AXIOMATISCHE ONDERZOEKINGEN OVER DE VLAKKE MEETKUNDE

AXIOMATISCHE ONDERZOEKINGEN OVER DE VLAKKE MEETKUNDE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT, KRACHTENS ART. 2 VAN HET KONINKLIJK BESLUIT VAN 16 SEPTEMBER 1927, STAATSBLAD No. 310 EN OP GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS DR IR A. J. KLUYVER, HOOGLERAAR IN DE AFDELING DER SCHEIKUNDIGE TECHNOLOGIE, VOOR EEN COMMISSIE UIT DE SENAAT TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG 24 NOVEMBER 1948, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

HENDRIK ADOLF LAUWERIER

GEBOREN TE ROTTERDAM

GEDRUKT BIJ DRUKKERIJ WALTMAN — DELFT, 1948

DIT PROEFSCHRIFT EN DE STELLINGEN
ZIJN GOEDGEKEURD DOOR DE PROMOTOR PROF. DR O. BOTTEMA

AAN MIJN OUDERS

INHOUD

Pag.

Inleiding en Overzicht. 9

HOOFDSTUK I. Projectieve Meetkunde.

§ 1. De axioma's 11
§ 2. Homogene projectieve coördinaten op een lineaire drager 14
§ 3. Homogene projectieve coördinaten in het vlak 16
§ 4. Projectieve toevoeging 18
§ 5. Kegelsneden. 19
§ 6. Collineaties 22

HOOFDSTUK II. Het axioma van Pappus.

§ 7. Eenvoudige gevolgen 25
§ 8. Projectieve viertallen 28
§ 9. Rekenregels 30

HOOFDSTUK III. Het axioma van Desargues.

§ 10. Eenvoudige gevolgen 35
§ 11. Aequivalente drietallen 38
§ 12. Rekenregels 38

HOOFDSTUK IV. Euclidische Meetkunde.

§ 13. Inleiding 44
§ 14. Cirkels 45
§ 15. Kwadraatlengte. 46
§ 16. Gerichte metriek 50
§ 17. Loodrechte stand 53
§ 18. Oppervlakte 55
§ 19. Het Cartesiaanse coördinatenstelsel 56
§ 20. Gerichte cirkels. 56

HOOFDSTUK V. Niet-Euclidische Meetkunde.

§ 21. Inleiding 60
§ 22. Metriek 62
§ 23. Loodrechte stand 65
§ 24. De goniometrische functies. 66
§ 25. Toepassingen op driehoeken 68

INLEIDING EN OVERZICHT.

Het doel van het eerste hoofdstuk is om te laten zien dat de projectieve meetkunde, uitgaande van enige axioma's of rekenregels voor dubbelverhoudingen, op eenvoudige manier nauw aansluitend aan de gebruikelijke wijze van behandeling, ontwikkeld kan worden. Door consequent de dubbelverhouding-rekenwijze op de voorgrond te plaatsen ontstaat een goed evenwicht tussen de zuiver meetkundige methode enerzijds en de analytische methode anderzijds, waarbij de algebraïsche methode de basis vormt. In feite is het dus meer een kwestie in welke volgorde we de elementen van de meetkunde wensen te ontwikkelen. Wélke volgorde men prefereert is een kwestie van smaak. Hier bijvoorbeeld worden projectieve en analytische meetkunde gelijkelijk ontwikkeld. Dit komt bijvoorbeeld tot uitdrukking bij de behandeling van de kegelsneden. Tenslotte worden nog enige beschouwingen gewijd aan de collineaties en de affiniteiten.

Het tweede hoofdstuk beoogt, om nu uitgaande van het axioma van Pappus de projectieve meetkunde op meer meetkundige wijze op te bouwen. Projectieve puntenviertallen zijn hierbij gekenmerkt door het bezit van een Pascalrechte.

Voor de klassen van projectieve puntenviertallen definieren we een vermenigvuldiging en een optelling, en het blijkt nu eenvoudig dat aldus een commutatief lichaam ontstaat, waardoor aansluiting aan het in hoofdstuk I behandelde is verkregen. We wijzen nog op de symbolische notatie cQbPa met behulp waarvan sommige bewijzen in zeer vereenvoudigde vorm kunnen worden weergegeven; verg. b.v. de afleiding van de stelling van Desargues uit Pappus.

In het derde hoofdstuk kiezen we als uitgangspunt i.p.v. Pappus de affiene stelling van Desargues, waardoor de niet-commutatieve meetkunde ontstaat. De beschouwingen lopen geheel parallel aan die van het tweede hoofdstuk. Een tripel (ABC) correspondeert aldus met een puntenviertal (P_∞ ABC) waarbij P_∞ een oneigenlijk punt voorstelt. De aequivalentie van tripels wordt zo analoog aan die van projectieve viertallen gedefinieerd. De aequivalentie blijkt transitief te zijn, en voor de klassen van aequivalente tripels voeren we weer een vermenigvuldiging en optelling in. Vooral de optelling en de distributieve eigenschappen leveren enige moeilijkheden op. Deze kunnen evenwel overwonnen worden met behulp van een uitgebreidere meetkundige voorstelling van de optelling.

In het vierde hoofdstuk leiden we op de klassieke manier uit de projectieve en affiene meetkunde door invoering van een isotroop puntenpaar de Euclidische meetkunde af, waarbij overigens hier iets meer begrippen van de projectieve meetkunde toepassing vinden, b.v. bij het begrip kwadraatafstand. Een essentieel nieuw element treedt evenwel op bij de gerichte metriek en de goniometrische functies, waar hier de bekende formule van Laguerre onbruikbaar is. De grootte van de hoek tussen twee rechten is hier een zinloos begrip. Wel definieren we de tangens, cosinus en sinus van twee al of niet gerichte rechten. Een moeilijkheid treedt op bij orthogonale rechten. Na invoering van het begrip orthogonaal toegevoegde speer verdwijnen deze en dergelijke moeilijkheden als sneeuw voor de zon, en kunnen we de bekende elementaire planimetrische stellingen op eenvoudige wijze in deze beschouwingen inpassen. In het bijzonder wijzen we op de bekende stelling van Ptolemaeus, die hier in nieuw licht verschijnt.

In het vijfde hoofdstuk stellen we ons tot taak na te gaan in hoeverre de resultaten van het vierde hoofdstuk tot de niet-Euclidische meetkunde overgedragen kunnen worden. Een essentiele moeilijkheid is, dat in de Euclidische meetkunde in elke rechtenbundel de isotrope rechten reeds a priori uniform onderscheiden zijn in volgorde als gaande resp. door I_1 en I_2. Anders gezegd: in de Euclidische meetkunde is een uniforme draaizin (zeg b.v. tegenwijzerzin) mogelijk. In de niet-Euclidische meetkunde is dit niet meer mogelijk, het begrip tegenwijzerzin over het gehele vlak is hier zinloos. Desondanks blijkt het mogelijk de analogie met de Euclidische beschouwingen vrij ver door te voeren. Essentieel is ook hier weer het begrip orthogonaal toegevoegde speer. De bekende elementaire stellingen uit de boldriehoeksmeting kunnen met behulp hiervan nu vrij eenvoudig geldend gemaakt worden. De volstrekte dualiteit die hier heerst heeft anderzijds ook weer enkele voordelen.

HOOFDSTUK I.

Projectieve Meetkunde.

De Projectieve Meetkunde baseren we op een axiomastelsel bestaande uit een groep incidentie- of existentieaxioma's, en uit een groep rekenaxioma's die de rekenwijze met dubbelverhoudingen vastlegt. De dubbelverhoudingen zijn elementen van een getallenlichaam L, waarover we voorlopig geen bepaalde onderstellingen maken. Uit de axioma's volgt de commutativiteit van L. Bij beschouwingen over harmonische ligging onderstellen we de karakteristiek van L ongelijk aan twee om moeilijkheden te voorkomen. De projectieve meetkunde wordt op deze basis ontwikkeld, en nadat een projectief coördinatenstelsel gedefinieerd is, wordt ook een aanvang gemaakt met de analytische meetkunde. De kegelsneden behandelen we zowel van projectief als van analytisch standpunt en hier blijkt het nodig van L meer te veronderstellen, nml. dat in L de vierkantsworteltrekking uitvoerbaar is. Tenslotte eindigen we met enige beschouwingen over collineaties. Hiervan zullen we in het vierde en vijfde hoofdstuk gebruik maken.

§ 1. *De axioma's.*

De vlakke projectieve meetkunde leiden we af uit de volgende axioma's:

I. Verbindingsaxioma's en existentieaxioma:

1. Door twee punten gaat één en slechts één rechte.

2. Twee rechten snijden elkaar in minstens één punt.

3. Er bestaan minstens vier punten, waarvan geen drie collineair zijn.

II. Rekenaxioma's:

1. Aan elk viertal collineaire punten A, B, C, D waarvan geen drie tegelijk samenvallen is in deze volgorde een element e van een lichaam L toegevoegd;
Notatie: e = (ABCD).
Naam: dubbelverhouding van A, B, C, D.

2. Zijn A, B, C drie verschillende collineaire punten, dan is er, bij elk element e uit L juist één punt D met

$$(ABCD) = e$$

3. *a.* $(ABPQ)\,(ABQR) = (ABPR)$
b. $(ABCD) + (ACBD) = 1$.

4. Hoofdstelling van de projectieve meetkunde.
Zijn $A_1B_1C_1D_1$ en $A_2B_2C_2D_2$ twee elk collineaire puntenviertallen, en zijn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 concurrent, dan geldt:

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2).$$

De axioma's I behoeven geen nadere toelichting; we merken slechts op, dat ze in de duale vorm gebracht kunnen worden. Uit II 4 volgt, dat elke rechte op een rechtenviertal, waarvan geen drie tegelijk samenvallen, vier punten met dezelfde dubbelverhouding uitsnijdt; hiermede kunnen we dus het begrip dubbelverhouding van een rechtenviertal definieren. De axioma's II 1, 2, 3 kunnen onmiddellijk gedualiseerd worden, terwijl II 4 in zelfduale vorm gebracht kan worden:

Een puntenviertal en een rechtenviertal in perspectieve ligging hebben dezelfde dubbelverhouding.

Met de axioma's is nu de gehele hieruit ontwikkelde projectieve meetkunde zelfduaal, d.w.z. naast elke stelling geldt tegelijk de duale stelling.

We leiden uit de axioma's nu enige eenvoudige gevolgen af, waarbij we ons meestal beperken tot dubbelverhoudingen van punten, het dualiseren aan de lezer overlatend. Het expliciete gebruik van axioma I 3 laten we achterwege.

Uit II 3a volgt, dat $(ABPP)$ de eenheid van L is:

$$(ABPP) = 1 \qquad (ABPQ)\,(ABQP) = 1$$
$$(ABPQ)\,(ABQR)\,(ABRP) = 1$$

Uit II 3b volgt dan $(ABCB) = 0$ en $(ABBC) = \infty$.

Gemakkelijk ziet men in, dat alle dubbelverhoudingen $(AABC)$ gelijk zijn. Liggen nl. AB_1C_1 op l_1 en AB_2C_2 op l_2 dan zijn AAB_1C_1 en AAB_2C_2 perspectief, dus volgens II 4 $(AAB_1C_1) = (AAB_2C_2)$.

Uit het voorgaande volgt zowel $(AABC)\,(AACB) = 1$ als $(AAPQ)\,(AAQR)\,(AARP) = 1$ zodat $(AABC)$ slechts de waarde 1 kan hebben:

$$(AABC) = 1 \qquad (BAAC) = \infty \qquad (ABAC) = 0.$$

In verband met II 2 heeft men dus:

Vier collineaire punten zijn dan en alleen dan verschillend, wanneer hun dubbelverhouding niet 1, 0 en ∞ is.

Opmerking: gebruik van het ∞ symbool kan vermeden worden, door aan de puntenviertallen homogene getallenparen uit L toe te voegen.

Stelling 1: Voor vier collineaire punten geldt:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Bewijs: Kies een punt P buiten AB en een rechte d door D, niet door P gaande; d snijdt PA, PB, PC in E, F, G, voorts zij Q (PA, FC) en R (PB, EC).
Men heeft dan:

$$(ABCD) = P(ABCD) = (EFGD) = C(EFGD) = (EQPA) =$$
$$= F(EQPA) = (DCBA).$$ Analoog:
$$(ABCD) = C(EFGD) = (RFPB) = E(RFPB) = (CDAB).$$

Gevolg: L is commutatief.

Bewijs:

$(ABCP)\,(ABCQ) = (ABCQ)\,(ABQP)\,(ABCQ) = (ABCQ)\,(BAPQ)\,(BAQC) = (ABCQ)\,(BAPC) = (ABCQ)\,(ABCP)$.

Uit het bovenstaande kan men gemakkelijk afleiden, dat de 24 dubbelverhoudingen van vier punten A, B, C, D in één ervan $(ABCD) = e$ op de bekende manier uitgedrukt kunnen worden.

Zijn A, B, C drie verschillende collineaire punten, dan is er juist één punt D, waarvoor $(ABCD) = -1$ is. Is de karakteristiek van L gelijk aan twee, dan valt D blijkbaar met C samen. Bij beschouwingen over harmonische ligging veronderstellen we dan ook stilzwijgend de karakteristiek van L ongelijk aan 2. Voor de harmonische ligging is de bekende stelling van de volledige vierzijde met het bekende bewijs van belang:

Op elke diagonaal van de volledige vierzijde vormen de beide hoekpunten en de beide diagonaalpunten een harmonisch viertal.

Bij het bewijs van sommige projectieve stellingen maakt men met voordeel gebruik van de volgende eigenschap, die direct uit II 2 en II 4 volgt:

Liggen op de rechte a de punten $A_1\,A_2\,A_3$, op de rechte b de punten $B_1\,B_2\,B_3$ en is S (a, b), dan volgt uit $(SA_1A_2A_3) = (SB_1B_2B_3)$ dat $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ perspectief zijn; Analoog duaal.

Hiermede kan men b.v. de stellingen van Desargues en van Pappus-Pascal bewijzen:

Stelling 2: Liggen $\triangle\, A_1B_1C_1$ en $\triangle\, A_2B_2C_2$ perspectief, dan zijn de punten P (B_1C_1, B_2C_2) Q (C_1A_1, C_2A_2) R (A_1B_1, A_2B_2) collineair, en omgekeerd (Desargues).

Bewijs: Is T het snijpunt van A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 en snijdt TA_1A_2 B_1C_1 en B_2C_2 in D_1 en D_2, dan is:

$$A_1(D_1B_1C_1P) = T(D_1B_1C_1P) =$$
$$= T(D_2B_2C_2P) = A_2(D_2B_2C_2P)$$

Wegens $A_1D_1 \equiv A_2D_2$ zijn dus de rechtendrietallen $A_1(B_1C_1P)$ en $A_2(B_2C_2P)$ perspectief d.w.z. P, Q, R collineair. De omkering van de stelling is de duale vorm.

Stelling 3: Liggen op de rechte a de punten $A_1A_2A_3$ en op de rechte b de punten $B_1B_2B_3$, dan liggen de snijpunten C_1 (A_2B_3, A_3B_2), C_2 (A_3B_1, A_1B_3), C_3 (A_1B_2, A_2B_1) op een rechte. (Pappus-Pascal). Analoog duaal.

Bewijs: Snijdt A_1C_1 b in B_4 en B_1C_1 a in A_4, dan is:

$$A_1(B_1C_1C_2C_3) = (B_1B_4B_3B_2) =$$
$$= C_1(B_1B_4B_3B_2) = C_1(B_4B_1B_2B_3) =$$
$$= (A_1A_4A_3A_2) = B_1(A_1C_1C_2C_3).$$

De rechtendrietallen A_1 $(C_1C_2C_3)$ en B_1 $(C_1C_2C_3)$ zijn weer perspectief, dus $C_1C_2C_3$ *collineair.*

Stelling 4: Op de zijden BC, CA, AB van $\triangle$ ABC liggen de punten P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2. Zijn zowel $P_1Q_1R_1$ als $P_2Q_2R_2$ collineair, dan geldt:

$$(BCP_1P_2)\ (CAQ_1Q_2)\ (ABR_1R_2) = 1 \qquad \text{(Menelaus)}$$

Bewijs: Is S het snijpunt van l_1 $(P_1Q_1R_1)$ en l_2 $(P_2Q_2R_2)$ dan heeft men in doorzichtige notatie:

$$(BCP_1P_2)(CAQ_1Q_2)(ABR_1R_2) =$$
$$= S(BCl_1l_2).\ S(CAl_1l_2).\ S(ABl_1l_2) =$$
$$= (l_1l_2bc)(l_1l_2ca)(l_1l_2ab) = 1.$$

Duaal heeft men:

Stelling 5: Op de zijden BC, CA, AB van $\triangle$ ABC liggen de punten P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2. Zijn zowel AP_1, BQ_1, CR_1 als AP_2, BQ_2, CR_2 concurrent, dan geldt:

$$(BCP_1P_2)\ (CAQ_1Q_2)\ (ABR_1R_2) = 1 \qquad \text{(Ceva)}$$

§ 2. Homogene projectieve coördinaten op een lineaire drager.

We formuleren alles hier voor een puntenrij op een rechte. Onder de homogene projectieve coördinaten van een punt P t.o.v. drie gegeven punten O_1, O_2, E verstaan we de homogene greep (x_1, x_2) bepaald door:

$$(O_1O_2EP) = \frac{x_1}{x_2}$$

De homogene coördinaten x_1 en x_2 vervangen we meestal door de inhomogene: $x = \frac{x_1}{x_2}$.

T.o.v. O_1O_2E hebben O_1, O_2, E zelf de coördinaten ∞, 0, en 1. E heet eenheidspunt.

Hulpstelling: Uit $(ABCP_j) = p_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ volgt

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2} : \frac{p_4-p_1}{p_4-p_2}$$

Bewijs:

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3A)}{(P_1P_2P_4A)} = \frac{(AP_3P_2P_1)}{(AP_4P_2P_1)} = \frac{(AP_3BP_1)}{(AP_3BP_2)} :$$

$$: \frac{(AP_4BP_1)}{(AP_4BP_2)} = \frac{1-(ABP_3P_1)}{1-(ABP_3P_2)} : \frac{1-(ABP_4P_1)}{1-(ABP_4P_2)} =$$

$$= \frac{1-\frac{p_1}{p_3}}{1-\frac{p_2}{p_3}} : \frac{1-\frac{p_1}{p_4}}{1-\frac{p_2}{p_4}} = \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2} : \frac{p_4-p_1}{p_4-p_2}.$$

Stelling 6: Heeft P t.o.v. twee gronddrietallen de coördinaten x en y, dan bestaat een bilineaire betrekking:

$$axy + b_1x + b_2y + c = 0 \qquad b_1b_2 \neq ac \qquad (1)$$

Omgekeerd stelt een dergelijke betrekking de overgang op een nieuw gronddrietal voor.

Bewijs: Zijn p, q, r de coördinaten van het nieuwe gronddrietal t.o.v. het oude, dan is volgens de hulpstelling:

$$y = \frac{r-p}{r-q} : \frac{x-p}{x-q} = -\frac{b_1x+c}{ax+b_2}$$

met $b_1b_2 \neq ac$ wegens $p \neq q$.

