

Stuureigenschappen van schepen.

Rapport Nr. 79.

door

Ir. H.J. Zunderdorp.

Laboratorium voor Scheepsbouwkunde

Technische Hogeschool

Delft.

October 1961

1. De bewegingsvergelijkingen van het schip tijdens het sturen.

1.1. De fundamentele bewegingsvergelijkingen zijn gegeven door Davidson en Schiff. Uitgegaan wordt van de volgende aannamen:

- 1e. Het water en de lucht zijn niet verstoord.
- 2e. De scheepsbewegingen in het horizontale vlak zijn niet gekoppeld aan andere bewegingen, zoals stampen en dompen.

Hierdoor heeft het systeem slechts 3 graden van vrijheid, n.l. 2 translatie's van het zwaartepunt in het horizontale vlak, en één rotatie om een as door het zwaartepunt loodrecht op het horizontale vlak.

Het coördinatensysteem wordt mede bewegend met het schip gekozen. De oorsprong komt in het zwaartepunt te liggen, de x-as valt samen met het symmetrievlak van het schip. Een referentie-as wordt gekozen om de stand van het assenkruis in de ruimte te bepalen. Zie fig. 1.

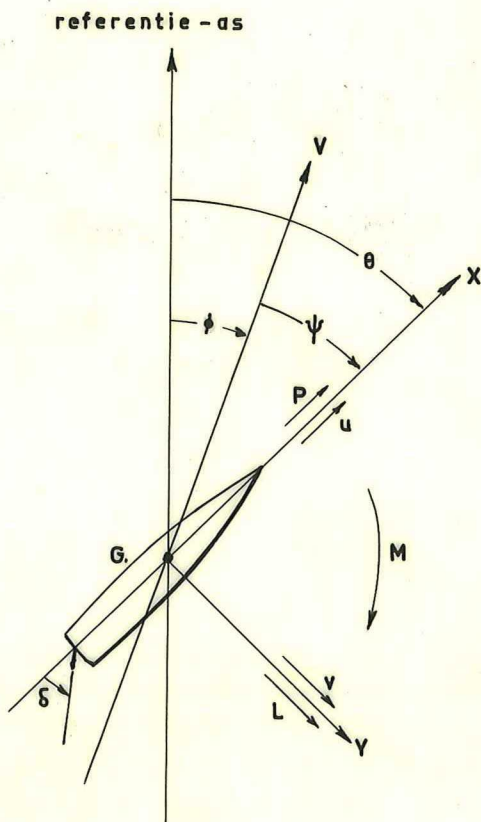


fig. 1.

Volgens Lamb mag voor een lichaam, dat zich door een niet-visceuze, niet-samendrukbare vloeistof beweegt, de kracht welke nodig is om de watermassa rond het schip te versnellen, voor de 3 componenten langs de hoofdasen berekend worden met gebruikmaking van verschillende massa's. De a-symmetrie om de y-as wordt verwaarloosd, evenals de invloed van de golfvorming.

Zijn nu in fig. 1 \mathbf{u} en \mathbf{v} de momentane snelheden van het schip in X-, resp. Y-richting, dan mag dus geschreven worden:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} M_1 \dot{\mathbf{u}} - M_2 \mathbf{v} \cdot \dot{\theta} = \text{som van externe en hydrodynamische krachten in X-richting.} \\ M_2 \dot{\mathbf{v}} + M_1 \mathbf{u} \cdot \dot{\theta} = \text{idem in Y-richting.} \\ I \cdot \ddot{\theta} = \text{som van externe en hydrodynamische momenten om de verticale as door de oorsprong,} \end{array} \right.$$

waarin:

$$M_1 = M_0(1 + k_1)$$

$$M_2 = M_0(1 + k_2)$$

$$I = I_0 + k' I_w$$

M_1 = massa van het schip of het verplaatste water.

I_0 = traagheidsmoment van het schip.

I_w = traagheidsmoment van het verplaatste water.

k_1 , k_2 en k' zijn dimensieloze coëfficiënten.

De som van alle krachten in X-richting wordt P genoemd, evenzo in Y-richting L. De som van alle momenten om de oorsprong is M. Daar $\mathbf{u} = V \cos \psi$ en $\mathbf{v} = -V \sin \psi$, gaat (1) over in:

$$\left. \begin{array}{l} M_1 \dot{V} \cos \psi - M_1 V \dot{\psi} \sin \psi + M_2 V \dot{\theta} \sin \psi = P \\ -M_2 \dot{V} \sin \psi - M_2 V \dot{\psi} \cos \psi + M_1 V \dot{\theta} \cos \psi = L \\ I \cdot \ddot{\theta} = M \end{array} \right\} (2)$$

Inplaats van de tijd wordt nu een nieuwe variable ingevoerd n.l. het aantal scheepslengten s , dat afgelegd is, dan is:

$$ds = \frac{V}{l} dt., \text{ of}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{V}{l}.$$

$$\text{Zo wordt dan bijv. } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{V}{l} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{V}{l} \cdot \theta'$$

(waarin θ' aanduidt dat θ naar s is gedifferentieerd)

Voor θ' wordt het symbool Ω ingevoerd.

Ω heeft fysisch de betekenis van de verhouding van de scheeps-
lengte ℓ tot de momentane kromtestraal van de weg van het zwaarte-
punt, en wordt de ruimtelijke hoeksnelheid genoemd.

