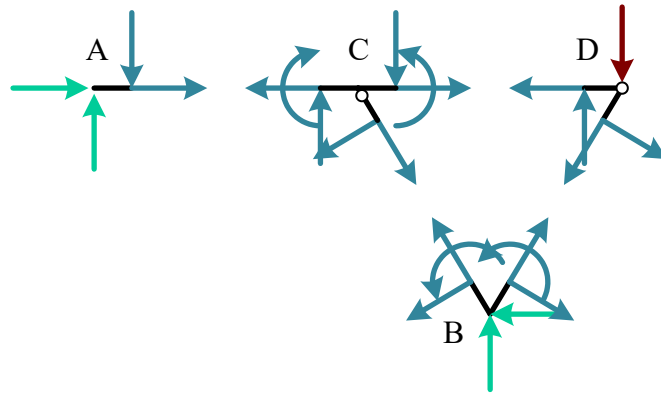


Fig. 6 Vrijlichaamsschema's knopen

De constructie bestaat uit 4 knopen. Op knoop A en B werken onbekende oplegreacties. Knoop A is een scharnierend uiteinde dus daar werken geen buigende momenten. In knoop B kunnen er buigende momenten optreden vanuit BC en BD en in evenwicht zijn, alhoewel de oplegging een scharnier is. Op knoop C werkt vanuit staaf DB geen buigend moment vanwege de scharnierende verbinding. Knoop D is scharnierend, dus hier werken geen buigende momenten op.

2. Teken het vrijlichaamsschema voor de staven: teken de reactiekrachten op de staven ten gevolge van de krachten op de knopen.

Voorbeeld

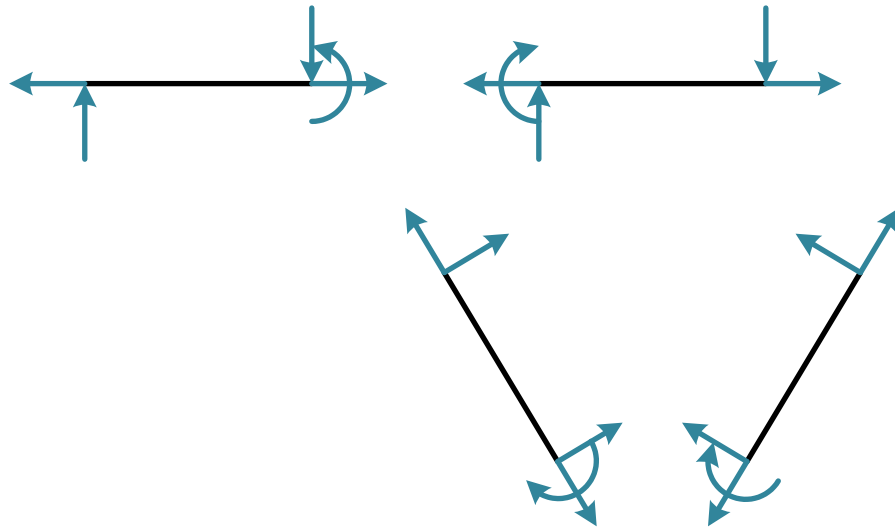


Fig. 7 Vrijlichaamsschema's staven

Vanuit [Fig. 6](#) kunnen de reactiekrachten op de staven getekend worden.

3. Tel het aantal onbekende krachten: oplegreacties en staafkrachten (de reactiekrachten tellen niet apart mee)

Voorbeeld

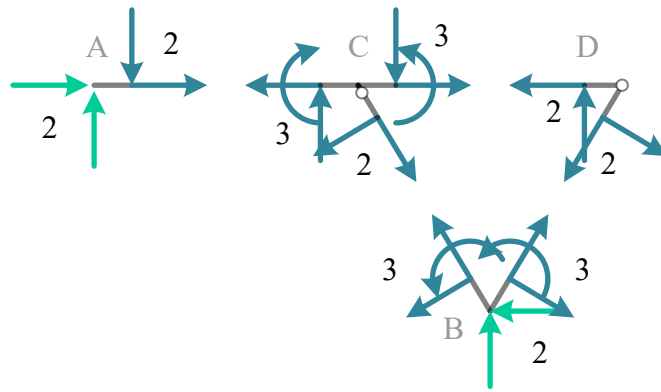


Fig. 8 Aantal onbekende krachten

Vanuit [Fig. 6](#) kunnen het aantal onbekende krachten geteld worden. Er zijn 4 oplegreacties en 20 staafkrachten.

Deze staafkrachten kunnen ook geteld worden in de vrijlichaamsschema's van de staven uit [Fig. 7](#):

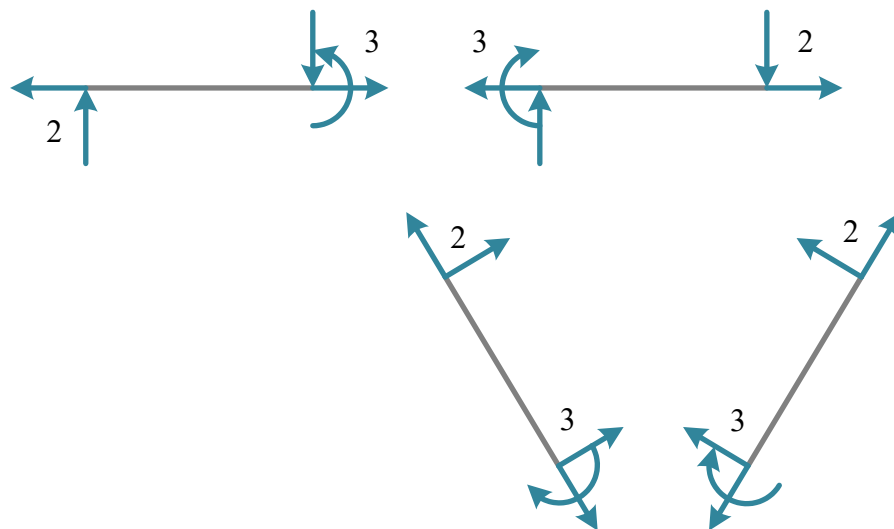


Fig. 9 Aantal onbekende staafkrachten

4. Tel het aantal evenwichtsvergelijkingen: 1 evenwichtsvergelijking per pendelstaaf, 3 evenwichtsvergelijkingen per algemene staaf, 1 evenwichtsvergelijking voor een rolscharnier, 2 evenwichtsvergelijkingen per scharnierende knoop en 3 evenwichtsvergelijkingen per algemene knoop.

Voorbeeld

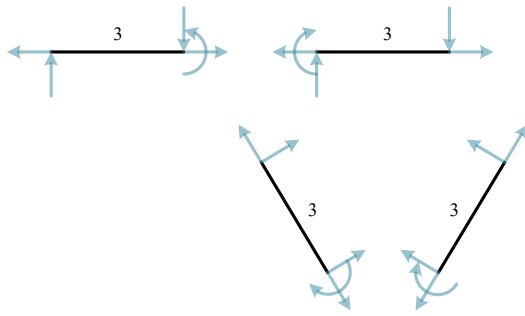


Fig. 10 Aantal evenwichtsvergelijkingen per staaf

Alle staven zijn algemene staven. Dat geeft 12 evenwichtsvergelijkingen voor de staven.

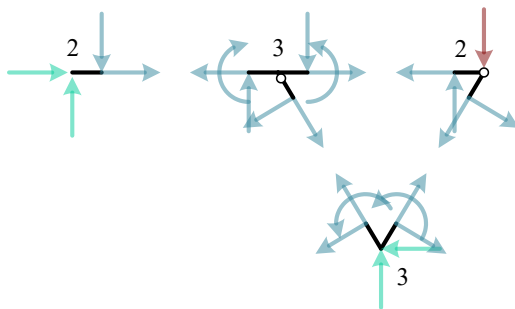


Fig. 11 Aantal evenwichtsvergelijkingen per knoop

Van de knopen zijn er twee volledig scharnierend, bij de rest is ook de momentensom van belang. Dat geeft 10 evenwichtsvergelijkingen.

In totaal zijn er dus 22 evenwichtsvergelijkingen

! **Veranderd in versie v2025.0.3:**

2025-09-01: verkeerd figuur

vervangen door [Aantal evenwichtsvergelijkingen per knoop](#)

5. De graad van statisch onbepaaldheid is het aantal oplegreacties + staafkrachten - aantal evenwichtsvergelijkingen

Voorbeeld

De graad van inwendig statisch onbepaaldheid voor dit voorbeeld
 $4 + 20 - 22 = 2$.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 1](#) gepresenteerd in collegevorm van 0:34:40 tot 1:00:40.

Opgaves

- Opgaves 4.11 - 4.22, van hoofdstuk 4 van het boek *Mechanica: Evenwicht* ([Hartsuijker and Welleman, 2015](#)). Negeer de vragen over kinematisch bepaaldheid. Antwoorden zijn beschikbaar op [deze website](#).
- Opgave 9.6, van hoofdstuk 9 van het boek *Mechanica: Evenwicht* ([Hartsuijker and Welleman, 2015](#)). Negeer de vragen over kinematisch bepaaldheid. Antwoorden zijn beschikbaar op [deze website](#).

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:

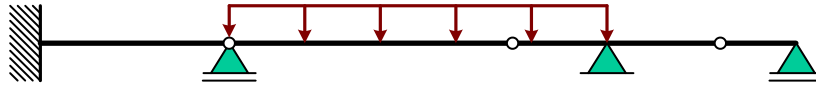


Fig. 12 Constructie

Bepaal de graad van uitwendig statisch onbepaaldheid.

Opgave

Splits de constructie in zo groot mogelijke, vormvaste, scharnierend verbonden delen en teken het vrijlichaamsschema van de scharnierende delen.

Tel het aantal onbekende krachten

Er zijn onbekende oplegreacties en onbekende verbindingskrachten. Dat zijn onbekende krachten in totaal.

  Reuse

Oplossing

Er zijn 7 onbekende oplegreacties en 6 onbekende verbindingskrachten. Dat zijn 13 onbekende krachten in totaal.

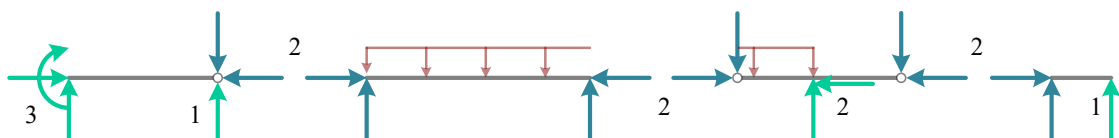


Fig. 13 Aantal onbekende krachten

Opgave

Tel het aantal evenwichtsvergelijkingen.

Er zijn evenwichtsvergelijking(en).

H-P > Reuse

Oplossing

Er zijn 12 evenwichtsvergelijking(en).

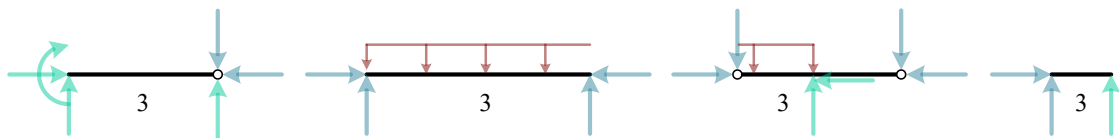


Fig. 14 Aantal evenwichtsvergelijkingen

Opgave

Wat is de graad van uitwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads uitwendig statisch onbepaald

H-P > Reuse

Oplossing

De constructie is 1ste/de graads uitwendig statisch onbepaald

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:

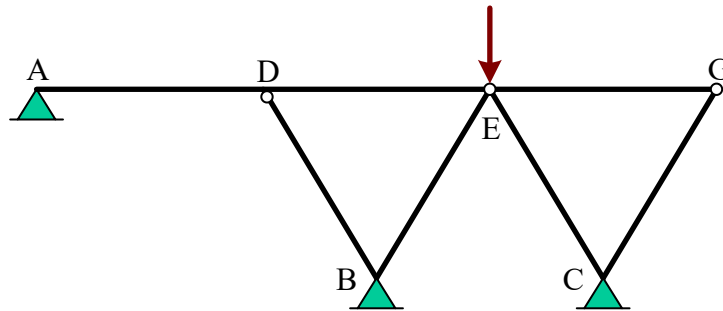


Fig. 15 Constructie

Bepaal de graad van inwendig statisch onbepaaldheid.

Opgave

Splits constructie in alle losse knopen en staven, en teken het vrijlichaamsschema voor alle knopen en teken de vrijlichaamsschema's voor de staven

Tel het aantal onbekende krachten

Er zijn onbekende oplegreacties en onbekende staafkrachten. Dat zijn onbekende krachten in totaal.

   Reuse

Er zijn 6 onbekende oplegreacties en 32 onbekende staafkrachten. Dat zijn 38 onbekende krachten in totaal.

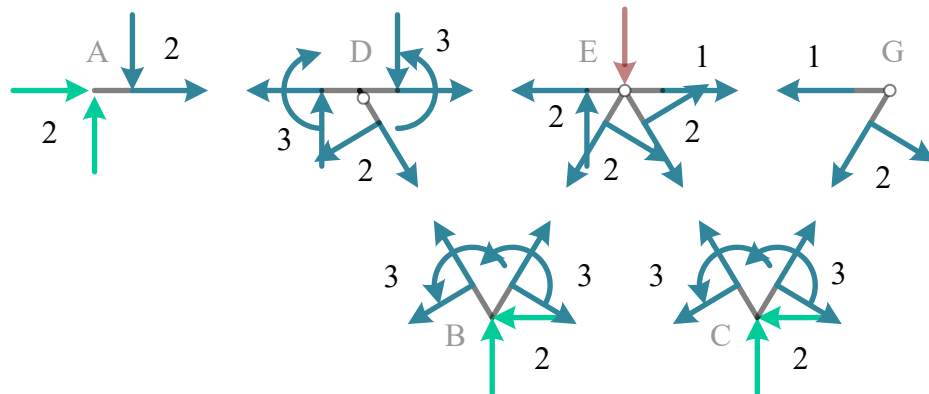


Fig. 16 Aantal onbekende oplegreacties en staafkrachten op knopen

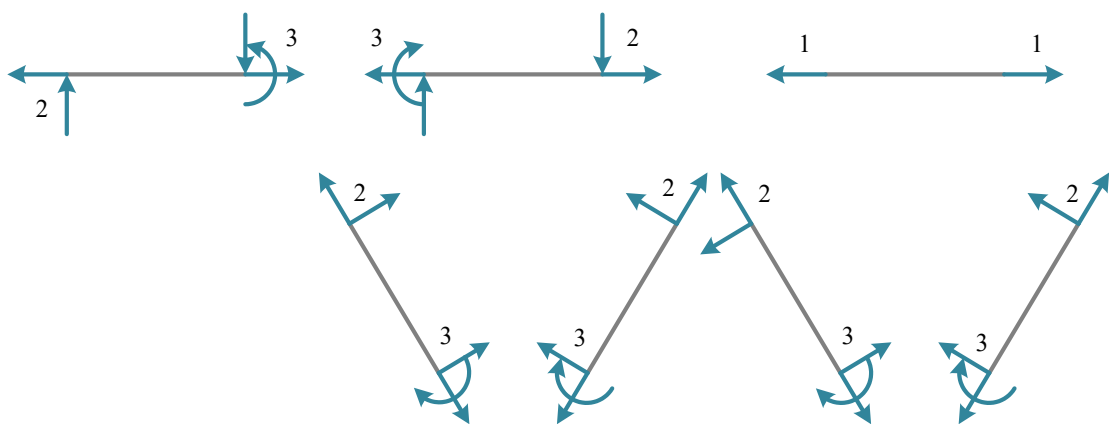


Fig. 17 Aantal onbekende staafkrachten op staven

Opgave

Tel het aantal evenwichtsvergelijkingen.

Er zijn evenwichtsvergelijking(en) vanuit rolscharnieren,
 evenwichtsvergelijking(en) vanuit scharnierende verbindingen,
 evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene verbindingen,
 evenwichtsvergelijking(en) vanuit pendelstaven en
evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene staven. Dat zijn
evenwichtsvergelijkingen in totaal.

Oplossing

Er zijn 0 evenwichtsvergelijkingen vanuit rolscharnieren, 6 evenwichtsvergelijking(en) vanuit scharnierende verbindingen, 9 evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene verbindingen, 1 evenwichtsvergelijking(en) vanuit pendelstaven en 18 evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene staven. Dat zijn 34 evenwichtsvergelijkingen in totaal.

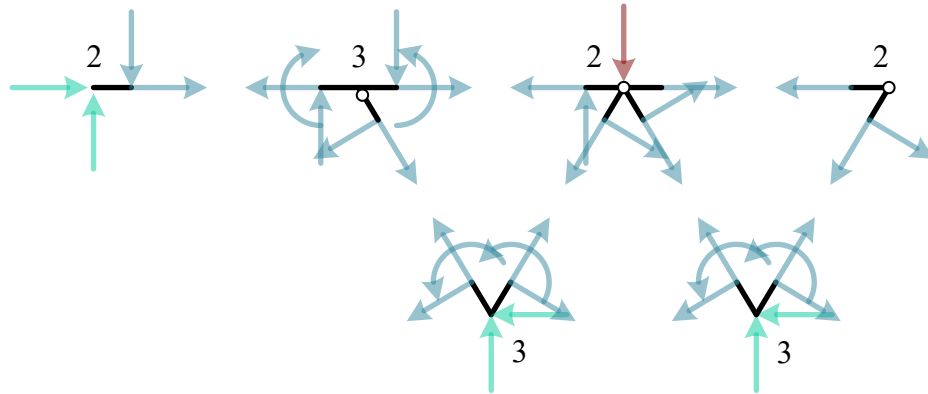


Fig. 18 Aantal evenwichtsvergelijkingen voor de knopen

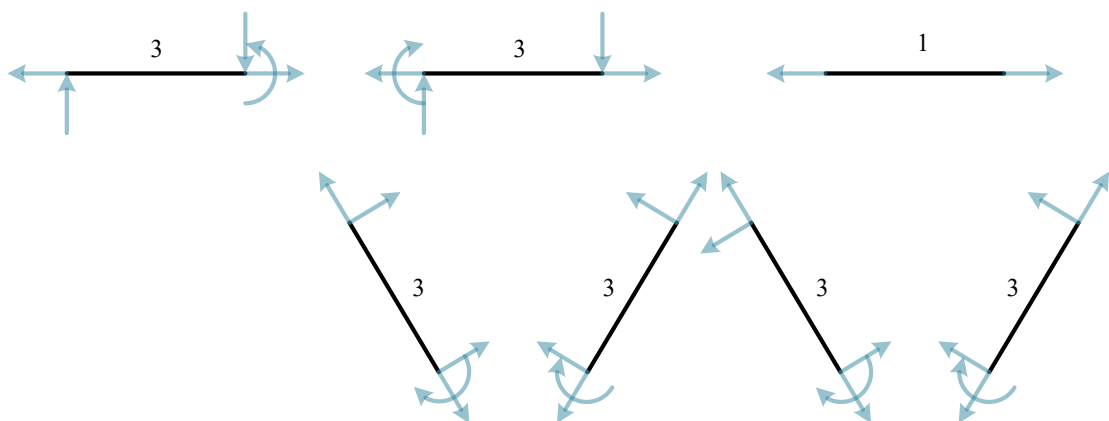


Fig. 19 Aantal evenwichtsvergelijkingen voor de staven

Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

Oplossing



De constructie is 4ste/de graads inwendig statisch onbepaald

Begeleide oefening 3

Gegeven is de volgende constructie:

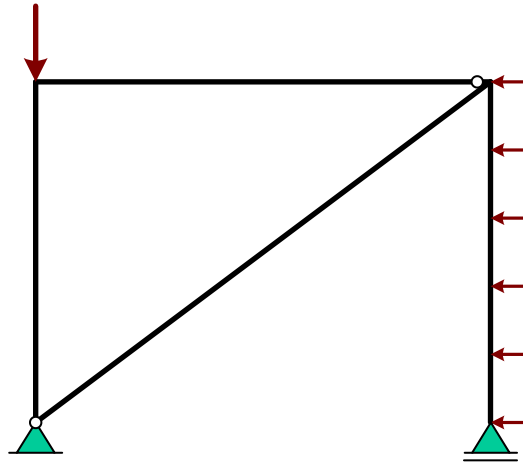


Fig. 20 Constructie

Bepaal de graad van uitwendig en inwendig statisch onbepaaldheid.

Opgave

Splits de constructie in zo groot mogelijke, vormvaste, scharnierend verbonden delen en teken het vrijlichaamsschema van de scharnierende delen.

Tel het aantal onbekende krachten

Er zijn onbekende oplegreacties en onbekende verbindingskrachten. Dat zijn onbekende krachten in totaal.

Oplossing



Er zijn 3 onbekende oplegreacties en 0 onbekende verbindingskrachten. Dat zijn 3 onbekende krachten in totaal.

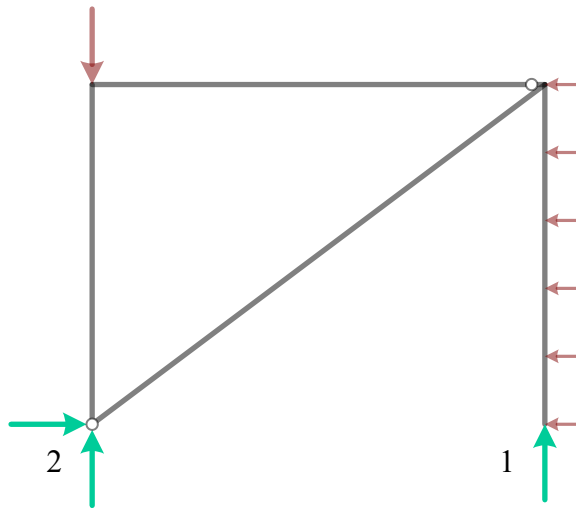


Fig. 21 Aantal onbekende krachten

Opgave

Tel het aantal evenwichtsvergelijkingen.

Er zijn evenwichtsvergelijking(en).

Oplossing

Er zijn 3 evenwichtsvergelijking(en).

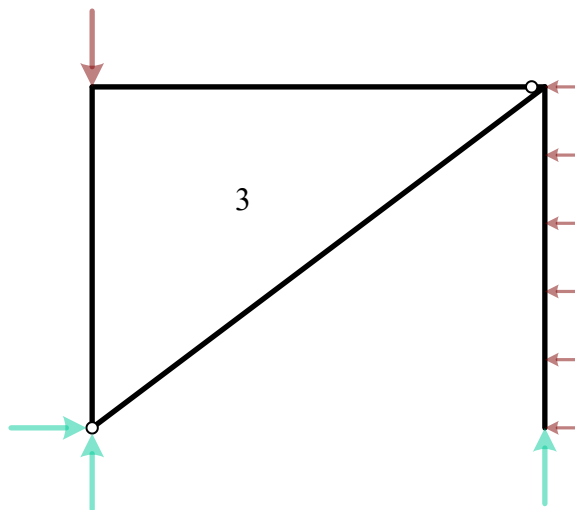


Fig. 22 Aantal evenwichtsvergelijkingen

Opgave

Wat is de graad van uitwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads uitwendig statisch onbepaald

H-P > Reuse

Oplossing

De constructie is 0ste/de graads uitwendig statisch onbepaald

Opgave

Splits constructie in alle losse knopen en staven, en teken het vrijlichaamsschema voor alle knopen en teken de vrijlichaamsschema's voor de staven

Tel het aantal onbekende krachten

Er zijn onbekende oplegreacties en onbekende staafkrachten. Dat zijn onbekende krachten in totaal.

  Reuse

Er zijn 3 onbekende oplegreacties en 19 onbekende staafkrachten. Dat zijn 22 onbekende krachten in totaal.

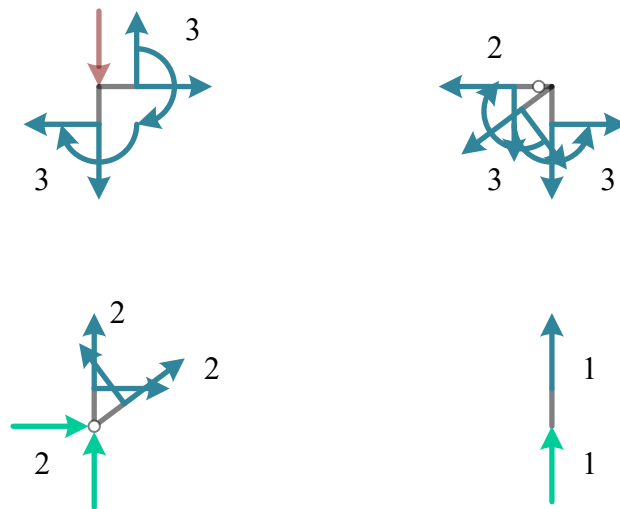


Fig. 23 Aantal onbekende oplegreacties en staafkrachten op knopen

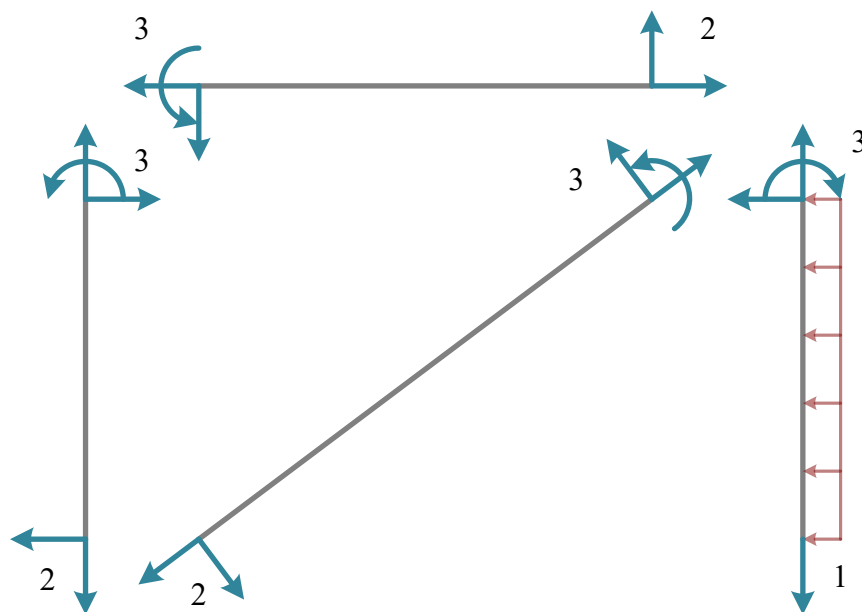


Fig. 24 Aantal onbekende staafkrachten op staven

Opgave

Tel het aantal evenwichtsvergelijkingen.

Er zijn evenwichtsvergelijking(en) vanuit rolscharnieren,
 evenwichtsvergelijking(en) vanuit scharnierende verbindingen,
 evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene verbindingen,
 evenwichtsvergelijking(en) vanuit pendelstaven en
evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene staven. Dat zijn
evenwichtsvergelijkingen in totaal.

Er zijn 1 evenwichtsvergelijking(en) vanuit rolscharnieren, 2 evenwichtsvergelijking(en) vanuit scharnierende verbindingen, 6 evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene verbindingen, 0 evenwichtsvergelijking(en) vanuit pendelstaven en 12 evenwichtsvergelijking(en) vanuit algemene staven. Dat zijn 21 evenwichtsvergelijkingen in totaal.

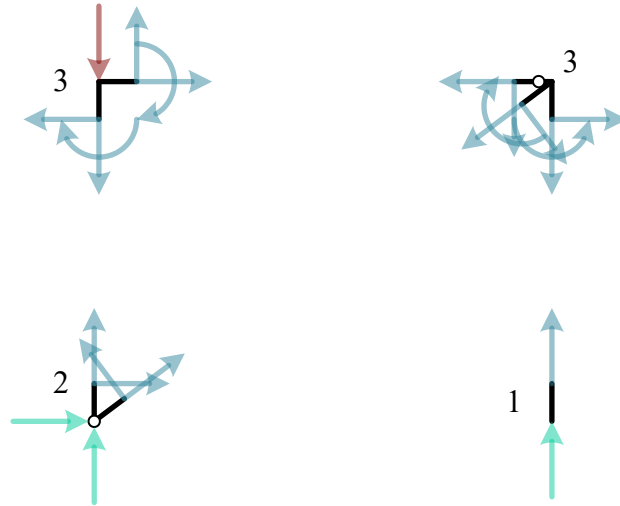


Fig. 25 Aantal evenwichtsvergelijkingen voor de knopen

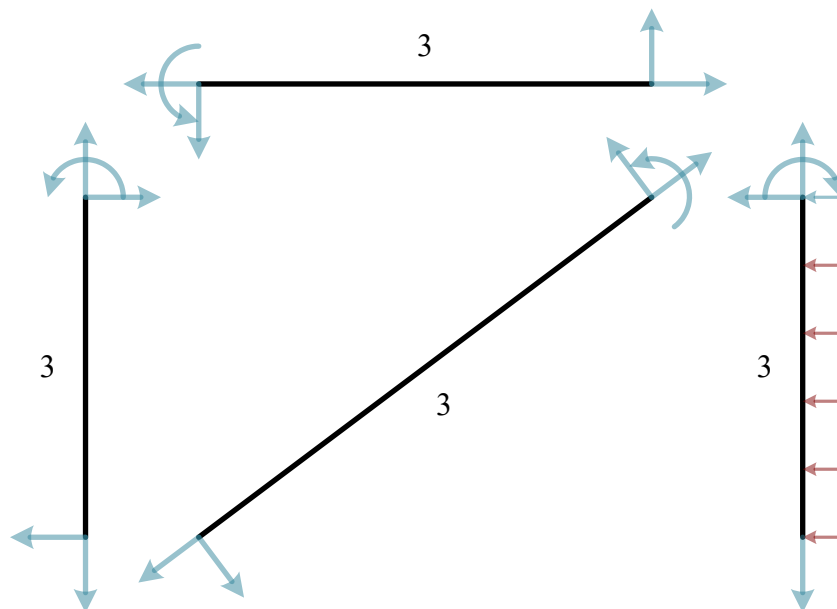


Fig. 26 Aantal evenwichtsvergelijkingen voor de staven

Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

  Reuse

Oplossing



De constructie is 1ste/de graads inwendig statisch onbepaald

3 september: MatrixFrame

In deze les leer je hoe je MatrixFrame kan gebruiken om constructies door te rekenen.

Instructie

Inhoud

- Instructies in collegevorm

Matrixframe is commerciële software waarmee constructies kunnen worden doorgerekend.

MatrixFrame gebruikt symbolen die erg lijken op de symbolen gebruikt bij de opleiding in Delft. Voor studenten is er een gratis [studentenlicentie](#) (registratie bij MatrixFrame vereist) en [een versie](#) die alleen op het TU Delft netwerk (eventueel via [VPN verbinding](#)) werkt. Als je de studentenlicentie hebt aangevraagd maar niet ontvangen, kun je een ticket indienen via [deze link](#).

“ Attribution

Deze pagina is aangepast van <https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/tools/matrixframe.html>

Een aantal punten zijn van belang bij het gebruik van MatrixFrame:

- Bij het gebruik van matrixframe zal je altijd stijfheden van de elementen moeten invoeren ('profielgegevens in MatrixFrame'). Dit heeft MatrixFrame nodig om de constructie door te rekenen, ook al is dat voor de krachtsgrootheden in statisch bepaalde constructies niet nodig. In het geval dat deze gegevens niet bekend zijn kan je een willekeurige grote waarde nemen onder 'Handmatige invoer' waarmee je een oneindige stijve staaf kan modelleren. Als de waarde een paar ordegroottes groter is dan de andere waardes is het al goed, bij een te grote waarde ontstaan er numerieke issues.
- Soms kunnen elementen overlappen zonder dat je het ziet.

Een uitgebreide handleiding met meer opties is [hier](#) te vinden. Daarnaast biedt [de officiële documentatie](#) ook meer uitleg.

Over het algemeen zijn de volgende stappen vereist:

► Algoritme (Invoer en uitvoer constructie in MatrixFrame)

1. Maak een nieuw project - '2D-Raamwerk' en klik 'Ok'. De optie '1D-ligger' en '2D-vakwerk' zijn versimpelingen van de '2D-Raamwerk'-optie. De optie '3D-Raamwerk' en '3D-Vakwerk' kan je proberen, maar daar krijgt men over het algemeen hoofdpijn van.
2. Je belandt direct in de 'Geometrie' interface. Klik in het grid om je geometrie te vormen. De coördinaten zijn zichtbaar in de onderbalk en de afmetingen verschijnen tijdens het klikken. Gebruik **Esc** op je toetsenbord om te stoppen of op een volgend element te beginnen die niet vastzit aan het uiteinde van het vorige element. Pas eventueel afmetingen aan met behulp van de stramienen aan de linkerkant of de coördinaten aan de onderkant van het scherm.
3. Ga verder met de 'Profielgegevens' interface. Ook als deze informatie niet bekend is is het invoeren hiervan vereist. Onder 'Profielen' - 'Handmatige invoer' kan je een A , I en E invullen. Het is niet mogelijk een waarde van 0 of ∞ in te vullen, daarvoor zal je een kleine of grote numerieke waarde moeten invoeren. Tip, $\cdot 10^6$ kan je invoeren als **e6**. Vergeet niet op 'Pas toe op alles' te klikken! Linksonder in het scherm zie je nu achter elke staaf een profielnaam staan.
4. De volgende stap is het toevoegen van opleggingen. Er zijn een aantal standaard opties, maar je kan ook handmatig translatie- en rotatierichtingen vastzetten. De opleggingen kan je plaatsen op de knopen of langs een staaf (in dat geval wordt er een nieuwe knoop gemaakt).
5. Nu kunnen we verder met scharnieren. In een raamwerk is standaard alles momentvast verbonden. Per staaf kan je voor elk uiteinde aangeven of dit een scharnier moet worden door op een deel van die staaf te klikken. Als twee aansluitende staven scharnierend zijn verbonden is het niet nodig om beide staafuiteindes scharnierend te maken, ééntje is genoeg.
6. De laatste configuratiestap is het toevoegen van belastingen. Je kan verschillende belastingsgevallen (B.G.) toevoegen, maar zolang je er maar één hoeft door te rekenen is het niet nodig die opties aan te passen. Voor elke belasting is het wel nodig de waarde en richting aan te geven en de staaf aan te klikken waarop deze last werkt. In het venster onderin het scherm kan je deze ook nog aanpassen.
7. Nu alles geconfigureerd is kan je op L.E. berekening (linear-elastische berekening) klikken. Er opent zich dan een dialoogvenster die foutmeldingen geeft als er iets niet klopt
8. Om de resultaten te bekijken zijn er een aantal opties. De oplegreacties kunnen los worden getoond. Let op, de richting van de pijlen geeft de

daadwerkelijke richting aan van de krachten en koppels; een eventueel minteken geeft aan dat die kracht in de negatieve richting van het assenstelsel werkt.

9. De snedekrachtenlijnen kunnen ook worden getoond. Deze kunnen per snedekracht getoond worden volgens de vervormingstekens zoals we die gewend zijn. Mochten de vervormingstekens niet zichtbaar zijn kan je inzoomen of de schaal vergroten onder 'Weergave-instellingen' - 'Beeldinstellingen' - 'Eigenschappen' - 'Resultaten' - 'Normaalkracht (Nx)'/ 'Dwarskracht (Vz)'/ 'Moment (My)' - 'Vorm' - 'Schaal' - Voeg waarde in en klik op 'Toepassen'. Als een staaf wordt aangeklikt zijn links in het scherm alle snedekrachten en verplaatsingen van die staaf zichtbaar. Onderin het scherm worden een aantal karakteristieke waardes getoond. De waardes worden getoond volgens het lokale assenstelsel.
10. Ook verplaatsingen kunnen worden getoond. Het aantal decimalen kan worden aangepast onder 'Weergave-instellingen' - 'Beeldinstellingen' - 'Eigenschappen' - 'Resultaten' - 'Verplaatsingen/Doorbuigingen' - 'Label' - 'Decimalen' - Voeg waarde in en klik op 'Toepassen'.
11. Tot slot kunnen waardes op specifieke posities worden afgelezen met de spion functie. Klik daarvoor een staaf aan en voer onder 'Invoer pos:' een locatie in in het lokale assenstelsel. De tabel en grafische weergave toont dan waardes van snedekrachten en verplaatsingen op dat punt.

Als voorbeeld bepalen we de uitwendige statisch onbepaaldheid van deze constructie.

Voorbeeld

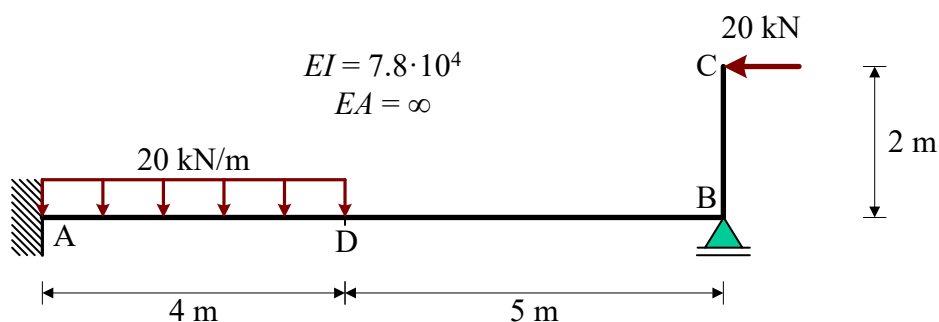


Fig. 27 Voorbeeldconstructie, $EI = 7.8 \cdot 10^4 \text{ rmkNm}^2$, $EA = \infty$

1. Maak een nieuw project - '2D-Raamwerk' en klik 'Ok'. De optie '1D-ligger' en '2D-vakwerk' zijn versimpelingen van de '2D-Raamwerk'-optie. De optie '3D-Raamwerk' en '3D-Vakwerk' kan je proberen, maar daar krijgt men over het algemeen hoofdpijn van.

Voorbeeld

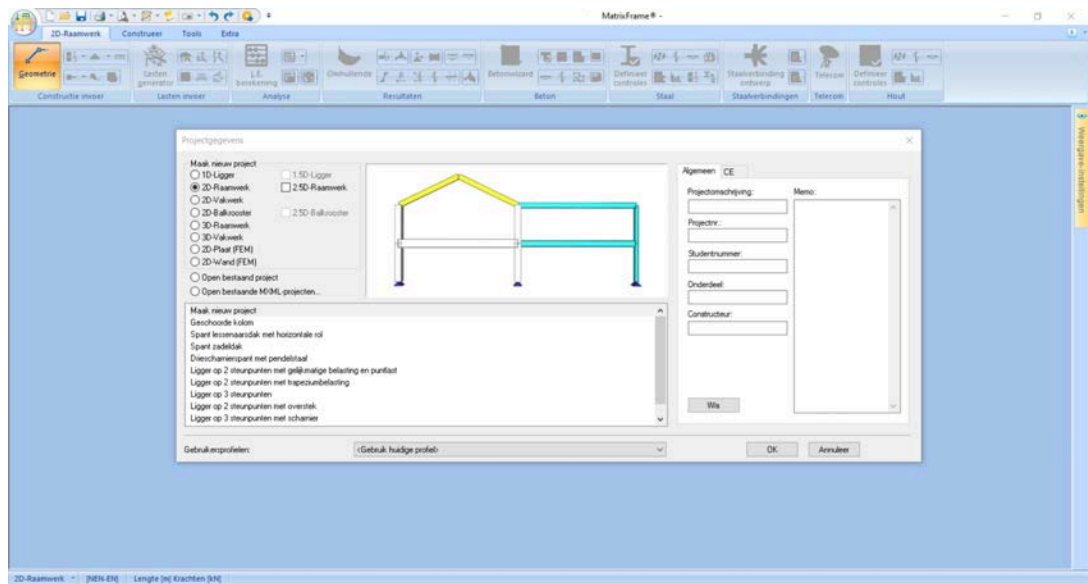


Fig. 28 Aangezien het hier gaat om een 2D-Raamwerk selecteren we die optie.

2. Je belandt direct in de 'Geometrie' interface. Klik in het grid om je geometrie te vormen. De coördinaten zijn zijn zichtbaar in de onderbalk en de afmetingen verschijnen tijdens het klikken. Gebruik **Esc** op je toetsenbord om te stoppen of op een volgend element te beginnen die niet vastzit aan het uiteinde van het vorige element. Pas eventueel afmetingen aan met behulp van de stramienen aan de linkerkant of de coördinaten aan de onderkant van het scherm.

Voorbeeld

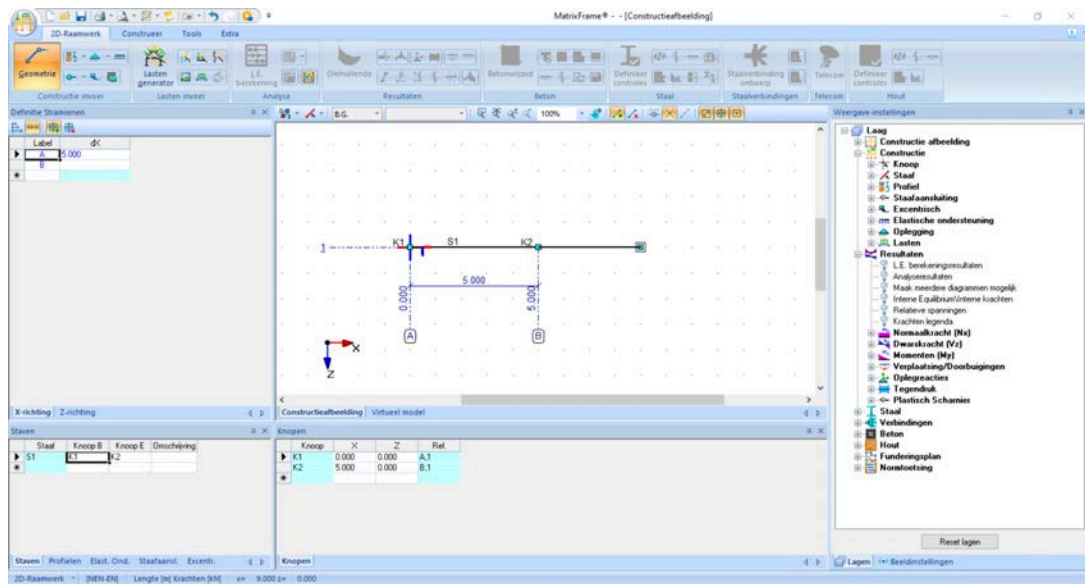


Fig. 29 De eerste staaf is al getekend en van de tweede staaf is de coördinaat (9,0) zichtbaar in de balk onderaan.

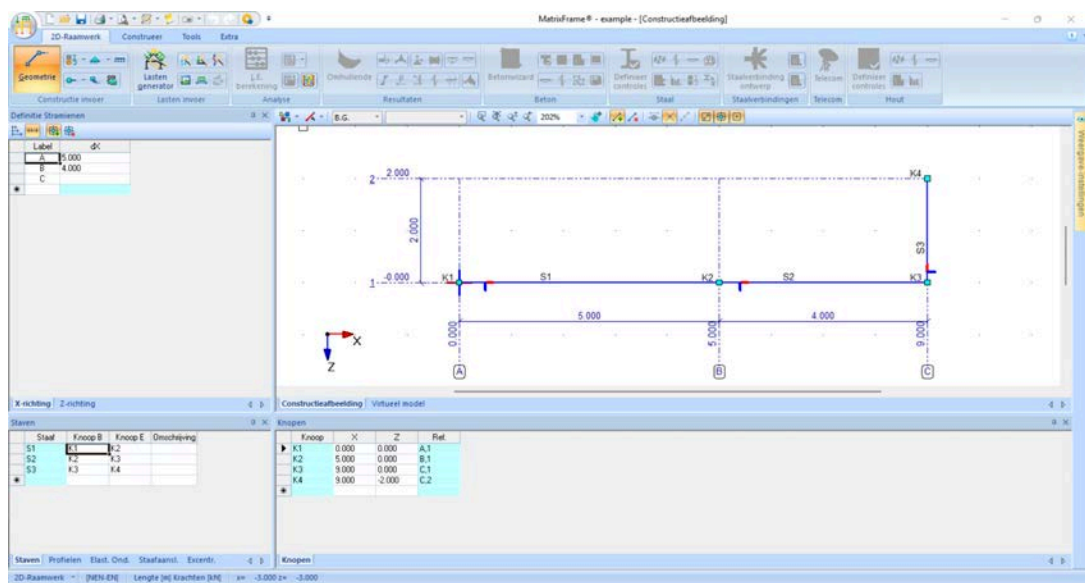


Fig. 30 Als alle knopen en staven getekend zijn is dit het resultaat

- Ga verder met de 'Profielgegevens' interface. Ook als deze informatie niet bekend is is het invoeren hiervan vereist. Onder 'Profielen' - 'Handmatige invoer' kan je een A , I en E invullen. Het is niet mogelijk een waarde van 0 of ∞ in te vullen, daarvoor zal je een kleine of grote numerieke waarde moeten invoeren. Tip, $\cdot 10^6$ kan je invoeren als **e6**. Vergeet niet op 'Pas toe op alles' te klikken! Linksonder in het scherm zie je nu achter elke staaf een profielnaam staan.

Voorbeeld

In dit voorbeeld is er enkel een EI gegeven, terwijl we een losse E en I moeten invoeren. Daarom kan je twee getallen kiezen waarvan het product $7.8 \cdot 10^4$ is, bijvoorbeeld $E = 200 \cdot 10^6$ en $I = 3.9 \cdot 10^{-2}$. EA is ∞ , waarvoor we een grote numerieke waarde kunnen invoeren, bijvoorbeeld $A = 10 \cdot 10^3$.

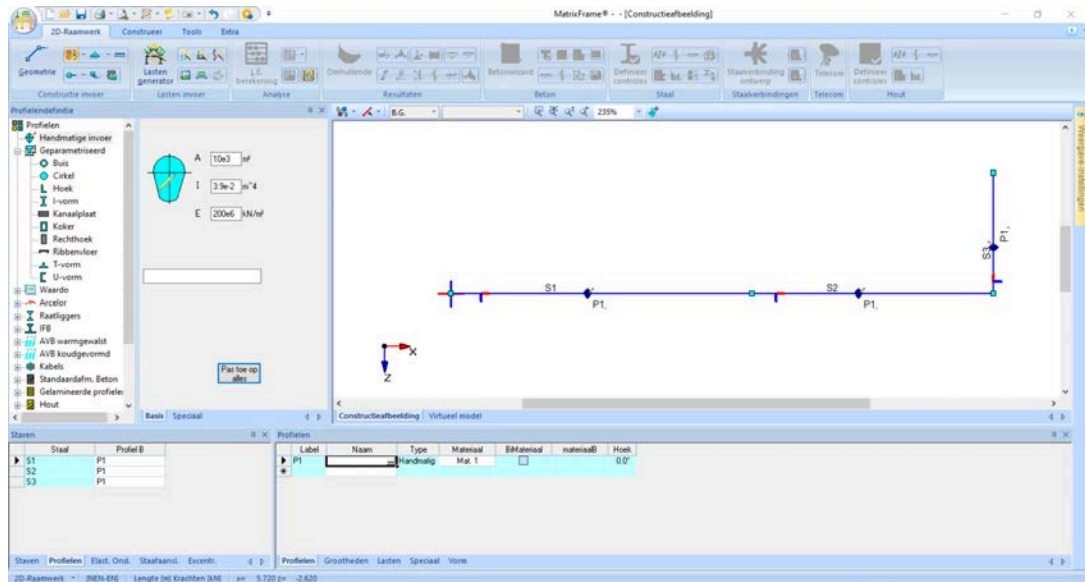


Fig. 31 Als alles is ingevoerd is dit het resultaat

- De volgende stap is het toevoegen van oplettingen. Er zijn een aantal standaard opties, maar je kan ook handmatig translatie- en rotatierichtingen vastzetten. De oplettingen kan je plaatsen op de knopen of langs een staaf (in dat geval wordt er een nieuwe knoop gemaakt).

Voorbeeld

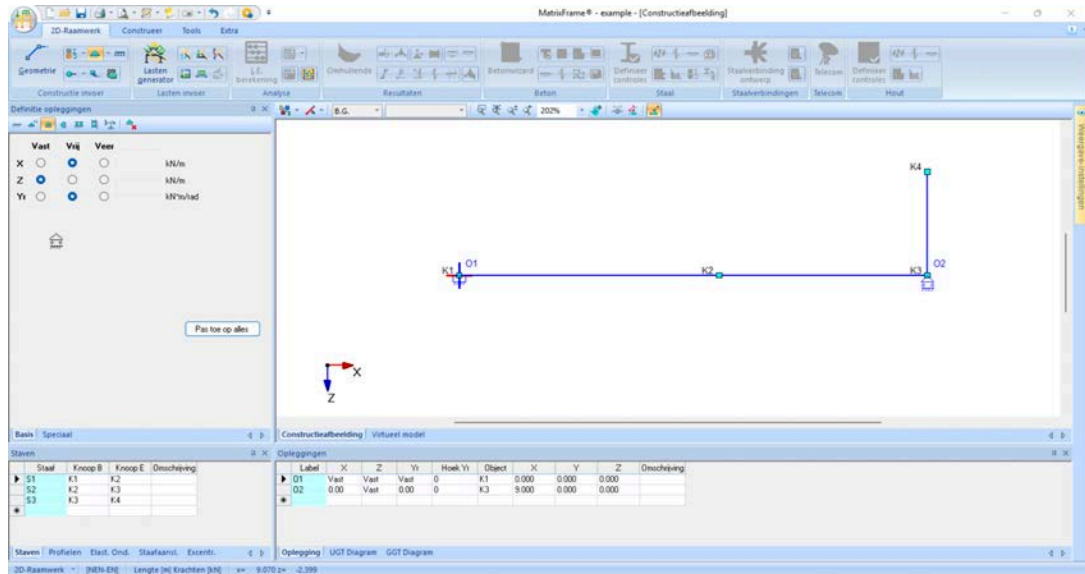


Fig. 32 De inklemming en roloplegging van het voorbeeld zijn na toevoegen zowel in de grafische weergave als in het onderste venster zichtbaar.

- Nu kunnen we verder met scharnieren. In een raamwerk is standaard alles momentvast verbonden. Per staaf kan je voor elk uiteinde aangeven of dit een scharnier moet worden door op een deel van die staaf te klikken. Als twee aansluitende staven scharnierend zijn verbonden is het niet nodig om beide staafuiteindes scharnierend te maken, ééntje is genoeg.

Voorbeeld

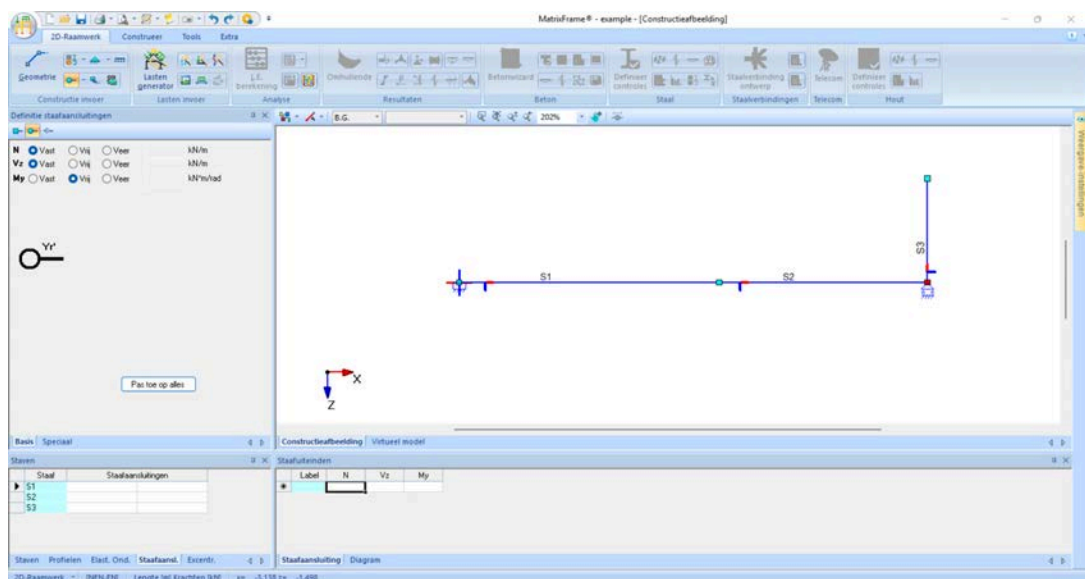


Fig. 33 In dit voorbeeld zijn er geen scharnieren, dus kan deze stap overgeslagen worden.

6. De laatste configuratiestap is het toevoegen van belastingen. Je kan verschillende belastingsgevallen (B.G.) toevoegen, maar zolang je er maar één hoeft door te rekenen is het niet nodig die opties aan te passen. Voor elke belasting is het wel nodig de waarde en richting aan te geven en de staaf aan te klikken waarop deze last werkt. In het venster onderin het scherm kan je deze ook nog aanpassen.

Voorbeeld

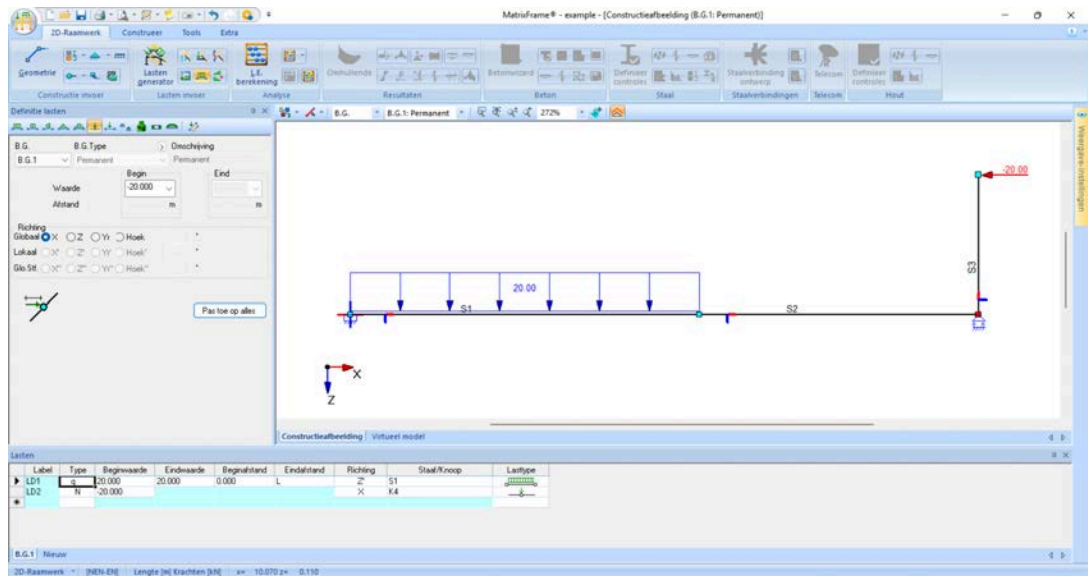


Fig. 34 In dit voorbeeld zijn er twee belastingen. De verdeelde belasting is aangebracht in de lokale z richting en de puntlast in de globale x-richting met een negatieve waarde zodat die naar links werkt.

7. Nu alles geconfigureerd is kan je op L.E. berekening (linear-elastische berekening) klikken. Er opent zich dan een dialoogvenster die foutmeldingen geeft als er iets niet klopt

Voorbeeld

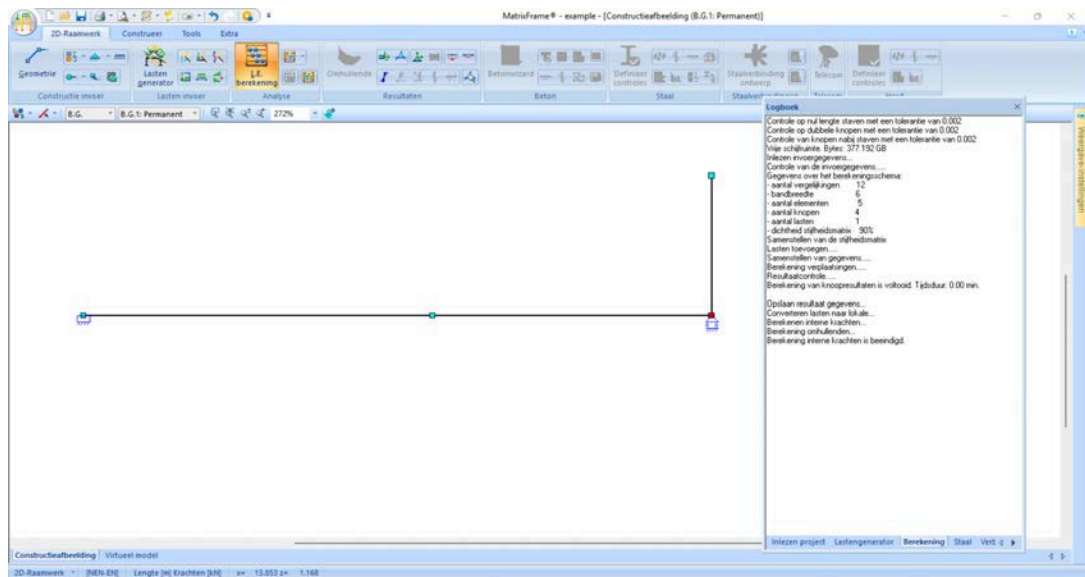


Fig. 35 In dit voorbeeld is alles goed geconfigureerd en geeft het logboek geen foutmeldingen

- Om de resultaten te bekijken zijn er een aantal opties. De oplegreacties kunnen los worden getoond. Let op, de richting van de pijlen geeft de daadwerkelijke richting aan van de krachten en koppels; een eventueel minteken geeft aan dat die kracht in de negatieve richting van het assenstelsel werkt.

