



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**AEX-Sparen: sparen en beleggen in één
(AEX-Sparen: a combination of saving and
investing)**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

STEVEN HOYER

**Delft, Nederland
December 2011**



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“AEX-Sparen: sparen en beleggen in één”
(“AEX-Sparen: a combination of saving and investing”)

STEVEN HOYER

Technische Universiteit Delft

Contactpersoon

Prof.dr.ir. A. W. Heemink

Begeleider

dr.ir. J. A. M. van der Weide

Overige commissieleden

dr. J. G. Spandaw

December, 2011

Delft

Inhoudsopgave

1	Voorwoord	4
2	Inleiding	5
2.1	Opbouw verslag	5
2.2	Wat houdt AEX-Sparen in?	5
2.3	Waarom biedt ABN AMRO AEX-Sparen aan?	6
2.3.1	Een alternatief spaarproduct	6
2.3.2	Goedkoper dan spaarrente te betalen	6
3	Hoe prijzen we het spaarproduct AEX-Sparen?	7
3.1	De verplichtingen afdekken	7
3.2	Aannames	7
3.3	Statische hedge voor AEX-Sparen	8
3.3.1	Wat zijn opties?	8
3.3.2	Hoe gebruiken we opties om de positie te hedgen?	9
3.4	Dynamische hedge voor AEX-Sparen	10
4	Hoeveel kost het afdekken?	12
4.1	Is de AEX-index wel een geometrisch Brownse beweging?	12
4.2	Welke manieren van prijzen van het product AEX-Sparen hebben we?	15
4.2.1	Statische hedge	15
4.2.2	Dynamische hedge	16
4.3	Welk effect hebben de parameters op de prijs van ons product?	16
4.3.1	Welk effect heeft σ op de prijs van ons product?	17
4.3.2	Welk effect heeft r op de prijs van ons product?	17
4.3.3	Welk effect heeft r_{\max} op de prijs van ons product?	18
4.3.4	Welk effect heeft S op de prijs van ons product?	18
4.4	Hoe bepalen we de parameters?	19
4.4.1	Welke parameters staan er vast?	20
4.4.2	Welke waarde voor σ kiezen we?	20
4.4.3	Welke waarde voor r kiezen we?	21
4.4.4	Welke waarde voor τ kiezen we?	21
4.5	Hoeveel kostte het ABN AMRO?	21
5	De klant	22
5.1	Wat is de kans dat AEX-Sparen meer rente oplevert dan een spaarrekening?	22
5.2	Wat is de verwachte rente die een klant ontvangt?	23

6	Varianten	25
6.1	Negatief AEX-Sparen	25
6.1.1	Grieken	25
6.1.2	Prijs van het product	26
6.2	Hogere minimum rente	26
7	Conclusie	27
7.1	Is AEX-Sparen een goed product voor ABN AMRO?	27
7.1.1	De kosten voor ABN AMRO	27
7.1.2	Mogelijke varianten	27
7.2	Is AEX-Sparen een goed product voor de klant?	28
8	Bijlagen	29
8.1	Hoeveel kostte het ABN AMRO om haar verplichtingen af te kopen?	29
8.2	Hoeveel zou Negatief AEX-Sparen kosten?	31
8.3	Kosten AEX-Sparen en Negatief AEX-Sparen in grafiek	33
8.4	Afleidingen Grieken Negatief AEX-Sparen	34
8.4.1	Het effect van σ op Negatief AEX-Sparen	34
8.4.2	Het effect van r op Negatief AEX-Sparen	34
8.4.3	Het effect van r_{\max} op Negatief AEX-Sparen	34
8.4.4	Het effect van S op Negatief AEX-Sparen	35
8.5	Wat is de maximale rente als we een minimale rente van 1% aanbieden?	36
8.6	Kans op meer rente dan spaarrente	38

Hoofdstuk 1

Voorwoord

Beste lezer,

Ter afsluiting van mijn Bachelor Technische Wiskunde aan de TU Delft heb ik AEX-Sparen, een spaarproduct van ABN AMRO, geanalyseerd. Dit product heeft een spaarelement en een beleggingselement. Juist dit beleggingselement maakt het een onderwerp om wiskundig te onderzoeken. AEX-Sparen geeft een spaarrente die afhankelijk is van de koers van de AEX-index. Als deze index het goed doet, is de rente hoger. Doet deze index het slecht, is toch altijd de inleg gegarandeerd. AEX-Sparen kan dus een aantrekkelijk product zijn voor mensen die de spaarrente te laag vinden, maar het te riskant vinden om zelf te beleggen op de beurs, omdat dan de mogelijkheid bestaat geld te verliezen.

Het hoofddoel van dit Bachelorproject is om te onderzoeken hoe een bank haar verplichtingen kan afdekken, en wat hiervan de kosten zijn. Hoewel dit project eigenlijk vanuit de ogen van de bank kijkt, kreeg ik tijdens het project van veel mensen de vraag of ik nu ook iets wist over de positie van de klant. Ook hier bleek ik wiskundig iets te kunnen zeggen, en heb daarom een extra hoofdstuk toegevoegd over de positie van de klant.

Verder kwam ik tijdens het analyseren van het product AEX-Sparen op een aantal varianten van dit product. In hoofdstuk 6 zullen de varianten die in me op kwamen kort de revue passeren.

Een zeer veel gebruikte bron is het boek *An Introduction to Financial Option Valuation* van Desmond J. Higham. ([1]) Voor een aantal bewijzen en concretere uitleg zal ik dan ook naar dit boek verwijzen. Het is daarom zeer aan te raden om dit boek bij je te hebben liggen als je het verslag doorneemt.

Ik heb gebruik gemaakt van zowel MatLab als Excel. Mocht u na het lezen van het verslag graag de bronbestanden eens inzien, dan kunt u mij mailen op sahoyer@gmail.com.

Ik hoop dat u wat opsteekt van dit verslag, en er ook plezier aan beleeft het te lezen,

Steven Hoyer

Hoofdstuk 2

Inleiding

2.1 Opbouw verslag

De opbouw van dit verslag is als volgt: na een korte uitleg over wat AEX-Sparen precies inhoudt, zal ik beginnen te kijken hoe we het spaarproduct AEX-Sparen kunnen prijzen. Met de nauwkeurigste methode(n) zullen we dan kijken waar de prijs van afhangt en hoeveel ABN AMRO bij benadering heeft betaald afgelopen jaren. Vervolgens zullen we kijken naar wat we kunnen zeggen over de positie van de klant. Daarna besteden we kort aandacht aan een aantal mogelijke varianten op AEX-Sparen. Aan het einde zal ik kort alle resultaten op een rijtje zetten en bekijken welke conclusies we kunnen trekken.

2.2 Wat houdt AEX-Sparen in?

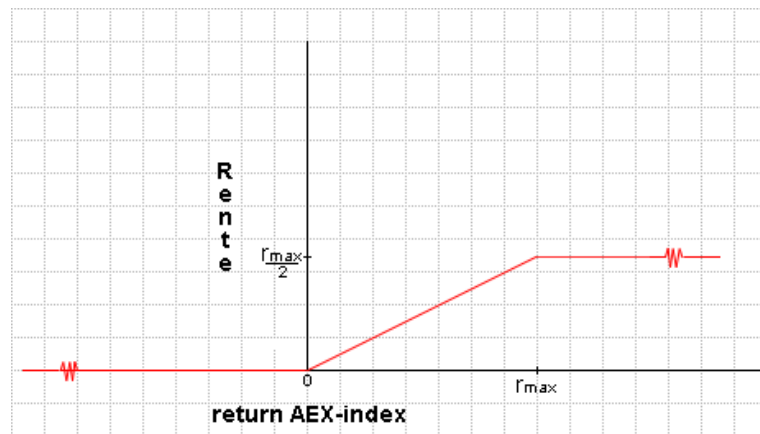
AEX-Sparen is een spaarproduct van ABN AMRO, geïntroduceerd in 2006. Een klant kan aan het begin van iedere maand instappen, en zet daarmee zijn ingelegde geld vast voor zes maanden. Na die zes maanden wordt dan opnieuw de stand van de AEX genoteerd. De rente op jaarbasis wordt nu bepaald door de return (het procentuele verschil) van de AEX-index dit half jaar. De return (r) van de AEX-index over deze periode ziet er als volgt uit:

$$r = \frac{\text{AEX}(T) - \text{AEX}(0)}{\text{AEX}(0)}$$

Hier zijn $\text{AEX}(0)$ en $\text{AEX}(T)$ respectievelijk de beginstand en de eindstand van de AEX-index van een halfjaarlijkse periode. Als de return negatief is in deze periode, dan is de rente op jaarbasis 0%. We definiëren r_{\max} als de maximale rente die een klant op jaarbasis kan ontvangen. Stijgt de return in die periode met 0% tot $100r_{\max}\%$, dan is de rente op jaarbasis gelijk aan deze return. Stijgt de return nu met meer dan $100r_{\max}\%$ dan is de rente op jaarbasis gelijk aan r_{\max} . Aan het einde van het halve jaar krijgt de spaarder zijn inleg plus eventuele rente over een half jaar uitgekeerd. Wiskundig ziet de rente er dan zo uit:

$$\text{rente}(r) = \begin{cases} 0 & \text{als } r < 0; \\ \frac{r}{2} & \text{als } 0 \leq r \leq r_{\max}; \\ \frac{r_{\max}}{2} & \text{als } r > r_{\max}. \end{cases}$$

en een grafiek van de rente tegen de koers van de AEX-index ziet er als dan volgt uit:



Figuur 2.1: *Uitbetaling t.o.v. return van de AEX-index*

2.3 Waarom biedt ABN AMRO AEX-Sparen aan?

2.3.1 Een alternatief spaarproduct

Als reden voor ABN AMRO om met dit spaarproduct te komen, kunnen we aanvoeren dat het een leuk alternatief is met een potentiële hogere spaarrente. Rond de tijd van de invoering (begin 2006) leek er geen plafond te zitten aan beurskoersen over de gehele wereld. De spaarrentes leverden een stuk minder op dan verschillende aandelen en beleggingsfondsen, maar daar had je nooit absolute zekerheid. Door gegarandeerd het ingelegde geld terug te geven, creëert ABN AMRO zekerheid, met wel de potentie op een hogere spaarrente. Als de klant vertrouwen heeft in de AEX-index, kan het de klant dus slim lijken om haar geld een half jaar vast te zetten op een AEX-Sparen spaarrekening.

2.3.2 Goedkoper dan spaarrente te betalen

We zullen later zien dat ABN AMRO in staat is haar risico volledig af te kopen. Het voordeel voor ABN AMRO is dat ze over de afgelopen jaren, over de meeste periodes minder geld hoefden te betalen aan het afkopen van hun risico, dan aan rente op spaarrekeningen waar het geld voor minimaal 3 maanden vast staat. Het kan verder ook nog een aantrekkelijk zijn voor klanten van een andere bank, omdat er geen andere bank is die met zo'n alternatief op een spaarrekening werkt.

Hoofdstuk 3

Hoe prijzen we het spaarproduct AEX-Sparen?

3.1 De verplichtingen afdekken

We gaan eerst op zoek naar een manier waarop ABN AMRO altijd aan haar verplichten richting de klant kan voldoen, zonder enig risico te lopen. Het kan wel zijn dat het geld kost om dit risico 'af te kopen'. Als we vanuit ABN AMRO denken, is het niet vreemd om te denken dat dit mogelijk is. ABN AMRO zal immers niet zomaar een hogere rente dan de spaarrente aanbieden, en ook niet garanderen dat de AEX-index niet in waarde daalt. Dit risico afkopen kan op twee manieren, namelijk door middel van een statische hedge en door middel van een dynamische hedge. Voor de statische hedge zullen we gebruik maken van opties.

3.2 Aannames

We kunnen niet beginnen zonder een aantal aannames te doen. Deze aannames moeten worden gedaan voor het model waarmee we het gedrag van de AEX-index willen modelleren. Deze aannames zijn ook in [1]¹ te vinden:

- Er zijn geen transactiekosten,
- Een onderliggende waarde kan gekocht en verkocht worden in alle hoeveelheden,
- Short-sellen² is toegestaan,
- Het handelen van het aandeel kan continu in tijd plaatsvinden,
- Er wordt geen dividend betaald

Deze aannames zijn van belang voor de manier waarop we de ontwikkeling van de AEX-index willen modelleren.

¹[1] pag. 76&77

²Het verkopen van een aandeel en het dan later terugkopen van dit aandeel, anticiperend op een verlies van dat aandeel

3.3 Statische hedge voor AEX-Sparen

De eerste manier die we zullen beschouwen om het risico af te kopen is de statische hedge. Deze hedge heet statisch omdat er alleen aan het begin van de looptijd gehandeld wordt, en dat met alleen die handeling het risico al wordt afgekocht. We zullen voor deze hedge gebruik moeten maken van zogenaamde opties.