De krachten en momenten worden dimensieloos gemaakt door ze
te delen door $\frac{1}{2}\rho V^2 A$, resp. $\frac{1}{2}\rho V^2 A \ell$, waarin A = het totale laterale
oppervlak, inclusief het roer, dus

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 A \ell}$$

Tenslotte worden nog dimensieloze massa- en traagheidscoef-
ficienten ingevoerd:

$$m_1 = \frac{M_1}{\frac{1}{2}\rho A \ell}$$

$$m_2 = \frac{M_2}{\frac{1}{2}\rho A \ell}$$

$$n = \frac{I}{\frac{1}{2}\rho A \ell^3}$$

De bewegingsvergelijkingen gaan hiermede over in:

$$\left. \begin{aligned} m_1 V' \cos \psi / V - m_1 \psi' \sin \psi + m_2 \Omega \sin \psi &= C_P \\ -m_2 V' \sin \psi / V - m_2 \psi' \cos \psi + m_1 \Omega \cos \psi &= C_L \\ n V' \Omega / V + n \Omega' &= C_M \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

1.2. Bij de problemen van dynamische stabiliteit op rechte koers
en bij draaicirkels varen, responsie op kleine externe verstoring-
en en sturen, zijn de variaties van ψ en Ω klein en kunnen de
bewegingsvergelijkingen als lineair aangenomen worden.

Bij het varen van een rechte koers is $\psi = 0$ en $\Omega = 0$ en
zijn wij alleen geïnteresseerd in kleine afwijkingen van deze
waarden. We kunnen daarom $\cos \psi$ met één benaderen en $\sin \psi$ met ψ .
Ook is;

$$C_L = \psi \cdot C_L + \Omega \cdot C_f - C_\lambda (\delta) \quad (4)$$

$$C_M = \psi \cdot C_m - \Omega \cdot C_k + C_\mu (\delta) \quad (5)$$

C_f en C_m zijn de hellingen van de krommen van dwarskracht
en moment tegen gierhoek ψ . C_f en C_k zijn coëfficiënten van dem-
ping voor kracht en moment, daar zij die delen van C_L en C_M bepa-

len, welke evenredig zijn met de hoeksnelheid. $C_\lambda(\delta)$ en $C_\mu(\delta)$ stellen de bijdrage van het roer voor, zij zijn nul bij het roer midscheeps ($\delta=0$).

Uit vergelijking (3a) volgt dat $C_p = 0$ voor de rechte koers en daardoor is V' op zijn hoogst van de eerste orde in ψ en Ω . Dit betekent dat V' op zijn hoogst van de tweede orde is in de vergelijkingen (3b) en (3c).

Met al deze benaderingen worden de bewegingsvergelijkingen:

$$m_2 \cdot \psi' + \psi \cdot C_l - \Omega \cdot m = C_\lambda(\delta) \quad (6)$$

$$n \cdot \Omega' - \psi \cdot C_m + \Omega \cdot C_k = C_\mu(\delta) \quad (7)$$

2. De differentiaalvergelijking voor het sturen.

2.1. De bewegingsvergelijkingen van Davidson en Schiff maken gebruik van parameters, welke moeilijk te bepalen zijn. Daarom is door Nomoto, Tagushi, Honda en Hirano ([2] en [3]) een methode toegepast, welke reeds lang in de communicatie-techniek bekend is, n.l. die van de overdrachts-functie.

In feite is de scheepsbeweging door het dynamische karakter van het schip gekoppeld aan de roerbeweging. Gelijktijdige observatie van roer- en schipbeweging moet ons dus informatie over het dynamische karakter, en dus over de stuur- en koersstabiliteit van het schip kunnen geven.

Uitgegaan wordt weer van de bewegingsvergelijkingen (6) en (7). Deze worden echter geschreven als:

$$m_2 \cdot \psi' + C_l \cdot \psi - \Omega \cdot m = C_\lambda \cdot \delta$$

$$n \cdot \Omega' + C_k \cdot \Omega - C_m \cdot \psi = C_\mu \cdot \delta$$

Nomoto neemt dus een rechtlijnig verband aan tussen δ en C_λ en C_μ , hoewel Davidson alleen maar aangeeft dat C_λ en C_μ van δ afhankelijk zijn. De variabele s wordt nu weer vervangen door t , met behulp van de substitutie $ds = \frac{V}{l} dt$.

Dit geeft:

$$\left(\frac{l}{V}\right) \cdot m_2 \cdot \frac{d\psi}{dt} + C_l \cdot \psi - \left(\frac{l}{V}\right) \cdot m \cdot \dot{\Omega} = C_\lambda \cdot \delta$$

$$\left(\frac{l}{V}\right)^2 \cdot n \cdot \frac{d\dot{\Omega}}{dt} + \left(\frac{l}{V}\right) \cdot C_k \cdot \dot{\Omega} - C_m \cdot \psi = C_\mu \cdot \delta$$