Voorbeeld

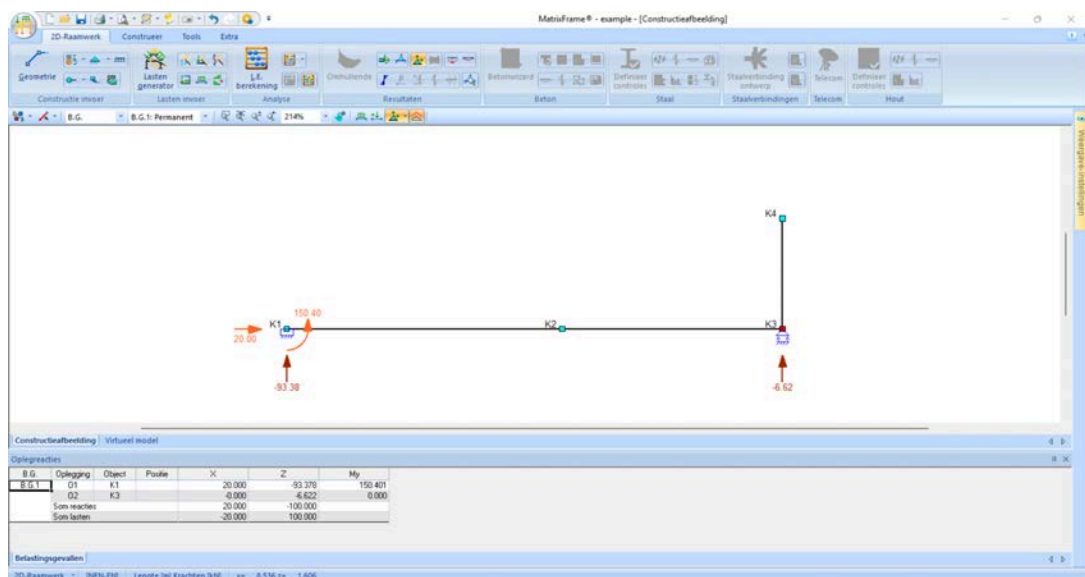


Fig. 36 In dit voorbeeld zijn vier oplegreacties zichtbaar. De verticale oplegreacties werken naar boven; het minteken geeft aan dat deze in de negatieve z-richting werken.

9. De snedekrachtenlijnen kunnen ook worden getoond. Deze kunnen per snedekracht getoond worden volgens de vervormingstekens zoals we die gewend zijn. Mochten de vervormingstekens niet zichtbaar zijn kan je inzoomen of de schaal vergroten onder 'Weergave-instellingen' - 'Beeldinstellingen' - 'Eigenschappen' - 'Resultaten' - 'Normaalkracht (N_x)'/'Dwarskracht (V_z)'/'Moment (M_y)' - 'Vorm' - 'Schaal' - Voeg waarde in en klik op 'Toepassen'. Als een staaf wordt aangeklikt zijn links in het scherm alle snedekrachten en verplaatsingen van die staaf zichtbaar. Onderin het scherm worden een aantal karakteristieke waardes getoond. De waardes worden getoond volgens het lokale assenstelsel.

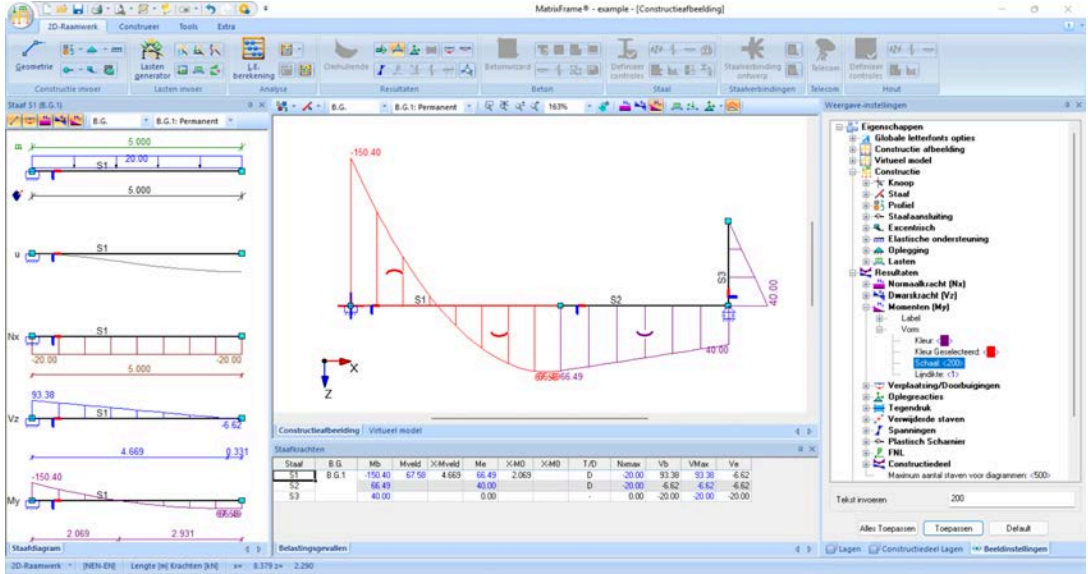


Fig. 37 De momenten zijn zichtbaar gemaakt met staaf AD in detail aan de linkerkant. De schaal is aangepast zodat de vervormingstekens zichtbaar zijn.

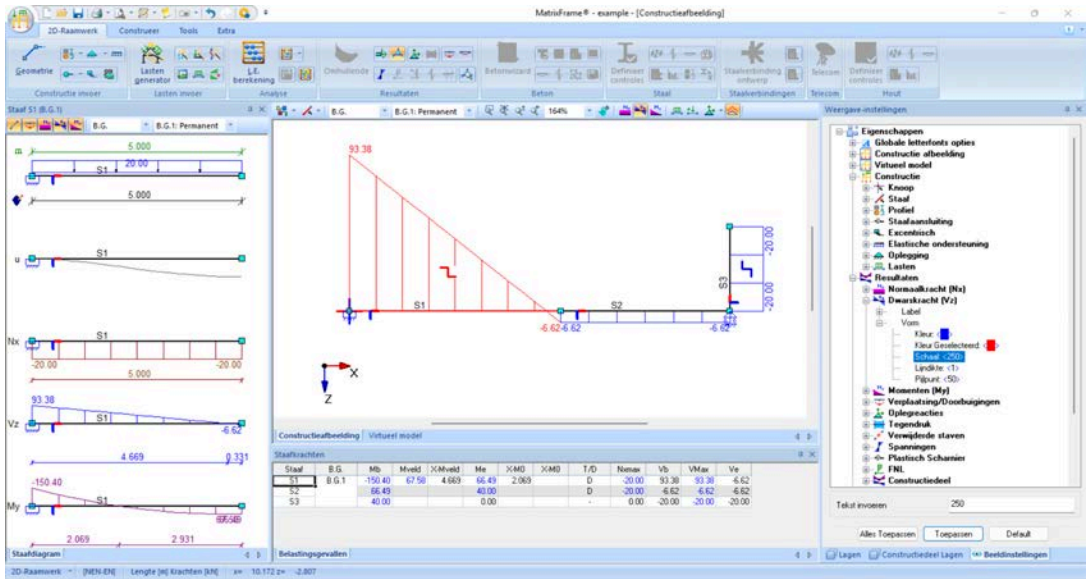


Fig. 38 Ook de dwarskrachten kunnen worden getoond. Het vervormingsteken van DB is niet zichtbaar in deze weergave, als er verder wordt ingezoomd of de schaal verder wordt vergroot zou die wel zichtbaar worden.

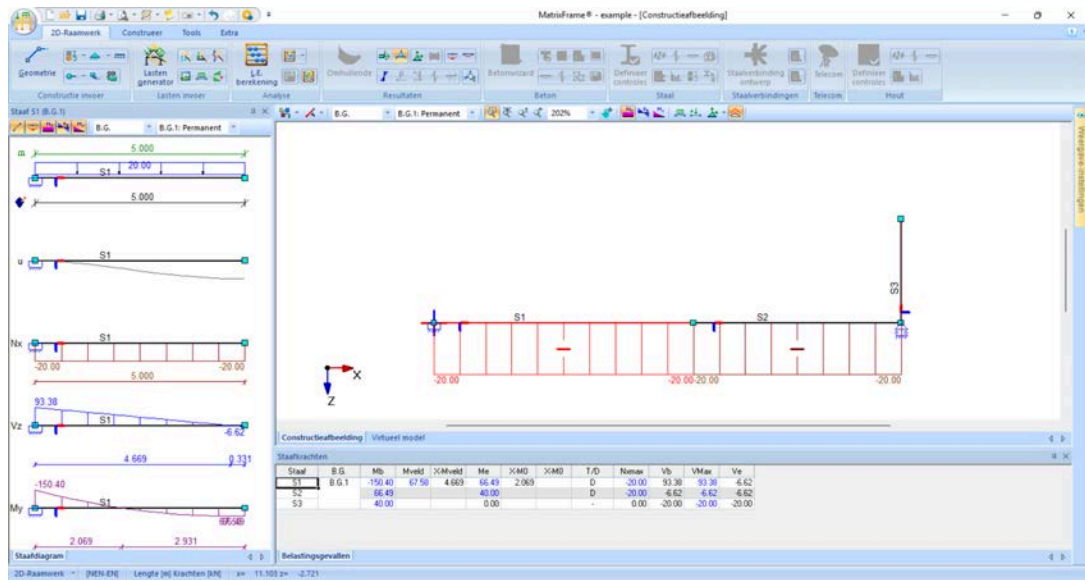


Fig. 39 De normaalkrachten kunnen ook zichtbaar worden gemaakt.

10. Ook verplaatsingen kunnen worden getoond. Het aantal decimalen kan worden aangepast onder 'Weergave-instellingen' - 'Beeldinstellingen' - 'Eigenschappen' - 'Resultaten' - 'Verplaatsingen/Doorbuigingen' - 'Label' - 'Decimalen' - Voeg waarde in en klik op 'Toepassen'.

Voorbeeld

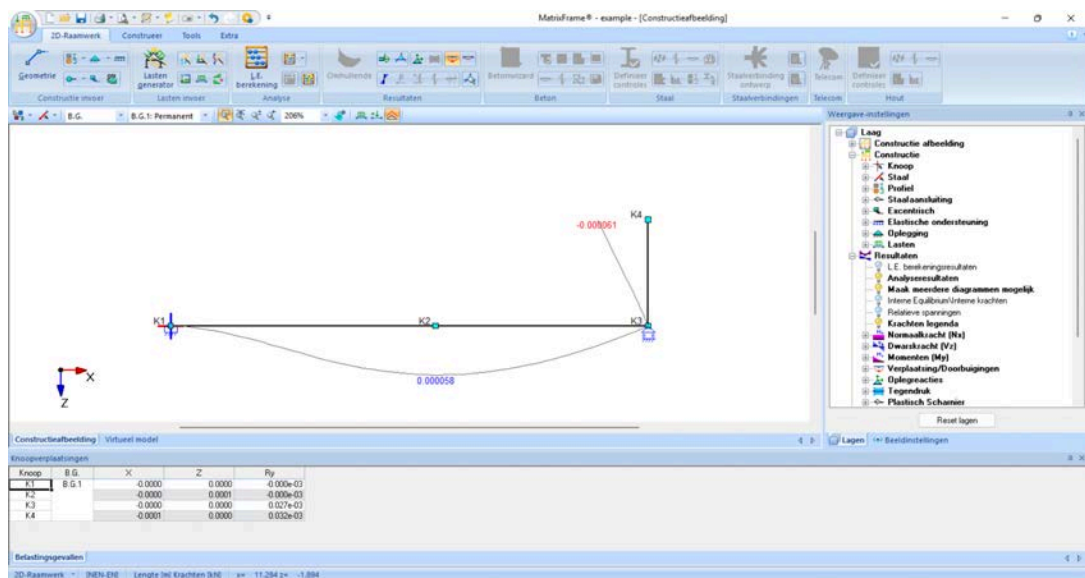


Fig. 40 De verplaatsingen zijn zichtbaar gemaakt. Het aantal decimalen is aangepast zodat de exacte verplaatsingen kunnen worden gevonden.

11. Tot slot kunnen waarden op specifieke posities worden afgelezen met de spion functie. Klik daarvoor een staaf aan en voer onder 'Invoer pos:' een locatie in in het lokale

assenstelsel. De tabel en grafische weergave toont dan waarden van snedekrachten en verplaatsingen op dat punt.

Voorbeeld

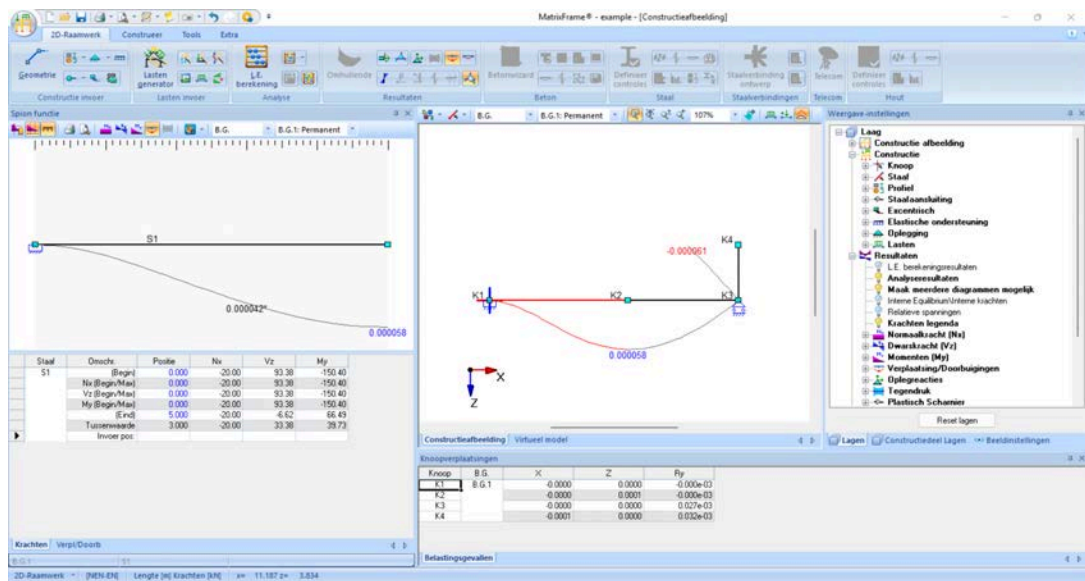


Fig. 41 Op 3 meter rechts van A zijn voor dit voorbeeld de snedekrachten en verplaatsingen bepaald: een verplaatsingen van **0.000042 m**, een moment van **39.73 kNm**, een dwarskracht van **33.38 kN** en een normaalkracht van **−20 kN**.

Voorbeeld

Het bestand van dit voorbeeld is [hier](#) te downloaden.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 2](#) gepresenteerd in collegevorm.

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:

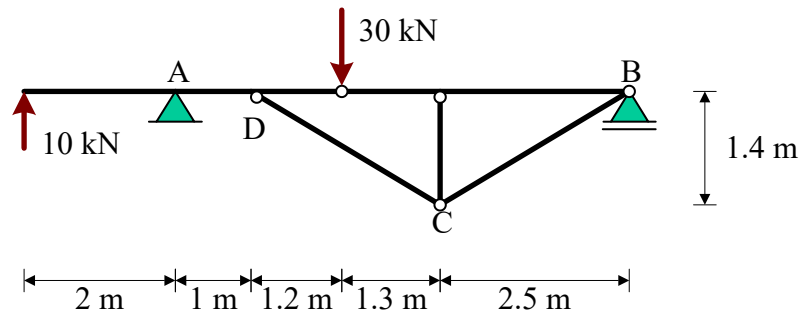


Fig. 42 Constructie

Bepaal de oplegreacties en het krachtsverloop in de constructie met MatrixFrame.

Opgave

Voer de geometrie in en ga verder met de profielgegevens.

Welke profielgegevens vul je in om tot het juiste antwoord te komen?

- ☐ Ik vul geen profielgegevens in
- ☐ Ik verzin zelf wat
- ☐ Ik kan het juiste antwoord niet bepalen, want de profielgegevens zijn vereist

Oplossing



- Ik vul geen profielgegevens in
 - Onjuist, MatrixFrame heeft profielgegevens nodig. Als je deze constructie met de hand zou uitrekenen, zou je dan stijfheidsgegevens nodig hebben voor de oplegreacties en krachtsverdeling?
- Ik verzin zelf wat
 - Exact! Waarom maakt het niet uit welke waardes je invult?
- Ik kan het juiste antwoord niet bepalen, want de profielgegevens zijn vereist
 - Onjuist, voor het bepalen van de oplegreacties en krachtsverdeling zou je geen stijfheidsgegevens nodig moeten hebben, alhoewel MatrixFrame dat wel vereist. Maakt het uit welke waardes je invult?

Opgave

Voer de opleggingen in en ga verder met de scharnierende aansluitingen.

Hoeveel scharnierende staafaansluitingen heb je nodig?

Het aantal vereiste scharnierende uiteindes:

- Rondom A is gelijk aan
- Rondom B is gelijk aan
- Rondom C is gelijk aan
- Rondom D is gelijk aan



 Reuse

Oplossing



- Rondom A is gelijk aan 0
- Rondom B is gelijk aan $1/2$
- Rondom C is gelijk aan $2/3$
- Rondom D is gelijk aan 1

Opgave

Voer de linear-elastische berekening uit en bekijk de resultaten.

Heb je de goede resultaten? Rond of op 2 decimalen en gebruik een . als decimaalteken.

- De oplegreactie bij A is kN (positief omhoog, negatief omlaag).
- Het maximale absolute moment in de constructie is kNm.
- De maximale absolute dwarskracht in de constructie is kN.



 Reuse

- De oplegreactie bij A is 5.67 kN (positief omhoog, negatief omlaag).
- Het maximale absolute moment in de constructie is 77.64 kNm.
- De maximale absolute dwarskracht in de constructie is 59.72 kN.

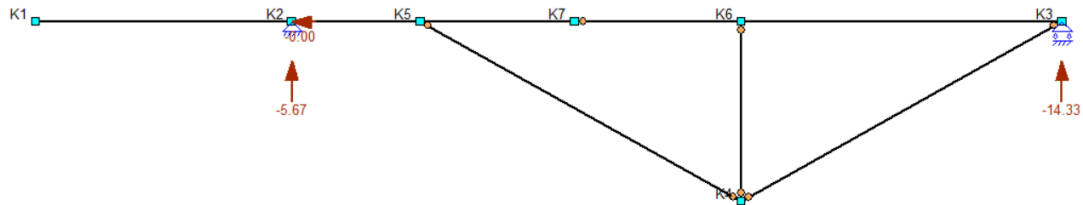


Fig. 43 Oplegreacties

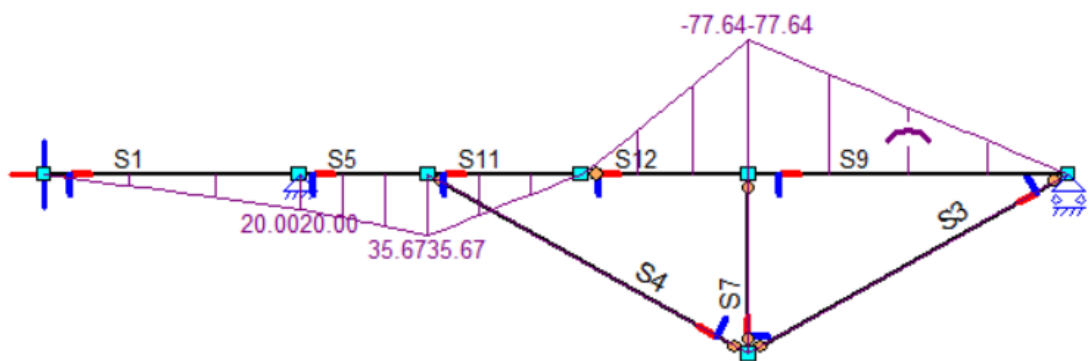


Fig. 44 Momenten

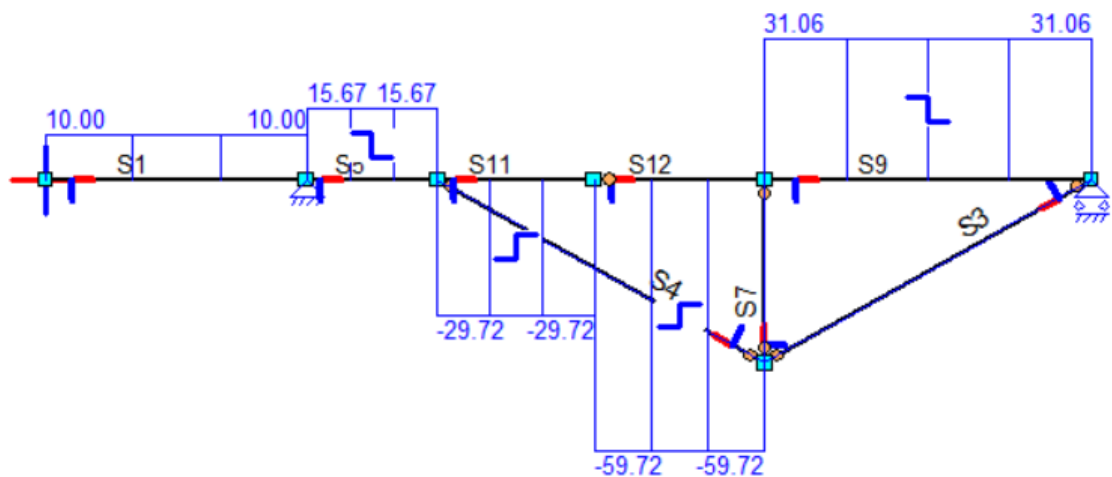


Fig. 45 Dwarskrachten



Hint

Het bestand van dit voorbeeld is [!\[\]\(34b4f260a8587d2e97eeaee361cc357b_img.jpg\) hier](#) te downloaden.



Added in version v2025.1.1: 2025-09-03: Matrixframe bestand toegevoegd

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:

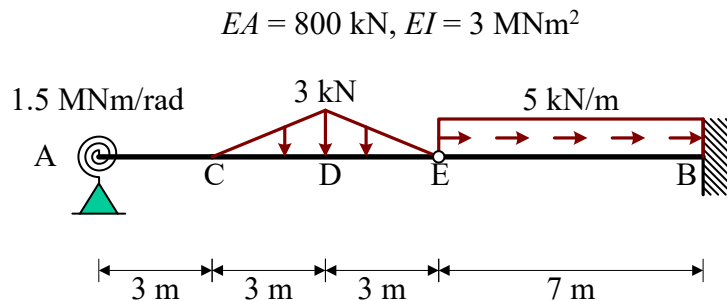


Fig. 46 Constructie, $EA = 800 \text{ kN}$, $EI = 3 \text{ MNm}^2$

Bepaal de oplegreacties, verplaatsingen en het krachtsverloop in de constructie met MatrixFrame.

Opgave

Voer de geometrie, profielgegevens, opleggingen en scharnierende aansluitingen in, voer de linear-elastische berekening uit en bekijk de resultaten.

Heb je de goede resultaten? Rond of op 2 decimalen en gebruik een . als decimaalteken.

- Het moment in D is kNm
- De maximale zakking is m
- De absolute waarde van de rotatie van knoop A is graden

- Het moment in D is 7.78 kNm
- De maximale zakking is 0.16 m
- De absolute waarde van de rotatie van knoop A is 0.66 graden

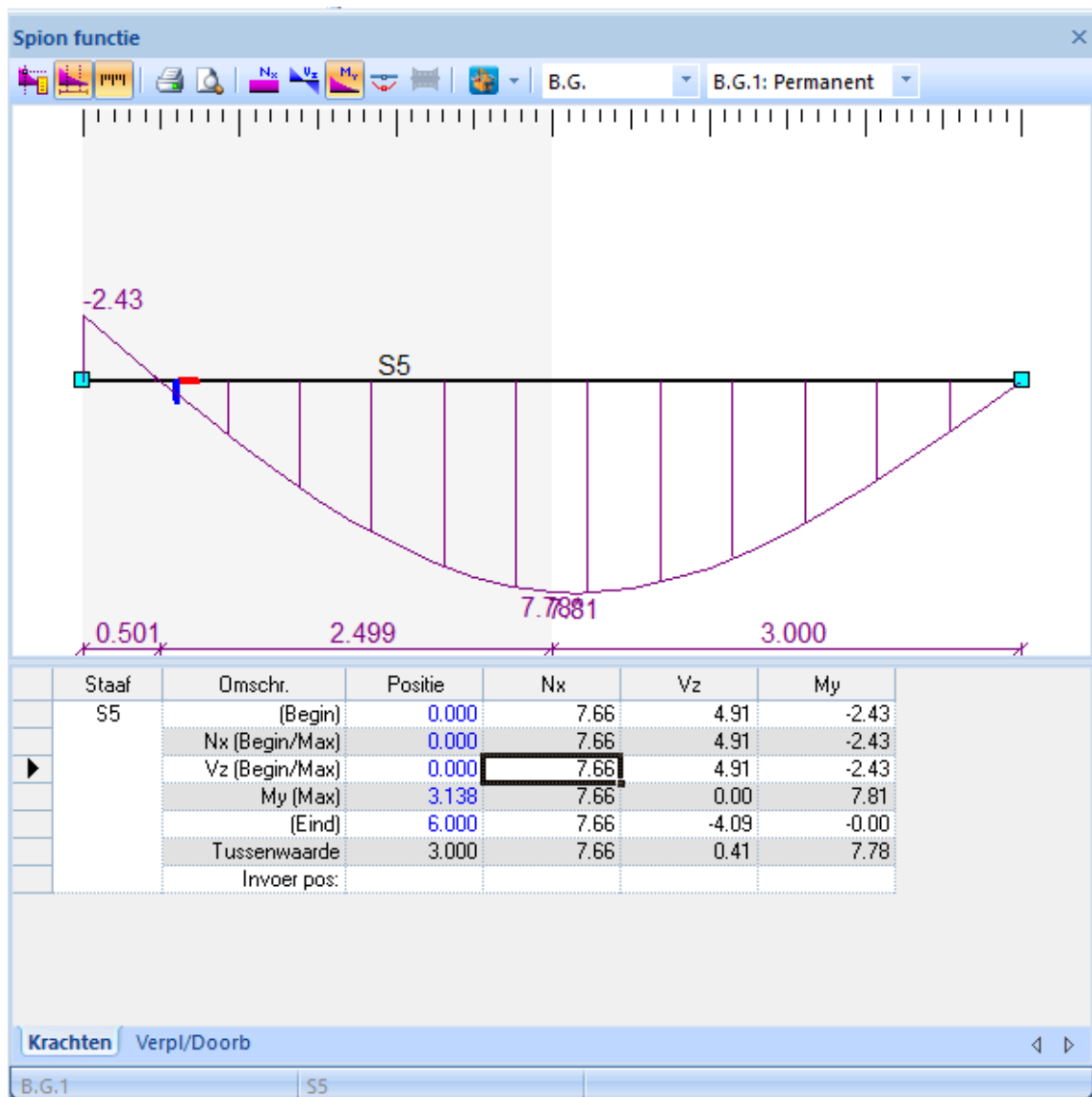


Fig. 47 Moment in D

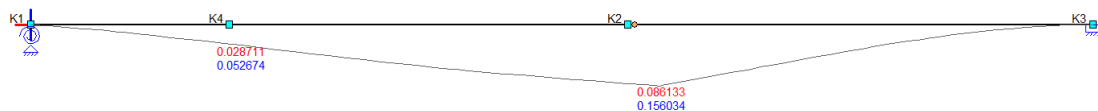
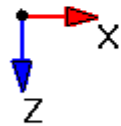
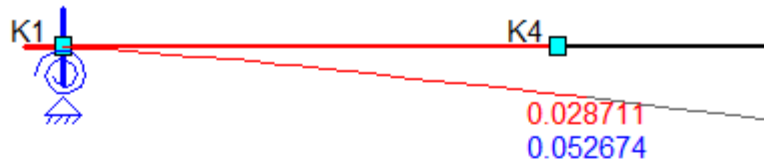


Fig. 48 Maximale zakking



Constructieafbeelding		Virtueel model		
Knoopverplaatsingen				
Knoop	B.G.	X	Z	Ry
K1	B.G.1	0.0000	0.0000	-11.435e-03
K2		0.0861	0.1560	-12.413e-03
K3		0.0000	0.0000	0.000e-03
K4		0.0287	0.0527	-21.228e-03

Fig. 49 Rotatie van knoop A in radialen

Hint

Het bestand van dit voorbeeld is [hier](#) te downloaden.

 **Added in version v2025.1.1:** 2025-09-03: Matrixframe bestand toegevoegd

Begeleide oefening 3

Gegeven is de volgende constructie:

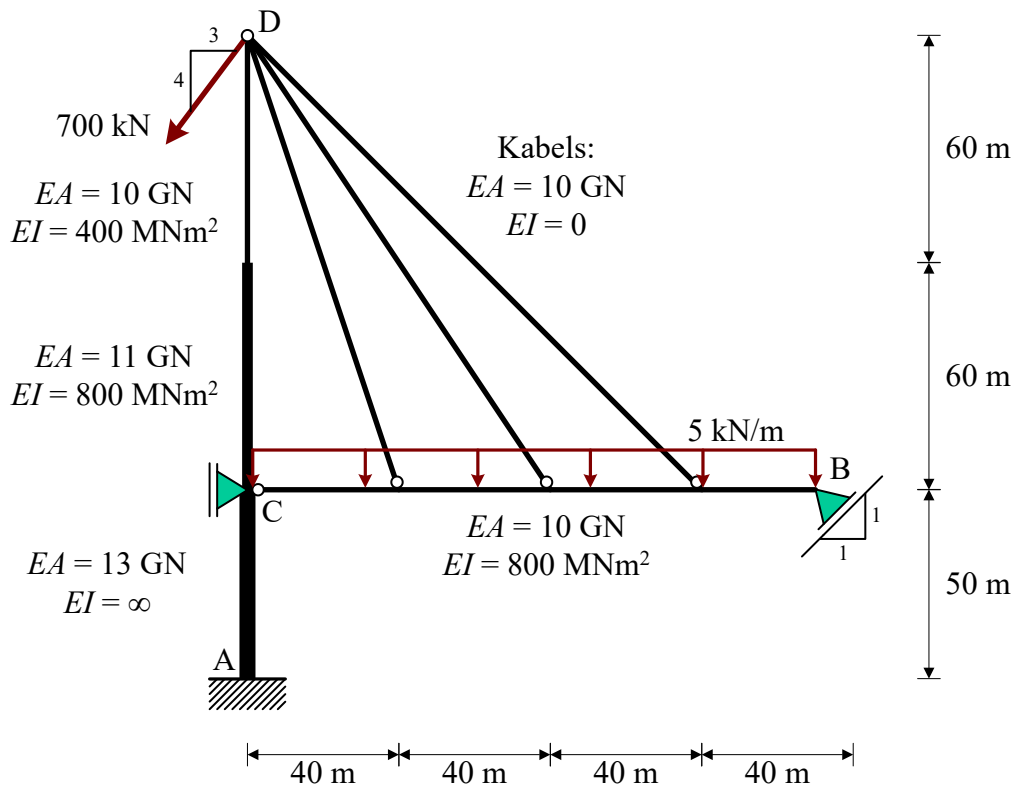


Fig. 50 Constructie

Bepaal de oplegreacties, verplaatsingen en het krachtsverloop in de constructie met MatrixFrame.

Opgave

Voer de geometrie in en ga verder met de profielgegevens.

Welke profielgegevens vul je in voor de kabels?

- ☐ $EI = 0$
- ☐ Een willekeurige maar kleine waarde
- ☐ Een willekeurige waarde

  Reuse

Welke profielgegevens vul je in voor AC?

- ☐ $EI = \infty$
- ☐ Een willekeurige maar grote waarde
- ☐ Een willekeurige waarde

  Reuse

Vraag 1:

- $EI = 0$
 - Onjuist, MatrixFrame heeft een waarde ongelijk aan 0 nodig om de constructie door te kunnen rekenen. Heeft de waarde van EI invloed op je antwoord?
- Een willekeurige maar kleine waarde
 - Onjuist, aangezien er geen kracht staat op de kabels, kan deze ook als pendelstaaf worden gemodelleerd? wat is de invloed van EI op het vervormingsgedrag van de kabels?
- Een willekeurige waarde
 - Exact, waarom maakt het voor de kabels niet uit wat de waarde is van EI? Waarom kunnen deze als pendelstaven worden gemodelleerd?

Vraag 2:

- $EI = \infty$
 - Onjuist, een waarde van oneindig kan je niet invullen. Hoe kan je dat numeriek benaderen?
- Een willekeurige, maar grote, waarde
 - Correct, welke waarde kies je?
- Een willekeurige waarde
 - Onjuist, als je een kleine stijfheid invoert zal dat zeker geen oneindige waarde simuleren.

 Opgave

Ga verder met opleggingen.

Als je de optie om de roloplegging kan draaien niet kan vinden, wat is een alternatief?

- ☐ Een pendelstaaf dwars op de rolrichting van het rolscharnier toevoegen
- ☐ Roloplegging in zowel horizontale als verticale oplegging toevoegen
- ☐ Er is geen alternatief

Oplossing



- Een pendelstaaf dwars op de rolrichting van het rolscharnier toevoegen
 - Correct, wat voor profielgegevens voeg je toe voor deze pendelstaaf?
- Roloplegging in zowel horizontale als verticale oplegging toevoegen
 - Onjuist, dan heb je er een reguliere scharnierende verbinding van gemaakt
- Er is geen alternatief
 - Onjuist, een pendelstaaf staat bij kleine verplaatsingen ook in één richting beweging toe.

Opgave

Voer de scharnierende aansluitingen in, voer de linear-elastische berekening uit en bekijk de resultaten.

Heb je de goede resultaten? Rond of op 2 decimalen en gebruik een . als decimaalteken.

- De maximale verplaatsing van BC in verticale richting is m
- De maximale zakking van AD in verticale richting is cm
- De grootste normaalkracht in de kabels is kN



 Reuse

- De maximale verplaatsing van BC in verticale richting is 0.27 m
- De maximale zakking van AD in verticale richting is 1.42 cm
- De grootste normaalkracht in de kabels is 303.08 kN

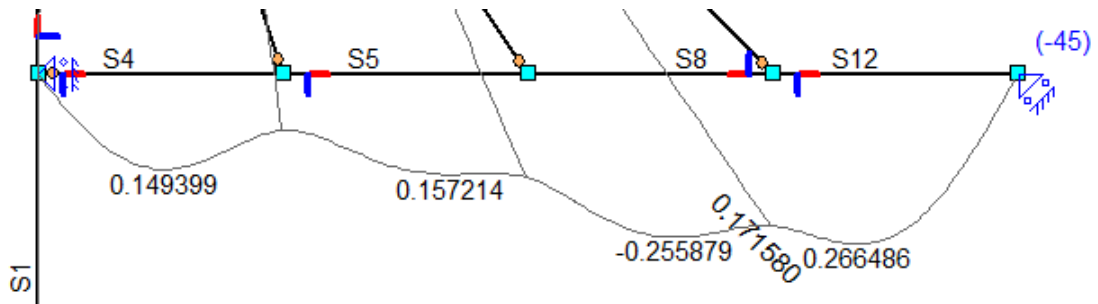


Fig. 51 Maximale verplaatsing van BC

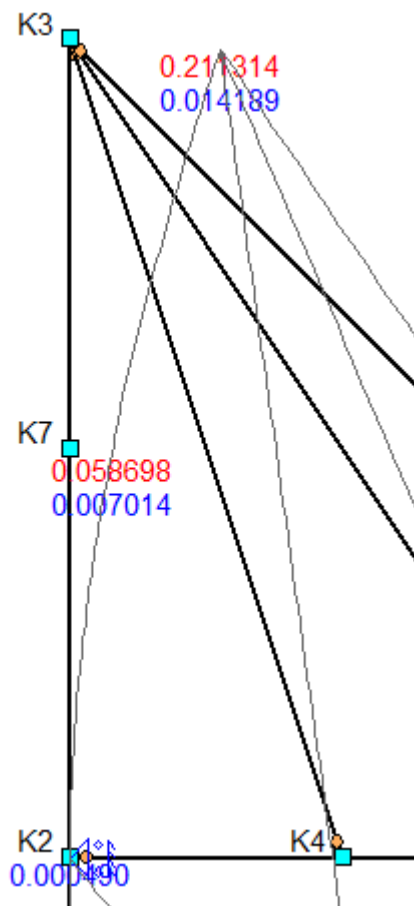


Fig. 52 Maximale zakking van AD

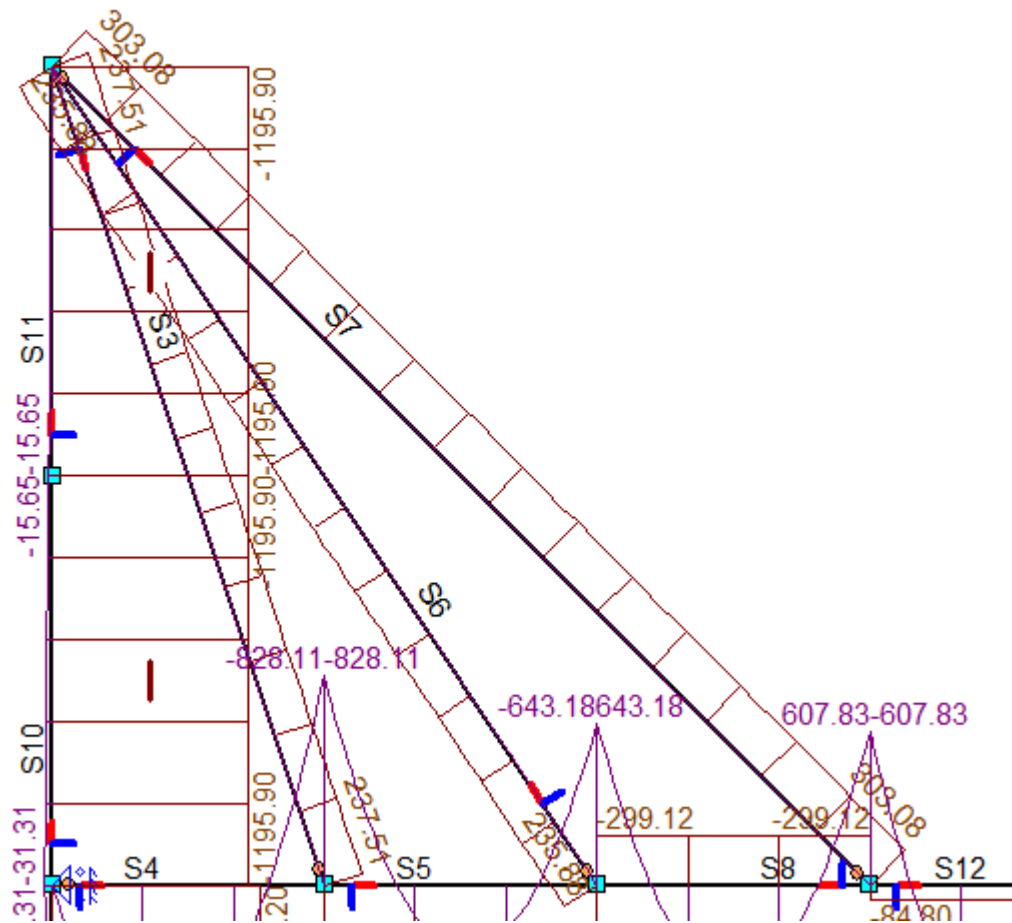


Fig. 53 Maximale zakking van AD

Hint

Het bestand van dit voorbeeld is [hier](#) te downloaden.

Added in version v2025.1.1: 2025-09-03: Matrixframe bestand toegevoegd

4 september: Differentiaalvergelijkingen

In deze les leer je hoe je differentiaalvergelijkingen kan gebruiken om statisch onbepaalde constructies door te rekenen.

Instructie

Inhoud

- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Opgaves

In constructiemechanica 2 heb je geleerd hoe je met differentiaalvergelijkingen voor statisch bepaalde constructies de krachtsverdeling en vervormingen kan vinden. Precies dezelfde aanpak werkt ook voor statisch onbepaalde constructie, met als enige verschil dat we de inwendige krachten niet kunnen vinden zonder ook de vergelijkingen en randvoorwaarden voor verplaatsingen op te stellen. Dat doen we volgens de volgende stappen:

“ Attribution

Deze pagina is aangepast van

 [TUDelft-books/CT1000](https://books.tudelft.nl/CT1000/)

► Algoritme (Differentiaalvergelijkingen toepassen)

1. Eerst definiëren we de segmenten zonder discontinuïteiten. Daarna kan elk segment afzonderlijk worden getekend, waarbij de belastingen, coördinatenstelsels, afmetingen en snedekrachten aan de randen van elk segment worden aangegeven.
2. Nu kunnen we voor elk element de belastingsvergelijking opstellen en volgens de relaties van de differentiaalvergelijkingen alle krachtsgrootheden en verplaatsingen opstellen. Daarbij kunnen we direct ook de randvoorwaarden opstellen.
3. Er zijn nog meer vergelijkingen nodig om alle onbekende integratieconstanten op te lossen, deze kunnen we vinden door de overgangen tussen de verschillende elementen te analyseren waarbij zowel verplaatsingen als krachten in overeenstemming moeten zijn.
4. Er zijn nu evenveel vergelijkingen als onbekenden opgesteld. Deze kunnen nu worden opgelost en ingevuld in de opgestelde vergelijkingen voor het gewenste resultaat. Omdat het aantal onbekenden bij statisch onbepaalde constructies als snel uit de hand loopt wordt wordt aangeraden om je rekenmachine of een symbolische wiskundetool te gebruiken om dit op te lossen. Om het stelsel vergelijkingen op te lossen met behulp van numerieke hulpmiddelen, kun je de vergelijkingen opschrijven als een matrixformulering $Ax = b$ die eenvoudig kan worden opgelost door bijvoorbeeld je grafische rekenmachine of in python. Als alternatief kan een symbolische programmeertaal worden gebruikt om de vergelijkingen exact op te lossen. Als voorbeeld wordt het `sympy` pakket in `Python` gebruikt:

Als voorbeeld bepalen we de een simpele statisch onbepaalde constructie:

🔍 Voorbeeld

Gegeven een constructie zoals hieronder weergegeven:

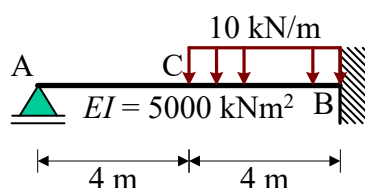


Fig. 54 Constructie, $EI = 5000 \text{ kNm}^2$

1. Eerst definiëren we de segmenten zonder discontinuïteiten. Daarna kan elk segment afzonderlijk worden getekend, waarbij de belastingen, coördinatenstelsels, afmetingen en snedekrachten aan de randen van elk segment worden aangegeven.

Voorbeeld

In dit voorbeeld moeten we element AB in twee delen opsplitsen omdat de verdeelde belasting een discontinuïteit veroorzaakt.

Voor AC leidt dit tot:

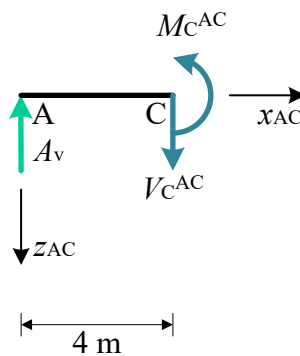


Fig. 55 Vrijlichaamdiagram element AC

Voor BC leidt dit tot:

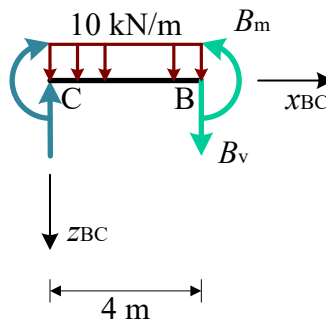


Fig. 56 Vrijlichaamdiagram element BC

2. Nu kunnen we voor elk element de belastingvergelijking opstellen en volgens de relaties van de differentiaalvergelijkingen alle krachsgrootheden en verplaatsingen opstellen. Daarbij kunnen we direct ook de randvoorwaarden opstellen.

Voorbeeld

In dit voorbeeld is er enkel invloed door buiging, dus hebben we aan deze differentiaalvergelijking genoeg: $-EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -q_z$. De differentiaalvergelijkingen voor rek $EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -q_x$ en torsie $GI \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} = -q_T$ hebben we in dit geval niet nodig.

Element AC

Omdat dit element onbelast is, geeft de belastingsvergelijking voor dit element:

$$q_{z,AC} = 0$$

wat leidt tot de vergelijkingen:

$$V_{AC}(x) = C_1$$

$$M_{AC}(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

$$\kappa_{AC}(x) = \frac{C_1 \cdot x + C_2}{5000}$$

$$\varphi_{AC}(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x}{5000} + C_3$$

$$w_{AC}(x) = \frac{-\frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot x^3 - \frac{1}{2} C_2 \cdot x^2}{5000} - C_3 \cdot x + C_4$$

Vanwege de oplegging bij A kan een randvoorwaarde worden geformuleerd als:

$$w_{AC}(0) = 0 \tag{1}$$

Omdat A ook een onbelast uiteinde is, kan een andere randvoorwaarde worden geformuleerd als:

$$M_{AC}(0) = 0 \quad (2)$$

Als dit uiteinde belast werd kon met een krachten- of momentenevenwicht ook een relatie gevonden worden.

Element BC

Omdat dit element belast is, geeft de belastingsvergelijking voor dit element:

$$q_{z,BC} = 10$$

wat leidt tot de vergelijkingen:

$$V_{BC}(x) = -10 \cdot x + C_5$$

$$M_{BC}(x) = -5 \cdot x^2 + C_5 \cdot x + C_6$$

$$\kappa_{BC}(x) = \frac{-5 \cdot x^2 + C_5 \cdot x + C_6}{5000}$$

$$\varphi_{BC}(x) = \frac{-\frac{5}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot C_5 \cdot x^2 + C_6 \cdot x}{5000} + C_7$$

$$w_{BC}(x) = \frac{\frac{5}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{6} \cdot C_5 \cdot x^3 - \frac{1}{2} C_6 \cdot x^2}{5000} - C_7 \cdot x + C_8$$

Vanwege de inklemming bij B kunnen twee randvoorwaarden direct worden geformuleerd:

$$\varphi_{BC}(4) = 0 \quad (3)$$

$$w_{BC}(4) = 0 \quad (4)$$

3. Er zijn nog meer vergelijkingen nodig om alle onbekende integratieconstanten op te lossen, deze kunnen we vinden door de overgangen tussen de verschillende elementen

te analyseren waarbij zowel verplaatsingen als krachten in overeenstemming moeten zijn.

Voorbeeld

Bij C kan een randvoorwaarde worden geïdentificeerd uit de consistentie van verplaatsingen: zowel de neerwaartse als rotatieverplaatsing moeten hetzelfde zijn als de neerwaartse en rotatieverplaatsing aan de linkerkant van element BE:

$$w_{AC}(4) = w_{BC}(0) \quad (5)$$

$$\varphi_{AC}(4) = \varphi_{BC}(0) \quad (6)$$

Ten slotte moet er ook consistentie zijn met de snedekrachten, zoals getoond in het vrijlichaamdiagram:

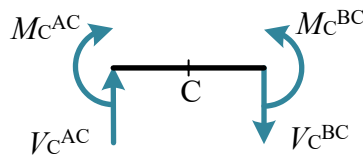


Fig. 57 Vrijlichaamdiagram knoop C

Verticaal evenwicht geeft:

$$\sum F_v|_C = 0 \rightarrow -V_{AC}(4) + V_{BC}(0) = 0 \quad (7)$$

Momentevenwicht geeft:

$$\sum T|_C = 0 \rightarrow -M_{AC}(4) + M_{BC}(0) = 0 \quad (8)$$

4. Er zijn nu evenveel vergelijkingen als onbekenden opgesteld. Deze kunnen nu worden opgelost en ingevuld in de opgestelde vergelijkingen voor het gewenste resultaat. Omdat het aantal onbekenden bij statisch onbepaalde constructies als snel uit de hand loopt wordt wordt aangeraden om je rekenmachine of een symbolische wiskundetool te gebruiken om dit op te lossen. Om het stelsel vergelijkingen op te lossen met behulp van numerieke hulpmiddelen, kun je de vergelijkingen opschrijven als een matrixformulering $Ax = b$ die eenvoudig kan worden opgelost door bijvoorbeeld je

grafische rekenmachine of in python. Als alternatief kan een symbolische programmeertaal worden gebruikt om de vergelijkingen exact op te lossen. Als voorbeeld wordt het `sympy` pakket in `Python` gebruikt:

Voorbeeld

Er zijn 8 randvoorwaarden geformuleerd met 8 integratieconstanten. Deze kunnen nu worden opgelost.

Het invullen van de randvoorwaarden geeft:

$$\begin{aligned}C_4 &= 0 \\C_2 &= 0 \\-\frac{4C_5}{1875} - \frac{C_6}{625} - 4C_7 + C_8 + \frac{8}{375} &= 0 \\\frac{C_5}{625} + \frac{C_6}{1250} + C_7 - \frac{8}{375} &= 0 \\-\frac{4C_1}{1875} - \frac{C_2}{625} - 4C_3 + C_4 - C_8 &= 0 \\\frac{C_1}{625} + \frac{C_2}{1250} + C_3 - C_7 &= 0 \\4C_1 + C_2 - C_6 &= 0 \\C_1 - C_5 &= 0\end{aligned}$$

Het oplossen hiervan geeft:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{35}{8} = 4.375 \\C_2 &= 0 \\C_3 &= -\frac{1}{150} \approx -0.006667 \\C_4 &= 0 \\C_5 &= \frac{35}{8} = 4.375 \\C_6 &= \frac{35}{2} = 17.5 \\C_7 &= \frac{1}{3000} \approx 0.0003333 \\C_8 &= \frac{13}{750} \approx 0.01733\end{aligned}$$

Nu is de volledige krachtenverdeling en verplaatsingen van de constructie opgelost. Bijvoorbeeld de momentenverdeling in BC die kan worden uitgezet als:

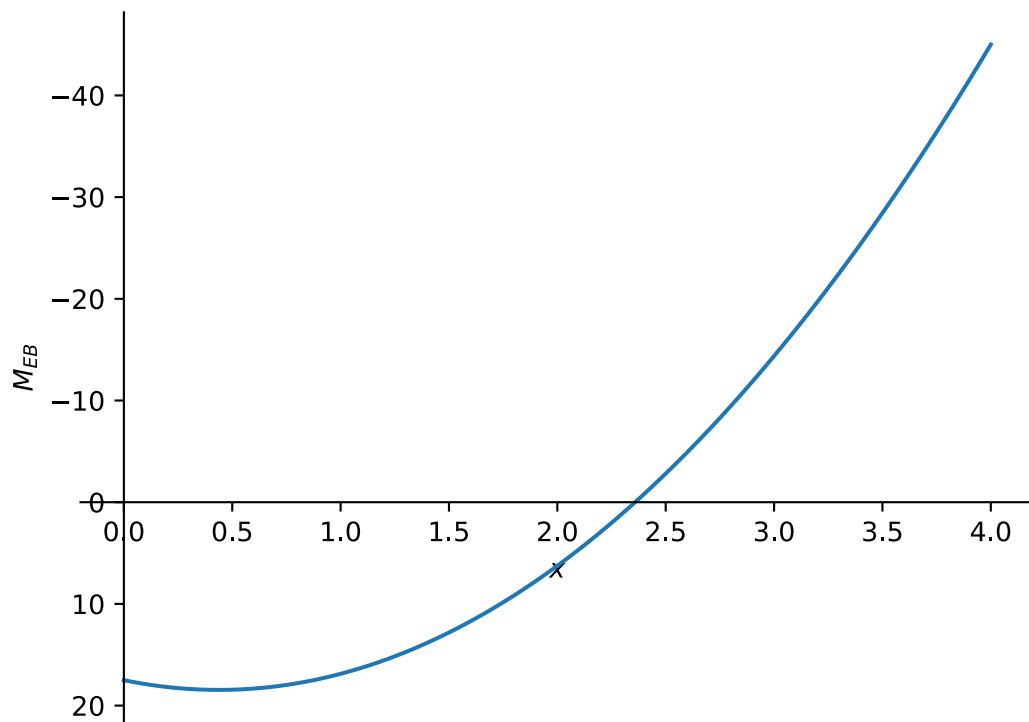


Fig. 58 Momentenlijn BC

De krachtsverdeling en verplaatsingen kunnen nu ook

Oplossen met digitale hulpmiddelen Om het stelsel vergelijkingen op te lossen met behulp van numerieke hulpmiddelen, kun je de vergelijkingen opschrijven als een matrixformulering $Ax = b$ die eenvoudig kan worden opgelost door bijvoorbeeld je grafische rekenmachine of in python.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{1875} & -\frac{1}{625} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{625} & \frac{1}{1250} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{1875} & -\frac{1}{625} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{625} & \frac{1}{1250} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{375} \\ \frac{8}{375} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Hier](#) is uitgelegd hoe je dit op een grafische rekenmachine kan oplossen.

Als alternatief kan een symbolische programmeertaal worden gebruikt om de vergelijkingen exact op te lossen. Als voorbeeld wordt het `sympy` pakket in `Python` gebruikt.

Beide opties zijn hieronder getoond

```
import numpy as np

A = np.array([
    [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
    [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, -4/1875, -1/625, -4, 1],
    [0, 0, 0, 0, 1/625, 1/1250, 1, 0],
    [-4/1875, -1/625, -4, 1, 0, 0, 0, -1],
    [1/625, 1/1250, 1, 0, 0, -1, 0],
    [4, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0],
    [1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0]
])

b = np.array([
    0,
    0,
    -8/375,
    8/375,
    0,
    0,
    0,
    0
])
```

```
np.linalg.solve(A,b)
```

```
array([[ 4.37500000e+00],
       [ 0.00000000e+00],
       [-6.66666667e-03],
       [ 0.00000000e+00],
       [ 4.37500000e+00],
       [ 1.75000000e+01],
       [ 3.33333333e-04],
       [ 1.73333333e-02]])
```

```

import sympy as sym
sym.init_printing()

x = sym.symbols('x')

q = 10
EI = 5000
EA = 20000
F = 150

q_AC = 0
q_BC = q

C_1, C_2, C_3, C_4 = sym.symbols('C_1 C_2 C_3 C_4')
C_5, C_6, C_7, C_8 = sym.symbols('C_5 C_6 C_7 C_8')

V_AC = -sym.integrate(q_AC, x) + C_1
M_AC = sym.integrate(V_AC, x) + C_2
kappa_AC = M_AC/EI
phi_AC = sym.integrate(kappa_AC, x) + C_3
w_AC = -sym.integrate(phi_AC, x) + C_4

V_BC = -sym.integrate(q_BC, x) + C_5
M_BC = sym.integrate(V_BC, x) + C_6
kappa_BC = M_BC/EI
phi_BC = sym.integrate(kappa_BC, x) + C_7
w_BC = -sym.integrate(phi_BC, x) + C_8

eq1 = sym.Eq(w_AC.subs(x,0),0)
eq2 = sym.Eq(M_AC.subs(x,0),0)
eq3 = sym.Eq(w_BC.subs(x,4),0)
eq4 = sym.Eq(phi_BC.subs(x,4),0)
eq5 = sym.Eq(w_AC.subs(x,4)-w_BC.subs(x,0),0)
eq6 = sym.Eq(phi_AC.subs(x,4)-phi_BC.subs(x,0),0)
eq7 = sym.Eq(M_AC.subs(x,4) - M_BC.subs(x,0),0)
eq8 = sym.Eq(V_AC.subs(x,4) - V_BC.subs(x,0),0)

sol = sym.solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8],(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_8))
for k, v in sol.items():
    print(f"{k} = {v} ≈ {v.evalf()}")

```

```

C_1 = 35/8 ≈ 4.37500000000000
C_2 = 0 ≈ 0
C_3 = -1/150 ≈ -0.00666666666666667
C_4 = 0 ≈ 0
C_5 = 35/8 ≈ 4.37500000000000
C_6 = 35/2 ≈ 17.5000000000000
C_7 = 1/3000 ≈ 0.000333333333333333
C_8 = 13/750 ≈ 0.0173333333333333

```

Meer voorbeelden

Het voorbeeld in hoofdstuk 2.7.3 van het boek *Mechanica*, spanningen, vervormingen en verplaatsingen ([Hartsuijker and Welleman, 2016](#)) richt zich op extensie. Voorbeeld 3b in

hoofdstuk 8.2 is een buigingsprobleem.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 3](#) gepresenteerd in collegevorm van 0:40:00 tot 0:48:30

Opgaves

- Opgaves 2.48 en 2.50 in hoofdstuk 2.9 van het boek *Mechanica: spanningen, vervormingen en verplaatsingen* ([Hartsuijker and Welleman, 2016](#)), antwoorden zijn beschikbaar op [deze website](#).
- Opgaves 8.7, 8.10, 8.11 in hoofdstuk 8.6 van het boek *Mechanica: spanningen, vervormingen en verplaatsingen* ([Hartsuijker and Welleman, 2016](#)), antwoorden zijn beschikbaar op [deze website](#).

Stelsel vergelijkingen oplossen met een grafische rekenmachine

Een stelsel vergelijkingen in de vorm $Ax = b$ kan worden opgelost met een grafische rekenmachine.

Voorbeeld

Laten we een voorbeeld bekijken

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{1875} & -\frac{1}{62} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{625} & \frac{1}{1250} \\ -\frac{4}{1875} & -\frac{1}{625} & -4 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{625} & \frac{1}{1250} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Attribution

Deze pagina is aangepast van

[https://oit.tudelft.nl/CEG-](https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-)
[mechanics-](https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-)

[BSc/NL/tools/matrixframe.html](https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/tools/matrixframe.html)

1. Definieer de aangevulde matrix $[A|b]$ door aaneenschakeling van A en b met b aan de rechterkant.

Voorbeeld

De aangevulde matrix van ons voorbeeld is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{1875} & -\frac{1}{625} & -4 & 1 & -\frac{8}{375} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{625} & \frac{1}{1250} & 1 & 0 & \frac{8}{375} \\ -\frac{4}{1875} & -\frac{1}{625} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{625} & \frac{1}{1250} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dit kan worden gedefinieerd in een grafische rekenmachine (TI-84 als voorbeeld):

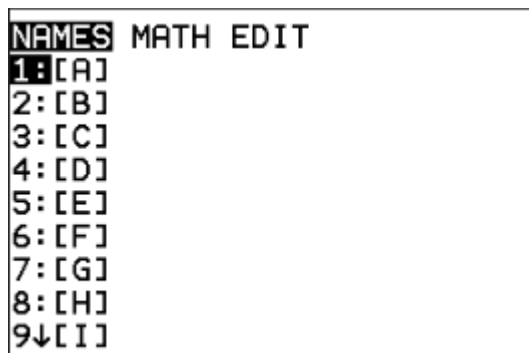


Fig. 59 Open het matrix menu: **2nd** - **matrix**

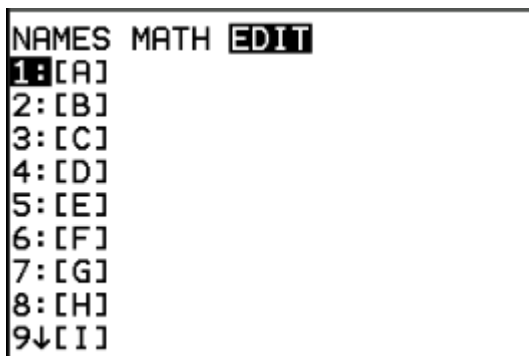


Fig. 60 Ga naar **EDIT**

MATRIX[A] 8 × 9					
0	0	0	1	0	...
0	1	0	0	0	...
0	0	0	0	-0.002	...
0	0	0	0	-0.002	...
-0.002	-0.002	-4	1	0	...
0.0016	8E-4	1	0	0	...
4	1	0	0	0	...
1	0	0	0	-1	...