3.3.1 Wat zijn opties?

Er bestaan ongelofelijk veel verschillende vormen van opties. Voor dit verslag is het alleen nodig om twee soorten Europese opties te bekijken, namelijk Europese callopties en Europese putopties. Een optie heet Europees als er alleen een uitbetaling plaatsvindt op het moment van expiratie. De prijs van beide opties hangt af van dezelfde parameters.

Europese calloptie

Een persoon of instelling kan een Europese calloptie kopen of schrijven (verkopen). Als deze persoon of instelling een Europese calloptie koopt, geeft deze hem het recht om een bepaalde onderliggende waarde te kopen op een vastgestelde datum (expiratedatum) tegen een vooraf vastgestelde prijs (uitoefenprijs) van de verkoper. Hier bijkomend geldt ook de plicht voor de verkoper om de onderliggende waarde te verkopen als de koper van de optie dit verlangt.

Als de persoon of instelling een Europese calloptie schrijft, geeft dit hem de plicht het aandeel te verkopen tegen een vastgestelde datum tegen een vooraf vastgestelde prijs aan degene die de optie koopt.

Als de optie afloopt op tijd T dan is de waarde van een Europese calloptie op tijd T gelijk aan

$$C(S, T) = \max(S(T) - E, 0)$$

Waar $S(T)$ de prijs van de onderliggende waarde is op tijd T , en E de uitoefenprijs van de optie is. Deze waarde wordt ook wel de pay-off van de calloptie genoemd.

Europese putoptie

Ook een Europese putoptie kan men kopen of schrijven. Als een persoon of instelling een Europese putoptie koopt, geeft deze hem het recht om een aandeel te verkopen aan de verkoper op een vastgestelde datum (expiratie datum) tegen een vooraf vastgestelde prijs (uitoefenprijs). Als de persoon of instelling een Europese putoptie schrijft, geeft dit hem de plicht het aandeel te kopen van de koper van de putoptie tegen een vastgestelde datum tegen een vooraf vastgestelde prijs.

Als de optie afloopt op tijd T dan is de prijs van een Europese putoptie gelijk aan

$$P(S, T) = \max(E - S(T), 0)$$

Dit wordt ook wel de pay-off van de putoptie genoemd

Waar hangt de prijs van een optie van af?

De prijs van een Europese optie hangt per gebruikt model af van een aantal parameters. Het model dat wij zullen gebruiken heeft de volgende 5 parameters:

Parameter	Waarde
S	De koers van de onderliggende waarde
E	De uitoefenprijs van de optie
σ	De volatiliteit van de onderliggende waarde
r	De rente die de bank moet betalen om geld te lenen
τ	De tijd tot het aflopen van de optie

3.3.2 Hoe gebruiken we opties om de positie te hedgen?

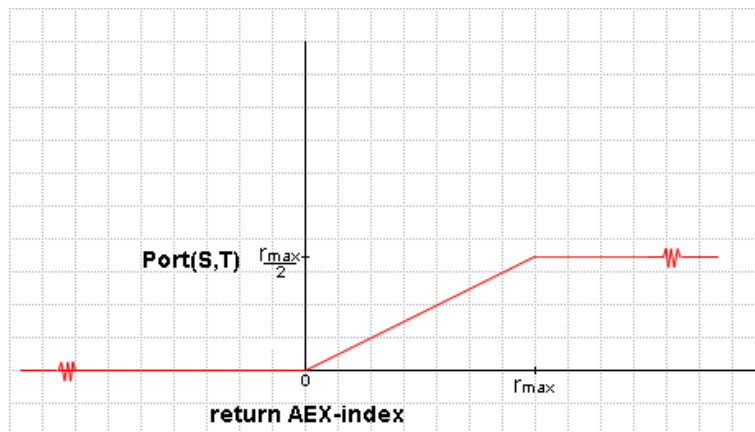
Stel we willen voor een klant die EUR 1,- inlegt het risico afkopen. We kopen dan een x aantal callopties met als uitoefenprijs $E_1 = S_0$, de stand van de AEX-index op het moment van aankoop, die een looptijd van een half jaar hebben. We noemen deze calloptie C_1 . Nu verkopen we evenveel callopties met als uitoefenprijs $E_2 = S_0(1 + r_{\max})$ keer de AEX-index op dat moment, en eenzelfde looptijd. We noemen deze calloptie C_2 . Voor $0 \leq t \leq T$ hebben we dan de volgende portefeuille:

$$\text{Port}(S, t) = xC_1(S, t) - xC_2(S, t)$$

Neem nu $x = \frac{1}{2S_0}$. Dan is deze portefeuille op de eindtijd (T) altijd evenveel waard als dat ABN AMRO aan verplichtingen heeft.

$$\text{Port}(S, T) = \frac{1}{2S_0} \max(S - E_1, 0) - \frac{1}{2S_0} \max(S - E_2, 0)$$

De pay-off ziet er dan als volgt uit:



Figuur 3.1: Pay-off van de portefeuille t.o.v. de return van de AEX-index

We zien dat deze pay-off voor iedere return van de AEX-index over een half jaar gelijk is aan de beloofde rente. We zien dat ABN AMRO vanaf het kopen van de opties zeker is dat ze de klant kan voorzien van het beloofde rentepercentage.

Het voordeel van de statische hedge is dat er aan het begin van de looptijd een premie wordt betaald, en er daarna niet meer naar de portefeuille omgekeken hoeft te worden. Een nadeel ten opzichte van het uitkeren van spaarrente is dat de premie vooraf betaald wordt, waar een

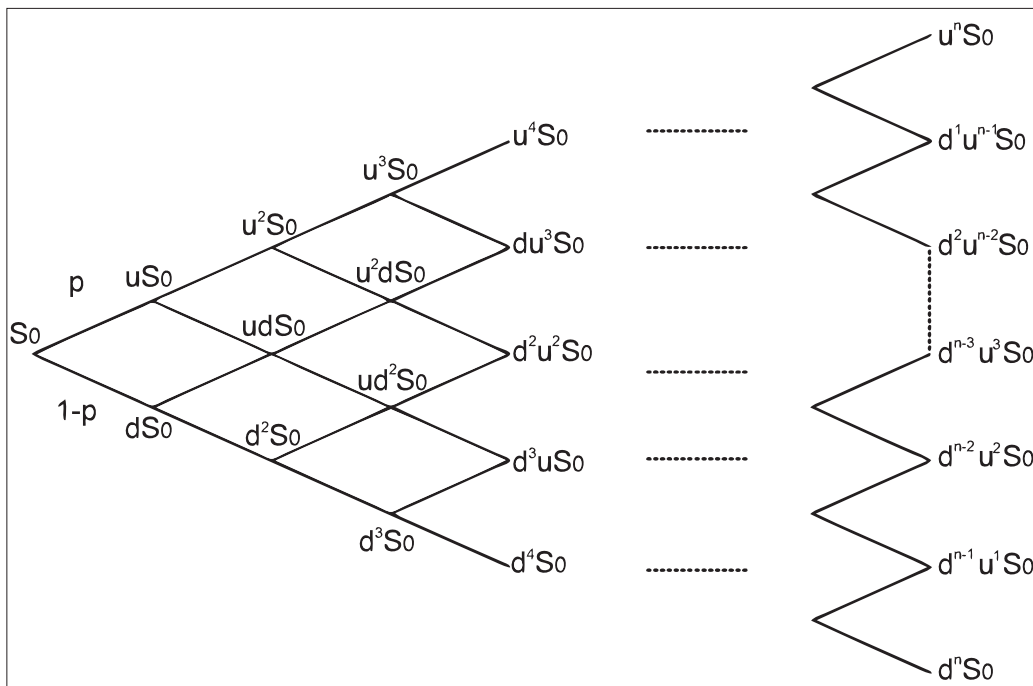
spaarrente aan het einde van de looptijd betaald zou worden. Ook kan de AEX-index zeer veel verschillende waarden aannemen, en niet voor welke waarde bestaan er opties met bijpassende uitoefenprijzen in de markt. Het zou echter zo kunnen zijn dat ABN AMRO deze opties zelf in de markt plaatst wanneer nodig.

3.4 Dynamische hedge voor AEX-Sparen

We kunnen onze positie ook hedgen door middel van een dynamische hedge. Deze hedge heet dynamisch omdat we op een aantal verschillende momenten in het traject zullen handelen om de hedge weer kloppend te krijgen. We kunnen de waarde van een optie stap voor stap nabootsen met een portefeuille bestaande uit een combinatie van de onderliggende waarde en van cash. We kunnen ervoor kiezen om n keer te handelen over de het halve jaar dat ons product loopt. We hebben dan op ieder moment n de volgende portefeuille:

$$\text{Port}_n = \Delta_n S_n + \text{Cash}_n$$

Hier staat Δ voor de hoeveelheid van de onderliggende waarde. Als we Δ goed kiezen maakt het niet uit of de onderliggende waarde op de tijdstap erna is gedaald of gestegen, de waarde van de portefeuille van aandeel en cash is weer evenveel waard als de optie. Hoeveel we in totaal betalen om ons risico af te kopen kan worden bepaald met een binomiale boom om te zien hoe de onderliggende waarde zich kan ontwikkelen door de tijd heen. Zo'n binomiale boom ziet er als volgt uit in n tijdstappen:



Figuur 3.2: Binomiale boom

Hier is u de factor waarmee we vermenigvuldigen als de onderliggende waarde stijgt, en d de factor waarmee we vermenigvuldigen als de onderliggende waarde daalt. De kans dat de on-

derliggende waarde stijgt noteren we met p , en dus is de kans dat de onderliggende waarde daalt gelijk aan $(1 - p)$.

We zullen straks aannemen dat de logreturns normaal verdeeld zijn. De kans dat de AEX-index stijgt is dan 50%, en dat deze daalt is ook 50%. We zullen daarom $p = \frac{1}{2}$ nemen. Vervolgens nemen we u en d nu zoals in [1]³:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t}$$

Hier is δt de tijdstap die we maken, dus $\delta t = \frac{T}{N}$. Kiezen we nu $\delta t < \frac{\sigma^2}{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2}$, dan vinden we $u > 1$, en $d < 1$. Dit betekent dus dat we stijgingen en dalingen zullen hebben in ons model.

³[1] pag. 154 formule (16.7)

Hoofdstuk 4

Hoeveel kost het afdekken?

4.1 Is de AEX-index wel een geometrisch Brownse beweging?

Voordat we gaan rekenen moeten we wel aan bepaalde voorwaarden voldoen. Om opties met als onderliggende waarde de AEX-index te prijzen op de bovenstaande manieren, moeten we wel weten of de AEX-index gezien kan worden als een geometrisch Brownse beweging. De logreturns dienen hiertoe stationair en normaal verdeeld te zijn. Een proces $(x_t)_{t \geq 0}$ is (zwak) stationair als geldt dat

$$E[x_t] = \mu \quad \text{en} \quad \text{Cov}(x_s, x_{s+t}) \text{ alleen afhangt van } t,$$

waarbij μ een constante is. De logreturns zijn het verschil van de logaritmen van de returns per tijdstap:

$$\frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} \approx \log(r_t) - \log(r_{t-1}) = \log\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right)$$

Om te ontdekken of dit bij de AEX-index het geval is, kunnen we een aantal verschillende tests uitvoeren.

Stationariteit

Een eerste test om stationariteit te testen is de KPSS test (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt en Shin). Dit is een test die als nul-hypothese heeft dat de reeks stationair is. In het programma R kunnen we deze test laten runnen, we vinden dan:

```
> kpss.test(r)
```

```
      KPSS Test for Level Stationarity
```

```
data:  r
```

```
KPSS Level = 0.398, Truncation lag parameter = 14, p-value = 0.078
```

We krijgen een p-waarde van 0.078. Het is niet heel overtuigend, maar we mogen niet concluderen dat de logreturns niet stationair zijn.

