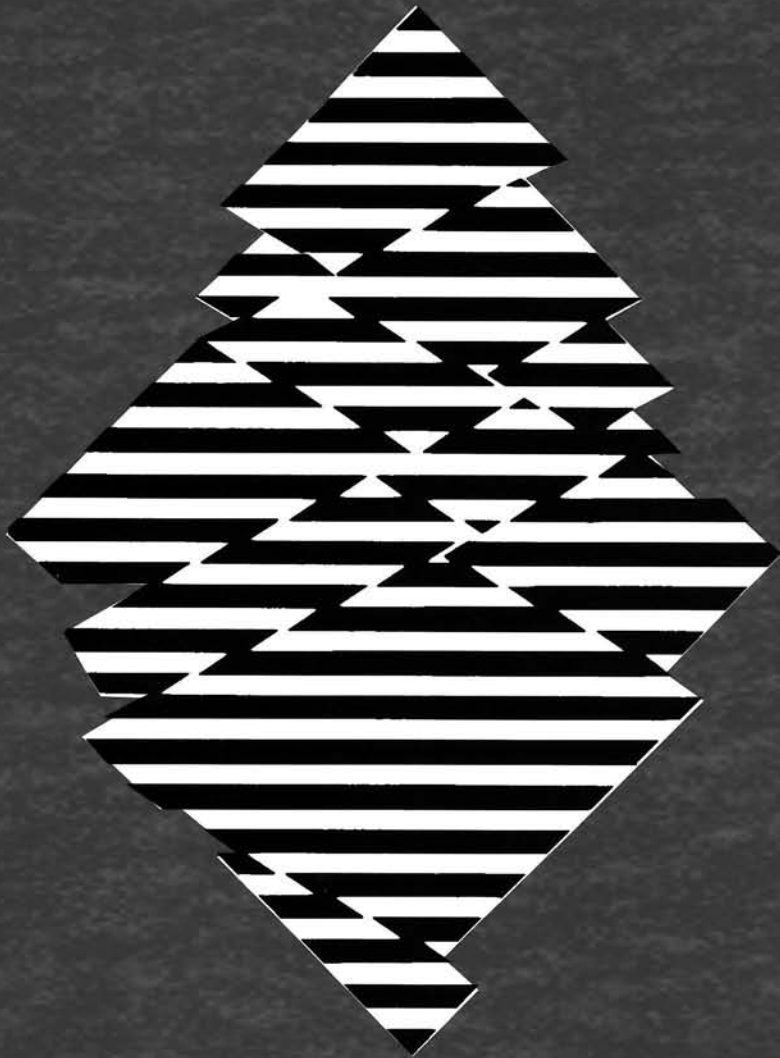


# Grond- mechanica

A. Verruijt



Delft University Press

724 777

# GRONDMECHANICA

Bibliotheek TU Delft



C 0003830993

2474  
231  
8

724

# GRONDMECHANICA

A. Verruijt

Delft University Press

Verruijt, A.

Grondmechanica / A. Verruijt. - Delft: Delft University Press. — III.

Uitg. in opdracht van: Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft  
1e dr. Delft : Delftsche U.M., 1983

Met lit. opg., reg.

ISBN 90-407-1857-1

SISO 692.4 UDC 624.131.5

Trefw.: grondmechamnica

© VSSD

Eerste druk 1983

Vijfde druk 1999

Uitgegeven door:

Delft University Press

Postbus 98, 2600 MG Delft

tel. 015 278 3254, telefax 015 278 1661, e-mail dup@dup.tudelft.nl

In opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft

tel. 015 - 2782124, telefax 015 - 2787585, e-mail: vssd@tudelft.nl

internet: [www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen.html](http://www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen.html)