[A](8,1)= 1					
-------------	--	--	--	--	--

Fig. 61 Bewerk de eerste matrix

2. Reduceer/veeg de matrix per rij, de oplossing voor x is de meest rechtse kolom van de matrix.

Voorbeeld

De gereduceerde matrix ziet er als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.375 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.006667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 17.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0003333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01733 \end{bmatrix}$$

Dus:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.375 \\ 0 \\ -0.006667 \\ 0 \\ 4.375 \\ 17.5 \\ 0.0003333 \\ 0.01733 \end{bmatrix}$$

Dit kan worden gevonden op een grafische rekenmachine:

```
NAMES MATH EDIT
4↑Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
8:Matr▶list(
9:List▶matr(
0:cumSum(
A:ref(
B↓rref(
```

Fig. 62 Gebruik het `rref()` commando in `matrix` - `MATH`

```

rref(LHJ)
0 0 0 0 0      4.375
0 0 0 0 0      0
0 0 0 0 0     -0.0066666667
1 0 0 0 0      0
0 1 0 0 0      4.375
0 0 1 0 0      17.5
0 0 0 1 0     3.333333333E-4
0 0 0 0 1     0.0173333333

```

Fig. 63 Evalueer `rref(A)`

Figuren gemaakt met <https://ti84calc.com/ti84calc>

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:

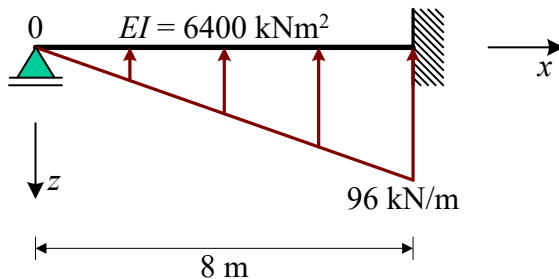


Fig. 64 Constructie, $EI = 6400 \text{ kNm}^2$

“ Bronvermelding

Deze oefening is aangepast van

https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_3/session_1/intro.html

🧩 Opgave

Bepaal de segmenten en teken de vrijlichaamsschema's.

Stel de belastingsvergelijking op. Gebruik kN en m voor de eenheden.

$$q_z = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$$

H-P > Reuse

📄 Solution

$$q_z = -12 \cdot x + 0$$

Opgave

Bepaal de relaties van de krachtsgrootheden en verplaatsingen.

Welke randvoorwaarde kan je nu opstellen?

$$w(0) = \text{▼}$$

$$\text{▼}(0) = \text{▼}$$

$$w(8) = \text{▼}$$

$$\text{▼}(8) = \text{▼}$$

  Reuse

Solution



- $w(0) = 0$
- $M(0) = 0$
- $w(8) = 0$
- $\varphi(8) = 0$

Opgave

Los de integratieconstanten op. Je kan gebruik maken van de volgende code cellen. (Klik op  -> [Live Code](#) om live python code te activeren op deze pagina.)

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.
Gebruik kN en m voor de eenheden.

$$w \cdot EI = \boxed{} \cdot x^5 + \boxed{} \cdot x^4 + \boxed{} \cdot x^3 + \boxed{} \cdot x^2 + \boxed{} \cdot x + \boxed{}$$

   Reuse

```
import numpy as np
```

```
A = np.array([
    [ , , , ],
    [ , , , ],
    [ , , , ],
    [ , , , ],
])
```

```
b = np.array([
    ,
    ,
    ,
    ,
])
```

```
np.linalg.solve(A,b)
```

```

import sympy as sym
sym.init_printing()

x = sym.symbols('x')

q =
EI = 6400

C_1, C_2, C_3, C_4 = sym.symbols('C_1 C_2 C_3 C_4')

V = -sym.integrate(q, x) + C_1
M = sym.integrate(V, x) + C_2
kappa = M/EI
phi = sym.integrate(kappa, x) + C_3
w = -sym.integrate(phi, x) + C_4

eq1 = sym.Eq(w.subs(x,0), )
eq2 = sym.Eq( .subs(x,0), )
eq3 = sym.Eq(w.subs(x,8), )
eq4 = sym.Eq( .subs(x,8),0)

sol = sym.solve([eq1,eq2,eq3,eq4],(C_1,C_2,C_3,C_4))
for k, v in sol.items():
    print(f"{k} = {v} ≈ {v.evalf()}")

```

$$w = -\frac{x^5}{10} + \frac{64x^3}{5} - \frac{2048x}{5} = -0.1x^5 + 12.8x^3 - 409.6x$$

```
import numpy as np

A = np.array([
    [ 0, 0, 0, 1],
    [ 0, 1, 0, 0],
    [-1/75, -1/200, -8, 1],
    [ 1/200, 1/800, 1, 0],
])

b = np.array([
    0,
    0,
    64/125,
    -8/25,
])
```

```
np.linalg.solve(A,b)
```

```
array([-7.68e+01,  0.00e+00,  6.40e-02,  0.00e+00])
```

```
import sympy as sym
sym.init_printing()

x = sym.symbols('x')

q = -12 * x
EI = 6400

C_1, C_2, C_3, C_4 = sym.symbols('C_1 C_2 C_3 C_4')

V = -sym.integrate(q, x) + C_1
M = sym.integrate(V, x) + C_2
kappa = M/EI
phi = sym.integrate(kappa, x) + C_3
w = -sym.integrate(phi, x) + C_4

eq1 = sym.Eq(w.subs(x,0),0)
eq2 = sym.Eq(M.subs(x,0),0)
eq3 = sym.Eq(w.subs(x,8),0)
eq4 = sym.Eq(phi.subs(x,8),0)

sol = sym.solve([eq1,eq2,eq3,eq4],(C_1,C_2,C_3,C_4))

display((w.subs(sol)*EI).evalf())

A,b = sym.linear_eq_to_matrix((eq1,eq2,eq3,eq4), (C_1,C_2,C_3,C_4))
```

$$-0.1x^5 + 12.8x^3 - 409.6x$$

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:

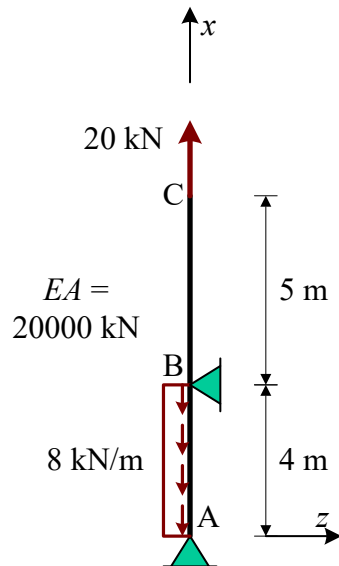


Fig. 65 Constructie, $EA = 20000$ kN

“ Bronvermelding

Deze oefening is aangepast van

https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_3/session_1/intro.html

🧩 Opgave

Bepaal de segmenten en teken de vrijlichaamsschema's. Bepaal de relaties van de krachtsgrootheden en verplaatsingen.

Welke randvoorwaarden kan je nu opstellen?

(0) =

(9) =

HP > Reuse

📄 Oplossing

- $u(0) = 0$
- $N(9) = 20$

Opgave

Welke nieuwe overgangsvoorwaardes kan je nu opstellen?

AB () = BC () =

   Reuse

Oplossing

- $w_{AB}(4) = 0$
- $w_{BC}(4) = 0$

Opgave

Los de integratieconstanten op.

Heb je de goede resultaten?

Verplaatsing van C is mm omhoog.

Verplaatsing halverwege AB is mm omlaag.

   Reuse

Oplossing

Verplaatsing van C is 5 mm omhoog.

Verplaatsing halverwege AB is 0.8 mm omlaag

Begeleide oefening 3

Gegeven is de volgende constructie, een aanpassing van het voorbeeld in [Instructie](#) met een extra ondersteuning:

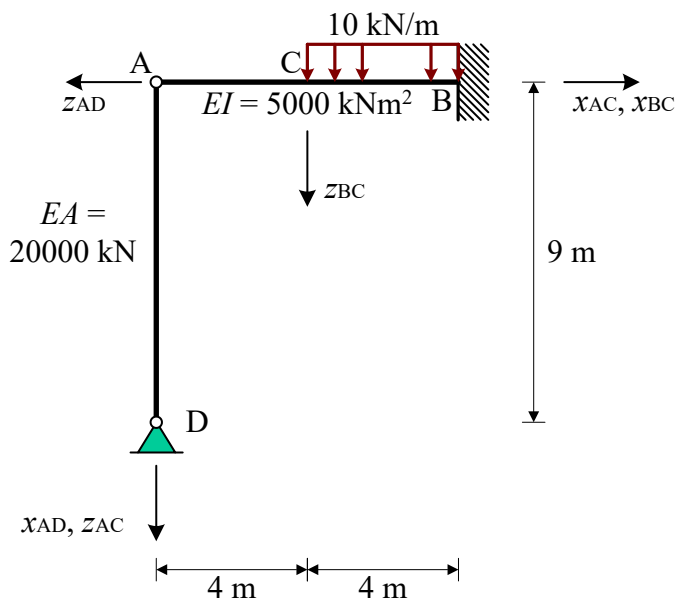


Fig. 66 Constructie, $EI = 5000 \text{ kNm}^2$, $EA = 20000 \text{ kN}$

“ Bronvermelding

Deze oefening is aangepast van

https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_3/session_1/intro.html

🧩 Opgave

Bepaal de nieuwe segmenten en teken de vrijlichaamsschema voor de nieuwe segmenten en de segmenten waar iets verandert is.

Welke van de randvoorwaarden moet worden gewijzigd?

☐ $w_{AC}(0) = 0$

☐ $M_{AC}(0) = 0$

Solution

Only $w_{AC}(0) = 0$ needs to be adapted

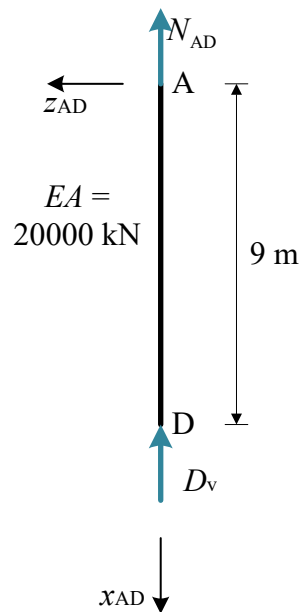


Fig. 67 Vrijlichaamsdiagram AD

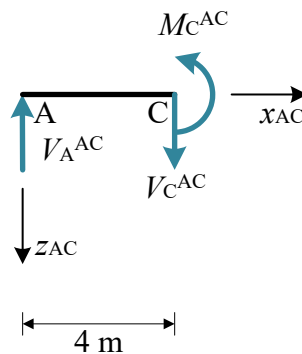


Fig. 68 Vrijlichaamsdiagram AC

Opgave

Stel de nieuwe vergelijkingen op voor de krachtsgrootheden en verplaatsingen.

Hoeveel extra onbekenden zijn er bijgekomen?

Er zijn/is nieuwe onbekende(n)

Solution



Er zijn 2 nieuwe onbekenden

Opgave

Welke nieuwe randvoorwaarde kan je nu opstellen?

() =

  Reuse

Solution



$$u_{AD}(D) = 0$$

Opgave

Welke nieuwe overgangsvoorwaardes kan je nu opstellen?

Voor de overgang van verplaatsingen:

+ () = ()

Voor de overgang van krachten:

+ () = ()

  Reuse

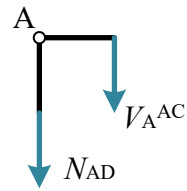


Fig. 69 Vrijlichaamsdiagram Aa

- $+u_{AD}(A) = w_{AC}(A)$
- $+N_{AD}(A) = -V_{AC}(A)$

Opgave

Los de integratieconstanten op. Je kan gebruik maken van de volgende code cellen met de code van [Instructie](#) die dus nog aangepast moeten worden.

Heb je de goede resultaten? Rond of op 2 decimalen en gebruik een . als decimaalteken. Gebruik kN en m voor de eenheden.

$C_1 =$

$C_2 =$

  Reuse

```
import numpy as np

A = np.array([
    [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, -4/1875, -1/625, -4, 1],
    [ 0, 0, 0, 0, 1/625, 1/1250, 1, 0],
    [-4/1875, -1/625, -4, 1, 0, 0, 0, -1],
    [ 1/625, 1/1250, 1, 0, 0, 0, -1, 0],
    [ 4, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0],
    [ 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0]
])

b = np.array([
    0,
    0,
    -8/375,
    8/375,
    0,
    0,
    0,
    0
])
```

```
np.linalg.solve(A,b)
```

```

import sympy as sym
sym.init_printing()

x = sym.symbols('x')

q = 10
EI = 5000
EA = 20000
F = 150

q_AC = 0
q_BC = q

C_1, C_2, C_3, C_4 = sym.symbols('C_1 C_2 C_3 C_4')
C_5, C_6, C_7, C_8 = sym.symbols('C_5 C_6 C_7 C_8')

V_AC = -sym.integrate(q_AC, x) + C_1
M_AC = sym.integrate(V_AC, x) + C_2
kappa_AC = M_AC/EI
phi_AC = sym.integrate(kappa_AC, x) + C_3
w_AC = -sym.integrate(phi_AC, x) + C_4

V_BC = -sym.integrate(q_BC, x) + C_5
M_BC = sym.integrate(V_BC, x) + C_6
kappa_BC = M_BC/EI
phi_BC = sym.integrate(kappa_BC, x) + C_7
w_BC = -sym.integrate(phi_BC, x) + C_8

eq1 = sym.Eq(w_AC.subs(x,0),0)
eq2 = sym.Eq(M_AC.subs(x,0),0)
eq3 = sym.Eq(w_BC.subs(x,4),0)
eq4 = sym.Eq(phi_BC.subs(x,4),0)
eq5 = sym.Eq(w_AC.subs(x,4)-w_BC.subs(x,0),0)
eq6 = sym.Eq(phi_AC.subs(x,4)-phi_BC.subs(x,0),0)
eq7 = sym.Eq(M_AC.subs(x,4) - M_BC.subs(x,0),0)
eq8 = sym.Eq(V_AC.subs(x,4) - V_BC.subs(x,0),0)

sol = sym.solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8],(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_8))
for k, v in sol.items():
    print(f"{k} = {v} ≈ {v.evalf()}")

```


$$C_1 = \frac{1792}{415} \approx 4.32$$

```
import numpy as np

A = np.array([
    [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1],
    [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, -4/1875, -1/625, -4, 1, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, 1/625, 1/1250, 1, 0, 0, 0],
    [-4/1875, -1/625, -4, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0],
    [ 1/625, 1/1250, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0],
    [ 4, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0],
    [ 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9/20000, 1],
    [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
])

b = np.array([
    0,
    0,
    -8/375,
    8/375,
    0,
    0,
    0,
    0,
    0,
    0
])
```

```
np.linalg.solve(A,b)
```

```
array([ 4.31807229e+00,  0.00000000e+00, -6.30232932e-03,  1.94313253e-03,
        4.31807229e+00,  1.72722892e+01,  6.06586345e-04,  1.79405622e-02,
       -4.31807229e+00,  1.94313253e-03])
```

```

import sympy as sym
sym.init_printing()

x = sym.symbols('x')

q = 10
EI = 5000
EA = 20000
F = 150

q_AC = 0
q_BC = q
q_AD = 0

C_1, C_2, C_3, C_4 = sym.symbols('C_1 C_2 C_3 C_4')
C_5, C_6, C_7, C_8 = sym.symbols('C_5 C_6 C_7 C_8')
C_9, C_10 = sym.symbols('C_9 C_10')

V_AC = -sym.integrate(q_AC, x) + C_1
M_AC = sym.integrate(V_AC, x) + C_2
kappa_AC = M_AC/EI
phi_AC = sym.integrate(kappa_AC, x) + C_3
w_AC = -sym.integrate(phi_AC, x) + C_4

V_BC = -sym.integrate(q_BC, x) + C_5
M_BC = sym.integrate(V_BC, x) + C_6
kappa_BC = M_BC/EI
phi_BC = sym.integrate(kappa_BC, x) + C_7
w_BC = -sym.integrate(phi_BC, x) + C_8

N_AD = -sym.integrate(q_AD, x) + C_9
epsilon_AD = N_AD/EA
u_AD = sym.integrate(epsilon_AD, x) + C_10

eq1 = sym.Eq(w_AC.subs(x,0),u_AD.subs(x,0))
eq2 = sym.Eq(M_AC.subs(x,0),0)
eq3 = sym.Eq(w_BC.subs(x,4),0)
eq4 = sym.Eq(phi_BC.subs(x,4),0)
eq5 = sym.Eq(w_AC.subs(x,4)-w_BC.subs(x,0),0)
eq6 = sym.Eq(phi_AC.subs(x,4)-phi_BC.subs(x,0),0)
eq7 = sym.Eq(M_AC.subs(x,4) - M_BC.subs(x,0),0)
eq8 = sym.Eq(V_AC.subs(x,4) - V_BC.subs(x,0),0)
eq9 = sym.Eq(u_AD.subs(x,9),0)
eq10 = sym.Eq(N_AD.subs(x,0),-V_AC.subs(x,0))

sol = sym.solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10],(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,
for k, v in sol.items():
    print(f"{k} = {v} ≈ {v.evalf()}")

```

```

C_1 = 1792/415 ≈ 4.31807228915663
C_10 = 504/259375 ≈ 0.00194313253012048
C_2 = 0 ≈ 0
C_3 = -4904/778125 ≈ -0.00630232931726908
C_4 = 504/259375 ≈ 0.00194313253012048
C_5 = 1792/415 ≈ 4.31807228915663
C_6 = 7168/415 ≈ 17.2722891566265
C_7 = 472/778125 ≈ 0.000606586345381526
C_8 = 2792/155625 ≈ 0.0179405622489960
C_9 = -1792/415 ≈ -4.31807228915663

```

Opgave

Oplossing van Opgave

$$M_{AC}(4) = \frac{1792}{415} \cdot 4 = \frac{7168}{415} \approx 17.27 \text{ kNm}$$

```
M_AC.subs(sol).subs(x,4).evalf()
```

17.2722891566265

De constructie wordt nog wat meer uitgebreid.

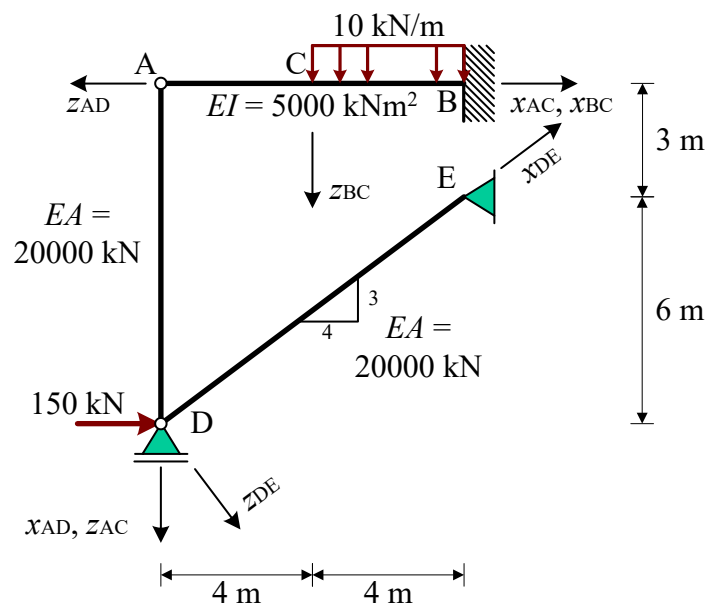


Fig. 70 Constructie

Opgave

Bepaal de nieuwe segmenten en teken de vrijlichaamsschema voor de nieuwe segmenten en de segmenten waar iets verandert is. Teken ook de nieuwe overgang.

Solution

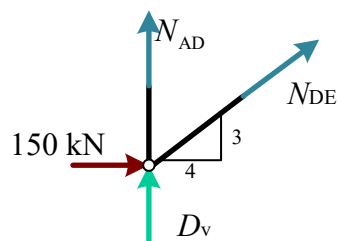


Fig. 71 Vrijlichaamsdiagram D

- $u_{DE}(E) = 0$
- $\frac{4}{5} \cdot N_{DE} = -150 \rightarrow N_{DE} = -187.5$

Opgave

Welke stelling(en) is/zijn waar?

- ☐ De verplaatsingen en krachten in DACB zijn ongewijzigd tov oefening 3
- ☐ De verplaatsingen en krachten in DACB wijzigen tov oefening 3

Solution ^

- De verplaatsingen en krachten in DACB zijn ongewijzigd tov oefening 3
 - Exact, in de nieuwe vergelijkingen komen geen krachtsgrootheden / verplaatsingen van de andere staven voor. De horizontale verplaatsing van AD heeft dus geen invloed op DACB (vanwege kleine verplaatsingen)
- De verplaatsingen en krachten in DACB wijzigen tov oefening 3
 - Onjuist, komen in je nieuwe vergelijkingen krachten of verplaatsingen voor van het deel DACB van de constructie?
- De staaf DE kan onafhankelijk van de rest van de constructie worden doorgerekend
 - Exact, met deze twee vergelijkingen kunnen de twee integratieconstanten van staaf DE worden opgelost.

8 september: Krachtenmethode rek

In deze les leer je hoe je de krachtenmethode kan gebruiken om simpele vakwerkconstructies en constructies op trek/druk door te rekenen.

Instructie

Inhoud

- [Meer voorbeelden](#)
- [Instructies in collegevorm](#)
- [Oefeningen](#)

De krachtenmethode is een aanpak om statisch onbepaalde constructies door te rekenen. In deze methode wordt de constructie aangepast naar een statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarden. Vervolgens kan je de constructie oplossen zoals je gewend bent van statisch bepaalde constructies. De krachtenmethode bestaat altijd uit de volgende stappen:

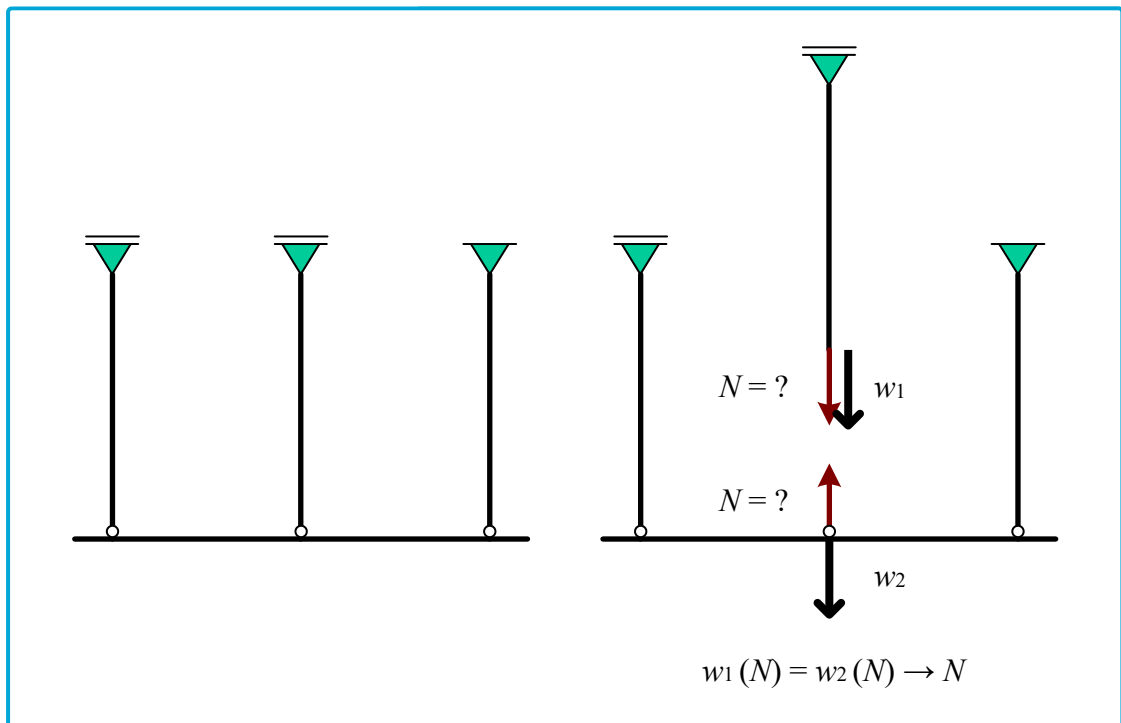
► Algoritme (Krachtenmethode)

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.
2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij pendelstaven of scharnieren toe te voegen: voeg onbekende statisch onbepaalde krachten en vervormingsvoorwaarden toe voor elke oplegging die je hebt weggenomen, aansluiting van de pendelstaven die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Weghalen oplegging

Splitsen constructie bij pendelstaven

Toevoegen scharnieren



3. Los de verplaatsing op in termen van de onbekende onbepaalde krachten zoals je normaal zou doen voor een statisch bepaalde constructie.
4. Gebruik je vervormingsvoorwaarden om de statisch onbepaalde krachten op te lossen.

We behandelen de toepassing op vakwerkconstructies met het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

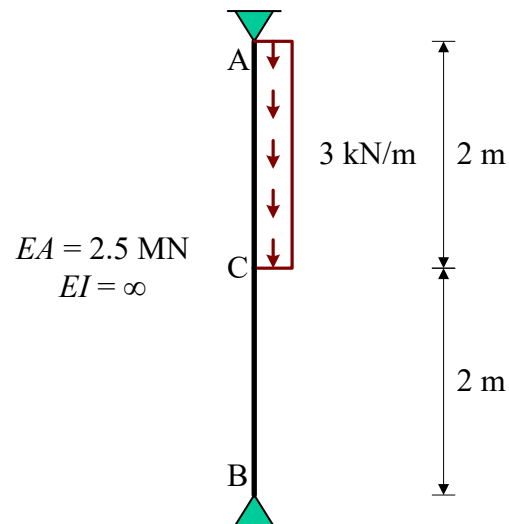


Fig. 72 Voorbeeldconstructie. Hoewel dit geen vakwerkconstructie is, worden vervorming enkel veroorzaakt door extensie, niet door buiging.

$$EA = 2.5 \text{ MN}, EI = \infty$$

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.

Voorbeeld

Voor ons voorbeeld zijn we geïnteresseerd in de interne krachtenverdeling, dus moeten we de graad van interne statische onbepaaldheid evalueren.

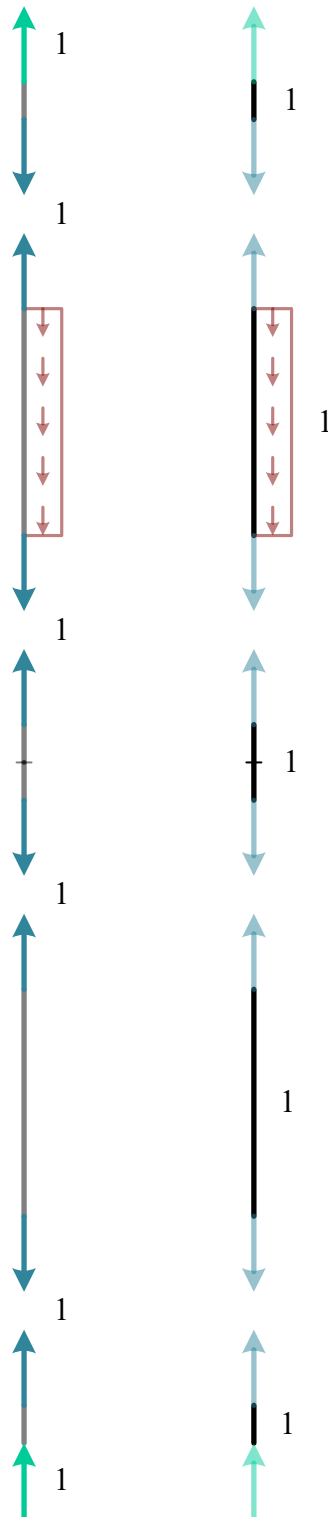


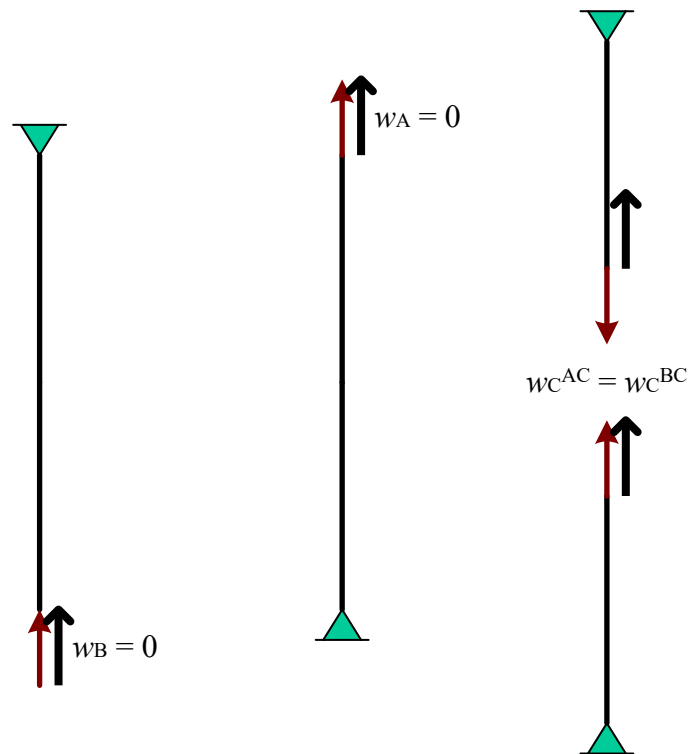
Fig. 73 Er zijn 6 onbekende krachten en 5 evenwichtsvergelijkingen

Deze constructie is dus 1e orde intern statisch onbepaald.

2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij een pendelstaaf, of scharnieren toe te voegen: voeg onbekende statisch onbepaalde krachten en vervormingsvoorwaarden toe voor elke oplegging die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Voorbeeld

Er zijn hier enkele opties, waarvan er enkele hieronder worden getoond:



De eerste optie wordt gekozen.

3. Los de verplaatsing op in termen van de onbekende onbepaalde krachten zoals je normaal zou doen voor een statisch bepaalde constructie.

 **Veranderd in versie v2025.5.1:**
2025-09-09, Correctie normaalkracht en verlenging

Voorbeeld

We hebben de volgende statisch bepaalde constructie gekozen met vervormingsvoorwaarde $w_B(B_v) = 0$:

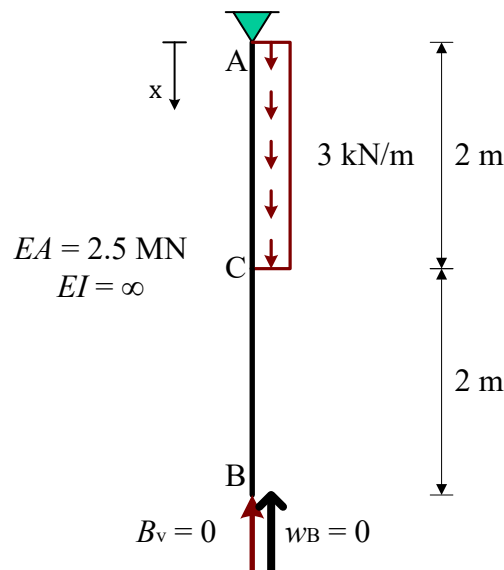


Fig. 74 De statisch bepaalde constructie met vervormingsvoorwaarde,
 $EA = 2.5 \text{ MN}, EI = \infty$

Om de verplaatsing van B te vinden, kunnen eerst de normaalkrachten worden geëvalueerd als functie van B_v met behulp van verticaal krachterevenwicht:

- $N_{AC}(B_v) = -B_v + 6 - 3 \cdot x$
- $N_{BC}(B_v) = -B_v$

Dit leidt tot de volgende uitrekking van de elementen, met behulp van

$$\Delta L = \frac{N L}{EA}:$$

- $\Delta L_{AC}(B_v) = -\frac{B_v \cdot 2}{2500} + \frac{6 \cdot 2}{2500} - \int_0^2 \frac{3 \cdot x}{2500} dx = -\frac{B_v}{1250} + \frac{3}{1250}$
- $\Delta L_{BC}(B_v) = -\frac{B_v}{1250}$

Dit leidt tot een verplaatsing van:

- $w_C(B_v) = \frac{B_v}{1250} - \frac{3}{1250}$
- $w_B(B_v) = \frac{B_v}{625} - \frac{3}{1250}$

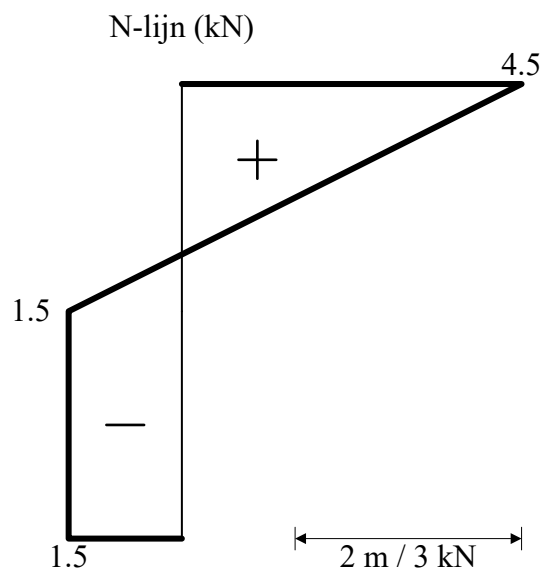
4. Gebruik je vormveranderingsvoorwaarden om de statisch onbepaalde krachten op te lossen

Voorbeeld

$$\begin{aligned}w_B(B_v) &= 0 \\ \frac{B_v}{625} - \frac{3}{1250} &= 0 \\ B_v &= 1.5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Dit leidt tot de volgende andere resultaten:

$$w_C = 1.2 \text{ mm } (\downarrow)$$



Meer voorbeelden

In hoofdstuk 2.1 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)) wordt de krachtemethode in het algemeen behandeld. Specifiek voor simpele vakwerkconstructies wordt behandeld in hoofdstuk 2.2.8 - 2.2.9.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is in [les 4](#) gepresenteerd in collegevorm van 0:11:30 tot 0:43:10.

Oefeningen

- Opgaves 2.31 - 2.39, in hoofdstuk 2.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).

Antwoorden zijn [hier beschikbaar](#).

Begeleide oefening

Inhoud

- Statisch onbepaalde kracht B_v
- Statisch onbepaald moment M_B
- Statisch onbepaalde normaalkracht N_{AD}

Gegeven is de volgende constructie:

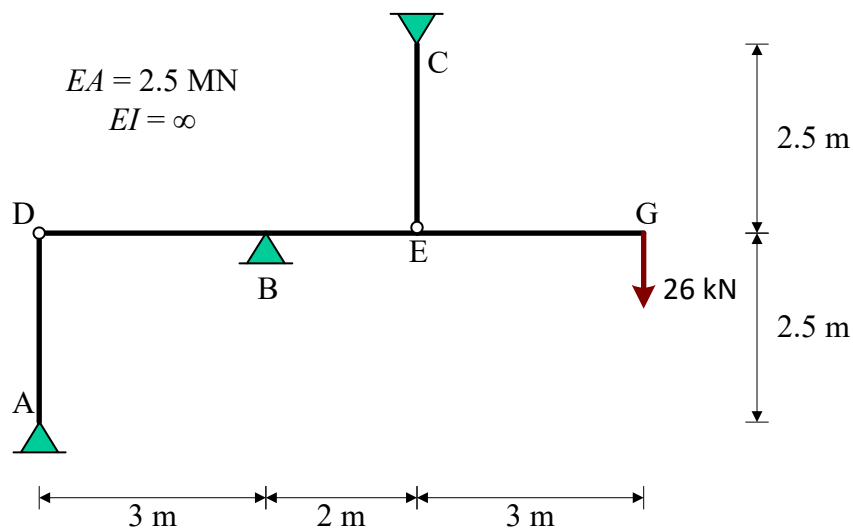


Fig. 75 Constructie, $EA = 2.5 \text{ MN}$, $EI = \infty$

Bepaal de oplegreacties en het snedekrachtenlijnen. Je gaat dit doen voor drie verschillende statisch onbepaalde krachten.

Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

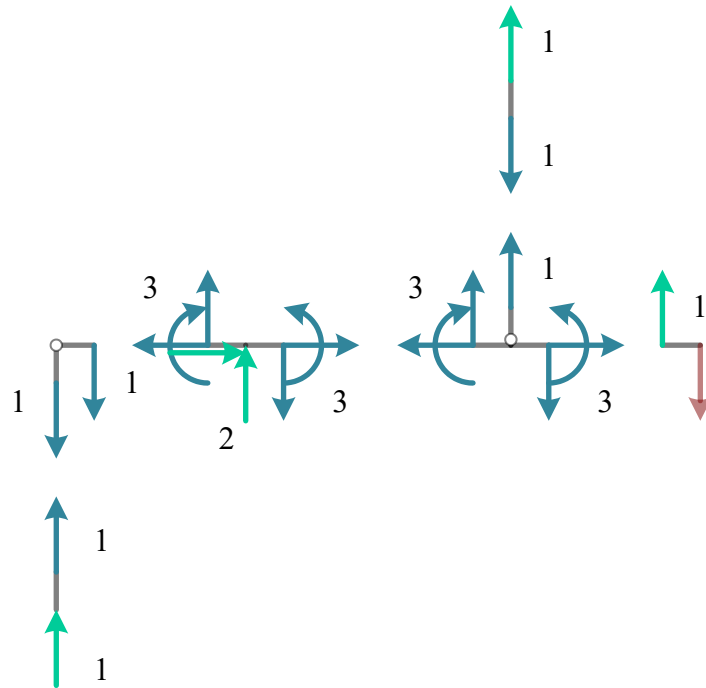


Fig. 76 Er zijn 22 onbekende krachten

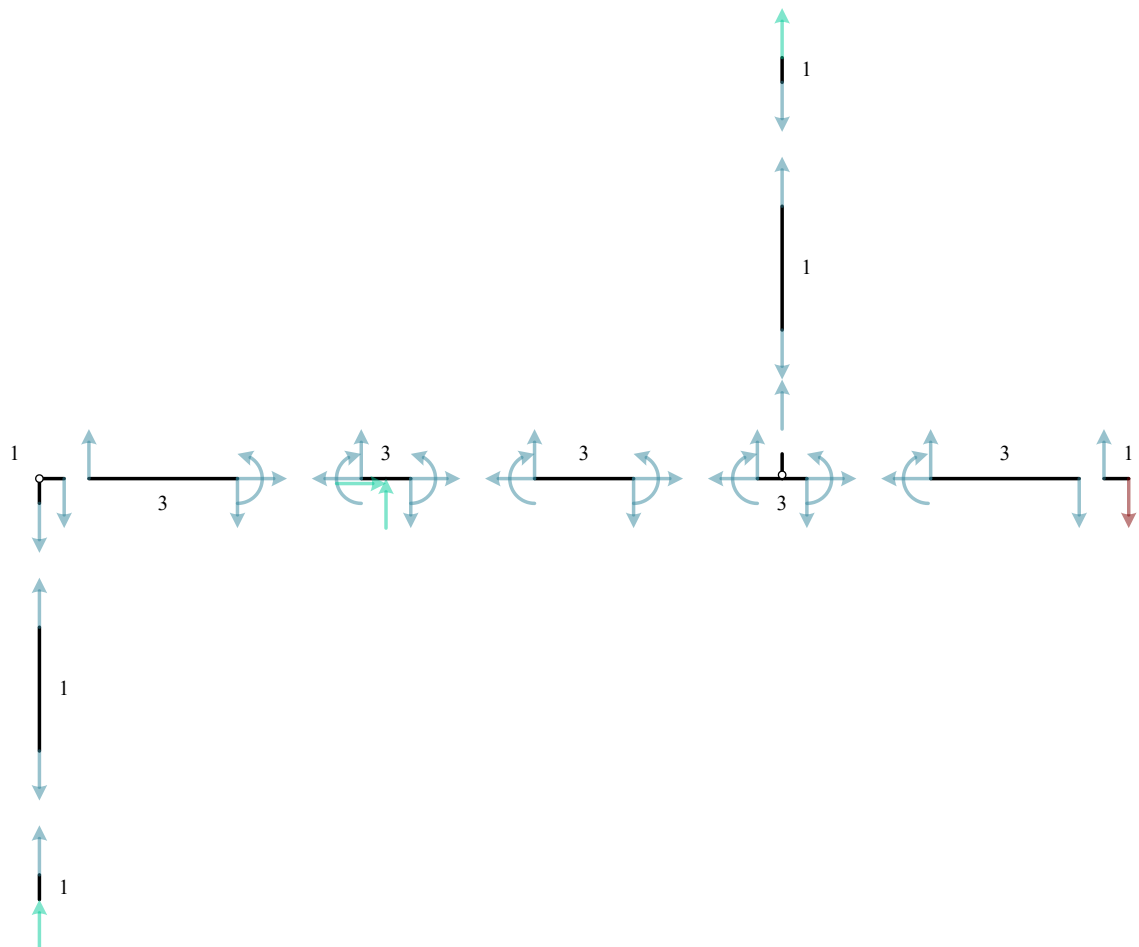


Fig. 77 Er zijn 21 evenwichtsvergelijkingen

Dus de constructie is 1ste graads statisch onbepaald

Opgave

Welke van de volgende is geen optie?

☐ Weghalen verticale oplegging bij A

☐ Weghalen oplegging bij B

Oplossing

- Weghalen oplegging bij A
- Weghalen oplegging bij B
 - Inderdaad! Als je de hele oplegging weghaalt heb je een mechanisme wat naar links en rechts kan bewegen!
- Weghalen oplegging bij C
- Toevoegen scharnier bij B (in doorgaande liggen DBEG)
- Toevoegen scharnier bij E (in doorgaande liggen DBEG)
 - Inderdaad, als je hier een scharnier toevoegt krijg je een mechanisme waarbij EG om E kan draaien
- Splitsen constructie in pendelstaaf AD
- Splitsen constructie in pendelstaaf CE

Statisch onbepaalde kracht B_v

Opgave

Neem als statisch onbepaalde kracht de verticale oplegreactie bij B (positief omhoog).

Wat is de vormveranderingsvoorwaarde?

 =

 >  Reuse

Oplossing

De vormveranderingsvoorwaarde is $w_B = 0$.

Opgave

Bepaal achtereenvolgens de normaalkrachten en verplaatsingen als functie van B_v .

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.
Gebruik kN en m voor de eenheden.

N_{AD} left(B_v right) = $\cdot B_v$ + (rond af op 1 decimaal)

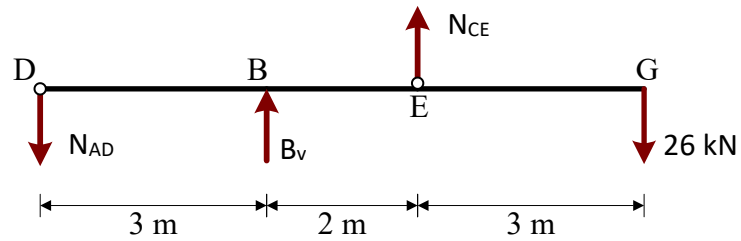


Fig. 78 Vrijlichaamsschema **DG** met B_v als statisch onbepaalde.

De gebruikte vergelijkingen zijn:

$$\sum T|_E = 5 \cdot N_{AD} - 2 \cdot B_v - 3 \cdot 26 = 0$$

$$\sum F_v = -N_{AD} + B_v + N_{CE} - 26 = 0$$

$$w_E = -\Delta l_{CE} = \frac{-N_{CE} \cdot l_{CE}}{EA}$$

$$w_D = \Delta l_{AD} = \frac{-N_{AD} \cdot l_{AD}}{EA}$$

$$w_B = w_D + \frac{3}{5} \cdot (w_E - w_D) = \frac{3}{5} \cdot w_E + \frac{2}{5} \cdot w_D$$

Hieruit volgt:

$$N_{AD} = 0.4 \cdot B_v + 15.6$$

$$N_{CE} = -0.6 \cdot B_v + 41.6$$

$$w_E = 0.0006 \cdot B_v - 0.0416$$

$$w_B = 0.0004 \cdot B_v - 0.0156$$

$$w_B = 0.00052 \cdot B_v - 0.01872$$

Opgave

Los met de vormveranderingsvoorwaarde de statisch onbepaalde kracht B_v op.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken en rond op gehele getallen.

$B_v =$ kN (positief omhoog)

$N_{AD} =$ kN

$N_{CE} =$ kN

$w_E =$ cm (positief omhoog)

$w_D =$ cm (positief omhoog)

$w_B =$ cm (positief omhoog)

   Reuse

Oplossing



Oplossen van de vergelijkingen geeft:

$$B_v = 36\text{kN}$$

$$N_{AD} = 30\text{kN}$$

$$N_{CE} = 20\text{kN}$$

$$w_E = -2\text{cm}$$

$$w_D = 3\text{cm}$$

$$w_B = 0$$

Statisch onbepaald moment M_B

Opgave

Neem als statisch onbepaalde kracht het moment M_B (positief zorgt voor trek aan de onderkant).

Wat is de vormveranderingsvoorwaarde?

 >  Reuse

Oplossing



De vormveranderingsvoorwaarde is:

$$\varphi_B^{BD} = \varphi_B^{BE}$$

Opgave

Bepaal achtereenvolgens de normaalkrachten en verplaatsingen als functie van M_B .

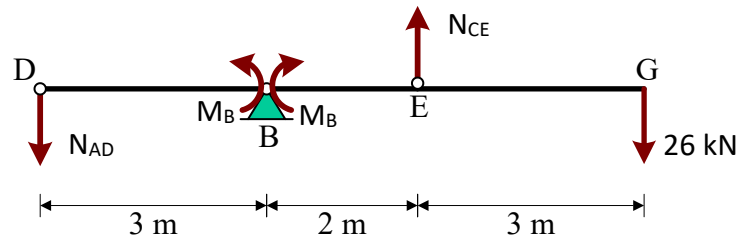


Fig. 79 Constructie vrijgemaakt van pendelstaven met M_B als statisch onbepaalde.

De gebruikte vergelijkingen zijn:

$$\sum M|_B^{BD} = 3 \cdot N_{AD} + M_B = 0$$

$$\sum M|_B^{BG} = -M_B + 2 \cdot N_{CE} - 5 \cdot 26 = 0$$

$$\varphi_B^{DB} = \frac{w_D}{3}$$

$$\varphi_B^{BE} = \frac{w_E}{2}$$

Hieruit volgt:

$$N_{AD} = -0.33 \cdot M_B$$

$$N_{CE} = 0.5 \cdot M_B + 65$$

$$\varphi_B^{DB} = -0.00011 \cdot M_B$$

$$\varphi_B^{BE} = 0.00025 \cdot M_B + 0.0325$$

Opgave

Los met de vormveranderingsvoorwaarde de statisch onbepaalde kracht M_B op.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.

$N_{\text{AD}} =$ kN

$N_{\text{CE}} =$ kN

Oplossing

Oplossen van de vergelijkingen geeft:

$$N_{\text{AD}} = 30\text{kN}$$

$$N_{\text{CE}} = 20\text{kN}$$

$$\varphi_B = 0.01\text{rad}$$

$$M_B = -90\text{kNm}$$

Statisch onbepaalde normaalkracht N_{AD}

Opgave

Neem als statisch onbepaalde kracht de normaalkracht N_{AD} door de pendelstaaf in het scharnier los te maken van de balk.

Wat is de vormveranderingsvoorwaarde?

=

Oplossing



De vormveranderingsvoorwaarde is:

$$w_D^{AD} = w_D^{BD}$$

Opgave

Bepaal achtereenvolgens de normaalkrachten en verplaatsingen als functie van N_{AD} .

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.
Gebruik kN en m voor de eenheden.

$$N_{CE}(N_{AD}) = \boxed{} \cdot N_{AD} + \boxed{} \text{ (rond af op 1 decimaal)}$$

$$w_E(N_{AD}) = \boxed{} \cdot N_{AD} + \boxed{} \text{ (positief omhoog, rond af op 4 decimalen)}$$

$$w_D^{AD}(N_{AD}) = \boxed{} \cdot N_{AD} + \boxed{} \text{ (positief omhoog, rond af op 3 decimalen)}$$

$$w_D^{BD}(N_{AD}) = \boxed{} \cdot N_{AD} + \boxed{} \text{ (positief omhoog, rond af op 5 decimalen)}$$

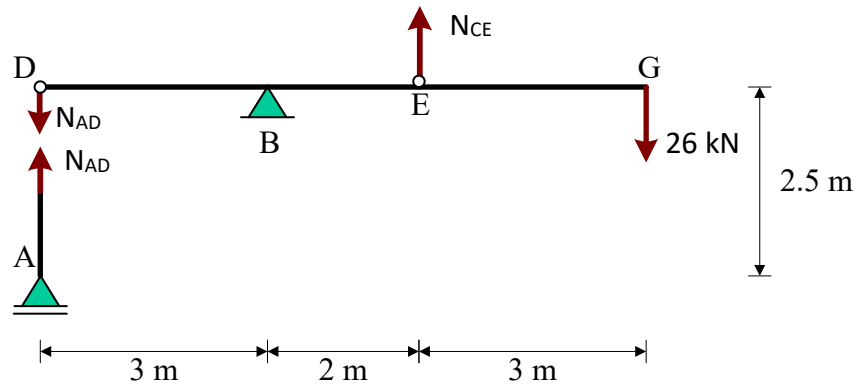


Fig. 80 Constructie met N_{AD} als statisch onbepaalde en vrijgemaakt van pendelstaaf CE.

De gebruikte vergelijkingen zijn:

$$\sum M|_B = 3 \cdot N_{AD} + 2 \cdot N_{CE} - 5 \cdot 26 = 0$$

$$w_E = -\Delta l_{CE} = \frac{-N_{CE} \cdot l_{CE}}{EA}$$

$$w_D^{AD} = \Delta l_{AD} = \frac{N_{AD} \cdot l_{AD}}{EA}$$

$$w_D^{BD} = \varphi_B \cdot 3 = -\frac{3}{2}w_E$$

Hieruit volgt:

$$N_{CE} = -1.5 \cdot N_{AD} + 65$$

$$w_E = 0.0015 \cdot N_{AD} - 0.065$$

$$w_D^{AD} = 0.001 \cdot N_{AD}$$

$$w_D^{BD} = -0.00225 \cdot N_{AD} + 0.0975$$

Opgave

Los met de vormveranderingsvoorwaarde de statisch onbepaalde kracht N_{AD} op.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.

$N_{AD} =$ kN

$N_{CE} =$ kN

Oplossing

Oplossen van de vergelijkingen geeft:

$$N_{AD} = 30\text{kN}$$

$$N_{CE} = 20\text{kN}$$

$$w_E = -2\text{cm}$$

$$w_D = 3\text{cm}$$

9 september: Krachtenmethode rek en williot

In deze les leer je hoe je de krachtenmethode kan gebruiken om complexe vakwerkconstructies en constructies op trek/druk door te rekenen.

Instructie

Inhoud

- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Oefeningen

De krachtenmethode hebben we eerder al behandeld voor [simpele constructies](#). We behandelen de toepassing op complexere vakwerkconstructies met het volgende voorbeeld. Dit voorbeeld bevat een Williot diagram om de verplaatsingen te berekenen.

“ Bronvermelding

Deze oefening is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/statically_inderminate/force_method/extension.html

Voorbeeld

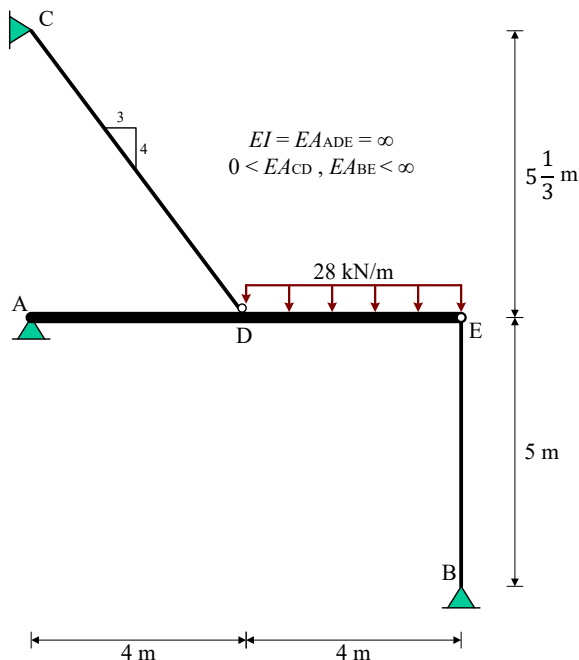


Fig. 81 Voorbeeldconstructie. Hoewel dit geen vakwerkconstructie is, worden vervorming enkel veroorzaakt door extensie, niet door buiging.

$$EI = EA_{ADE} = \infty, 0 < EA_{CD}, EA_{BE} < \infty$$

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.

Voorbeeld

Voor ons voorbeeld zijn we geïnteresseerd in de interne krachtenverdeling, dus moeten we de graad van interne statische onbepaaldheid evalueren.

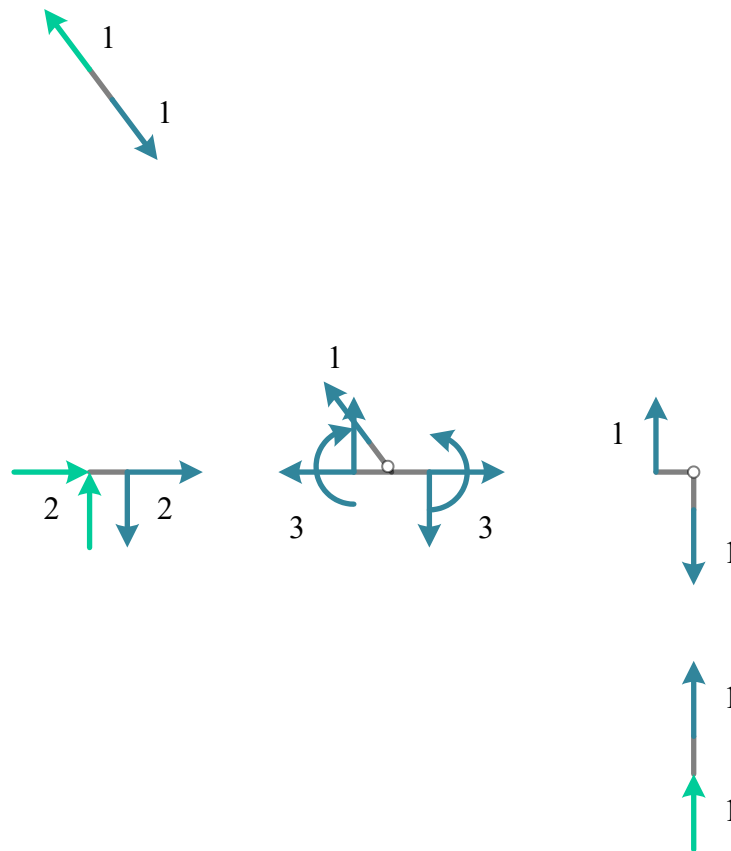


Fig. 82 Er zijn 17 onbekende krachten.

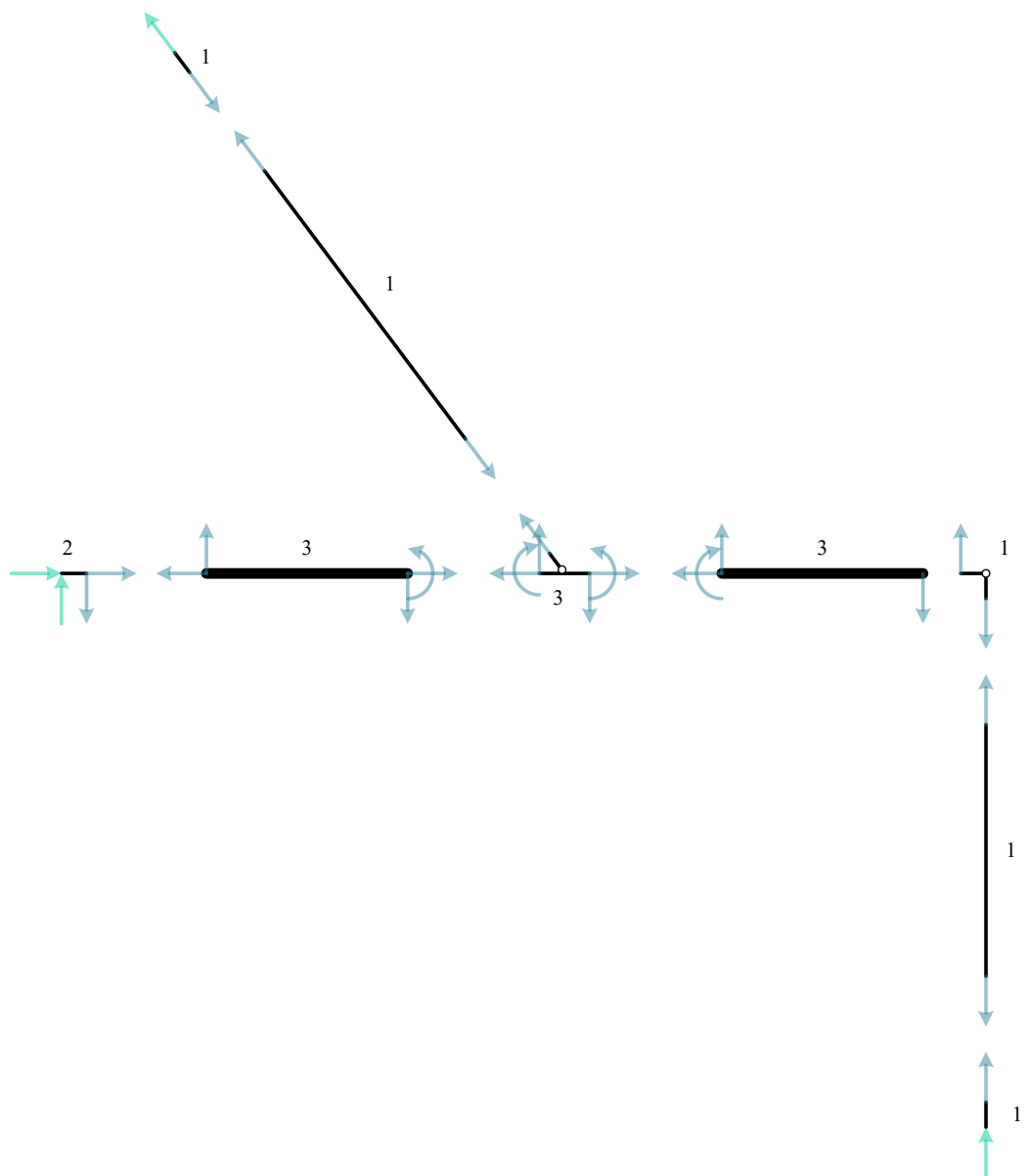


Fig. 83 Er zijn 16 evenwichtsvergelijkingen

Deze constructie is dus 1e orde intern statisch onbepaald.