Twee andere tests zijn de Dickey-Fuller test en de Augmented Dickey-Fuller test (DF-test en ADF-test). Om te onderzoeken of de logreturns van de AEX-index stationair zijn, doen we de DF-test¹ met nulhypothese $\phi_1 = 1$ en de alternatieve hypothese $\phi_1 < 1$ op het model

¹[4] pag. 60

$$p_t = \phi_1 p_{t-1} + \epsilon_t \Leftrightarrow p_t - \phi_1 p_{t-1} = \epsilon_t$$

Hier geldt dat p_t de natuurlijke logaritme is van de koers van de AEX-index op tijd t , en $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. De Augmented Dickey-Fuller test heeft hetzelfde achterliggende idee, maar hier worden de autocorrelaties uit de reeks gehaald. We testen dan opnieuw met de nulhypothese $\phi_1 = 1$ en de alternatieve hypothese $\phi_1 < 1$, maar dit keer op het volgende model:

$$p_t = \phi_1 p_{t-1} + \rho_1 \Delta p_{t-1} + \dots + \rho_{p-1} \Delta p_{t-p+1} + \epsilon_t$$

hier geldt $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$. p is het aantal logreturns dat nog effect blijkt te hebben op de huidige logreturn. Omdat er verwacht kan worden dat de returns wel enigszins met elkaar samenhangen, is dus de ADF-test een goede manier om stationariteit te testen. Doen we de ADF-test in R, dan vinden we de volgende waarden:

```
> adf.test(r)
```

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: r
Dickey-Fuller = -14.3726, Lag order = 15, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Warning message:

```
In adf.test(r) : p-value smaller than printed p-value
```

Deze test verworpt het niet-stationair zijn van de logreturns. We mogen dus stellen dat de reeks logreturns van de AEX-index stationair is.

Normaliteit

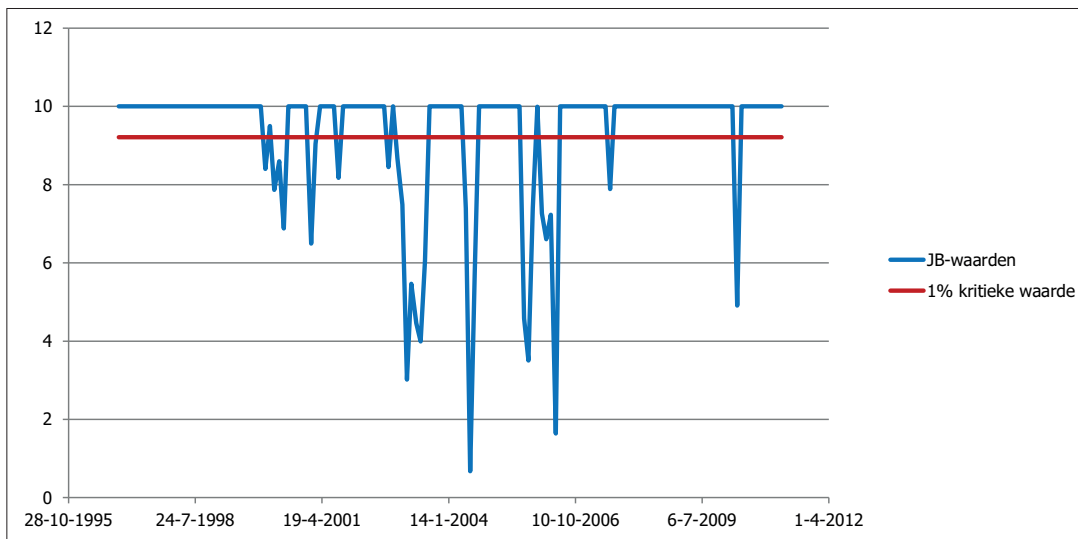
We zullen nu bekijken of de logreturns ook normaal verdeeld zijn. Hiertoe zullen we de Jarque-Bera test uitvoeren op verschillende perioden. De Jarque-Bera test kijkt naar de skewness en kurtosis van een dataset. De JB-testwaarde wordt als volgt verkregen

$$JB = \frac{n}{6} \left(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4} \right)$$

waar n het aantal waarnemingen, s de skewness van die waarnemingen en k de kurtosis van die waarnemingen is. Voor een standaardnormaal verdeelde stochast is de skewness gelijk aan 0 en de kurtosis gelijk aan 3. Als we te maken hebben met normaal verdeelde logreturns, dan moet de waarden JB χ^2 -verdeeld zijn met twee vrijheidsgraden. We kunnen hiervan de kritieke waarden voor ieder significantieniveau opzoeken.

Onderstaande grafiek (Figuur 4.1) geeft de waarden van de JB-test weer per datum over de logreturns van de afgelopen 250 handelsdagen. Om de grafiek overzichtelijk te houden zijn alle waarden groter dan 10 afgebeeld als 10, maar de werkelijke waarden bereiken zelfs waarden tussen de 80 en de 100. We zien, voor een significantieniveau van 5% met bijbehorende kritieke waarde 5.99, dat over een periode van een jaar gezien de JB-testwaarde bijna nooit onder deze

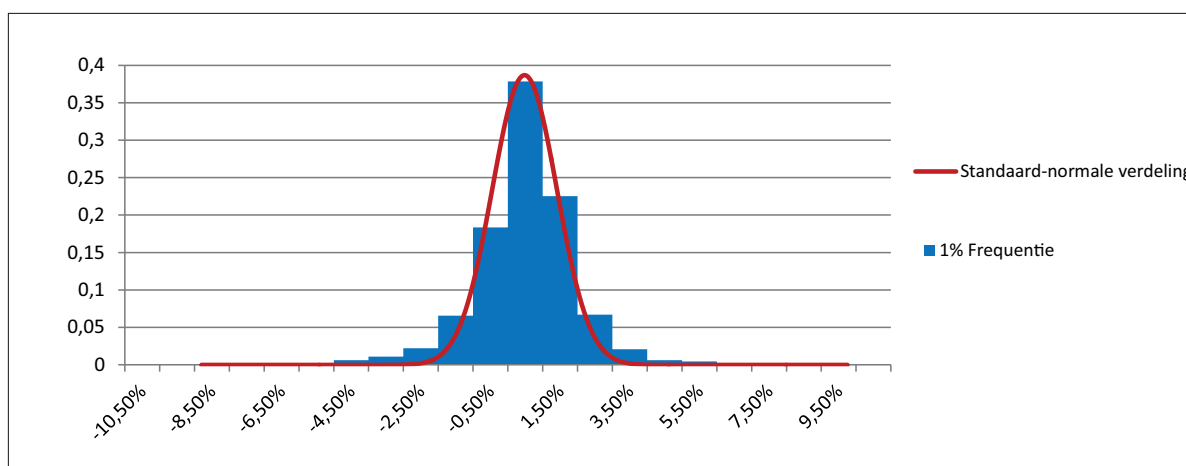
kritieke waarde uit komt. We kunnen daarom verwerpen dat de logreturns normaal verdeeld zijn. In Figuur 4.2 is te zien dat we te maken hebben met 'dikke staarten'. Dit betekent dat er een grotere kans is op extreme waarden dan volgens de standaardnormale verdeling.



Figuur 4.1: *JB-waarden over 250 dagen van de afgelopen 15 jaar*

We zullen er dus rekening mee moeten houden dat alle uitkomsten van berekeningen gedaan onder de aanname van normaliteit nooit precies kloppen, maar we nemen wel aan dat dit een goede benadering kan zijn.

Ook onderstaande grafiek laat het verschil zien tussen de verdeling van de logreturns en de standaard-normale verdeling



Figuur 4.2: *Verdeling van de logreturns per procent, t.o.v. de normale verdeling*

4.2 Welke manieren van prijzen van het product AEX-Sparen hebben we?

We hebben twee verschillende manieren gezien om ons risico af te kopen en zijn daarom benieuwd hoeveel dit kost voor beide manieren. Om deze vraag te beantwoorden voor de statische hedge gaan we de twee te kopen opties prijzen. Om te bepalen hoeveel het kost om via een dynamische hedge ons risico af te kopen, zullen we bekijken welke waarde we Δ het beste aan kunnen laten nemen.

4.2.1 Statische hedge

Het Black-Scholes model

De eerste manier om de prijs van een optie te bepalen is aan de hand van het Black-Scholes model. Dit is een van de oudst bekende manieren om de prijs van een optie te bepalen.

We hebben gezien dat ABN AMRO haar risico precies kan afdekken door de de volgende portefeuille te kopen:

$$\text{Port}(S, t) = \frac{1}{2} \frac{C_1(S, t) - C_2(S, t)}{S_0}$$

voor $0 \leq t \leq T$, en S afhankelijk van t . Verder heeft C_1 uitoefenprijs $E_1 = S_0$ en C_2 uitoefenprijs $E_2 = S_0(1 + r_{\max})$. Uit [1]² weten we

$$\text{Port}(S, t) = \frac{1}{2} \frac{C_1(S, t) - C_2(S, t)}{S_0} = \frac{1}{2} (N(d_1^1) - e^{-r\tau} N(d_2^1) - (N(d_1^2) - (1 + r_{\max})e^{-r\tau} N(d_2^2)))$$

waar $N(\cdot)$ ³ de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling is en waarbij

$$\begin{aligned} d_1^1 &= \frac{\log(S/E_1) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & d_2^1 &= \frac{\log(S/E_1) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_1^2 &= \frac{\log(S/E_2) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & d_2^2 &= \frac{\log(S/E_2) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \end{aligned}$$

Hier is σ nog steeds onbekend. We komen er later op terug hoe we σ schatten.

Binomiale boom

Om AEX-Sparen op deze manier te bekijken wordt gekeken naar een stochastische ontwikkeling van de AEX-index. We delen de totale looptijd op in N stappen. Elke stap kan de prijs stijgen of dalen. Op het moment dat de opties aflopen weten we de waarde van de opties. We kunnen dan vanuit de laatste knopen⁴ terugrekenen wat de waarde is van de optie op het moment van kopen. We berekenen nu de beginwaarde van de optie door vanaf de eindknopen telkens als volgt terug te rekenen:

$$V_n^i = \max(S_n^i - E, e^{-r\delta t}(pV_{n+1}^{i+1} + (1-p)V_n^{i+1}))$$

²[1] pag. 80 formule (8.19)

³[1] pag. 26 formule (3.18)

⁴Zie Figuur 3.1

V_n^i is hier de waarde van de optie als deze i tijdstappen van tijdstip 0 verwijderd is, waarvan de koers n keer omhoog is gegaan, en dus $i - n$ keer omlaag. Tegelijkertijd hebben we dus bijvoorbeeld dat V_{n+1}^{i+1} de waarde van de optie is na $i + 1$ tijdstappen is, en de onderliggende waarde $n + 1$ keer omhoog is gegaan, en $i - n$ keer omlaag is gegaan. Rekenen we op deze manier $N - 1$ stappen terug, vinden we de waarde van de optie op dit moment: V_0^0 .

Naarmate N naar oneindig gaat, zal deze binomiale manier van benaderen convergeren naar de Black-Scholes manier. We zien in de resultaten⁵ dat de gevonden prijzen inderdaad niet veel van elkaar verschillen.

4.2.2 Dynamische hedge

Binomiale boom

De dynamische hedge is gebaseerd op het repliceren van de optie door een portefeuille van de onderliggende waarde en de rest cash. Om te vinden hoeveel aandelen en welke hoeveelheid cash we moeten hebben doen we een simpele berekening⁶. De hoeveelheid aandelen noemen we Δ en deze is als volgt te berekenen uit het binomiale model:

$$\Delta_i = \frac{V_{n+1}^{i+1} - V_n^{i+1}}{S_{n+1}^{i+1} - S_n^{i+1}}$$

V_n^i en S_n^i zijn hier de waarde van de optie respectievelijk de waarde van de onderliggende waarde als deze i tijdstappen van 0 verwijderd is, waarvan de koers n keer omhoog is gegaan, en dus $i - n$ keer omlaag. De hoeveelheid cash dat rente ontvangt over de periode van de tijdstap is dan gelijk aan

$$V_n - \Delta_n S_n$$

In ons geval hebben we een portefeuille van twee Europese callopties. De juiste Δ voor deze portefeuille vinden als volgt

$$\Delta_{\text{Port}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{C1} - \Delta_{C2}}{S_0}$$

4.3 Welk effect hebben de parameters op de prijs van ons product?

Aangezien ABN AMRO geld zal betalen om haar risico af te kopen, is het interessant om te onderzoeken waar de te betalen prijs van af hangt. We onderzoeken daarom welk effect de parameters hebben op de prijs van ons product. We hebben al gezien dat de te onderzoeken portefeuille als volgt is samengesteld:

$$\text{Port}(S, t) = \frac{1}{2} \frac{C_1(S, t) - C_2(S, t)}{S_0}$$

Om het effect van de verschillende parameters te onderzoeken zullen we het continue geval beschouwen. We zijn telkens benieuwd naar de prijs aan het begin van de looptijd, en dus nemen we $S = S_0$ vast. We zullen telkens de Black-Scholes prijs differentiëren naar een bepaalde

⁵Zie Bijlage 1

⁶[2] pag. 19 formule (1.2.17)

parameter om het effect op de portefeuille te onderzoeken.