Omgekeerd volgt uit de bilineaire betrekking (1), dat het oude gronddrietal in een nieuw overgaat met

$$p = -\frac{b_2}{a}, \quad q = -\frac{c}{b_1}, \quad r = -\frac{b_2+c}{a+b_1}.$$

De betrekking (1) is in homogene coördinaten a.v. te schrijven:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad |a_{ij}| \neq 0$$

Stelling 7: Heeft men op een rechte de vier punten $A(a_1, a_2)$ $B(b_1, b_2)$ $C(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ $D(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2)$ dan is $(ABCD) = \frac{\lambda}{\mu}$

Bewijs:

De transformatie $x = \frac{a_1 y + b_1}{a_2 y + b_2}$ beschrijft blijkbaar de overgang op een nieuw gronddrietal nl. ABC. Voor $y = \frac{\lambda}{\mu}$ ontstaat D, zodat $\frac{\lambda}{\mu}$ juist de coördinaat van D t.o.v. ABC is, of $(ABCD) = \frac{\lambda}{\mu}$.

§ 3. *Homogene projectieve coördinaten in het vlak.*

We kiezen drie vrij gelegen punten $G_1\ G_2\ G_3$ als grondpunten, en een punt E als eenheidspunt. Door $G_1\ (G_2G_3EP) = \frac{x_2}{x_3}$

$G_2\ (G_3G_1EP) = \frac{x_3}{x_1}$, $G_3\ (G_1G_2EP) = \frac{x_1}{x_2}$

hetgeen i.v.m. de stelling van Ceva geoorloofd is, worden homogene coördinaten (x_1, x_2, x_3) van een punt P bepaald.

Noemen we $G_2G_3\ g_1$ enz. en is e de trilineaire poollijn van E t.o.v. $\triangle\ G_1G_2G_3$ (Desargues) dan zijn duaal de lijncoördinaten (A_1, A_2, A_3) van een rechte l bepaald door:

$$g_1\ (g_2g_3el) = \frac{A_2}{A_3} \qquad g_2\ (g_3g_1el) = \frac{A_3}{A_1} \qquad g_3\ (g_1g_2el) = \frac{A_1}{A_2}$$

In het bijzonder is $G_1\ (1, 0, 0)$ $\quad g_1\ (1, 0, 0)$
$E\ (1, 1, 1)$ $\quad e\ (1, 1, 1)$

Snijden G_1E en G_1P de zijde G_2G_3 in E_1 en P_1 dan is:

$$(G_2G_3E_1P_1) = \frac{x_2}{x_3} \qquad \text{d.w.z.}$$

Op de zijde G_2G_3 wordt een lineair projectief coördinatenstelsel bepaald met gronddrietal $G_2G_3E_1$, enz.

Stelling 8: Het punt $P\ (x_1, x_2, x_3)$ en de rechte $l\ (A_1, A_2\ A_3)$ zijn dan en alleen dan incident, wanneer voldaan is aan de incidentiebetrekking $\quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0.$

Bewijs: Zijn P en l incident dan onderscheiden we:

1° $A_2 = A_3 = 0$. Dus valt l samen met g_1. De incidentiebetrekking geldt blijkbaar.

2° $A_3 = 0$, A_1 en $A_2 \neq 0$. Dus l door G_3.

Nu is enerzijds $(G_1G_2E_3P_3) = \frac{x_1}{x_2}$

en anderzijds $(G_1G_2E_3P_3) = -\frac{A_2}{A_1}$. De incidentiebetrekking geldt dus.

3° Alle A's $\neq 0$. $x_3 \neq 0$.

$$\frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{x_1}{x_3} + \frac{A_2}{A_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} + 1 =$$

$$= 1 - (G_3G_1E_2S_2)(G_1G_3E_2P_2) - (G_3G_2E_1S_1)(G_2G_3E_1P_1) =$$

$$= 1 - (G_1G_3S_2P_2) - (G_2G_3S_1P_1) =$$

$$= 1 - (G_1P_3S_3G_2) - (G_2P_3S_3G_1) = 0.$$

Geldt omgekeerd de incidentiebetrekking en is P niet incident met l, dan zou b.v. G_3P de rechte l snijden in een punt P′ met coördinaten (x_1, x_2, x'_3) met $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x'_3 = 0$. Dan moet $x'_3 = x_3$ zijn, dus $P' \equiv P$.

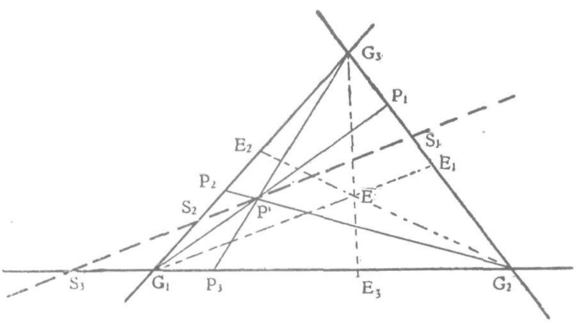

Fig. 1.

Hiermede kan nu de analytische meetkunde verder ontwikkeld worden. Verg. b.v. Barrau. Analytische meetkunde dl. 1 hfdst. I. We beschouwen hier nog slechts de analoga van stelling 6 en 7.

Stelling 9: Zijn $A(a_j)$ $B(b_j)$ $C(c_j)$ $D(a_j + b_j + c_j)$ vrijgelegen punten en is $P(\lambda a_j + \mu b_j + \nu c_j)$ dan zijn λ, μ, ν de coördinaten van P t.o.v. het grondviertal ABCD.

Bewijs:

Snijdt AP de zijde BC in P_a en AD de rechte BC in D_a, dan is $B(b_j)$ $C(c_j)$ $D_a(b_j + c_j)$ $P_a(\mu b_j + \nu c_j)$.
Projecteren uit G_3 op G_1G_2 levert de punten:
$B_3(b_1, b_2)$ $C_3(c_1, c_2)$ $D_{a1}(b_1 + c_1, b_2 + c_2)$
$P_{a1}(\mu b_1 + \nu c_1, \mu b_2 + \nu c_2)$.

Volgens stelling 7 dus:

$$A(BCDP) = (BCD_aP_a) = (B_3C_3D_{a3}P_{a3}) = \frac{\mu}{\nu}.$$

Uit stelling 9 volgt nu zonder moeite het analogon van stelling 6:

Stelling 10: Heeft P t.o.v. twee grondviertallen de coördinaten (x_1, x_2, x_3) en (y_1, y_2, y_3) dan bestaat het homogene lineaaire verband.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases} \qquad |a_{ij}| \neq 0$$

Omgekeerd stelt een dergelijke transformatie de overgang op een nieuw grondviertal voor.

Bewijs:

De grondpunten hebben b.v. het nieuwe grondviertal de coördinaten (a_{j1}) (a_{j2}) (a_{j3}) $(a_{j1} + a_{j2} + a_{j3})$, in welke vorm ze steeds gebracht kunnen worden.

Het punt P met t.o.v. het oude grondviertal de coördinaten (x_j) heeft t.o.v. het nieuwe juist de coördinaten (y_j) of $(a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + a_{j3} x_3)$ volgens stelling 9.

§ 4. *Projectieve toevoeging.*

Twee lineaire dragers heten projectief toegevoegd, wanneer tussen de elementen een zodanige (1-1) toevoeging bestaat, dat corresponderende viertallen dezelfde dubbelverhouding bezitten.

Deze laatste eis kan niet gemist worden zoals in het lichaam der complexe getallen de (1-1) toevoeging

$$a + b\,i \longleftrightarrow a - b\,i$$

bewijst, waarbij de dubbelverhouding niet invariant is.

Uit de hulpstelling van § 2 volgt, dat een projectieve toevoeging ontstaat door aan drie elementen $A_1B_1C_1$ uit de eerste drager drie elementen $A_2B_2C_2$ uit de tweede drager toe te voegen en verder de eis

$$(A_1B_1C_1P_1) = (A_2B_2C_2P_2)$$

te stellen. Omgekeerd is elke projectieve toevoeging als zodanig te beschouwen.

Uit § 2 volgt voorts dat een projectieve toevoeging correspondeert met een bilineaire betrekking in de coördinaten van beide dragers:

$$a\, x_1 x_2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0 \qquad b_1 b_2 \neq ac.$$

Bij vele beschouwingen o.a. bij de kegelsneden moeten we kunnen beoordelen of een toevoeging projectief is. Meestal is direct de (1-1) duidigheid in te zien. *De invariantie van de dubbelverhouding behoeft men doorgaans niet na te gaan.* Dit berust op het volgende argument.

De in de beschouwde figuur optredende elementen corresponderen t.o.v. zeker grondviertal volgens § 3 met coördinaten en *algebraïsche* vergelijkingen. De bewerkingen projecteren en snijden corresponderen met algebraïsche bewerkingen, zodat een in de figuur optredende, willekeurige, toevoeging steeds in de gedaante:

$$V\ (x, y) = 0 \qquad\qquad V = \text{veelterm}$$

gebracht kan worden, waarbij x en y de coördinaten in de beschoude lineaire dragers zijn. Is de toevoeging nu (1-1) duidig, dan is V lineair in x en in y, is het linkerlid dus een bilineaire vorm, d.w.z. de toevoeging is projectief.

We noemen nog enkele elementaire eigenschappen:

Stelling 11: Is bij twee projectieve puntenrijen het snijpunt der dragers aan zichzelf toegevoegd, dan zijn de puntenrijen perspectief. Analoog duaal.

Stelling 12: Zijn de puntenrijen $a(A_1A_2A_3...)$ en $b(B_1B_2B_3...)$ projectief toegevoegd, dan liggen de punten (A_iB_j, A_jB_i) op een rechte p, *genaamd perspectiefas; duaal perspectiefcentrum.*

Bij een projectieve toevoeging met samenvallende dragers spreken we van een collocale projectieve toevoeging, waarvan de involutie een bijzonder geval vertegenwoordigt. Uit de voorgaande ontwikkeling kan men gemakkelijk hiervoor eigenschappen afleiden, welke eigenschappen evenwel vaak afhankelijk van de aard van het gebruikte getallenlichaam L zijn b.v.

Is in L de vierkantsworteltrekking onbeperkt uitvoerbaar, dan bezit een collocale projectiviteit twee dekelementen, die eventueel samen kunnen vallen.

§ 5. *Kegelsneden.*

In het kort zullen we in deze paragraaf de opbouw van de theorie der kegelsneden bespreken. Van het gebruikte getallenlichaam veronderstellen we, dat hierin de vierkantsworteltrekking onbeperkt uitvoerbaar is; b.v. heeft de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ twee wortels, waarvan we er een aanduiden met het symbool i, zodat de andere $-i$ is.

Wij menen, dat een parallelle ontwikkeling van de theorie der kegelsneden op projectief meetkundige grondslag en op analytisch meetkundige grondslag de voorkeur verdient boven een eenzijdige behandeling. Hierdoor worden vaak gekunstelde redeneringen vermeden en bovendien, de analytische meetkunde is hier niet anders dan een gecamoufleerd rekenen met dubbelverhoudingen, tevens de basis van de „zuivere" projectieve meetkunde.

Analytisch definieren we aldus een tweedegraadskromme:

$$f \equiv \Sigma\, a_{ij} x_i x_j = 0$$

in puntcoördinaten, en duaal een tweedeklassekromme in lijncoördinaten.

Een raaklijn aan een t.g. kromme wordt gedefiniseerd als een rechte met twee samenvallende snijpunten, hetgeen direct tot de vergelijking

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial p_i} x_i = 0$$

voert.

Eenvoudig blijkt nu, dat een niet-ontaarde t.g. kromme de t.k. kromme van zijn raaklijnen is en duaal, zodat het onderscheid tussen niet-ontaarde t.g. en t.k. krommen vervalt. Als gemeenschappelijke benaming kiezen we dan „kegelsnede".

Nadat men zo in grote trekken de kegelsneden analytisch gedefinieerd heeft, en de begrippen raaklijn en raakpunt aangebracht zijn, kan de projectieve stelling volgen:

Stelling 13: De meetkundige plaats van het snijpunt van toegevoegde rechten van twee projectieve stralenbundels is een kegelsnede, gaande door de dragers T_1 en T_2 van de bundels. Is P het perspectiefcentrum, dan zijn PT_1 en PT_2 de raaklijnen in T_1 en T_2. Is de projectiviteit een perspectiviteit, dan is de kegelsnede ontaard in de perspectiefas en T_1T_2. Analoog duaal.

Het bewijs kan op twee wijzen gevoerd worden.

Men kan de stralenbundels voorstellen door

$$l_1 + \lambda_1 m_1 = 0 \text{ en } l_2 + \lambda_2 m_2 = 0$$

waarbij dus λ_1 en λ_2 projectieve coördinaten zijn.

De projectiviteit correspondeert met een bilineaire betrekking

$$a\lambda_1\lambda_2 + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c = 0.$$

Eliminatie van λ_1 en λ_2 geeft als vergelijking van de meetkundige plaats: $\quad a l_1 l_2 - b_1 l_1 m_2 - b_2 l_2 m_1 + c m_1 m_2 = 0$

een kegelsnede, gaande door T_1 en T_2.

Het verdere volgt eenvoudig uit projectieve beschouwingen.

Een andere methode — feitelijk aequivalent met de eerste — bestaat hierin, om op te merken dat de meetkundige plaats een zekere *algebraïsche* kromme is, waarvan het alleen nodig is de graad te bepalen. Snijding van de bundels met een proefrechte $\bar{l}$

geeft op l een collocale projectiviteit met twee dekpunten, zodat de graad twee is. De rest volgt als boven projectief.

Omgekeerd geldt:

Stelling 14: Een willekeurige kegelsnede kan uit elk willekeurig tweetal zijner punten of raaklijnen projectief voortgebracht worden.

Bewijs: Kiest men op de kegelsnede de punten T_1 en T_2 en voegen we rechten a_1 door T_1 en a_2 door T_2 aan elkaar toe door de eis, dat a_1 en a_2 elkaar op de kegelsnede moeten snijden, dan ontstaat een toevoeging, die kennelijk algebraïsch en (1-1)duidig is d.w.z. de toevoeging is een projectiviteit.

Met deze stelling is overeenstemming bereikt tussen de analytische en projectieve wijze van behandeling en kan men de ontwikkeling naar verkiezing meer analytisch hetzij meer projectief voortzetten. We prefereren het laatste.

Toch kan het nuttig zijn in de loop van de beschouwingen af en toe een stelling aan de algebraïsche meetkunde te ontlenen, wanneer deze zich op eenvoudige wijze tot meer projectief meetkundige gevolgtrekkingen leent. Een voorbeeld hiervan is de volgende stelling:

Stelling 15: Snijden, op een eindig aantal na, alle raaklijnen van en kegelsnede een algebraïsche kromme K, waarvan de kegelsnede geen deel is, na passende uitbreiding van het getallenlichaam, in n punten, dan is K van de graad n. Analoog duaal.

Het bewijs volgt hieruit, dat rechten, die K in minder dan n punten snijden, minstens een tweevoudig snijpunt P met de kromme bezitten. Dergelijke rechten zijn of raaklijnen van K of rechten door een meervoudig punt van K. Het aantal hiervan, dat aan de kegelsnede raakt, is echter eindig. Voor de toepassing van deze stelling moet bekend zijn of de te onderzeken kromme algebraïsch is; in de practijk levert dit geen moeilijkheden op, daar meestal direct in te zien is, dat de wijze waarop de kromme ontstaat, aequivalent is met een algebraïsch eliminatieproces.

We kunnen dit b.v. toepassen bij de volgende stelling:

Stelling 16: Is op een kegelsnede K een collocale projectiviteit bepaald met $A_i \rightarrow B_i$ dan liggen de punten (A_iB_j, A_jB_i) op een rechte en omhult A_iB_i een kegelsnede, K aanrakend in de dekpunten van de projectiviteit.

Het feit dat A_iB_i een kegelsnede omhult volgt nl. hieruit dat door elk punt P van K slechts twee rechten A_iB_i gaan.

Een andere toepassing kan men maken bij de volgende eigenschap:

Stelling 17: Zijn K_1 en K_2 twee kegelsneden, dan is de meetkundige plaats van de punten P met de eigenschap, dat de raaklijnen uit P aan K_1 die uit P aan K_2 harmonisch scheiden een kegelsnede.

Bewijs: Zij t een raaklijn aan K_1. De andere raaklijn uit P aan K_1 moet door de pool T van t t.o.v. K_2 gaan. Uit T gaan twee raaklijnen aan K_1, zo twee punten P op t leverend, zodat $n = 2$ is.

§ 6. *Collineaties.*

Ook over de projectieve transformaties, i.h.b. de collineaties willen we nog enige opmerkingen maken.

Een collineatie is een vlakke (1-1)duidige punt-punt rechte-rechte toevoeging, waarbij de begrippen incidentie en dubbelverhouding invariant blijven.

Een projectief coördinatenstelsel is nu gebaseerd op deze begrippen, zodat een collineatie aan een projectief coördinatenstelsel weer zo'n stelsel toevoegt. Toegevoegde punten hebben t.o.v. toegevoegde grondviertallen dezelfde coördinaten.

Hieruit volgt, dat een collineatie analytisch beschreven wordt, door het in stelling 10 voorkomende lineaire verband:

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \qquad |a_{ij}| \neq 0.$$

Uit deze beschouwingen volgt, dat er één en slechts één collineatie is, die vier vrijgelegen punten (rechten) in vier vrijgelegen punten (rechten) transformeert. Een collineatie met vier vrijgelegen dekpunten is dus de identiteit.

Het onderzoek naar de figuur, gevormd door de dekpunten kan behalve analytisch ook meer zuiver meetkundig geschieden. Worden de vrijgelegen punten $A_1A_2A_3A_4$ getransformeerd in $B_1B_2B_3B_4$ en is S_{ij} (A_iA_j, B_iB_j) dan liggen de dekpunten op de kegelsneden bepaald door de punten:

1) A_1B_1 $S_{12}S_{13}S_{14}$
2) A_2B_2 $S_{21}S_{23}S_{24}$
3) A_3B_3 $S_{31}S_{32}S_{34}$
4) A_4B_4 $S_{41}S_{42}S_{43}$

Dit volgt uit de dubbelverhoudinginvariantie $A_1(A_2A_3A_4D) = B_1(B_2B_3B_4D)$.

Laat het beschouwde getallenlichaam behalve de vierkantsworteltrekking ook de derdemachtsworteltrekking toe of breiden we het aanwezige getallenlichaam op passende wijze uit, dan snijden twee kegelsneden elkaar steeds in vier al of niet verschillende punten, of afgezien van multipliciteiten in minstens één punt.

Een collineatie bezit dus minstens één dekpunt en één dekrechte en zonder de identiteit te zijn hoogstens drie vrijgelegen dekpunten of dekrechten.

Gaat men alle mogelijkheden t.a.v. de dekfiguur na, en onderzoekt men welke realiseerbaar zijn, dan blijken de volgende zes typen te ontstaan: algemene collineatie, halfparabolische collineatie, centrale collineatie, parabolische collineatie, bijzondere centrale collineatie en de identiteit.

Van belang voor de affiene meetkunde — die we hier niet in detail beschouwen — is het onderzoek van de collineaties die een zekere rechte invariant laten. We spreken dan speciaal van affiniteiten. Aldaar kan men, hetzij op analytische wijze door onderzoek van de transformatiematrices, hetzij meer meetkundig door beschouwing van de dekfiguur met een of meer paren toegevoegde elementen, aan de affiniteiten een getal toevoegen, dat de modulus genoemd wordt. Kenmerkend zijn de eigenschappen dat de modulus van de identiteit $= 1$ is en dat mod AB $=$ mod A mod B is. Het modulusbegrip staat in direct verband met het begrip (relatieve) oppervlakte van een driehoek. Is nl. A de affiniteit die $A_1B_1C_1$ in $A_2B_2C_2$ transformeert, dan geldt voor de oppervlakken σ_1 en σ_2 per definitie:
$$\text{mod}\, A = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

In het vierde hoofdstuk zullen we van enkele hierbij voorkomende eigenschappen zonder verdere toelichting gebruik maken.