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

ISBN 90 407 1857 1

# INHOUD

1. Inleiding .....	1
2. Classificatie .....	8
3. Korrels, water, lucht .....	14
4. Spanningen in de grond .....	19
5. Spanningen in een laag .....	25
6. Darcy .....	31
7. Doorlatendheid .....	38
8. Grondwaterstroming .....	42
9. Opdrijven .....	49
10. Vierkantennet .....	54
11. Bronbemaling .....	59
12. Spanning-rek-relaties .....	63
13. Tangent-moduli .....	70
14. Eendimensionale samendrukking .....	75
15. Consolidatie .....	81
16. Analytische oplossing .....	86
17. Numerieke oplossing .....	93
18. Bepaling consolidatiecoëfficiënt .....	99
19. Seculair effect .....	103
20. Schuifsterkte .....	107
21. Triaxiaalproef .....	114
22. Schuifproef .....	119
23. Celproef .....	124
24. Waterspanningen .....	127
25. Ongedraineerd gedrag van grond .....	134
26. Spanningspaden .....	140
27. Elastische berekeningen .....	145
28. Boussinesq .....	149
29. Newmark .....	153
30. Flamant .....	157
31. Zettingsberekeningen .....	161
32. Horizontale gronddruk .....	164
33. Rankine .....	170

34. Coulomb .....	178
35. Tabellen voor horizontale gronddruk .....	183
36. Damwanden .....	190
37. Blum .....	198
38. Damwand in gelaagde grond .....	204
39. Grenstoestanden .....	209
40. Strokenfundering .....	212
41. Prandtl .....	217
42. Wrijvingsmaterialen en grenstheorema's .....	221
43. Brinch Hansen .....	224
44. Verticale ingraving in cohesief materiaal .....	230
45. Stabiliteit van oneindig talud .....	234
46. Glijvlakberekeningen .....	240
47. Terreinonderzoek .....	244
48. Modelonderzoek .....	251
49. Paalfunderingen .....	257
<b>Appendix A. Spanningsleer .....</b>	<b>262</b>
<b>Appendix B. Elasticiteitstheorie .....</b>	<b>267</b>
<b>Appendix C. Plasticiteitstheorie .....</b>	<b>276</b>
Antwoorden van opgaven .....	288
Literatuur .....	292
Index .....	293

## VOORWOORD

Dit boek is bedoeld als handleiding bij de colleges in de Grondmechanica van de Studierichting Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Het bevat een inleiding tot de belangrijkste begrippen en technieken van de grondmechanica, zoals de berekening van spanningen, vervormingen, en stabiliteit. Ook de meest gebruikte methoden voor de bepaling van grondeigenschappen passeren de revue. In een drietal appendices worden enige basisprincipes uit de mechanica behandeld. De hoofdstukindeling is zo dat elk hoofdstuk zo ongeveer in één uur behandeld kan worden.

In de uitgaven na de eerste druk is met vrucht gebruik gemaakt van opmerkingen van gebruikers (vooral studenten), en is steeds een aantal fouten verbeterd. Op verschillende plaatsen zijn ook onder invloed van de nationale en internationale normalisatie notaties, of zelfs hele formules, veranderd. Door normalisatie kan de mechanica natuurlijk niet veranderen, maar bepaalde benaderingsformules of correlaties kunnen door discussies wel enigszins veranderen. De wetenschap staat overigens ook niet stil, en zo zijn diverse hoofdstukken aan actuele ontwikkelingen of voortschrijdend begrip aangepast. En onderdelen die bij studenten op moeilijkheden blijken te stuiten kunnen wellicht iets helderder worden uitgelegd.

Een belangrijke bijdrage in de productie van dit boek is geleverd door het programma  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , van Donald Knuth, in de versie  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  van Leslie Lamport, dat een voortdurende bron van vreugde is geweest bij het tot stand komen en het onderhouden van het manuscript. Alle figuren zijn ook in  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  vervaardigd, met de macro's  $\text{P}_{\text{T}}\text{C}_{\text{T}}\text{E}_{\text{X}}$ .

Het logo met de in twee richtingen afschuivende grond is ontworpen door Prof. dr. ir. G. de Josselin de Jong, van wie ik het vak heb geleerd.