We zien dat er 3 parameters effect kunnen hebben op de prijs van ons product voor aanvang van de looptijd: σ , r en E . Hier hangt E volledig af van S_0 en r_{\max} . We zullen later zien dat S_0 wordt weggedeeld en τ staat vast op een half jaar. Voor het product AEX-Sparen is τ een constante. We zullen alle parameters nagaan om te kijken wat het effect is van een verandering van de desbetreffende parameter.

4.3.1 Welk effect heeft σ op de prijs van ons product?

We gaan bekijken welk effect σ heeft op de prijs die de bank moet betalen om het risico van een euro af te kopen. We doen dit door de portefeuille te differentiëren naar σ .

We hebben dan:

$$\frac{\partial \text{Port}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial C_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial C_2}{\partial \sigma} \right)$$

We weten uit [1]⁷ dat nu volgt:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial C_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial C_2}{\partial \sigma} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} (S_0 \sqrt{T-t} N'(d_1^1) - S_0 \sqrt{T-t} N'(d_1^2)) = \frac{1}{2} \sqrt{T-t} (N'(d_1^1) - N'(d_1^2))$$

Als C_1 en C_2 twee Europese Call opties zijn met uitoefenprijzen respectievelijk E_1 en E_2 , waarvoor geldt $E_2 > E_1$, dan vinden we

$$d_1^1 = \frac{\log(S_0/E_1) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_1^2 = \frac{\log(S_0/E_2) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Waarvoor dan dus geldt dat $d_1^1 > d_1^2$ en dus

$$N'(d_1^1) < N'(d_1^2)$$

Als dus geldt dat $r_{\max} > 0$ dan geldt ook dat $\frac{\partial \text{Port}}{\partial \sigma} < 0$

Dit houdt in dat als de volatiliteit stijgt, de waarde van een calloptie met hogere uitoefenprijs harder stijgt dan de waarde van een calloptie met een hogere uitoefenprijs. Voor ons product betekent dit dus dat de prijs om het risico van 1 euro af te kopen daalt als de volatiliteit stijgt.

4.3.2 Welk effect heeft r op de prijs van ons product?

Een stijging van r houdt in dat ook de waarden van beide opties stijgen. De optie met de laagste uitoefenprijs zal echter harder stijgen, daarom zal ook ons product duurder worden.

We laten dit als volgt zien:

$$\frac{\partial \text{Port}}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial C_1}{\partial r} - \frac{\partial C_2}{\partial r} \right)$$

Uit [1]⁸ volgt nu:

⁷[1] pag. 101

⁸[1] pag. 101

$$\begin{aligned}\frac{1}{2S_0} \left(\frac{\partial C_1}{\partial r} - \frac{\partial C_2}{\partial r} \right) &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} (\tau E_1 e^{-r\tau} N(d_1^1) - \tau E_2 e^{-r\tau} N(d_2^2)) \\ &= \frac{1}{2} \tau e^{-r\tau} (N(d_1^1) - (1 + r_{\max}) N(d_2^2))\end{aligned}$$

Als C_1 en C_2 twee Europese Call opties zijn met uitoefenprijzen respectievelijk E_1 en E_2 , waarvoor geldt $E_1 < E_2$, dan vinden we met

$$d_1^1 = \frac{\log(S_0/E_1) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2^2 = \frac{\log(S_0/E_2) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

dat dus geldt dat $d_2^2 < d_1^1$. Hieruit concluderen we dan dat $N(d_2^2) < N(d_1^1)$ en dus $\frac{\partial \text{Port}}{\partial r} > 0$

4.3.3 Welk effect heeft r_{\max} op de prijs van ons product?

Een stijging van r_{\max} houdt in dat de waarde van de tweede optie vermindert. Het product zal dus duurder worden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{Port}}{\partial r_{\max}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial C_1}{\partial r_{\max}} - \frac{\partial C_2}{\partial r_{\max}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \frac{-\partial C_2}{\partial r_{\max}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(S_0 N'(d_1^1) \frac{\partial d_1^1}{\partial r_{\max}} - e^{-r\tau} (N(d_2^2) + E_2 N'(d_2^2) \frac{\partial d_2^2}{\partial r_{\max}}) \right)\end{aligned}$$

We weten dat $\frac{\partial d_1^1}{\partial r_{\max}} = \frac{\partial d_2^2}{\partial r_{\max}}$ en uit [1]⁹ $S_0 N'(d_1^1) - e^{-r\tau} E_2 N'(d_2^2) = 0$ dus

$$\frac{\partial \text{Port}}{\partial r_{\max}} = \frac{1}{S_0} e^{-r\tau} N(d_2^2)$$

$\frac{\partial \text{Port}}{\partial r_{\max}}$ is altijd positief en dus geldt ook dat $\frac{\partial \text{Port}}{\partial r_{\max}} > 0$. Het product wordt dus duurder als r_{\max} omhoog gaat.

4.3.4 Welk effect heeft S op de prijs van ons product?

We maken bij het effect van S onderscheid tussen twee gevallen. In het eerste geval dat S verandert voordat we onze portefeuille kopen. Op dit moment noemen we S dus S_0 . In dit geval verandert de uitoefenprijs ook mee. Het tweede geval is dat S verandert nadat we onze portefeuille hebben gekocht. Hierbij verandert de uitoefenprijs niet meer mee.

Verandering van S_0

We vinden dat de beginprijs S_0 geen effect heeft op het afkopen van het risico voor 1 euro. We hebben immers:

$$\frac{\partial \text{Port}}{\partial S_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_0} \left(\frac{C_1 - C_2}{S_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_0} (N(d_1^1) - e^{-r\tau} N(d_2^2) - N(d_1^2) + e^{-r\tau} (1 + r_{\max}) N(d_2^2))$$

⁹[1] pag. 100 formule (10.1)

Differentiëren we nu naar S_0 vinden we

$$\frac{\partial \text{Port}}{\partial S_0} = 0$$

omdat er in de laatste term geen S_0 meer staat. We concluderen dus dat een verandering van S_0 geen effect heeft op de portefeuille.

Verandering van S nadat we onze portefeuille gekocht hebben

Logischerwijs zal het product duurder worden als de AEX-index (S) stijgt. We weten uit [1]¹⁰ dat

$$\frac{\partial \text{Port}}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{C_1}{\partial S} - \frac{C_2}{\partial S} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} (N(d_1^1) - N(d_1^2))$$

We weten dat $N(d_1^1) > N(d_1^2)$ dus zal de waarde van ons product stijgen als S stijgt. We bekijken nu meteen de limieten $\lim_{S \rightarrow \infty}$ en $\lim_{S \rightarrow 0}$. Voor onze portefeuille geldt

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} \text{Port} &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{C_1(S, t) - C_2(S, t)}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{S(N(d_1^1) - N(d_1^2)) - e^{-r\tau}(E_1 N(d_2^1) - E_2 N(d_2^2))}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{S(N(d_1^1) - N(d_1^2)) - e^{-r\tau} E_1 (N(d_2^1) - (1 + r_{\max}) N(d_2^2))}{S_0} \\ &= \frac{1}{2} e^{-r\tau} r_{\max} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0} \text{Port} &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{C_1(S, t) - C_2(S, t)}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{S(N(d_1^1) - N(d_1^2)) - e^{-r\tau}(E_1 N(d_2^1) - E_2 N(d_2^2))}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{S(N(d_1^1) - N(d_1^2)) - e^{-r\tau} E_1 (N(d_2^1) - (1 + r_{\max}) N(d_2^2))}{S_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

We concluderen nu dus dat onze portefeuille nooit meer waard wordt dan r_{\max} . We hoeven dus niet te verwachten dat we onze portefeuille ooit eerder kunnen verkopen en dan altijd kunnen voldoen aan onze verplichtingen.

4.4 Hoe bepalen we de parameters?

Voor het prijzen van een optie moeten we een aantal parameters bepalen. Ter herhaling, we hebben

¹⁰[1] pag. 100 formule (10.2)

Parameter	Waarde
S	De koers van de onderliggende waarde
E	De uitoefenprijs van de optie
σ	De volatiliteit van de onderliggende waarde
r	De rente die de bank moet betalen om geld te lenen
τ	De tijd tot het aflopen van de optie

4.4.1 Welke parameters staan er vast?

Bij het berekenen van de prijs van ons product zijn er een aantal parameters die al vast staan. We weten de beginprijs S_0 , dit is de stand van de AEX op dat moment. De uitoefenprijs van de eerste call is gelijk aan S_0 . De uitoefenprijs van de tweede call is gelijk aan de $S_0(1 + r_{\max})$. Deze hangen alle alleen af van S_0 , de stand van de AEX op het moment van kopen van de calls.

4.4.2 Welke waarde voor σ kiezen we?

Een van de parameters die we moeten kiezen is σ . Dit is de volatility (volatiliteit) van in dit geval de AEX-index. We kunnen σ niet meteen aflezen uit de markt. We zullen deze moeten berekenen. We maken onderscheid tussen Implied Volatility (uit de markt afgelezen van een optie), en Historical Volatility (gebaseerd op de logreturns van de AEX-index over een aantal dagen).

Omdat we uiteindelijk iets willen zeggen over de portefeuilles in het verleden, en we geen historische waarden van verlopen opties kunnen achterhalen via internet, zullen we gebruik maken van historische volatiliteit. Dit kan onder andere gedaan worden door te kijken naar de variantie van de logreturns over een bepaald aantal handelsdagen. Ook kunnen we een GARCH(1,1) fitten dat de volatiliteit bepaalt aan de hand van de volatiliteit op de vorige dag en de logreturn van de vorige dag.

Variantie van de logreturns

Het is bij de variantie van de logreturns de vraag welke periode zeggend wordt geacht voor de huidige volatiliteit. We kunnen de variantie bepalen over de afgelopen maand, en daarmee zeggen we dus eigenlijk dat de volatiliteit alleen afhangt van de handelsdagen afgelopen maand, en deze allemaal van gelijke invloed zijn geweest op de volatiliteit. Hetzelfde kunnen we doen voor de variantie van de logreturns over de afgelopen 2, 3, 6 of 12 maanden. Als $R_i = \log(\frac{r_i}{r_{i-1}})$ en n het aantal handelsdagen waarover we de variantie willen bepalen, dan vinden we:

$$\sigma = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n})^2$$

Het nadeel van het benaderen van de volatiliteit op deze manier is dat het intuïtief niet logisch is dat de volatiliteit op dit moment evenredig afhangt van een bepaalde hoeveelheid data uit het verleden. Bepaalde ontwikkelingen in het heden kunnen de volatiliteit bijvoorbeeld hard omhoog doen schieten, maar een variantie bepaald over 1 jaar zal dit effect slechts meenemen als een van de vele logreturns. We kunnen daarom kijken naar een ander model om de volatilititeiten te schatten.

GARCH(1,1)

In [3]¹¹ vinden we dat het GARCH(1,1) model zegt dat de volatiliteiten als volgt samenhangen:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

De volatiliteit vandaag, hangt dus af van een bepaalde constante ω , de met α gewogen gekwadraterde logreturn van gisteren, en de met β gewogen volatiliteit van gisteren. Om waarden te schatten voor ω , α en β , gebruiken we wederom het programma R. We zoeken fitted ons GARCH(1,1) model op de afgelopen 5 jaar. We vinden dan de volgende waarden:

```
      omega      alpha1      beta1
3.530592e-06 1.252304e-01 8.686948e-01
```

De waarde van de volatiliteit vandaag hangt dus voor ongeveer 12.52% af van de logreturn van gisteren, en voor 86.87% af van de volatiliteit van gisteren. Dan is er nog een zeer klein deel constant bij de bepaling (0.0000353). In de rest van het onderzoek zullen we de volatiliteiten zoals bepaald door het GARCH(1,1) model gebruiken. Deze achten we nauwkeuriger dan de variantie over een bepaalde periode. De gevonden volatiliteiten per maand staan in Bijlage 1.

4.4.3 Welke waarde voor r kiezen we?

r is de rente die de bank op jaarbasis moet betalen over het geleende geld aan een bepaalde instantie. We nemen in dit geval aan dat r gelijk aan de Euriborrente. Dit is de rente die de banken elkaar onderling rekenen.

4.4.4 Welke waarde voor τ kiezen we?

Aangezien AEX-Sparen een looptijd van een half jaar heeft, kiezen we voor $\tau = 0.5$. Dit betekent een half jaar. Voor de berekeningen dienen alle parameters uitgedrukt te zijn in dezelfde tijdseenheid, we kiezen dus voor tijdseenheid een jaar.