Hieronder zullen we een methode bespreken, die het oppervlaktebegrip zelfstandig op „meetkundige" wijze afleidt, zonder daarbij van het modulusbegrip uit te gaan.

Een affien coördinatenstelsel is een projectief coördinatenstelsel OO_1O_2E waarvan de *grondrechte* O_1O_2 de *oneigenlijke rechte* is. Zijn E_1 en E_2 de op OO_2 en OO_1 gelegen eenheidspunten, dan is door de z.g. eenheidsdriehoek OE_2E_1 het coördinatenstelsel vastgelegd. Is nu A een willekeurig punt en zijn A_1 en A_2 de projecties van A op OE_1 en OE_2 resp. in de O_1-richting en de O_2-richting, dan verstaan we onder de affiene coördinaten (a_1, a_2) van A t.o.v. de eenheidsdriehoek OE_2E_1:
$$\begin{cases} a_1 \equiv O_2(O_1OEA) = (A_2E_2O) \\ a_2 \equiv O_1(O_2OEA) = (A_1E_1O) \end{cases}$$

Blijkbaar hangen a_1 en a_2 met de homogene projectieve coördinaten van $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ aldus samen:
$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \quad \text{en} \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$$

Onder de oppervlakte van een driehoek ABC t.o.v. een in het vlak aangenomen eenheidsdriehoek OE_2E_1 verstaan we:

$$\overrightarrow{ABC} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

waarbij (a_1, a_2) (b_1, b_2) (c_1, c_2) de affiene coördinaten van A, B, C t.o.v. de eenheidsdriehoek OE_2E_1 zijn.

In het bijzonder is $\overrightarrow{OE_2E_1} = 1$.

De hoofdstelling, die het oppervlakbegrip zin geeft kunnen we a.v. uitdrukken.

Stelling: Zijn ABC en DEF twee driehoeken, dan is de verhouding $\dfrac{\overrightarrow{ABC}}{\overrightarrow{DEF}}$ onafhankelijk van de aangenomen eenheidsdriehoek, en dus een affiene invariant.

Bewijs: De overgang tussen twee affiene coördinatenstelsels wordt beschreven door de matrix $\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{Vmatrix}$, waarmee onder toepassing van de productregel voor determinanten het bewijs eenvoudig geleverd wordt.

De genoemde verhouding kunnen we ook beschrijven als het oppervlak van driehoek ABC t.o.v. de eenheidsdriehoek DEF. Het is nu duidelijk, dat het modulusbegrip uit het oppervlaktebegrip afgeleid kan worden, door als de modulus van de transformatie die D, E, F, in A, B, C overvoert juist de genoemde verhouding te beschouwen.

Van belang voor de in hoofdstuk V beschouwde niet-Euclidische meetkunde zijn de collineaties, die een bepaalde kegelsnede Ω invariant laten. Deze collineaties bepalen op Ω een collocale projectiviteit (verg. Stelling 16) die een identiteit, parabolische projectiviteit, algemene projectiviteit met als speciaal geval een involutie kan zijn. De bijbehorende collineatie is in het eerste geval de identiteit, in het tweede een paraboliteit met één dekpunt en één dekrechte, en voorts een algemene collineatie die in het involutorische geval overgaat in een centrale collineatie. Duidelijk is, dat de collineatie bepaald is door de op Ω liggende projectiviteit voor te schrijven b.v. twee dekpunten, en een paar toegevoegde punten. Vergelijk verder hoofdstuk V.

HOOFDSTUK II.

Het axioma van Pappus.

Nadat in het vorige hoofdstuk de meetkunde op een meer practische wijze ontwikkeld is, beginnen we in dit hoofdstuk weer van voren af aan. De rekenaxioma's die we toen gebruikten vervangen we in hun geheel door het axioma van Pappus, een bekende affiene specialisatie van de stelling van Pascal voor een lijnenpaar. Hieruit voortbouwend tonen we aan, dat de puntenviertallen op ondubbelzinnige wijze in klassen ingedeeld kunnen worden, en dat voor deze klassen dusdanige rekenregels gedefinieerd kunnen worden, dat juist de in het eerste hoofdstuk gebruikte rekenaxioma's te voorschijn komen. Beide behandelingswijzen zijn dus gelijkwaardig; aan welke men de voorkeur geeft, hangt van practische of aesthetische overwegingen af.

§ 7. *Eenvoudige gevolgen.*

In dit hoofdstuk ontwikkelen we de projectieve meetkunde wederom van voren af aan op een andere, meer meetkundige wijze, als in het vorige hoofdstuk. Om ons gemakkelijker te kunnen uitdrukken voeren we — voorlopig — affiene terminologie in t.o.v. een zekere als oneigenlijk aangenomen rechte. Naderhand maken we ons hiervan weer los en beschouwen zuiver projectieve eigenschappen, waarin geen bepaalde rechte een rol speelt.

Naast de incidentieaxioma's I van § 1 voeren we als enig verder axioma in:

Axioma van Pappus. Zijn $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ collineair en lopen van de zeshoek $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ twee paar overstaande zijden evenwijdig, dan loopt ook het derde paar evenwijdig.

Uit dit axioma zullen we straks de zgn. projectieve stelling van Pappus-Pascal, waarvan het axioma een bijzonder geval is, afleiden, nl.

Zijn $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ collineair, dan liggen de drie punten (A_1B_2, A_2B_1) (A_1B_3, A_3B_1) (A_2B_3, A_3B_2) op een rechte.

De ontstane figuur bevat negen punten en negen rechten welke elementen onderling dezelfde rol spelen. Een dergelijke figuur heet een configuratie en hier spreken we aldus van de configuratie van Pappus-Pascal. De stelling van Pappus-Pascal drukt dus uit, dat, wanneer van de beschouwde configuratie alle incidenties op één na vervuld zijn, de overblijvende ook vervuld is.

Het axioma van Pappus tezamen met zijn omkeringen kunnen we nu in één zin aldus kort samenvatten: De stelling van Pappus-Pascal geldt, wanneer de configuratie de oneigenlijke rechte bevat, of nog korter:

De configuratie van Pappus-Pascal (9_3) *geldt, wanneer hij de oneigenlijke rechte bevat.*

Onze voorlopige taak is, om nu hieruit de projectieve stellingen van Desargues en Pappus af te leiden. Daartoe gebruiken we vooreerst een geschikte notatie om een transformatie of een toevoeging voor te stellen. We laten dit aan een voorbeeld zien:

$$d\,R\,c\,Q\,b\,P\,a$$

stelt een toevoeging van punten A van de rechte a aan punten D van de rechte d voor, die a.v. ontstaat:

Verbind A met P; snijd AP met b in B;
verbind B met Q; snijd BQ met c in C;
verbind C met R; snijd CR met d in D.

De eenvoudigste transformatie bPa is blijkbaar een perspectiviteit met centrum P. De notatie is vanzelfsprekend onmiddellijk te dualiseren.

Met behulp van deze notatie kunnen we de projectieve stelling van Pappus-Pascal in een eenvoudige vorm brengen:

De stelling van Pappus-Pascal is aequivalent met:

Zijn a, b, PQ concurrent, dan is

$$bQcPa$$

een perspectiviteit met centrum $(bc)P \times Q(ca)$

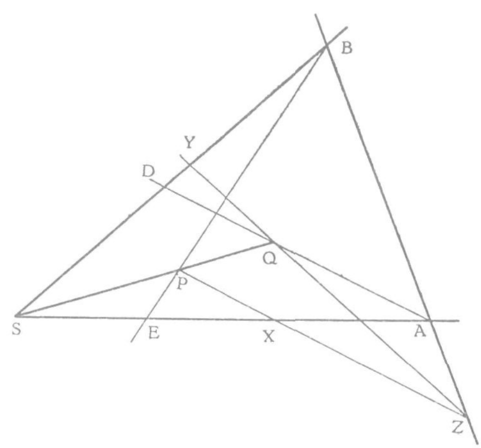

Fig. 2.

Bewijs:

In fig. 2 gaat d.m.v. de transformatie bQcPa het punt A in D over, E in B over.

Voert de transformatie een punt X van a via Z op c in een punt Y van b over, dan geeft beschouwing van de Pascalzeshoek $\begin{pmatrix} S & P & Q \\ Z & A & B \end{pmatrix}$ het bewijs voor bovenstaande bewering.

Analoog heeft men:

De stelling van Desargues is aequivalent met:

Zijn a, b, c concurrent, dan is

bQcPa

een perspectiviteit met centrum op PQ.

Bewijs:

De figuur ontstaan door twee willekeurige punten van a te transformeren is een configuratie van Desargues.

We geven nu de afleiding van de stelling van Desarques uit het axioma van Pappus.

We veronderstellen, dat de elementen a, b, c, P, Q eigenlijk zijn, voorts zij P niet op a, Q niet op b, en PQ niet concurrent met a, b, c.

Is d de oneigenlijke rechte en R een willekeurig punt, niet op c gelegen, dan is:

$$\text{bQcPa} = \text{bQcRdRcPa} = \text{b(QcR) d(RcP)a}.$$

Is i.h.b. R(PA, QB) dan is volgens het axioma:

$$\text{d(RcP)a} = \text{dSa en b(QcR)d} = \text{bTd},$$

waarmee bQcPa aequivalent is met bTdSa.

Aangezien S en T beiden op de rechte door R en (ab) liggen mag het axioma wederom toegepast worden:

$$\text{bQcPa} = \text{bTdSa} = \text{bUa}. \qquad \text{w.t.b.w.}$$

Laten we één of meer van onze veronderstellingen weg, dan kan gemakkelijk een indirect bewijs met behulp van het reeds bewezene gegeven worden of we kunnen laten zien, dat het nieuwe probleem aequivalent is met het reeds bewezene.

Vervolgens bewijzen we, dat de configuratie van Pascal geldig is in het geval, dat de figuur (9_3) een of twee oneigenlijke punten bevat. Daartoe is het voldoende om een transformatie bQcPa te beschouwen, waarbij evenwel S(a, b) oneigenlijk is. Zij d weer de oneigenlijke rechte en R een willekeurig punt, dan is:

$$\text{bQcPa} = \text{b(QcR) d (RcP)a} = \text{bTdSa}$$

volgens tweemalige toepassing van het axioma. Volgens Desargues echter is bTdSa een perspectiviteit.

Dat de configuratie van Pascal nu ook algemeen geldig is, m.n. in het geval, dat de figuur alleen eigenlijke elementen bevat is direct in te zien, b.v. als volgt:

Liggen $A_1A_2A_3$ op a, $B_1B_2B_3$ op b, snijdt de oneigenlijke rechte a in A_4 en is c de rechte bepaald door C_{12} (A_1B_2, A_2B_1) C_{13} (A_1B_3, A_3B_1) dan kiezen we B_4 zodanig op b, dat ook C_{14} (A_1B_4, A_4B_1) op c ligt.

De configuratie van Pascal geldt nu voor de zeshoeken:

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_4 \\ B_1B_2B_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1A_3A_4 \\ B_1B_3B_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_2A_3A_4 \\ B_2B_3B_4 \end{pmatrix}$$

die elk een oneigenlijk punt nl. B_4 bevatten. Het punt (A_2B_3, A_3B_2) blijkt op c te liggen, zodat Pascal ook geldt voor de zeshoek

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}$$

§ 8. *Projectieve viertallen.*

Nu de stellingen van Pappus-Pascal en Desargues in hun projectieve algemeenheid ons ten dienste staan zien we van de affiene terminologie af en beschouwen weer slechts projectieve eigenschappen. De genoemde stellingen impliceren ook de juistheid van hun duale vorm, zodat ook alle hieruit te trekken consequenties dualiseerbaar zijn.

Stelling 1: Liggen op een rechte l de punten $A_1A_2B_1B_2$ S; zijn P en Q willekeurige punten collineair met S; noemen we $R_1(PA_1, QB_1)$ en $R_2(PA_2, QB_2)$ dan is het snijpunt T van R_1R_2 met l onafhankelijk van de keuze van P en Q.

Bewijs: Beschouwen we twee paren PQ en P'Q' dan zijn de driehoeken PQR_1 en $P'Q'R_1'$ perspectief evenals de driehoeken PQR_2 en $P'Q'R_2'$. Volgens Desargues zijn dan PP', QQ', R_1R_1', R_2R_2' concurrent, zodat ook de driehoeken PR_1R_2 en $P'R_1'R_2'$ perspectief zijn. Volgens Desargues ligt dus $(R_1R_2, R_1'R_2')$ op l, hetgeen de ondubbelzinnigheid van T betekent.

Noteert men het aldus bepaalde punt T door $S(A_1A_2B_1B_2)$ dan volgt uit de vrije keuze van P en Q direct

$S(A_1A_2B_1B_2) = S(A_2A_1B_2B_1) = S(B_1B_2A_1A_2) = S(B_2B_1A_2A_1)$.

Dat echter ook

$S(A_1A_2B_1B_2) = S(A_2A_1B_2B_1)$ enz. is, volgt eerst uit Pascal, zoals men eenvoudig zal inzien.

De boven beschreven constructie zullen we de door de paren A_1A_2 en B_1B_2 bepaalde involutieconstructie noemen, in welke benaming de bovenstaande eigenschappen ook naar voren komen.

Men heeft nu:

Stelling 2: Leidt men uit twee paren A_1A_2 en B_1B_2 met de involutieconstructie een derde paar C_1C_2 af, dan behoort bij de door A_1A_2 en C_1C_2 bepaalde involutieconstructie weer het paar B_1B_2.

Opmerking: Drie puntenparen, die d.m.v. involutieconstructies uit elkaar kunnen ontstaan vormen een z.g. involutie. Men spreekt aldus van drie involutorisch gelegen puntenparen. (Zie fig. 3).

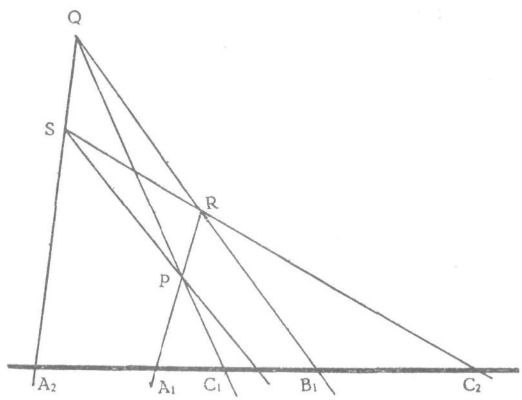

Fig. 3.

Bewijs: Verwissel in fig. 3 P en R.

In het bijzonder, wanneer $A_1 = A_2$ en $B_1 = B_2$ ontstaat uit de involutorische ligging de harmonische ligging. De nadere uitwerking hiervan laten we aan de lezer over.

Stelling 3: Zijn (l_1l_2), A, P collineair (i.h.b. $P = (l_1l_2)$) dan is

$$l_2Ax_2Px_1Al_1$$

een perspectiviteit.

Bewijs: Is m de rechte (l_1x_1, l_2x_2), dan herleiden we: $l_2Ax_2Px_1Al_1 = l_2Ax_2PmPx_1Al_1 = l_2(Ax_2P)\ m\ (Px_1A)l_1 = l_2TmSl_1$ (Desargues) $= l_2Ul_1$ (Pascal) immers S en T liggen op AP d.w.z. collineair met (l_1l_2).

Definitie: Twee puntenviertallen $A_1A_2A_3A_4$ en $B_1B_2B_3B_4$ die een Pascalrechte toelaten, d.w.z. zulke waarbij alle punten $C_{ij}(A_iB_j, A_jB_i)$ collineair zijn, heten projectief.

Voor projectief bezigen we het teken $\wedge$: $A_1A_2A_3A_4 \wedge B_1B_2B_3B_4$.

Voor perspectief het teken $\overline{\wedge}$: $A_1A_2A_3A_4\ \overline{\wedge}\ B_1B_2B_3B_4$.

Stelling 4: Uit $A_1A_2A_3A_4 \wedge B_1B_2B_3B_4$ en $A_1 \equiv B_1$ volgt, dat A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 concurrent zijn, en omgekeerd.

Bewijs: Pas Desargues toe op de driehoeken $A_2B_3A_4$ en $B_2A_3B_4$.

Hoofdstelling: Uit $A_1A_2A_3A_4 \wedge B_1B_2B_3B_4$ en $A_1A_2A_3A_4 \wedge C_1C_2C_3C_4$ volgt $B_1B_2B_3B_4 \wedge C_1C_2C_3C_4$. (*transitiviteit van de projectiviteit*).

Bewijs: a. Stel $B_1 \equiv C_1$

Aangetoond moet nu worden, dat $B_2B_3B_4$ en $C_2C_3C_4$ perpectief zijn. Dit is aequivalent met de bewering dat — p_{ab} en p_{ac} zijn Pascalrechten — de transformatie

$$b_1A_1 \; p_{ab} \; B_1 \; p_{ac} \; A_1c$$

een perspectiviteit is. Dit is evenwel juist bij stelling 3 bewezen.

b. Stel B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 concurrent.

Aangetoond moet worden, dat ook B_4C_4 door het snijpunt S van B_1C_1, B_2C_2 en B_3C_3 gaat.

Snijdt de rechte d door C_1 en B_3 B_2C_2 in E en zij F het punt op d zodanig, dat $A_1A_2A_3A_4 \wedge C_1EB_3F$ dan is volgens het zojuist bewezene $C_1EB_3F \wedge B_1B_2B_3B_4$ en $C_1EB_3F \wedge C_1C_2C_3C_4$ d.w.z. B_4C_4 door S.

c. Algemeen.

Snijdt de rechte d door $D_2(B_1C_2, B_2C_1)$ $D_3(B_1C_3, B_3C_1)$ B_1C_1 in D_1 en is D_4 een punt op d zodanig, dat $A_1A_2A_3A_4 \wedge D_1D_2D_3D_4$ dan is volgens het zojuist bewezene $B_1B_3B_2B_4 \wedge D_1D_2D_3D_4$ en $C_1C_2C_3C_4 \wedge D_1D_2D_3D_4$ d.w.z. $B_1B_2B_3B_4$ en $C_1C_2C_3C_4$ laten een Pascallijn toe nl. d en zijn dus volgens de definitie projectief.

De definitie van projectiviteit laat ons bij viertallen op een zelfde rechte in de steek. Volgens de hoofdstelling is het zinvol om twee collineaire puntenviertallen projectief te noemen, wanneer ze projectief met een derde viertal zijn. Deze definitie is immers onafhankelijk van het derde puntenviertal.

§ 9. *Rekenregels.*

Voor de klassen van onderling projectieve puntenviertallen zullen we nu rekenregels definieren.

Productregel $\quad (ABPQ)(ABQR) = (ABPR)$

De ondubbelzinnigheid volgt onmiddellijk uit de stelling van Pascal: Uit $A'B'P'Q' \wedge ABPQ$ en $A'B'Q'R' \wedge ABQR$ volgt $A'B'P'R' \wedge ABPR$.

Het viertal (ABPP) representeert een eenheid:

$$(ABPP)(ABPQ) = (ABPQ)$$

De viertallen (ABPQ) en (ABQP) zijn inversen:

$$(ABPQ)(ABQP) = (ABPP)$$

De associativiteit volgt uit

$$(ABPQ)(ABQR)(ABRS) = (ABPS)$$

Aldus ontstaat een multiplicatieve groep.

Uit stelling 1 van § 1 volgt nu:

De groep is commutatief en

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Stelling 5: Zijn A, B, C verschillende punten, dan is er slechts één punt $D \neq C$ waarvoor $(ABCD)^2 = 1$. (*Harmonisch viertal*).