2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij pendelstaven of scharnieren toe te voegen: voeg onbekende statisch onbepaalde krachten en vervormingsvoorwaarden toe voor elke oplegging die je hebt weggenomen, aansluiting van de pendelstaven die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Voorbeeld

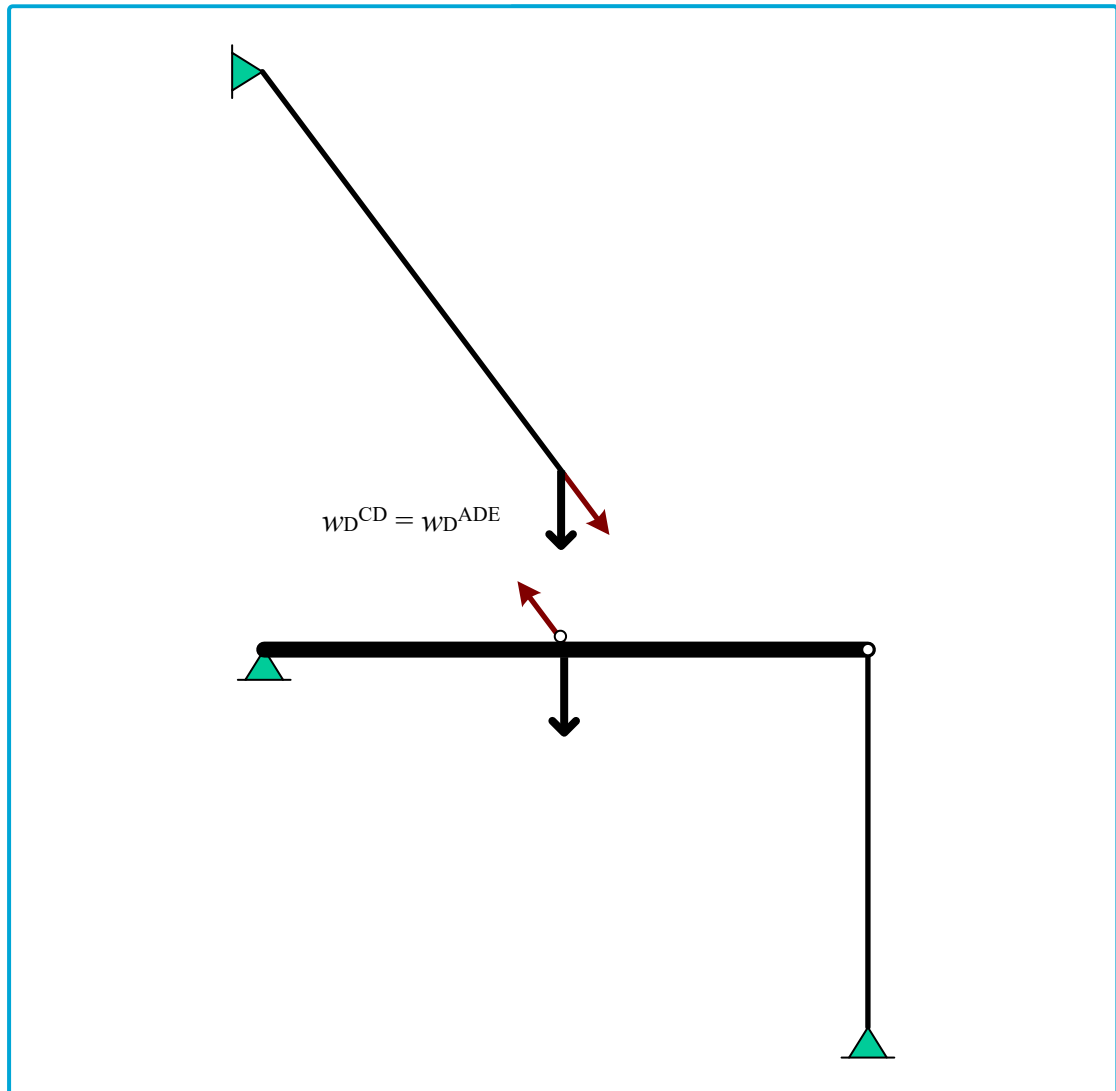
Er zijn hier veel opties, waarvan er enkele hieronder worden getoond:

Splits de constructie bij een scharnier

Scharnier toevoegen

De horizontale bewegingsrichting van een oplegging vrijmaken

Verticale oplegging weghalen



De laatste optie wordt gekozen.

3. Los de verplaatsing op in termen van de onbekende onbepaalde krachten zoals je normaal zou doen voor een statisch bepaalde constructie.

Voorbeeld

We hebben de volgende statisch bepaalde constructie gekozen met vervormingsvoorwaarde $w_B(B_v) = 0$:

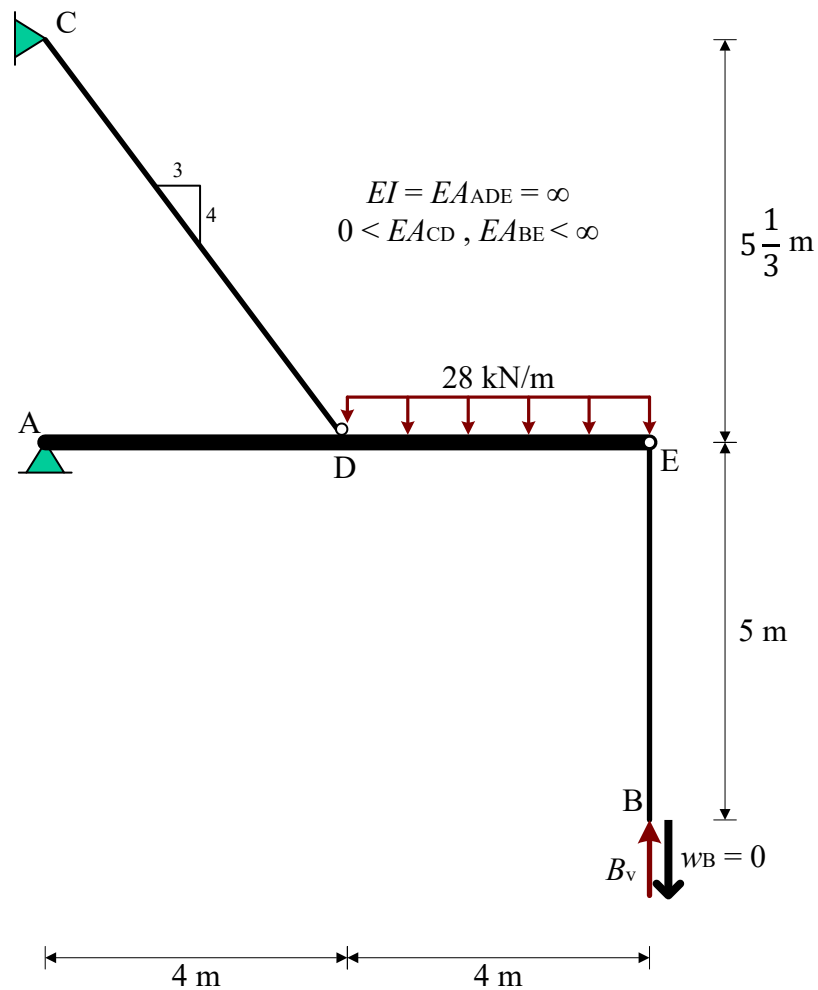


Fig. 84 De statisch bepaalde constructie met vervormingsvoorwaarde,
 $EI = EA_{ADE} = \infty, 0 < EA_{CD}, EA_{BE} < \infty$

Omdat AE oneindig stijf is, zullen alle vervormingen het gevolg zijn van staven die uitrekken/samendrukken. Om dit te berekenen, kunnen eerst de normaalkrachten worden geëvalueerd als functie van B_v met behulp van bijvoorbeeld een momentenevenwicht rond A voor het element ADE:

- $N_{CD}(B_v) = 210 - 2.5B_v$
- $N_{BE}(B_v) = -B_v$

Dit leidt tot de volgende uitrekking van de elementen, met behulp van

$$\Delta L = \frac{N L}{EA}:$$

- $\Delta L_{CD}(B_v) = \frac{1400}{EA} - \frac{50B_v}{3EA}$

$$\circ \Delta L_{BE}(B_v) = -\frac{5B_v}{EA}$$

Dit leidt tot de volgende verplaatsing, met behulp van een Williot diagram:

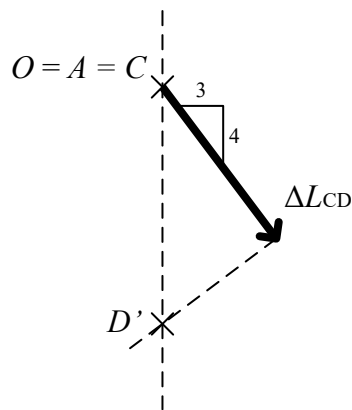


Fig. 85 De verplaatsing van **D** is $\frac{5}{4}\Delta L_{CD}$

$$\begin{aligned} \circ w_D(B_v) &= \frac{1750}{EA} - \frac{125B_v}{6EA} (\downarrow) \\ \circ w_E(B_v) &= \frac{3500}{EA} - \frac{125B_v}{3EA} (\downarrow) \\ \circ w_B(B_v) &= \frac{3500}{EA} - \frac{140B_v}{3EA} (\downarrow) \end{aligned}$$

4. Gebruik je vormveranderingsvoorwaarden om de statisch onbepaalde krachten op te lossen

Voorbeeld

$$\begin{aligned} w_B(B_v) &= 0 \\ \frac{3500}{EA} - \frac{140B_v}{3EA} &= 0 \\ B_v &= 75 \text{ kN} \end{aligned}$$

Dit leidt tot de volgende andere resultaten:

$$\begin{aligned} \circ N_{CD} &= 22.5 \text{ kN} \\ \circ N_{BE} &= 75 \text{ kN} \\ \circ w_D &= \frac{375}{2EA} (\downarrow) \\ \circ w_E &= \frac{375}{EA} (\downarrow) \end{aligned}$$

Meer voorbeelden

In hoofdstuk 2.1 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)) wordt de krachtenmethode in het algemeen behandeld. Specifiek voor vakwerkconstructies waarbij ook williot nodig is wordt behandeld in hoofdstuk 2.2.10.

Instructies in collegevorm

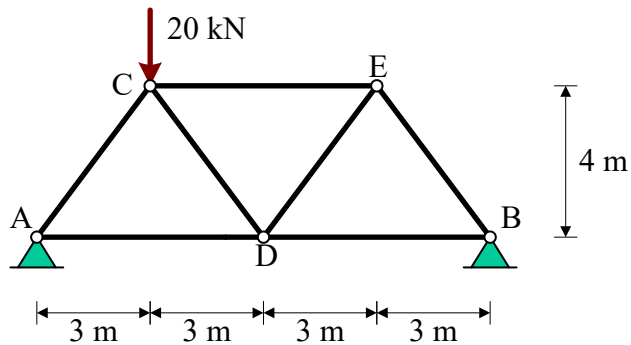
Dit onderwerp is in [les 5](#) gepresenteerd in collegevorm tot 0:42:50.

Oefeningen

- Opgaves 2.40 en 2.41, in hoofdstuk 2.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Antwoorden zijn [hier beschikbaar](#).

Begeleide oefening

Gegeven is de volgende constructie:



$$EA = 3750 \text{ kN}$$

Fig. 86 Constructie, $EA = 3750 \text{ kN}$

“ Bronvermelding

Deze oefening is aangepast van

https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_3/session_3/intro.html

Bepaal de verplaatsingen van de knopen.

🧩 Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

H-P > Reuse

📄 Oplossing

De constructie is 1ste/de graads inwendig statisch onbepaald

Opgave

Welke van de volgende is/zijn geen optie?

☐ Weghalen horizontale oplegging bij B

☐ Weghalen verticale oplegging bij B

☐ Splitsen constructie in pendelstaaf AC

☐ Splitsen constructie in pendelstaaf AD

☐ Splitsen constructie in pendelstaaf CE

☐ Splitsen constructie in pendelstaaf DE

☐ Toevoegen scharnier halverwege CD

 Controleer

H-P

 Reuse

Oplossing



- Weghalen horizontale oplegging bij B
- Weghalen verticale oplegging bij B
 - Inderdaad! Als je de hele oplegging weghaalt heb je een mechanisme kan roteren rondom A.
- Splitsen constructie in pendelstaaf AC -Inderdaad, als je deze pendelstaaf weghaalt krijg je een mechanisme wat kan roteren om A en B.
- Splitsen constructie in pendelstaaf AD
- Splitsen constructie in pendelstaaf CE
 - Inderdaad, als je deze pendelstaaf weghaalt krijg je een mechanisme wat kan roteren om A en B.
- Splitsen constructie in pendelstaaf DE
 - Inderdaad, als je deze pendelstaaf weghaalt krijg je een mechanisme wat kan roteren om A en B.
- Toevoegen scharnier halverwege CD
 - Inderdaad, als je deze pendelstaaf weghaalt krijg je een lokaal mechanisme wat kan roteren om C en D.

Opgave

We kiezen voor een statisch onbepaalde kracht B_h (naar links positief) met de vormveranderingsvoorwaarde $w_{B,h} = 0$.

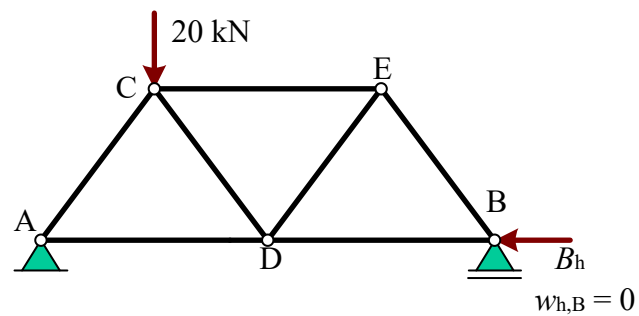


Fig. 87 Statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarde

Bepaal de normaalkrachten in alle staven als functie van B_h .



De staafkrachten worden opgelost, beginnende bij de krachten in de staven BE en BD:

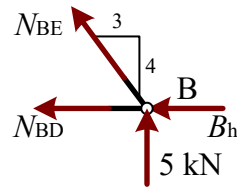


Fig. 88 Vrijlichaamsschema van knoop B

$$\sum F_v = 0 \rightarrow N_{BE} = -6.25 \text{ kN}$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow N_{BD} = 3.75 - B_h$$

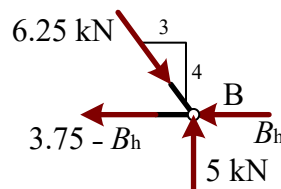


Fig. 89 Vrijlichaamsschema van knoop B met de opgeloste staafkrachten

Vervolgens wordt een snede gemaakt door de staven AD, CD en CE:

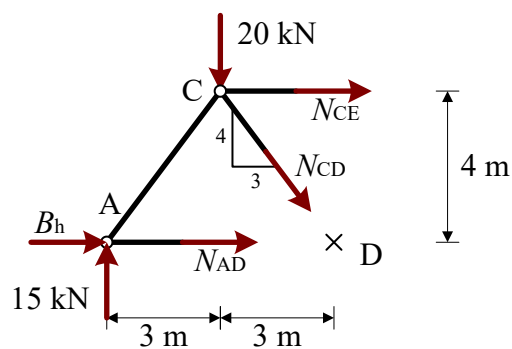


Fig. 90 Vrijlichaamsschema van deel AC

$$\sum F_v = 0 \rightarrow N_{CD} = -6.25 \text{ kN}$$

$$\sum T|_D = 0 \rightarrow N_{CE} = -7.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow N_{AD} = 11.25 - B_h$$

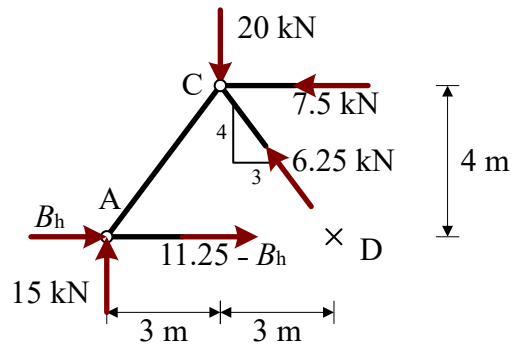


Fig. 91 Vrijlichaamsschema van deel AC met de berekende staafkrachten

Daarna wordt knoepevenwicht van D beschouwd:

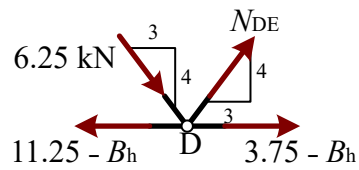


Fig. 92 Vrijlichaamsschema van knoop D

$$\sum F_v = 0 \rightarrow N_{DE} = 6.25 \text{ kN}$$

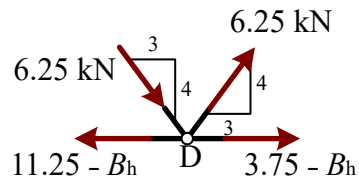


Fig. 93 Vrijlichaamsschema van knoop D met de opgeloste staafkracht

En ten slotte knoop C:

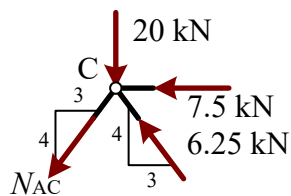


Fig. 94 Vrijlichaamsschema van knoop C

$$\sum F_v = 0 \rightarrow N_{AC} = -18.75 \text{ kN}$$

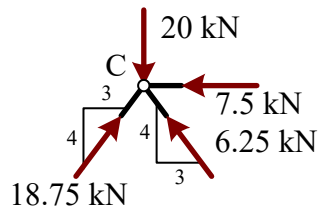


Fig. 95 Vrijlichaamsschema van knoop C met de opgeloste staafkracht

Opgave

Bepaal de verlenging/verkorting in alle staven als functie van B_h .

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken en rond af op 1 decimaal. Ga uit van kN als eenheid voor (B_{h}) .

$(\Delta L_{\text{AC}}(B_{\text{h}}) =)$ $(\cdot B_{\text{h}}) +$ (mm)

Oplossing

Nu kan voor elk element de verlenging / verkorting worden berekend:

$$\begin{aligned}\Delta L_{\text{AC}} &= -0.025 \text{ m} \\ \Delta L_{\text{CE}} &= -0.012 \text{ m} \\ \Delta L_{\text{BE}} &= \frac{1}{120} \approx -0.00833 \text{ m} \\ \Delta L &= \frac{NL}{EA} \rightarrow \Delta L_{\text{CD}} = \frac{1}{120} \approx -0.00833 \text{ m} \\ \Delta L_{\text{DE}} &= \frac{1}{120} \approx 0.00833 \text{ m} \\ \Delta L_{\text{AD}} &= 0.018 - 0.0016B_h \text{ m} \\ \Delta L_{\text{DB}} &= 0.006 - 0.0016B_h \text{ m}\end{aligned}$$

Opgave

Om de verplaatsingen te vinden van de knopen kijken we afzonderlijk naar de invloed van de horizontale kracht B_h en van de belasting van 20 kN. Hiermee worden de Williot-diagrammetjes iets simpeler

We beginnen met de de belasting van 20 kN. Daarvoor reken we dus enkel met de volgende verkortingen/verlengingen:

$$\Delta L_{AC} = -0.025 \text{ m}$$

$$\Delta L_{CE} = -0.012 \text{ m}$$

$$\Delta L_{BE} = \frac{1}{120} \approx -0.00833 \text{ m}$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{1}{120} \approx -0.00833 \text{ m}$$

$$\Delta L_{DE} = \frac{1}{120} \approx 0.00833 \text{ m}$$

$$\Delta L_{AD} = 0.018 \text{ m}$$

$$\Delta L_{DB} = 0.006 \text{ m}$$

De verlengingen/verkortingen ten gevolge van de 20 kN zijn deels gegeven:

Scharnier	Verplaatsing in horizontale richting → (mm)	Verplaatsing in verticale richting ↓ (mm)
A	0	0
B	?	?
C	21	47
D	18	$\frac{233}{6} \approx 39$
E	9	$\frac{65}{3} \approx 22$

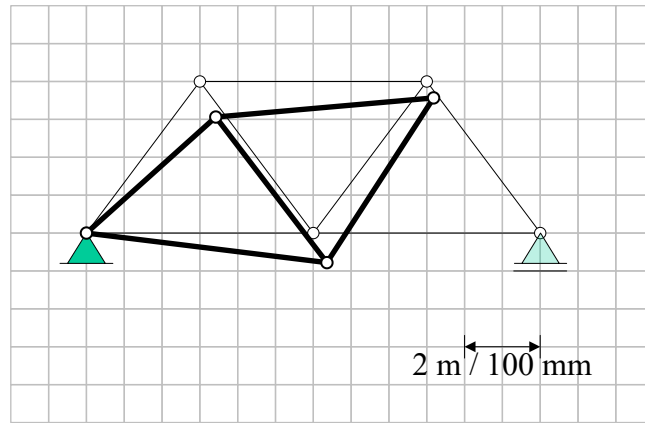


Fig. 96 Deel van vervormde constructie statisch bepaalde constructie ten gevolge van 20 kN.

Bepaal de ontbrekende verplaatsing. Het beginnetje van het williot-diagram is gemaakt:

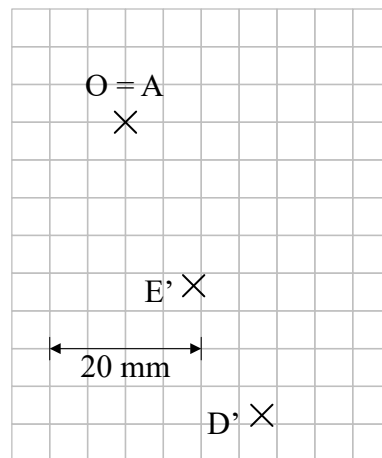


Fig. 97 Incompleet Williot diagram

Heb je de goede resultaten? Rond af op gehele getallen.

Verplaatsing in horizontale richting is mm (→)

Verplaatsing in verticale richting is mm (↓)

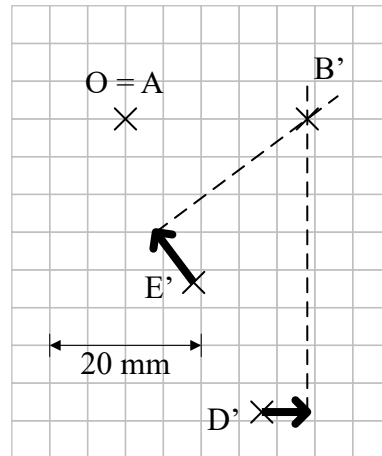


Fig. 98 Williot diagram

Opgave

Nu gaan we het williot-diagram teken ten gevolge van B_h . Daarvoor reken we dus enkel met de volgende verkortingen/verlengingen:

$$\Delta L_{AC} = \Delta L_{CE} = \Delta L_{BE} = \Delta L_{CD} = \Delta L_{DE} = 0$$

$$\Delta L_{AD} = -0.0016 B_h \text{ m}$$

$$\Delta L_{DB} = -0.0016 B_h \text{ m}$$

Bepaal op basis van deze verlengingen en verkortingen alle verplaatsingen met een apart williot-diagram. Neem daarvoor een zelf gekozen lengte aan voor B_h (bijvoorbeeld 4 hokjes komt overeen met $1.6 B_h$). Houd daarnaast eerst AD in de horizontale oriëntatie zodat je die daarna kan terugdraaien.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken en rond af op 1 decimaal. Ga uit van kN als eenheid voor (B_{h}) en van de positieve richtingen naar rechts en naar beneden.

$(w_{\text{A,v}})_{\text{left}}(B_{\text{h}})_{\text{right}} =$ $(\cdot B_{\text{h}})$
 $) \text{ mm}$

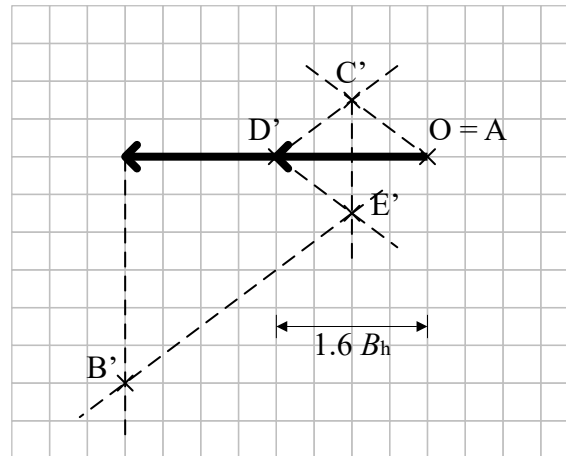


Fig. 99 Williot diagram

Scharnier	Verplaatsing in horizontale richting $\rightarrow$ (mm)	Verplaatsing in verticale richting $\downarrow$ (mm)
A	0	0
C	$-0.8B_h$	$-0.6B_h$
D	$-1.6B_h$	0
E	$-0.8B_h$	$0.6B_h$
B	$-3.2B_h$	$2.4B_h$

Opgave

Als het goed is heb je gevonden dat B $2.4B_h$ verticaal naar beneden verplaatst. Draai onze vastgehouden AD nu zo terug dat B niet meer verticaal verplaatst.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken en rond af op 1 decimaal. Ga uit van kN als eenheid voor (B_{h}) en van de positieve richtingen naar rechts en naar beneden.

De constructie moet $(\varphi =)$ $(\cdot B_{\text{h}})$ rad
($\cup$) teruggedraaid worden (rond dit antwoord af op 4 decimalen)

$$\theta = \frac{2.4B_h}{12000} = 0.0002B_h \text{ rad } \odot, \text{ dit geeft:}$$

Scharnier	Verplaatsing in horizontale richting ten gevolge van rotatie $\rightarrow$ (mm)	Verplaatsing in verticale richting ten gevolge van rotatie $\downarrow$ (mm)
A	0	0
C	$-0.8B_h$	$-0.6B_h$
D	0	$-1.2B_h$
E	$-0.8B_h$	$-1.8B_h$
B	0	$-2.4B_h$

Resulteert in:

Scharnier	Verplaatsing in horizontale richting $\rightarrow$ (mm)	Verplaatsing in verticale richting $\downarrow$ (mm)
A	0	0
C	$-1.6B_h$	$-1.2B_h$
D	$-1.6B_h$	$-1.2B_h$
E	$-1.6B_h$	$-1.2B_h$
B	$-3.2B_h$	0

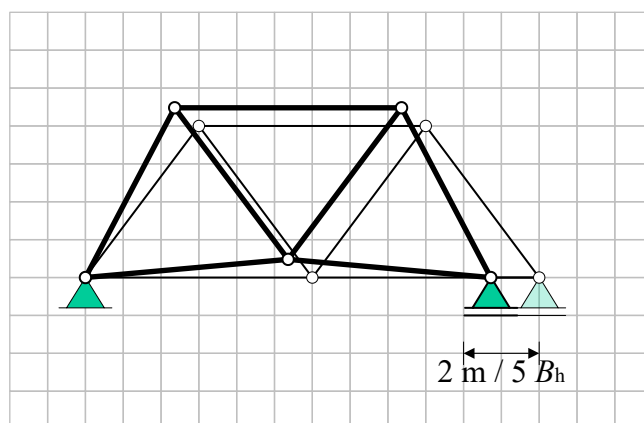


Fig. 100 Constructie in verplaatste stand

Opgave

Wat is nu de ingevulde vormveranderingsvoorwaarde en wat is de oplossing voor $w_{\text{B,h}}$? Gebruik een . als decimaalteken en rond af op 1 decimaal. Ga uit van kN en mm als eenheden en een positieve verplaatsing naar rechts.

$$w_{\text{B,h}} = 0$$

Oplossing



$$w_{\text{B,h}} = 0 \rightarrow 24 - 3.2B_{\text{h}} = 0 \rightarrow B_{\text{h}} = 7.5\text{kN}$$

Opgave

Gebruik je resultaat om de normaalkrachten in alle staven te vinden.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken en rond af op 2 decimalen.

$$N_{\text{AC}} = \text{[input box]} \text{ (kN)}$$

$$N_{\text{AD}} = \text{[input box]} \text{ (kN)}$$

Element	Normaalkracht (kN)
AC	-18.75
CE	-7.5
BE	-6.25
CD	-6.25
DE	6.25
AD	3.75
DB	-3.75

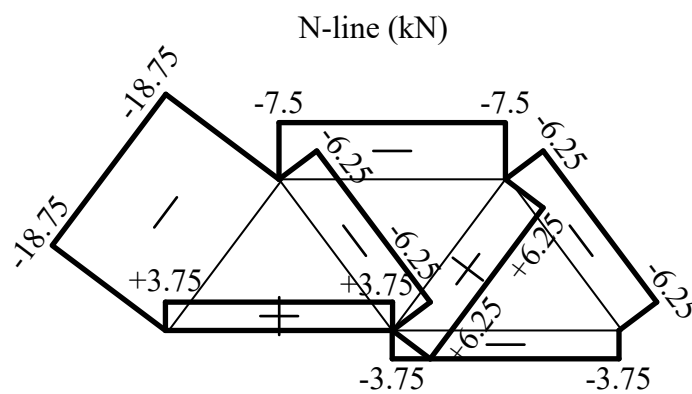


Fig. 101 Normaalkrachtenlijn

Als je alles goed hebt gedaan zou je op de volgende verplaatsingen uit moeten komen

Scharnier	Verplaatsing in horizontale richting → (mm)	Verplaatsing in verticale richting ↓ (mm)
A	0	0
C	9	38
D	6	29.833
E	-3	12.66
B	0	0

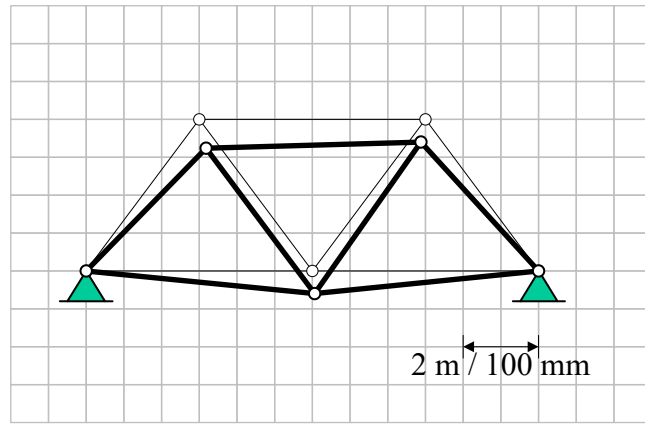


Fig. 102 Vervormde constructie

10 september: Krachtenmethode balken

In deze les leer je hoe je de krachtenmethode kan gebruiken om balken door te rekenen.

Instructie

Inhoud

- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Opdrachten

De krachtenmethode hebben we eerder al behandeld voor onder andere [constructies belast op rek](#). De methode is niet anders voor constructies op buiging en volgt dus dezelfde vier stappen. Bij balken kunnen we het vervormingsgedrag door rek en buiging ook nog eens afzonderlijk bekijken.

Bij de krachtenmethode

‘hoekveranderingsvergelijkingen’ wordt er altijd gekozen voor het toevoegen van scharnieren om de constructie statisch bepaald te maken. Dat heeft als voordeel dat het zeer eenvoudig is om de benodigde rotaties te berekenen met behulp van vergeet-mij-nietjes. Echter, voor niet alle constructies zijn vergeet-mij-nietjes beschikbaar en deze aanpak is niet altijd de makkelijkste aanpak.

We tonen de stappen van de krachtenmethode voor een balk.

“ Attribution

Deze pagina is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/statically_inderminate/force_method/bending.html

Voorbeeld

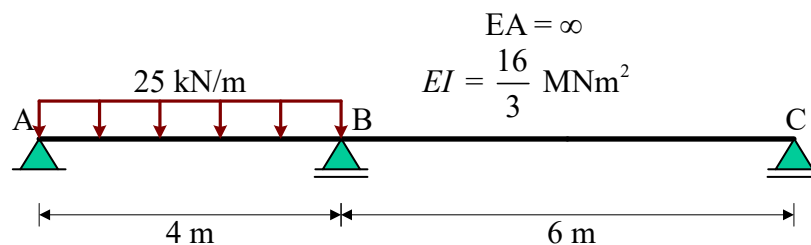


Fig. 103 Voorbeeldconstructie, $EA = \infty$, $EI = \frac{16}{3} \text{ MNm}^2$

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.

Voorbeeld

Voor ons voorbeeld zijn we geïnteresseerd in de verdeling van inwendige krachten, dus moeten we de graad van inwendige statische onbepaaldheid evalueren.

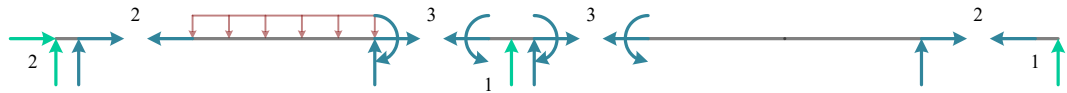


Fig. 104 Er zijn 14 onbekende krachten.

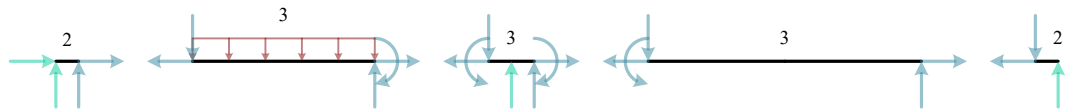


Fig. 105 Er zijn 13 evenwichtsvergelijkingen

Deze constructie is dus 1e orde inwendig statisch onbepaald.

2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij een pendelstaaf, of scharnieren toe te voegen: voeg onbekende statisch onbepaalde krachten en vervormingsvoorwaarden toe voor elke oplegging die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Voorbeeld

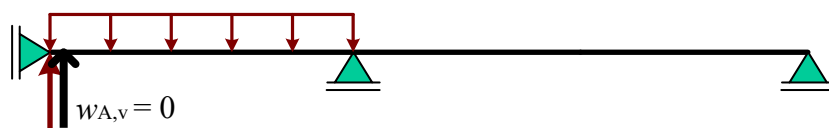
Er zijn veel opties, waarvan de meest voor de hand liggende hieronder worden getoond:

Verticale oplegging bij A loslaten

Verticale oplegging bij B loslaten

Verticale oplegging bij C loslaten

Scharnier toevoegen bij B



De laatste optie wordt gekozen.

3. Los de verplaatsing op in termen van de onbekende onbepaalde krachten zoals je normaal zou doen voor een statisch bepaalde constructie.

Voorbeeld

We hebben de volgende statisch bepaalde constructie gekozen met vormveranderingsvoorwaarde $\varphi_B^{AB}(M_B) = \varphi_B^{BC}(M_B)$:

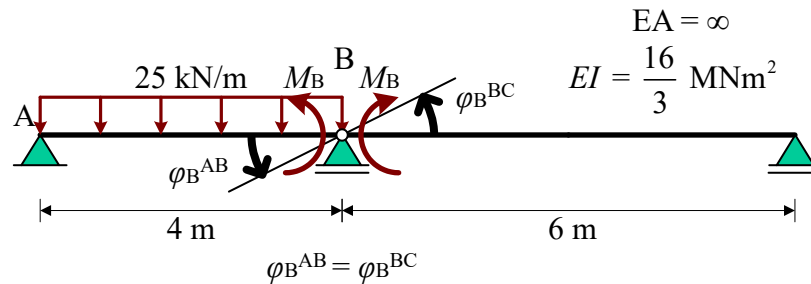


Fig. 106 De statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarde,

$$EA = \infty, EI = \frac{16}{3} \text{ MNm}^2$$

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes kunnen de rotaties direct worden geëvalueerd zonder het evalueren van inwendige krachten:

- $\varphi_B^{AB}(M_B) = \frac{4M_B}{3EI} + \frac{200}{3EI}$
- $\varphi_B^{BC}(M_B) = -\frac{2M_B}{EI}$

4. Gebruik je vormveranderingsvoorwaarden om de statisch onbepaalde krachten op te lossen

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \varphi_B^{AB}(M_B) &= \varphi_B^{BC}(M_B) \\ \frac{4M_B}{3EI} + \frac{200}{3EI} &= -\frac{2M_B}{EI} \\ M_B &= -20 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Meer voorbeelden

Het algemene concept van de krachtenmethode wordt behandeld in hoofdstuk 2.1 terwijl de krachtenmethode voor balken wordt behandeld in hoofdstuk 2.2.1 - 2.2.4 en de meer specifieke 'hoekveranderingsvergelijkingen' in hoofdstuk 3.1 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). De voorbeelden van hoofdstuk 3.1 worden behandeld in [de volgende les](#).

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 6](#) gepresenteerd in collegevorm van 0:04:20 tot 0:30:00.

Opdrachten

- Opgaves 2.1 - 2.14, 2.23, 2.25 en 2.30 in hoofdstuk 2.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).
- Opgaves 3.1 - 3.10, 3.16 - 3.21 in hoofdstuk 3.4 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).

Antwoorden zijn beschikbaar op [deze website voor hoofdstuk 2](#) en [hier voor hoofdstuk 3](#).

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:

Attribution

Deze pagina is aangepast van
https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/statically_inderminate_force_method/bending.html

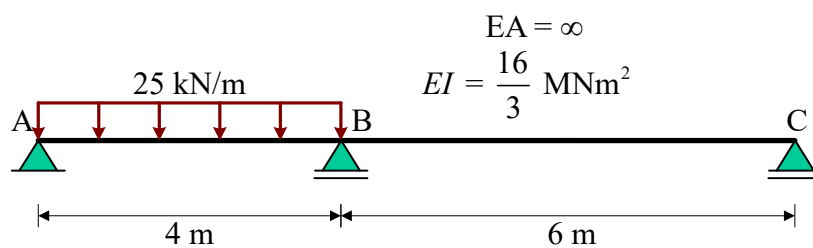


Fig. 107 Constructie, $EA = \infty$, $EI = \frac{16}{3} \text{ MNm}^2$

Bepaal de krachtsverdeling en verplaatsingen.

Opgave

Ga uit van het volgende statisch bepaalde systeem:

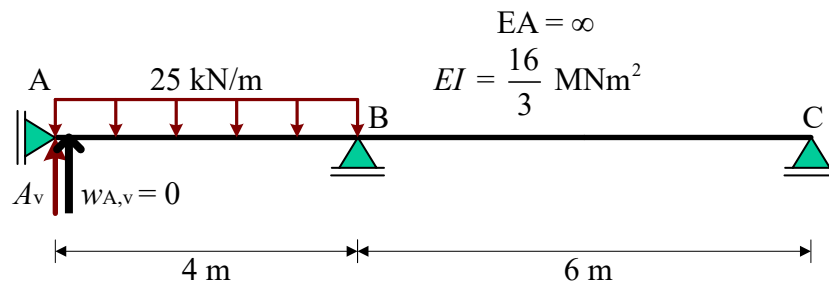


Fig. 108 Statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarde,

$$EA = \infty, EI = \frac{16}{3} \text{ MNm}^2$$

Los de krachtsverdeling en verplaatsingen van deze constructie op als functie van A_v

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken. Ga uit van kN, kNm, m en rad voor de eenheden.

$M_B(A_v) =$ $\cdot A_v +$ (rond af op gehele getallen, trek aan de onderkant is positief)

$\varphi_B(A_v) =$ $\cdot A_v +$ (rond af op 4 decimalen, rechtsom is positief)

$w_A(A_v) =$ $\cdot A_v +$ (rond af op 2 decimalen, omhoog is positief)

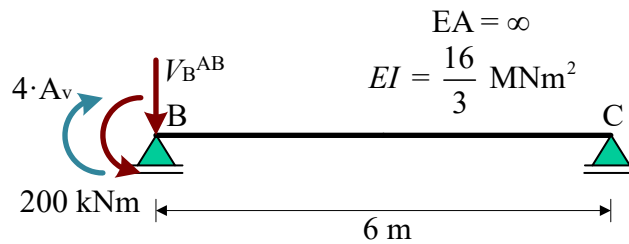


Fig. 109 Vrijlichaamsschema van deel BC

$$M_B(A_v) = 4 \cdot A_v - 200$$

De hoekverdraaiing bij B, φ_B , kan worden bepaald uit M_B met behulp van het vergeet-mij-nietje voor een ligger op twee steunpunten belast door een koppel.

$$\varphi_B(A_v) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(4 \cdot A_v - 200) \cdot 6}{\frac{16}{3} \cdot 10^3} = 0.0015 \cdot A_v - 0.0750$$

De zakking in A, w_A , kan worden bepaald door deel AB bij B schuin in te klemmen met hoek φ_B en de zakkingen ten gevolge van de verdeelde belasting en A_v in rekening te brengen. Hiervoor worden het vergeet-mij-nietje voor een uitkragende ligger met een verdeelde belasting en het vergeet-mij-nietje voor een uitkragende ligger belast door een puntlast gebruikt:

$$w_A(A_v) = \varphi_B \cdot 4 - \frac{25 \cdot 4^4}{8 \cdot \frac{16}{3} \cdot 10^3} + \frac{A_v \cdot 4^3}{3 \cdot \frac{16}{3} \cdot 10^3} = 0.01 \cdot A_v - 0.45$$

Opgave

Los de vormveranderingsvoorwaarde op om A_v te vinden.

Heb je de goede resultaten? Rond af op gehele getallen.

$A_v =$ kN ($\uparrow$)

Oplossing



De vormveranderingsvoorwaarde is: $w_A = 0.01 \cdot A_v - 0.45 = 0$.

Hieruit volgt $A_v = 45\text{kN}$

Opgave

Los nu de andere oplegreacties op en bepaal de momenten en verplaatsingen.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.

$B_v =$ kN (↑, rond af op 1 decimaal)

$C_v =$ kN (↑, rond af op 1 decimaal)

$M_B =$ kNm (trek aan de onderkant is positief, rond af op gehele getallen)

$M_{\text{halverwege AB}} =$ kNm (trek aan de onderkant is positief, rond af op gehele getallen)

$w_{\text{halverwege AB}} =$ mm (naar beneden is positief, rond af op gehele getallen)

Nu A_v bekend is kunnen de andere oplegreacties worden opgelost, B_v en C_v worden omhoog positief aangenomen. De gebruikte vergelijkingen zijn:

$$\sum T|_C = -45 \cdot 10 + 25 \cdot 4 \cdot 8 - B_v \cdot 6 = 0 \rightarrow B_v = 58.3\text{kN}$$

$$\sum F_v = 45 - 4 \cdot 25 + 58.3 + C_v = 0 \rightarrow C_v = -3.3\text{kN}$$

M_B kan worden bepaald uit de momentensom om B van deel AB, dit geeft:

$M_B = -20\text{kNm}$. $M_{\text{halverwege AB}}$ kan op vergelijkbare wijze worden bepaald uit de momentensom om het punt halverwege AB: $M_{\text{halverwege AB}} = 40\text{kNm}$.

De zakking halverwege AB, $w_{\text{halverwege AB}}$, kan op verschillende manieren worden gevonden. Hier wordt deze bepaald met behulp van het vergeet-mij-nietje voor een ligger op twee steunpunten belast door een koppel en het vergeet-mij-nietje voor een ligger op twee steunpunten met een verdeelde belasting.

$$w_{\text{halverwege AB}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{25 \cdot 4^4}{\frac{16}{3}} - \frac{1}{16} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{\frac{16}{3}} = 12\text{mm}$$

De zakking halverwege BC kan worden bepaald met behulp van het vergeet-mij-nietje voor een ligger op twee steunpunten belast door een koppel:

$$w_{\text{halverwege BC}} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{\frac{16}{3}} = -8\text{mm}$$

Begeleide oefening 2

Inhoud

- Statisch bepaald systeem 1
- Statisch bepaald systeem 2
- Krachtsverdeling en verplaatsingen statisch onbepaald systeem

Gegeven is de volgende constructie

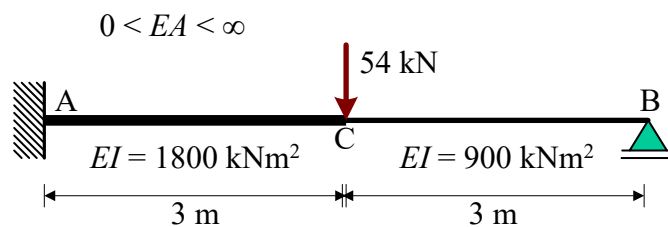


Fig. 110 Constructie, $EI_{AC} = 1800 \text{ kNm}^2$, $EI_{BC} = 900 \text{ kNm}^2$

Bepaal de krachtsverdeling en verplaatsingen.

Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

  Reuse

Oplossing

De constructie is 1ste/de graads inwendig statisch onbepaald

Opgave

Welke van de volgende is/zijn **geen** handig optie als je hoekveranderingsvergelijkingen wilt toepassen?

☐ Weghalen verticale oplegging bij A

☐ Toevoegen scharnier bij A

☐ Toevoegen scharnier bij C

☐ Weghalen verticale oplegging bij B

☒ Controleer

H-P

 Reuse

Oplossing

- Weghalen verticale oplegging bij A
 - Inderdaad, er is geen vergeet-me-nietje die voor dat statisch bepaalde systeem de verplaatsingen geeft
- Toevoegen scharnier bij A
 - Inderdaad, er is geen vergeet-me-nietje die voor dat statisch bepaalde systeem de verplaatsingen geeft
- Toevoegen scharnier bij C
 - Er zijn wel degelijk vergeet-me-nietjes voor deze situatie, maar het rechter deel zal echter ook nog roteren rondom B
- Weghalen verticale oplegging bij B

Statisch bepaald systeem 1

Opgave

Ga uit van het volgende statisch bepaalde systeem:

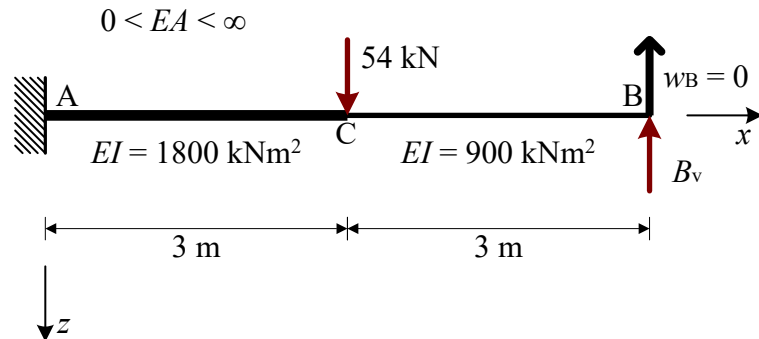


Fig. 111 Statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarde,

$$EI_{AC} = 1800 \text{ kNm}^2, EI_{BC} = 900 \text{ kNm}^2$$

Los de krachtsverdeling en verplaatsingen van deze constructie uit als functie van B_v

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken. Ga uit van kN, kNm, rad en m voor de eenheden en herleidt de positieve richting aan de hand van het assenstelsel

$$V_C^{AC}(B_v) = \boxed{} \cdot B_v + \boxed{} \text{ (rond af op gehele getallen)}$$

$$M_C(B_v) = \boxed{} \cdot B_v + \boxed{} \text{ (rond af op gehele getallen)}$$

$$V_B^{BC}(B_v) = \boxed{} \cdot B_v + \boxed{} \text{ (rond af op gehele getallen)}$$

$$w_C(B_v) = \boxed{} \cdot B_v + \boxed{} \text{ (rond af op 4 decimalen)}$$

$$\varphi_C(B_v) = \boxed{} \cdot B_v + \boxed{} \text{ (rond af op 4 decimalen)}$$

$$w_B(B_v) = \boxed{} \cdot B_v + \boxed{} \text{ (rond af op 3 decimalen)}$$

Met behulp van het gegeven vrijlichaamsschema kunnen de dwarskracht net links van C, het moment in C en de dwarskracht net links van B worden bepaald als functie van B_v :

$$V_C^{AC}(B_v) = -1 \cdot B_v + 54$$

$$M_C(B_v) = -3 \cdot B_v$$

$$V_B^{BC}(B_v) = -1 \cdot B_v$$

De zakking, w_C , en rotatie, φ_C , in C kunnen worden gevonden door de kracht B_v te verplaatsen van B naar C met toevoeging van een moment, zie het onderstaande vrijlichaamsschema:

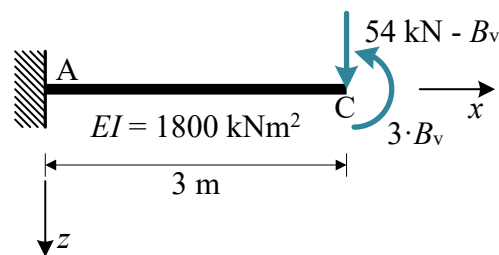


Fig. 112 Vrijlichaamsschema van deel AC

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes voor een uitkragende ligger belast door een kracht en een koppel wordt gevonden:

$$w_C(B_v) = \frac{(54 - B_v) \cdot 3^3}{3 \cdot 1800} - \frac{3 \cdot B_v \cdot 3^2}{2 \cdot 1800} = -0.0125 \cdot B_v + 0.27$$

$$\varphi_C(B_v) = \frac{(54 - B_v) \cdot 3^2}{2 \cdot 1800} - \frac{3 \cdot B_v \cdot 3}{1800} = -0.0075 \cdot B_v + 0.135$$

De zakking in B, w_B , is dan gelijk aan:

$$w_B(B_v) = w_C + \varphi_C \cdot 3 - \frac{B_v \cdot 3^3}{3 \cdot 900} = -0.045 \cdot B_v + 0.675$$

Opgave

Los je vormveranderingsvoorwaarde op om B_v te vinden.

Heb je de goede resultaten? Rond af op gehele getallen.

$B_v =$ kN ($\uparrow$)



 Reuse

Oplossing



De vormveranderingsvoorwaarde is: $w_B = -0.045 \cdot B_v + 0.675 = 0$.

Hieruit volgt dat $B_v = 15\text{kN}$

Statisch bepaald systeem 2

Opgave

Ga nu uit van het volgende statisch bepaalde systeem:

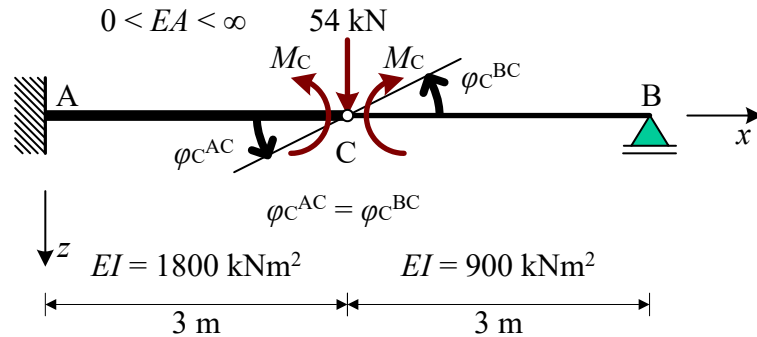


Fig. 113 Statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarde,
 $EI_{AC} = 1800 \text{ kNm}^2$, $EI_{BC} = 900 \text{ kNm}^2$

Los de krachtsverdeling en verplaatsingen van deze constructie uit als functie van M_C

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken. Ga uit van kN, kNm, rad en m voor de eenheden en herleidt de positieve richting aan de hand van het assenstelsel

$B_v(M_C) =$ $\cdot M_C +$ (rond af op 2 decimalen)

$V_C^{AC}(M_C) =$ $\cdot M_C +$ (rond af op 2 decimalen)

$\varphi_C^{AC}(M_C) =$ $\cdot M_C +$ (rond af op 4 decimalen)

$w_C(M_C) =$ $\cdot M_C +$ (rond af op 5 decimalen)

$\varphi_C^{BC}(M_C) =$ $\cdot M_C +$ (rond af op 4 decimalen)

De uitdrukkingen voor B_v en V_C^{AC} kunnen worden afgeleid uit evenwicht van het deel BC.

$$\sum T|_C^{CB} = -3 \cdot B_v - M_C = 0 \rightarrow B_v = -\frac{1}{3} \cdot M_C$$

$$V_C^{AC} = B_v + 54 = -\frac{1}{3} \cdot M_C + 54$$

De rotatie net links van C, φ_C^{AC} , en de zakking in C w_C kunnen worden bepaald met de vergeet-mij-nietjes voor een uitkragende ligger belast door een koppel en door een puntlast, zie het onderstaande vrijlichaamsschema:

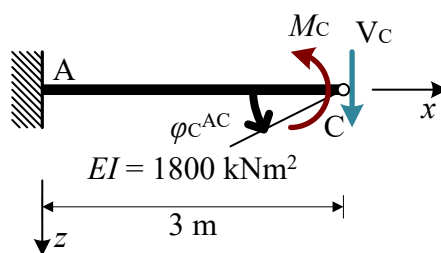


Fig. 114 Vrijlichaamsschema van deel AC

$$\varphi_C^{AC}(M_C) = -\frac{M_C \cdot 3}{1800} + \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot M_C + 54\right) \cdot 3^2}{2 \cdot 1800} = -0.0025 \cdot M_C + 0.135$$

$$w_C(M_C) = -\frac{M_C \cdot 3^2}{2 \cdot 1800} + \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot M_C + 54\right) \cdot 3^3}{3 \cdot 1800} = -0.00417 \cdot M_C + 0.27$$

De rotatie net rechts van C, φ_C^{BC} , wordt veroorzaakt door buiging van deel BC ten gevolge van M_C en door de zakking in C, w_C . De rotatie ten gevolge van de buiging kan worden bepaald met behulp van het vergeet-mij-nietje voor een ligger op twee steunpunten belast door een koppel.

$$\varphi_C^{BC}(M_C) = -\frac{w_C}{3} + \frac{M_C \cdot 3}{3 \cdot 900} = 0.0025 \cdot M_C - 0.09$$

Opgave

Los je vormveranderingsvoorwaarde op om M_C te vinden.

Heb je de goede resultaten? Rond af op gehele getallen.

$M_C =$ kNm

  Reuse

Oplossing

De vormveranderingsvoorwaarde is:

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{BC} \rightarrow -0.0025 \cdot M_C + 0.135 = 0.0025 \cdot M_C - 0.09.$$

Hieruit volgt $M_C = 45 \text{ kNm}$.

Krachtsverdeling en verplaatsingen

statisch onbepaald systeem

Opgave

Los nu de volledige krachtsverdeling en verplaatsingen op met de resultaten van een of beide van je statisch onbepaalde systemen.

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken.
Herleidt de positieve richting aan de hand van het assenstelsel

$$A_v = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op gehele getallen)}$$

$$A_m = \text{[input box]} \text{ kNm (rond af op gehele getallen)}$$

$$B_v = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op gehele getallen)}$$

$$M_A = \text{[input box]} \text{ kNm (rond af op gehele getallen)}$$

$$M_C = \text{[input box]} \text{ kNm (rond af op gehele getallen)}$$

$$V_{AC} = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op gehele getallen)}$$

$$V_{CB} = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op gehele getallen)}$$

$$w_C = \text{[input box]} \text{ mm (rond af op 1 decimaal)}$$

$$\varphi_C = \text{[input box]} \text{ rad (rond af op 4 decimalen)}$$

De onbekenden kunnen worden opgelost met verticaal- en momentenevenwicht van de hele constructie en met behulp van de eerder opgestelde vergelijkingen.

$$A_v = -39\text{kN}$$

$$A_m = 72\text{kNm}$$

$$B_v = -15\text{kN}$$

$$M_A = -72\text{kNm}$$

$$M_C = 45\text{kNm}$$

$$V_{AC} = 39\text{kN}$$

$$V_{CB} = -15\text{kN}$$

$$w_C = 82.5\text{mm}$$

$$\varphi_C = 0.0225\text{rad}$$

11 september: Krachtenmethode raamwerken

In deze les leer je hoe je de krachtenmethode kan gebruiken om raamwerken door te rekenen.

Instructie

Inhoud

- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Opdrachten

De krachtenmethode hebben we eerder al behandeld voor onder andere [constructies belast op rek](#) en [balken](#). Voor raamwerken is de procedure niet anders, behalve dat we het gedrag van rek en buiging niet altijd kunnen splitsen.

We behandelen de toepassing op raamwerkconstructies met het volgende voorbeeld.

Attribution

Deze pagina is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/statically_inderminate/force_method/bending2.html

Voorbeeld

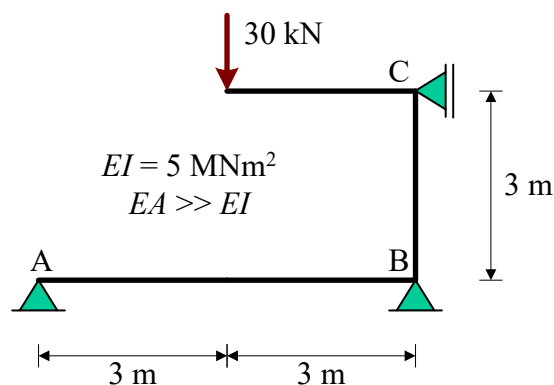


Fig. 115 Voorbeeldconstructie, $EI = 5 \text{ MNm}^2$, $EA \gg EI$

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.