4.5 Hoeveel kostte het ABN AMRO?

Het verschil tussen beide callopties is de prijs van het AEX-Sparen product. Als we deze prijs delen door de waarde van de AEX op het startmoment, hebben we het percentage dat het de bank kost om zijn verplichtingen te hedgen. We hebben deze percentages vanaf de invoering voor iedere maand berekend. Deze staan in Bijlage 1. We zien dat ABN AMRO het duurste uit was als de maximale rente op 10% stond. Dit is logisch natuurlijk. De waarden die in de kolommen van Black-Scholes en de Binomiale boom staan zijn percentages van het ingelegde bedrag om het risico volledig af te kopen.

Ook staat er een kolom waar de waarden in staan voor het percentage om het risico af te kopen, bepaald door Monte Carlo methoden. Deze methode bleek echter zeer zwaar en niet zeer nauwkeurig, vandaar dat ik daar in het verslag geen paragraaf aan besteed, maar het is wel voorbij gekomen.

¹¹[3] pag. 465 formule (19.19)

Hoofdstuk 5

De klant

Zoals in het voorwoord genoemd werd, kreeg ik tijdens mijn project veel vragen over de positie van de klant. Is het nu verstandig als klant om over te stappen naar een AEX-Sparen rekening? Om dit te bekijken heb ik gekeken naar de kans dat de rente bij AEX-Sparen meer is dan die op een gewone spaarrekening, en naar de verwachte rente.

5.1 Wat is de kans dat AEX-Sparen meer rente oplevert dan een spaarrekening?

We willen graag weten wat nu eigenlijk de kans is voor een klant dat deze door AEX-Sparen meer rente ontvangt dan dat zij zou ontvangen op een gewone spaarrekening. We gaan daarom op zoek naar de volgende kans:

$$\mathbb{P}\left(\frac{C_1(S, T) - C_2(S, T)}{2S_0} > \frac{r_s}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\max(S(T) - E_1, 0) - \max(S(T) - E_2, 0)}{S_0} > r_s\right)$$

Hier is r_s de rente van een spaarrekening. We hebben al eerder aangenomen dat de ontwikkeling van de AEX-index een geometrisch Brownse beweging is. We kunnen daarom $S(T)$ als volgt uitdrukken:

$$S(T) = S_0 \exp^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} \quad \text{met } \xi \sim N(0,1)$$

We zullen aannemen dat over een lange periode $\mu = r$, waar r de marktrente is. We kunnen deze kans op meer rente dan de spaarrekening omschrijven naar:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{C_1(S, T) - C_2(S, T)}{S_0} > r_s\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\max(S(T) - E_1, 0) - \max(S(T) - E_2, 0)}{S_0} > r_s\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\max(S_0 \exp^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - E_1, 0)}{S_0} - \frac{\max(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - E_2, 0)}{S_0} > r_s\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\max(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - 1, 0) - \max(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - (1 + r_{\max}), 0) > r_s\right) \end{aligned}$$

Omdat we aannemen dat ABN AMRO altijd een maximale rente, die hoger is dan de spaarrente, aanbiedt gaan er nu van uit dat $r_{\max} > r_s$. Schrijven we nu $s = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi}$, zien we dat

$$\max(s - 1, 0) - \max(s - (1 + r_{\max}), 0) = \begin{cases} 0 & \text{als } s \leq 1; \\ s - 1 & \text{als } 1 < s < 1 + r_{\max}; \\ r_{\max} & \text{als } s > 1 + r_{\max}. \end{cases}$$

We noemen A de event $(\max(\frac{S(T)}{S_0} - 1, 0) - \max(\frac{S(T)}{S_0} - (1 + r_{\max}), 0)) > r_s$. Voor de kans betekent dit dus dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{C_1(S, T) - C_2(S, T)}{S_0} > r_s\right) &= P\left(A, \frac{S(T)}{S_0} \leq 1\right) + P\left(A, 1 < \frac{S(T)}{S_0} \leq 1 + r_{\max}\right) \\ &\quad + P\left(A, \frac{S(T)}{S_0} > 1 + r_{\max}\right) \\ &= 0 + P\left(A, 1 < \frac{S(T)}{S_0} \leq 1 + r_{\max}\right) + P\left(\frac{S(T)}{S_0} > 1 + r_{\max}\right) \\ &= P\left(1 + r_s < \frac{S(T)}{S_0} \leq 1 + r_{\max}\right) + P\left(\frac{S(T)}{S_0} > 1 + r_{\max}\right) \\ &= \mathbb{P}(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} > 1 + r_s) \\ &= \mathbb{P}\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi > \ln(1 + r_s)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\xi > \frac{\ln(1 + r_s) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= 1 - N\left(\frac{\ln(1 + r_s) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

waar $N(\cdot)$ weer de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling is. De kans per maand dat de rente uit AEX-Sparen meer is dan de spaarrente staat in Bijlage 6. Hierbij is gebruik gemaakt van de spaarrentes van Internet Kwartaal sparen van ABN AMRO. We zien dat de maximale kans over de afgelopen 6 jaar nog geen 44% is.

5.2 Wat is de verwachte rente die een klant ontvangt?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{C_1(S, T) - C_2(S, T)}{2S_0}\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\frac{\max(S(T) - E_1, 0)}{S_0} - \frac{\max(S(T) - E_2, 0)}{S_0}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\max\left(\frac{S(T)}{S_0} - 1, 0\right) - \max\left(\frac{S(T)}{S_0} - (1 + r_{\max}), 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{S(T)}{S_0} - 1\right)\mathbf{1}_{\{\frac{S(T)}{S_0} > 1\}} - \left(\frac{S(T)}{S_0} - (1 + r_{\max})\right)\mathbf{1}_{\{\frac{S(T)}{S_0} > 1 + r_{\max}\}}\right] \end{aligned}$$

Aangezien $\frac{S(T)}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi}$, waar wederom $\xi \sim N(0, 1)$, geldt

$$\begin{aligned} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} > 1 + r_{\max} &\Leftrightarrow (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi > \ln(1 + r_{\max}) \\ &\Leftrightarrow \xi > \frac{\ln(1 + r_{\max}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Vullen we hier $r_{\max} = 0$ in hebben we het geval voor de eerste optie. We definiëren nu $a_1 = \frac{-(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ en $a_2 = \frac{\ln(1+r_{\max}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$. We vinden dan verder

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{C_1(S, T) - C_2(S, T)}{2S_0}\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - 1\right)\mathbf{1}_{\{\xi > a_1\}} - \left(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - (1 + r_{\max})\right)\mathbf{1}_{\{\xi > a_2\}}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_1}^{\infty}\left(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x - \frac{1}{2}x^2} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_2}^{\infty}\left(e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x - \frac{1}{2}x^2} - (1 + r_{\max})e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_1}^{a_2}e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x - \frac{1}{2}x^2}dx \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_1}^{a_2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{r_{\max}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx
\end{aligned}$$

neem $x = u + \sigma\sqrt{T}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_1 - \sigma\sqrt{T}}^{a_2 - \sigma\sqrt{T}}e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}u + \sigma^2T - \frac{1}{2}(u^2 + 2\sigma\sqrt{T}u + \sigma^2T)}du \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_1}^{a_2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{r_{\max}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{a_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}e^{\mu T}\int_{a_1 - \sigma\sqrt{T}}^{a_2 - \sigma\sqrt{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du - \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&\quad + \frac{r_{\max}}{2}\int_{a_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}e^{\mu T}\left(N(a_2 - \sigma\sqrt{T}) - N(a_1 - \sigma\sqrt{T})\right) - \frac{1}{2}(N(a_2) - N(a_1)) \\
&\quad + \frac{r_{\max}}{2}(1 - N(a_2))
\end{aligned}$$

We zien dat deze verwachte rente hetzelfde is als het percentage dat ABN AMRO betaalt om haar risico af te kopen. Dit is natuurlijk best logisch, mocht hier namelijk iets anders uit komen zouden we arbitrage hebben gevonden.

Hoofdstuk 6

Varianten

6.1 Negatief AEX-Sparen

Een alternatief product kan gecreëerd worden door in te spelen op een verlies van de AEX-index. Hiervoor is op eenzelfde manier het risico af te kopen met behulp van twee putopties met verschillende uitoefenprijzen. De uitbetalingsfunctie zou er als volgt uitzien als r het rendement van de AEX-index is over een half jaar:

$$\text{rente}(r) = \begin{cases} 0 & \text{als } r > 0; \\ \frac{r}{2} & \text{als } -r_{\max} \leq r \leq 0; \\ \frac{r_{\max}}{2} & \text{als } r < -r_{\max}. \end{cases}$$

Het afkopen van het risico gaat op eenzelfde manier. In dit geval gebruiken we echter putopties in plaats van callopties. Willen we uitkomen op de betalingsfunctie zoals boven gegeven zullen we weer een optie kopen en een verkopen. Onze portefeuille zal er nu als volgt uitzien:

$$\text{Port}_{\text{neg}}(S, t) = \frac{P_1(S, t) - P_2(S, t)}{S_0}$$

Hier heeft P_1 een uitoefenprijs gelijk aan S_0 , en P_2 een uitoefenprijs gelijk aan $(1 - r_{\max})S_0$.

6.1.1 Grieken

We bekijken kort wat de effecten zijn van de verschillende parameters op de prijs van het product Negatief AEX-Sparen. Om te onderzoeken wat het effect van onze parameters op een putoptie is, gebruiken we de put-call-pariteit¹

$$C(S, t) + Ee^{-r\tau} = P(S, t) + S$$

De afleidingen kunnen in de bijlagen gevonden worden.

Het effect van σ op Negatief AEX-Sparen

We vinden dat het effect van σ omgedraaid is voor een portefeuille bestaande uit twee putopties: $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial \sigma} > 0$

Het effect van r op Negatief AEX-Sparen

Ook het effect van r is omgedraaid, en dus $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial r} < 0$

¹[1] pag. 81 formule (8.23)

Het effect van r_{\max} op Negatief AEX-Sparen

Het effect van r_{\max} blijft hetzelfde. Het product Negatief AEX-Sparen wordt dus duurder als r_{\max} omhoog gaat.

Het effect van S op Negatief AEX-Sparen

Weer zien we dat aan het begin S_0 wordt weggedeeld in de portefeuille, dus hebben we

$$\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial S_0} = 0$$

We weten dat als S stijgt dat onze portefeuille dan moet dalen. We laten dit als volgt zien:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \text{Port}_{\text{neg}} = \frac{1}{2} e^{-r\tau} r_{\max}$$

6.1.2 Prijs van het product

In Bijlage 2 staan de prijzen zoals Negatief AEX-Sparen had gekost van 2006 tot 2011. Om dit te vergelijken met de kosten voor AEX-Sparen, staat in Bijlage 3 een grafiek van de prijs van AEX-Sparen tegenover Negatief AEX-Sparen. Door de vele wisselingen van r_{\max} is het lastig deze twee producten te vergelijken vanuit deze grafiek. In het tweede deel van Bijlage 3 is een grafiek te vinden waar r_{\max} constant gelijk aan 0.07 is.

We zien nu dat de prijs het product Negatief AEX-Sparen erg hard op en neer schommelt, waar de prijs van AEX-Sparen redelijk constant is. Dit komt omdat we zien dat de Grieken $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial \sigma}$ en $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial r}$ van teken zijn veranderd ten opzichte van dezelfde Grieken voor het product AEX-Sparen. Aangezien de volatiliteit een stuk sneller verandert dan de rente die de banken elkaar onderling rekenen, schommelt dus ook de prijs van Negatief AEX-Sparen harder dan de prijs van AEX-Sparen.

6.2 Hogere minimum rente

AEX-Sparen zou wellicht nog aantrekkelijker worden voor klanten als ze een hogere minimum-rente tegemoet zouden kunnen zien. Zonder enig verlies van risico zou ABN AMRO een minimum rente van 1% op jaarbasis kunnen verstrekken, maar dan daalt de maximumrente ook mee. In Bijlage 5 staan de nieuwe maximale rentes bij een minimale rente van 1%. Deze nieuwe maximale rente is zo berekend dat ABN AMRO nog steeds evenveel zou betalen als voor normaal AEX-Sparen. De twee producten zullen dus voor de bank even duur zijn, alleen kan de klant kiezen voor een minimale rente van 0% of 1% op jaarbasis. We zien dat de maximale rente, voor hetzelfde uitgegeven bedrag door de bank, dan met zo'n 2% afneemt. Het blijft echter een leuk alternatief.

Hoofdstuk 7

Conclusie

7.1 Is AEX-Sparen een goed product voor ABN AMRO?

7.1.1 De kosten voor ABN AMRO

Wat kunnen we nu aan het einde zeggen over AEX-Sparen vanuit het oogpunt van de bank?