Bewijs: De involutieconstructie toegepast op A,A,B,B, leidt uit C onafhankelijk van de gebruikte volledige vierhoek een punt D af, waarvoor op de bekende manier geldt (ABCD) = (ABDC).

Is omgekeerd ABCD een viertal verschillende punten met de eigenschap (ABCD) = (ABDC) dan ziet men, b.v. door A,B,C,D uit een punt P op een door A gaande rechte te projecteren, direct in dat een dergelijk viertal uit een involutieconstructie kan ontstaan.

Deze oplossing van $(ABCD)^2 = 1$ stellen we voor door ε.

Stelling 6: $(APQR)(AQRP)(ARPQ) = \varepsilon.$

Bewijs: In fig. 4 is:

$$(APQR)(AQRP)(ARPQ) = (APQR)(AQ'R'P')(AR'P'Q') =$$
$$= (APQR)(APRS)(APST) = (APQT) =$$
$$= Q'(P'XOY) = \varepsilon \text{ lettend op vierhoek } PP'XR'.$$

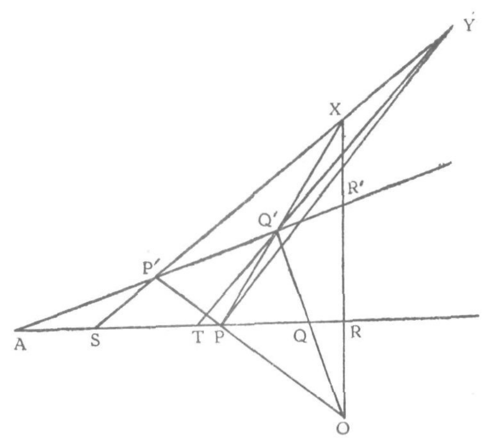

Fig. 4.

Somregel $\quad (ABCP) + (ABCQ) = (ABCP)(AXBQ)$
waarbij $\quad (ABPX) = \varepsilon.$

De optelling kan ook eenvoudig meetkundig voorgesteld worden: (*zie fig.* 5).

Kies een rechte l′ door A en projecteer uit een punt O de punten B en Q op l′ en snijdt PB′ met OA in D. DQ′ bepaalt een zodanig punt R, dat $(ABCP) + (ABCQ) = (ABCR)$. Zoals trouwens uit de algebraïsche definitie volgt is R onafhankelijk van C.

De aequivalentie van beide definities volgt onmiddellijk uit:
$(AXBQ) = (AX'B'Q') = D(AX'B'Q') = (ABPR).$

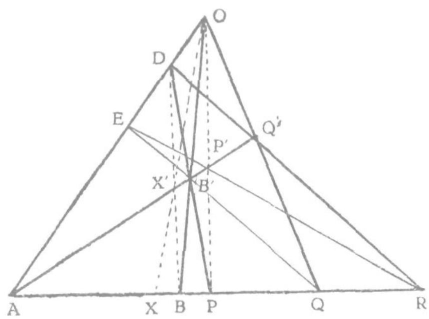

Fig. 5.

Bij de optelling stelt $(ABCB)$ het nulelement voor:

$$(ABCP) + (ABCB) = (ABCP)(AXBB) = (ABCP).$$

De viertallen $(ABCP)$ en $ABCX)$ *zijn inversen:*

$$(ABCP) + (ABCX) = (ABCP)\ (AXBX) =$$
$$= (ABCP)\ (ABPB) = (ABCB) = 0.$$

De optelling is commutatief:

$(ABCQ) + ABCP) = (ABCQ)(AYBP)$ waarbij $(ABQY) = \varepsilon$.
Uit $(ABPX) = (ABQY) = \varepsilon$ volgt in de eerste plaats
$ABPY \wedge ABXQ$ want:
$(ABPY) = (ABPX)(ABXQ)(ABQY) = \varepsilon(ABXQ)\varepsilon = (ABXQ).$

In de tweede plaats is volgens stelling6:

$$(ABPQ) = (ABPX)\ (ABXQ) = \varepsilon(ABXQ) =$$
$$= (AXBQ)\ (AQXB)\ (ABQX\ (ABXQ) = (AXBQ)\ (AQXB).$$

Tenslotte volgt hieruit:

$$(ABCQ) + (ABCP) = (ABCP)(ABPQ)(AYBP) =$$
$$= (ABCP)\ (AXBQ)\ (AQXB)\ (AQBX) =$$
$$= (ABCP)\ (AXBQ) = (ABCP) + (ABCQ).$$

Meetkundig volgt de commutativiteit uit een Pascalfiguur b.v. in doorzichtige notatie de zeshoek $\begin{pmatrix} P\,Q\,R \\ Q'P'B' \end{pmatrix}$ (zie fig. 5).

Het voordeel van de meetkundige definitie blijkt vooral bij het bewijs van de associativiteit.

In de notatie van fig. 6 projecteren we B, P, Q, R op een rechte door A vanuit een punt O. S en T zijn de punten bepaald door:

$$(ABCP) + (ABCQ) = (ABCS)$$
$$(ABCP) + (ABCR) = (ABCT)$$

Aangetoond moet worden dat:

$$(ABCS) + (ABCR) = (ABCT) + (ABCQ).$$

Dit betekent meetkundig slechts dat Q'F en R'E elkaar op l moeten snijden, hetgeen onmiddellijk uit de Pascalfiguur $\begin{pmatrix} D\,E\,F \\ B'Q'R' \end{pmatrix}$ volgt.

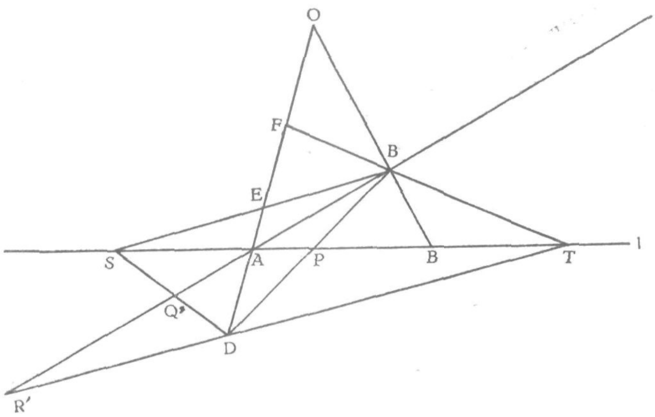

Fig. 6.

Daarmee vormen de klassen van projectieve puntenviertallen ook een commutatieve additieve groep.

Dat tenslotte de distributieve eigenschap geldt, volgt direct uit:

$$(ABRC)\,\{(ABCP) + (ABCQ)\} =$$
$$= (ABRC)\,(ABCP)\,(AXBQ) =$$
$$= (ABRP)\,(AXBQ)\,(ABRC)\,(ABCP) + (ABRC)\,(ABCQ) =$$
$$= (ABRP) + (ABRQ) = (ABRP)\,(AXBQ).$$

Nog een eenvoudig interessant gevolg van de somdefinitie is:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1$$

waarvan het bewijs zo uit fig. 7 af te lezen is:

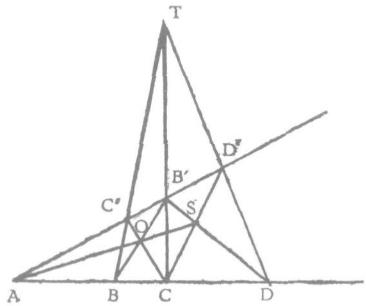

Fig. 7.

Hiermede hebben we dus bewezen:

Stelling 7: Men kan voor de klassen van projectieve puntenviertallen een zodanige product- en somdefinitie geven, dat een commutatief getallenlichaam ontstaat, voldoende aan de in § 1 genoemde axioma's.

Hiermede zijn dus ook alle verder in Hoofdstuk I ter sprake gekomen eigenschappen geldig geworden, en kan de projectieve meetkunde verder ontwikkeld worden.

HOOFDSTUK III.

Het axioma van Desargues

Wederom beginnen we van voren af aan, nu door naast de incidentie- en existentieaxioma's het axioma van Desargues in een affiene vorm als uitgangspunt van onze beschouwingen te kiezen. Dit axioma eist minder dan dat van Pappus, aangezien uit het axioma van Pappus wel dat van Desargues afgeleid kan worden, maar niet omgekeerd. Anderzijds kunnen we niet zoveel bereiken. We moeten ons hier namelijk beperken tot affiene meetkunde, terwijl het axioma van Pappus tot projectieve meetkunde leidt. De affiene meetkunde, die hier ontwikkeld wordt vertoont vele analogieën met de projectieve meetkunde uit het tweede hoofdstuk en om niet in herhaling te vervallen hebben we zo nodig van enkele notaties, begrippen en eigenschappen van het vorige hoofdstuk gebruik gemaakt. Ook hier weer een indeling in klassen van getaltripels en invoering van rekenregels, die tot een niet-commutatief getallenlichaam leiden.

§ 10. Eenvoudige gevolgen.

In dit hoofdstuk, dat in het geheel op zich zelf staat, ontwikkelen we naar analogie met het vorige hoofdstuk de meetkunde op basis van de stelling van Desargues i.p.v. die van Pappus-Pascal. Het gehele hoofdstuk door beschouwen we, en dit is hier essentieel, affiene meetkunde; een bepaalde rechte wordt dus als de oneigenlijke aangewezen.

Naast de incidentieaxioma's I van § 1 kiezen we dus nu als verder axioma (voor de gebruikte terminologie verwijzen we naar blz. 25 e.v.)

Axioma van Desargues.

De configuratie van Desargues (10_3) geldt, wanneer hij de oneigenlijke rechte bevat.

Stelling 1a: De configuratie van Desargues geldt, als hij één oneigenlijk punt bevat.

Bewijs: We noemen P het oneigenlijke punt van de configuratie, en d de oneigenlijke rechte. Aangetoond moet worden, dat in de notatie van § 7 bQcPa een perspectiviteit is. Snijdt d de rechten a en c in A en C, is B het punt (b, QC) en R het punt (AB, PQ) dan geeft toepassing van het axioma op een figuur, die de elementen a, b, c, A, B, C, P, Q, R bevat onmiddellijk het gewenste resultaat. (Zie fig. 7a).

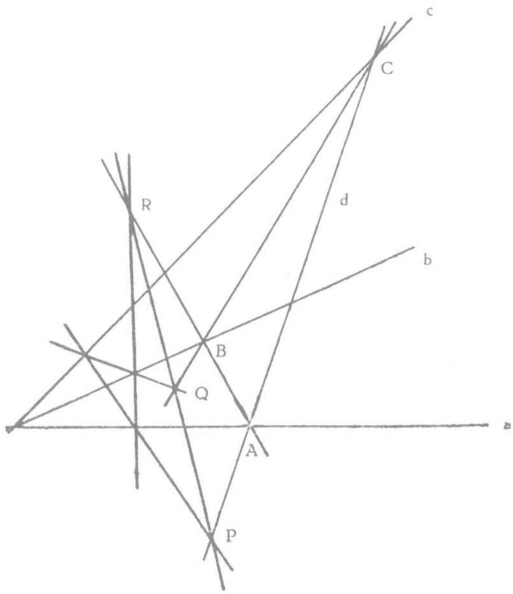

Fig. 7a.

Stelling 1b: De configuratie van Desargues geldt, als hij geen oneigenlijke elementen bevat.

Bewijs: Aangetoond moet weer worden, dat bQcPa een perspectiviteit is. Snijdt de oneigenlijke rechte d weer a in A en is C(c, PA) R(AB, PQ) dan geeft toepassing van de voorgaande stelling het bewijs van de bewering.

Samenvattend:

Stelling 1: De configuratie van Desargues geldt algemeen.

Stelling 2: Liggen $A_1A_2A_3$ op een rechte a, $B_1B_2B_3$ op een rechte b, en is het snijpunt S van a en b met twee der drie punten $C_k(A_iB_j, A_jB_i)$ collineair, dan ook met het overige en voorts zijn de drie rechten A_iB_i concurrent. *(De kleine stelling van Pascal).*

Bewijs: Zijn S, C_1, C_2 collineair dan geeft toepassing van Desargues op $\triangle$ $A_1B_2C_3$ en $\triangle$ $A_2B_2C_i$ dat A_3, B_3, T (A_1B_1, A_2B_2) collineair zijn, m.a.w. de rechten A_iB_i gaan door één punt T. Vervolgens geeft toepassing van Desargues op $\triangle$ $A_1B_2A_3$ en $\triangle$ $B_1A_2B_3$ de collineariteit van C_1C_3S zodat S met $C_1C_2C_3$ op één rechte ligt.

Een belangrijke affiene specialisatie van deze stelling is:

Stelling 2a: Liggen de hoekpunten van een zeshoek afwisselend op twee evenwijdige rechten, en zijn twee paren overstaande zijden evenwijdig, dan is ook het derde paar evenwijdig.

Stelling 3: bRaQbPa is een perspectiviteit.

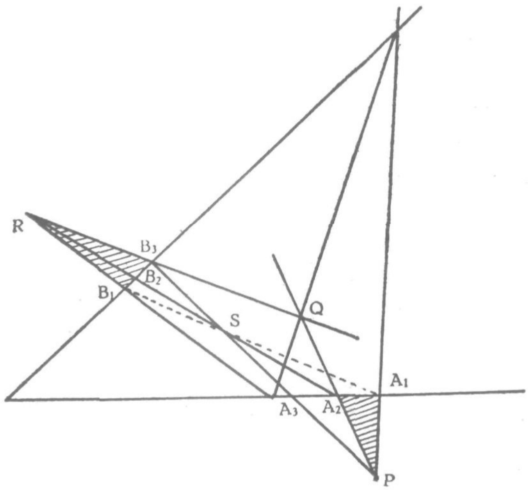

Fig. 7b.

Bewijs: (verg. fig. 7b) Stel, dat de transformatie het punt A_1 omzet in B_1.

Noem A_2(a, PQ), B_2(b, RA), B_3(b, RQ), A_3(a, PB_3).

Aangetoond moet worden, dat A_1B_1 door het snijpunt S van A_2B_2 en A_3B_3 gaat. Dit volgt echter direct uit de toepassing van Desargues op $\triangle$ A_1A_2P en $\triangle$ B_1RB_3.

Het centrum van de perspectiviteit kunnen we aanduiden als: P(QR, b) $\times$ (a, PQ)R.

Stelling 4: Zijn a, b, c concurrent, dan is

cBaRbAcQaCb

een perspectiviteit.

Bewijs: cBaRbAcQaCb $=$ c(BaR) b. A . c(QaC)b $=$ cTbAcSb met herhaalde toepassing van Desargues.

Volgens Stelling 3 is dit een perspectiviteit.

De stellingen 2, 3 en 4 zijn projectief en steunen op de stelling van Desargues, die met zichzelf duaal is. Deze stellingen kunnen dus zelf ook gedualiseerd worden.

§ 11. *Aequivalente drietallen.*

We beschouwen collineaire puntentripels, bestaande uit drie eigenlijke niet tegelijk samenvallende punten. Het oneigenlijke punt van de drager a van het puntendrietal $A_1A_2A_3$ duiden we aan met de index ∞.

Twee puntendrietallen $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ op snijdende dragers heten aequivalent $\wedge$ wanneer de drie punten C_j $(A_jB_\infty, B_jA_\infty)$ collineair zijn. Zijn hun dragers evenwijdig of vallen ze samen, dan heten de puntendrietallen aequivalent, wanneer ze aequivalent met een derde tripel zijn. De rechte $C_1C_2C_3$ noemen we de aequivalentieas van de twee tripels.

Stelling 5: Is $A_1A_2A_3 \wedge B_1B_2B_3$ en $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, dan is $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Bewijs: Volgens Desargues, toegepast op $\triangle A_1B_1C_1$ en $\triangle A_2B_2C_2$ gaat C_1C_2 door het snijpunt S van de dragers.

Toepassing van Desargues nu b.v. op $\triangle A_1B_1C_1$ en $A_3B_3C_3$ levert het gestelde. We schrijven $A_1A_2A_3 \overline{\wedge} B_1B_2B_3$.

Een belangrijk speciaal geval is:

Stelling 5a: Is $A_1A_2A_3 \wedge B_1B_2B_3$ en $A_1 \equiv B_1$ dan is $A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Hoofdstelling: Uit $A_1A_2A_3 \wedge B_1B_2B_3$ en $A_1A_2A_3 \wedge C_1C_2C_3$ volgt $B_1B_2B_3 \wedge C_1C_2C_3$. (transitiviteit der aequivalentie).

Bewijs: Het is voldoende, de dragers van de puntendrietallen a, b, c onderling niet-evenwijdig te veronderstellen.

Is q de aequivalentieas van a en c, en r die van a en b, dan moet blijkbaar bewezen worden, dat de transformatie

$$C_\infty bA_\infty rB_\infty aC_\infty qA_\infty cB_\infty$$

een perspectiviteit is; dit betekent nl. dat dan de punten $(B_jC_\infty, C_jB_\infty)$ collineair zijn. Dit is blijkbaar juist de duale vorm van Stelling 4, zodat het gestelde daarmee bewezen is.

Evenals in het analoge geval in hoofdstuk II is de aequivalentiedefinitie voor tripels op parallelle dragers onafhankelijk van het derde tripel en geldt de hoofdstelling ook voor het geval dragers evenwijdig lopen.

§ 12. *Rekenregels.*

Voor de klassen van onderling aequivalente puntendrietallen voeren we, analoog aan § 9, rekenregels in.

Vooraf merken we op, dat bij de definities en toepassingen voorzichtigheid betracht moet worden met de elementen: (ABA) en (AAB) resp. het „nulelement" en het „oneindigelement". Het onderzoek tot welke bijzonderheden deze elementen leiden laten we aan de lezer over.

Productregel: $(APQ)\ (AQR) = (APR)$.

De ondubbelzinnigheid is eenvoudig in te zien.
Uit $A'P'Q' \wedge APQ$ en $A'Q'R' \wedge AQR$ volgt uit de aequivalentiedefinitie $A'P'R' \wedge APR$.

Het drietal (APP) is eenheid:

$$(APP)\ (APQ) = (APQ)$$

De drietallen (APQ) en (AQP) zijn invers:

$$(APQ)\ (AQP) = (APP) = (AQQ) = (AQP)\ (APQ)$$

Een uitzondering vormen (ABA) en (AAB) aangezien
enerzijds $(ABA)\ (AAB) = (ABB) = 1$.
anderzijds $(AAB)\ (ABA) = (AAA) =$ onbepaald.

De associativiteit volgt uit:

$$(APQ)\ (AQR)\ (ARS) = (APS).$$

Aldus ontstaat wederom een multiplicatieve groep, die blijkens de volgende stelling niet noodzakelijk commutatief is:

Stelling 6: De commutativiteit van de multiplicatieve groep van puntendrietallen is aequivalent met de geldigheid van de stelling van Pascal.

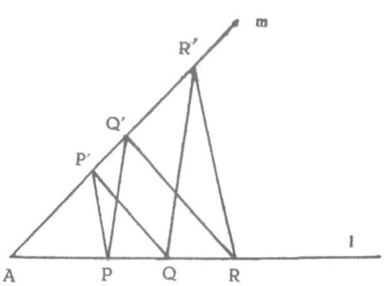

Fig. 8.

Bewijs: Zij $(APQ)\ (AQR) = (APR)$.
Kies een rechte m door A en punten $P'Q'R'$ zodanig hierop, dat $P'Q \| Q'R$ en $Q'P \| R'Q$.
Dan is $(AQR)\ (APQ) = (AP'Q')\ (AQ'R') = (AP'R')$.
Dit is slechts dan gelijk aan (APR), als $PP' \| RR'$ d.w.z. wanneer

voor zeshoek PQ'RR'QP' de stelling van Pappus-Pascal geldt.