Door eliminatie van ψ uit deze beide vergelijkingen ontstaat de differentiaalvergelijking:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 \dot{\theta}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d \dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} = K \delta + K \cdot T_3 \cdot \frac{d \delta}{dt} \quad (8)$$

waarin:

$$T_1 \cdot T_2 = \left(\frac{\ell}{V}\right)^2 \cdot \frac{m_2 \cdot n}{C_\ell \cdot C_k - m \cdot C_m} \quad T_1 + T_2 = \left(\frac{\ell}{V}\right) \cdot \frac{m_2 \cdot C_k + n \cdot C_\ell}{C_\ell \cdot C_k - m \cdot C_m}$$

$$K = \left(\frac{V}{\ell}\right) \cdot \frac{C_m \cdot C_\lambda + C_\ell \cdot C_\mu}{C_\ell \cdot C_h - m \cdot C_m} \quad T_3 = \left(\frac{\ell}{V}\right) \cdot \frac{m_2 \cdot C_\mu}{C_m \cdot C_\lambda + C_\ell \cdot C_\mu}$$

T_1 , T_2 , T_3 en K zijn samengesteld uit de dimensieloze parameters van Davidson, op uitzondering van $\frac{\ell}{V}$ na. Hieruit volgt dat T_1 , T_2 en T_3 de dimensie t hebben, K de dimensie t^{-1} .

Het is duidelijk dat de vergelijking (8) volledig het dynamisch karakter van het schip beschrijft en dat de indices T en K dus als kwaliteits indices beschouwd kunnen worden.

2.2. Betekenis van de kwaliteits indices.

De algemene oplossing van (8) heeft de vorm

$$\dot{\theta}(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$

2.2.1. Hieruit volgt voor T_1 en T_2 :

- 1e. Na een kleine verstoring wordt de verstoring in de beweging exponentieel uitgedempt met een snelheid afhankelijk van T_1 en T_2 . Hoe kleiner T_1 en T_2 , des te sneller is de afname van de beweging.
- 2e. Wanneer een zekere roerhoek gegeven wordt, zal het schip exponentieel in een draaicirkel geraken. Hoe kleiner T_1 en T_2 zijn, des te sneller wordt de draaicirkel opgebouwd.
- 3e. Positieve waarden van zowel T_1 als T_2 verzekeren een stabiel dynamisch gedrag. Is één of beide negatief dan is het dynamisch karakter instabiel.
Is één van beide waarden imaginair, dan zal het schip gaan oscilleren. Dit komt in de praktijk echter nooit voor.

Samenvattend kunnen we zeggen dat T_1 en T_2 indices zijn zowel voor de koersstabiliteit, als voor snelle responsie op roerhoeken. Hierbij is de waarde van T_1 , welke veel groter is dan T_2 , maatgevend.

2.2.2. De betekenis van K.

Uit de bewegingsvergelijking volgt, dat K de dimensie van een hoeksnelheid $\dot{\theta}$ (of $\dot{\Omega}$) is bij het varen van draaicirkels met een corresponderende roerhoek.

Bij grote roerhoeken is de bereikte hoeksnelheid in de constante draaicirkel echter geheel anders dan in de eerste phase, tengevolge van snelheidsvermindering en tengevolge van het feit dat door variaties in de weerstands-afgeleiden de bewegingen niet meer lineair zijn. Daar een sturbeweging wordt gezien als een gevolg van de eerste phase, is het logisch K niet te definiëren naar de bereikte constante draaicirkel, maar naar de waarde welke het schip nadert, als gevolg van de eerste phase.

Bij een schip dat niet koersstabiel is, liggen de zaken moeilijker. Zelfs bij een oneindig kleine roerhoek zal het schip al een draaicirkel gaan beschrijven, nadat de oscillaties zoals Davidson aantoonde, snel zijn uitgedempt. Hierdoor is de definitie van K voor een onstabiel schip moeilijker. De uit de beweging gevonden K is een effectieve K-waarde, welke weinig met de oorspronkelijke definitie te maken heeft.

2.2.3. Betekenis van T_3 .

T_3 stelt de bijdrage voor van de roersnelheid **in** het opbouwen van de draaisnelheid. De bijdrage van T_3 is klein en is tegengesteld aan die van T_2 .

2.3. Vereenvoudigde bewegingsvergelijking.

Uit bovenstaande volgt dat in verhouding tot T_1 de invloeden van T_2 en T_3 gering zijn, en elkaar bovendien tegenwerken.

Een goede benadering wordt dan ook in vele gevallen verkregen door de bewegingsvergelijking te vereenvoudigen tot:

$$T \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} = K \cdot \delta \quad (9)$$

Wordt de effectieve tijdconstante T zodanig gekozen dat de beweging, welke uit deze vereenvoudigde bewegingsvergelijking volgt, een goede overeenkomst heeft met de werkelijke beweging in de eerste phase, dan blijkt:

$$T = T_1 + T_2 - T_3 \quad (10)$$

2.4. Enige roerbewegingen en de daaraan gekoppelde bewegingen.

2.4.1. Het roer wordt met een constante snelheid gedraaid tot de hoek δ_0 wordt bereikt. Daarna wordt het roer op deze waarde gehouden.

Nemen we aan dat de beweging begint op het tijdstip $t = 0$ en dat de waarde δ_0 bereikt wordt op het tijdstip t_1 .