Voorbeeld

Voor ons voorbeeld zijn we geïnteresseerd in de verdeling van inwendige krachten, dus moeten we de graad van inwendige statische onbepaaldheid evalueren.

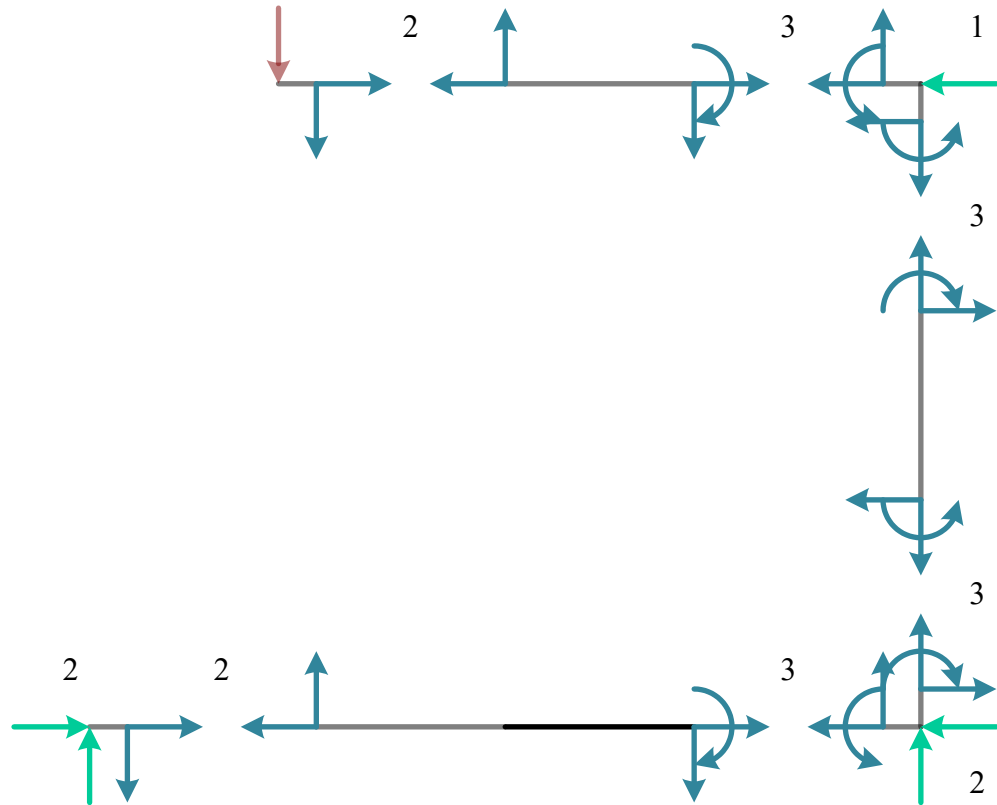


Fig. 116 Er zijn 21 onbekende krachten.

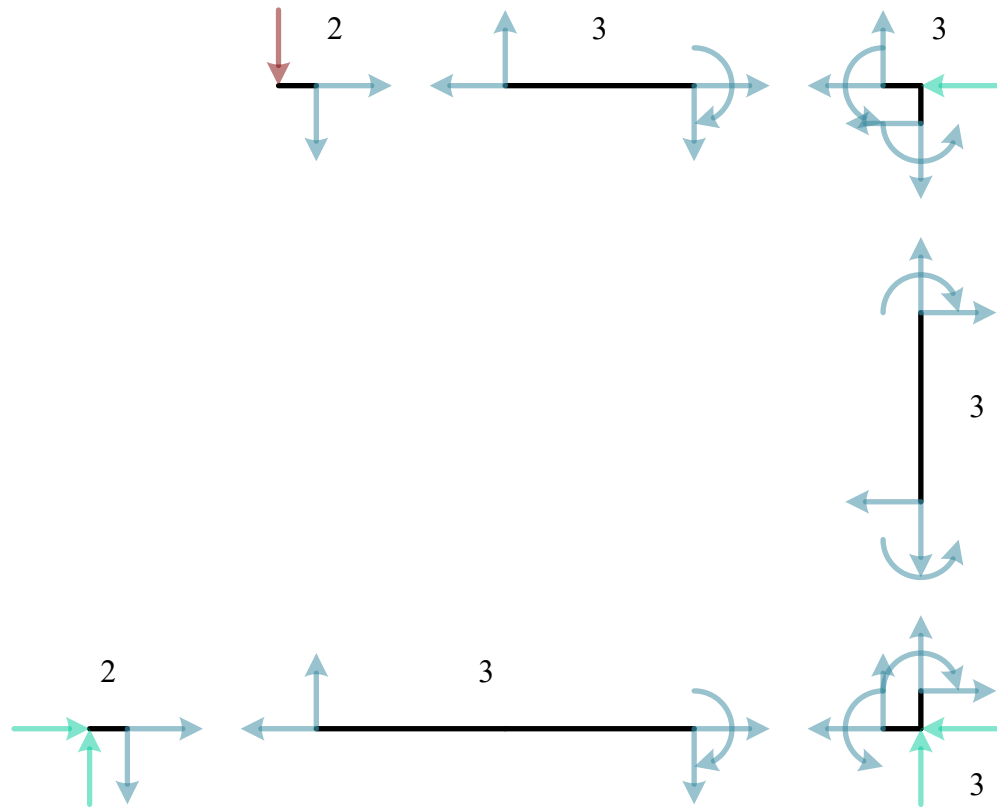


Fig. 117 Er zijn 19 evenwichtsvergelijkingen

Deze constructie is dus 2e orde inwendig statisch onbepaald.

2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij een pendelstaaf, of scharnieren toe te voegen: voeg onbekende statisch onbepaalde krachten en vervormingsvoorwaarden toe voor elke oplegging die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Voorbeeld

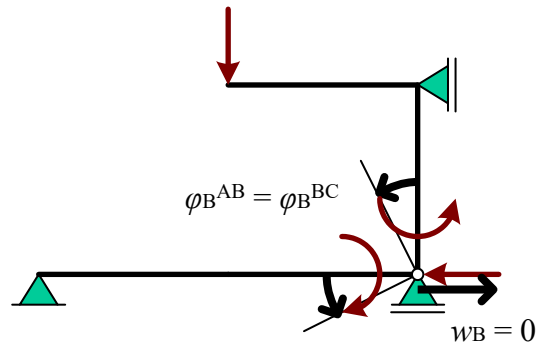
Er zijn veel opties, waarvan een aantal mogelijke opties:

Horizontale oplegging bij B loslaten en scharnier toevoegen in B

Horizontale oplegging bij B en C loslaten

Horizontale en verticale oplegging bij A loslaten

Horizontale oplegging bij A loslaten en scharnier toevoegen in B



De derde optie wordt gekozen.

3. Los de verplaatsing op in termen van de onbekende onbepaalde krachten zoals je normaal zou doen voor een statisch bepaalde constructie.

Voorbeeld

We hebben de volgende statisch bepaalde constructie gekozen met vormveranderingsvoorwaardes $w_{A,v}(A_v, A_h) = 0$ en $w_{A,h}(A_v, A_h) = 0$:

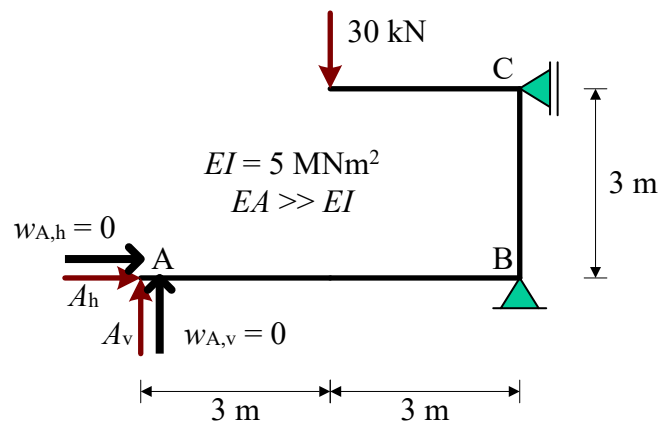


Fig. 118 De statisch bepaalde constructie met vormveranderingsvoorwaarde, $EI = 5 \text{ MNm}^2$, $EA \gg EI$

De krachtsverdeling kan worden gevonden met evenwicht:

- $M_C = 90 \text{ kNm}$ ($\curvearrowright$)
- $M_B = 6A_v$ ($\curvearrowright$)

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes kunnen de rotaties nu worden geëvalueerd:

- $\varphi_B = \frac{90 \cdot 3}{6 \cdot 5000} + \frac{6A_v \cdot 3}{3 \cdot 5000} = 0.0012A_v + 0.009$ ($\curvearrowright$)
- $w_A = \varphi_B \cdot 6 + \frac{A_v \cdot 6^3}{3 \cdot 5000} = 0.0216A_v + 0.054$

Voor de horizontale verplaatsing geldt: $w_{A,h} = \frac{6A_h}{EA}$

- Gebruik je vormveranderingsvoorwaarden om de statisch onbepaalde krachten op te lossen

Voorbeeld

$$\begin{aligned}w_{A,v}(A_v, A_h) &= 0 \\0.0216A_v + 0.054 &= 0 \\A_v &= -2.5 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{A,h}(A_v, A_h) &= 0 \\ \frac{6A_h}{EA} &= 0 \\ A_h &= 0 \text{ kN}\end{aligned}$$

Meer voorbeelden

Het algemene concept van de krachtenmethode wordt behandeld in hoofdstuk 2.1 terwijl de krachtenmethode voor raamwerken wordt behandeld in hoofdstuk 2.2.5 - 2.2.7 en de meer specifieke 'hoekveranderingsvergelijkingen' in hoofdstuk 3.1 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).

Wanneer het boek de 'momentenvlakstelling' noemt in voorbeeld 2.2.6 en 2.2.7, kun je de verplaatsingen ook vinden met behulp van vergeet-mij-nietjes. De methode met verplaatsbare knopen ('hoekveranderingsvergelijkingen met verplaatsbare knopen') die in het verleden werd onderwezen wordt niet meer behandeld.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 7](#) gepresenteerd in collegevorm van 0:07:50 - 0:31:50.

Opdrachten

- Opgaves 2.15 - 2.22, 2.24, 2.26 - 2.29, 2.42 - 2.48 in hoofdstuk 2.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).
- Opgaves 3.11 - 3.15, 3.22, 3.23, 3.25 - 3.33/1, 3.35, 3.36, 3.45, 3.47-1, 3.47-2, 3.47-4, 3.50, 3.51 in hoofdstuk 3.4 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).

Antwoorden zijn beschikbaar op [deze website voor hoofdstuk 2](#) en [hier voor hoofdstuk 3](#).

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende 1ste graads statisch onbepaalde constructie:

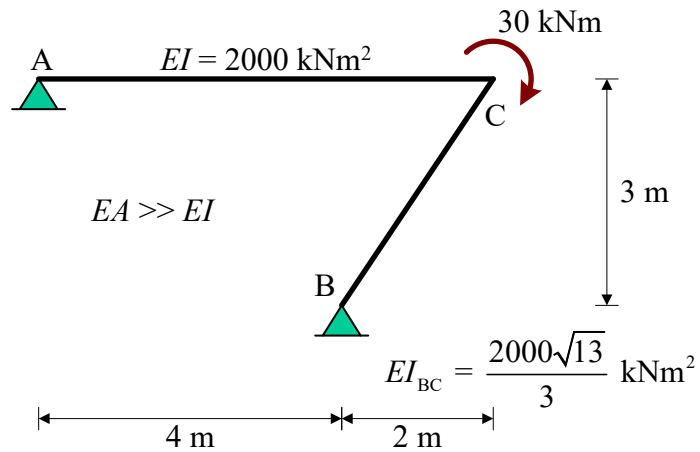


Fig. 119 Constructie, $EI_{AC} = 20000 \text{ kNm}^2$, $EI_{BC} = \frac{2000\sqrt{13}}{3} \text{ kNm}^2$

Opgave

Gegeven zijn de volgende statisch bepaalde systeem.

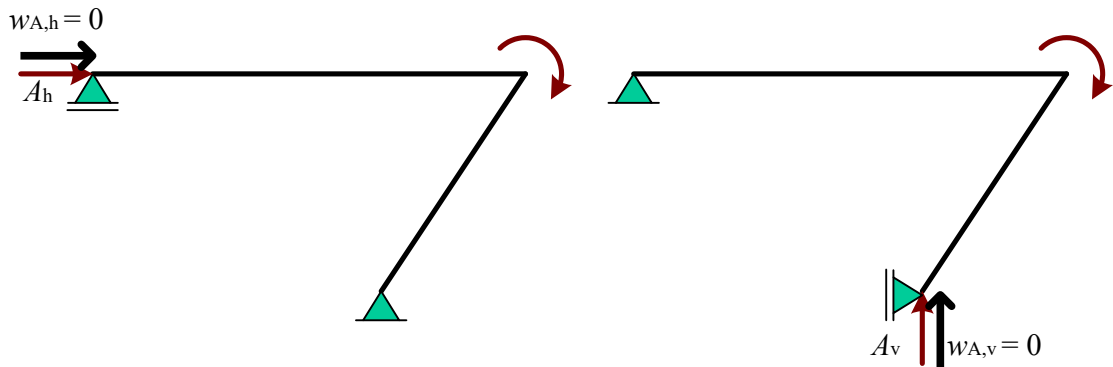


Fig. 120 Twee statisch bepaalde systemen

Waarom zijn dit lastige constructies om op te lossen?

- ☐ Met het koppel is het niet mogelijk verplaatsingen te berekenen.
- ☐ Er zijn geen vergeet-me-nietjes voor deze situatie.
- ☐ Het is überhaupt niet mogelijk verplaatsingen te berekenen.

  Reuse  Embed

Oplossing

- Met het koppel is het niet mogelijk verplaatsingen te berekenen.
- Er zijn geen vergeet-me-nietjes voor deze situatie.
 - Juist, de vorm van deze constructie als geheel én delen ervan zijn geen vergeet-me-nietjes.
- Het is überhaupt niet mogelijk verplaatsingen te berekenen.

Opgave

Laten we de constructie oplossing met hoekveranderingsvergelijkingen, door een scharnier toe te voegen bij hoek C. Daar werkt echter ook een uitwendig koppel. Het moment net links en onder C is dus niet gelijk aan elkaar. Als we het heel netjes zouden doen zouden we het scharnier net links of net onder het scharnier kunnen aanbrengen. Laten we de situatie bekijken met het scharnier net links van C.

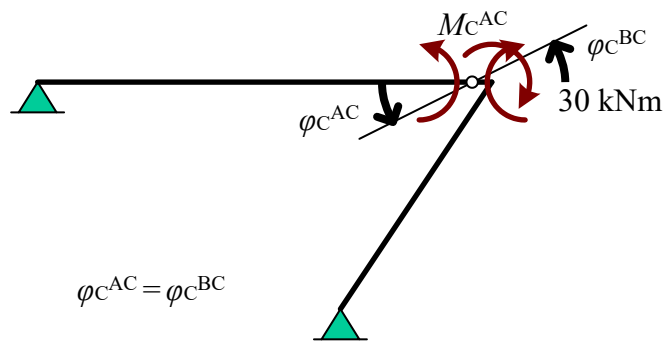


Fig. 121 Statisch bepaald systeem met scharnier net links van C

Gegeven is het vrijlichaamsschema van knoop C:

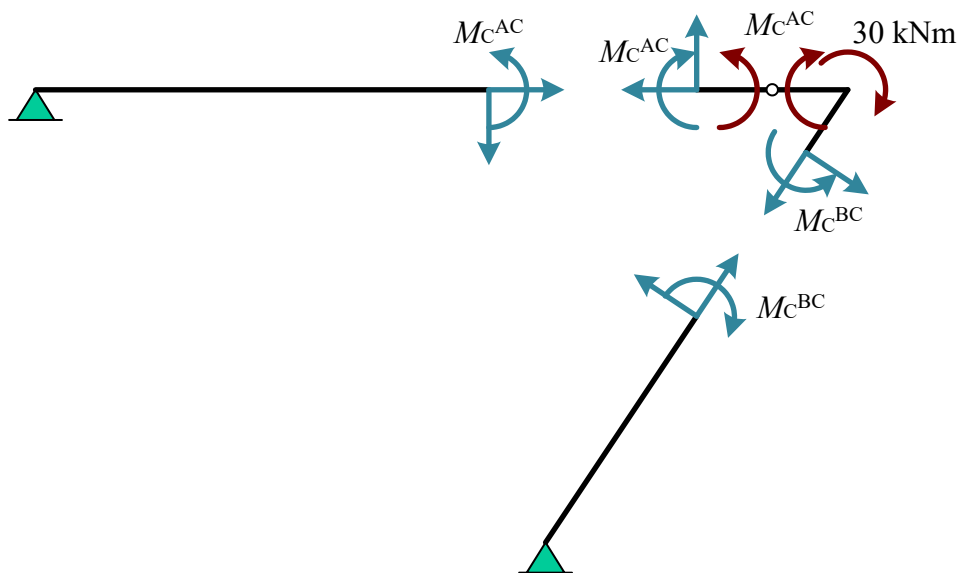


Fig. 122 Vrijlichaamsschema van knoop C vergroot weergegeven

Wat is het moment (M_C^{BC}) als functie van (M_C^{AC}) ? Ga uit van kNm voor de eenheden.

$(M_C^{BC}) \text{ left(} M_C^{AC} \text{ right) = }$

$(\cdot M_C^{AC} +)$



Reuse

<> Embed

Oplossing

$$M_C^{BC} (M_C^{AC}) = M_C^{AC} + 30.$$

Om het gedoe met dat scharnier net links/net onder C te voorkomen kunnen we het scharnier ook direct in C plaatsen. Deze aanpak wordt aangeraden.

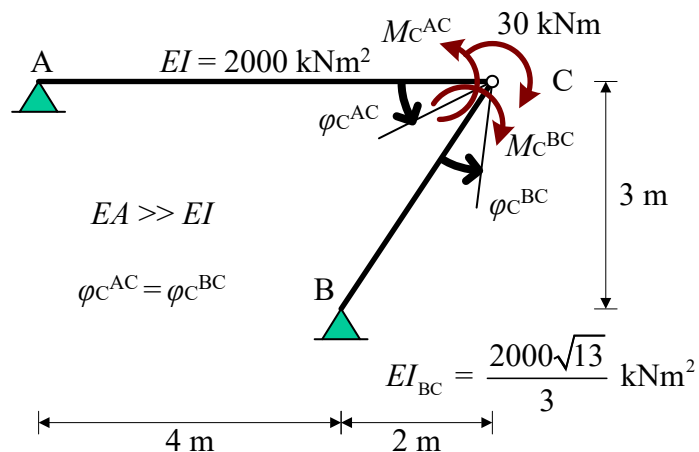


Fig. 123 Statisch bepaald systeem met scharnier in C,

$$EI_{AC} = 20000 \text{ kNm}^2, EI_{BC} = \frac{2000\sqrt{13}}{3} \text{ kNm}^2$$

Nadeel van deze aanpak is dat de locatie van het scharnier niet meer match met de momenten in het vrijlichaamsschema. Echter is de situatie praktisch ongewijzigd. Merk op dat de richtingen van de momenten in het vrijlichaamsschema van C omgedraaid zijn ten opzichte van de momenten in het statisch bepaalde systeem:

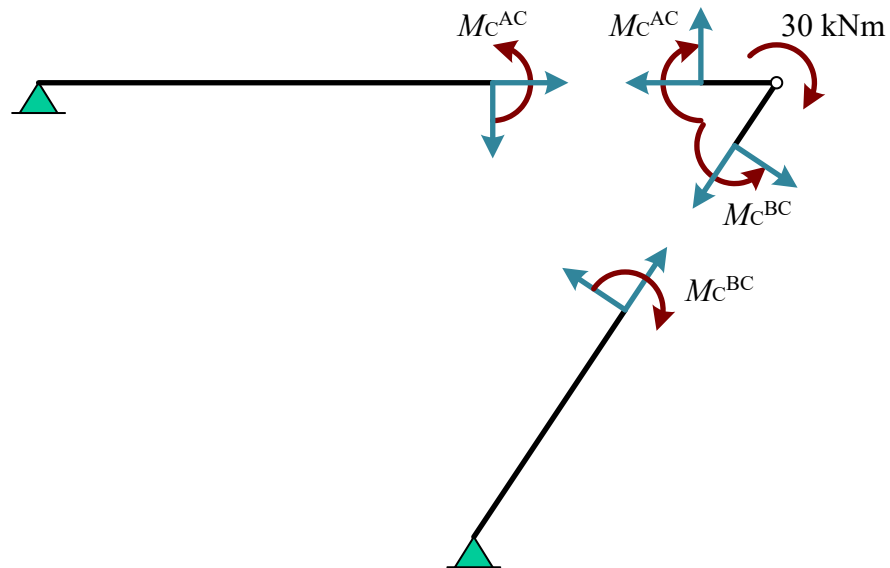


Fig. 124 Vrijlichaamsschema van knoop C vergroot weergegeven

Opgave

Ga uit van [het statisch bepaalde systeem met het scharnier in C](#)?

Hoeveel statisch onbepaalden krachten/momenten zijn er?

☐ 0

☐ 1

☐ 2

  Reuse

Oplossing

Er is 1 statisch onbepaald moment, omdat de twee verschillende momenten van elkaar afhankelijk zijn door het momentenevenwicht van knoop C.

Opgave

Los de verplaatsingen van deze constructie uit als functie van M_C^{AC} en M_C^{BC}

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken. Ga uit van kN, kNm, rad en m voor de eenheden.

$$\varphi_C^{AC} \left(M_C^{AC} \right) = \left(\right) \cdot M_C^{AC} + \left(\right)$$

(rond af op 3 decimalen)

$$\varphi_C^{BC} \left(M_C^{BC} \right) = \left(\right) \cdot M_C^{BC} + \left(\right)$$

(rond af op 4 decimalen)

Oplossing

De uitdrukkingen voor de hoekverdraaiingen kunnen worden gevonden met behulp van het vergeet-mij-nietje voor een ligger op twee steunpunten belast door een koppel.

$$\varphi_C^{AC} \left(M_C^{AC} \right) = \frac{M_C^{AC} \cdot 6}{3 \cdot 2000} = 0.001 \cdot M_C^{AC}$$

$$\varphi_C^{BC} \left(M_C^{BC} \right) = -\frac{M_C^{BC} \cdot \sqrt{13}}{3 \cdot \frac{2000 \cdot \sqrt{13}}{3}} = -0.0005 \cdot M_C^{BC}$$

Opgave

Los je vormveranderingsvoorwaarde op samen met je eerder opgestelde evenwichtsvergelijking om M_C^{AC} en M_C^{BC} te vinden.

Heb je de goede resultaten? Rond af op gehele getallen.

$(M_{\text{C}}^{\text{AC}} =)$ kNm

$(M_{\text{C}}^{\text{BC}} =)$ kNm



 Reuse

Oplossing

De vormveranderingsvoorwaarde is:

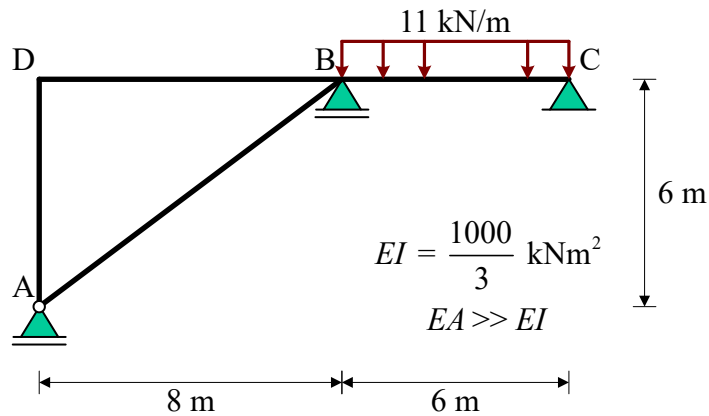
$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{BC} \rightarrow 0.001 \cdot M_C^{AC} = -0.0005 \cdot M_C^{BC}$$

Hieruit en uit de eerder opgestelde momentenevenwichtsvergelijking volgt:

$$M_C^{AC} = -10\text{kNm} \text{ en } M_C^{BC} = 20\text{kNm}.$$

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:



Attribution

Deze pagina is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_6/session_1/intro.html

Fig. 125 Constructie, $EI = \frac{1000}{3} \text{ kNm}^2$, $EA \gg EI$

Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

H-P > Reuse

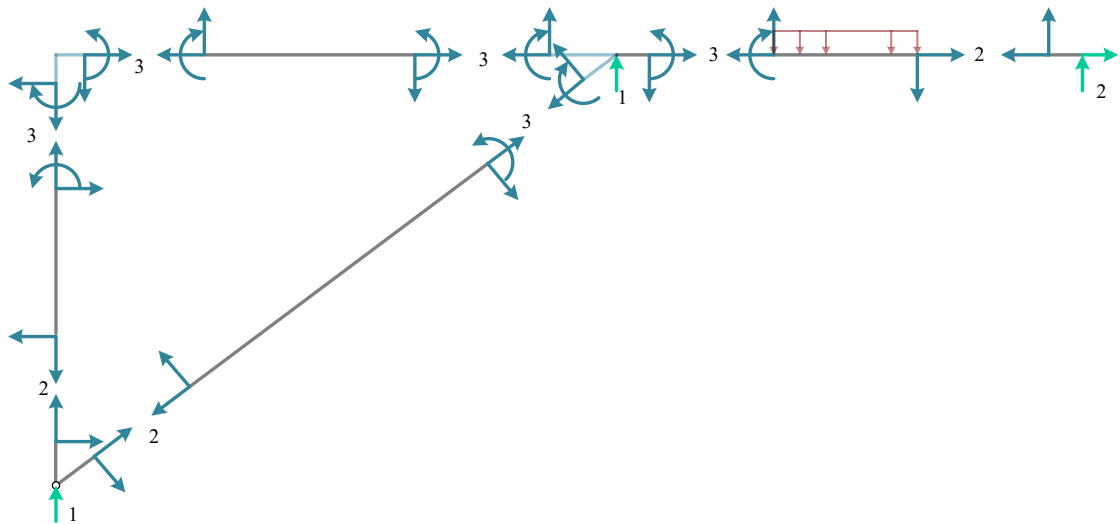


Fig. 126 Er zijn 25 onbekende krachten

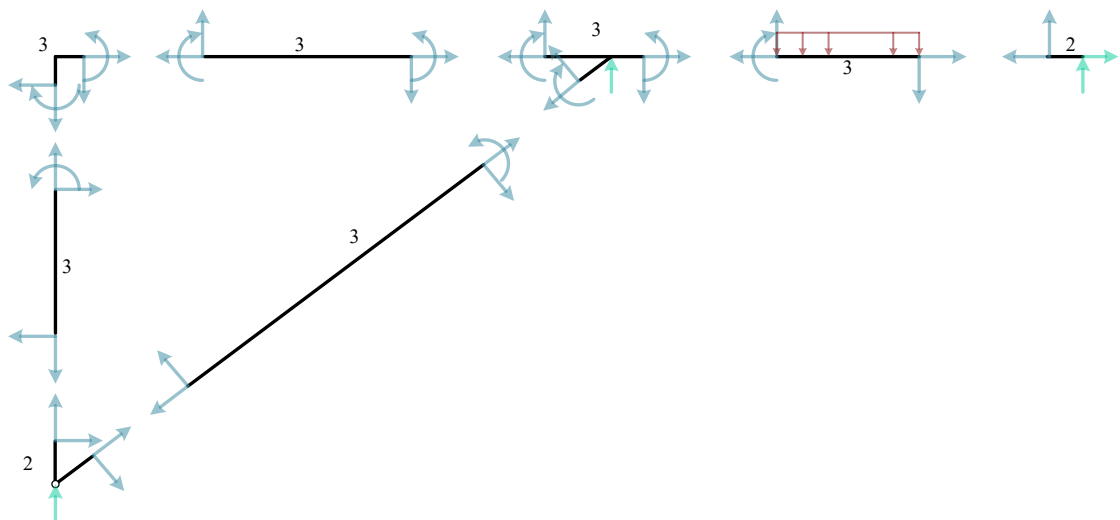
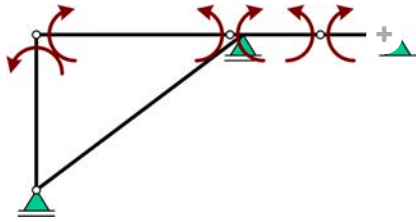


Fig. 127 Er zijn 22 evenwichtsvergelijkingen

Dus de constructie is 3de graads statisch onbepaald.

Opgave

Er zijn een aantal opties gegeven voor mogelijke statisch bepaalde systemen. De vormveranderingsvoorwaarden zijn niet getoond



Deze constructie is een geldig statisch bepaald systeem om de constructie op te lossen.

☐ Juist

☐ Onjuist



 Reuse

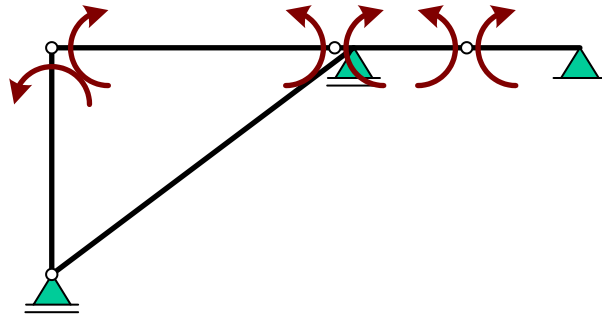


Fig. 128 Juist

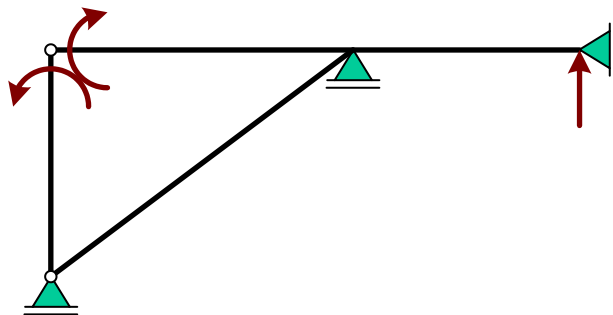


Fig. 129 Onjuist

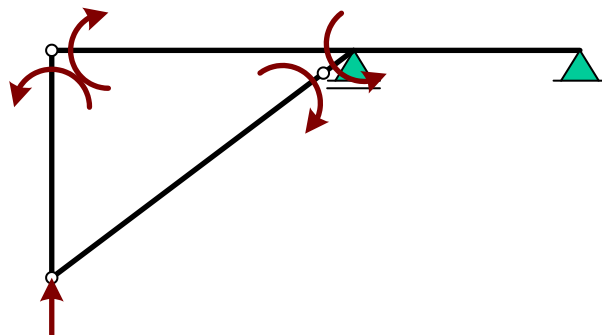


Fig. 130 Juist

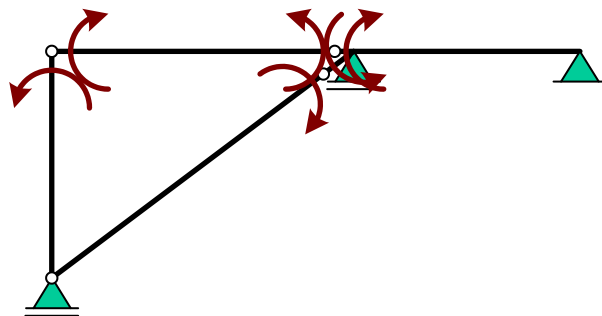


Fig. 131 Juist

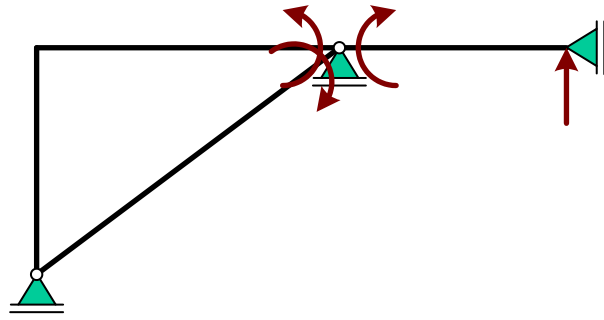


Fig. 132 Onjuist

Opgave

Er wordt gekozen voor het volgende statisch bepaalde systeem inclusief vormveranderingsvoorwaarden:

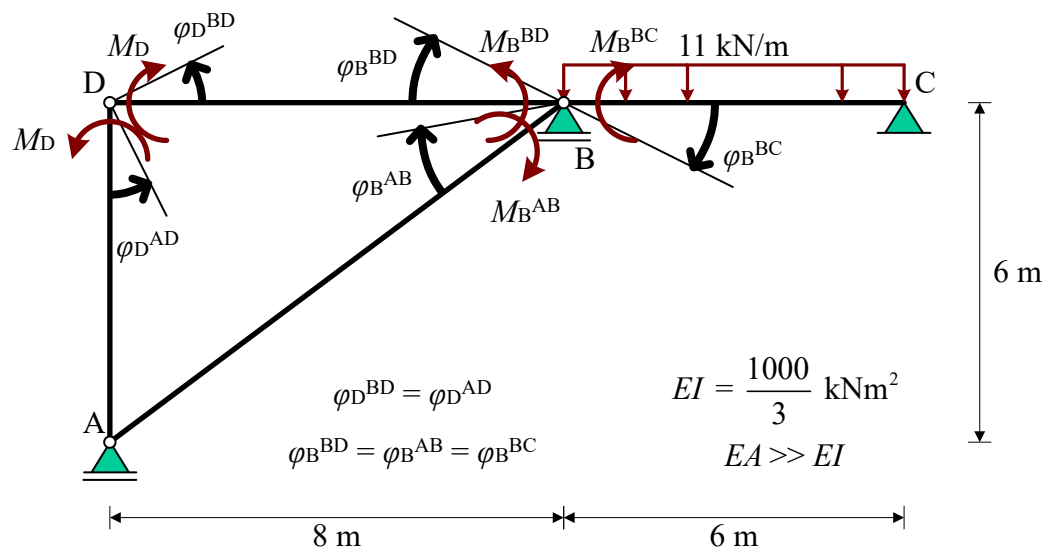


Fig. 133 Statisch bepaald systeem, $EI = \frac{1000}{3} \text{ kNm}^2$, $EA \gg EI$

Er is hier wederom een scharnier in een knoop geplaatst zoals ook in [het statisch bepaalde systeem van oefening 1](#). Bepaal de rotaties als functie van M_D , M_B^{BD} , M_B^{AB} en M_B^{BC} .

Heb je de goede resultaten? Gebruik een . als decimaalteken en rond af op 3 decimalen. Ga uit van kN, kNm, rad en m voor de eenheden.

$$\varphi_D^{\mathrm{AD}}(M_D) = \frac{1}{2} M_D + \frac{1}{2} M_D$$

$$\begin{aligned} & \left(\varphi_{\{D\}}^{\{BD\}} \left(M_{\{D\}}, M_{\{B\}}^{\{BD\}} \right) \right) = \\ & \left(\quad \right) \left(\cdot M_{\{D\}} + \right) \left(\quad \right) \left(\cdot \right. \\ & \left. M_{\{B\}}^{\{BD\}} + \right) \left(\quad \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\varphi_{\{B\}^{\{BD\}}} \left(M_{\{D\}}, M_{\{B\}^{\{BD\}}} \right) = \right. \\ & \left. \left(\cdot M_{\{D\}} + \right) \left(\cdot \right. \right. \\ & \left. \left. M_{\{B\}^{\{BD\}}} + \right) \right) \end{aligned}$$

$$\varphi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}} \left(M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}} \right) = \left(\dot{M}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}} + \right)$$

$$\varphi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}} \left(M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}} \right) = \left(\dot{M}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}} + \right)$$

De uitdrukkingen voor de hoekverdraaiingen worden gevonden met behulp van de vergeet-mij-nietjes voor een ligger op twee steunpunten belast door een koppel en door een verdeelde belasting, de positieve richtingen worden genomen zoals in de figuur aangegeven.

$$\varphi_D^{AD}(M_D) = \frac{M_D \cdot 6}{3 \cdot \frac{1000}{3}} = 0.006 \cdot M_D$$

$$\varphi_D^{BD}(M_D, M_B^{BD}) = -\frac{M_D \cdot 8}{3 \cdot \frac{1000}{3}} - \frac{M_B^{BD} \cdot 8}{6 \cdot \frac{1000}{3}} = -0.008 \cdot M_D - 0.004 \cdot M_B^{BD}$$

$$\varphi_B^{BD}(M_D, M_B^{BD}) = -\frac{M_D \cdot 8}{6 \cdot \frac{1000}{3}} - \frac{M_B^{BD} \cdot 8}{3 \cdot \frac{1000}{3}} = -0.004 \cdot M_D - 0.008 \cdot M_B^{BD}$$

$$\varphi_B^{AB}(M_B^{AB}) = \frac{M_B^{AB} \cdot 10}{3 \cdot \frac{1000}{3}} = 0.01 \cdot M_B^{AB}$$

$$\varphi_B^{BC}(M_B^{BC}) = \frac{M_B^{BC} \cdot 6}{3 \cdot \frac{1000}{3}} + \frac{11 \cdot 6^3}{24 \cdot \frac{1000}{3}} = 0.006 \cdot M_B^{BC} + 0.297$$

Opgave

Er mist nog een vergelijking om de vier onbekenden (waarvan 3 statisch onbepaalden) op te lossen. Wat is die vergelijking?

Heb je de goede resultaten?

$\backslash (M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BD}} \backslash) \quad \backslash (M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}} \backslash) \quad \backslash (M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}} = 0 \backslash)$

  Reuse

Oplossing

$$M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BD}} - M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}} - M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}} = 0$$

Opgave

Los met de vormveranderingsvoorwaarden en evenwichtsvergelijking de onbekenden M_{D} , $M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BD}}$, $M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}}$ en $M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}}$ op.

Heb je de goede resultaten? Rond af op 1 decimaal

$\backslash (M_{\mathrm{D}} = \backslash) \quad \text{kNm}$

$\backslash (M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BD}} = \backslash) \quad \text{kNm}$

$\backslash (M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{AB}} = \backslash) \quad \text{kNm}$

$\backslash (M_{\mathrm{B}}^{\mathrm{BC}} = \backslash) \quad \text{kNm}$

  Reuse

Er zijn 4 onbekenden en 4 vergelijkingen. De vergelijkingen bestaan uit de momentenevenwichtsvergelijking uit de vorige deelvraag en de onderstaande vormveranderingsvoorwaarden:

$$\varphi_B^{BC} = \varphi_B^{AB} \rightarrow 0.01 \cdot M_B^{AB} = 0.006 \cdot M_B^{BC} + 0.297$$

$$\varphi_B^{AB} = \varphi_B^{BD} \rightarrow 0.01 \cdot M_B^{AB} = -0.004 \cdot M_D - 0.008 \cdot M_B^{BD}$$

$$\varphi_D^{AD} = \varphi_D^{BD} \rightarrow 0.006 \cdot M_D = -0.008 \cdot M_D - 0.004 \cdot M_B^{BD}$$

Hieruit volgt:

$$M_D = 5\text{kNm}$$

$$M_B^{BD} = -17.5\text{kNm}$$

$$M_B^{AB} = 12\text{kNm}$$

$$M_B^{BC} = -29.5\text{kNm}$$

Opgave

Los de volledige krachtsverdeling op.

Heb je de goede resultaten? Rond af op 2 decimalen

$M_{\text{A}} =$ kNm

$M_{\text{halverwege BC}} =$ kNm (∪)

$N_{\text{BD}} \approx$ kN

$B_v \approx$ kN

  Reuse

Oplossing

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

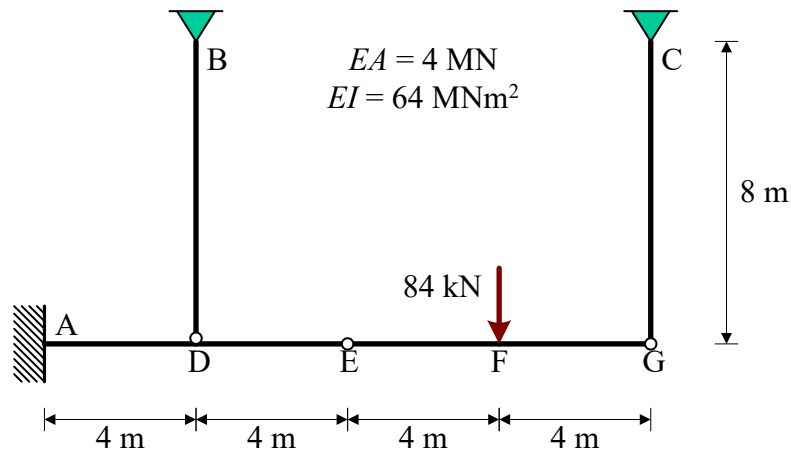
$$M_{\text{halverwege BC}} = 34.75 \text{ kNm} (\cup)$$

$$N_{\text{BD}} \approx 0.83 \text{ kN}$$

$$B_v \approx 41.60 \text{ kN}$$

15 september: TOZ

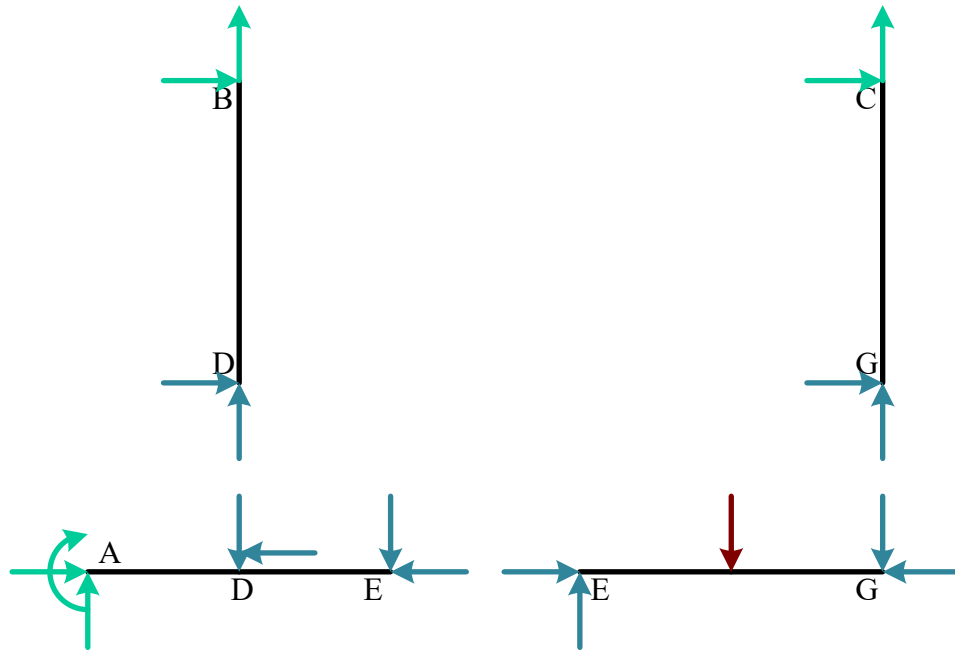
Gegeven is de volgende enkelvoudig statisch onbepaalde constructie:



Opgave

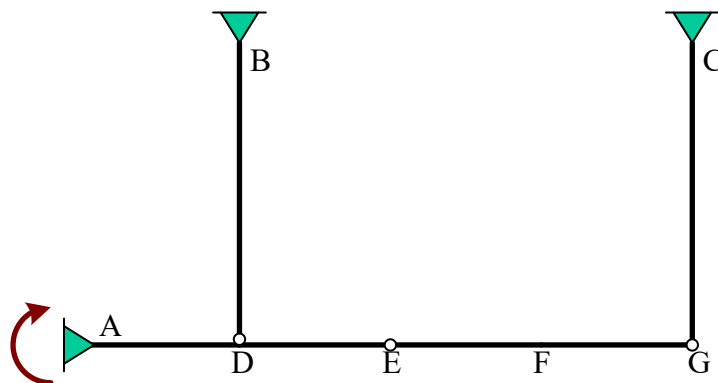
Welke van de volgende opties is geschikt om met de krachtenmethode de constructie door te rekenen?

- De inklemming bij A vervangen door een scharnier met een statisch onbepaald moment, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde
- Staaf BD splitsen en een statisch onbepaald normaalkrachtenpaar toevoegen, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde
- Staaf CG splitsen en een statisch onbepaald normaalkrachtenpaar toevoegen, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde
- Scharnier toevoegen tussen A en D met een statisch onbepaald momentenpaar, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde
- Scharnier toevoegen tussen D en E met een statisch onbepaald momentenpaar, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde
- Scharnier toevoegen tussen E en G met een statisch onbepaald momentenpaar, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde
- Scharnieroplegging bij C vervangen door een verticaal rolscharnier met een statisch onbepaald verticale kracht, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



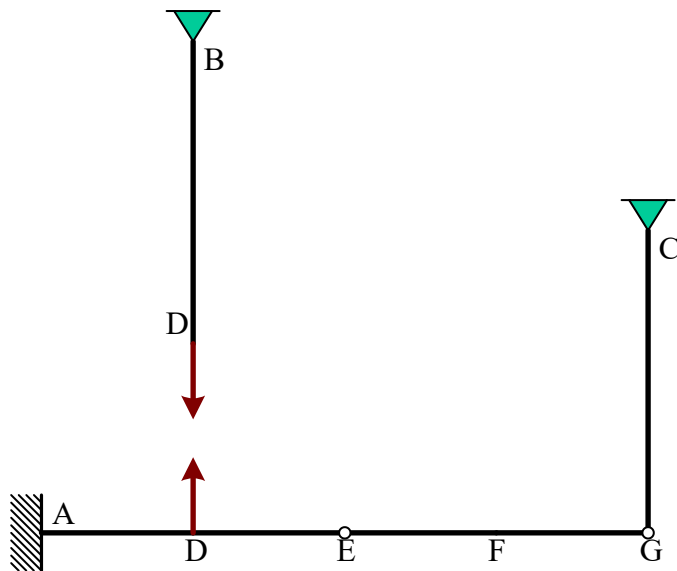
Er zijn 7 onbekende oplegreacties en 6 onbekende verbindingskrachten. Dat geeft een uitwendige graad van statisch onbepaaldheid van 1. Omdat deze constructie niet gesloten is, is de inwendige graad van statisch onbepaaldheid ook gelijk aan 1.

- De inklemming bij A vervangen door een scharnier met een statisch onbepaald moment, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



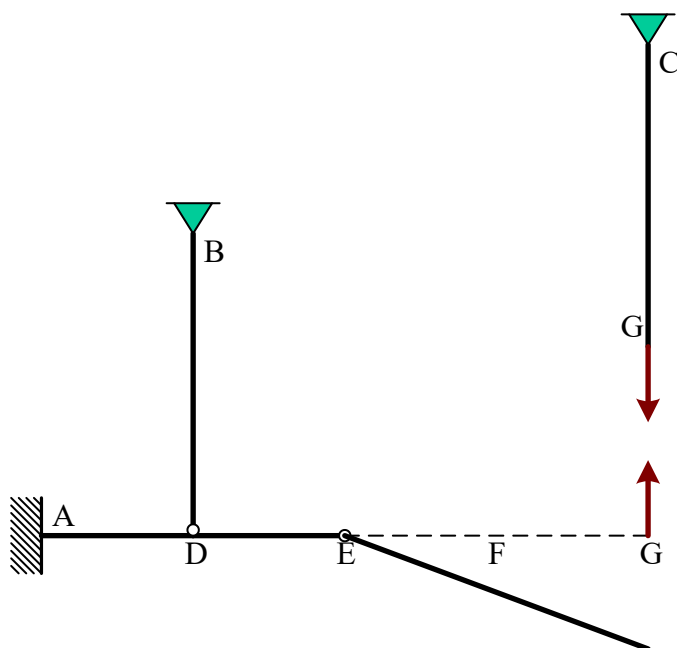
Deze constructie is geen mechanisme dus een geschikte statisch bepaalde constructie.

- Staaf BD splitsen en een statisch onbepaald normaalkrachtenpaar toevoegen, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



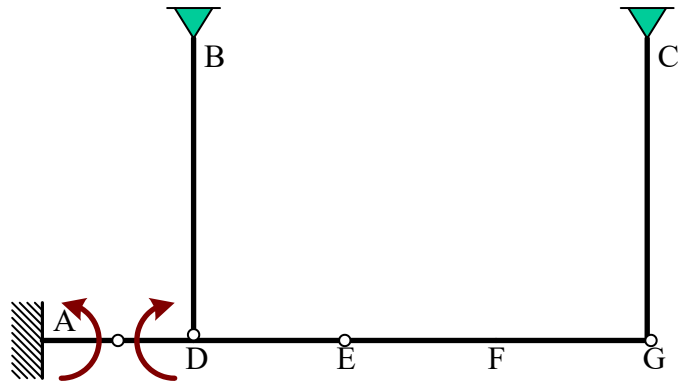
Deze constructie is geen mechanisme dus een geschikte statisch bepaalde constructie.

- Staaf CG splitsen en een statisch onbepaald normaalkrachtenpaar toevoegen, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



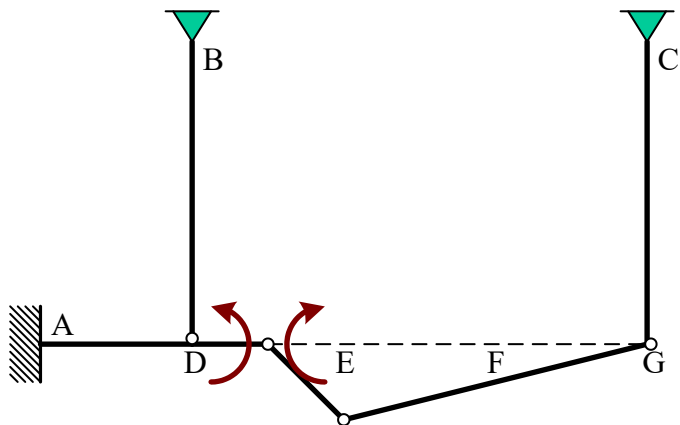
Deze constructie is een mechanisme dus geen geschikte statisch bepaalde constructie.

- Scharnier toevoegen tussen A en D met een statisch onbepaald momentenpaar, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



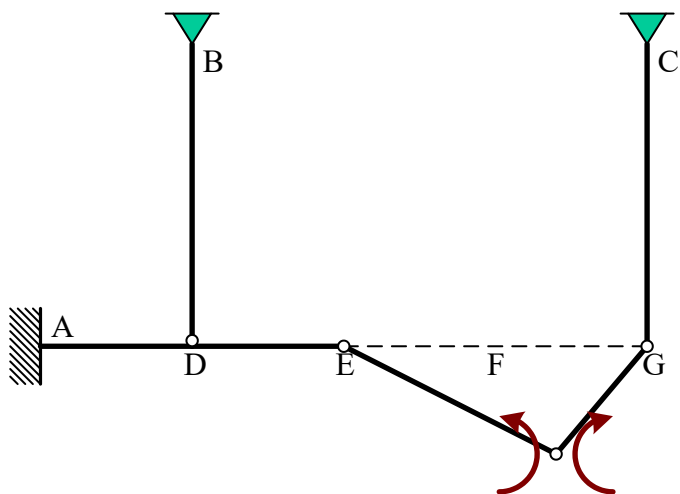
Deze constructie is geen mechanisme dus een geschikte statisch bepaalde constructie.

- Scharnier toevoegen tussen D en E met een statisch onbepaald momentenpaar, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



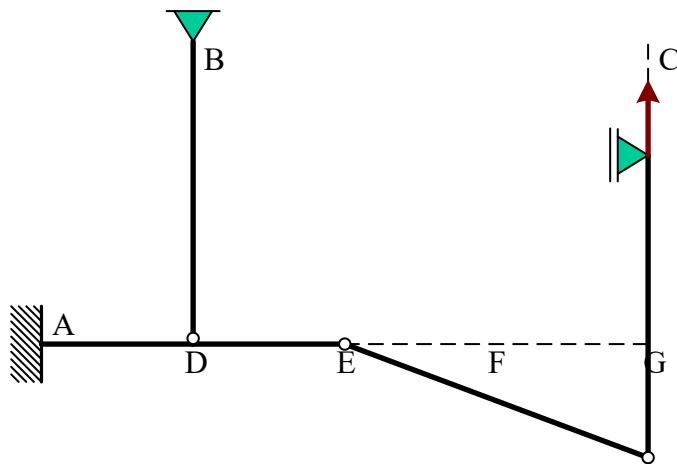
Deze constructie is een mechanisme dus geen geschikte statisch bepaalde constructie.

- Scharnier toevoegen tussen E en G met een statisch onbepaald momentenpaar, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



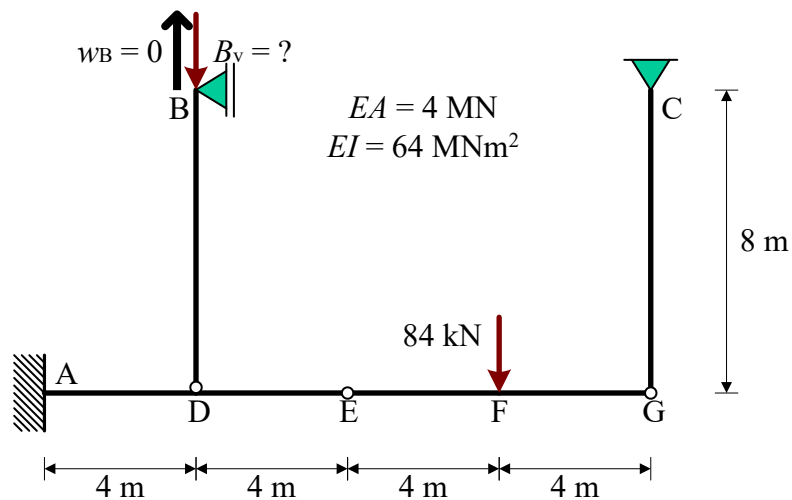
Deze constructie is een mechanisme dus geen geschikte statisch bepaalde constructie.

- Scharnieroplegging bij C vervangen door een verticaal rolscharnier met een statisch onbepaald verticale kracht, met bijpassende vormveranderingsvoorwaarde



Deze constructie is een mechanisme dus geen geschikte statisch bepaalde constructie.

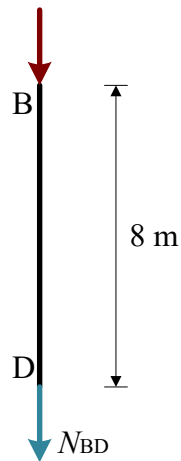
Gekozen wordt voor het volgende statisch bepaalde systeem:



Opgave

Wat is de normaalkracht in BD als functie van B_v ?

Oplossing

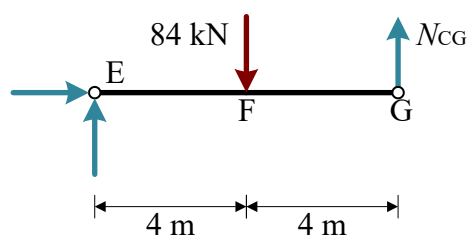


$$\begin{aligned}\sum F_v^{BD} &= 0 \\ B_v + N_{BD} &= 0 \\ N_{BD} &= -B_v\end{aligned}$$

Opgave

Wat is de normaalkracht in CG als functie van B_v ?

Oplossing

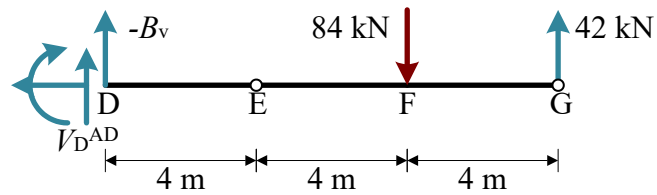


$$\begin{aligned}\sum T|_E^{EG} &= 0 \\ 84 \cdot 4 - N_{CG} \cdot 8 &= 0 \\ N_{CG} &= 42 \text{ kN}\end{aligned}$$

Opgave

Wat is de dwarskracht net links van D als functie van B_v is gelijk aan?

Oplossing

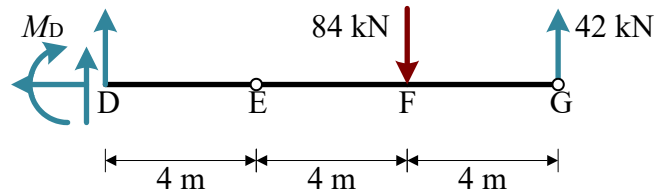


$$\begin{aligned}\sum F_v^{DG} &= 0 \\ V_D^{AD} - B_v - 84 + 42 &= 0 \\ V_D^{AD} &= B_v + 42\end{aligned}$$

Opgave

Wat is het moment in D als functie van B_v is gelijk aan?

Oplossing



$$\begin{aligned}\sum T|_D^{DG} &= 0 \\ M_D + 84 \cdot 8 - 42 \cdot 12 &= 0 \\ M_D &= -168 \text{ kNm}\end{aligned}$$

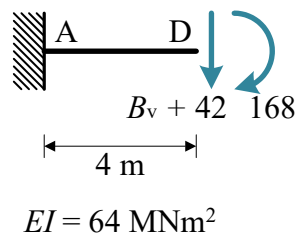
Opgave

Wat is de zakking in D als functie van B_v ?

Oplossing



De verplaatsing in D volgt uit een vergeet-me-nietje:



$$w_D = \frac{168 \cdot 4^2}{2 \cdot 64000} + \frac{(B_v + 42) \cdot 4^3}{3 \cdot 64000}$$

$$w_D = \frac{1}{3000} \cdot B_v + 0.035$$

$$w_D \approx 0.000333 \cdot B_v + 0.035$$

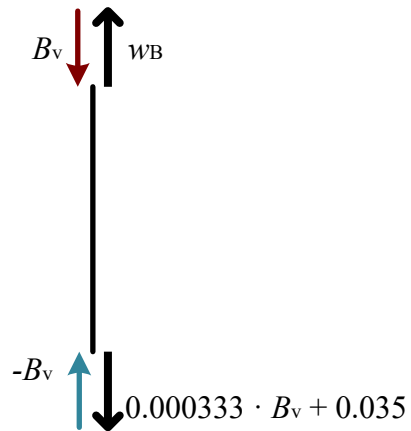
Opgave

Wat is B_v ?