Duidelijk uit de resultaten is dat als het de bank te duur wordt haar verplichtingen af te kopen ze de maximale rente omlaag kunnen doen. Op deze manier zal AEX-Sparen altijd een goedkoper product kunnen zijn dan een gewone spaarrekening voor ABN AMRO. De maximale rente moet echter wel hoog genoeg blijven, anders is het niet aantrekkelijk voor klanten om te sparen via AEX-Sparen.

ABN AMRO kan anticiperen op welke prijs het product zal hebben door de rente en de volatiliteit van de AEX-index goed te monitoren. Wat dit betreft is het een goed product voor ABN AMRO, ze kunnen de prijs naar beneden doen door de maximale rente te verlagen. Op deze manier kan de spaarrekening een alternatief zijn voor spaarders die meer rente willen en daarvoor enig risico durven te nemen. ABN AMRO zal daarentegen minder betalen dan dat zij zouden moeten over een normale spaarrekening.

7.1.2 Mogelijke varianten

Om de beleggingsfactor nog meer in dit sparen te krijgen kan ervoor worden gekozen om ook Negatief AEX-Sparen aan te bieden. Een nadeel van dit product is dat de prijs een stuk harder schommelt door de tijd heen. Negatief AEX-Sparen is een duurder product op het moment dat de volatiliteit erg hoog is. Wel is de prijs ook een stuk lager als de volatiliteit juist laag is. Voor ABN AMRO kan het dus een mooi alternatief zijn als er vanuit wordt gegaan dat de volatiliteit over een lange periode niet heel vaak heel hoog is. Een voordeel van Negatief AEX-Sparen is dat het aantrekkelijk kan zijn voor mensen die graag een hogere rente willen krijgen, maar denken dat de AEX-index juist gaat dalen over het komende half jaar.

Er kan een minimumrente van 1% worden aangeboden. Dit trekt de maximale rente behoorlijk omlaag, maar dan is de klant niet alleen verzekerd van zijn inleg, maar krijgt deze zelfs hoe dan ook 1% op jaarbasis rente aangeboden.

7.2 Is AEX-Sparen een goed product voor de klant?

Zoals ik al in de inleiding vertelde kreeg ik van medestudenten en andere mensen om me heen veel vragen over de situatie van de klant. Hoewel het idee was om AEX-Sparen vanuit de bank te onderzoeken, heb ik hier ook even aandacht aan besteed.

We hebben gezien dat de kans dat de uitbetaling meer was dan bij een spaarrente, altijd minder dan 44% is. Natuurlijk zegt een kans dan niet alles, we zien immers dat vanaf 2010 er een aantal maanden waren waarin de verwachte rente uit het product AEX-Sparen hoger was dan de rente op de spaarrekening. Dit houdt echter ook in dat de bank duurder uit is dan het betalen van rente en dat neemt voor de bank een stukje aantrekkelijkheid weg. Waarschijnlijk heeft ABN AMRO daarom de rente naar 5% bijgebracht in deze laatste maanden. De klant zijn of haar geld dus beter op een Internet Kwartaal spaarrekening kunnen zetten.

Tot slot beschouw ik nog even kort hoeveel rente een klant zou hebben ontvangen als een klant zijn geld op een AEX-spaarrekening zou hebben gestort. Er waren wat dat betreft 6 verschillende instapmomenten, namelijk de eerste januari, februari, maart, april, mei en juni. Vanaf daar kunnen we stellen dat AEX-Sparen een halfjaarlijks uitkerende variabele spaarrekening is. Ik heb gekeken naar de periode begin 2006 tot juni 2011, een periode van 5.5 jaar.

Instapmaand	Totaal ontvangen rente	Gemiddeld per jaar
Januari, Juli	14.50%	2.64%
Februari, Augustus	17.23%	3.13%
Maart, September	16.87%	3.07%
April, Oktober	14.69%	2.67%
Mei, November	16.69%	3.03%
Juni, December	18.75%	3.41%

Daar tegenover staat een rente van 19.36% als de klant aan het begin van 2006 haar geld op een Internet Kwartaal spaarrekening had gezet. Vanzelfsprekend geldt er dat in het verleden behaalde resultaten geen garantie voor de toekomst bieden. Toch laat dit wederom kort zien dat de klant beter zijn of haar geld op een normale spaarrekening had kunnen zetten.

Hoofdstuk 8

Bijlagen

8.1 Hoeveel kostte het ABN AMRO om haar verplichtingen af te kopen?

Datum	rmax	AEX	sigma	B-S	Binom	MC
1.2006	7.0000	440.5200	0.1076	1.3485	1.3476	1.3411
2.2006	10.0000	455.7000	0.1001	1.7874	1.7882	1.7828
3.2006	7.0000	461.7000	0.1057	1.3969	1.3964	1.3954
4.2006	7.0000	471.3300	0.1086	1.3666	1.3668	1.3768
5.2006	7.0000	470.1300	0.1009	1.3916	1.3924	1.4204
6.2006	10.0000	441.5800	0.1581	1.9297	1.9269	1.9236
7.2006	10.0000	443.4700	0.1956	1.9050	1.9074	1.9309
8.2006	6.5000	449.4600	0.2085	1.3700	1.3709	1.3790
9.2006	6.5000	470.9300	0.1639	1.3252	1.3262	1.3178
10.2006	6.5000	482.9000	0.1280	1.3522	1.3526	1.3443
11.2006	7.0000	486.0500	0.0910	1.3908	1.3916	1.3812
12.2006	7.0000	473.3200	0.0986	1.4404	1.4405	1.4281
1.2007	7.0000	501.0000	0.0944	1.4516	1.4521	1.4713
2.2007	7.0000	505.5900	0.1049	1.4474	1.4475	1.4299
3.2007	10.0000	481.9600	0.1180	1.9348	1.9378	1.9386
4.2007	7.0000	512.0200	0.1451	1.4806	1.4779	1.4854
5.2007	7.0000	532.2300	0.1463	1.4563	1.4557	1.4553
6.2007	7.0000	543.9300	0.1319	1.4618	1.4605	1.4801
7.2007	7.0000	549.8400	0.1047	1.4711	1.4705	1.4563
8.2007	7.0000	524.4500	0.1274	1.4999	1.5007	1.5112
9.2007	6.0000	525.3600	0.1938	1.3323	1.3350	1.3346
10.2007	6.0000	545.5700	0.2110	1.3404	1.3401	1.3493
11.2007	6.5000	540.9200	0.1991	1.4204	1.4215	1.4114
12.2007	7.0000	502.8800	0.1611	1.5148	1.5160	1.5009
1.2008	7.0000	509.7700	0.1517	1.5049	1.5050	1.5001
2.2008	6.5000	451.6100	0.2658	1.3679	1.3714	1.3690
3.2008	7.0000	441.4800	0.2929	1.4966	1.4957	1.4944
4.2008	7.0000	453.6200	0.3166	1.5060	1.5064	1.5101
5.2008	7.0000	481.2100	0.2407	1.5192	1.5203	1.5311
6.2008	7.0000	479.1500	0.1966	1.5207	1.5226	1.5441
7.2008	7.0000	414.5200	0.1804	1.5200	1.5216	1.5489

8.2008	7.0000	394.5300	0.2114	1.5238	1.5242	1.5241
9.2008	7.0000	412.0900	0.2270	1.5313	1.5316	1.5385
10.2008	7.0000	334.2400	0.3734	1.3836	1.3891	1.3846
11.2008	7.0000	273.0100	0.6095	1.3436	1.3338	1.3610
12.2008	7.0000	235.5000	0.7033	1.3473	1.3373	1.3564
1.2009	7.0000	258.2300	0.6810	1.4357	1.4320	1.4157
2.2009	7.0000	245.9600	0.4963	1.4300	1.4260	1.4360
3.2009	7.0000	208.8400	0.4067	1.4183	1.4146	1.4163
4.2009	7.0000	220.7000	0.3875	1.4172	1.4130	1.4304
5.2009	7.0000	251.4700	0.3768	1.4207	1.4170	1.4142
6.2009	7.0000	268.4200	0.3517	1.4171	1.4218	1.4447
7.2009	7.0000	260.2900	0.2714	1.4089	1.4107	1.3968
8.2009	7.0000	287.4900	0.2488	1.3931	1.3934	1.3936
9.2009	7.0000	291.0000	0.2320	1.3775	1.3798	1.3606
10.2009	7.0000	305.7400	0.1913	1.3600	1.3607	1.3741
11.2009	7.0000	302.8200	0.2012	1.3987	1.3991	1.4017
12.2009	7.0000	315.4400	0.2220	1.4078	1.4105	1.4254
1.2010	7.0000	343.0300	0.2146	1.3581	1.3587	1.3644
2.2010	7.0000	331.3100	0.1837	1.3230	1.3243	1.3185
3.2010	7.0000	324.3700	0.1711	1.3699	1.3735	1.3781
4.2010	6.0000	351.4400	0.1588	1.1878	1.1895	1.1672
5.2010	6.0000	346.9400	0.1704	1.2000	1.2000	1.1796
6.2010	6.0000	321.2100	0.2639	1.2319	1.2297	1.2427
7.2010	5.0000	307.8700	0.2842	1.0497	1.0510	1.0601
8.2010	5.0000	339.6600	0.2913	1.0507	1.0511	1.0281
9.2010	5.0000	325.5200	0.2184	1.0485	1.0486	1.0398
10.2010	5.0000	333.7800	0.1791	1.0134	1.0124	1.0185
11.2010	5.0000	339.3500	0.1488	0.9964	0.9965	0.9798
12.2010	5.0000	335.8000	0.1441	1.0522	1.0524	1.0509
1.2011	6.0000	359.8600	0.1349	1.1595	1.1592	1.1781
2.2011	6.0000	367.1100	0.1389	1.1980	1.1977	1.1927
3.2011	6.0000	367.9500	0.1023	1.1484	1.1492	1.1695
4.2011	6.0000	369.4500	0.1309	1.1994	1.2002	1.1840
5.2011	6.0000	361.5600	0.1310	1.1835	1.1836	1.1564
6.2011	6.0000	345.9500	0.1389	1.1946	1.1948	1.1885
7.2011	6.0000	342.8200	0.1345	1.2220	1.2205	1.2266
8.2011	6.0000	324.5900	0.1474	1.2267	1.2246	1.2332
9.2011	5.0000	293.9600	0.2470	1.0618	1.0657	1.0594
10.2011	5.0000	275.6400	0.3191	1.0536	1.0523	1.0330
11.2011	5.0000	296.1900	0.3434	1.0563	1.0565	1.0457
12.2011	5.0000	301.8000	0.3174	1.0544	1.0541	1.0728

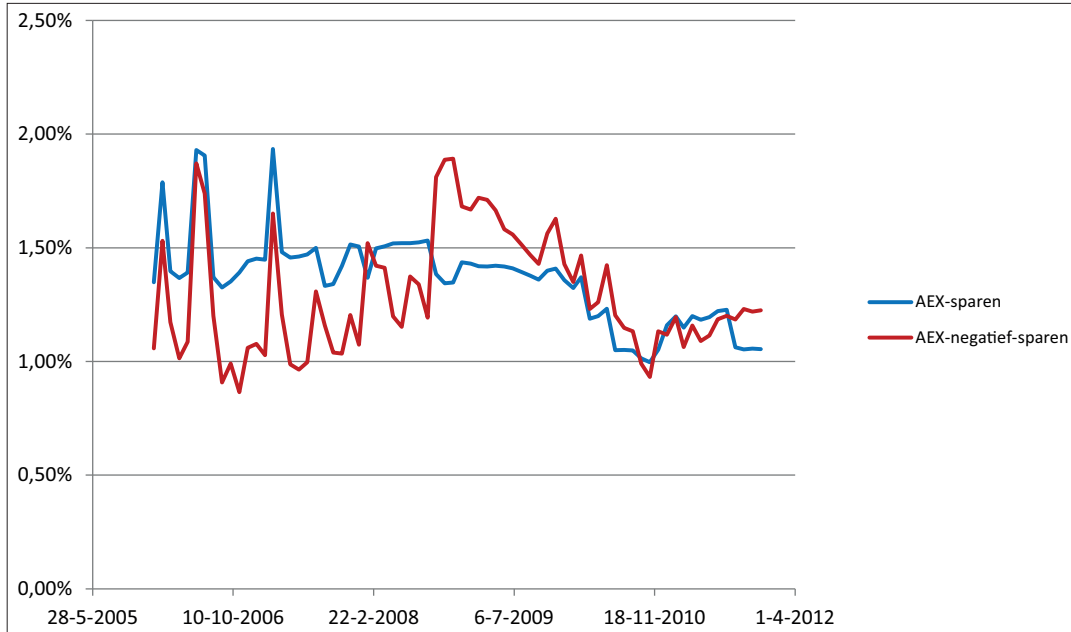
8.2 Hoeveel zou Negatief AEX-Sparen kosten?