Delft, januari 1999

A. Verruijt

## Hoofdstuk 1

# INLEIDING

### 1.1 Het vakgebied

*Grondmechanica* is de wetenschap van het evenwicht en de beweging van lichamen die bestaan uit grond. Onder grond wordt daarbij verstaan het verweerde materiaal waaruit de bovenste lagen van de aardkorst bestaan. Het niet-verweerde materiaal in de aardkorst noemt men rots, en de mechanica daarvan wordt bestudeerd in het vakgebied *rotsmechanica* of *gesteentemechanica*. Grofweg gesproken is het onderscheid tussen grond en rots dat men in grond met eenvoudige hulpmiddelen, zoals een spade, met de hand een kuil kan graven, en dat dat in rots niet lukt. Rots moet eerst met grof geweld, met een beitel en een hamer, of machinaal, verbrijzeld worden. Het natuurlijke verweringsproces van rots bestaat er uit dat rotsachtig materiaal door de eeuwenlange inwerking van zon, regenwater en wind verweert tot stenen. Daarbij speelt vaak ook een rol dat water hier en daar in spleten in de rots achterblijft, en dan bij bevriezing of dooi tot breuken leidt. De tamelijk grove stenen die in bergland ontstaan worden door de zwaartekracht, en vaak samen met water in de vorm van rivieren, afgevoerd naar beneden. Door onderlinge wrijving slijten de stenen geleidelijk af, waardoor het materiaal steeds ronder en fijner wordt: grind, zand en tenslotte slib. In stromende rivieren kan het meegevoerde materiaal bezinken, het meest grove materiaal al bij hoge snelheden, het meest fijne materiaal alleen bij heel lage snelheden. In de bedding van een rivier vindt men derhalve grof materiaal (grind) in de bovenrivier, en fijn materiaal als fijn zand en slib in het benedenstroomse gebied.

In het in de benedenstroom van Rijn en Maas gelegen Nederland wordt op vele plaatsen verweerd, en derhalve weinig samenhangend, materiaal aangetroffen, vooral zand en klei. Dat materiaal is veelal in vroeger tijden door Rijn en Maas afgezet in het toenmalige deltagebied. Ook is veel fijn materiaal afgezet bij overstromingen van het toen bestaande land door de zee of door rivieren. De Nijl zet ook thans nog regelmatig vruchtbaar slib af bij overstromingen. Nederlandse rivieren deden dat vroeger ook, maar door bedijking van de rivieren gebeurt dat nu niet meer. Het land wordt niet meer langs natuurlijke weg opgehoogd bij overstromingen, maar zakt nog wel, door langzame tectonische bewegingen. En de dijken worden steeds hoger en zwaarder om de zakking van het land te compenseren en om hogere waterstanden, die een gevolg zijn van zeespiegelrijzing, te keren. Dat proces zal eeuwig doorgaan, als Nederland bewoond wil blijven.

Op en in de zo ontstane grond wordt door mensen gebouwd, en het is de taak van de geotechnisch ingenieur om te voorspellen hoe de grond zich daarbij zal gedragen. Vragen die aan de orde kunnen komen zijn bijvoorbeeld : hoeveel een ophoging of een weglichaam zakt onder invloed van zijn eigen gewicht en door de nuttige belasting, wat de zekerheid tegen bezwijken is van een kerende constructie (een dijk, een kademuur, een damwand), hoe groot de belasting van de grond is op een constructie (een tunnel, een sluiswand), of hoe groot de belasting is die men op de funderingspalen van een gebouw, een huis of een sluis kan toelaten zonder gevaar voor grote zakkingen. Voor de beantwoording van al dit soort vragen dient de grondmechanica de basiskennis te verschaffen.





in 1857 publiceerde Rankine zijn werk over de mogelijke spanningsverdelingen in de grond. Een jaar daarvoor had Darcy zijn studies over de doorlatendheid van grond voor water gepubliceerd, voor de watervoorziening van de stad Dijon. De wetten en de grondslagen van de mechanica van continua, zoals de principes van de statica, en de spanningsleer, waren in die tijd natuurlijk ook al lang bekend, door het werk van Newton en Franse wetenschappers als Cauchy, Navier en Boussinesq. De vereniging van alle gereed liggende begrippen tot een apart en samenhangend vakgebied grondmechanica heeft eigenlijk nog vele jaren op zich laten wachten. In het begin van deze eeuw was de tijd ervoor blijkbaar rijp.