Oplossing



De verplaatsing van B kan worden gevonden met de verlenging van een staaf door axiale krachten:



$$w_B = -w_D - \Delta L_{BD}$$

$$w_B = -w_D - \frac{-B_v \cdot 8}{4000}$$

$$w_B = \frac{7}{3000} \cdot B_v + 0.035$$

$$w_B \approx 0.00233 \cdot B_v + 0.035$$

De vormveranderingsvoorwaarde geeft:

$$w_B = 0$$

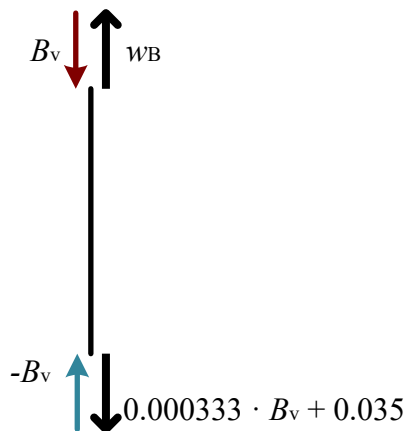
$$\frac{7}{3000} \cdot B_v + 0.035 = 0$$

$$B_v = -15 \text{ kN}$$

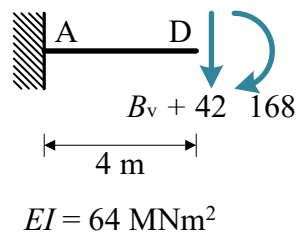
Opgave

Wat is w_E ?

De verplaatsing van B kan worden gevonden met de verlenging van een staaf door axiale krachten:



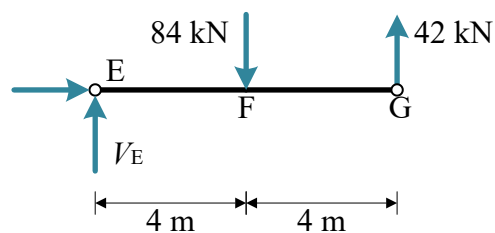
De verplaatsing van D volgt uit de eerder opgestelde formule. De rotatie van D volgt uit hetzelfde vergeet-me-nietje:



$$\varphi_D = \frac{168 \cdot 4}{64000} + \frac{(-15 + 42) \cdot 4^2}{2 \cdot 64000}$$

$$\varphi_D = 0.03 \text{ rad}$$

De dwarskracht in DE in E is gelijk aan:

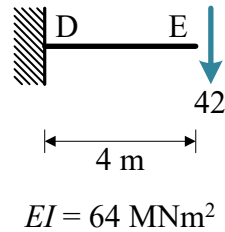


$$\sum F_v^{EG} = 0$$

$$V_E - 84 + 42 = 0$$

$$V_E = 42 \text{ kN}$$

De verplaatsing van E volgt dan uit de verplaatsing van D, het kwispeleffect door de rotatie van D en de extra verplaatsing door de dwarskracht in E:



$$w_E = w_D + \varphi_D \cdot 4 + \frac{42 \cdot 4^3}{3 \cdot 64000}$$

$$w_E = 0.0995 \text{ m}$$

18 september: Temperatuursinvloeden

In deze les leer je hoe je omgaat met temperatuursinvloeden in statisch onbepaalde constructies.

Instructie

Inhoud

- Afleiding en meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Oefeningen

Elementen verlengen onder uniforme belasting met een extra rek van $\epsilon^T = \alpha \Delta T$, waarbij α de lineaire uitzettingscoëfficiënt is. Wanneer een temperatuurverandering over de hoogte van een element optreedt, verlengen de vezels individueel, wat leidt tot buiging van elementen met een extra kromming van $\kappa^T = \alpha \frac{\Delta T}{h}$, waarbij h de hoogte van het element is. In statisch bepaalde constructies leidt dit tot extra spanningsloze rekken (en dus vervormingen) zonder invloed op de krachtverdeling, omdat de krachtverdeling onafhankelijk is van de vervormingen.

De vervorming kan worden gevonden door de spanningsloze rekken te integreren met behulp van de differentiaalvergelijkingen. Alternatief kan een equivalente belasting worden gebruikt die tot dezelfde kromming leidt, zodat de vergeet-me-nietjes toegepast kunnen worden. Dit vereist een kinematisch equivalente belasting die geen invloed heeft op reactiekrachten en interne krachten:

“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CEG-mechanics-BSc/NL/statically_inderminate/temperature.html

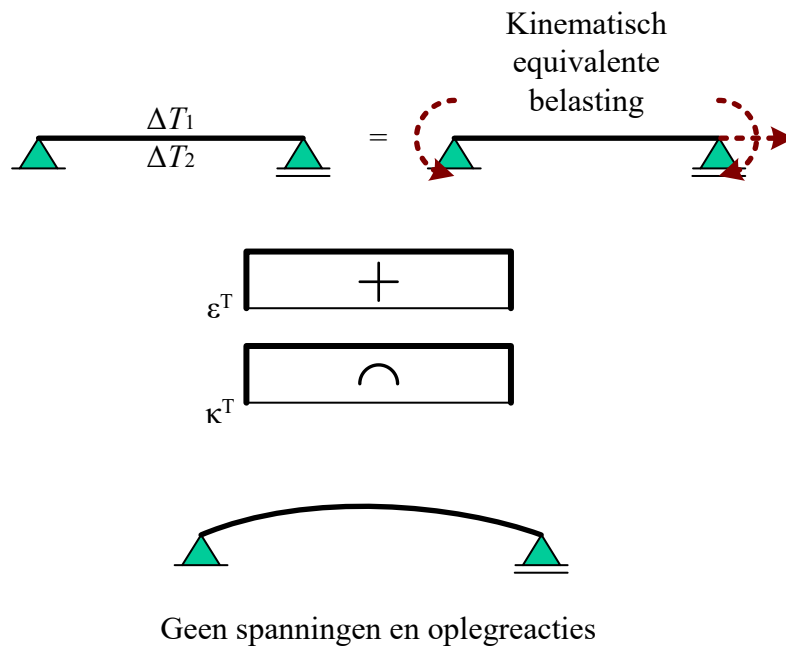
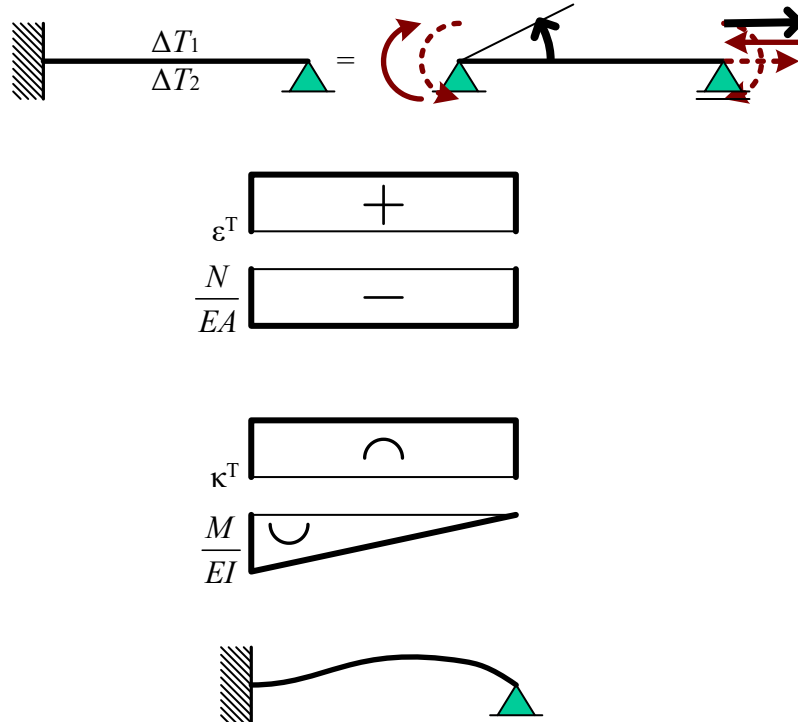


Fig. 156 Kinematisch equivalente belasting die tot dezelfde rek en kromming leidt als rek door lineaire uitzetting

In statisch onbepaalde constructies zijn de vervorming en krachtverdeling gekoppeld, wat leidt tot reactiekrachten en interne spanningen door de (tegengehouden) vervormingen als gevolg van de temperatuurverandering. Deze krachten kunnen opnieuw worden gevonden door de rekken (zowel de spanningsveroorzakende rekken als spanningsloze temperatuurrekken) te integreren met behulp van de differentiaalvergelijkingen. Alternatief kan een kinematisch equivalente belasting, zoals bij statisch bepaalde constructies, worden toegepast in combinatie met de krachtmethode: de verplaatsingen door temperatuur worden meegenomen in de vormveranderingsvoorwaarden.

Kinematisch equivalente
belasting en statisch
onbepaalde krachten met
corresponderende
verplaatsingen



Spanningen en oplegreacties treden op

Fig. 157 Kinematisch equivalente belasting die tot dezelfde rek en kromming leidt als rek door lineaire uitzetting, terwijl statisch onbepaalde reactiekrachten spanningen en reactiekrachten veroorzaken

De temperatuursinvloeden kunnen worden meegenomen in de krachtenmethode met de volgende stappen, waarbij stappen 1 en 4 zijn toegevoegd aan de standaard krachtenmethode:

► Algoritme (Temperatuursinvloeden en krachtenmethode)

1. **Bepaal de kromming en rek als gevolg van de temperatuursinvloed los van alle opleggingen.**
2. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.
3. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij pendelstaven of scharnieren toe te voegen.
4. **Stel kinematisch equivalente belastingen op die dezelfde vervorming veroorzaken als de temperatuursinvloed.**
5. Los de verplaatsing op in termen van de onbekende onbepaalde krachten.
6. Gebruik je vervormingsvoorwaarden om de statisch onbepaalde krachten op te lossen.

De toepassing van temperatuursinvloeden op een statisch onbepaalde constructie wordt in een voorbeeld getoond met de krachtenmethode.

“ Bronvermelding

Dit voorbeeld is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_7/session_3/intro.html

Voorbeeld

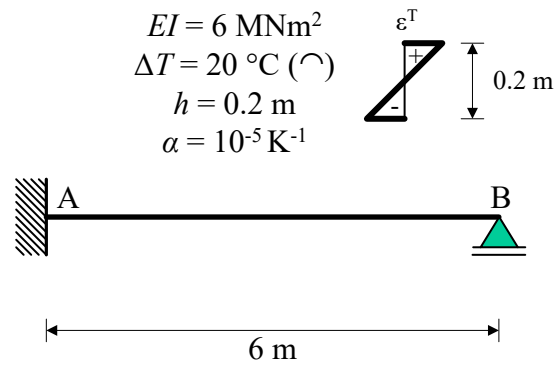


Fig. 158 Voorbeeldconstructie, $EI = 6 \text{ MNm}^2$

Het temperatuurverschil over de hoogte van de balk geeft de kromming $\kappa^T = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ over de gehele lengte van de balk:

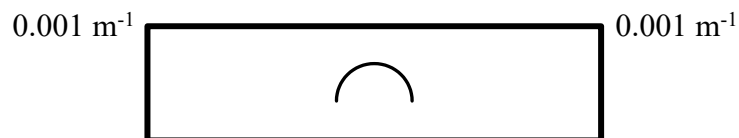


Fig. 159 Krommingslijn ten gevolge van de temperatuur los van alle opleggingen

Om de kinematisch equivalente kracht te vinden moeten we de constructie eerste statisch bepaald maken. Dat kan bijvoorbeeld met het volgende statisch bepaalde systeem:

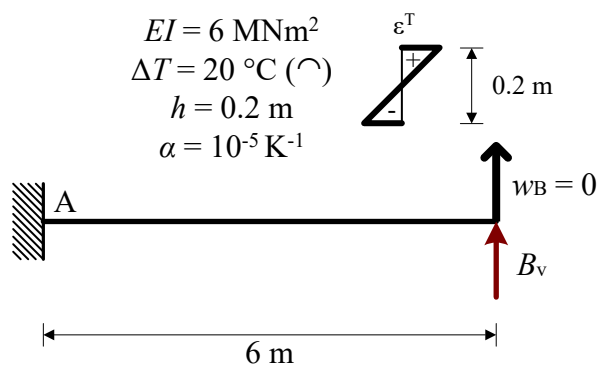


Fig. 160 Statisch bepaald systeem met vormveranderingsvoorwaarde,
 $EI = 6 \text{ MNm}^2$

Voor dit systeem krijgen we met een koppel ($\cup$) op het uiteinde van de balk dezelfde vorm van de krommingslijn. De waarde van dat koppel moet $M = \kappa \cdot EI = 6 \text{ kNm}$ zijn voor dezelfde kromming. Dat geeft het volgende statisch bepaalde systeem:

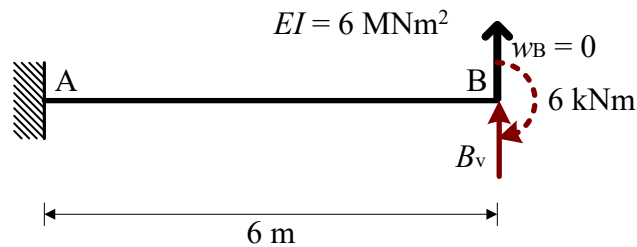


Fig. 161 Statisch bepaald systeem met vormveranderingsvoorwaarde en kinematisch equivalente belasting door de temperatuursinvloed, $EI = 6 \text{ MNm}^2$

Nu kunnen we verder met de krachtenmethode zoals we die gewend zijn. De verplaatsing van B kan gevonden worden met vergeet-me-nietjes:

$$w_B = -\frac{6 \cdot 6^2}{2 \cdot 6000} + \frac{B_v \cdot 6^3}{3 \cdot 6000} = -0.018 + \frac{3}{250} B_v.$$

Dit geeft $B_v = 1.5 \text{ kN}$

De momentenlijn en verplaatsingen kunnen nu gevonden worden. Voor de momentenlijn dient de kinematisch equivalente belasting van 6 kNm niet te worden meegenomen, maar voor de verplaatsingen wel. Dit geeft:

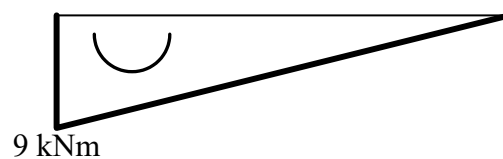


Fig. 162 Momentenlijn

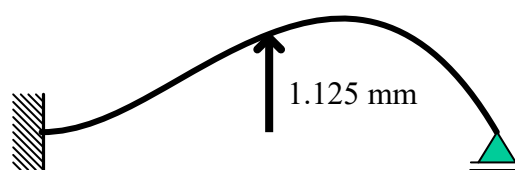


Fig. 163 Vervormde constructie

Afleiding en meer voorbeelden

In hoofdstuk 4.12 van het boek *Mechanica: spanningen, vervormingen en verplaatsingen* ([Hartsuijker and Welleman, 2016](#)) wordt de afleiding van temperatuursinvloeden behandeld. In hoofdstuk 6.2.1 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)) is deze versimpeld herhaald voor statisch bepaalde constructies. De aanpak met de momentenvlakstelling wordt niet behandeld in dit

vak. Daarnaast worden de standaardgevallen voor een ligger op twee steunpunten en een ingeklemde ligger niet gebruikt. In hoofdstuk 6.2.2 worden statisch onbepaalde constructies behandeld. Ook hier geldt dat de momentenvlakstelling geen onderdeel is van dit vak

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 9](#) gepresenteerd in collegevorm tot 0:33:00.

Oefeningen

- Opgaves 6.25 - 6.30, 3.32 - 6.39, 6.41 - 6.43 in hoofdstuk 6.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Er zijn helaas geen antwoorden beschikbaar.

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:

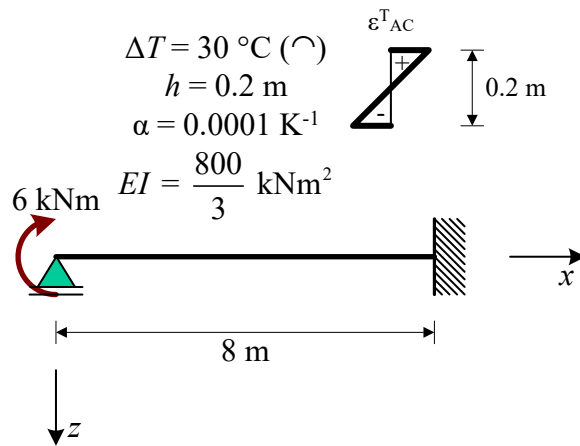


Fig. 164 Constructie, $EI = \frac{800}{3} \text{ kNm}^2$

We gaan deze constructie doorrekenen met behulp van differentiaalvergelijkingen

Opgave

Wat is κ_T ?

Check je resultaten.

$\kappa_T =$ $(1/\text{m})$

H-P > Reuse

Oplossing

$$\kappa^T = -\frac{\alpha \cdot T}{h} = -\frac{0.0001 \cdot 30}{0.2} = -0.015 \text{ m}^{-1}$$

Opgave

Bepaal met behulp van de differentiaalvergelijkingen de uitdrukkingen voor de snedekrachten en verplaatsingen. Merk op dat twee randvoorwaarden direct twee integratieconstanten geven.

Check je resultaten. Ga uit van kN, kNm, m en rad voor je antwoorden.

$$V(x) = C_1$$

$$M(x) = \boxed{} (C_1 x + 6) \text{ (rond af op gehele getallen)}$$

$$\kappa(x) = \boxed{} (C_1 x + \boxed{}) \text{ (rond af op 5 decimalen)}$$

$$w(x) = \boxed{} (C_1 x^3 - C_3 x + \boxed{} (x^2 + 0)) \text{ (rond af op 6 decimalen)}$$

Voor deze constructie gelden den onderstaande randvoorwaarden:

$$w(0) = 0$$

$$M(0) = +6\text{kNm}$$

$$w(8) = 0$$

$$\varphi(8) = 0$$

Hieruit volgt voor de snedekrachten en verplaatsingen:

$$V(x) = C_1$$

$$M(x) = C_1 \cdot x + 6$$

$$\kappa(x) = \frac{M}{EI} = \frac{3}{800} \cdot C_1 \cdot x + \frac{6 \cdot 3}{800} - 0.015 = 0.00375 \cdot C_1 \cdot x + 0.0075$$

$$\varphi(x) = 0.001875C_1 \cdot x^2 + 0.0075 \cdot x + C_3$$

$$w(x) = -0.000625 \cdot C_1 \cdot x^3 - 0.00375 \cdot x^2 - C_3 \cdot x + 0$$

Opgave

Bepaal de waarden van de integratieconstanten

Check je resultaten. Ga uit van kN, kNm, m en rad voor je antwoorden. Rond af op drie decimalen.

$C_1 =$

$C_3 =$



 Reuse

Oplossing

$$C_1 = -0.375$$

$$C_3 = -0.015$$

Opgave

Als de temperatuur verder toeneemt, wordt de absolute waarde van maximale verplaatsing dan:

☐ Groter

☐ Kleiner

Oplossing

Als de temperatuur verder toeneemt, dan wordt de absolute waarde van maximale verplaatsing eerst kleiner dan groter.

Opgave

Waar is het buigpunt?

Check je resultaten. Gebruik een . als decimaalteken en rond je antwoord af op 2 decimalen.

$x_{\text{buigpunt}} =$ m

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:

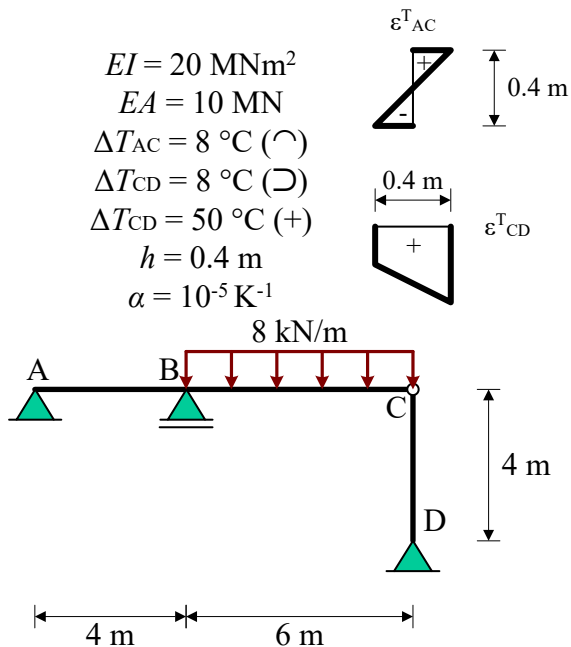


Fig. 165 Constructie, $EI = 20 \text{ MNm}^2$, $EA = 10 \text{ MN}$

“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van
https://oit.tudelft.nl/CT1000/2025/week_8/session_3/intro.html

🧩 Opgave

Bepaal de kromming en rek als gevolg van de temperatuurinvloed.

Opgave

Maak een statisch bepaald systeem dat gebruik maakt van de volgende vormveranderingsvoorwaarde: $w_C^{BC} = w_C^{CD}$ met N_{CD} als de statisch onbepaalde kracht. Dit is weergegeven in de onderstaande figuur zonder equivalente krachten voor de temperatuurinvloed.

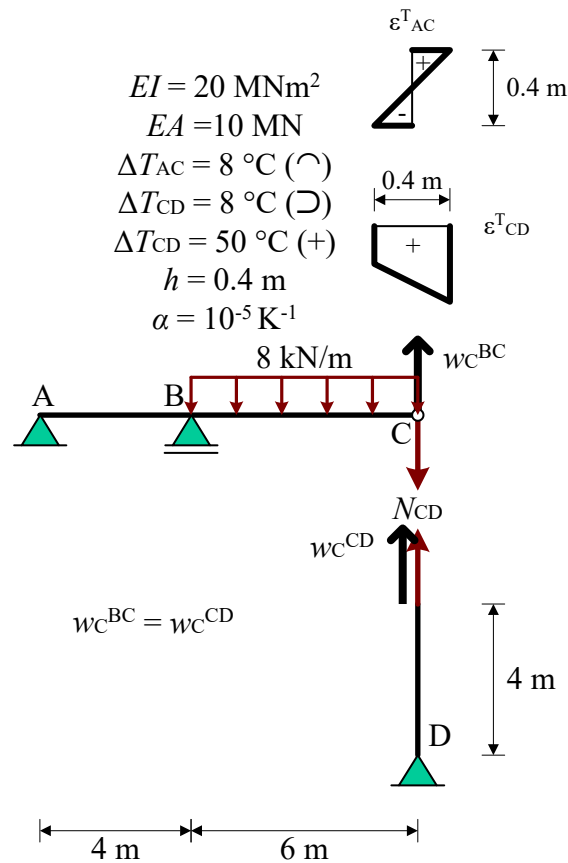


Fig. 166 Statisch bepaalde constructie, $EI = 20 \text{ MNm}^2$, $EA = 10 \text{ MN}$

Wat zijn de krachtverdelingen en verplaatsingen als gevolg van de verdeelde belasting als functie van N_{CD} ? Neem dus geen kinematische equivalente krachten als gevolg van de temperatuurinvloed mee.

Opgave

Wat zijn de krachtverdelingen en verplaatsingen inclusief temperatuurinvloeden en als functie van N_{CD} ?

Opgave

Gebruik de verplaatsingsvoorwaarde om N_{CD} op te lossen

Controleer je resultaten.

$(N_{\text{CD}} =)$ (kN)



 Reuse

Opgave

Wat zijn de buigende momenten?

Controleer je resultaten

$(M_{\text{B}} =)$ (kNm) ($\cup$, rond af op 2 decimalen)

$(M_{\text{halfway CD}} =)$ (kNm) ($\supset$, rond af op hele getallen)

Opgave

Wat is de kromming?

Opgave

Wat zijn de verplaatsingen?

Controleer je resultaten

$w_{\text{C}} =$ mm (rond af op 2 decimalen)

$w_{\text{halverwege CD}} =$ mm (rond af op 1 decimaal, naar rechts is positief)

  Reuse

22 september: Verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen

In deze les leer je hoe je de verplaatsingenmethode kan gebruiken om statisch onbepaalde constructies door te rekenen op vergelijkbare wijze als de krachtenmethode.

Instructie

Inhoud

- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Oefeningen

Bij de **krachten**methode maak je gebruik van vormveranderingsvoorwaardes om de statisch onbepaalde **krachten** te bepalen. Echter, met dezelfde aanpak kan je ook evenwichtsvoorwaardes opstellen om statisch onbepaalde **verplaatsingen** op te lossen: de **verplaatsingen**methode. Dit kan nuttig zijn omdat een enkele evenwichtsvoorwaarde soms al kan voldoen tegenover meerdere vormveranderingsvoorwaardes.

De stappen zijn zeer vergelijkbaar met de krachtenmethode, met als enige verschil dat we geen opleggingen weg kunnen nemen omdat de statisch onbepaalde verplaatsing daar gelijk moet zijn aan 0.

“ Bronvermelding

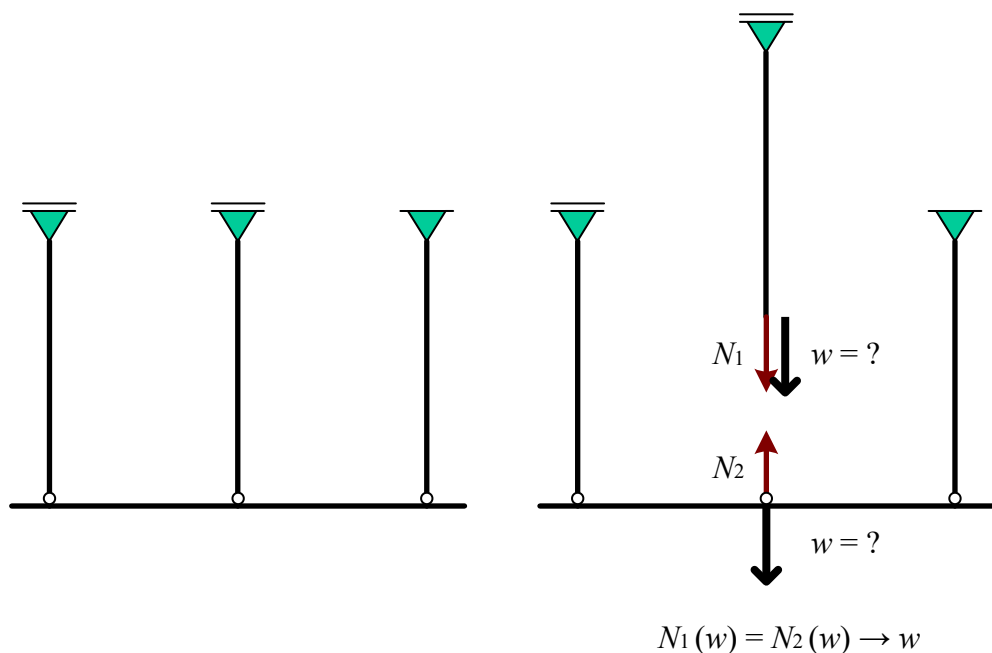
Deze pagina is aangepast van https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_7/session_1/intro.html

► Algoritme (Verplaatsingenmethode)

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.
2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij pendelstaven of scharnieren toe te voegen: voeg onbekende statisch onbepaalde verplaatsingen toe en evenwichtsvoorwaarden toe voor elke aansluiting van de pendelstaven die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Splitsen constructie bij pendelstaven

Toevoegen scharnieren



3. Los de krachten op in termen van de onbekende onbepaalde verplaatsingen.
4. Gebruik je evenwichtsvoorwaarden om de statisch onbepaalde verplaatsingen op te lossen.

De toepassing van de verplaatsingenmethode wordt getoond op onderstaande voorbeeld.

Voorbeeld

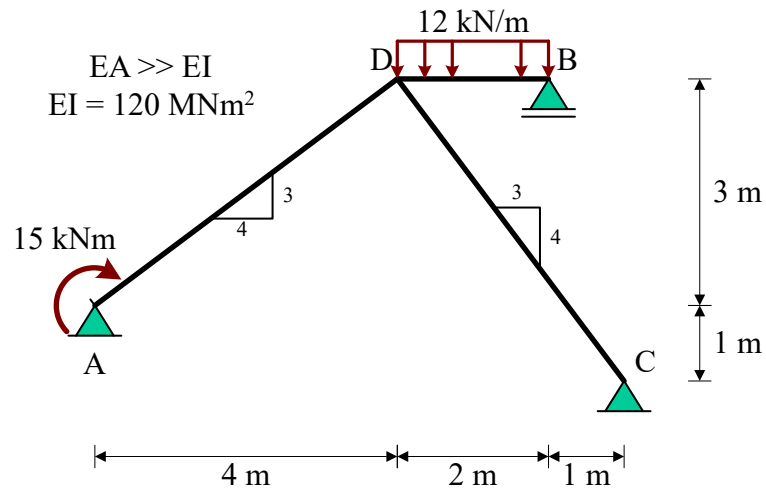


Fig. 167 Voorbeeldconstructie, $EI = 120 \text{ MNm}^2$, $EA \gg EI$

1. Bepaal de graad van statische bepaaldheid.

Voorbeeld

Voor ons voorbeeld zijn we geïnteresseerd in de interne krachtenverdeling, dus moeten we de graad van interne statische onbepaaldheid evalueren.

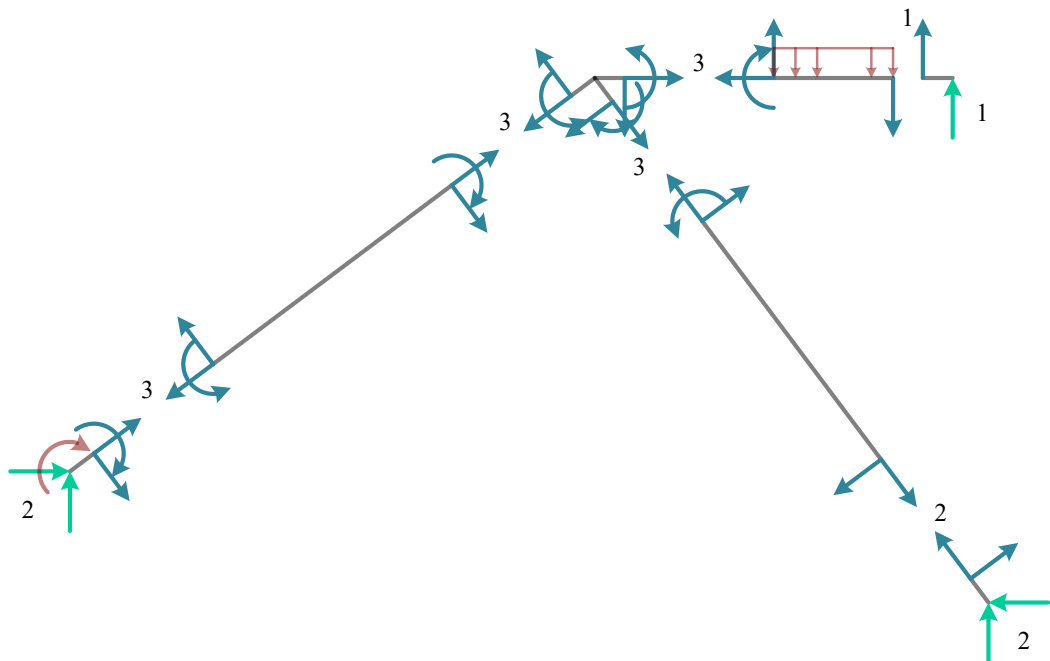


Fig. 168 Er zijn 20 onbekende krachten.

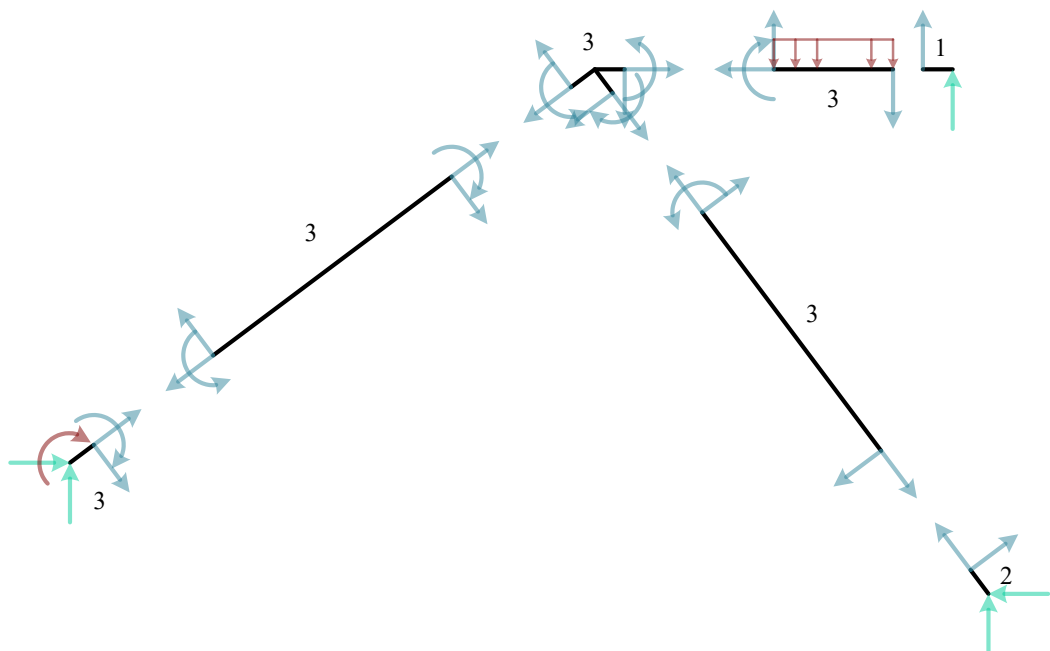


Fig. 169 Er zijn 18 evenwichtsvergelijkingen.

Deze constructie is dus 2e orde intern statisch onbepaald.

2. Transformeer de constructie in een statisch bepaald systeem door opleggingen weg te nemen, de constructie te splitsen bij pendelstaven of scharnieren toe te voegen: voeg

onbekende statisch onbepaalde verplaatsingen toe en evenwichtsvoorwaarden toe voor elke aansluiting van de pendelstaven die je hebt weggenomen en scharnieren die je hebt toegevoegd. Let op dat je de constructie niet transformeert tot een (gedeeltelijk) mechanisme!

Voorbeeld

Er zijn geen pendelstaven in deze constructie, dus de enige optie is het toevoegen van scharnier. Twee scharnieren net links en rechts van D komt op hetzelfde neer als één scharnier in D, leidend tot het volgende statisch bepaalde systeem.

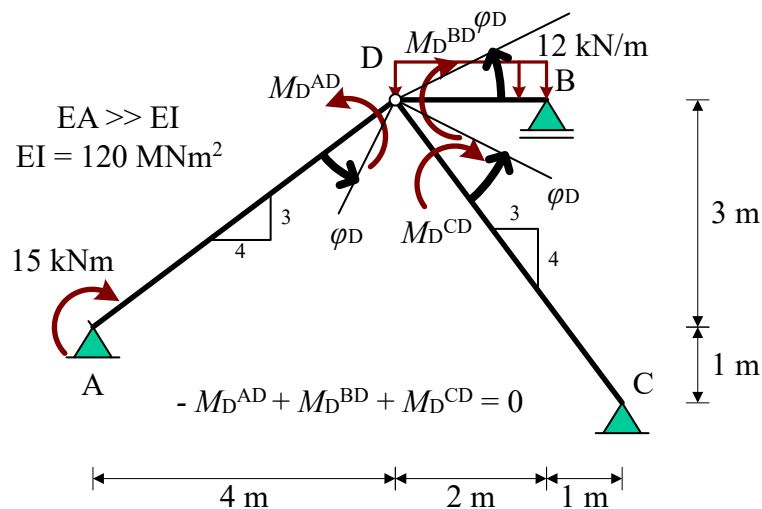


Fig. 170 Statisch onbepaalde systeem met statisch onbepaalde verplaatsing φ_D
en evenwichtsvergelijking $-M_D^{AD} + M_D^{BD} + M_D^{CD} = 0$,
 $EI = 120 \text{ MNm}^2$, $EA \gg EI$

3. Los de krachten op in termen van de onbekende onbepaalde verplaatsingen.

Voorbeeld

Elk van de krachten M_D^{AD} , M_D^{CD} , M_D^{BD} kan nu worden uitgedrukt als functie van φ_D met behulp van vergeet-me-nietjes:

- Voor AD: $\varphi_D = \frac{5M_D^{AD}}{3 \cdot 120000} + \frac{15 \cdot 5}{6 \cdot 120000} \cdot$
- Voor BD: $\varphi_D = -\frac{2M_D^{BD}}{3 \cdot 120000} - \frac{12 \cdot 2^3}{24 \cdot 120000}$
- Voor CD: $\varphi_D = -\frac{5M_D^{CD}}{3 \cdot 120000}$

Dit kan worden omgeschreven naar:

- $M_D^{AD} = 72000\varphi_D - 7.5$
- $M_D^{DB} = -180000\varphi_D - 6$
- $M_D^{CD} = -72000\varphi_D$

4. Gebruik je evenwichtsvoorwaarden om de statisch onbepaalde verplaatsingen op te lossen.

Voorbeeld

Invullen van onze uitdrukkingen voor de momenten in onze evenwichtsvergelijking $-M_D^{AD} + M_D^{BD} + M_D^{CD} = 0$ geeft:

$$\varphi_D = \frac{1}{216000} = 4.63 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Eventueel kan nu ook de momentenverdeling worden gevonden:

- $M_D^{AD} = -\frac{43}{6} \approx -7.17 \text{ kNm}$
- $M_D^{DB} = -\frac{41}{6} \approx -6.83 \text{ kNm}$
- $M_D^{DC} = -\frac{1}{3} \approx -0.333 \text{ kNm}$

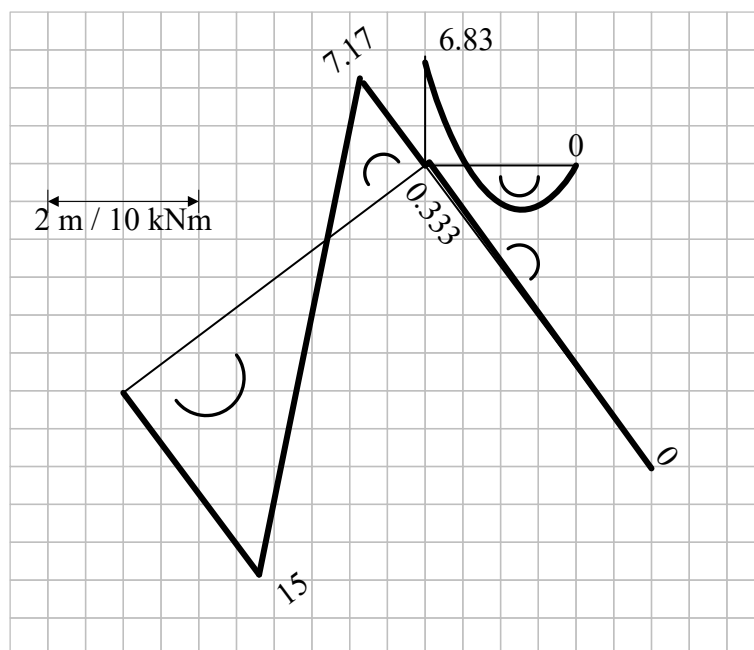


Fig. 171 Momentenlijn.

Meer voorbeelden

De voorbeelden in hoofdstuk 4.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)) vormen onderdeel van de aanpak zoals behandeld in de [volgende les](#), maar kunnen ook opgelost worden met de aanpak zoals hierboven beschreven

Instructies in collegevorm

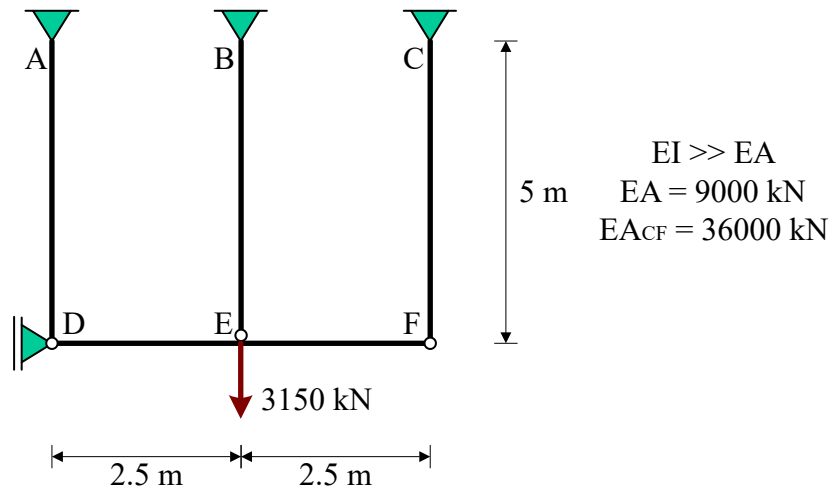
Dit onderwerp is [les 10](#) gepresenteerd in collegevorm van 0:17:00- 0:51:50.

Oefeningen

- Opgaves 4.4 - 4.33, 4.35, 4.36 in hoofdstuk 4.5 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Negeer de opmerkingen over welke vrijheidsgraad gekozen moet worden. Er zijn helaas geen antwoorden beschikbaar. Je kan de constructies doorrekenen met MatrixFrame om je antwoorden te controleren.

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:



! **Veranderd in versie v2025.19.0:**
31-10-2025: aangepast afmetingen,
stijfheden en belasting.

Fig. 172 Constructie, lijkend op het voorbeeld in hoofdstuk 4.3.1 uit het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)),

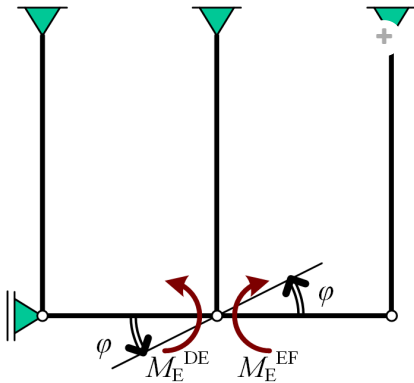
$$EI \gg EA, EA = 9000 \text{ kN}, E_{A_{BE}} = 36000 \text{ kN}$$

Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

Opgave

Welke van de volgende statisch bepaalde systemen kan gebruikt worden voor toepassing van de verplaatsingenmethode?



Deze constructie is een geldig statisch bepaald systeem om de constructie op te lossen.

☐ Juist

☐ Onjuist



 Reuse

 **Veranderd in versie v2025.19.0:**
31-10-2025: antwoord N_F^{EF} aangepast.

Opgave

Er wordt gekozen voor het volgende statisch bepaalde systeem inclusief evenwichtsvoorwaarde:

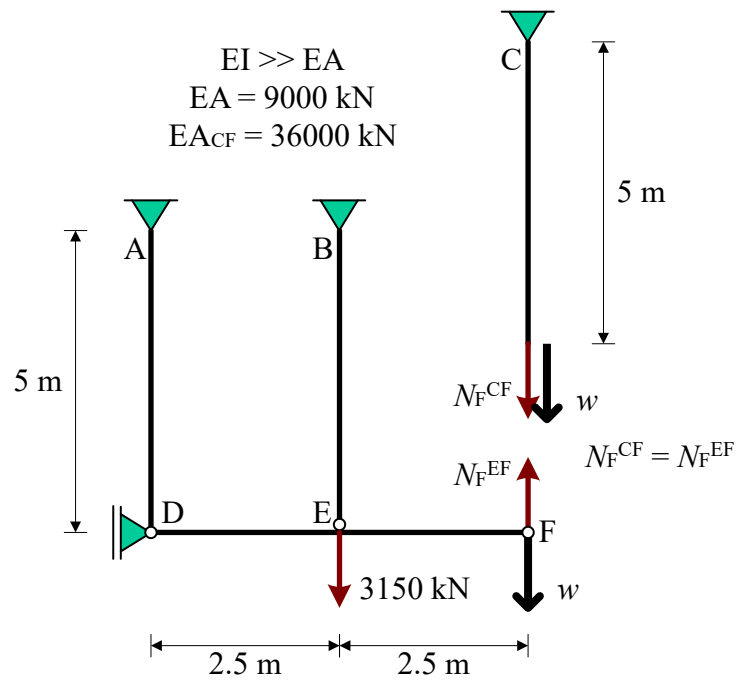


Fig. 173 Statisch bepaald systeem,

$$EI \gg EA, EA = 9000 \text{ kN}, EA_{BE} = 36000 \text{ kN}$$

Los N_F^{CF} en N_F^{EF} op als functie van w .

Tip: als het lastig is om direct N_F^{EF} als functie van w op te lossen. Los dan eerst w op als functie van N_F^{EF} en schrijf die aan het eind om.

Opgave

Los w op met behulp van de evenwichtsvoorwaarde.

Check je resultaten. Rond af op gehele getallen

$w =$ mm

   Reuse

Opgave

Los nu ook de krachtsverdeling op.

Check je resultaten. Rond af op gehele getallen

$N_{AD} =$ kN

$N_{BE} =$ kN

$N_F^{CF} =$ kN

$N_F^{EF} =$ kN

   Reuse

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:

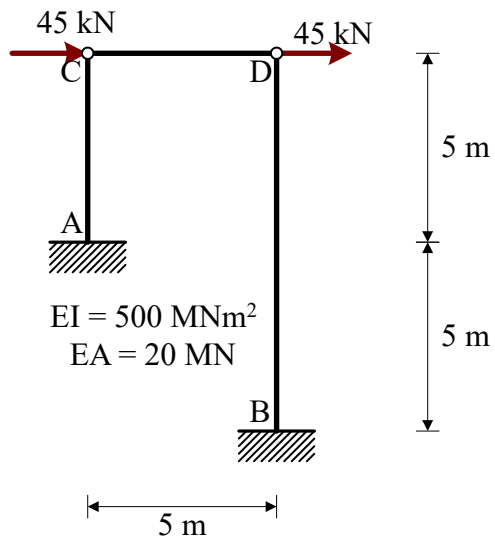


Fig. 174 Constructie, $EI = 500 \text{ MNm}^2$, $EA = 20 \text{ MN}$

“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van
https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_7/session_2/intro.html

🧩 Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

Opgave

Er wordt gekozen voor het volgende statisch bepaalde systeem inclusief evenwichtsvoorwaarde:

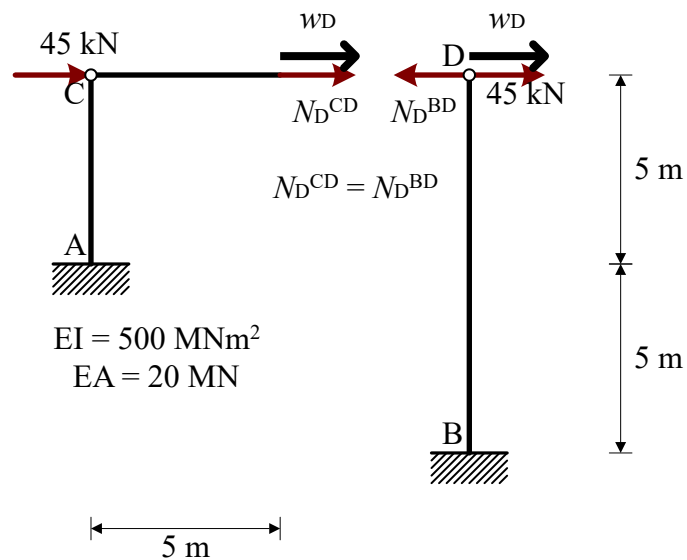


Fig. 175 Statisch bepaald systeem, $EI = 500 \text{ MNm}^2$, $EA = 20 \text{ MN}$

Los N_D^{CD} en N_D^{BD} op als functie van w_D .

Check je resultaten. Ga uit van kN, m en rad voor je antwoorden.

$N_D^{CD}(w_D) = \text{[]} \cdot w_D + \text{[]}$ (gebruik een . als decimaalteken en rond af op twee decimalen)

$N_D^{BD}(w_D) = \text{[]} \cdot w_D + \text{[]}$ (rond af op gehele getallen)

  Reuse

Opgave

Los w_D op met behulp van de evenwichtsvoorwaarde.

Opgave

Los nu ook de krachtsverdeling op.

Check je resultaten. Gebruik een . als decimaalteken.

$$N_{CD} = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op 2 decimalen)}$$

$$|M_A| = \text{[input box]} \text{ kNm (rond af op 2 decimalen)}$$

$$|M_B| = \text{[input box]} \text{ kNm (rond af op 1 decimaal)}$$

$$|V_A| = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op 2 decimalen)}$$

$$|V_B| = \text{[input box]} \text{ kN (rond af op 2 decimalen)}$$

24 september: Verplaatsingenmethode met vrijheidsgraden

In deze les leer je hoe je de verplaatsingenmethode toe kan passen door direct verplaatsingen op te leggen.

Instructie

Inhoud

- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Oefeningen

In de les van [22 september: Verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen](#) heb je de verplaatsingenmethode leren toepassen op zeer vergelijkbare wijze als de krachtenmethode. Echter, er is nog een andere verplaatsingenmethode. Een groot nadeel van de krachten- en verplaatsingenmethode van de vorige les is namelijk dat je de statisch onbepaalde constructie moet aanpassen tot een statisch bepaalde constructie. Dat kan soms lastig zijn. Bij de verplaatsingenmethode die we vandaag behandelen is dat niet nodig. In plaats van de constructie op te lossen voor een statisch onbepaalde kracht of verplaatsingen, lossen we de constructie op voor één of meerdere vrijheidsgraden die de vervorming van de constructie bepalen.

► Algoritme (Verplaatsingenmethode)

1. Kies één of meerdere vrijheidsgraden die de vervorming van de constructie bepalen en splits de constructie in of rondom die plek(ken).
2. Bereken de krachten in de splitsing in termen van de onbekende vrijheidsgraden. Als je meerdere vrijheidsgraden hebt gedefinieerd, bereken dan de invloed van elke vrijheidsgraad los waarbij de andere vrijheidsgraden aan nul worden gesteld. Maak daarbij gebruik van de uitgebreide vergeet-me-nietjes in het geval van buiging.
3. Gebruik evenwichtsvoorwaarden om de vrijheidsgraden op te lossen.

De toepassing van deze verplaatsingenmethode op een statisch onbepaalde constructie wordt in een voorbeeld getoond.

Voorbeeld

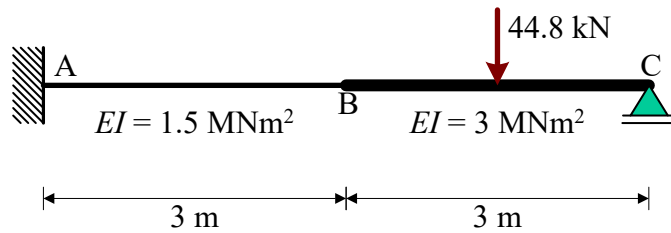


Fig. 176 Voorbeeldconstructie, $EI_{AB} = 1.5 \text{ MNm}^2$, $EI_{BC} = 3 \text{ MNm}^2$

1. Kies één of meerdere vrijheidsgraden die de vervorming van de constructie bepalen en splits de constructie in of rondom die plek(ken).

Voorbeeld

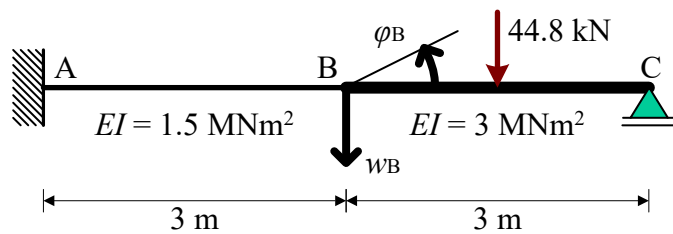


Fig. 177 De verplaatsing en rotatie van B wordt gekozen als vrijheidsgraad.

Met de verplaatsing en rotatie van B kan de verplaatsing van de hele constructie worden bepaald.

2. Bereken de krachten in de splitsing in termen van de onbekende vrijheidsgraden. Als je meerdere vrijheidsgraden hebt gedefinieerd, bereken dan de invloed van elke vrijheidsgraad los waarbij de andere vrijheidsgraden aan nul worden gesteld. Maak daarbij gebruik van de uitgebreide vergeet-me-nietjes in het geval van buiging.

Voorbeeld

De constructie wordt gesplitst in B. Daarvoor kunnen we het vrijlichaamsschema van beide delen en knoop B tekenen.

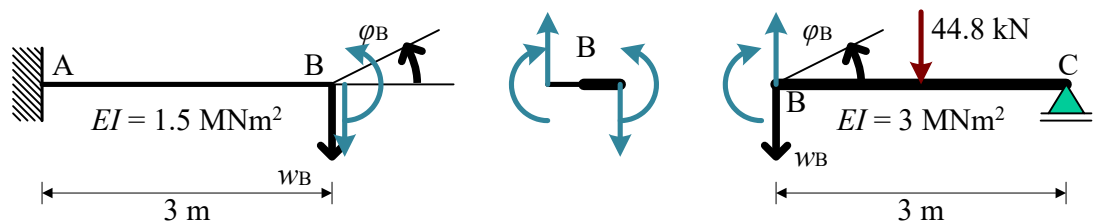


Fig. 178 Gesplitste constructie, $EI_{AB} = 1.5 \text{ MNm}^2$, $EI_{BC} = 3 \text{ MNm}^2$

Voor beide delen kunnen we nu met behulp van vergeet-me-nietjes de snedekrachten in B bepalen als functie van w_B en φ_B . in het stukje BC heeft de puntlast van 44.8 kN ook nog invloed.

Allereerst wordt de invloed van de rotatie φ_B op gedeelte AB bekeken. Daarvoor geldt het volgende vergeet-me-nietje, leidend tot snedekrachten in de getoonde richting:

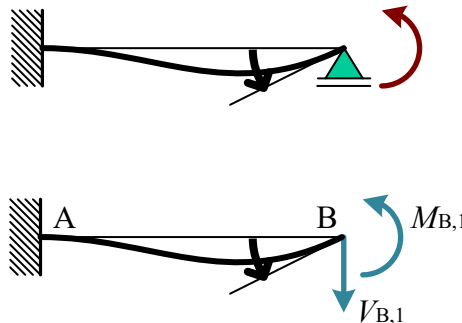


Fig. 179 Boven het vergeet-me-nietje waarmee we de snedekrachten ten gevolge van φ_B op gedeelte AB kunnen berekenen. Komt overeen met vergeet-me-nietje (7) van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Daaronder het gesplitste gedeelte AB met de snedekrachten in de optredende richting

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \circ M_{B,1} &= \varphi_B \cdot \frac{4EI}{L_{AB}} = \varphi_B \cdot \frac{4 \cdot 1500}{3} = 2000\varphi_B \\ \circ V_{B,1} &= \varphi_B \cdot \frac{6EI}{L_{AB}^2} = \varphi_B \cdot \frac{6 \cdot 1500}{3^2} = 1000\varphi_B \end{aligned}$$

Vervolgens wordt de invloed van de verplaatsing w_B op gedeelte AB bekeken. Daarvoor geldt het volgende vergeet-me-nietje, leidend tot

snedekrachten in de getoonde richting:

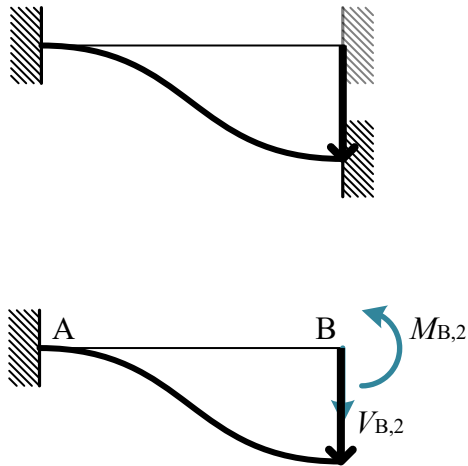


Fig. 180 Boven het vergeet-me-nietje waarmee we de snedekrachten ten gevolge van w_B op gedeelte AB kunnen berekenen. Komt overeen met vergeet-me-nietje (g) van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* (Hartsuijker and Welleman, 2007). Daaronder het gesplitste gedeelte AB met de snedekrachten in de optredende richting

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \circ M_{B,2} &= w_B \cdot \frac{6EI}{L_{AB}^2} = w_B \cdot \frac{6 \cdot 1500}{3^2} = 1000w_B \\ \circ V_{B,2} &= w_B \cdot \frac{12EI}{L_{AB}^3} = w_B \cdot \frac{12 \cdot 1500}{3^3} = \frac{2000}{3}w_B \end{aligned}$$

Nu kan ook het rechtergedeelte worden bekeken. Te beginnen met de invloed van de rotatie φ_B op gedeelte BC. Daarvoor geldt het volgende vergeet-me-nietje, leidend tot snedekrachten in de getoonde richting:

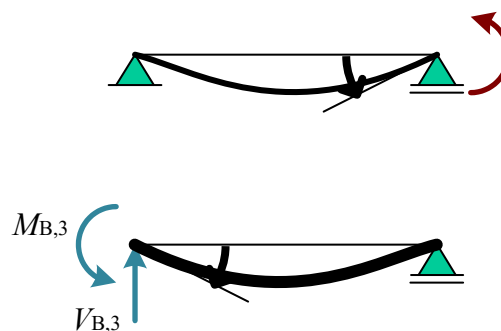


Fig. 181 Boven het vergeet-me-nietje waarmee we de snedekrachten ten gevolge van φ_B op gedeelte **BC** kunnen berekenen. Komt overeen met het horizontaal gespiegelde vergeet-me-nietje (4) van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Daaronder het gesplitste gedeelte **BC** met de snedekrachten in de optredende richting. Daarvoor is het vergeet-me-nietje in zowel horizontale als verticale richting gespiegeld.