Als in het vorige hoofdstuk heeft men:

Stelling 7: Zijn A,B verschillende punten, dan is er slechts één punt M waarvoor $(MAB)^2 = 1$. M heet het midden van AB.

Het midden M van AB volgt eenvoudig b.v. uit een parallellogramconstructie (verg. fig. 9).

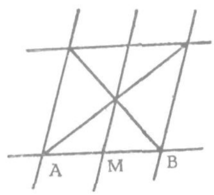

Fig. 9.

Somregel: $(ABP) + (ABQ) = (ABR)$ waarbij R uit A ontstaat door A t.o.v. het midden M van PQ te spiegelen, d.w.z.

R volgt uit $(MPQ) = (MAR) = \varepsilon$.

De ondubbelzinnigheid en commutativiteit van de optelling is direct in te zien.

De bijbehorende meetkundige voorstelling — die overigens op te vatten is als een affiene specialisatie van de in het vorige hoofdstuk gegeven somconstructie — leest men af uit fig. 10.

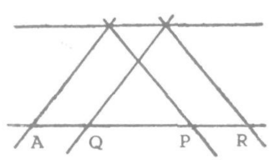

Fig. 10.

Een interessante uitbreiding van deze somconstructie leest men af in fig. 11 volgens het schema:

$$(AB_1P_1) + (AB_2P_2) = (AB_1R_1) = (AB_2R_2) = (ABR) \text{ waarbij}$$

$$RP_1 \parallel l_2 \qquad RP_2 \parallel l_1$$

$$R_1R_2 \parallel B_1B_2$$

Gemakkelijk ziet men voorts in, dat (ABA) een nulelement is, en dat (ABP) en (ABQ) met de voorwaarde $(APQ) = \varepsilon$ inversen zijn.

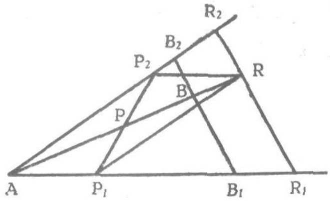

Fig. 11.

We bewijzen tenslotte aan de hand van fig. 12 de associativiteit volgens het schema:

$$\{(ABP) + (ABQ)\} + (ABR) = (ABS) + (ABR) =$$
$$= (ABU) = (ABT) + (ABQ) = \{(ABP) + (ABR)\} + (ABQ)$$

De overgang bij (ABU) is geoorloofd volgens de kleine stelling van Pascal, toegepast op zeshoek A'SQ'UR'T.

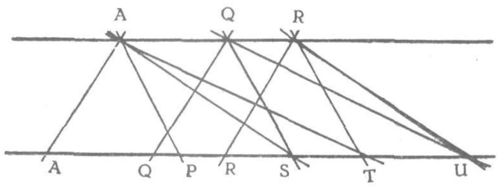

Fig. 12.

Hiermede is dus aangetoond, dat de klassen van aequivalente puntendrietallen tegelijk een niet-commutatieve multiplicatieve en een commutatieve additieve groep vormen.

Stelling 8: Door (APB) + (AQB) = (ARB) wordt R onafhankelijk van B bepaald.

Bewijs: Hiertoe passen we de uitgebreide meetkundige voorstelling van de optelling toe.

In fig. 13 is:

$$(APB) + (AQB) = (APB_1) + (AQB_2) = (ASC) = (ARB)$$

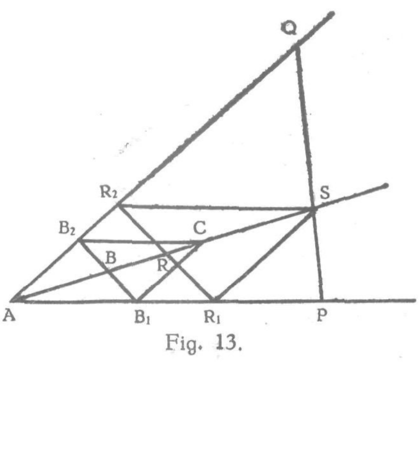

Fig. 13.

Dit laatste, omdat volgens Desargues uit $SR_1 \parallel AQ$ en $SR_2 \parallel AP$ volgt, dat $R_1R_2 \parallel B_1B_2$. Inderdaad hangt de ligging van het punt R niet van B af.

De distributieve eigenschappen volgen nu zonder moeite:

1° $(ARB)\{(ABP) + (ABQ)\} = (ARB)(ABS) = (ARS)$

$(ARB)(ABP) + (ARB)(ABQ) = (ARP) + (ARQ) =$
$= (ARS)$

aangezien de ligging van S onafhankelijk van B is.

2° $\{(APB) + (AQB)\}(ABR) = (ASB)(ABR) = (ASR)$

$(APB)(ABR) + (AQB)(ABR) = (APR) + (AQR) =$
$= (ASR)$

aangezien volgens stelling 8 ook hier S onafhankelijk van B is.

Hiermede is dus het resultaat verkregen:

Stelling 9: Men kan voor de klassen van aequivalente puntendrietallen een zodanige product- en somdefinitie geven, dat een niet-commutatief getallenlichaam ontstaat.

Opmerkingen: Volledigheidshalve merken we op, dat, wanneer A en B vaste punten, en P een collineair veranderlijk punt voorstellen, elk van de tripels (ABP) (APB) (PAB) alle „waarden" van het getallenlichaam kan aannemen, zoals onmiddellijk uit de aequivalentiedefinitie volgt. De bewijzen voor de „rekenregels" zijn dus inderdaad algemeen.

Analoog aan de somdefinities van hoofdstuk II geldt hier:

$$(ABP) + (ABQ) = (ABP)(XAQ) = (ABQ)(YAP)$$
$$\text{met } (APX) = (AQY) = \varepsilon$$
$$(APB) + (AQB) = (XAQ)(AQB) = (YAP)(APB)$$
$$\text{met } (APX) = (AQY) = \varepsilon$$

Tenslotte bewijzen we nog een andere analogie.

Stelling 10: $(ABC) + (BAC) = 1$

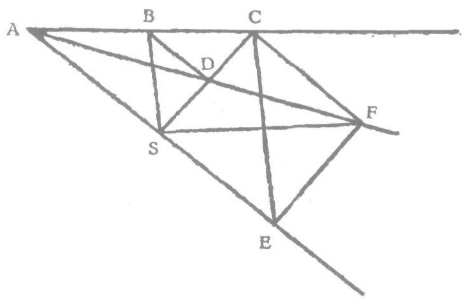

Fig. 14.

Bewijs: Zie fig. 14.

$$(ABC) + (BAC) = (SDC) + (SAE) = (SFF) = 1$$

volgens de uitgebreide meetkundige voorstelling en volgens Desargues, toegepast op $\triangle$ BDS en $\triangle$ CFE.

HOOFDSTUK IV.

Euclidische meetkunde.

We stellen ons hier op het standpunt, dat de projectieve en affiene meetkunde ons bekend zijn. De grondslag vormt weer een commutatief getallenlichaam, waarvan we veronderstellen dat de karakteristiek $\neq 2$ is, en dat de vierkantworteltrekking uitvoerbaar is. Zoals in § 5 reeds opgemerkt is heeft dus $x^2 + 1 = 0$ twee oplossingen, waarvan we er één met het symbool i aanduiden. Aanknopend aan het in § 5 en § 6 behandelde beschouwen we de Euclidische meetkunde met twee gescheiden isotrope richtingen. Verschillende nieuwe begrippen als kwadraatafstand, cirkel, gerichte lengte worden achtereenvolgens besproken, waarna de goniometrie, steunend op de theorie der dubbelverhoudingen, opgebouwd wordt.

§ 13. Inleiding.

Uit de projectieve meetkunde, zoals die in de eerste twee hoofdstukken ontwikkeld is, denken we ons de affiene meetkunde afgeleid, waarover aan het eind van het eerste hoofdstuk nog enige opmerkingen zijn gemaakt. Hieruit leiden we vervolgens de Euclidische meetkunde af door op de oneindig verre rechte twee uitzonderingspunten, steeds met I_1 en I_2 aangeduid, te kiezen, en die eigenschappen te onderzoeken, waarbij invariantie t.o.v. dit isotrope puntenpaar optreedt.

Verschillende bekende zaken duiden we hieronder slechts kort even aan.

De collineaties die het puntenpaar $I_1 I_2$ als geheel invariant laten vormen de metrische groep; ze kunnen verdeeld worden in de collineaties die I_1 en I_2 elk invariant laten: directe aequiformiteiten, en die welke I_1 en I_2 verwisselen: indirecte aequiformiteiten.

Rechten door I_1 en I_2 heten isotrope rechten. Vele eigenschappen gelden alleen voor niet-isotrope rechten; we zullen, als een en ander voldoende uit het verband volgt, meestal van rechten zonder nadere toevoeging spreken.

Twee rechten, wier oneindig verre punten door I_1 en I_2 harmonisch gescheiden worden, noemen we onderling loodrecht. Een op een niet-isotrope rechte gelegen puntenpaar noemen we ook wel een lijnstuk.

De directe aequiformiteiten kunnen weer gesplitst worden in de affiniteiten die op de oneindig verre rechte de identiteit bepalen t.w. identiteit, translatie en centrale vermenigvuldiging met de puntspiegeling als specialiteit, en de affiniteiten die op de oneindig verre rechte een projectiviteit bepalen. Hiervan is alleen de gewone affiniteit met één eigenlijk dekpunt van belang, omdat slechts in deze soort transformatie I_1 en I_2 een gelijkwaardige rol spelen. We noemen deze affiniteit de draaivermenigvuldiging. Een unimodulaire draaivermenigvuldiging heet rotatie of draaiïng. Een willekeurige draaivermenigvuldiging kan steeds opgevat worden als het product van een rotatie en een centrale vermenigvuldiging.

Van de indirecte aequiformiteiten is vooral de lijnspiegeling van belang. Elke andere indirecte aequiformiteit kan opgevat worden als het product van een directe aequiformiteit met een lijnspiegeling. Het algemene type is een gewone affiniteit met twee loodrechte dekrechten.

Eenvoudige eigenschappen zijn:

Stelling 1: Er is juist één directe en juist één indirecte aequiformiteit die A_1 in A_2, en B_1 in B_2 overvoert.

Stelling 2: Zijn a en b twee elkaar in S snijdende rechten, dan zijn er juist twee rotaties met centrum S, die a in b overvoeren.

§ 14. Cirkels.

We ontlenen hierin aan de projectieve behandeling van de kegelsneden i.h.b. over de collineaties, die een kegelsnede invariant laten, enige eigenschappen (verg. §6).

Verstaan we onder een cirkel een door I_1 en I_2 gaande kegelsnede, dan zijn de volgende stellingen zonder meer duidelijk.

Stelling 3: Elke metrische transformatie voert een cirkel in een cirkel over.

Stelling 4: De metrische transformaties, die een cirkel invariant laten zijn:
1° de identiteit, *2*° de puntspiegeling om het middelpunt, *3*° de lijnspiegelingen om een middellijn, *4*° de rotaties om het middelpunt.

Stelling 5: Er zijn twee transformaties, die een cirkel C invariant laten, en die een punt P van C in een punt Q van C overvoeren: *1*° een rotatie, *2*° een lijnspiegeling.

Stelling 6: Is C een cirkel met middelpunt M, dan staat de raaklijn in een punt P van C loodrecht op MP.

Bewijs: Het oneindig verre punt S van de raaklijn is de pool van MP, zodat PI_1 en PI_2 de rechten PS en PM harmonisch scheiden.

Stelling 7: Is R een rotatie met centrum M en voert R het punt A in B, en B in C over, dan is $MB \perp AC$.

Bewijs: R laat de cirkel, die M tot middelpunt heeft, en die door A gaat, invariant, zodat ook B en C op deze cirkel liggen. Uit projectieve overwegingen volgt direct dat AC evenwijdig is aan de raaklijn in B waarmee volgens de vorige stelling het gestelde bewezen is.

§ 15. Kwadraatlengte.

Kiezen we in het vlak een eenheidslijnstuk E_1E_2, dan verstaan we onder de kwadraatlengte van het lijnstuk AB de modulus van de directe aequiformiteit, die E_1 in A en E_2 in B overvoert. Voor dit getal bezigen we de notatie AB^2.

De enige directe aequiformiteit die E_1 en E_2 aan zichzelf toevoegt, is de identiteit, dus $E_1E_2{}^2 = 1$.

De enige directe aequiformiteit, die E_1 en E_2 verwisselt, is de puntspiegeling om het midden van E_1E_2, zodat $E_2E_1{}^2 = 1$.

Hieruit volgt dus ook: $BA^2 = AB^2$.

Stelling 8: De verhouding $\frac{AB^2}{CD^2}$ is onafhankelijk van de gekozen eenheid E_1E_2.

Bewijs: Men ziet eenvoudig in, dat $\frac{AB^2}{CD^2}$ gelijk is aan de modulus van de directe aequiformiteit, die C in A en D in B omzet.

De enige indirecte aequiformiteit die E_1 en E_2 verwisselt is de lijnspiegeling S om de middelloodlijn van E_1E_2. De modulus van S is -1.

Is T de directe aequiformiteit die E_1E_2 in BA omzet, dan is de transformatie TS de enige indirecte aequiformiteit, die E_1E_2 in AB overvoert. De modulus is $\mathrm{mod}TS = \mathrm{mod}T.\mathrm{mod}S = -AB^2$. Hieruit volgt gemakkelijk:

Stelling 9: AB^2 is gelijk aan het tegengestelde van de modulus van de indirecte aequiformiteit, die E_1E_2 in AB (of BA) omzet.

De verhouding $\frac{AB^2}{CD^2}$ is gelijk aan het tegengestelde van de modulus van de indirecte aequiformiteit, die CD in AB (of BA) omzet.

Stelling 10: Is $\triangle P_1A_1B_1 \sim (+) \triangle P_2A_2B_2$ en

$\triangle Q_1A_1B_1 \sim (-) \triangle Q_2A_2B_2$

dan is: $$\frac{A_1B_1{}^2}{A_2B_2{}^2} = \frac{(\overrightarrow{P_1A_1B_1})}{(\overrightarrow{P_2A_2B_2})} = -\frac{(\overrightarrow{Q_1A_1B_1})}{(\overrightarrow{Q_2A_2B_2})}$$

Bewijs: Volgt uit de vorige twee stellingen en uit de meetkundige betekenis van modulus.

Stelling 11: Zijn de lijnstukken AB en CD evenwijdig, dan geldt:

$$\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{(AB)^2}{(CD)^2}$$

waarbij AB en CD in het rechterlid de lengte van AB en CD t.o.v. een gemeenschappelijke eenheid voorstellen.

Bewijs: De directe aequiformiteit H die CD in AB overvoert is nu een homothetie.

1°. H is een translatie. Enerzijds is $\frac{AB}{CD} = 1$, anderzijds $\frac{AB^2}{CD^2} =$ mod H $= 1$ zodat het gestelde juist is.

2°. H is een centrale vermenigvuldiging met centrum O (CA, DB).

Nu geldt $$\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{(\overrightarrow{OAB})}{(\overrightarrow{OCD})} = \frac{OA\,.\,OB}{OC\,.\,OD} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

mits de rechten AB en CD niet samenvallen.

of indien AB en CD op eenzelfde rechte mogen liggen algemeen

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = f^2 = \text{mod}\, H = \frac{AB^2}{CD^2}$$

Stelling 12: Is T een directe aequiformiteit met een eigenlijk dekpunt D, en voert T het punt A_1 in A_2 over (TA_1 niet isotroop) dan geldt:

$$\text{mod}\, T = \frac{DA_2{}^2}{DA_1{}^2} = I_1(I_2DA_1A_2)\,.\,I_2(I_1DA_1A_2)$$

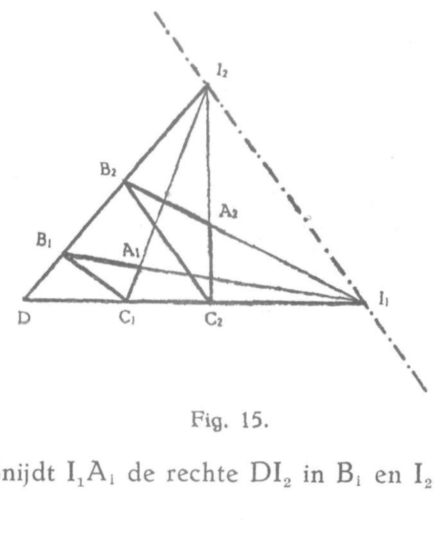

Fig. 15.

Bewijs: 1° Snijdt I_1A_1 de rechte DI_2 in B_1 en I_2A_1 de rechte DI_1 in C_1 dan is:

$$\text{mod}\, T = \frac{(\overrightarrow{DB_2C_2})}{(\overrightarrow{DB_1C_1})} = \frac{DB_2 \,.\, DC_2}{DB_1 \,.\, DC_1} = (B_2B_1D)\,(C_2C_1D) =$$

$$= (I_2DB_1B_2)\,(I_1DC_1C_2) = I_1(I_2DA_1A_2)\,.\,I_2(I_1DA_1A_2) \text{ q.e.d.}$$

Stelling 13: De kwadraatafstand van een willekeurig punt van een cirkel tot het middelpunt is constant.

Bewijs: Zijn P en Q twee punten van een cirkel met middelpunt M dan is er een rotatie R om M die P in Q overvoert.

Hieruit volgt $\dfrac{MQ^2}{MP^2} = \text{mod}\, R = 1.$

Omgekeerd geldt:

Stelling 14: De meetkundige plaats van de punten P die een vaste kwadraatafstand ϱ^2 tot een vast punt M bezitten, is een cirkel met M als middelpunt.

Bewijs: We bewijzen dit eens door de vijfde stelling van deze paragraaf toe te passen. Zijn P en Q twee punten met $MP^2 = MQ^2 = \varrho^2$ dan is:

$$1 = \frac{MP^2}{MQ^2} = I_1(I_2MQP)\,.\,I_2(I_1MQP) \text{ dus}$$

$$I_1(I_2MQP) = I_2(MI_1QP).$$

P en Q liggen derhalve op een kegelsnede die in I_1 en I_2 aan MI_1 en MI_2 raakt en die door P en Q gaat d.w.z. een cirkel met middelpunt M.

Stelling van Pythagoras. Is van $\triangle$ ABS $AC \perp BC$ dan is

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

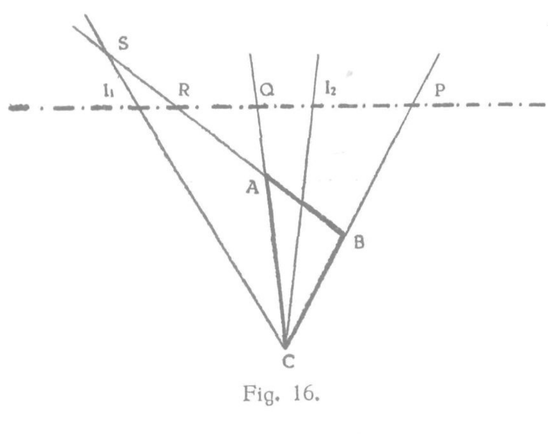

Fig. 16.