Baanbrekend werk voor de ontwikkeling van de grondmechanica is verricht door Karl Terzaghi, die onder andere aangegeven heeft hoe men de invloed van de spanningen in het grondwater op het gedrag van grond in rekening kan brengen. Dat is een wezenlijk element in de grondmechanica. Fouten op dit gebied leiden vaak tot grote rampen. In Nederland is voor de tweede wereldoorlog veel pionierswerk verricht door Keverling Buisman. Een belangrijke stimulerende invloed is ook uitgegaan van de oprichting van het Laboratorium voor Grondmechanica in 1934. Dit instituut heet thans Grondmechanica Delft, of afgekort GD; het is één van de zogenaamde Grote Technologische Instituten van Nederland, naast bijvoorbeeld het Waterloopkundig Laboratorium (WL), en het Energie Centrum Nederland (ECN). Er bestaan over de gehele wereld instituten en adviesbureaus die zich gespecialiseerd hebben in de grondmechanica. Vaak houden deze zich ook bezig met de *Funderingstechniek*, dat is het toegepaste vakgebied waarin de eigenschappen van diverse typen van funderingen worden bestudeerd. Grondmechanica en Funderingstechniek tezamen noemt men ook wel *Geotechniek*. Een bekend Nederlands ingenieursbureau op dit gebied is Fugro, met zijn hoofdkantoor in Leidschendam, en met kantoren over de gehele wereld.

Het vakgebied is internationaal georganiseerd in de *International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, de ISSMGE, die congressen organiseert, en tracht de wetenschap te bevorderen en de eenheid in het vakgebied te versterken, door internationale studiecmissies, en door medewerking aan standaardisatie. In elk land heeft de International Society een nationale vereniging. In Nederland is dat de Afdeling Geotechniek van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. Daarin zijn bijna duizend vakgenoten verenigd.

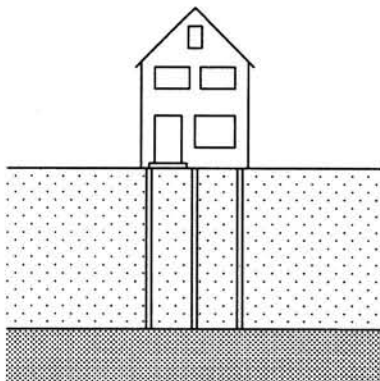
### 1.3 *Waarom Grondmechanica ?*

De grondmechanica heeft zich als apart vakgebied kunnen en moeten ontwikkelen omdat grond een aantal bijzondere eigenschappen heeft, die het onderscheidt van andere materialen. Daarnaast speelt uiteraard ook een rol dat grond in zo grote hoeveelheden voorkomt, en dat de civiel ingenieur er bij alle constructies mee te maken krijgt. Elke constructie moet immers op de een of andere manier gefundeerd worden, en zijn belastingen afdragen aan de grond.

De belangrijkste bijzondere eigenschappen van het materiaal grond worden in dit hoofdstuk kort beschreven. In de rest van het boek worden ze in detail behandeld, en zal worden getracht de verschijnselen voor kwantitatieve analyse toegankelijk te maken.