Voor $0 \leq t \leq t_1$ geldt dan:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{K \cdot \delta_0}{t_1} \left\{ t - (T_1 + T_2 - T_3) \right\} + \frac{K \cdot \delta_0}{t_1 (T_1 - T_2)} \cdot \left\{ T_1 (T_1 - T_3) \cdot e^{-t/T_1} - T_2 (T_2 - T_3) \cdot e^{-t/T_2} \right\}$$

en

$$\theta(t) = \frac{K \cdot \delta_0}{t_1} \left\{ \frac{t^2}{2} - (T_1 + T_2 - T_3) \cdot t \right\} + \frac{K \cdot \delta_0}{t_1 (T_1 - T_2)} \cdot \left\{ T_1^2 (T_1 - T_3) \cdot (1 - e^{-t/T_1}) - T_2^2 (T_2 - T_3) \cdot (1 - e^{-t/T_2}) \right\}$$

en voor $t > t_1$

$$\dot{\theta}(t) = K \cdot \delta_0 - \frac{K \cdot \delta_0}{t_1 (T_1 - T_2)} \left\{ T_1 (T_1 - T_3) \cdot (e^{-t_1/T_1} - 1) \cdot e^{-t/T_1} - T_2 (T_2 - T_3) \cdot (e^{-t_1/T_2} - 1) \cdot e^{-t/T_2} \right\}$$

en

$$\theta(t) = K \cdot \delta_0 \cdot t + K \cdot \delta_0 \cdot \left\{ (T_1 + T_2 - T_3) + \frac{t_1}{2} \right\} + \frac{K \cdot \delta_0}{t_1 (T_1 - T_2)} \left\{ T_1^2 (T_1 - T_3) \cdot (e^{-t_1/T_1} - 1) \cdot e^{-t/T_1} - T_2^2 (T_2 - T_3) \cdot (e^{-t_1/T_2} - 1) \cdot e^{-t/T_2} \right\}$$

2.4.2. Trapeziumvormige stuurbewegingen.

Nu neemt $\delta(t)$ constant toe, tot op het tijdstip t_1 de waarde δ_0 is bereikt, blijft dan constant tot het tijdstip t_2 en neemt vervolgens met dezelfde snelheid weer af.

De responsie van het schip kan gevonden worden bij superpositie van twee stuurbewegingen zoals hier boven beschreven, waarvan de tweede een tegengesteld teken heeft.

De totale verandering van Θ , na een oneindig aantal van deze stuurbewegingen, kan direkt gevonden worden door de bewegingsvergelijking van 0 tot ∞ te integreren:

$$T_1 \cdot T_2 \int_0^{\infty} \ddot{\Theta} dt + (T_1 + T_2) \int_0^{\infty} \dot{\Theta} dt + \int_0^{\infty} \Theta dt = K \int_0^{\infty} \delta(t) dt + K \cdot T_3 \int_0^{\infty} \dot{\delta}(t) dt$$

en dus:

$$\Theta(\infty) = K \int_0^{t_1+t_2} \delta(t) dt$$

Dit resultaat is geldig voor type van sturen met een eendige tijdsduur. De totale koersverandering is evenredig met de tijdintegraal van de roerhoekskromme, onafhankelijk van de vorm, en K is eenvoudig de proportionaliteitsconstante.

In dit geval is de betekenis van T duidelijk: Hoe kleiner de waarde van T is, des te sneller is de afname van het effect van de stuurmanoeuvre.

2.4.3. Sinusvormige stuurbeweging.

Is de roerbeweging gegeven door $\delta(t) = \delta_0 \cdot \sin \omega t$ dan gaat de bewegingsvergelijking over in:

$$T_1 \cdot T_2 \frac{d^2 \dot{\Theta}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\dot{\Theta}}{dt} + \dot{\Theta} = K \cdot \delta_0 \cdot \sin \omega t + K \cdot T_3 \cdot \omega \cdot \delta_0 \cdot \cos \omega t$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is het eenvoudigst met behulp van een Laplace transformatie te vinden. De vergelijking gaat dan over in:

$$p^2 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \dot{\Theta}(p) + p(T_1 + T_2) \cdot \dot{\Theta}(p) + \dot{\Theta}(p) = K \cdot \delta_0 \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} + K \cdot T_3 \cdot \delta_0 \cdot \omega \cdot \frac{p}{\omega^2 + p^2}$$

De algebraïsche oplossing hiervan is:

$$\dot{\Theta}(p) = \frac{K \cdot \delta_0}{T_1 \cdot T_2} \cdot \frac{\omega \cdot T_3 \cdot p + \omega}{(p^2 + \omega^2) \cdot (p + 1/T_1) \cdot (p + 1/T_2)}$$

of:

$$\dot{\Theta}(p) = \frac{K \cdot \delta_0}{T_1 \cdot T_2} \left\{ \frac{A \cdot p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\omega \cdot B}{p^2 + \omega^2} + \frac{C}{p + 1/T_1} + \frac{D}{p + 1/T_2} \right\}$$