Bewijs:

$$1^\circ \quad \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = I_1(BCI_2A)\,.\,I_2(BCI_1A) +$$
$$+ I_1(ACI_2B)\,.\,I_2(ACI_1B) = A(BCPI_1)\,.\,A(BCPI_2) +$$
$$+ B(ACQI_1)\,.\,B(ACQI_2) = (RQPI_1)(RQPI_2) +$$
$$+ (RPQI_1)(RPQI_2) = 1.$$

2° Zij D de loodrechte projectie van C op AB, dan is:

$\triangle\, ACD \sim (-)\, \triangle\, ABC$ }
$\triangle\, BCD \sim (-)\, \triangle\, ABC$ } dus

$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} + - \frac{\overrightarrow{(ACD)}}{\overrightarrow{(ABC)}} - \frac{\overrightarrow{(BCD)}}{\overrightarrow{(BAC)}} = \frac{\overrightarrow{(ACD)}}{\overrightarrow{(ACB)}} + \frac{\overrightarrow{(BCD)}}{\overrightarrow{(BCA)}} =$$
$$= \frac{AD}{AB} + \frac{BD}{BA} = \frac{AD + DB}{AB} = 1$$

Stelling: Is van $\triangle$ ABC $AC \perp BC$ en is AB isotroop, dan is $CA^2 + CB^2 = 0$.

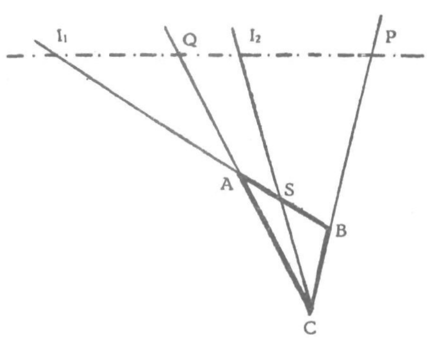

Fig. 17.

Bewijs:

1° Stel dat AB b.v. door I_1 gaat.

$$\frac{CA^2}{CB^2} = I_1(BAI_2C)\,.\,I_2(BAI_1C) = I_2(BAI_1C) = (BAI_1S) =$$
$$= (PQI_1I_2) = -1.$$

2° De aequiformiteit die C als dekpunt heeft, en die B in A overvoert is de lijnspiegeling om de isotrope rechte CI_2. De modulus is -1. Dus

$$\frac{CA^2}{CB^2} = -1.$$

Om tenslotte de stelling van Pythagoras i.v.m. de vorige stelling onbeperkt te laten doorgaan, spreken we af, dat we aan isotrope lijnstukken de kwadraatlengte 0 toekennen.

Gevolg: Uit $AB^2 = 0$ volgt dus of $A \equiv B$ of AB isotroop.

§ *16. Gerichte metriek.*

Zijn a en b twee rechten met de oneigenlijke punten $A\infty$ en $B\infty$ en zijn I_1 enI_2 de isotrope punten, dan verstaat men onder de tangens van a en b de uitdrukking:

$$\operatorname{tg}(ab) = i\,\frac{1 - (I_1I_2B\infty A\infty)}{1 - (I_1I_2B\infty A\infty)}$$

Gevolgen: $\quad \operatorname{tg}ab + \operatorname{tg}ba = 0.$

Is b_j een isotrope rechte door I_j, dan is

$$\operatorname{tg}ab_j = (-1)^{j-1}\, i$$

Is a niet-isotroop, dan is tgaa $= 0$

Is a isotroop, dan is tgaa onbepaald

Is $a \perp b$, dan is tgab $= \infty$.

Stelling 15:

$$\operatorname{tg}ab = \frac{\operatorname{tg}ac + \operatorname{tg}cb}{1 - \operatorname{tg}ac\,.\,\operatorname{tg}cb}$$

of

$$\operatorname{tg}ab + \operatorname{tg}bc + \operatorname{tg}ca = \operatorname{tg}ab\,.\,\operatorname{tg}bc\,.\,\operatorname{tg}ca.$$

Bewijs: Noem tgab, tgbc, tgca resp. t_1, t_2, t_3, dan volgt uit

$$(I_1I_2B\infty A\infty)\,(I_1I_2A\infty C\infty)\,(I_1I_2C\infty B\infty) =$$

$$= \frac{i - t_1}{i + t_1}\,.\,\frac{i - t_2}{i + t_2}\,.\,\frac{i - t_3}{i + t_3} = 1$$

onmiddellijk het gestelde.

Stelling 16: Is $m \perp n$, a willekeurig en j_1 isotroop door I_1, dan is

$$\operatorname{tg}ma = i\,(mnaj_1)$$

Bewijs:

$$\operatorname{tg}ma = i\,\frac{1 - (I_1I_2A\infty M\infty)}{1 + (I_1I_2A\infty M\infty)} = i\,\frac{(I_1A\infty I_2M\infty)}{1 - (I_1I_2A\infty N\infty)} =$$

$$= i\,\frac{(I_1A\infty I_2M)}{(I_1A\infty I_2N)} = i(I_1A\infty N\infty M\infty) = i(M\infty N\infty A\infty I_1) =$$

$$= i(mnaj_1).$$

$$\textit{Gevolg:}\quad (abcd) = \frac{\operatorname{tg}mc - \operatorname{tg}ma}{\operatorname{tg}mc - \operatorname{tg}mb} : \frac{\operatorname{tg}md - \operatorname{tg}ma}{\operatorname{tg}md - \operatorname{tg}mb}$$

In de affiene meetkunde is het mogelijk aan de lijnstukken lengten toe te kennen. Wordt op een rechte een zeker lijnstuk als eenheidslijnstuk aangenomen, dan ligt daarmee de lengte van elke lijnstuk AB op die rechte vast. Dit getal duiden we eveneens met de notatie AB aan, en men heeft AB $=$ BA. In beginsel moet voor elke rechte in het affiene vlak een aparte lengteeenheid gekozen worden, maar eenvoudig ziet men in dat op onderling evenwijdige rechten de lengteeenheden met elkaar in verbinding kunnen worden gebracht.

Richt men het nml. zodanig in, dat twee evenwijdige rechten op elk exemplaar van het beschouwde stelsel evenwijdige rechten juist het eenheidslijnstuk uitsnijden, dan is voor dit stelsel een uniforme lengtemeting mogelijk. Blijkbaar is in de affiene meetkunde de lengteeenheid voor een stelsel evenwijdige rechten d.w.z. voor een bepaalde richting ondubbelzinnig bepaald door op één der exemplaren het eenheidslijnstuk aan te wijzen. Voor elke richting is men derhalve verplicht telkens een eenheidslijnstuk te kiezen.

Door middel van het begrip kwadraatafstand is men echter in staat een voor het gehele vlak uniforme regeling te treffen aangaande de lengteeenheid. Voor de verschillende stelsels evenwijdige rechten kunnen we dus telkens een lijnstuk met kwadraatafstand 1 als lengteeenheid kiezen. Een bezwaar is het, dat dit telkens op twee wijzen mogelijk is, nl. afhankelijk van het feit welk punt van het basislijnstuk men als oorsprong kiest.

Een moeilijkheid doet zich alleen voor bij de twee stelsels isotrope rechten waar elk lijnstuk de kwadraatlengte 0 bezit. Om aan het eerste bezwaar tegemoet te komen voeren we een nieuw begrip in, nl. definieren we een rechte waarop van de twee mogelijkheden één wordt gekozen als een zg. gerichte rechte of speer.

Een speer is dus een rechte waarop een éénheid gekozen is; de rechte zonder meer heet de drager van de speer. Een rechte draagt dus twee — tegengestelde — speren.

Twee speren op evenwijdige dragers heten gelijkgericht, wanneer hun eenheden — van affien standpunt — overeenstemmen; in het andere geval tegengesteld gericht.

Eenvoudig ziet men in:

Een translatie voegt aan elke speer een daarmee gelijkgerichte speer toe.

Zijn A en B punten van een speer, dan geldt:

$$AB^2 = (AB)^2.$$

Zijn a en b twee elkaar in S snijdende speren met eenheden SA en SB dan is er juist één spiegeling om een bissectrix van a en b die a en b en dus A en B verwisselt. Deze bissectrix noemen we de hoofdbissectrix van a en b. De andere spiegeling die de dragers a en b verwisselt, maar die de speer a in één tegengesteld met speer b overvoert is die om de andere bissectrix, de nevenbissectrix van a en b.

Analoog is er juist één rotatie om S die speer a in speer b en dus A in B overvoert en één rotatie om S die speer a in één tegengesteld met speer b overvoert.

Stelling 17: Zijn a en b twee elkaar in S snijdende speren, is d de hoofdbissectrix en is R een rotatie om S die de drager a in de drager d overvoert, dan voert R^2 de speer a in de speer b over. Is d de nevenbissectrix, dan voert R^2 de speer a in een speer tegengesteld met b over.

Bewijs: Zijn SA en SB de op a en b gekozen eenheden en is C een punt van d met $SC^2 = SA^2$, dan is er juist één rotatie R om S met $A \rightarrow C$. R voert C in een punt B' van m over met $SB'^2 = SC^2 = SA^2$ dus is of $B' \equiv B$ of S is het midden van BB'. Nu is echter $AB \perp d$ en anderzijds volgens stelling 7 van § 4 $AB' \perp d$, dus geldt $B' \equiv B$.

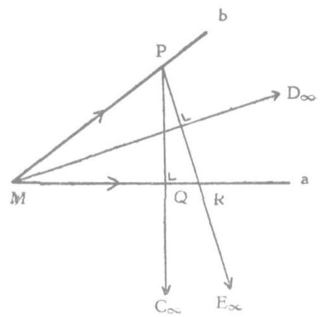

Fig. 18.

Zijn a en b twee elkaar in M snijdende speren, en is Q de projectie op a van een punt P van b, dan definieren we de verhouding

$$\frac{MQ}{MP}$$

die blijkbaar onafhankelijk van P(en Q) is als de cosinus van a en b:

$$\cos(ab) = \frac{MQ}{MP}$$

Geldt MP = MR (zie fig. 18), dan is $\cos ab = \frac{MQ}{MP} =$

$= (QRMA\infty) = (C\infty E\infty B\infty A\infty) = (A\infty B\infty E\infty C\infty) =$
$= - (A\infty B\infty D\infty C)$

Hieruit leiden we af:

Stelling 18:

$$\cos^2 ab = \frac{1}{1 + tg^2 ab}$$

Bewijs:

$$\cos^2 ab = (A_\infty B_\infty D_\infty C_\infty)^2 = (\,abdc)^2 =$$

$$= \left\{ \frac{\mathrm{tg}ad}{\mathrm{tg}ad - \mathrm{tg}ab} \right\}^2 = \left\{ \frac{1 - \mathrm{tg}^2 ad}{1 + \mathrm{tg}^2 ad} \right\}^2 = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 ab}$$

Uit het feit, dat een spiegeling om de hoofdbissectrix van twee speren a en b deze verwisselt leidt men onmiddellijk af:

$$\cos ba = \cos ab.$$

Tenslotte voeren we voor twee speren a en b een derde functie in: de sinus gedefinieerd door:

$$\sin (ab) = \mathrm{tg}(ab) \, . \, \cos (ab).$$

Résumé:

Twee ongerichte rechten bezitten een tangens.

Twee gerichte rechten bezitten bovendien een cosinus en sinus.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{tg}\, ab & = & -\,\mathrm{tg}\, ba \\ \cos ab & = & \cos ba \\ \sin ab & = & -\sin ba \end{array} \right.$$

$$\cos^2 ab = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\, ab} \qquad \sin^2 ab + \cos^2 ab = 1$$

§ 17. *Loodrechte stand.*

Aan de ingevoerde functies is nog het bezwaar verbonden dat ze in het geval $a \perp b$ zinloos zijn. Dit zullen we hieronder nader onder ogen zien.

Vooraf de volgende hulpstelling:

Stelling 19: Vormen op een rechte de puntenparen A_1A_2, B_1B_2 een involutie en is $(A_1A_2B_1B_2) = -1$ dan kan men aan de dekpunten C dusdanige indices 1, 2 toekennen, dat:

$$(C_1C_2B_1A_1) = (C_1C_2B_2A_2) = i.$$

Bewijs:

$$(C_1C_2B_1A_1) = (C_1C_2B_1B_2)\ (C_1C_2B_2A_1) = -\ (C_2C_1B_1A_1) =$$

$$= \frac{-1}{(C_1C_2B_1A_1)} \text{ dus } \qquad (C_1C_2B_1A_1)^2 = -1.$$

Symmetrisch heeft men:

$$(A_1A_2B_1B_2) = (B_1B_2C_1C_2) = (C_1C_2A_1A_2) = -1$$

$$(A_1A_2C_1B_1) = (B_1B_2A_1C_1) = (C_1C_2B_1A_1) = i$$

Deze stelling geeft ons dus een middel om de dekpunten van een involutie van elkaar te onderscheiden.

We beschouwen twee loodrecht op elkaar staande speren a en b, elkaar in S snijdend. De isotrope rechten door S noemen we j_1 en j_2 (j_i door I_i); hoofdbissectrix en nevenbissectrix van a en b noemen we e en f. Dan heeft men dus:

$$(abef) = (efj_1j_2) = (j_1j_2ab) = -1.$$

Er zijn nu verder twee gevallen mogelijk:

Als $(j_1 j_2 ea) = i$ heet de speer b orthogonaal toegevoegd aan de speer a.

Als $(j_1 j_2 ea) = -i$ heet de speer b tegengesteld orthogonaal toegevoegd aan de speer a.

Hieruit volgt direct:

Is b de orthogonaal toegevoegde van a dan is a tegengesteld orthogonaal toegevoegd aan b. In doorzichtige notatie:

als $b \perp^+ a$ is $a \perp^- b$.

Is b de orthogonaal toegevoegde van a, dan geldt:

$(j_1 j_2 ea) = (abj_1 e) = i$ dus is:

$$tgae = i(abej_1) = -i^2 = 1.$$

De bewering $b \perp^+ a$ is dus aequivalent met

$$tgae = 1$$

(e de hoofdbissectrix van a en b).

Gevolg: Als $b \perp^+ a$ geldt: $tg(ac) = -(abce)$.

Bewijs:

$tg(ac) = i(abcj_1) = i(abce)(abej_1) = i^2(abce) = -(abce)$.

Met behulp van het begrip orthogonaal toegevoegde speer zijn we nu in staat „alle" bekende z.g. elementaire stellingen van de planimetrie en trigonometrie af te leiden.

We zullen hieronder ons bepalen tot de meest fundamentele of karakteristieke trekken.

Stelling 20: Is $\triangle$ ABC rechthoekig in C, beschouwt men de zijden als speren en wel zodanig, dat BC orthogonaal toegevoegd aan AC is, dan geldt:

$$\left\{\begin{aligned} tg\,(AC, AB) &= \frac{CB}{AC} \\ \cos\,(AC, AB) &= \frac{AC}{AB} \\ \sin\,(AC, AB) &= \frac{CB}{AB} \end{aligned}\right.$$

Bewijs: Snijdt de rechte door A evenwijdig aan de hoofdbissectrix van AC en BC de rechte BC in E en is $F\infty$ het oneigenlijke punt van BC dan geldt volgens het bovenstaande gevolg:

$$tg\,(AC, AB) = -(CF_\infty BE) = -\frac{BC}{EC} = -\frac{BC}{AC} = \frac{CB}{AC}.$$

De tweede betrekking kennen we reeds.

De derde volgt nu onmiddellijk uit de definitie.

In het vroegere uitzonderingsgeval $b \perp a$ waarbij $\mathrm{tg}(ab) = \infty$, $\cos(ab) = 0$, $\sin(ab) =$ onbepaald, kunnen we op grond van bovenstaande betrekking de aanvulling treffen:

Als $b \perp^{+} a$ geldt $\sin(ab) = 1$
Als $b \perp^{-} a$ geldt $\sin(ab) = -1$.

Aan de afstand van een punt P tot een rechte a kunnen we nu a.v. ook een gerichtheid verbinden.
Is b de door P gaande aan a orthogonaal toegevoegde speer, en snijdt b a in S dan heet:

$$P(a) \equiv SP$$

de gerichte afstand van P tot de speer a.

Gemakkelijk is in te zien, dat een directe aequiformiteit orthogonaal toegevoegde speren in orthogonaal toegevoegde speren overvoert en de functies tg, cos, sin invariant laat. Een indirecte aequiformiteit voert orthogonaal toegevoegde speren in tegengegesteld orthogonaal toegevoegden over, voert de tg en sin functies in tegengestelde waarden over, doch laat de cos functie invariant.

§ *18. Oppervlakte.*

In de metrische meetkunde wordt de oppervlakteeenheid aangepast aan de lengteeenheid. Een „eenheidsdriehoek" construeren we als volgt:
Snijden de rechten a en b elkaar in O loodrecht, dan kiezen we op a en b de eenheden OE_a en OE_b en wel zodanig, dat daardoor b loodrecht aan a toegevoegd wordt. We definieren nu:

$$(\overrightarrow{OE_aE_b}) = \tfrac{1}{2}.$$

Het is duidelijk, dat alle op deze wijze geconstrueerde driehoeken onderling direct congruent zijn, dus dat het onverschillig is, van welk dezer driehoeken we uitgaan.

Stelling 21: Is $\triangle$ ABC rechthoekig in C, en voegt men CB orthogonaal aan CA toe, dan is:

$$(\overrightarrow{ABC}) = \tfrac{1}{2}\, CA \,.\, CB.$$

Bewijs:

$$(ABC) = \tfrac{1}{2} \frac{(\overrightarrow{ABC})}{(\overrightarrow{E_aE_bC})} = \tfrac{1}{2} \frac{CA \,.\, CB}{CE_a \,.\, CE_b} = \tfrac{1}{2}\, CA \,.\, CB$$

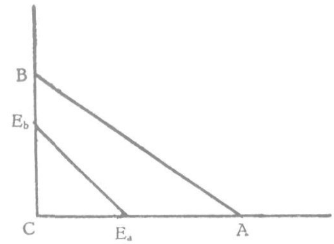

Fig. 19.

Stelling 22: Is van $\triangle$ ABC C(c) de gerichte afstand tot de speer AB, dan is:

$$(\overrightarrow{ABC}) = \tfrac{1}{2} . AB . C(c).$$

Bewijs: Is D de projectie van C op AB, dan is:

$$(\overrightarrow{ABC}) = (\overrightarrow{DBC}) + (\overrightarrow{DCA}) = + \tfrac{1}{2} DB . DC - \tfrac{1}{2} DA . DC$$
$$= \tfrac{1}{2} (AD + DB) . DC = \tfrac{1}{2} . AB . C(c)$$

§ 19. Cartesiaans Coördinatenstelsel.

Definitie: Onder een Cartsiaans coördinatenstelsel verstaat men een affien coördinatenstelsel (x, y) met $I_1(1, i, 0)$ I_2 $(1, -i, 0)$. Hieruit volgt direct dat de X-as en Y-as loodrecht op elkaar staan. Immers is $(X\infty Y\infty I_1 I_2) = -1$.

Is $P\infty(1, m, 0)$ een oneigenlijk punt, dan is

$$tg(OX\infty, OP\infty) = i \frac{1 - (I_1 I_2 P\infty X\infty)}{1 + (I_1 I_2 P\infty X\infty)} = i \frac{1 - (i -i\, m\, 0)}{1 - (i -i\, m\, 0)} =$$
$$= i \frac{(m + i) + (m - i)}{(m + i) - (m - i)} = m, \text{ dus}$$

Stelling 23: Is $P\infty(1, m, 0)$ dan is:

$$tg(OX\infty, OP\infty) = m.$$

I.h.b. blijft dit juist voor I_1 en I_2.

Stelling 24: De Y-as is de orthogonaal toegevoegde speer van de X-as.