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \circ M_{B,3} &= \varphi_B \cdot \frac{3EI}{L_{BC}} = \varphi_B \cdot \frac{3 \cdot 3000}{3} = 3000\varphi_B \\ \circ V_{B,3} &= \varphi_B \cdot \frac{3EI}{L_{BC}^2} = \varphi_B \cdot \frac{3 \cdot 3000}{3^2} = 1000\varphi_B \end{aligned}$$

Vervolgens wordt de invloed van de verplaatsing w_B op gedeelte **BC** bekeken. Daarvoor geldt het volgende vergeet-me-nietje, leidend tot snedekrachten in de getoonde richting:

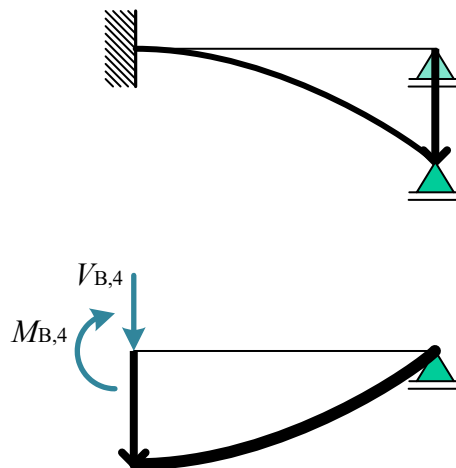


Fig. 182 Boven het vergeet-me-nietje waarmee we de snedekrachten ten gevolge van w_B op gedeelte **BC** kunnen berekenen. Komt overeen met het horizontaal gespiegelde vergeet-me-nietje (f) van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).

Daaronder het gesplitste gedeelte **BC** met de snedekrachten in de optredende richting. Daarvoor is het vergeet-me-nietje in verticale richting gespiegeld en is de inklemming aan de linkerkant verplaatst in plaats van de roloplegging aan de rechterkant.

Hieruit volgt:

$$\circ M_{B,4} = w_B \cdot \frac{3EI}{L_{BC}^2} = w_B \cdot \frac{3 \cdot 3000}{3^2} = 1000w_B$$

$$\circ V_{B,4} = w_B \cdot \frac{6EI}{L_{BC}^3} = w_B \cdot \frac{3 \cdot 3000}{3^3} = \frac{1000}{3} w_B$$

Tot slot moet ook nog de invloed van de puntlast van 44.8 kN op gedeelte BC worden meegenomen. Daarvoor geldt het volgende vergeet-me-nietje, leidend tot snedekrachten in de getoonde richting:

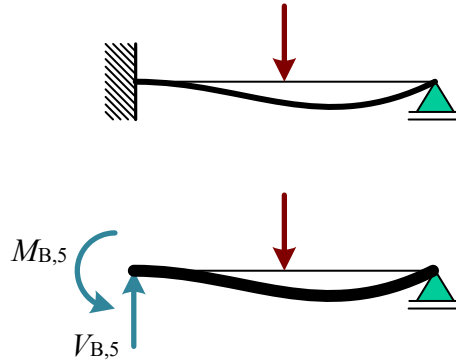


Fig. 183 Boven het vergeet-me-nietje waarmee we de snedekrachten ten gevolge van de puntlast van **44.8 kN** op gedeelte **BC** kunnen berekenen. Komt overeen met het horizontaal gespiegelde vergeet-me-nietje (8) van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Daaronder het gesplitste gedeelte **BC** met de snedekrachten in de optredende richting.

Hieruit volgt:

$$\circ M_{B,5} = \frac{3}{16} FL_{BC} = \frac{3}{16} \cdot 44.8 \cdot 3 = 25.2 \text{ kNm}$$

$$\circ V_{B,5} = \frac{11}{16} F = \frac{11}{16} \cdot 44.8 = 30.8 \text{ kN}$$

3. Gebruik evenwichtsvoorwaarden om de vrijheidsgraden op te lossen.

Voorbeeld

Nu alle snedekrachten in B bekend zijn, kunnen we de evenwichtsvoorwaarden voor knoop B opstellen:

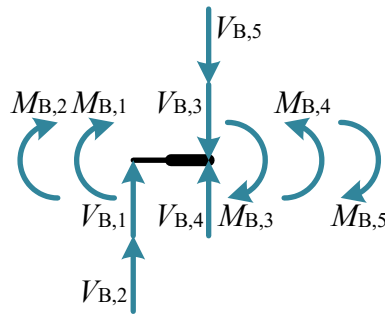


Fig. 184 Vrijlichaamsschema van knoop B met alle snedekrachten.

Dit geeft:

$$\begin{aligned}\Sigma M &= 0 \\ -M_{B,1} - M_{B,2} - M_{B,3} + M_{B,4} - M_{B,5} &= 0 \\ 5000\varphi_B + 25.2 &= 0 \\ \varphi_B &= -0.00504 \text{ rad}\end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v &= 0 \\ -V_{B,1} - V_{B,2} + V_{B,3} + V_{B,4} - V_{B,5} &= 0 \\ 1000w_B - 30.8 &= 0 \\ w_B &= 0.0308 \text{ m} = 30.8 \text{ mm}\end{aligned}$$

Meer voorbeelden

In hoofdstuk 4.1 en 4.3 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)) wordt deze verplaatsingenmethode behandeld.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [les 11](#) gepresenteerd in collegevorm tot 0:47:56.

Oefeningen

Opgaves 4.4 - 4.33, 4.35, 4.36 in hoofdstuk 4.5 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). Dit zijn dezelfde opgaves als voor [22 september: Verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen](#), maar de aanpak is nu anders. Er zijn helaas geen antwoorden beschikbaar. Je kan de constructies doorrekenen met `MatrixFrame` om je antwoorden te controleren.

Begeleide oefening 1

Gegeven is de volgende constructie:

“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van
https://oit.tudelft.nl/CT1000/2024/week_7/session_1/intro.html

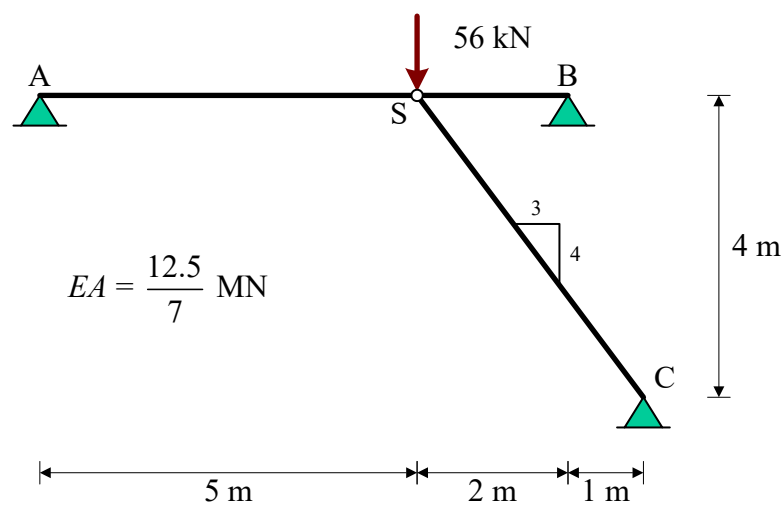
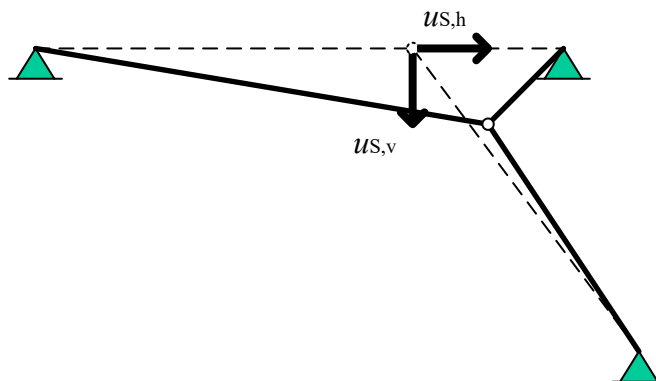


Fig. 185 Constructie, $EA = \frac{12.5}{7} \text{ MN}$

Waarvoor de horizontale en verticale verplaatsingen van scharnier S als vrijheidsgraden worden genomen, met positief naar rechts en naar beneden.



Opgave

Waarom is het niet nodig de rotatie van S als vrijheidsgraad mee te nemen?

- ☐ De rotatie van een scharnier heeft geen betekenis
- ☐ De staven zullen niet roteren
- ☐ De constructie is statisch bepaald

Opgave

Opgave

Bepaal de normaalkrachten in de drie staven in de constructie als functie van de verplaatsingen $u_{S,h}$ en $u_{S,v}$.

Check je resultaten. Ga uit van kN en m voor je antwoorden.

$$\begin{aligned} (N_{AS}) \left(u_{S,h}, u_{S,v} \right) = & \boxed{} \left(\frac{1}{7} \cdot u_{S,h} + \right) \boxed{} \left(\frac{1}{7} \cdot u_{S,v} \right) \approx \\ & \boxed{} \left(\cdot u_{S,h} + \right) \boxed{} \left(\cdot \right. \\ & \left. u_{S,v} \right) \text{ (rond af op gehele getallen)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N_{SB}) \left(u_{S,h}, u_{S,v} \right) = & \boxed{} \left(\frac{1}{7} \cdot u_{S,h} + \right) \boxed{} \left(\frac{1}{7} \cdot u_{S,v} \right) \approx \\ & \boxed{} \left(\cdot u_{S,h} + \right) \boxed{} \left(\cdot \right. \\ & \left. u_{S,v} \right) \text{ (rond af op gehele getallen)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N_{SC}) \left(u_{S,h}, u_{S,v} \right) = & \boxed{} \left(\frac{1}{7} \cdot u_{S,h} + \right) \boxed{} \left(\frac{1}{7} \cdot u_{S,v} \right) \approx \\ & \boxed{} \left(\cdot u_{S,h} + \right) \boxed{} \left(\cdot \right. \end{aligned}$$

Opgave

Bepaal de waarde van de vrijheidsgraden $u_{S,h}$ en $u_{S,v}$.

Opgave

Bepaal de normaalkrachten in de drie staven.

Check je resultaten. Rond af op gehele getallen.

$(N_{\text{AS}} =)$ (kN)

$(N_{\text{SB}} =)$ (kN)

$(N_{\text{SC}} =)$ (kN)

Begeleide oefening 2

Gegeven is de volgende constructie:

“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van
https://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/CT2031/tentamens/files/2031-3001-2017.pdf, onderdeel 2

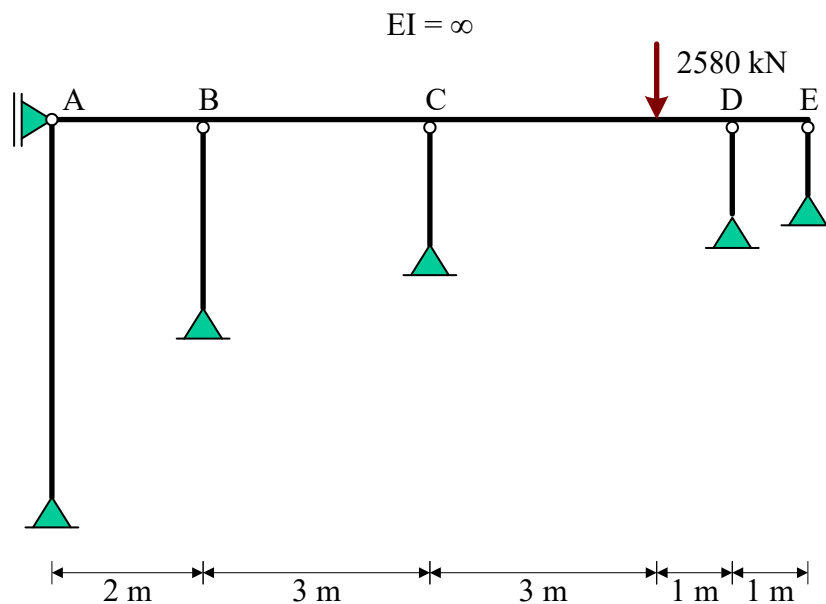


Fig. 186 Constructie, $EI = \infty$

🧩 Opgave

Wat is de graad van inwendig statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads inwendig statisch onbepaald

H-P > Reuse

De pendelstaven worden vervangen door veren, leidend tot de volgende constructie:

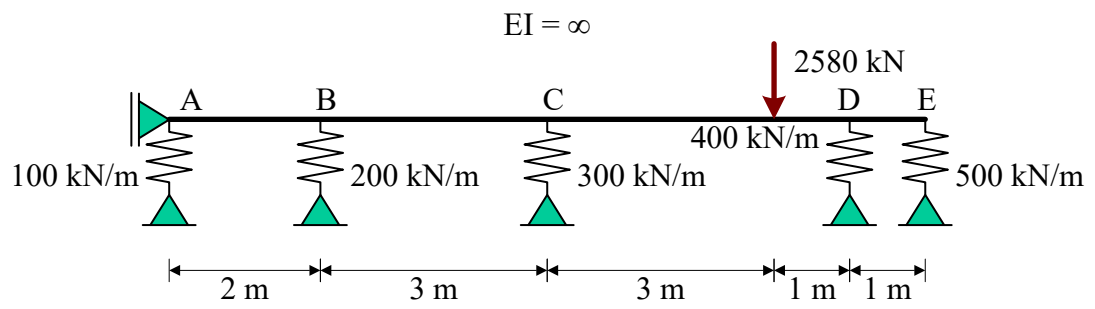


Fig. 187 Constructie met veren, $EI = \infty$

Opgave

Opgave

Opgave

Er wordt gekozen voor de volgende vrijheidsgraden: w_A en φ :

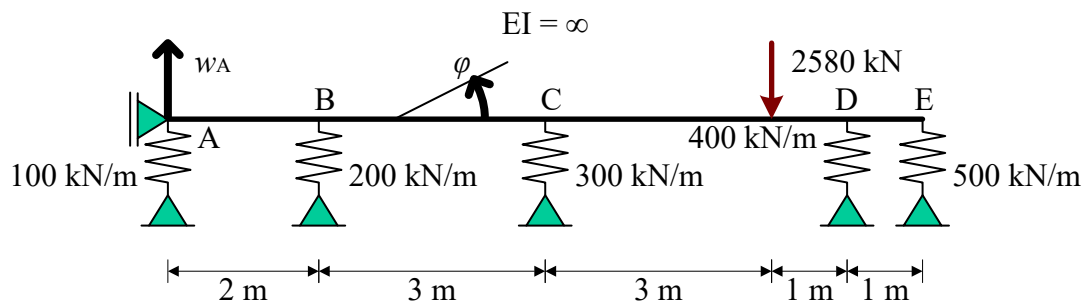


Fig. 188 Constructie met veren en vrijheidsgraden w_A en φ . $EI = \infty$

Bepaal de evenwichtsvergelijkingen

Opgave

Bepaal met evenwicht w_A en φ .

Check je resultaat.

$w_A =$ (rond af op gehele getallen)

$\varphi =$ (rond af op 2 decimalen, gebruik een . als decimaalteken)

  Reuse

Opgave

Wat zijn de krachten in de veren?

Check je resultaten. Rond af op gehele getallen. Ga uit van + voor trek en - voor druk.

$N_1 =$ (kN)

$N_2 =$ (kN)

$N_3 =$ (kN)

$N_4 =$ (kN)

$N_5 =$ (kN)

25 september: Matrixmethode

In deze les leer je hoe je de matrixmethode toepast op statisch onbepaalde constructies.

Instructie

Inhoud

- Theorie
- Voorbeeld
- Meer voorbeelden
- Instructies in collegevorm
- Oefeningen

De matrixmethode is een methode om aan alle soorten constructies te rekenen en lijkt heel erg op de [verplaatsingenmethode van de vorige les](#). Die verplaatsingenmethode had als nadeel dat de constructie wordt gesplitst in delen die allemaal verschillende vervormingsgedrag hebben. Dat maakt een dergelijke berekening arbeidsintensief. De matrixmethode lost dit op door standaardisatie van vrijheidsgraden en gesplitste delen. Daarnaast wordt de matrixmethode vaak direct in matrixformuleringen toegepast. Met deze twee aanpassingen vormt de matrixmethode een handige methode voor computerberekeningen.

Theorie

Beperking tot rotaties en knooppoppels

In dit vak beperken we ons tot de toepassing van de matrixmethode op constructies waarin de rotatie van de knopen de enige vrijheidsgraad is (knopen kunnen niet verplaatsen) en er geen krachten tussen de knopen aangrijpen. Daarnaast modelleren we enkel starre verbindingen. De matrixmethode is echter ook toe te passen op constructies met meerdere vrijheidsgraden per knoop, op constructies met krachten tussen de knopen en scharnierende / verende verbindingen.

Aantal vrijheidsgraden

Het eerste verschil van de matrixmethode met de verplaatsingenmethode is het aantal vrijheidsgraden. Waar bij de verplaatsingenmethode slechts enkele vrijheidsgraden worden gekozen, worden bij de matrixmethode de rotaties van alle knopen als vrijheidsgraden gekozen en daarbij het evenwicht van alle knopen in acht genomen. Daarbij worden alle rotaties en momenten in dezelfde richting genomen.

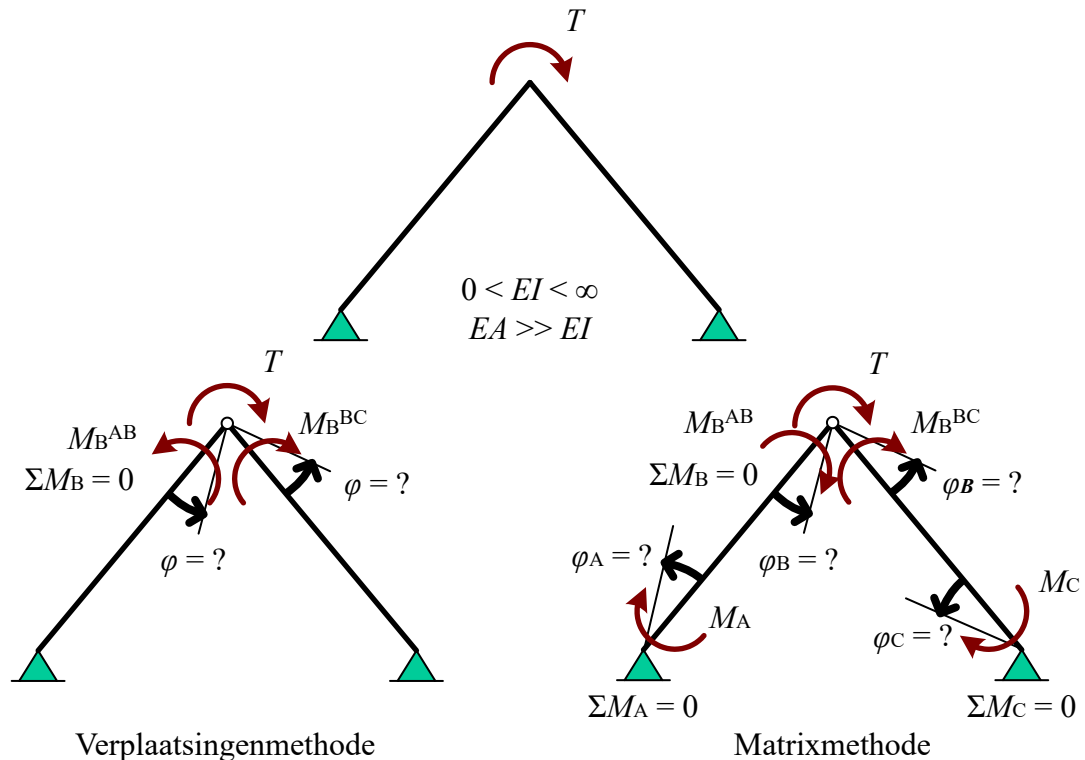


Fig. 189 Verplaatsingenmethode v.s. matrixmethode: bij de verplaatsingenmethode wordt slechts één rotatie gekozen als vrijheidsgraad, bij de matrixmethode worden alle rotaties gekozen als vrijheidsgraad, wat ook gepaard gaat met meer onbekende momenten. Per nieuwe vrijheidsgraad wordt er ook een nieuwe evenwichtsvergelijking opgesteld.

Matrixformulering

Het tweede verschil is dat bij de matrixmethode het momentenevenwicht wordt opgeschreven in matrixformulering. Daarbij worden de evenwichtsvergelijkingen gesplitst in een stijfheidsterm $\mathbf{K}$ (factoren voor de φ 's) en een krachtterm $\mathbf{f}$ (losse termen).

Verplaatsingsmethode

Matrixmethode

$$\sum M_B = 0$$

$$\downarrow$$

$$k \cdot \varphi = f$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{bmatrix} = \mathbf{f}$$

Dit leidt tot een matrixformulering $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. De termen in de globale stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$ kunnen geïnterpreteerd worden als de rotatiestijfheid die elk element levert aan de aanliggende knopen. De termen in de krachtvector $\mathbf{f}$ kunnen geïnterpreteerd worden als de externe koppels die op de knopen werken. $\mathbf{u}$ is de verplaatsingsvector met de onbekende rotaties van de knopen.

Directe opstelling van de stijfheidsterm

In plaats van met de hand elke momentevenwicht op te schrijven kunnen we de $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ direct opstellen door de stijfheden van de individuele elementen bij elkaar op te tellen bij de bijbehorende knopen. Aangezien alle elementen er exact hetzelfde uitzien (een buigende staaf van nog onbekende lengte L en buigstijfheid EI met koppels op het uiteinde), kunnen we voor elk element dezelfde symbolische stijfheidstermen gebruiken. Daarbij houden we voor alle rotaties en momenten dezelfde richting (tegen de klok in) aan.



Fig. 190 Standaard element in de matrixmethode

Voor dit standaardelement zullen we éénmaal de stijfheidstermen moeten vinden. Net als bij de verplaatsingsmethode kunnen we met de relaties vinden tussen de koppels en de rotaties van de uiteindes van een element door de rotaties los van elkaar toe passen. Voor elke individuele element met lengte L en buigstijfheid EI kunnen we de zogenoemde elementstijfheidsmatrix opstellen aan de hand van een vergeet-me-nietje:



Fig. 191 Vergeet-me-nietje waarmee we de relatie tussen koppels en de rotaties van de uiteindes van een element beschreven kunnen worden. Komt overeen met vergeet-me-nietje (7) van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)).

Voor de relaties tussen de koppels en φ_2 kunnen we onderstaande model gebruiken, waarbij T_1 het oplegmoment is in het vergeet-me-nietje:



Fig. 192 Snedekrachten ten gevolge van φ_2 .

Het vergeet-me-nietje geeft dan:

$$\varphi_2 = \frac{L \cdot T_2}{4 \cdot EI}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot T_2$$

↓

$$T_1 = \frac{2 \cdot EI}{L} \cdot \varphi_2$$

$$T_2 = \frac{4 \cdot EI}{L} \cdot \varphi_2$$

Voor de relaties tussen de koppels en φ_1 kunnen we onderstaande model gebruiken, waarbij T_2 het oplegmoment is in het vergeet-me-nietje:

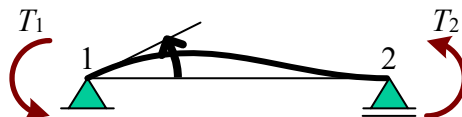


Fig. 193 Snedekrachten ten gevolge van φ_1 .

Dit geeft:

$$\varphi_1 = \frac{L \cdot T_1}{4 \cdot EI}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot T_1$$

↓

$$T_1 = \frac{4 \cdot EI}{L} \cdot \varphi_1$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot EI}{L} \cdot \varphi_1$$

Samen geeft dit twee vergelijkingen:

$$T_1 = \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_1 + \frac{2EI}{L} \cdot \varphi_2$$

$$T_2 = \frac{2EI}{L} \cdot \varphi_1 + \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_2$$

Deze kunnen samen geschreven worden in een elementstijfheidsmatrix:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Welke vermenigvuldigd met de verplaatsingsvector $\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$ de koppels in de krachtvector $\mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ geeft.

De individuele termen van deze standaard elementstijfheidsmatrix kunnen we voortaan direct gebruiken. Dat doen we door deze op te tellen in de globale stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$, waarbij de index van de rijen en kolommen overeen moeten komen met de uiteindes van de elementen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\mathbf{K}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Directe opstelling van de krachtterm

Aangezien in de krachtvector alle losse koppels uitkwamen, kunnen we de externe koppels en oplegmomenten ook direct opstellen. Net als de stijfheden kunnen we dit direct doen zonder expliciet de evenwichtsvergelijkingen uit te schrijven. We hoeven enkel de externe koppels en oplegmomenten toe te voegen op de juiste plek in de krachtvector.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Uitwendige koppels} \\ \text{Oplegmomenten} \end{array}$$

Stappenplan

De stappen van de matrixmethode zijn als volgt:

► Algoritme (Matrixmethode)

1. Bepaal de vrijheidsgraden (rotaties). Dit vormt de onbekende

$$\text{verplaatsingsvector } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

2. Initialiseer het stelsel van vergelijkingen $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ met een nulmatrix voor $\mathbf{K}$ en -vector $\mathbf{f}$.

3. Bepaal voor elk element de elementstijfheidsmatrix

$$\left(\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \right) \text{ en voeg deze toe aan de globale}$$

stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$ voor de bijbehorende knopen.

4. Construeer de globale krachtvector $\mathbf{f}$ door de externe krachten(koppels) toe te voegen voor de bijbehorende knopen.
5. Voeg de zowel de voorgeschreven vrijheidsgraden (rotaties) als de onbekende oplegreacties (oplegmomenten) toe aan het stelsel van vergelijkingen.
6. Los het stelsel van vergelijkingen $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ op voor de onbekende vrijheidsgraden (rotaties) in $\mathbf{u}$.

Voorbeeld

De toepassing van deze matrixmethode op een statisch onbepaalde constructie wordt in een voorbeeld getoond.

Voorbeeld

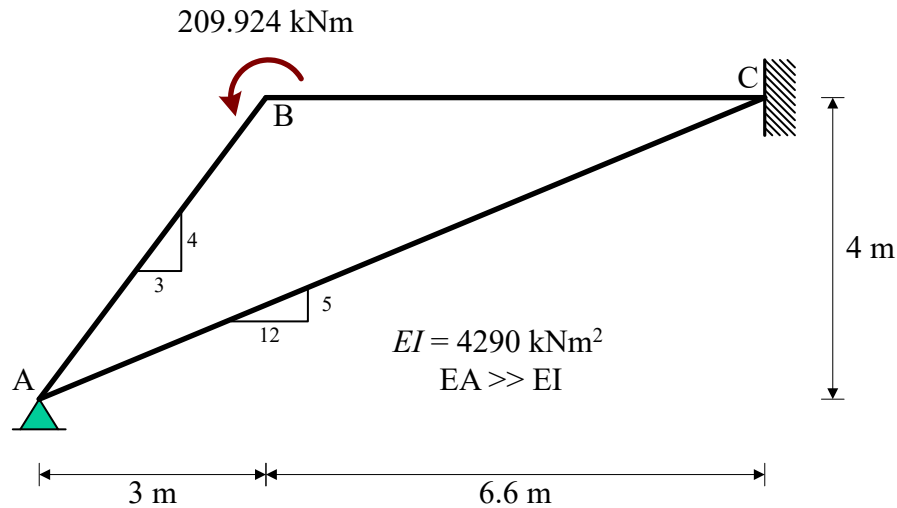


Fig. 194 Voorbeeldconstructie, $EI = 4290 \text{ kNm}^2$, $EA \gg EI$

1. Bepaal de vrijheidsgraden (rotaties). Dit vormt de onbekende verplaatsingsvector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Voor deze constructie zijn er drie knopen, dit geeft als verplaatsingsvector:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{bmatrix}$$

Waarbij we de rotaties rechtsom / met de klok mee als positief nemen.

2. Initialiseer het stelsel van vergelijkingen $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ met een nulmatrix voor $\mathbf{K}$ en -vector $\mathbf{f}$.

Voorbeeld

Dit geeft voor onze constructie een 3×3 matrix voor $\mathbf{K}$ en een 3×1 vector voor $\mathbf{f}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Bepaal voor elk element de elementstijfheidsmatrix $\left(\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \right)$ en voeg deze toe aan de globale stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$ voor de bijbehorende knopen.

Voorbeeld

Voor element AB met lengte 5 m wordt de elementstijfheidsmatrix:

$$\mathbf{K}_{AB}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot 4290}{5} & \frac{2 \cdot 4290}{5} \\ \frac{2 \cdot 4290}{5} & \frac{4 \cdot 4290}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3432 & 1716 \\ 1716 & 3432 \end{bmatrix}$$

Deze kunnen we direct invullen in de globale stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$. De knopen A en B komen overeen met de eerste en tweede rij en kolom van de globale stijfheidsmatrix. Dit geeft:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3432 & 1716 & 0 \\ 1716 & 3432 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voor element BC met lengte 6.6 m wordt de elementstijfheidsmatrix:

$$\mathbf{K}_{BC}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot 4290}{6.6} & \frac{2 \cdot 4290}{6.6} \\ \frac{2 \cdot 4290}{6.6} & \frac{4 \cdot 4290}{6.6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2600 & 1300 \\ 1300 & 2600 \end{bmatrix}$$

Ook deze kunnen we direct invullen in de globale stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$. De knopen B en C komen overeen met de tweede en derde rij en kolom van de globale stijfheidsmatrix. Dit geeft:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3432 & 1716 & 0 \\ 1716 & 6032 & 1300 \\ 0 & 1300 & 2600 \end{bmatrix}$$

Tot slot voegen we element AC met lengte 10.4 m toe. De elementstijfheidsmatrix is:

$$\mathbf{K}_{AC}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot 4290}{10.4} & \frac{2 \cdot 4290}{10.4} \\ \frac{2 \cdot 4290}{10.4} & \frac{4 \cdot 4290}{10.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1650 & 825 \\ 825 & 1650 \end{bmatrix}$$

Ook deze kunnen we direct invullen in de globale stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$. De knopen A en C komen overeen met de eerste en derde rij en kolom van de globale stijfheidsmatrix. Dit geeft:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5082 & 1716 & 825 \\ 1716 & 6032 & 1300 \\ 825 & 1300 & 4250 \end{bmatrix}$$

4. Construeer de globale krachtvector $\mathbf{f}$ door de externe krachten (koppels) toe te voegen voor de bijbehorende knopen.

Voorbeeld

Er is één extern koppel van 209.924 kNm dat op knoop B werkt. Deze werkt rechtsom / met de klok mee en is dus een positief koppel in onze krachtvector. Dit geeft:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 209.924 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Voeg de zowel de voorgeschreven vrijheidsgraden (rotaties) als de onbekende oplegreacties (oplegmomenten) toe aan het stelsel van vergelijkingen.

Voorbeeld

In knoop C is de rotatie voorgeschreven als $\varphi_C = 0$. Dit voegen we toe aan het stelsel van vergelijkingen door de tweede rij inclusief het onbekende oplegmoment in C die we positief aannemen:

$$\begin{bmatrix} 5082 & 1716 & 825 \\ 1716 & 6032 & 1300 \\ 825 & 1300 & 4250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 209.924 \\ M_C \end{bmatrix}$$

6. Los het stelsel van vergelijkingen $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ op voor de onbekende vrijheidsgraden (rotaties) in $\mathbf{u}$.

Voorbeeld

Alleen de eerste en tweede rij zijn relevant voor het oplossen van de onbekende rotaties. We kunnen dus de derde rij en kolom weglaten en de vergelijking herschrijven als:

$$\begin{bmatrix} 5082 & 1716 \\ 1716 & 6032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 209.924 \end{bmatrix}$$

Dit geeft:

- $\varphi_A = -0.0013 \text{ rad}$
- $\varphi_B = 0.0385 \text{ rad}$

Meer voorbeelden

In hoofdstuk 5 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)) wordt de matixmethode behandeld. In hoofdstuk 5.5 is de stof van voorbeeld 1 na het bepalen van de φ 's geen onderdeel van het vak. Dat geldt ook voor voorbeeld 1 in hoofdstuk 5.6.1 na het bepalen van de φ 's. Daarnaast worden hoofdstuk 5.5.2 en 5.7 niet behandeld.

Instructies in collegevorm

Dit onderwerp is [in les 12](#) gepresenteerd in collegevorm tot 0:43:10.

Oefeningen

Opgaves 5.1 - 5.5 in hoofdstuk 5.8 van het boek *Mechanica, Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse* ([Hartsuijker and Welleman, 2007](#)). De opgaves e - i zijn geen onderdeel van het vak. Vervang bij opgave 5.2 - 5.5 het uitkragende gedeelte door een koppel en neem de dwarskracht niet mee. Er zijn helaas geen antwoorden beschikbaar. Je kan de constructies doorrekenen met MatrixFrame om je antwoorden te controleren.

Begeleide oefening

Gegeven is de volgende constructie:

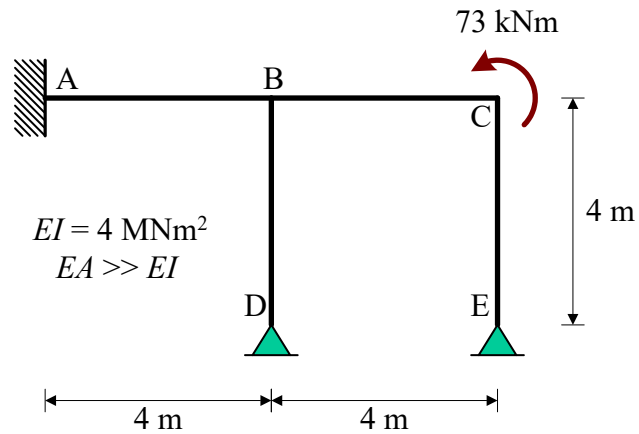


Fig. 195 Constructie, $EI = 4 \text{ MNm}^2$, $EA \gg EI$

Gegeven is $\mathbf{u} = [\varphi_A \quad \varphi_B \quad \varphi_C \quad \varphi_D \quad \varphi_E]^T$.

Opgave

Bepaal de elementstijfheidsmatrix $\mathbf{K}^{(e)}$ voor een willekeurig element.

Opgave

Bepaal de globale stijfheidsmatrix **K**.

Check je resultaat. Voer gehele getallen in. Ga uit van kN, m en rad voor je antwoorden.

K =

   Reuse

Opgave

Bepaal de krachtvector **F**.

Opgave

Bepaal de waarde van de vrijheidsgraden φ_B , φ_C , φ_D en φ_E .

Check je resultaat. Voer gehele getallen in.

$$\varphi_A = \text{} \text{ mrad}$$

$$\varphi_B = \text{} \text{ mrad}$$

$$\varphi_C = \text{} \text{ mrad}$$

$$\varphi_D = \text{} \text{ mrad}$$

$$\varphi_E = \text{} \text{ mrad (rond af op 1 decimaal, gebruik een . als decimaalteken)}$$

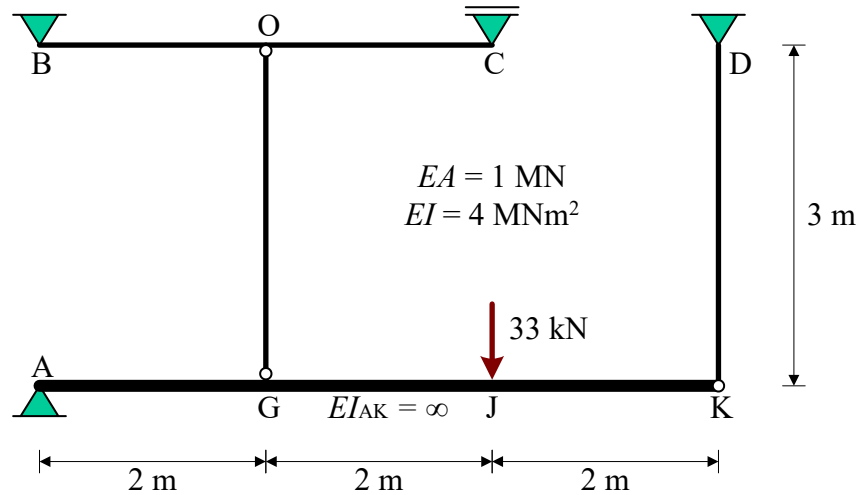
4 november: Tentamenopdracht

Tijdens het tentamen is onder andere statisch onbepaalde constructies behandeld.

Reguliere tentamenopdracht

Je eigen indiening en de beoordeling daarvan is hier te vinden: [ans* tentamenopdracht Statisch onbepaalde constructies 1](#).

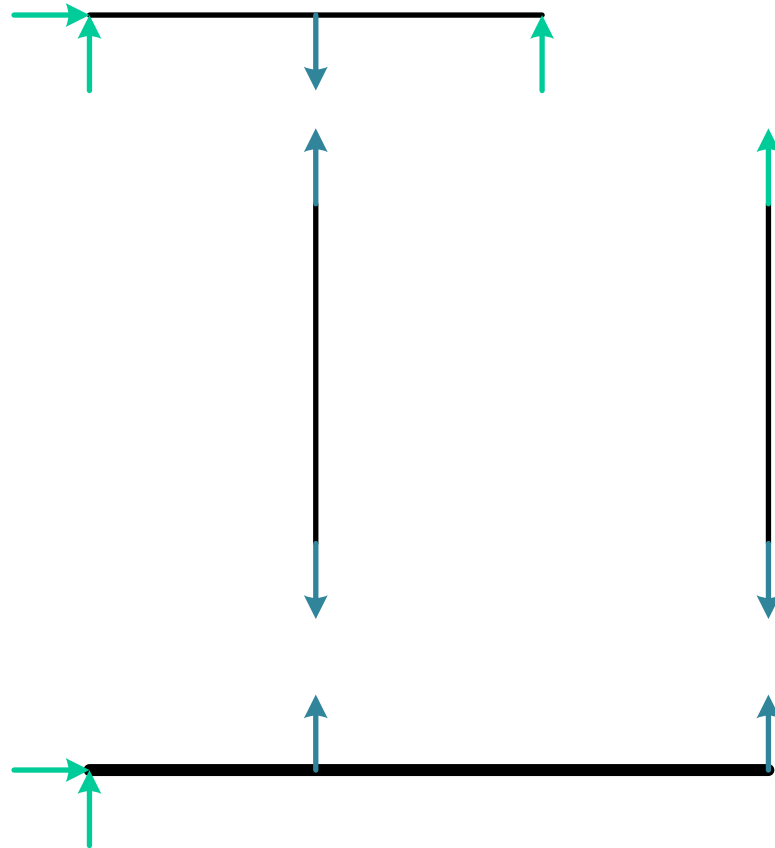
Gegeven is de volgende constructie:



Opgave

Laat zien dat deze constructie enkelvoudig statisch onbepaald is.

Voor deze constructie is de inwendige statisch onbepaaldheid gelijk aan de uitwendig statisch onbepaaldheid.



Er zijn 9 onbekenden en 8 evenwichtsvergelijkingen, waarmee is de constructie enkelvoudig statisch onbepaald.

**Statisch onbepaaldheid berekend met # oplegreacties - 3
evenwichtsvergelijkingen - # scharnieren**

Dit is een aanpak die in constructiemechanica 1 is toegepast op scharnierliggers en driescharnierspanten, maar niet een methode die in het algemeen werkt. In dit geval komt de berekening echter wel op het goede antwoord uit: 7 oplegreacties - 3 evenwichtsvergelijkingen - 3 scharnieren = 1.

Als de constructie net anders zou zijn met het scharnier bij G in de ligger in plaats van daarboven, zou deze methode niet meer het juiste antwoord geven:

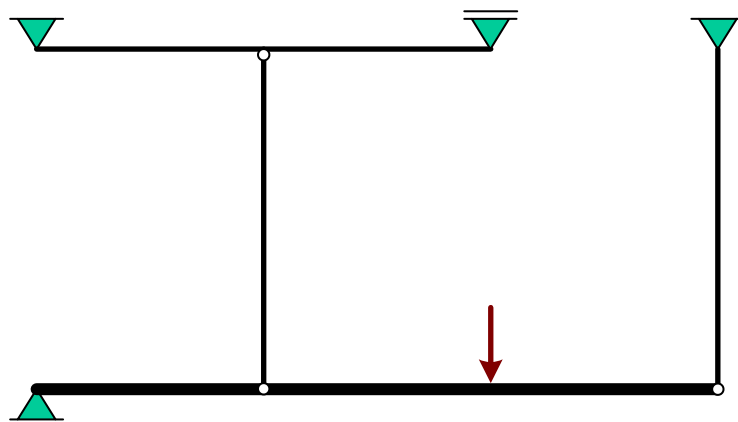


Fig. 196 Statisch bepaalde constructie met scharnier in de ligger in plaats van daarboven

De foutieve methode zou dan nog steeds op eerstegraads statisch onbepaald uitkomen, terwijl de juiste methode laat zien dat de constructie nu statisch bepaald is:

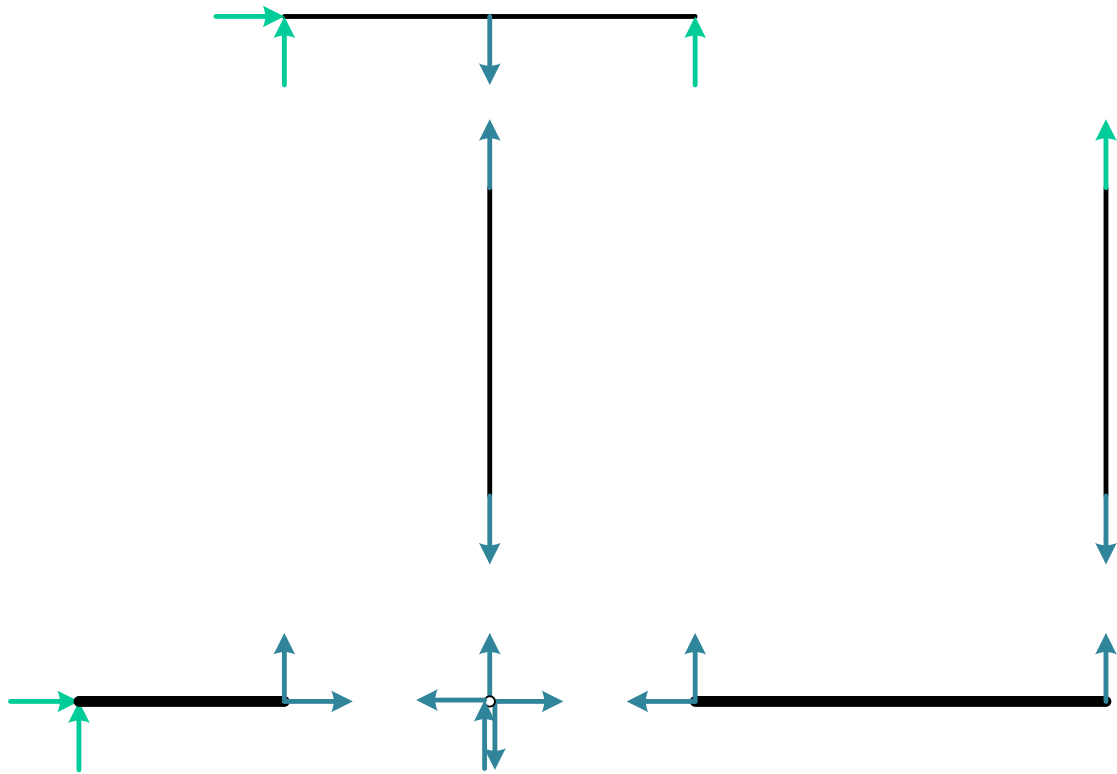


Fig. 197 Graad van statisch onbepaaldheid voor de constructie met scharnier in de ligger

Er zijn 13 onbekenden en 13 evenwichtsvergelijkingen, daarmee is de constructie met de juiste methode dus statisch bepaald

Constructie niet uit elkaar in scharnierende delen

Voor het berekenen van de statisch onbepaaldheid moet de constructie in alle scharnierende delen uit elkaar gehaald worden. Als dat niet gebeurt kan de statisch onbepaaldheid verkeerd worden berekend.

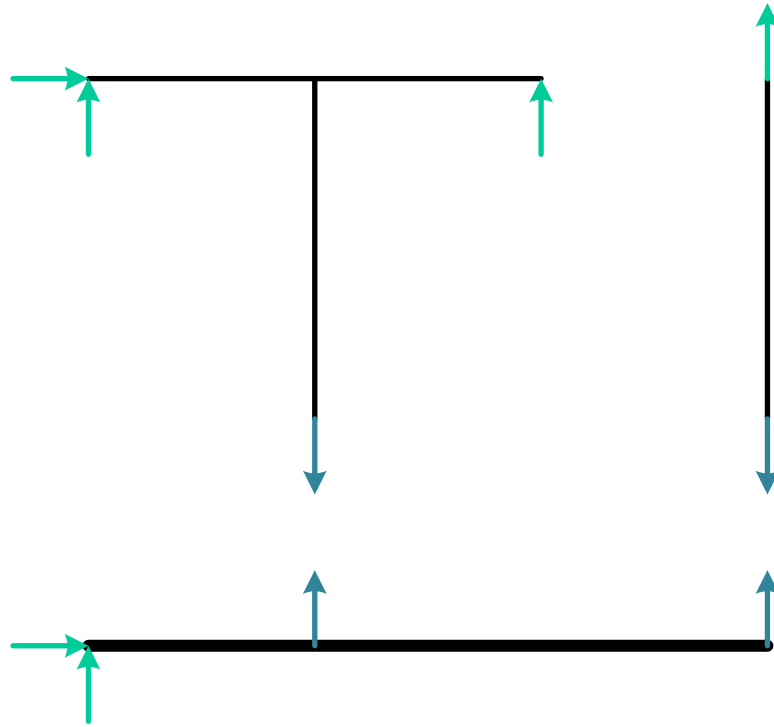


Fig. 198 Constructie onterecht niet volledig uit elkaar gehaald.

2 evenwichtsvergelijkingen voor star lichaam met krachten op uiteindes

Het aantal evenwichtsvergelijkingen voor een star lichaam is altijd gelijk aan 3, tenzij we het kunnen versimpelen tot een pendelstaaf: dan zijn alleen de krachten in de richting van de staaf onbekend en is er maar 1 evenwichtsvergelijking nodig (in de richting van de staaf). 2 evenwichtsvergelijkingen voor een staaf is dus niet mogelijk; het niet aanwezig zijn van een koppel betekent niet dat er geen momentenevenwichtsvergelijking kan worden toegepast

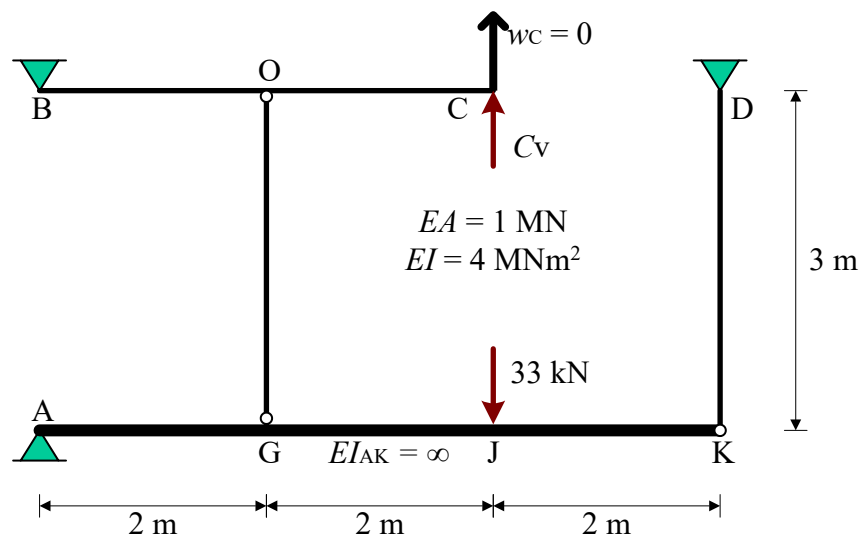


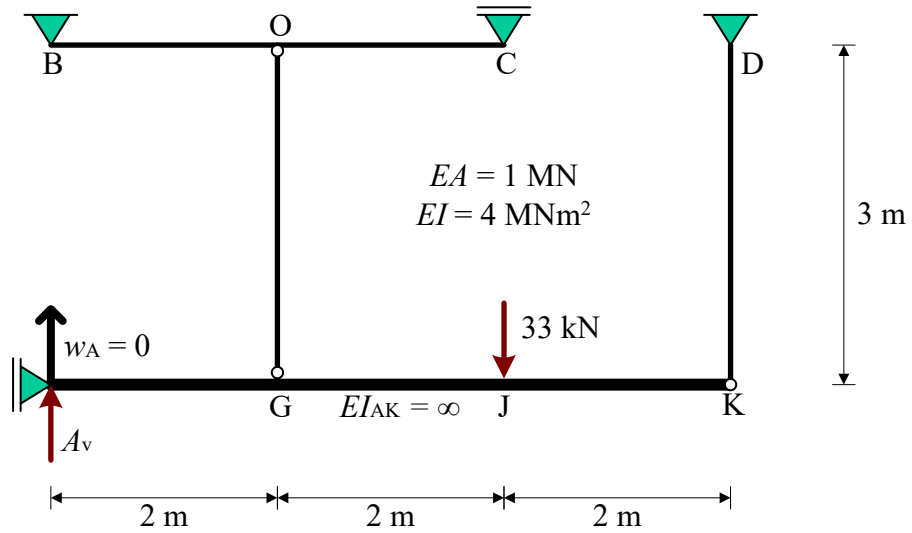
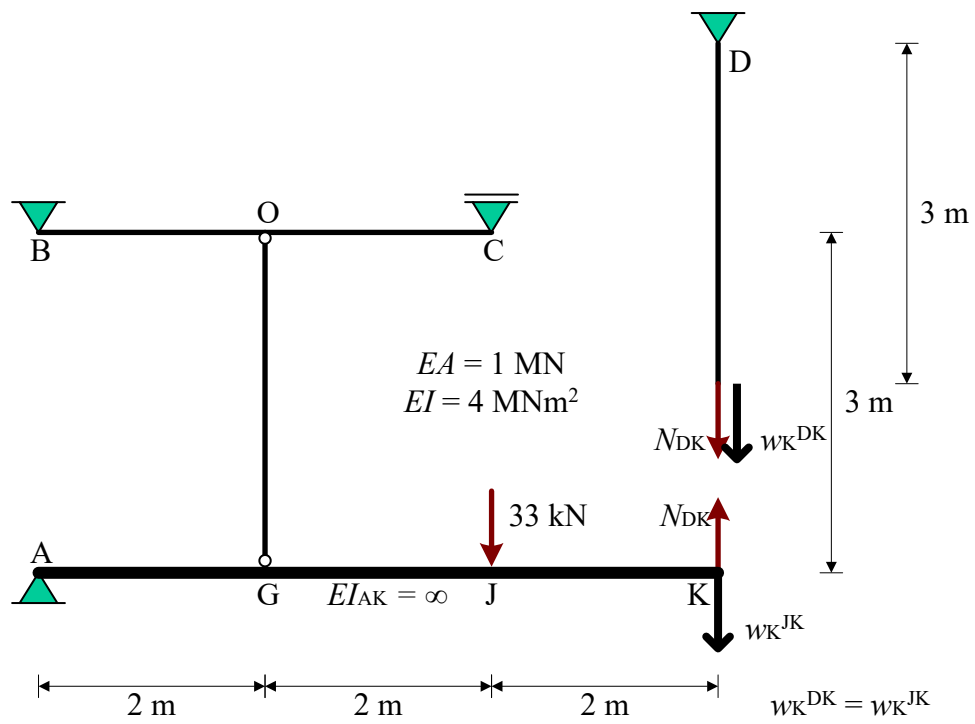
Fig. 199 Star lichaam met krachten op uiteindes

Opgave

Geef vier geldige varianten om deze constructie statisch bepaald te maken ten behoeve van de krachtenmethode of verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen. Zorg voor vier verschillende varianten: je aanpassingen moeten elk een ander onderdeel van de constructie aanpassen. Geef bij elk van de varianten de benodigde vergelijking(en) om de statisch onbepaalde kracht(en) of statisch onbepaalde verplaatsing(en) mee te kunnen bepalen.

Een aantal mogelijk opties zijn





Mechanisme gecreëerd

Er kunnen op verschillende manieren mechanismes worden gecreëerd:

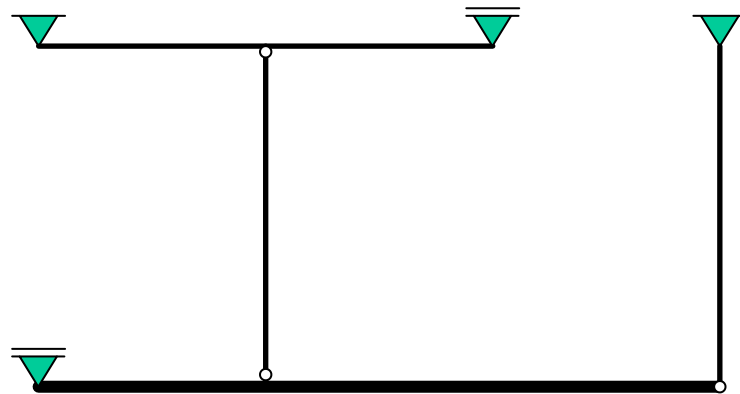
Losmaken horizontale oplegging bij A

Losmaken horizontale oplegging bij D

Losmaken horizontale oplegging bij C

Scharnier toevoegen in staaf OG

Scharnier toevoegen in staaf DK



De ligger AGJK kan nu vrij naar links en rechts bewegen.

Verplaatsingenmethode met vrijheidsgraden

Hoewel de verplaatsingemethode met vrijheidsgraden een prima methode is om de statisch onbepaalde constructie door te rekenen, is het niet een geldige statisch bepaalde constructie.

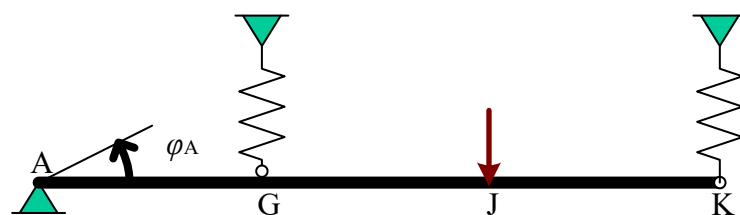


Fig. 200 Mogelijk constructie voor verplaatsingenmethode met vrijheidsgraden

Onterecht verplaatsing gelijk stellen aan 0

In sommige gevallen wordt een verplaatsing onterecht gelijk gesteld aan 0, terwijl deze verplaatsing juist onbekend is en alleen maar gelijk gesteld kan worden aan een andere onbekende verplaatsing.

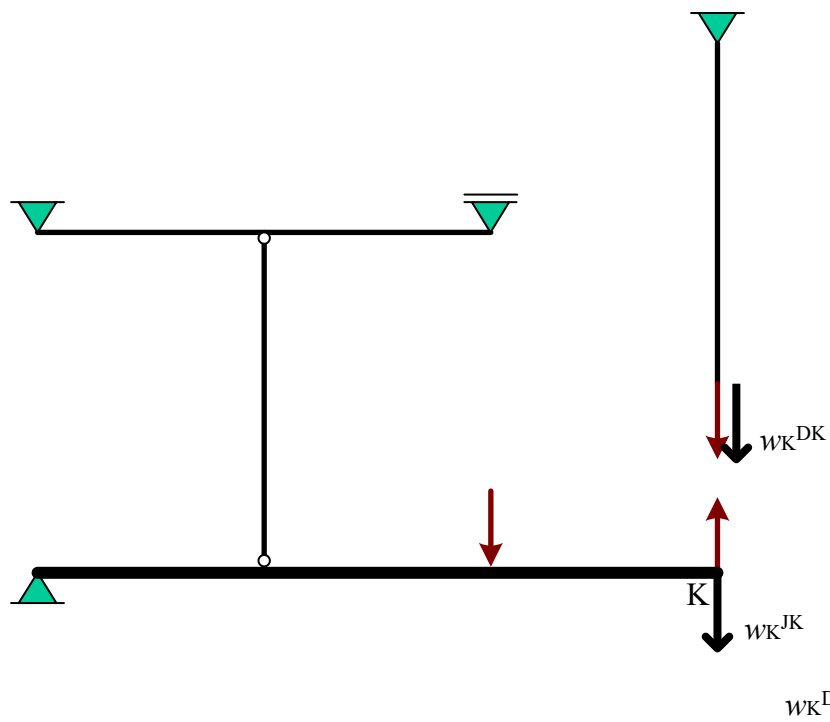
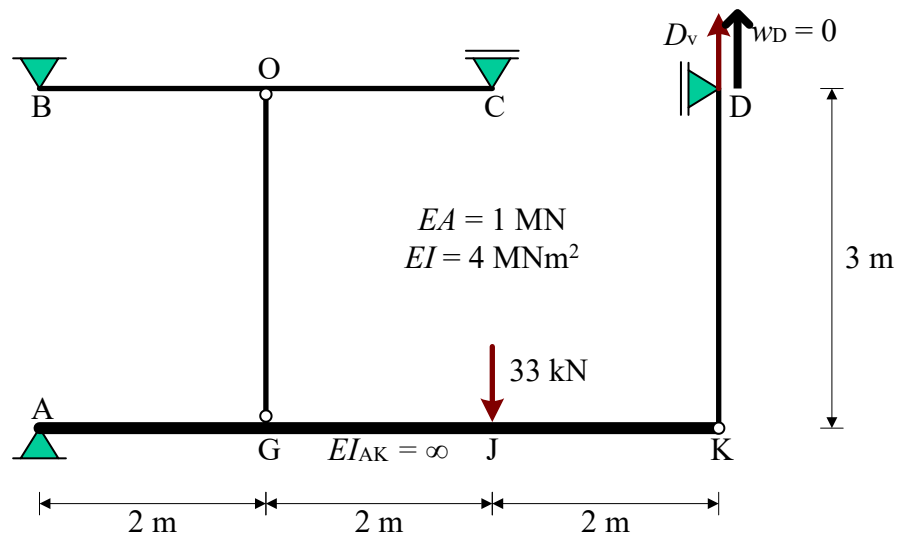


Fig. 201 Ten onrechte zeggen dat de verplaatsingen niet alleen aan elkaar gelijk zijn, maar ook gelijk aan 0.

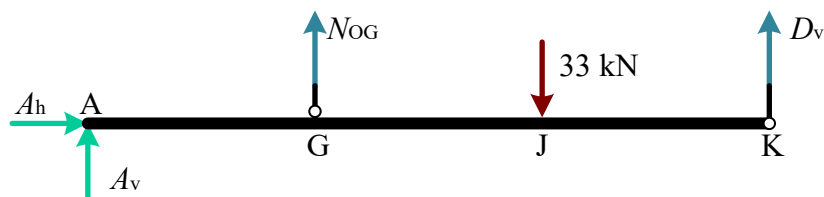
Opgave

Bepaal de zakking in G met behulp van de krachtenmethode of verplaatsingenmethode.