De inverse vergelijking van deze oplossing is:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{K \cdot \delta_0}{T_1 \cdot T_2} (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t + C \cdot e^{-t/T_1} + D \cdot e^{-t/T_2})$$

of:

$$\dot{\theta} = \frac{K \cdot \delta_0}{T_1 \cdot T_2} \left\{ \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t + \phi) + C \cdot e^{-t/T_1} + D \cdot e^{-t/T_2} \right\}$$

waarin:

$$\phi = -\text{arc tg } \frac{A}{B}$$

De coëfficiënten A, B, C en D kunnen gevonden worden uit de voorwaarde:

$$\omega T_3 p + \omega, \text{ of:}$$

$$A p \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) + \omega B \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) + C (p^2 + \omega^2) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) + D (p^2 + \omega^2) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) = 0$$

$$A + C + D = 0$$

$$A \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + \omega B + \frac{C}{T_2} + \frac{D}{T_1} = 0$$

$$\frac{A}{T_1 T_2} + \omega B \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + C \omega^2 + D \omega^2 = \omega T_3$$

$$\frac{\omega B}{T_1 T_2} + \frac{C \omega^2}{T_2} + \frac{D \omega^2}{T_1} = \omega$$

De totale oplossing wordt dan:

$$\dot{\theta} = K \cdot \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_3^2}{1 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}} \cdot \sin(\omega t + \phi) + \frac{K \cdot \delta_0 \cdot \omega}{(T_1 - T_2) \{ 1 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4 \}} \left[T_1 \{ T_1 - T_3 + \omega^2 T_2 (T_1^2 - T_2 T_3) \} e^{-t/T_1} + T_2 \{ T_3 - T_2 + \omega^2 T_1 (T_3 - T_1) \} e^{-t/T_2} \right]$$

waarin:

$$\phi = \text{arc tg } \frac{\omega (T_1 + T_2 - T_3) + T_1 T_2 T_3 \omega^3}{1 - (T_1 T_2 - T_2 T_3 - T_3 T_1) \omega^2}$$

Het tweede gedeelte van de oplossing is alleen een gevolg van het plotseling starten der roerbeweging. Deze beweging sterft snel uit. De responsie van een koersstabiel schip op een sinusvormige roerbeweging is dus te schrijven als

$$\dot{\theta}(t) = A(\omega) \cdot \delta_0 \cdot \sin \{ \omega t + \phi(\omega) \} \quad (11)$$

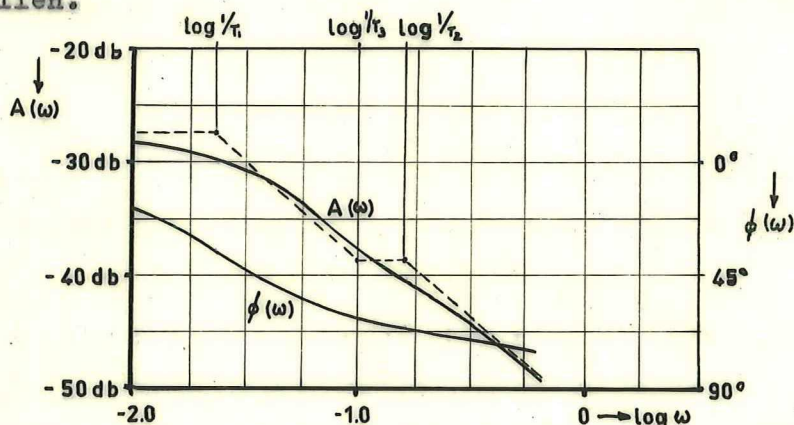
waarin:

$$A(\omega) = K \cdot \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_3^2}{1 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}}$$

$$\phi(\omega) = -\text{arc tg } \frac{(T_1 + T_2 - T_3) \omega + T_1 T_2 T_3 \omega^3}{1 - (T_1 T_2 - T_2 T_3 - T_3 T_1) \omega^2}$$

$A(\omega)$ geeft de amplitude verhouding, $\phi(\omega)$ het fase-verschil.

Het is gebruikelijk $A(\omega)$ en $\phi(\omega)$ in een zgn. Bodediagram voor te stellen.



Uit deze figuur valt duidelijk waar te nemen dat $A(\omega)$ snel afneemt met toenemende frequentie, speciaal na het bereiken van $\omega = \frac{1}{T_1}$, waarbij het fase-verschil steeds groter wordt. Het schip is dus minder gevoelig voor sturbewegingen met hogere frequenties. In analogie met de telecommunicatie-techniek noemt men dit een "laag doorlaat" karakteristiek.

2.5. De overdrachtsfunctie.

In de telecommunicatie-techniek maakt men veelal gebruik van het begrip overdrachtsfunctie om de gedragingen van een systeem te beschrijven dat, afhankelijk van een toegevoerd signaal $s(t)$, een outputsignaal $R(t)$ geeft. Onder de overdrachtsfunctie $y(t)$ verstaat men dan het quotient $\frac{R(t)}{S(t)}$. Daar in- en outputsignaal zowel in amplitude als in fase zullen verschillen, zal $y(t)$ in het algemeen een complexe vorm hebben. Het is daarom gebruikelijk te rekenen met de Laplace transformatie's van deze grootheden, dus

$$\frac{R(p)}{S(p)} = y(p)$$

Is van een systeem de overdrachtsfunctie $y(p)$ bekend, dan zal de responsie $R(p)$ op een willekeurig signaal $s(p)$ te berekenen zijn als

$$\bar{R}(p) = \bar{s}(p) \times \bar{y}(p)$$

Het eenvoudigst berekent men de overdrachtsfunctie als men uitgaat van een toegevoerd signaal waarvan de Laplace transformatie de waarde 1 heeft.