Bewijs:

$$(j_1 j_2 ex) = (I_1 I_2 E\infty X\infty) = (i -i\ 1\ 0) = i$$

§ 20. Gerichte Cirkels.

Is M het middelpunt van een cirkel Γ en zijn A, B, C $\cdots$ punten van Γ, dan kunnen we A, B, C $\cdots$ (1—1)duidig toevoegen aan de speren door M d.m.v. de afspraak $MA = MB = MC \cdots$. Twee diametrale punten bepalen aldus juist de twee speren welke de bijbehorende middellijn draagt.

Aangezien voor een punt A van Γ slechts de kwadraatafstand MA^2 vastligt, kunnen we MA op juist twee wijzen kiezen. Elke der twee keuzen bepaalt een (1—1) toevoeging tussen punten van Γ en speren door M.

Een cirkel, waarbij een keus gedaan is, heet een gerichte cirkel of cykel.

Onder de raakspeer in een punt A van Γ verstaan we de orthogonaal toegevoegde van speer MA.

Twee cykels heten rakend, wanneer ze in een gemeenschappelijk punt een zelfde raakspeer bezitten.

Men ziet eenvoudig in, dat de meetkundige plaats van de middelpunten van cykels, rakend aan twee elkaar snijdende speren de nevenbissectrix is en dat een speerdriehoek juist één raakcykel bezit; het middelpunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de nevenbissectrix, en heeft gelijke gerichte afstanden tot de zijden van de speerdriehoek.

Verdere uitwerking van deze begrippen laten we aan de lezer over.

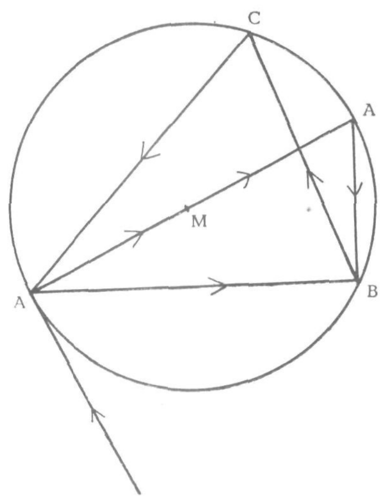

Fig. 20.

Is Γ de omgeschreven cirkel van een speerdriehoek ABC, en is t_a de raaklijn in A, dan is $\mathrm{tg}(t_a, AB) = \mathrm{tg}(CA, CB)$.

Stellen we nu, dat ook $\sin(t_a, AB) = \sin(CA, CB)$, dan is t_a hierdoor gericht, m.a.w. hierdoor wordt een cykel bepaald. We noemen deze de aan $\triangle ABC$ toegevoegde cykel.

De middellijn AMA′ zij zo gericht, dat MA $=$ R de straal van de cykel is, m.a.w. $t_a \perp^+ MA$.

Stellen we nu $AB \perp^+ A'B$ dan geldt:

$\sin(t_a, AB) = \sin(CA, CB) = \sin(A'A, AB)$ of m.a.w. de sperenparen t_a, AB; CA, CB; A′A, A′B zijn direct congruent. Nu geldt:

$$\sin(A'A, AB) = \frac{AB}{AA'} = \frac{AB}{2\,MA} = \frac{AB}{2\,R}$$

$$\text{dus } \sin(CA, CB) = \frac{AB}{2\,R}$$

Met de sinusregel volgt hieruit de volgende stelling:

Stelling 25: Is Γ de omgeschreven cirkel van een speerdriehoek ABC met kwadraatstraal R^2, dan bepaalt de betrekking:

$$\frac{BC}{\sin(AB, AC)} = \frac{CA}{\sin(BC, BA)} = \frac{AB}{\sin(CA, CB)} = 2\,R$$

een cykel. Zijn t_a, t_b, t_c de raaksperen in A, B, C dan is:

$$\sin(t_a, AB) = \sin(CA, CB);\ \sin(t_b, BC) = \sin(AB, AC);$$
$$\sin(t_c, CA) = \sin(BC, BA).$$

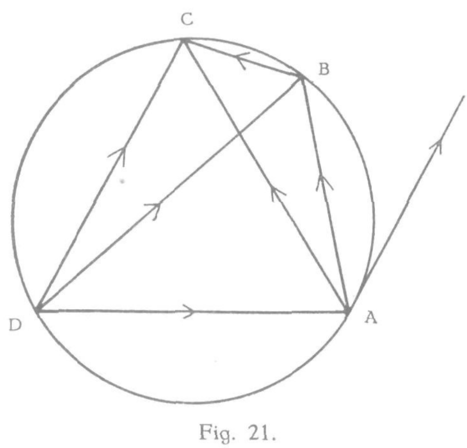

Fig. 21.

Zij nu Γ een cykel met de vier punten A, B, C, D.

De rechten DA, DB, DC geven we een richting.

We kiezen vervolgens de richtingen op AB, BC, CA zodanig dat Γ de toegevoegde is van $\triangle\triangle$ DAB, DBC, DCA. De vraag is nu of hierdoor ook Γ de toegevoegde van $\triangle$ABC is.

Uit de vorige stelling volgt:

$$\sin(AB, AC) = \sin(AB, t_a) \cos (AB, t_a) - \\ - \sin(AC, t_a) \cos(AC, t_a) = \\ = \sin(DB, DA) \cos(DB, DA) - \\ - \sin(DC, DA) \cos (DC, DA) \\ = \sin(DB, DC)$$

en $$\frac{BC}{\sin (AB, AC)} = \frac{BC}{\sin (DB, DC)} = 2\,R.$$

Inderdaad is Γ ook de toegevoegde van $\triangle ABC$:

Stelling 26: Zijn A, B, C, D vier punten op een cirkel Γ dan kunnen we de zes zijden van ABCD en Γ zelf zo oriënteren, dat Γ de toegevoegde is van de vier samenstellende speerdriehoeken. Daartoe kunnen vier van de zijden of drie door een hoekpunt gaande zijden tezamen met Γ onafhankelijk georiënteerd worden; de overige drie oriëntaties zijn van de overige afhankelijk.

Stelling 27: Is ABCD een zodanige in een cykel Γ ingeschreven speervierhoek dat Γ de toegevoegde is van elk der vier samenstellende driehoeken, dan geldt:

$$DA\,.\,BC + DB\,.\,CA + DC\,.\,AB = 0 \qquad \text{(Ptolemaeus)}$$

Bewijs: Pas de uitgebreide sinusregel toe. Het linkerlid is evenredig met

$$\sin (AD, t_a) \sin (AB, AC) + \sin (AD, AB) \sin (AC, t_a) + \\ + \sin (AD, AC) \sin (t_a, AB).$$

Splits $\sin (AB, AC)$ in $- \sin (t_a, AB) \cos (t_a, AC) + \sin (t_a, AC) \cos (t_a, AB)$ en analoog $\sin (AD, AB)$ en $\sin (AD, AC)$, waarna alles tegen elkaar wegvalt.

HOOFDSTUK V.

Niet-Euclidische meetkunde.

Zoals het bij het tweede en derde hoofdstuk het geval was, bestaat er ook een grote overeenstemming tussen dit en het vorige hoofdstuk. Wederom knopen we aan bij de projectieve beschouwingen van het eerste hoofdstuk, in het bijzonder § 5 en § 6. Van het getallenlichaam L eisen we weer, dat de karakteristiek $\neq 2$ is, en dat de vierkantsworteltrekking uitvoerbaar is. In de hier beschouwde Niet-Euclidische is de invoering van georiënteerde elementen een essentiele eis, zonder welke een bruikbare maatbepaling niet mogelijk is. Dit blijkt duidelijk bij de definitie van de goniometrische functies. Ondanks het feit, dat een driehoek met ongerichte elementen op 2^6 wijzen gericht kan worden, blijken de gewone formules van de boldriehoeksmeting een ondubbelzinnige geldigheid te bezitten. Geldt nml. voor een op bepaalde wijze gerichte driehoek de cosinusregel·

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

dan heeft verandering van oriëntatie van één element op deze formule, zoals zal blijken, geen invloed. Wijziging op a levert voor sin a en cos C tekenverandering, resultaat nihil. Wijziging voor A geeft bij cos c, cos b, sin b een minteken, zodat de formule ongewijzigd blijft. De overige gevallen worden aan de lezer overgelaten.

§ 21. *Inleiding.*

Uit de projectieve meetkunde leiden we de niet-Euclidische meetkunde af door in het vlak een kegelsnede Ω als de z.g. absolute of isotrope kegelsnede te aanvaarden, en de eigenschappen te onderzoeken, die invariantie t.o.v. Ω vertonen. De punten van Ω heten oneigenlijke of isotrope punten, de raaklijnen isotrope rechten.

De collineaties, die Ω invariant laten, heten congruenties of bewegingen. Ze vormen een groep, de metrische groep.

De poolcorrelatie van Ω bepaalt in de niet-Euclidische meetkunde een volstrekte dualiteit van punten en rechten, zodat elke definitie en eigenschap op twee wijzen geïnterpreteerd kan worden.

Twee punten die geconjugeerd t.o.v. Ω zijn heten onderling loodrecht, evenals twee geconjugeerde rechten.
Door een punt P gaat juist één rechte loodrecht op een gegeven rechte a, het snijpunt heet de projectie van P op a. Een kegelsnede K kan t.o.v. Ω vijf soorten liggingen vertonen. Van belang is hier alleen het geval dat K Ω dubbel raakt en dat K in het bijzonder K viervoudig raakt. We noemen K in dit geval een cirkel resp. hypercirkel.

We bespreken vervolgens in het kort de congruentietypen d.w.z. de collineaties die Ω invariant laten.
Het eenvoudigste type is de involutorische centrale collineatie of spiegeling, die zowel als een lijnspiegeling om zijn as als ook als een puntspiegeling om zijn centrum opgevat kan worden. Door centrum of door de as is de spiegeling blijkbaar volledig bepaald. Men ziet gemakkelijk in, dat er twee spiegelingen zijn, die twee punten A en B verwisselen, de twee centra heten de middens van AB.
De middens M_1 en M_2 van AB zijn hierdoor gekenmerkt, dat ze loodrecht op elkaar staan en met AB een harmonisch viertal vormen. M_1 en M_2 zijn dus de dekpunten van de involutie waarin AB een paar en de isotrope punten van AB een paar vormen. Analoge beschouwingen leiden tot de twee bissectrices van een lijnenpaar. Een spiegeling met centrum D en as d duiden we aan door (D, d). Een spiegeling laat behalve Ω ook alle cirkels die in de snijpunten van d met Ω aan Ω raken of die in de snijpunten van een rechte door D met Ω aan Ω raken invariant.

De parabolische collineatie of paraboliteit, die Ω invariant laat is voor ons minder belangrijk. Er is slechts één isotroop centrum D en één isotrope as d. De in D hyperosculerende hypercirkels worden door deze paraboliteit invariant gelaten. Een paraboliteit (D, d) is door de parabolische projectiviteit op Ω d.w.z. door D en een toegevoegd isotroop puntenpaar volledig bepaald. Voor de paraboliteit noemen we de stellingen:

Stelling1: Er zijn vier paraboliteiten die een punt A in B transformeren. De centra zijn de snijpunten van Ω met de twee van PQ verschillende diagonalen van de door P en Q bepaalde raaklijnenvierzijde van Ω.

Stelling 2: De twee producten van twee spiegelingen, waarvan de verbindingslijn d der centra isotroop is, zijn paraboliteiten met de centraal d. Omgekeerd kan elke paraboliteit op oneindig veel manieren als product van twee spiegelingen beschouwd worden.

De algemene collineatie, die Ω invariant laat, heet rotatie. Er is weer een centrum en een as, die met de eigenlijke dekelementen overeenstemmen. De overige dekpunten zijn de isotrope punten van de as. De rotatie is weer volledig bepaald door de projectiviteit op Ω b.v. de isotrope dekpunten en een isotroop puntenpaar. Een rotatie laat weer alle in de isotrope dekpunten aan Ω rakende cirkels invariant. Een involutorische rotatie heet spiegeling. Deze transformatie kunnen we opvatten als een puntspiegeling om het centrum maar ook als een lijnspiegeling om de as. Voor de rotatie noemen we de stelling:

Stelling 3: Zijn a en b twee elkaar in S snijdende rechten, dan zijn er juist twee rotaties met centrum S, die a in b overvoeren.

Raakt een cirkel Ω in de isotrope punten I_1 en I_2, dan heet I_1I_2 de centraal en de pool M van I_1I_2 t.o.v. Ω het centrum of middelpunt van de cirkel.

Een cirkel is invariant bij rotatie om het middelpunt evenals bij een spiegeling om een middellijn door M.

Analoog spreken we bij een hypercirkel van een isotroop middelpunt en een isotrope centraal. De eigenlijke rechten door het middelpunt noemen we middellijnen.

Een hypercirkel blijft invariant bij een paraboliteit met het middelpunt als centrum evenals bij een spiegeling om een middellijn.

Noemen we elkaar op Ω snijdende rechten parallel dan volgt uit de projectieve voortbrenging van kegelsneden, dat de meetkundige plaats van de projecties van een punt P op de exemplaren van een bundel parallelle rechten een hypercirkel is, die door P gaat.

Uit de invariantie van cirkel en hypercirkel t.o.v. spiegeling om een middellijn volgt dat de raaklijn in een punt P aan een dergelijke kromme loodrecht staat op de middellijn door P.

§ 22. Metriek.

Een rechte met in volgorde gegeven oneigenlijke punten I_1 en I_2 heet georiënteerd. Men spreekt ook kortweg van een speer. Zijn A en B twee punten van een speer, dan definieren we de tangens van AB a.v.

$$\mathrm{tg}AB = i\,\frac{1 - (I_1I_2BA)}{1 + (I_1I_2BA)}$$

waaruit volgt, dat $\mathrm{tg}AB + \mathrm{tg}BA = 0$ is.

Analoog spreken we van een georiënteerd punt, wanneer de oneigenlijke rechten door het punt in volgorde bepaald zijn, en analoog d.w.z. duaal definieren we de tangens van twee rechten. Duidelijk is, dat met een rechte tevens zijn absolute pool georiënteerd is.

De functie tg^2AB is blijkbaar onafhankelijk van de oriëntatie op de rechte AB en kan dus dienst doen voor een, zij het wat primitieve, maatbepaling. Men heeft nl.

Stelling 4: Is A een willekeurig punt van een cirkel met middelpunt M dan is tg^2MA constant. Analoog duaal.

Bewijs: De cirkel blijft invariant t.o.v. rotatie om M.

Is Q de projectie van een punt P op een rechte l en verstaan we onder de afstand van P tot l de uitdrukking tg^2PQ, dan geldt:

Stelling 5: De meetkundige plaats der punten P die een constante afstand tot een rechte l bezitten, is een cirkel die l tot centraal heeft.

Bewijs: Rotatie om de as l laat alle cirkels met de centraal l invariant.

De uit de tangensdefinitie voortvloeiende consequenties zijn in eerste instantie identiek met het in § 15 besprokene nl.

Stelling 6: $tgAB = \dfrac{tgAC + tgCB}{1 - tgAC \,.\, tgCB}$

Stelling 7: Liggen op een rechte met de isotrope punten I_1 en I_2 de punten M en A, en is $N \perp M$ dan geldt:

$$tgMA = i(MNAI_1)$$

Gevolg: $(ABCD) = \dfrac{tgMC - tgMA}{tgMC - tgMB} : \dfrac{tgMD - tgMA}{tgMD - tgMB}$

Zijn a en b twee elkaar in M snijdende speren met oneigenlijke punten I_1I_2 resp. J_1J_2 en is $X(I_1J_2, I_2J_1)$ en $Y(I_1J_1, I_2J_2)$ dan noemen we MX de hoofdbissectrix en MY de nevenbissectrix van de speren a en b. Duaal definieren we een hoofdmidden en een nevenmidden.

De punten A van a en B van b waarvoor geldt:

$$tgMA = tgMB$$

liggen perspectief met het perspectiefcentrum Y, daar immer volgens Stelling 7 $(MN_aAI_1) = (MN_bBJ_1)$ geldt.

Dit betekent, dat AB steeds loodrecht op de hoofdbissectrix van a en b staat.

Zijn a en b twee elkaar in M snijdende speren, en is Q de projectie op a van een punt P van b, dan definieren we de verhouding

$$\cos(ab) = \frac{tgMQ}{tgMP}$$

welke onafhankelijk van P en Q is, als de cosinus van a en b. Hiervoor geldt als in stelling 18 van § 16:

$$\cos^2 ab = \frac{1}{1 + tg^2 ab}$$

Bewijs: zie fig. 22.

$$\frac{tgMQ}{tgMP} = \frac{(MN_aQI_1)}{(MN_bPJ_1)} = \frac{P(N_bN_aAI_1)}{I_1(N_aN_bPY)} = (N_aN_bYA)$$

dus onafhankelijk van P en Q.

Voorts geldt:

$$\cos^2 ab = \left(\frac{tgMQ}{tgMP}\right)^2 = (N_aN_bXA)^2 = \left(\frac{tgN_aX}{tgN_aX - tgN_aN_b}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - tg^2N_aX}{1 + tg^2N_aX}\right)^2 = \frac{1}{1 + tg^2N_aN_b}$$

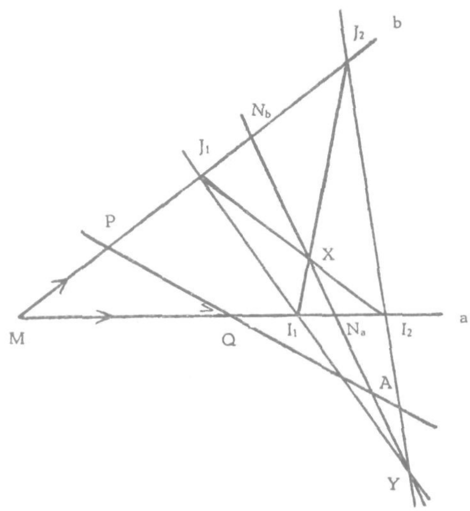

Fig. 22.

Deze definitie is ten duidelijkste weer dualiseerbaar.

Er zijn twee spiegelingen, die twee rechten a en b verwisselen. Uit het voorgaande volgt nu onmiddellijk:

Er is slechts één spiegeling, die twee speren verwisselt nl. die om de hoofdbissectrix.

Als toepassing volgt hier weer uit:

$$\cos ba = \cos ab$$

Résumé:

De tangens van twee rechten is zinvol, zodra een orientatie van het snijpunt (omloopszin) vaststaat. tg ba = tg ab.

De cosinus van twee rechten is zinvol, zodra de rechten als speren worden opgevat. cos ba = cos ab.

Men heeft

$$\cos^2 ab = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 ab}$$

Zijn beide mogelijkheden gecombineerd, dan is p.d. de sinus:

$$\sin(ab) = \mathrm{tg}(ab) \,.\, \cos(ab).$$

Dit geldt ook duaal voor een lijnstuk.

Blijkbaar verandert de cosinus van teken, zodra een der twee speren door de tegengestelde vervangen wordt.

§ 23. Loodrechte stand.

Evenals in § 16 ontmoeten we het bezwaar dat de ingevoerde functies zinloos zijn in het loodrechte geval.

Om dit bezwaar te ondervangen kunnen we gebruik maken van dezelfde hulpstelling nl. stelling 19. We passen deze a.v. toe:

Zijn a en b twee elkaar in M loodrecht snijdende speren met de in volgorde gegeven oneigenlijke punten I_1I_2 en J_1J_2, dan snijdt de absolute poollijn m van M Ω in de dekpunten van de involutie: I_1I_2; J_1J_2. Benoemt men deze dekpunten D_1D_2 zodanig, dat

$$(D_1D_2J_1I_1) = (D_1D_2J_2I_2) = i$$

dan is dus op m een richtingszin bepaald.