Datum	rmax	AEX	sigma	B-S	Binom	MC
1.2006	7.0000	440.5200	0.1076	0.9649	1.0179	0.9559
2.2006	10.0000	455.7000	0.1001	1.0280	1.0887	1.0425
3.2006	7.0000	461.7000	0.1057	0.9407	0.9976	0.9506
4.2006	7.0000	471.3300	0.1086	0.9447	1.0063	0.9340
5.2006	7.0000	470.1300	0.1009	0.8876	0.9516	0.8775
6.2006	10.0000	441.5800	0.1581	1.4717	1.5320	1.4641
7.2006	10.0000	443.4700	0.1956	1.6734	1.7316	1.6632
8.2006	6.5000	449.4600	0.2085	1.2673	1.3129	1.2583
9.2006	6.5000	470.9300	0.1639	1.1328	1.1863	1.1463
10.2006	6.5000	482.9000	0.1280	0.9759	1.0437	0.9850
11.2006	7.0000	486.0500	0.0910	0.7565	0.8405	0.7686
12.2006	7.0000	473.3200	0.0986	0.8146	0.8971	0.8313
1.2007	7.0000	501.0000	0.0944	0.7724	0.8594	0.7733
2.2007	7.0000	505.5900	0.1049	0.8481	0.9334	0.8621
3.2007	10.0000	481.9600	0.1180	1.0887	1.1782	1.0780
4.2007	7.0000	512.0200	0.1451	1.0762	1.1508	1.0815
5.2007	7.0000	532.2300	0.1463	1.0764	1.1525	1.0624
6.2007	7.0000	543.9300	0.1319	0.9952	1.0785	0.9788
7.2007	7.0000	549.8400	0.1047	0.8176	0.9128	0.8242
8.2007	7.0000	524.4500	0.1274	0.9622	1.0499	0.9542
9.2007	6.0000	525.3600	0.1938	1.0903	1.1563	1.0860
10.2007	6.0000	545.5700	0.2110	1.1329	1.1976	1.1221
11.2007	6.5000	540.9200	0.1991	1.1813	1.2475	1.1925
12.2007	7.0000	502.8800	0.1611	1.1037	1.1899	1.1023
1.2008	7.0000	509.7700	0.1517	1.0665	1.1534	1.0763
2.2008	6.5000	451.6100	0.2658	1.3409	1.3910	1.3395
3.2008	7.0000	441.4800	0.2929	1.4752	1.5210	1.4781
4.2008	7.0000	453.6200	0.3166	1.5010	1.5510	1.5029
5.2008	7.0000	481.2100	0.2407	1.3486	1.4158	1.3381
6.2008	7.0000	479.1500	0.1966	1.2255	1.3016	1.2024
7.2008	7.0000	414.5200	0.1804	1.1589	1.2468	1.1428
8.2008	7.0000	394.5300	0.2114	1.2587	1.3352	1.2625
9.2008	7.0000	412.0900	0.2270	1.3013	1.3748	1.2932
10.2008	7.0000	334.2400	0.3734	1.5599	1.6125	1.5604
11.2008	7.0000	273.0100	0.6095	1.8131	1.8511	1.7922
12.2008	7.0000	235.5000	0.7033	1.9045	1.9211	1.8868
1.2009	7.0000	258.2300	0.6810	1.9104	1.9207	1.9318
2.2009	7.0000	245.9600	0.4963	1.7898	1.8042	1.7883
3.2009	7.0000	208.8400	0.4067	1.7137	1.7239	1.7093
4.2009	7.0000	220.7000	0.3875	1.7023	1.7100	1.6922
5.2009	7.0000	251.4700	0.3768	1.6944	1.7015	1.6837
6.2009	7.0000	268.4200	0.3517	1.6693	1.6805	1.6356
7.2009	7.0000	260.2900	0.2714	1.5670	1.5806	1.5809
8.2009	7.0000	287.4900	0.2488	1.5366	1.5474	1.5373
9.2009	7.0000	291.0000	0.2320	1.5083	1.5215	1.5187
10.2009	7.0000	305.7400	0.1913	1.4215	1.4347	1.4218

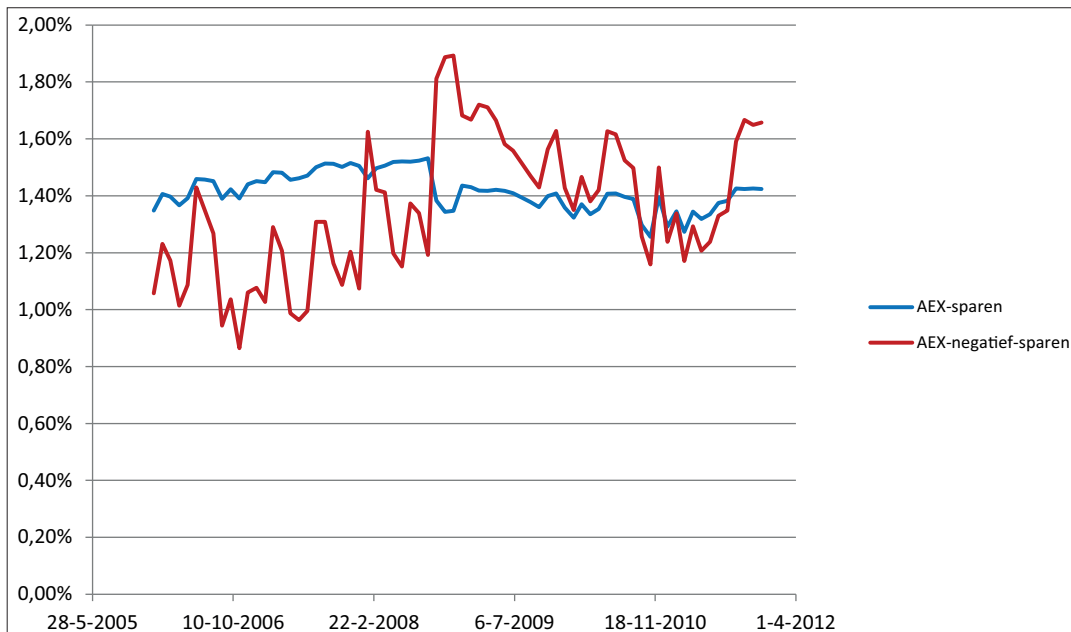
11.2009	7.0000	302.8200	0.2012	1.4465	1.4578	1.4434
12.2009	7.0000	315.4400	0.2220	1.4926	1.5043	1.4755
1.2010	7.0000	343.0300	0.2146	1.4771	1.4877	1.4760
2.2010	7.0000	331.3100	0.1837	1.4045	1.4155	1.4005
3.2010	7.0000	324.3700	0.1711	1.3692	1.3806	1.3696
4.2010	6.0000	351.4400	0.1588	1.1916	1.2014	1.1948
5.2010	6.0000	346.9400	0.1704	1.2194	1.2309	1.2423
6.2010	6.0000	321.2100	0.2639	1.3774	1.3850	1.3688
7.2010	5.0000	307.8700	0.2842	1.1916	1.1989	1.1822
8.2010	5.0000	339.6600	0.2913	1.1950	1.2021	1.2343
9.2010	5.0000	325.5200	0.2184	1.1208	1.1321	1.1198
10.2010	5.0000	333.7800	0.1791	1.0623	1.0740	1.0657
11.2010	5.0000	339.3500	0.1488	0.9999	1.0143	1.0157
12.2010	5.0000	335.8000	0.1441	0.9895	1.0039	0.9905
1.2011	6.0000	359.8600	0.1349	1.1037	1.1194	1.0980
2.2011	6.0000	367.1100	0.1389	1.1104	1.1276	1.1105
3.2011	6.0000	367.9500	0.1023	0.9531	0.9767	0.9515
4.2011	6.0000	369.4500	0.1309	1.0675	1.0915	1.0672
5.2011	6.0000	361.5600	0.1310	1.0605	1.0865	1.0675
6.2011	6.0000	345.9500	0.1389	1.0871	1.1118	1.0873
7.2011	6.0000	342.8200	0.1345	1.0656	1.0938	1.0742
8.2011	6.0000	324.5900	0.1474	1.1085	1.1341	1.1045
9.2011	5.0000	293.9600	0.2470	1.1325	1.1465	1.1395
10.2011	5.0000	275.6400	0.3191	1.2007	1.2109	1.2164
11.2011	5.0000	296.1900	0.3434	1.2193	1.2287	1.2379
12.2011	5.0000	301.8000	0.3174	1.2010	1.2108	1.1756

8.3 Kosten AEX-Sparen en Negatief AEX-Sparen in grafiek

Verticaal de percentages van de kosten om het risico af te dekken. De grafiek loopt van 2006 naar 2011 van links naar rechts over de x-as.



Als we nu de veranderingen van r_{\max} eruit halen, en deze gelijk stellen aan 0.07 dan kunnen we de verschillen beter bekijken. Deze grafiek staat hieronder ingevoegd:



8.4 Afleidingen Grieken Negatief AEX-Sparen

8.4.1 Het effect van σ op Negatief AEX-Sparen

We zien uit de put-call-pariteit dat $\frac{\partial \text{Put}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \text{Call}}{\partial \sigma}$. Echter is nu de uitoefenprijs van de tweede optie lager dan die van de eerste. We hebben hierdoor

$$\frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial P_2}{\partial \sigma} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(S\sqrt{T-t}N'(d_1^1) - S\sqrt{T-t}N'(d_1^2) \right) = \frac{1}{2} \sqrt{T-t} (N'(d_1^1) - N'(d_1^2))$$

We hebben nu dus twee Europese putopties P_1 en P_2 met uitoefenprijzen respectievelijk E_1 en E_2 . Nu geldt echter aarvoor geldt $E_1 > E_2$, en dus vinden we Waarvoor dan dus geldt dat $d_1^1 < d_1^2$ en daardoor

$$N'(d_1^1) > N'(d_1^2)$$

Al met al zien we dus dat het effect van σ omgedraaid is voor een putoptie: $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial \sigma} > 0$

8.4.2 Het effect van r op Negatief AEX-Sparen

Het effect van r op Negatief AEX-Sparen verandert op eenzelfde manier:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial P_1}{\partial r} - \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} (\tau E_1 e^{-r\tau} N(d_2^1) - \tau E_2 e^{-r\tau} N(d_2^2)) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial P_1}{\partial r} - \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) &= \frac{1}{2} \tau e^{-r\tau} (N(d_2^1) - (1 + r_{\max})N(d_2^2)) \end{aligned}$$

Waar P_1 en P_2 twee Europese putopties zijn met uitoefenprijzen respectievelijk E_1 en E_2 , waarvoor geldt $E_1 > E_2$.

Hier geldt nu dus dat $d_2^2 > d_2^1$. Hieruit concluderen we dan dat $N(d_2^2) > N(d_2^1)$, en dus $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial r} < 0$

8.4.3 Het effect van r_{\max} op Negatief AEX-Sparen

Een stijging van r_{\max} houdt weer in dat de waarde van de tweede optie vermindert. Het product zal dus duurder worden. Op eenzelfde manier als bij de callversie vinden we dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial r_{\max}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial P_1}{\partial r_{\max}} - \frac{\partial P_2}{\partial r_{\max}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \frac{-\partial P_2}{\partial r_{\max}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-r\tau} N(-d_2^2) \end{aligned}$$

en dus $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial r_{\max}} > 0$. Het product wordt dus duurder als r_{\max} omhoog gaat.

8.4.4 Het effect van S op Negatief AEX-Sparen

Verandering van S_0

Weer zien we dat aan het begin S_0 wordt weggedeeld in de portefeuille, dus hebben we

$$\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial S_0} = 0$$

We weten dat als S stijgt dat onze portefeuille dan moet dalen. We laten dit als volgt zien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial S} &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial P_1}{\partial S} - \frac{\partial P_2}{\partial S} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial C_1}{\partial S} - 1 \right) - \left(\frac{\partial C_2}{\partial S} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{S_0} (N(d_1^1) - N(d_1^2)) \end{aligned}$$

Aangezien $E_1 > E_2$ hebben we $N(d_1^1) < N(d_1^2)$. We zien dus dat $\frac{\partial \text{Port}_{\text{neg}}}{\partial S} < 0$ de waarde van onze portefeuille daalt dus als S stijgt. We kijken nu weer naar de boven- en ondergrens van onze portefeuille.