Hieraan voldoet de zgn. delta-functie van Dirac. Dit is een

rechthoekige functie met een breedte van ϵ seconde en een amplitude $\frac{1}{\epsilon}$, waarin ϵ oneindig klein is. Wordt deze impuls toegevoerd aan een systeem, dan zal dus de responsie gelijk zijn aan de overdrachtsfunctie.

Het zal duidelijk zijn dat voor het systeem schip + roer op analoge wijze een overdrachtsfunctie te berekenen valt.

We gaan hier weer uit van de differentiaalvergelijking

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \dot{\theta}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} = K \cdot \delta + K T_3 \cdot \frac{d\delta}{dt}$$

De Laplace transformatie hiervan is:

$$p^2 T_1 T_2 \cdot \dot{\theta}(p) + p(T_1 + T_2) \cdot \dot{\theta}(p) + \dot{\theta}(p) = K \cdot \delta(p) + p K T_3 \cdot \delta(p)$$

Voor de roerbeweging met de deltafunctie is:

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 1, \text{ dus} \\ p^2 T_1 T_2 \cdot \dot{\theta}(p) + p(T_1 + T_2) \cdot \dot{\theta}(p) + \dot{\theta}(p) &= K + p K T_3. \end{aligned}$$

Dus:

$$\bar{R}(p) = \bar{y}(p) = \frac{K(1 + T_3 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \quad (12)$$

Het verband tussen de kwaliteitsindices en de overdrachtsfunctie is hier duidelijk uit te zien.

2.5.1. Verband tussen de overdrachtsfunctie en de frequentie karakteristiek.

Zoals bekend wordt de Laplace transformatie van de functie $\delta(t)$ gevonden als:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Hierin zal p een complexe waarde hebben, p is dus te schrijven als $p = \beta + j\omega$. De Laplace transformatie gaat hiermede over in:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Voor koersstabiele schepen heeft β de waarde nul of nadert daartoe. Daardoor gaat de Laplace transformatie over in:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Het is dus mogelijk om de p -operator te vervangen door $j\omega$. Ditzelfde geldt voor het output signaal, en dus ook voor de

overdrachtsfunctie.

Daar echter $e^{-j\omega t}$ te schrijven is als $\cos \omega t + j \sin \omega t$, betekent dit, dat door vervanging van de operator p door $j\omega$, de overdrachtsfunctie overgaat in de responsie van het systeem op een sinusvormig signaal met de hoeksnelheid ω .

Daar de gevonden overdrachtsfunctie was:

$$\bar{y}(p) = \frac{K(1 + T_3 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

zal de responsie op een sinusvormig signaal met hoeksnelheid ω dus zijn:

$$\bar{y}(j\omega) = \frac{K(1 + T_3 j\omega)}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)} = \frac{K + j\omega K T_3}{(1 - \omega^2 T_1 T_2) + j\omega(T_1 + T_2)}$$

Van deze complexe grootte zal de modulus, dus:

$$K \left| \frac{1 + j\omega T_3}{(1 - \omega^2 T_1 T_2) + j\omega(T_1 + T_2)} \right| = K \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_3^2}{1 + (T_1^2 + T_2^2)\omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}}$$

de amplitude verhouding, en het argument

$$\begin{aligned} \text{Arg} \frac{1 + j\omega T_3}{(1 - \omega^2 T_1 T_2) + j\omega(T_1 + T_2)} &= \\ &= - \text{arc tg} \frac{(T_1 + T_2 - T_3)\omega + T_1 T_2 T_3 \omega^2}{1 - (T_1 T_2 - T_2 T_3 - T_3 T_1)\omega^2} \end{aligned}$$

de fasehoek voorstellen.

Deze uitkomsten zijn dus volkomen identiek met die, gevonden bij de sinusvormige sturbeweging, wanneer het startverschijnsel is uitgedempt. Evenzo wordt, wanneer is uitgegaan van de vereenvoudigde bewegingsvergelijking $T \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} = K \delta$, als overdrachtsfunctie gevonden:

$$\bar{y}(p) = \frac{K}{1 + T.p}$$

3. Experimentele bepaling van de stureigenschappen.

Door gelijktijdige observatie van de roerbeweging en van de scheepsbeweging, veroorzaakt door deze roerbeweging, moet het mogelijk zijn de overdrachtsfunctie te bepalen. Is de overdrachts

functie eenmaal bepaald, dan kunnen hieruit de factoren K , T_1 , T_2 en T_3 opgelost worden.

Hiervoor staan ons in principe 3 methoden ter beschikking, t.w. het bepalen van de responsie op sinusvormige roerbewegingen bij verschillende frequenties, het bepalen van de responsie op een eenmalige impulsvormige roerbeweging en tenslotte de zgn. zig-zag test volgens Kempf.

3.1. Frequentie-responsie onderzoek.

Zoals uit 2.4.3. volgt, is

$$\dot{\theta}(t) = A(\omega) \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega t + \phi(\omega)),$$

waarin:

$$A(\omega) = K \sqrt{\frac{1 + T_3^2 \omega^2}{1 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}} \quad \text{en}$$

$$\phi(\omega) = - \text{arc.tg.} \frac{(T_1 + T_2 - T_3)\omega + T_1 T_2 T_3 \omega^2}{1 - (T_1 T_2 - T_2 T_3 - T_3 T_1) \omega^2}$$

Door het roer een sinusvormige beweging met hoeksnelheid ω te geven kunnen wij bij den modelproef gelijktijdig δ en $\dot{\theta}$ registreren. $\dot{\theta}$ wordt dan bepaald met behulp van een hoeksnelheidsgyrocoop. Uit deze meetgegevens zijn dan onmiddellijk $A(\omega)$ en $\phi(\omega)$ te berekenen.