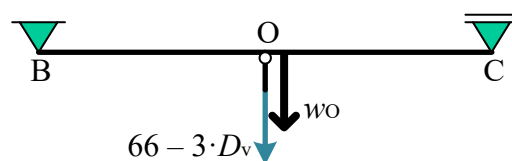
Als voorbeeld is de krachtenmethode toegepast met het volgende statisch bepaalde systeem bekeken, maar andere methodes zijn ook goed:



$$\sum F_v = 0 \rightarrow N_{DK} = D_v$$

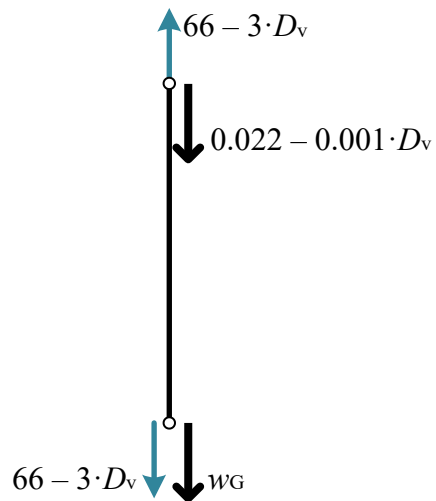


$$\sum T_A = 0 \rightarrow N_{OG} = 66 - 3 \cdot D_v$$



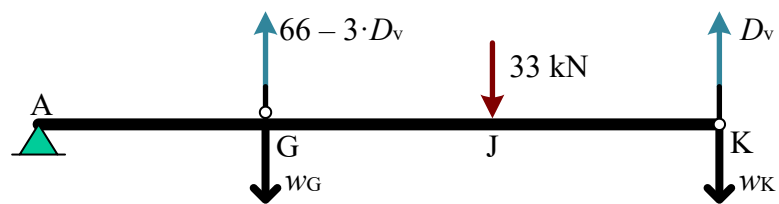
Vergeet-me-nietje geeft:

$$w_O = 0.022 - 0.001 \cdot D_v$$



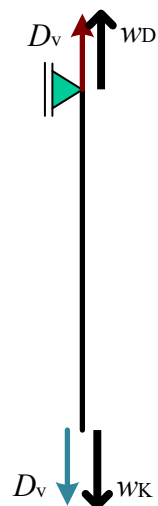
Verlenging van staaf geeft:

$$w_G = 0.22 - 0.01 \cdot D_v$$



Rotatie van starre staaf geeft:

$$w_K = 0.66 - 0.03 \cdot D_v$$



Verlenging van staaf geeft:

$$w_D = 0.66 - 0.033 \cdot D_v$$

Oplossen van de vormveranderingsvoorwaarde geeft: $w_D = 0 \rightarrow D_v = 20 \text{ kN}$

Invullen in $w_G = 0.22 - 0.01 \cdot D_v$ geeft: $w_G = 20 \text{ mm}$

Constructie foutief versimpelen / starre rotaties niet meegenomen

De constructie wordt op verschillende manieren verkeerd versimpeld door verplaatsingen / krachten te negeren en/of opleggingen toe te voegen. Daarnaast worden starre rotaties van delen van de constructie soms niet meegenomen.

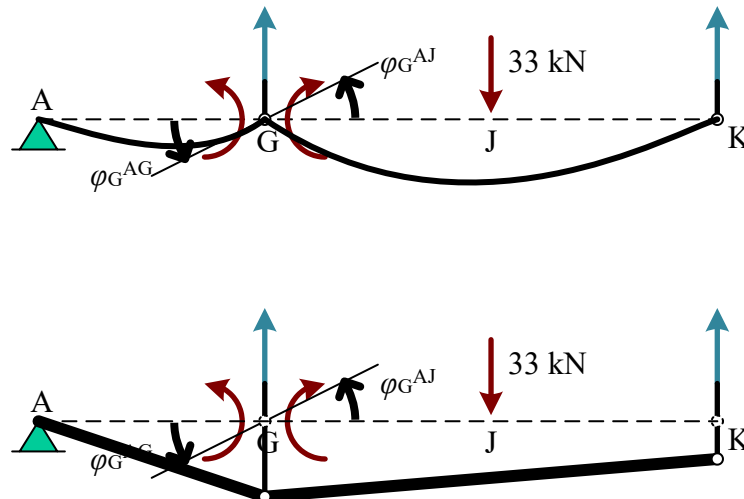


Fig. 202 Boven voorbeeld van foutieve versimpeling door vervormingen van pendelstaven en **BC** te negeren en de verplaatsingen van **G** en **K** gelijk te stellen aan **0**. Daarnaast worden niet aanwezige vervormingen geïntroduceerd in the starre staaf. De hoekverandering zou een resultaat moeten zijn van de vervormingen van de niet starre delen (zoals onder getoond)

Rekstijfheid negeren De rekstijfheid van de pendelstaven wordt ten onrechte genegeerd, waardoor de verplaatsingen enkel een functie wordt van de buigende delen

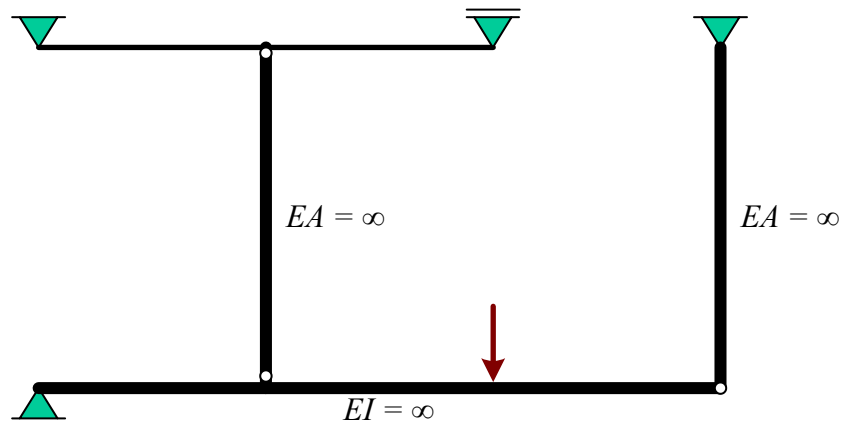


Fig. 203 Foutieve aanpassing waarbij de rekstijfheid van de pendelstaven oneindig groot wordt gemaakt.

Constructie oplossen met enkel (foutieve) evenwichtsvergelijkingen

De constructie wordt opgelost met enkel evenwichtsvergelijkingen door delen van de constructie te negeren. Zodra er krachten worden berekend zonder dat er vervormingen worden meegenomen kan de berekening niet kloppen.

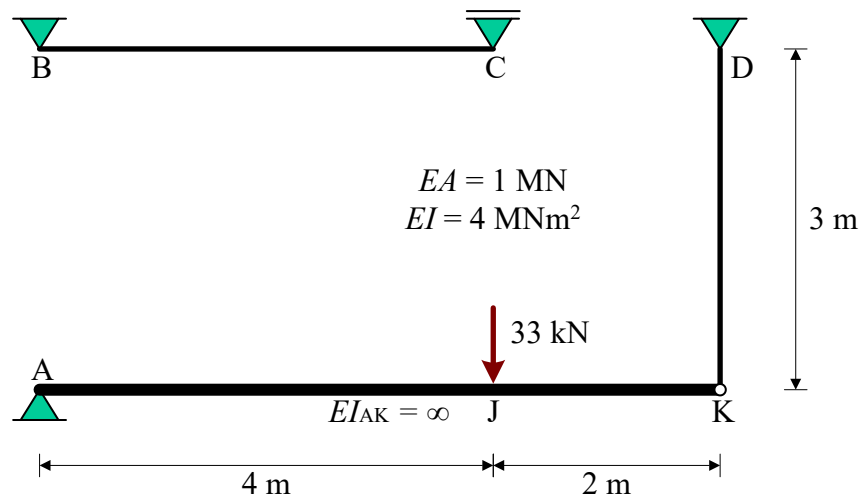


Fig. 204 Foutief vrijlichaamsschema van **AK** waarbij de pendelstaaf **OG** wordt genegeerd. Nu kunnen direct oplegreacties/inwendige krachten worden berekend

Opgave

Bepaal de normaalkracht in DK in de extreme gevallen dat de $EA_{OG} \rightarrow 0$ en $EA_{OG} \rightarrow \infty$.

Voor $EA_{OG} \rightarrow 0$ verandert de constructie in twee statisch bepaalde systemen:



Dit geeft met evenwicht:



$$\sum T_A = 0 \rightarrow N_{DK} = 22 \text{ kN}$$

Voor $EA_{OG} \rightarrow \infty$ is w_O gelijk aan w_G . Gebruikmakend van de berekeningen van de vorige vraag geeft $N_{DK} = 11 \text{ kN}$.

$$EA \rightarrow \infty \text{ geeft } N \rightarrow \infty$$

De relatie $N = EA \cdot \epsilon$ wordt onterecht geïnterpreteerd als dat als $EA \rightarrow \infty$, dan ook $N \rightarrow \infty$. Echter het enige wat geldt is dat als $EA \rightarrow \infty$, dan zal $\epsilon \rightarrow 0$ (geen rek); de kracht N kan nog steeds een eindige waarde hebben.

$$EA \rightarrow \infty \text{ geeft verplaatsingen van } 0$$

Hoewel de pendelstaaf oneindig steif wordt, kan deze nog steeds verplaatsingen overdragen tussen beide liggers. De verplaatsing van de pendelstaaf wordt soms ten onrechte volledig genegeerd, terwijl de oneindige stijve pendelstaaf nog steeds de verplaatsingen van de buigende ligger kan overdragen naar de andere ligger.

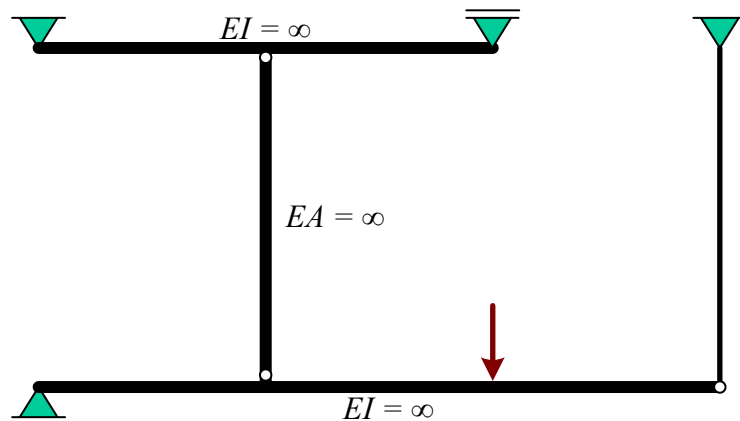
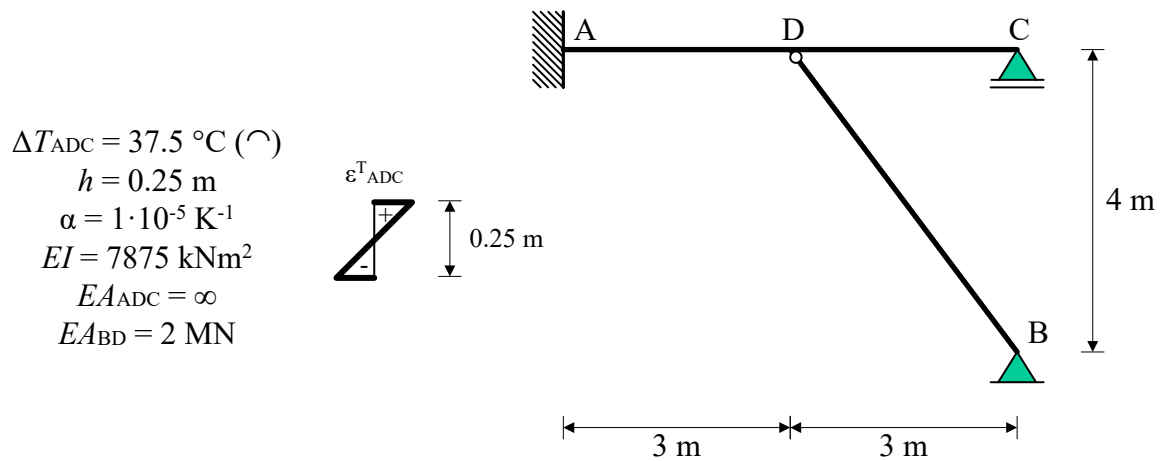


Fig. 205 Niet overdragen van verplaatsingen door oneindig stijve pendelstaaf komt neer op het modelleren als de andere ligger ook als oneindig stijf

Extra tentamenopdracht

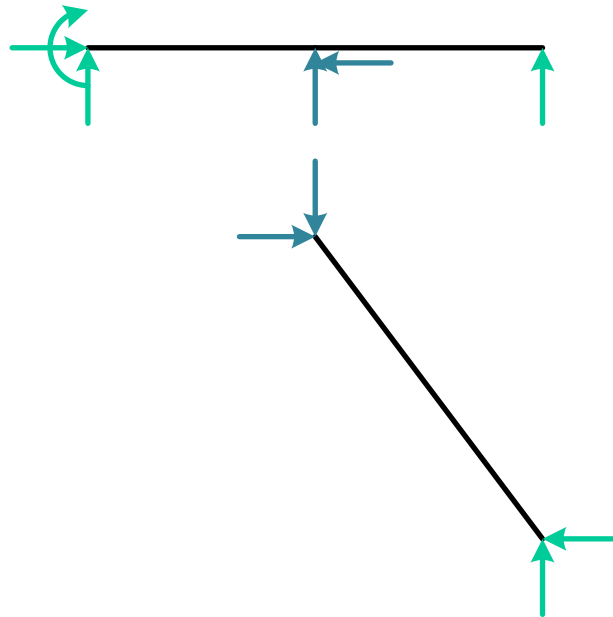
Deze tentamenopgave werd niet aangeboden aan de reguliere groep studenten.

Gegeven is de volgende constructie:



Opgave

Laat zien dat deze constructie enkelvoudig statisch onbepaald is.



Voor deze constructie is de inwendige statisch onbepaaldheid gelijk aan de uitwendig statisch onbepaaldheid.

Er zijn 8 onbekenden en 6 evenwichtsvergelijkingen, waarmee is de constructie enkelvoudig statisch onbepaald.

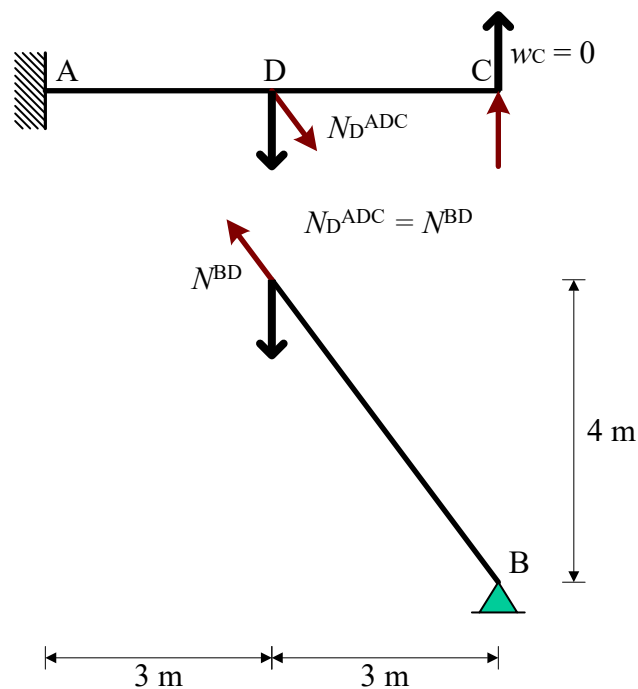
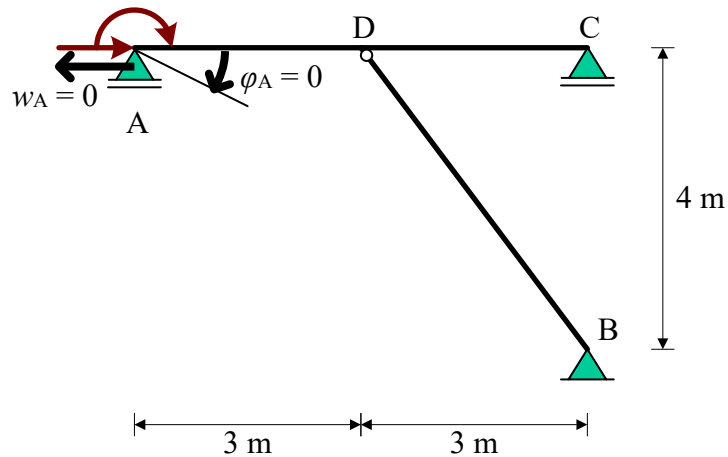
Opgave

Geef twee geldige varianten om deze constructie statisch bepaald te maken ten behoeve van de krachtenmethode of verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen. Zorg voor twee verschillende varianten: je aanpassingen moeten elk een ander onderdeel van de constructie aanpassen. Geef bij elk van de varianten de benodigde vergelijking(en) om de statisch onbepaalde kracht(en) of statisch onbepaalde verplaatsing(en) mee te kunnen bepalen.

Oplossing

Een scharnier toevoegen in hetzelfde segment of een pendelstaaf loshalen in hetzelfde segment telt niet als een geldige variant.

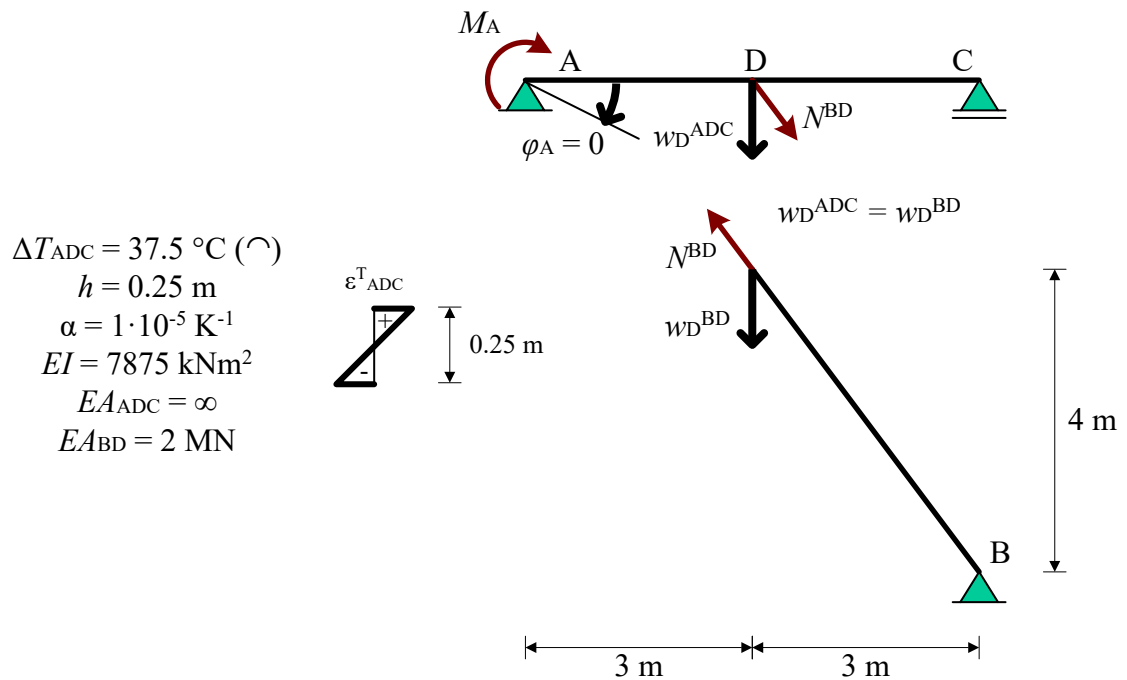
Een aantal mogelijk opties zijn



Opgave

Bepaal de verticale oplegreactie in A met behulp van de krachtenmethode of verplaatsingenmethode.

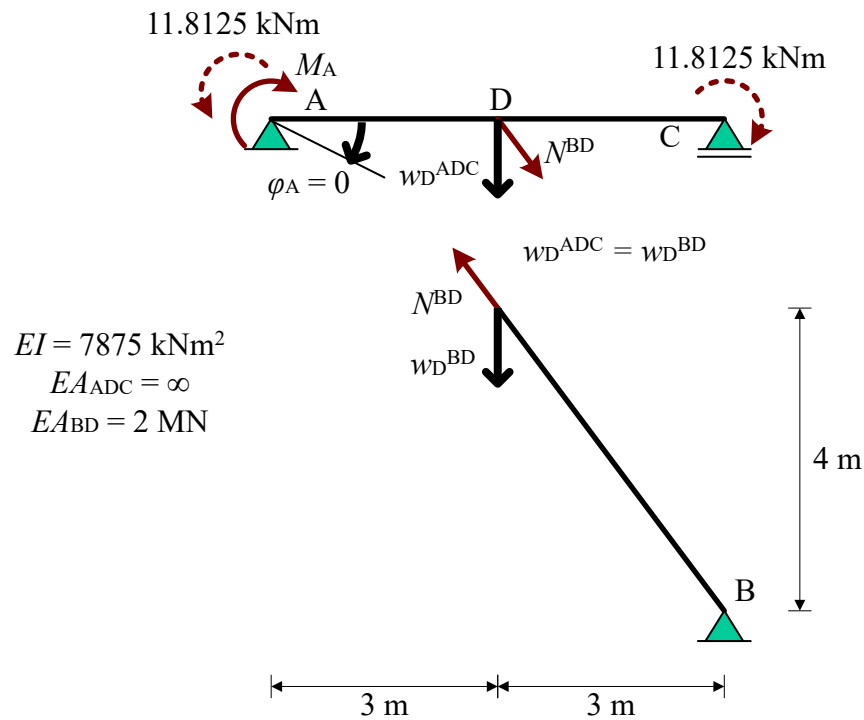
Als voorbeeld is de krachtenmethode toegepast met het volgende statisch bepaalde systeem bekeken, maar andere methodes zijn ook goed:



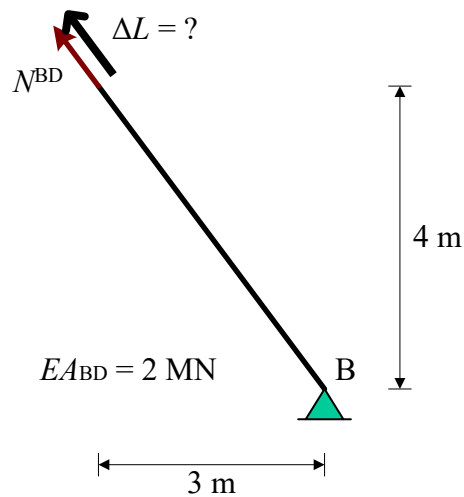
De temperatuursinvloed kan worden meegenomen met een kinematisch equivalente belasting op ADC:

$$M^T = 7875 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{37.5}{0.25} = 11.8125 \text{ kNm}$$

Deze moet worden aangebracht op beide uiteindes van ADC om tot een constante kromming te komen.

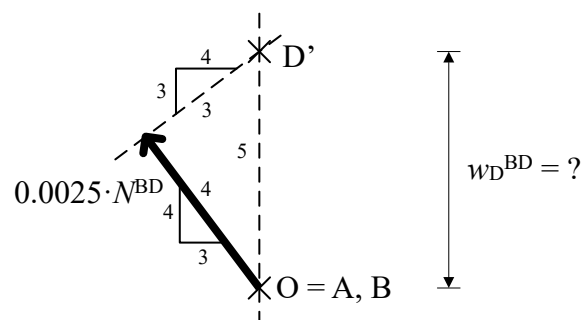


De verlenging van BD kan nu gevonden worden met de verlenging van een staaf:



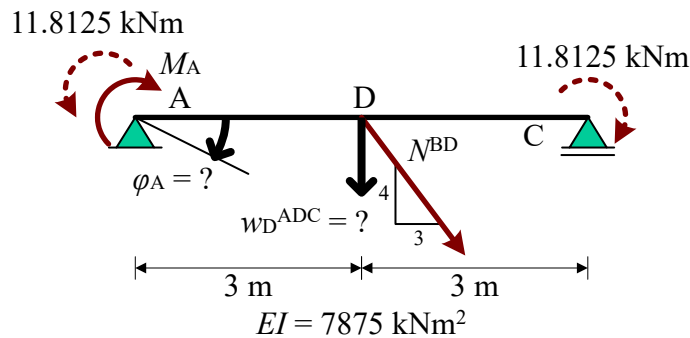
$$\Delta L_{BD} = \frac{N^{BD} \cdot 5}{2000} = \frac{N^{BD}}{400} = 0.0025 N^{BD}$$

De verplaatsing w_D^{BD} kan nu worden gevonden met williot:



$$w_D^{BD} = -\frac{N^{BD}}{400} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{N^{BD}}{320} = -0.003125 N^{BD}$$

De verplaatsing w_D^{ADC} en rotatie φ_A kan nu worden gevonden met vergeet-me-nietjes:



$$w_D^{ADC} = \frac{M_A \cdot 6^2}{16 \cdot 7875} - 2 \cdot \frac{11.8125^2}{16 \cdot 7875} + \frac{N^{BD} \cdot \frac{4}{5} \cdot 6^3}{48 \cdot 7875}$$

$$w_D^{ADC} = \frac{M_A}{3500} + \frac{2 \cdot N^{BD}}{4375} - \frac{27}{4000}$$

$$w_D^{ADC} \approx 0.0002857 M_A + 0.0004571 N^{BD} - 0.00675$$

$$\varphi_A = \frac{M_A \cdot 6}{3 \cdot 7875} - \frac{11.8125 \cdot 6}{6 \cdot 7875} - \frac{11.8125 \cdot 6}{3 \cdot 7875} + \frac{N^{BD} \cdot \frac{4}{5} \cdot 6^2}{16 \cdot 7875}$$

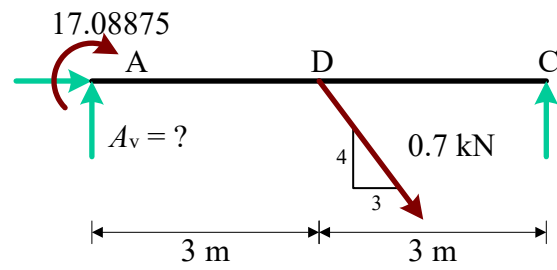
$$\varphi_A = \frac{M_A \cdot 2}{7875} + \frac{N^{BD}}{4375} - \frac{9}{2000}$$

$$\varphi_A \approx 0.000254 M_A + 0.0002286 N^{BD} - 0.0045$$

Solving for the displacement conditions gives:

$$\begin{cases} w_D^{ADC} = w_D^{BD} \\ \varphi_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} M_A &= \frac{13671}{800} = 17.08875 \text{ kNm} \\ N_{BD} &= 0.7 \text{ kN} \end{aligned}$$

De verticale oplegreactie in A kan nu worden gevonden met evenwichtsvergelijkingen:



$$\sum T|_C^{ADC} = 0 \rightarrow A_v = -\frac{4109}{1600} = -2.568125 \text{ kN } (\downarrow)$$

15 december: Wintercursus krachtenmethode, verplaatsingenmethodes en matrixmethode

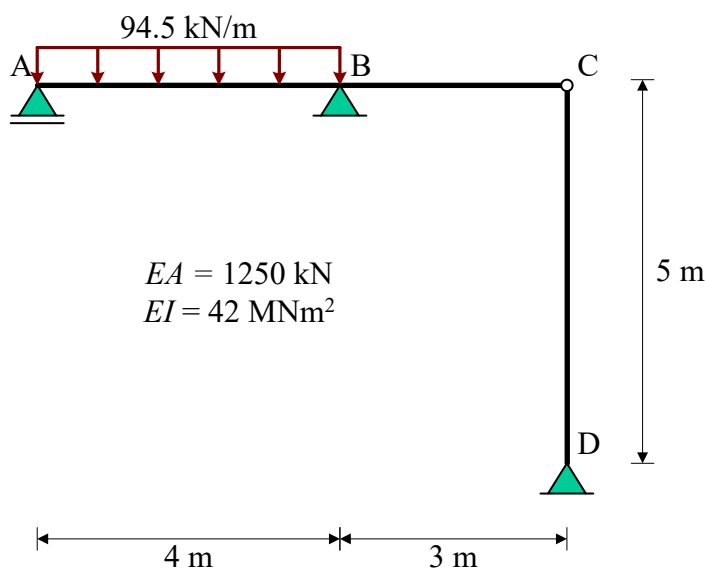
In deze les herhaal je de krachtenmethode, verplaatsingenmethodes en matrixmethode voor statisch onbepaalde constructies.

Begeleide oefening 1: Krachtenmethode en verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen

Inhoud

- Krachtenmethode
- Verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen

Gegeven is de volgende constructie:



“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van
https://oit.tudelft.nl/CT1000/2025/week_7/session_1/intro.html

Fig. 206 Constructie

Opgave

Is de graad van uitwendige statisch onbepaaldheid gelijk aan de graad inwendige statisch onbepaaldheid?

- ☐ Ja, want de constructie is open
- ☐ Ja, want de constructie bevat een scharnier
- ☐ Nee, want de constructie is gesloten
- ☐ Nee, want de constructie bevat een scharnier

   Reuse

Opgave

Splits de constructie in zo groot mogelijke, vormvaste, scharnierend verbonden delen en teken het vrijlichaamsschema van de scharnierende delen. Elimineer oplegreacties en staafkrachten die niet kunnen optreden vanwege pendelstaven.

Er zijn onbekende oplegreacties en onbekende verbindingskrachten. Dat zijn onbekende krachten in totaal.

Opgave

Opgave

Wat is de graad van statisch onbepaaldheid?

De constructie is ste/de graads uitwendig statisch onbepaald

Opgave

Welke van de volgende statisch bepaalde systemen kan gebruikt worden voor toepassing van de krachtenmethode, en voor sommige systemen voor toepassing van de verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen?

Krachtenmethode

Er wordt gekozen voor het volgende statisch bepaalde systeem:

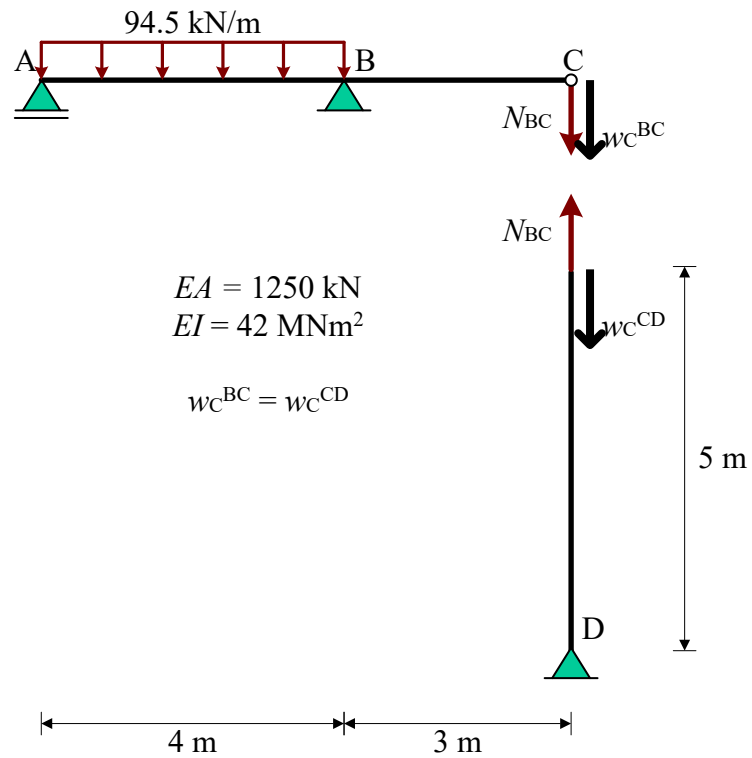


Fig. 207 Statistisch bepaalde constructie

Opgave

Los w_C^{BC} en w_C^{CD} op als functie N_{CD} .

Opgave

Los N_{CD} op.

Verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen

Er wordt gekozen voor het volgende statisch bepaalde systeem:

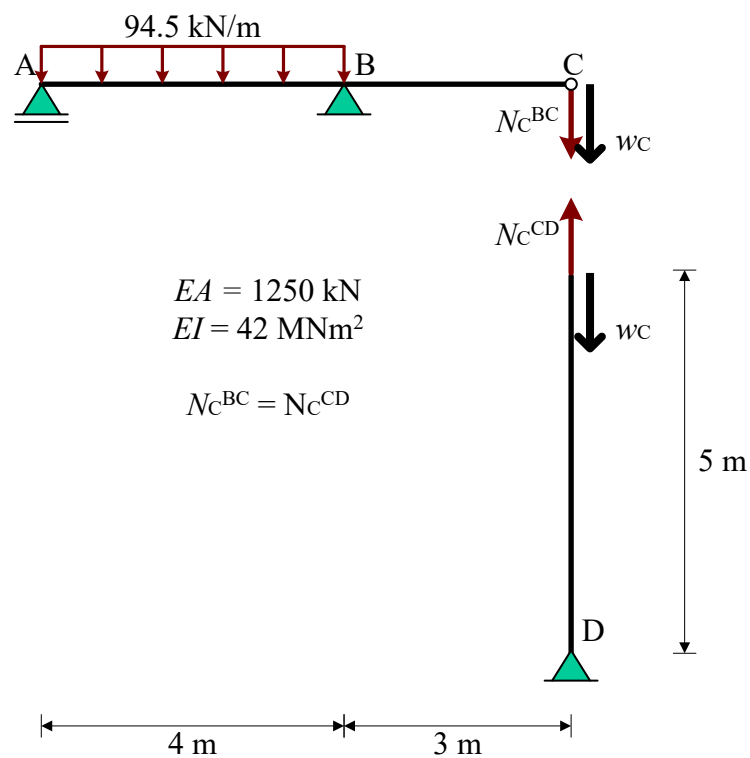


Fig. 208 Statistisch bepaalde constructie

Opgave

Los N_C^{BC} en N_C^{CD} op als functie w_C .

Check je resultaten. Ga uit van kN, m en rad voor je antwoorden en rond af op gehele getallen.

$$(N_{\text{C}}^{\text{BC}} \text{ left}(w_{\text{C}} \text{ right}) =) \text{ } \cdot w_{\text{C}} +) \text{ }$$

$$(N_{\text{C}}^{\text{DC}} \text{ left}(w_{\text{C}} \text{ right}) =) \cdot w_{\text{C}} +) \text{ }$$

   Reuse

Opgave

Los w_C op.

Check je resultaten. Rond af op gehele getallen

$$(w_{\text{C}} =) \text{ } \text{ (mm) }$$

   Reuse

Begeleide oefening 2: Verplaatsingenmethode met vrijheidsgraden en matrixmethode

Inhoud

- Verplaatsingenmethode met vrijheidsgraden
- Matrixmethode

Gegeven is de volgende constructie:

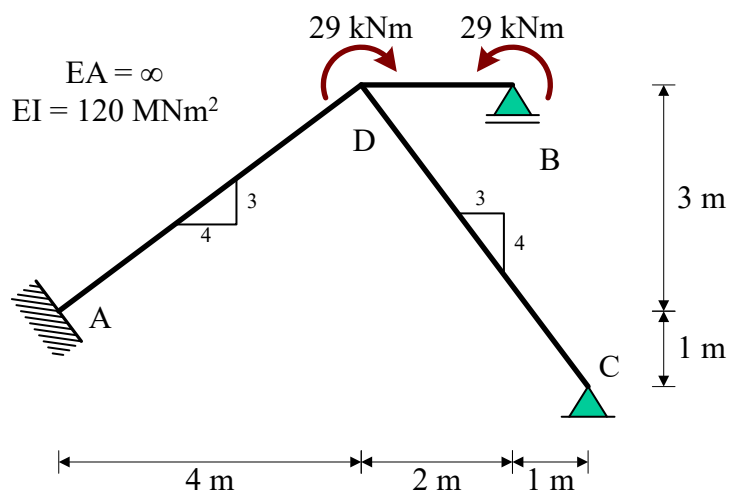


Fig. 209 Constructie

“ Bronvermelding

Deze pagina is aangepast van
https://oit.tudelft.nl/CT1000/2025/week_7/session_1/intro.html

Verplaatsingenmethode met

vrijheidsgraden

Alle verplaatsingen kunnen met vergeet-me-nietjes worden beschreven uitgedrukt in de rotatie van D.

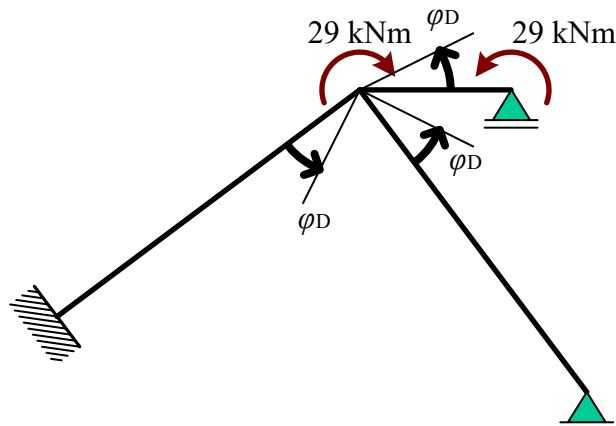


Fig. 210 Vrijheidsgraad φ_D

Opgave

Gegeven zijn 6 vergeet-me-nietjes:

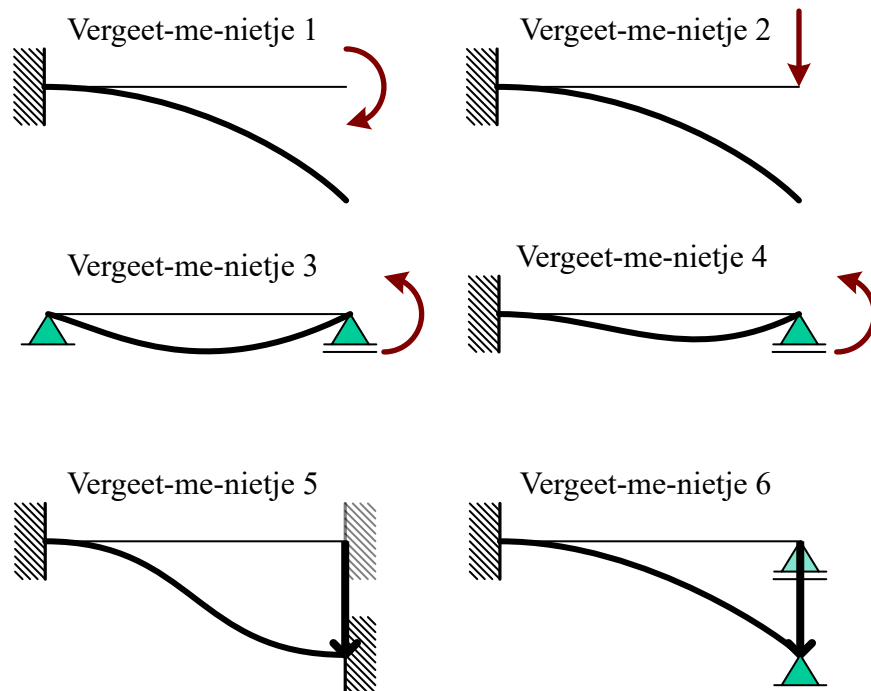


Fig. 211 Vergeet-me-nietjes

Welke vergeet-me-nietjes heb je nodig om de rotatie in D te beschrijven?

☐ Vergeet-me-nietje 1

☐ Vergeet-me-nietje 2

☐ Vergeet-me-nietje 3

☐ Vergeet-me-nietje 4

☐ Vergeet-me-nietje 5

☐ Vergeet-me-nietje 6

☒ Controleer

De constructie wordt gesplitst in D. Daarmee kunnen we het vrijlichaamsschema van beide delen en knoop D tekenen.

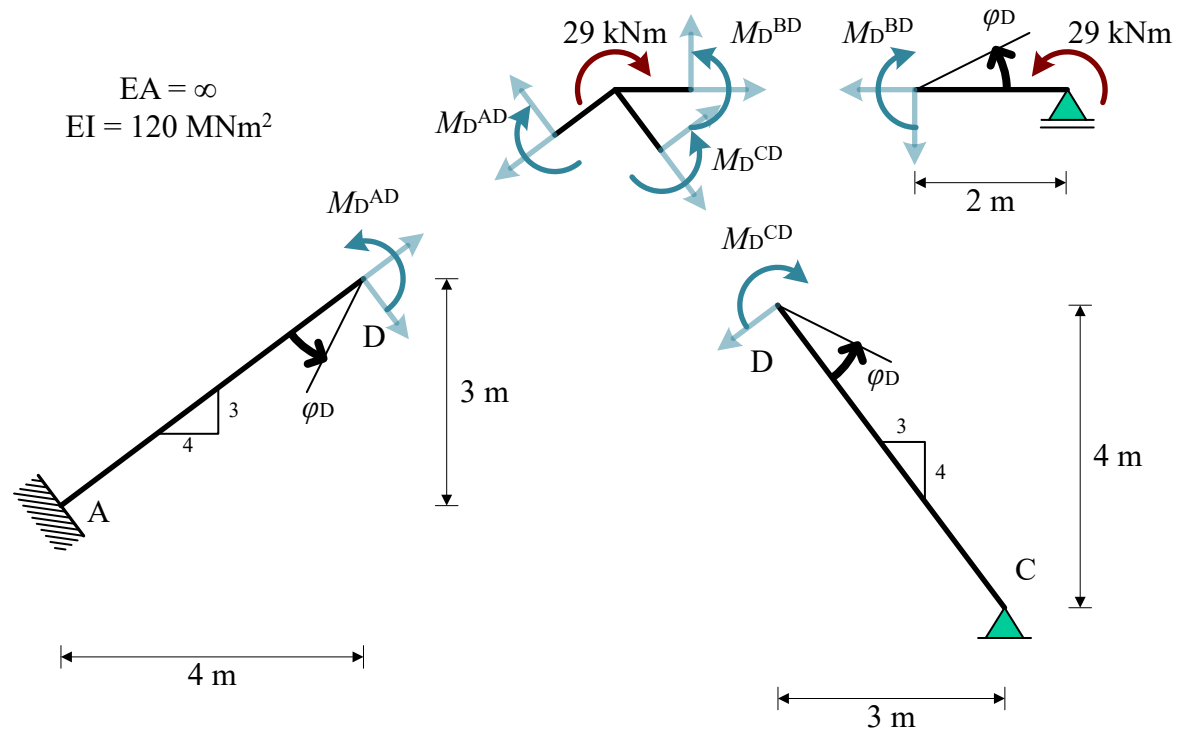


Fig. 212 Vrijlichaamsschema's van drie delen en knoop D

Opgave

Los M_D^{AD} , M_D^{CD} en M_D^{BD} op als functie φ_D .

Opgave

Los φ_D op.

Check je resultaten. Rond af op 3 decimalen en gebruik een . als decimaalteken.

$\varphi_D =$ rad

  Reuse

Matrixmethode

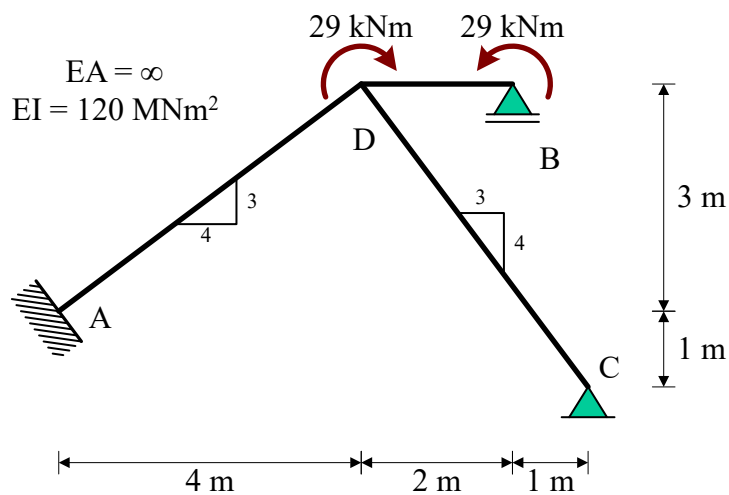


Fig. 213 Constructie

Gegeven is $\mathbf{u} = [\varphi_A \quad \varphi_B \quad \varphi_C \quad \varphi_D]^T$.

Opgave

Bepaal de elementstijfheidsmatrix $\mathbf{K}$ voor element AD en CD.

Opgave

Bepaal de elementstijfheidsmatrix **K** voor element BD.

Check je resultaat. Voer gehele getallen in. Ga uit van kN, m en rad voor je antwoorden.

$$K^{BD} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

  Reuse

Opgave

Bepaal de globale stijfheidsmatrix **K**.

Check je resultaat. Voer gehele getallen in. Ga uit van kN, m en rad voor je antwoorden.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

Opgave

Bepaal de krachtvector **F**.

Bepaal de waarde van de vrijheidsgraden φ_A , φ_B , φ_C en φ_D .

Check je resultaat. Rond af op 4 decimalen en gebruik een . als decimaalteken.

$$\varphi_{\text{A}} = \quad \text{mrad}$$

$$\varphi_{\text{B}} = \text{ } \text{mrad}$$

$$\varphi_{\text{C}} = \quad \text{mrad}$$

$$\varphi_{\mathrm{D}} = \quad \quad \quad \mathrm{mrad}$$

Changelog

Inhoud

- 2025-12-05: v2025.23.0
- 2025-12-03: v2025.22.0
- 2025-11-07: v2025.21.0
- 2025-11-04: v2025.20.0
- 2025-10-31: v2025.19.0
- 2025-10-28: v2025.18.0
- 2025-10-22: v2025.17.0
- 2025-09-30: v2025.16.0
- 2025-09-25: v2025.15.0
- 2025-09-24: v2025.14.0
- 2025-09-22: v2025.13.0
- 2025-09-19: v2025.12.0
- 2025-09-19: v2025.11.1
- 2025-09-18: v2025.11.0
- 2025-09-18: v2025.11.0
- 2025-09-17: v2025.10.0
- 2025-09-16: v2025.9.0
- 2025-09-10: v2025.8.0
- 2025-09-10: v2025.7.0
- 2025-09-10: v2025.6.0
- 2025-09-09: v2025.5.1
- 2025-09-09: v2025.5.0
- 2025-09-08: v2025.4.0
- 2025-09-04: v2025.3.0
- 2025-09-03: v2025.2.0
- 2025-09-03: v2025.1.1
- 2025-09-03: v2025.1.0
- 2025-09-02: v2025.0.4
- 2025-09-01: v2025.0.3
- 2025-08-26: v2025.0.2
- 2025-08-20: v2025.0.1

Reguliere tentamenopdracht

Je eigen indiening en de beoordeling daarvan is hier te vinden: **ans**^{*}
[tentamenopdracht Statisch onbepaalde constructies 1](#).

Gegeven is de volgende constructie:

2025-12-05: v2025.23.0

Toevoegen veelgemaakte fouten aan [4 november: Tentamenopdracht - Reguliere tentamenopdracht](#)

2025-12-03: v2025.22.0

Toevoegen [15 december: Wintercursus krachtenmethode, verplaatsingsmethodes en matrixmethode](#)

2025-11-07: v2025.21.0

Toevoegen [4 november: Tentamenopdracht - Extra tentamenopdracht](#)

2025-11-04: v2025.20.0

Toevoegen [4 november: Tentamenopdracht - Reguliere tentamenopdracht](#)

2025-10-31: v2025.19.0

Aanpassing oefening in [22 september: Verplaatsingenmethode met statisch onbepaalde verplaatsingen - Begeleide oefening 1](#)

2025-10-28: v2025.18.0

Toevoegen link naar collegerame opnames

2025-10-22: v2025.17.0

Toevoegen [15 september: TOZ](#)

2025-09-30: v2025.16.0

Toevoegen uitwerkingen aan begeleide oefeningen van week 1 t/m 3.

2025-09-25: v2025.15.0

Toevoegen:

- [25 september: Matrixmethode - Instructie](#)
- [25 september: Matrixmethode - Begeleide oefening](#)

2025-09-24: v2025.14.0

Toevoegen:

- [24 september: Verplaatsingenmethode 2 - Begeleide oefening 1](#)
- [24 september: Verplaatsingenmethode 2 - Begeleide oefening 2](#)

2025-09-22: v2025.13.0

Toevoegen:

- [22 september: Verplaatsingenmethode - Begeleide oefening 1](#)
- [22 september: Verplaatsingenmethode - Begeleide oefening 2](#)
- [24 september: Verplaatsingenmethode 2 - Instructie](#)

2025-09-19: v2025.12.0

Toevoegen:

- [22 september: Verplaatsingenmethode - Instructie](#)

2025-09-19: v2025.11.1

Toevoegen buig- en rekstijfheden in bijschrijving figures omdat deze in sommige browsers niet zichtbaar is.

2025-09-18: v2025.11.0

Toevoegen:

- Stappen krachtenmethode en temperatuursinvloeden toegevoegd aan [18 september: Temperatuursinvloeden - Instructie](#)

2025-09-18: v2025.11.0

Toevoegen:

- [18 september: Temperatuursinvloeden - Begeleide oefening 1](#)
- [18 september: Temperatuursinvloeden - Begeleide oefening 2](#)

2025-09-17: v2025.10.0

Toevoegen:

- [17 september: Steunpuntszetting en stijfheden - Begeleide oefening 1](#)
- [17 september: Steunpuntszetting en stijfheden - Begeleide oefening 2](#)

2025-09-16: v2025.9.0

Toevoegen:

- [17 september: Steunpuntszetting en stijfheden - Instructie steunpuntszettingen](#)
- [17 september: Steunpuntszetting en stijfheden - Instructie stijfheden](#)
- [18 september: Temperatuursinvloeden - Instructie](#)

2025-09-10: v2025.8.0

Toevoegen:

- [11 september: Krachtenmethode raamwerk - Instructie](#)
- [11 september: Krachtenmethode raamwerk - Begeleide oefening 1](#)
- [11 september: Krachtenmethode raamwerk - Begeleide oefening 2](#)

2025-09-10: v2025.7.0

Toevoegen:

- [10 september: Krachtenmethode balken - Begeleide oefening 1](#)
- [10 september: Krachtenmethode balken - Begeleide oefening 2](#)

2025-09-10: v2025.6.0

Toevoegen:

- [10 september: Krachtenmethode balken - Instructie](#)

2025-09-09: v2025.5.1

Correctie normaalkracht en verlenging in [8 september: Krachtenmethode rek - Instructie](#)

2025-09-09: v2025.5.0

Toevoegen:

- [9 september: Krachtenmethode rek en Williot - Instructie](#)
- [9 september: Krachtenmethode rek en Williot - Begeleide oefening 1](#)

2025-09-08: v2025.4.0

Toevoegen:

- [8 september: Krachtenmethode rek - Begeleide oefening 1](#)

2025-09-04: v2025.3.0

Toevoegen:

- [8 september: Krachtenmethode rek - Instructie](#)

2025-09-03: v2025.2.0

Toevoegen:

- [4 september: Differentiaalvergelijkingen - Instructie](#)
- [4 september: Differentiaalvergelijkingen - Instructie - Stelsel vergelijkingen oplossen met een grafische rekenmachine](#)
- [4 september: Differentiaalvergelijkingen - Begeleide oefening 1](#)
- [4 september: Differentiaalvergelijkingen - Begeleide oefening 2](#)
- [4 september: Differentiaalvergelijkingen - Begeleide oefening 3](#)

2025-09-03: v2025.1.1

Toevoegen matrixframe bestanden als antwoord in:

- [3 september: Matrixframe - Begeleide oefening 1](#)
- [3 september: Matrixframe - Begeleide oefening 2](#)
- [3 september: Matrixframe - Begeleide oefening 3](#)

2025-09-03: v2025.1.0

Toevoegen:

- [3 september: Matrixframe - Begeleide oefening 1](#)
- [3 september: Matrixframe - Begeleide oefening 2](#)
- [3 september: Matrixframe - Begeleide oefening 3](#)

2025-09-02: v2025.0.4

- Toevoegen [3 september: Matrixframe - Instructie](#)

2025-09-01: v2025.0.3

- Vervangen [2 september: Statisch onbepaaldheid - Instructie - Figuur Aantal evenwichtsvergelijkingen per knoop](#)

2025-08-26: v2025.0.2

- Landingspagina van toekomstige lessen toegevoegd

2025-08-20: v2025.0.1

- Eerste publicatie van boek voor nieuwe studiejaar
- Hoofdstuk [Statisch onbepaaldheid](#) toegevoegd

Bronvermelding

Hartsuijker, C., & Welleman, J.W. (2006). *Engineering mechanics: Volume 1: Equilibrium*. Springer Dordrecht.

Hartsuijker, C., & Welleman, J.W. (2007). *Engineering Mechanics: Volume 2: Stresses, strains and displacements*. Springer Netherlands.

Hartsuijker, C., & Welleman, J.W. (2007). *Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse*. Boom Uitgevers.

Hartsuijker, C., & Welleman, J.W. (2015). *Mechanica: evenwicht*. Boom uitgevers Amsterdam.

Hartsuijker, C., & Welleman, J.W. (2016). *Mechanica: spanningen, vervormingen en verplaatsingen*. Boom uitgevers Amsterdam.

Credits en Licentie

Inhoud

- Hoe het boek is gemaakt  
- Licentie 
- Over de auteur 

Je kunt naar dit boek verwijzen als:

Tom van Woudenberg van de Technische Universiteit Delft (2025) *CTB2210 - Constructiemechanica 3*. <https://oit.tudelft.nl/CTB2210>. Bronbestanden op  [TUdelft-books/CTB2210](https://github.com/TUdelft-books/CTB2210). CC BY 4.0.

Je kunt naar individuele hoofdstukken of pagina's binnen dit boek verwijzen als:

`<Titel van Hoofdstuk of Pagina>`. in Tom van Woudenberg van de Technische Universiteit Delft (2025) *CTB2210 - Constructiemechanica 3*. `<url naar specifieke pagina op de boekwebsite>`. Bronbestanden op `<link naar specifieke commit / bestand in github repo>`. CC BY 4.0.

We verwachten dat de inhoud van dit boek aanzienlijk zal veranderen. Daarom raden we aan om direct de broncode te gebruiken met de bovenstaande referentie naar de GitHub-repository, inclusief datum en bestandsnaam. Hoewel er in de loop van de tijd inhoud wordt toegevoegd, blijven hoofdstuktitels en URL's naar verwachting redelijk stabiel. We geven echter geen garantie; als het belangrijk is om naar een specifieke locatie/commit binnen het boek te verwijzen, doe dit dan expliciet.

Hoe het boek is gemaakt

Deze website is geschreven in markdown [Back to top](#) en notebook-bestanden, die worden omgezet naar html met behulp van tools van [TeachBooks](https://teachbooks.github.io/). De bestanden zijn opgeslagen in een [publieke GitHub-repository](https://github.com/TUdelft-books/CTB2210). De website is te bekijken op <https://oit.tudelft.nl/CTB2210>.

Om de website opnieuw te maken heb je twee opties (meer informatie in de [TeachBooks handleiding](#)):

- In de GitHub-interface: fork deze repository, schakel Github Pages in via de bron GitHub actions (Settings - Code and automation - Pages - Build and deployment - Source - GitHub Actions), schakel workflows in (Actions - I understand my workflows, go ahead and enable them) en voer de call-deploy-book workflow uit (Actions - call-deploy-book - Run workflow - Run workflow). De website wordt gepubliceerd op de URL zoals weergegeven in het workflowoverzicht wanneer de workflow is voltooid (Actions - call-deploy-book - call-deploy-book - Summary).
- Op je eigen computer: clone deze repository, installeer de vereiste pakketten (`pip install -r requirements.txt`) en bouw het boek (`teachbooks build book`). De website wordt lokaal opgeslagen in `book/_build/index.html`.

Licentie

Dit boek is [CC BY 4.0 gelicenseerd](#) waardoor je het materiaal mag delen en aanpassen, zolang de bron wordt vermeld. Externe bronnen die in dit boek worden hergebruikt, staan hieronder vermeld.

Externe bronnen

Delen van dit boek zijn afkomstig uit andere externe bronnen en op verschillende manieren hergebruikt. In het bijzonder is er materiaal gedeeld met [CTS1000 Structural Mechanics 2025/2026](#) en [Structural Mechanics @ BSc Civil Engineering](#).

Over de auteur

Tom van Woudenberg



Tom is docent aan de Technische Universiteit Delft. Tom heeft een passie voor het mechanicaonderwijs en streeft ernaar een blended leerweg te faciliteren voor studenten, waarin actief leren aantrekkelijk en lonend is.

Tom is in 2020 afgestudeerd bij de Technische Universiteit Delft met onderzoek naar wiskundige optimalisatie van een constructief ontwerp. Van augustus 2020 tot augustus 2022 was Tom werkzaam bij de Hogeschool van Amsterdam als docent constructie, gespecialiseerd in constructiemechanica. Sinds september 2022 is Tom werkzaam bij de TU Delft.

Naast constructiemechanicavakken, geeft Tom vakken over optimalisatie, numerieke methodes, data-analyse en statistiek. Ook begeleidt Tom BSc- en MSc-studenten, deels onderdeel van zijn onderzoekproject over [Macaulay's methode](#). Daarnaast, ben ik actief betrokken in interfacultaire samenwerkingen zoals [PRIMECH](#), [TeachBooks](#) en diverse digitale tooling voor het onderwijs zoals [ANS](#) en Git

-  T.R.vanWoudenberg@tudelft.nl
-  tomvanw@hotmail.com
-  +31152789739
-  TU Delft – Civiele Techniek & Geowetenschappen - Afdeling 3MD – Kamer 6.45
-  [GitHub profiel](#)
-  [LinkedIn profiel](#)

-  [TU Delft profiel](#)

Dankwoord 🙏

Dank aan studentenassistent Iris Oskam en Martijn Westerhof voor het controleren van de antwoorden en toevoegen van uitwerkingen

Daarnaast veel dank aan de diverse collega's en studentassistenten van [TeachBooks](#) voor het samen ontwikkelen van tools en het bieden van ondersteuning om dit boek te verbeteren.