Verandering van S nadat we onze portefeuille gekocht hebben

We beschouwen nu de limieten weer $\lim_{S \rightarrow \infty}$ en $\lim_{S \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} \text{Port}_{\text{neg}} &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{P_1(S, t) - P_2(S, t)}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{E_1 e^{-r\tau} N(-d_2^1) - SN(-d_1^1) - (E_2 e^{-r\tau} N(-d_2^2) - SN(-d_1^2))}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{S(N(-d_1^2) - N(-d_1^1)) + E_1 e^{-r\tau} (N(-d_2^1) - (1 - r_{\max})N(-d_2^2))}{S_0} \\ &= \frac{1}{2} e^{-r\tau} r_{\max} \end{aligned}$$

Dit is logisch want beide opties worden waardeloos als de AEX-index erg stijgt.

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0} \text{Port}_{\text{neg}} &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{P_1(S, t) - P_2(S, t)}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{E_1 e^{-r\tau} N(-d_2^1) - SN(-d_1^1) - (E_2 e^{-r\tau} N(-d_2^2) - SN(-d_1^2))}{S_0} \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{S(N(-d_1^2) - N(-d_1^1)) + E_1 e^{-r\tau} (N(-d_2^1) - (1 - r_{\max})N(-d_2^2))}{S_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

8.5 Wat is de maximale rente als we een minimale rente van 1% aanbieden?

Datum	AEX	B-S	rmin=0	rmax	rmin=1	rmax
1.2006	440.5200	1.3485	0	7.0000	1.0000	4.7419
2.2006	455.7000	1.7874	0	10.0000	1.0000	7.2112
3.2006	461.7000	1.3969	0	7.0000	1.0000	4.9655
4.2006	471.3300	1.3666	0	7.0000	1.0000	4.7682
5.2006	470.1300	1.3916	0	7.0000	1.0000	4.8947
6.2006	441.5800	1.9297	0	10.0000	1.0000	7.8168
7.2006	443.4700	1.9050	0	10.0000	1.0000	7.6818
8.2006	449.4600	1.3700	0	6.5000	1.0000	4.7717
9.2006	470.9300	1.3252	0	6.5000	1.0000	4.4573
10.2006	482.9000	1.3522	0	6.5000	1.0000	4.5913
11.2006	486.0500	1.3908	0	7.0000	1.0000	4.7344
12.2006	473.3200	1.4404	0	7.0000	1.0000	5.0214
1.2007	501.0000	1.4516	0	7.0000	1.0000	5.0618
2.2007	505.5900	1.4474	0	7.0000	1.0000	5.0174
3.2007	481.9600	1.9348	0	10.0000	1.0000	7.7019
4.2007	512.0200	1.4806	0	7.0000	1.0000	5.2235
5.2007	532.2300	1.4563	0	7.0000	1.0000	5.0134
6.2007	543.9300	1.4618	0	7.0000	1.0000	5.0134
7.2007	549.8400	1.4711	0	7.0000	1.0000	5.0618
8.2007	524.4500	1.4999	0	7.0000	1.0000	5.3348
9.2007	525.3600	1.3323	0	6.0000	1.0000	4.5096
10.2007	545.5700	1.3404	0	6.0000	1.0000	4.4607
11.2007	540.9200	1.4204	0	6.5000	1.0000	4.8096
12.2007	502.8800	1.5148	0	7.0000	1.0000	5.3131
1.2008	509.7700	1.5049	0	7.0000	1.0000	5.2066
2.2008	451.6100	1.3679	0	6.5000	1.0000	4.9612
3.2008	441.4800	1.4966	0	7.0000	1.0000	5.3915
4.2008	453.6200	1.5060	0	7.0000	1.0000	5.4091
5.2008	481.2100	1.5192	0	7.0000	1.0000	5.3175
6.2008	479.1500	1.5207	0	7.0000	1.0000	5.2959
7.2008	414.5200	1.5200	0	7.0000	1.0000	5.4224
8.2008	394.5300	1.5238	0	7.0000	1.0000	5.4136
9.2008	412.0900	1.5313	0	7.0000	1.0000	5.3478
10.2008	334.2400	1.3836	0	7.0000	1.0000	5.3435
11.2008	273.0100	1.3436	0	7.0000	1.0000	5.2788
12.2008	235.5000	1.3473	0	7.0000	1.0000	5.2830
1.2009	258.2300	1.4357	0	7.0000	1.0000	5.3784
2.2009	245.9600	1.4300	0	7.0000	1.0000	5.3478
3.2009	208.8400	1.4183	0	7.0000	1.0000	5.3478
4.2009	220.7000	1.4172	0	7.0000	1.0000	5.3348
5.2009	251.4700	1.4207	0	7.0000	1.0000	5.3175
6.2009	268.4200	1.4171	0	7.0000	1.0000	5.2617
7.2009	260.2900	1.4089	0	7.0000	1.0000	5.2235
8.2009	287.4900	1.3931	0	7.0000	1.0000	5.1564

9.2009	291.0000	1.3775	0	7.0000	1.0000	5.0863
10.2009	305.7400	1.3600	0	7.0000	1.0000	5.0094
11.2009	302.8200	1.3987	0	7.0000	1.0000	5.1982
12.2009	315.4400	1.4078	0	7.0000	1.0000	5.2574
1.2010	343.0300	1.3581	0	7.0000	1.0000	5.0053
2.2010	331.3100	1.3230	0	7.0000	1.0000	4.8521
3.2010	324.3700	1.3699	0	7.0000	1.0000	5.0618
4.2010	351.4400	1.1878	0	6.0000	1.0000	4.1281
5.2010	346.9400	1.2000	0	6.0000	1.0000	4.1850
6.2010	321.2100	1.2319	0	6.0000	1.0000	4.3719
7.2010	307.8700	1.0497	0	5.0000	1.0000	3.4796
8.2010	339.6600	1.0507	0	5.0000	1.0000	3.4524
9.2010	325.5200	1.0485	0	5.0000	1.0000	3.4378
10.2010	333.7800	1.0134	0	5.0000	1.0000	3.2457
11.2010	339.3500	0.9964	0	5.0000	1.0000	3.1555
12.2010	335.8000	1.0522	0	5.0000	1.0000	3.4475
1.2011	359.8600	1.1595	0	6.0000	1.0000	3.9725
2.2011	367.1100	1.1980	0	6.0000	1.0000	4.1407
3.2011	367.9500	1.1484	0	6.0000	1.0000	3.9049
4.2011	369.4500	1.1994	0	6.0000	1.0000	4.1250
5.2011	361.5600	1.1835	0	6.0000	1.0000	4.0326
6.2011	345.9500	1.1946	0	6.0000	1.0000	4.0846
7.2011	342.8200	1.2220	0	6.0000	1.0000	4.2106
8.2011	324.5900	1.2267	0	6.0000	1.0000	4.2331
9.2011	293.9600	1.0618	0	5.0000	1.0000	3.5095
10.2011	275.6400	1.0536	0	5.0000	1.0000	3.5120
11.2011	296.1900	1.0563	0	5.0000	1.0000	3.5146
12.2011	301.8000	1.0544	0	5.0000	1.0000	3.5120

8.6 Kans op meer rente dan spaarrente

Datum	rmax	kans	verw. r	spaarr	kosten
1.2006	0.0700	0.3763	0.0273	0.0375	0.0270
2.2006	0.1000	0.3971	0.0362	0.0375	0.0357
3.2006	0.0700	0.3936	0.0283	0.0375	0.0279
4.2006	0.0700	0.3819	0.0277	0.0375	0.0273
5.2006	0.0700	0.3910	0.0283	0.0375	0.0278
6.2006	0.1000	0.4170	0.0392	0.0375	0.0386
7.2006	0.1000	0.4156	0.0387	0.0375	0.0381
8.2006	0.0650	0.4056	0.0279	0.0400	0.0274
9.2006	0.0650	0.3774	0.0270	0.0400	0.0265
10.2006	0.0650	0.3911	0.0275	0.0400	0.0270
11.2006	0.0700	0.3757	0.0283	0.0400	0.0278
12.2006	0.0700	0.3978	0.0294	0.0400	0.0288
1.2007	0.0700	0.4021	0.0296	0.0400	0.0290
2.2007	0.0700	0.3995	0.0295	0.0400	0.0289
3.2007	0.1000	0.4178	0.0395	0.0400	0.0387
4.2007	0.0700	0.4077	0.0302	0.0425	0.0296
5.2007	0.0700	0.3915	0.0297	0.0425	0.0291
6.2007	0.0700	0.3927	0.0299	0.0425	0.0292
7.2007	0.0700	0.3973	0.0301	0.0425	0.0294
8.2007	0.0700	0.4184	0.0307	0.0425	0.0300
9.2007	0.0600	0.4240	0.0273	0.0425	0.0266
10.2007	0.0600	0.4184	0.0275	0.0425	0.0268
11.2007	0.0650	0.4115	0.0291	0.0425	0.0284
12.2007	0.0700	0.4136	0.0310	0.0450	0.0303
1.2008	0.0700	0.4039	0.0308	0.0450	0.0301
2.2008	0.0650	0.4131	0.0280	0.0450	0.0274
3.2008	0.0700	0.4161	0.0306	0.0450	0.0299
4.2008	0.0700	0.4199	0.0308	0.0450	0.0301
5.2008	0.0700	0.4151	0.0311	0.0450	0.0304
6.2008	0.0700	0.4136	0.0312	0.0450	0.0304
7.2008	0.0700	0.4189	0.0312	0.0475	0.0304
8.2008	0.0700	0.4184	0.0313	0.0475	0.0305
9.2008	0.0700	0.4128	0.0314	0.0475	0.0306
10.2008	0.0700	0.3954	0.0284	0.0475	0.0277
11.2008	0.0700	0.3856	0.0275	0.0450	0.0269
12.2008	0.0700	0.3846	0.0275	0.0450	0.0269
1.2009	0.0700	0.4029	0.0291	0.0450	0.0287
2.2009	0.0700	0.4018	0.0289	0.0425	0.0286
3.2009	0.0700	0.3991	0.0286	0.0425	0.0284
4.2009	0.0700	0.3978	0.0286	0.0425	0.0283
5.2009	0.0700	0.4085	0.0286	0.0350	0.0284
6.2009	0.0700	0.4071	0.0285	0.0350	0.0283
7.2009	0.0700	0.4093	0.0284	0.0325	0.0282
8.2009	0.0700	0.4104	0.0280	0.0300	0.0279
9.2009	0.0700	0.4118	0.0277	0.0280	0.0276
10.2009	0.0700	0.4080	0.0273	0.0280	0.0272

11.2009	0.0700	0.4150	0.0281	0.0280	0.0280
12.2009	0.0700	0.4193	0.0283	0.0260	0.0282
1.2010	0.0700	0.4186	0.0273	0.0240	0.0272
2.2010	0.0700	0.4128	0.0266	0.0240	0.0265
3.2010	0.0700	0.4225	0.0275	0.0230	0.0274
4.2010	0.0600	0.4179	0.0239	0.0230	0.0238
5.2010	0.0600	0.4206	0.0241	0.0230	0.0240
6.2010	0.0600	0.4264	0.0248	0.0220	0.0246
7.2010	0.0500	0.4291	0.0211	0.0210	0.0210
8.2010	0.0500	0.4312	0.0211	0.0210	0.0210
9.2010	0.0500	0.4307	0.0211	0.0210	0.0210
10.2010	0.0500	0.4216	0.0204	0.0210	0.0203
11.2010	0.0500	0.4169	0.0201	0.0210	0.0199
12.2010	0.0500	0.4324	0.0212	0.0210	0.0210
1.2011	0.0600	0.4213	0.0233	0.0210	0.0232
2.2011	0.0600	0.4293	0.0241	0.0210	0.0240
3.2011	0.0600	0.4208	0.0231	0.0210	0.0230
4.2011	0.0600	0.4318	0.0242	0.0210	0.0240
5.2011	0.0600	0.4305	0.0239	0.0210	0.0237
6.2011	0.0600	0.4327	0.0241	0.0210	0.0239
7.2011	0.0600	0.4376	0.0247	0.0210	0.0244
8.2011	0.0600	0.4353	0.0248	0.0220	0.0245
9.2011	0.0500	0.4336	0.0214	0.0220	0.0212
10.2011	0.0500	0.4294	0.0213	0.0220	0.0211
11.2011	0.0500	0.4307	0.0213	0.0220	0.0211
12.2011	0.0500	0.4282	0.0213	0.0230	0.0211

Bibliografie

- [1] Desmond J. Higham *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] Steven. E. Shreve *Stochastic Calculus for Finance I*, Springer-Verlag New York Inc., 2004.
- [3] John. C. Hull *Options, Futures and Other Derivatives (6th Edition)*, Prentice Hall PTR, 2005.
- [4] Ruey. S. Tsay *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., 2002.