Door nu bij 4 verschillende frequenties welke verdeeld zijn over het frequentiegebied $\frac{1}{T_1}$ tot $\frac{1}{T_2}$ de vergelijking van $A(\omega)$ op te lossen, kunnen de indices K , T_1 , T_2 en T_3 opgelost worden. Deze methode geeft een grote nauwkeurigheid, speciaal voor T_2 en T_3 . De uit te voeren proeven eisen echter veel tijd. Om alle indices voldoende nauwkeurig te bepalen moeten de proeven voortgezet worden in een zeer laag frequentiegebied, waarvoor een zeer lang sleepkanaal nodig is.

3.2. Impulsmethode.

Een methode, welke veel minder experimenten noodzakelijk maakt, is het sturen met een éénmalige impulsvormige roerbeweging

Daar deze éénmalige impulsen sinusvormige componenten van zeer hoge frequenties bevatten, is het met deze methode zelfs mogelijk de overdrachtsfunctie voor hogere frequenties met grotere nauwkeurigheid te bepalen.

De vorm van de impuls is van weinig belang. Aan de Osaka universiteit wordt een cosinus impuls gebruikt, welke als volgt is gedefiniëerd:

$$\text{voor } -t_1/2 < t < t_1/2 \quad \delta = \delta_0 \cos \frac{\pi}{t_1} t$$

$$\text{voor } t_1/2 < t < -t_1/2 \quad \delta = 0$$

De Laplace transformatie hiervan, met als parameter $j\omega$ is:

$$\delta_{(j\omega)} = \int_{-t_1/2}^{t_1/2} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-t_1/2}^{t_1/2} \delta_0 \cos \frac{\pi}{t_1} t \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \cdot \delta_0 \cdot t_1}{\pi} \frac{\cos \frac{\omega t_1}{2}}{1 - \left(\frac{\omega t_1}{\pi}\right)^2}$$

In verband met de beschikbare installatie voor de roerbediening zal het wellicht in Delft nuttig zijn een driehoekige impuls te gebruiken, welke als volgt wordt gedefiniëerd:

$$\begin{aligned} \text{voor } -t_1/2 \leq t \leq 0 & \quad \delta_{(t)} = \delta_0 \cdot \frac{t_1 + 2t}{t_1} \\ 0 \leq t \leq t_1/2 & \quad \delta_{(t)} = \delta_0 \cdot \frac{t_1 - 2t}{t_1} \\ t_1/2 \leq t \leq -t_1/2 & \quad \delta_{(t)} = 0 \end{aligned}$$

De Laplace transformatie hiervan is:

$$\begin{aligned} \delta_{(j\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{-t_1/2}^0 \delta_0 \cdot \frac{t_1 + 2t}{t_1} \cdot (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt + \\ &+ \int_0^{t_1/2} \delta_0 \cdot \frac{t_1 - 2t}{t_1} \cdot (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \frac{4 \cdot \delta_0}{\omega^2 \cdot t_1} \left(1 - \cos \frac{\omega t_1}{2}\right) \end{aligned}$$

Vervolgens moet de Laplace transformatie van het schip bepaald worden. Deze gebeurt in 2 gedeelten. Allereerst wordt een tijdstip t_b bepaald, zodanig dat na t_b de beweging $\dot{\theta}(t)$ nog slechts bepaald is door T_1 . Immers, na het beëindigen van de roerbeweging is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking van de vorm $\dot{\theta}_{(t)} = C_1 \cdot e^{-t/T_1} + C_2 \cdot e^{-t/T_2}$. Hierin is $T_1 \gg T_2$, zodat de invloed van T_2 snel afneemt.

Volgens Nomoto is $t_b = 2T_1$ een goede aanname.

Met behulp van Simpson's regel wordt nu voor het tijdvak $\frac{-t_1}{2}$ tot t_b de integraal $\int_{-t_1/2}^{t_b} \dot{\theta}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$ bepaald, en wel als:

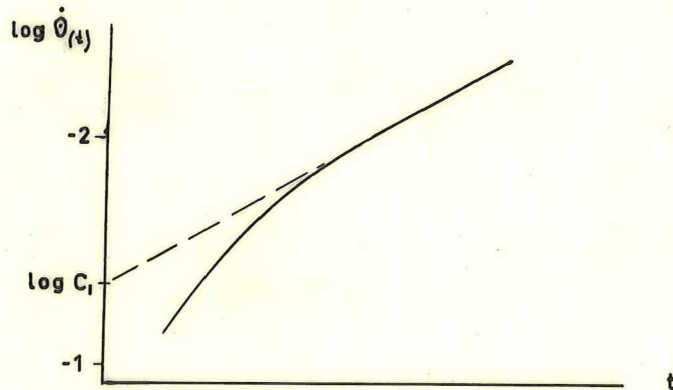
$$\int_{-t_1/2}^{t_b} \theta(t) \cos \omega t \cdot dt - j \int_{-t_1/2}^{t_b} \dot{\theta}(t) \sin \omega t \cdot dt$$

Dit kan zeer eenvoudig in tabelvorm geschieden.