De aldus bepaalde oriëntatie voor M zullen we „de positieve oriëntatie" noemen ter onderscheiding van „de negatieve oriëntatie".

Zijn a en b dus twee speren (in deze volgorde) die loodrecht op elkaar staan in M en behoort bij M de positieve oriëntatie, dan heet de speer b positief loodrecht op de speer a. Behoort bij M de negatieve oriëntatie, dan heet b negatief loodrecht op a.

Duidelijk is: Staat de speer b positief loodrecht op a dan staat de speer a negatief loodrecht op b. Dit volgt n.l. uit:

$$(D_1D_2I_1J_1) = -i \quad (D_1D_2J_1I_1) = +i.$$

Voorts heeft men blijkbaar:

Stelling 8: Staat b_1 positief $\perp$ op a_1 en b_2 positief $\perp$ op a_2, dan is er één en slechts één congruentie die de figuren in elkaar overvoert.

Staat b_1 positief $\perp$ op a_1 en b_2 negatief $\perp$ op a_2, dan is er geen congruentie die de figuren in elkaar overvoert.

Bewijs: Invariantie van de dubbelverhoudingen i en — i.

Heeft men dus resumerend twee elkaar in M loodrechte speren a en b en een oriëntatie van M, dan is

b $\perp^{+}$ a wanneer de oriëntatie van M de door a en b bepaalde positieve is.

En

b $\perp^{-}$ a wanneer de oriëntatie van M de door a en b bepaalde negatieve is.

§ 24. De goniometrische functies.

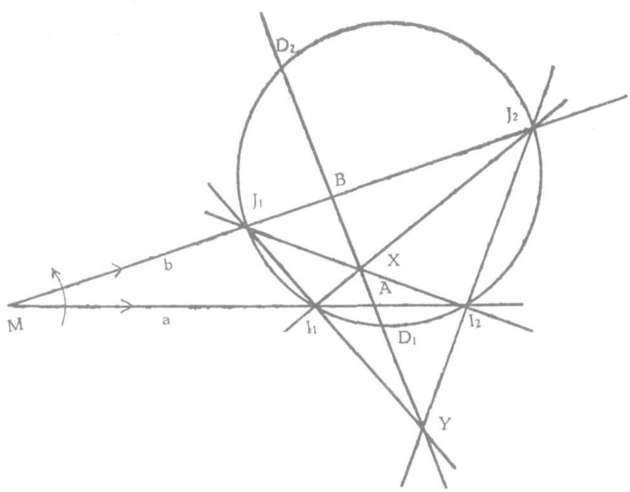

Fig. 23

Zijn twee elkaar in M snijdende speren a, b gegeven benevens een oriëntatie voor M en noemen we:

$$(D_1 D_2 J_1 I_1) = (D_1 D_2 J_2 I_2) = \delta$$

dan heeft men:

Stelling 9:

$$\operatorname{tg} ab = i \; \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}$$

$$\cos ab = \frac{1 + \delta^2}{2\,\delta} = \tfrac{1}{2} \left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)$$

$$\sin ab = \frac{-1 + \delta^2}{2\,i\,\delta} = \frac{1}{2i} \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)$$

$$(D_1D_2I_1J_1) = (D_1D_2I_2J_2) = + \frac{1}{\delta}$$

$$(I_1I_2J_1J_2) = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2$$

Bewijs:

$$(D_1D_2AB) = (D_1D_2AX)\ (D_1D_2XB) =$$
$$= I_1(D_1D_2AX)\ J_2(D_1D_2XB)$$
$$= (D_1D_2I_2J_2)\ (D_1D_2I_1J_1) = \frac{1}{\delta^2}$$

$$\text{tg ab} = i\ \frac{1-(D_1D_2BA)}{1+(D_1D_2BA)} = i\ \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}$$

$$\cos ab = -(ABXA^*) = -\frac{(D_1D_2AX)-1}{(D_1D_2AX)-(D_1D_2AB)} :$$
$$: \frac{-1-1}{-1-(D_1D_2AB)} =$$
$$= \frac{\delta^{-1}-1}{\delta^{-1}-\delta^{-2}} : \frac{2\,\delta^2}{1+\delta^2} = \frac{\delta(\delta-1)}{\delta-1} \cdot \frac{1+\delta^2}{2\,\delta^2} = \frac{1+\delta^2}{2\,\delta^2}.$$

$$\sin a\,b = \text{tg}\ a\,b\ .\ \cos a\,b = \frac{\delta^2-1}{2\,i\delta}$$

$$(I_1I_2J_1J_2) = \frac{(D_1D_2I_1J_1)-1}{(D_1D_2I_1J_1)+1} : \frac{(D_1D_2I_1J_2)-1}{(D_1D_2I_1J_2)+1} = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2$$

Zoals gebleken is faalt de sinusdefinitie voor loodrechte standen. In de bovenstaande stelling hebben we voor de sinus een uitdrukking gevonden, die ook in het kritieke geval $\delta = \pm\, i$ geldig blijft. De aan het eind van § 22 gegven definitie van de sinus kunnen we dus nu a.v. aanvullen:

Staat b positief loodrecht op a, dan is $\delta = i$ en sin ab $= 1$. Voor $\delta = -\,i$ geldt: sin ab $= -1$.
Dus:

Stelling 10: Staat b $\perp^+$ a dan is sin ab $= 1$.
Staat b $\perp^-$ a dan is sin ab $= -1$.

Gevolg: Uit de formules van stelling 9 volgt, dat voor de aldus gedefinieerde goniometrische functies de bekende formules gelden, b.v.

Is b $\perp^+$ a en is de speer c concurrent met a, b dan geldt:

$$\begin{cases} \sin ac = \cos cb \\ \cos ac = \sin cb \end{cases}$$

HOOFDSTUK V.

Niet-Euclidische meetkunde.

Zoals het bij het tweede en derde hoofdstuk het geval was, bestaat er ook een grote overeenstemming tussen dit en het vorige hoofdstuk. Wederom knopen we aan bij de projectieve beschouwingen van het eerste hoofdstuk, in het bijzonder § 5 en § 6. Van het getallenlichaam L eisen we weer, dat de karakteristiek $\neq 2$ is, en dat de vierkantsworteltrekking uitvoerbaar is. In de hier beschouwde Niet-Euclidische is de invoering van georiënteerde elementen een essentiele eis, zonder welke een bruikbare maatbepaling niet mogelijk is. Dit blijkt duidelijk bij de definitie van de goniometrische functies. Ondanks het feit, dat een driehoek met ongerichte elementen op 2^6 wijzen gericht kan worden, blijken de gewone formules van de boldriehoeksmeting een ondubbelzinnige geldigheid te bezitten. Geldt nml. voor een op bepaalde wijze gerichte driehoek de cosinusregel·

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

dan heeft verandering van oriëntatie van één element op deze formule, zoals zal blijken, geen invloed. Wijziging op a levert voor sin a en cos C tekenverandering, resultaat nihil. Wijziging voor A geeft bij cos c, cos b, sin b een minteken, zodat de formule ongewijzigd blijft. De overige gevallen worden aan de lezer overgelaten.

§ 21. Inleiding.

Uit de projectieve meetkunde leiden we de niet-Euclidische meetkunde af door in het vlak een kegelsnede Ω als de z.g. absolute of isotrope kegelsnede te aanvaarden, en de eigenschappen te onderzoeken, die invariantie t.o.v. Ω vertonen. De punten van Ω heten oneigenlijke of isotrope punten, de raaklijnen isotrope rechten.

De collineaties, die Ω invariant laten, heten congruenties of bewegingen. Ze vormen een groep, de metrische groep.

De poolcorrelatie van Ω bepaalt in de niet-Euclidische meetkunde een volstrekte dualiteit van punten en rechten, zodat elke definitie en eigenschap op twee wijzen geïnterpreteerd kan worden.

§ 25. *Toepassingen op driehoeken.*

Stelling 11: Geldt van $\triangle$ ABC dat CA $\perp$ CB en kent men aan A, B, C willekeurige oriëntaties toe, dan geldt:

$$\cos AB = \cos CA \,.\, \cos CB.$$

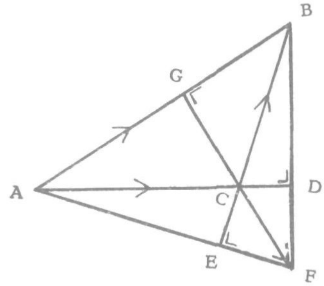

Fig. 24

Bewijs: We bewijzen hier gemakshalve de duale stelling d.w.z. we veronderstellen A $\perp$ B. Zijn BDF en AEF de poollijnen van A en B en snijdt CF AB in G, dan is F de pool van AB en geldt:

$$\cos A \cos B = \frac{\mathrm{tg} AG}{\mathrm{tg} AC} \cdot \frac{\mathrm{tg} BG}{\mathrm{tg} BC} = \frac{-1}{\mathrm{tg} AC \,.\, \mathrm{tg} BC} = \frac{\mathrm{tg} CD}{\mathrm{tg} CB} = \cos C.$$

q.e.d.

Hulpstelling: Geldt van $\triangle$ ABC a $\perp$ b $\perp$ c $\perp$ a en is de oriëntatie zodanig, dat b $\perp^{+}$c, dan is ook c $\perp^{+}$a en a $\perp^{+}$b.

Bewijs: Men heeft:

$(I_1^a I_2^a I_1^b I_2^b) = (I_1^b I_2^b I_1^c I_2^c) = (I_1^c I_2^c I_1^a I_2^a) = -1$
en wegens b $\perp^{+}$c ook $(I_1^a I_2^a I_1^b I_1^c) = i$.

Maar dan is ook:

$$(I_1^b I_2^b I_1^c I_1^a) = (I_1^a I_1^c I_2^b I_1^b) = (I_1^a I_1^c I_2^b I_2^a)\ (I_1^a I_1^c I_2^a I_1^b) =$$

$$\frac{1 - (I_1^a I_2^a I_1^c I_1^b)}{1 - (I_1^a I_2^a I_1^c I_2^b)} = \frac{1 + i}{1 - (I_1^a I_2^a I_1^c I_2^c)\ (I_1^a I_2^a I_2^c I_2^b)} =$$

$$\frac{1 + i}{1 + (I_1^a I_2^a I_1^c I_1^b)} = \frac{1 + i}{1 - i} = i \text{ en ook } (I_1^c I_2^c I_1^a I_1^b) = i.$$

Stelling 12: Geldt van $\triangle$ ABC dat CA $\perp$ CB en kent men aan de elementen van $\triangle$ ABC willekeurige oriëntaties toe, met evenwel de restrictie, dat a $\perp^{+}$b, dan geldt:

$$\sin AC = \frac{tgBC}{tgbc}$$

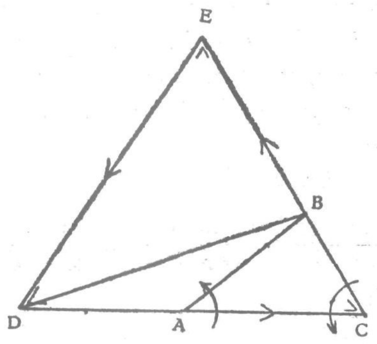

Fig. 25.

Bewijs: Zij DE de poollijn van C. Als CB $\perp^{+}$CA is volgens hulpstelling ook ED $\perp^{+}$EC en DC $\perp^{+}$DE.

Hieruit volgt dus cos (EA, ED) $=$ sin (EC, EA) of

$$\sin AC = -\cos AD = -\frac{tg(DC, DB)}{tg(AD, AB)} = -\frac{tgCB}{tgbc} = \frac{tgBC}{tgbc}$$

Résumé:

Stelling 13: Geldt van $\triangle$ ABC dat CA $\perp$ CB; kent men aan de elementen willekeurige oriëntaties toe, zo, dat a $\perp^{+}$b dan gelden in de volgende notatie:

$$A \equiv bc \qquad a \equiv BC$$
$$B \equiv ac \qquad b \equiv AC$$
$$c \equiv AB$$

de formules:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b$$

$$\cos A = \frac{tg\, b}{tg\, c} \qquad \cos B = -\frac{tg\, a}{tg\, c}$$

$$tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b} \qquad tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin a}$$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} \qquad \sin B = -\frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\cos c = \cot g\, A \,.\, \cot g\, B$$

$$\cos A = -\cos a \,.\, \sin B \qquad \cos B = -\cos b \sin A$$

Kent men aan de 6 elementen van een driehoek een oriëntatie toe, dan is dus van elk element ondubbelzinnig de tangens, cosinus, sinus vastgelegd.

Uit de formules voor de rechthoekige driehoek kan men nu op de gebruikelijke wijze de bekende formules van de boldriehoeksmeting afleiden. Hierbij moet men wel „oppassen" bij het halveren enz. van hoeken en bogen, opdat in de formules de ondubbelzinnigheid bewaard blijft.

Zo geldt b.v. de sinusregel:

$$\frac{\sin \overline{bc}}{\sin \overline{BC}} = \frac{\sin \overline{ca}}{\sin \overline{CA}} = \frac{\sin \overline{ab}}{\sin \overline{AB}}$$

en de cosinusregel:

$$\cos \overline{BC} = \cos \overline{AB} \,.\, \cos \overline{AC} + \sin \overline{AB} \,.\, \sin \overline{AC} \,.\, \cos \overline{bc}$$

STELLINGEN.

I.

De beschouwingen in het vierde hoofdstuk van dit proefschrift, in het bijzonder die over gerichte elementen, kunnen uitgebreid worden tot de ruimte.

II.

In de Euclidische vlakke meetkunde berusten vele eigenschappen der kegelsneden, in het bijzonder de brandpuntseigenschappen, in wezen niet op volgorde- en realiteitsbeschouwingen.

III.

De analytische behandeling van de ontaarde metriek in „Moderne Vlakke Meetkunde" van J. van IJzeren maakt een gekunstelde indruk, en kan vollediger en eleganter door een affien meetkundige vervangen worden.

J. van IJzeren, Moderne Vlakke Meetkunde. 1941, § 44, bladz. 121, sqq.

IV.

Bij het onderzoek naar tetraeders, die polair zijn t.o.v. een kwadratisch oppervlak, en waarvan de ribben raken aan een tweede kwadratisch oppervlak beperkt B. Gambier zich ten onrechte tot twee kwadratische oppervlakken met een gemeenschappelijk poolviervlak.

B. Gambier, Tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique.

J. de Math, pures et appl. (9) 17, bladz. 291-326. 1938.

V.

De Passerconstructies van Mascheroni kunnen gegeneraliseerd worden tot constructies met een overeenkomstig instrument in de driedimensionale ruimte.

VIII.

Bij de theorie van de dubbelintegralen treedt het begrip normaalgebied op. De bij de definitie hiervan doorgaans gemaakte veronderstellingen kunnen beperkt worden.

H. A. Lauwerier, Normaalgebieden. Simon Stevin. Jrg. 26, no. 1, bladz. 28 sqq. 1948.

IX.

De stelling van de „samengestelde limiet":

„Uit $\lim_{u \to \lambda} f(u) = L$ en $\lim_{x \to a} g(x) = \lambda$

volgt onder zekere voorwaarden

$$\lim_{x \to a} f\{g(x)\} = L$$

wordt in de gebruikelijke leerboeken onvoldoende nauwkeurig geformuleerd. De stelling dient a.v. te luiden:

Bepaalt $y = f(u)$ en $u = g(x)$ een functie $y = h(x)$, waarbij x tot een verzameling X behoort, g(x) de verzameling X in U en f(u) de verzameling U in Y transformeert, dan volgt uit

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lambda \quad \text{en} \quad \lim_{u \to \lambda} f(u) = L$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

indien minstens één der volgende voorwaarden vervuld is:

1° λ behoort niet tot U

2° λ behoort tot U, maar $f(\lambda) = L$ d.w.z. f(u) is continu in λ.

3° λ behoort tot U, en in een zekere omgeving van a geldt $g(x) \neq \lambda$.

X.

De klassieke quantiseringsvoorschriften van Bohr stemmen niet steeds met de uitkomsten overeen, welke uit de vergelijking van Schroedinger volgen. Dit is ook niet steeds te verhelpen door het invoeren van b.v. halftallige of kwarttallige quantengetallen. Dit wordt o.a. geïllustreerd door de beweging van een massapunt, dat zich beweegt in een potentiaalveld, bepaald door

$$V = a(x^2 + y^2) + \lambda x^2y^2$$

x en y zijn de coördinaten van het massapunt t.o.v. een Cartesiaans assenkruis; a en λ zijn de constanten, waarbij λ klein t.o.v. a wordt verondersteld.

XI.

De beschouwingen van A. H a a s over het begrip stroomsterkte zijn zinloos.

A. H a a s, Einführung in die theoretischen Physik. I. § 59, blz. 200, 5e en 6e druk, 1930.

XII.

In radieel-symmetrische problemen van stationnaire temperatuursverdeling, welke in verband staan met boorputten, kan met succes de volgende benaderingsmethode toegepast worden.
De wand van de put denkt men met „ladingen" φ (z) belegd, waarna voor de onbekende functie φ (z) een lineaire integrodifferentiaalvergelijking afgeleid wordt. Door van de hierin optredende elliptische integraal slechts de bijdrage in de omgeving van de singulariteit in aanmerking te nemen ontstaat een lineaire gewone differentiaalvergelijking, welke gemakkelijk opgelost kan worden.

XIII.

De stroming van gassen door een poreuze laag wordt voor het radieel-symmetrische geval beheerst door de niet-lineaire partiele differentiaalvergelijking

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(pr\frac{\partial p}{\partial r}\right) = k\frac{\partial p}{\partial t}$$

p stelt de druk voor.
k is een constante.
Volgens M. M u s k a t bestaat voor het niet-stationnaire geval geen geschikte behandeling en moet men b.v. numerieke methoden te baat nemen.
Geschikte stromingsmodellen kunnen evenwel op de volgende wijze afgeleid worden. De vergelijking bezit twee volledige integralen van de vorm:

$$p = f\left\{\frac{r^2}{t - t_0},\ C_1, C_2\right\}$$

$$p = r^2 \,.\, f\left\{(\ln r^2 + \lambda(t - t_0)),\ C\right\}$$

In beide gevallen kan de gegeven vergelijk gereduceerd worden tot een niet-lineaire gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde.

M. M u s k a t, Flow of homogeneous fluids. Ch. XI, § 1 en § 14, 1937.

XIV.

In de toekomst dient meer de nadruk gelegd te worden op experimentele oplossingsmethoden van differentiaalvergelijkingen b.v. met behulp van electrische, mechanische, hydrodynamische modellen. Het is te verwachten, dat hiervan een belangrijke stimulans tot theoretische onderzoekingen zal uitgaan.

XV.

Het is aan twijfel onderhevig of op grond van de statistische onderzoekingen zoals deze door G. Révész uitgevoerd zijn, beslist kan worden of er al of geen verband tussen wiskunde en muziek is.

G. Révész, Over het verband tussen mathematische ontwikkeling en muzikale begaafdheid.
Euclides XIX, bladz. 89 sqq. 1942—1943.
Euclides XX, bladz. 27 sqq. 1943—1944.

XVI.

Het programma van de M.O. Akten wiskunde, K I en K V is onbevredigend.

XVII.

In de β afdeling van het Gymnasium is een betere coördinatie tussen de wis- en natuurkunde enerzijds en de oude talen anderzijds gewenst; in het bijzonder is een bestudering van fragmenten uit b.v. de elementen van Euclides en de principia van Newton van belang.