Vervolgens dient bepaald te worden $\int_{t_b}^{\infty} \dot{\theta}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$.
Daar t_b zeer groot t.o.v. T_2 gekozen was, is hier voor te schrijven:

$$\begin{aligned} \int_{t_b}^{\infty} C_1 \cdot e^{-t/T_1} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt &= C_1 \int_{t_b}^{\infty} e^{-\frac{1+j\omega T_1}{T_1} t} \cdot dt = \\ &= \frac{C_1 \cdot T_1 \cdot e^{-\frac{t_b}{T_1}}}{1 + j\omega T_1} \cdot (\cos \omega t_b - j \sin \omega t_b) = \\ &= \frac{C_1 \cdot T_1 \cdot e^{-\frac{t_b}{T_1}}}{1 + (\omega T_1)^2} \cdot (1 - j\omega T_1) \cdot (\cos \omega t_b - j \sin \omega t_b) \\ &= \frac{C_1 \cdot T_1 \cdot e^{-\frac{t_b}{T_1}}}{1 + (\omega T_1)^2} \cdot \{(\cos \omega t_b - \omega T_1 \sin \omega t_b) - j(\sin \omega t_b + \omega T_1 \cos \omega t_b)\} \end{aligned}$$

De coefficient C_1 en een benadering van T_1 kunnen gevonden worden uit de kromme van $\log \dot{\theta}(t)$ op basis van t . Immers, voor $t > t_b$ is te schrijven $\log C_1 \cdot e^{-t/T_1} = \log C_1 - \frac{t}{T_1} \log e$



Hieruit volgt dat indien we de lijn recht doortrekken naar $t = 0$ $\log \dot{\theta}(t) = \log C_1$, terwijl de gradiënt van deze lijn $\frac{1}{T_1} \log e$ bedraagt.

Door nu de 2 gedeelten op te tellen wordt de Laplace transformatie van de responsie gevonden. Deling hiervan door de Laplace transformatie van de stimulans levert ons dan de gezochte overdrachtsfunctie met $j\omega$ als parameter.

In de praktijk zal het moeilijk zijn om de roerimpuls pas

dan te geven, wanneer de responsie op alle voorgaande roerbewegingen, nodig om het model op rechte koers te brengen, uitgedempt zijn. Dit betekent, dat

$$\int_{-\infty}^{-t_1/2} \dot{\theta}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \neq 0$$

De gevonden responsie zal dan nog met deze waarde verminderd moeten worden. De bepaling van deze correctie gaat als volgt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-t_1/2} \left\{ T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 \dot{\theta}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} \right\} e^{-j\omega t} \cdot dt = \\ & = T_1 \cdot T_2 \int_{-\infty}^{-t_1/2} e^{-j\omega t} \cdot \frac{d^2 \dot{\theta}}{dt^2} \cdot dt + (T_1 + T_2) \int_{-\infty}^{-t_1/2} \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{-t_1/2} \dot{\theta} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\ & = T_1 \cdot T_2 e^{-j\omega t} \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \left\{ (T_1 + T_2) + j\omega T_1 T_2 \right\} \int_{-\infty}^{-t_1/2} \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{-t_1/2} \dot{\theta} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\ & = \left[T_1 \cdot T_2 e^{-j\omega t} \cdot \ddot{\theta} + \left\{ (T_1 + T_2) + j\omega T_1 T_2 \right\} \dot{\theta} \cdot e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{-t_1/2} + \left\{ (j\omega T_1 + 1) \cdot (j\omega T_2 + 1) \right\} \int_{-\infty}^{-t_1/2} \dot{\theta} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ \text{of:} & \int_{-\infty}^{-t_1/2} \dot{\theta}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{\left\{ (T_1 + T_2) + j\omega T_1 T_2 \right\} \dot{\theta} + T_1 \cdot T_2 \cdot \ddot{\theta}}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2)} \cdot e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{-t_1/2} \\ \text{of} & \int_{-\infty}^{-t_1/2} \dot{\theta} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{\left\{ (T_1 + T_2) + j\omega T_1 T_2 \right\} \dot{\theta}_{(-t_1/2)} + T_1 \cdot T_2 \cdot \ddot{\theta}_{(-t_1/2)}}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2)} \cdot e^{j\omega t_1/2} \end{aligned}$$

De waarden van $\dot{\theta}$ en $\ddot{\theta}$ ten tijde $-t_1/2$ volgen uit de meting. Een eerste benadering van T_2 wordt op dezelfde manier als van T_1 gevonden, n.l. door $\log \left[\dot{\theta}(t) - C_1 e^{-t/T_1} \right]$ op basis t uit te zetten. De gradiënt van de asymptoot is dan $-\frac{1}{T_2} \log e$

De impulsmethode is buitengewoon geschikt om juist het gebied van lage frequenties, waar het frequentie onderzoek moeilijk is door de vereiste lengte van het bassin, te bepalen.

De beste methode om de frequentie karakteristiek, en daarmee de stuurkwaliteitsparameters te bepalen, zal dus zijn: Voor het zeer lage frequentiegebied bepaling van de overdrachtsfunctie met behulp van de responsiemethode. Voor de hogere frequentie's is het frequentie responsie onderzoek beter geëigend..