#### 1.3.1 *Stijfheid afhankelijk van spanningsniveau*

Veel materialen uit de techniek, met name metalen, maar tot op zekere hoogte ook beton en hout, gedragen zich zolang de spanningen maar niet al te groot worden, lineair. Dat wil zeggen dat de vervormingen tweemaal zo groot worden als de spanningen tweemaal zo groot zijn. Dit wordt beschreven met de wet van Hooke, en zulke materialen noemt men lineair elastisch. Grond voldoet daar absoluut niet aan. Zo wordt grond bij samendrukking bijvoorbeeld steeds stijver. Zand, dat aan de oppervlakte geen enkele samenhang vertoont, en daarom

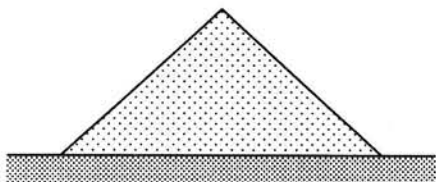


Figuur 1.2. Paalfundering.

door het gewicht van die kleilaag. Daardoor wordt het diepe zand als het ware keihard, en kan men grote krachten toelaten op een paal die tot in dat diepe zand reikt.

### 1.3.2 Afschuiving

Wordt bij samendrukking grond steeds stijver, bij hoekvervormingen wordt grond juist steeds slapper, en bij een bepaalde waarde van de schuifspanning ten opzichte van de normaalspanning kan zelfs bezwijken optreden. De helling van een berg droog zand, bijvoorbeeld bij een opslagplaats van zand, kan niet steiler worden dan een graad of dertig, veertig. Dat komt doordat de korrels anders over elkaar gaan glijden. Dit verschijnsel heeft veroorzaakt dat Nederland zo vlak is, dat een talud van een dam niet te steil gemaakt kan worden, en dat verscheidene dammen en ophogingen zijn afgeschoven, met alle rampzalige gevolgen van dien. Bijzonder vervelend is nog dat bij heel fijne gronden, zoals klei, een steile helling vaak wel enige tijd kan blijven staan, door capillaire waterspanningen, maar dat na enige tijd die waterspanningen veranderen, en de dam alsnog afschuift.



Figuur 1.3. Een berg zand.

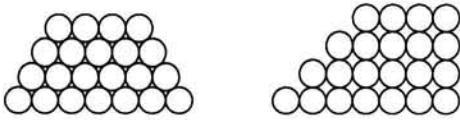
wordt daardoor gedempt. Na de botsing staat de vangrail wel scheef in de grond, als gevolg van het bezwijken van de grond, maar de kinetische energie van de auto is omgezet in blijvende vervorming van de grond, en niet (of althans in mindere mate) in blijvende vervorming van de auto of de inzittenden. Met een trekker kan de vangrail later weer in zijn oorspronkelijke stand worden teruggebracht.

### 1.3.3 Dilatantie

Hoekvervormingen van grond gaan vaak gepaard met ongewilde of onverwachte volumeveranderingen. Los zand heeft de tendens om dichter te worden, en vast gepakt zand kan

los door de vingers glipt, krijgt bij alzijdige compressie een steeds toenemende stijfheid en sterkte. Dit wordt veroorzaakt doordat de ruimte tussen de korrels afneemt als de grond samendrukt. Daarbij worden de krachten tussen de korrels groter, en neemt het oppervlak van de contactvlakjes tussen de korrels toe, waardoor de stijfheid toeneemt. De eigenschap dat de stijfheid van een korrelmateriaal toeneemt met de spanning wordt in het dagelijks leven gebruikt bij het verpakken van gemalen koffie. Door de lucht uit een pak koffie weg te zuigen wordt het pak keihard (vacuumkoffie). In de civiele techniek ontleent een paalfundering zijn nut voor een groot deel aan de grote stijfheid van de grond bij hoge spanningen. Het zand onder een dikke laag van slappe klei staat onder hoge druk,

Een positieve toepassing van dit verschijnsel van bezwijken van de grond is de middenbermbeveiliging langs autowegen. Bij een botsing van een auto met een vangrail worden grote vervormingen veroorzaakt doordat de schuifspanningen in de grond te groot worden. Bij die vervormingen wordt energie omgezet in warmte, en de botsing



Figuur 1.4. Dilatantie.

vergroting eronder. Een dichte stapeling van kogels zal bij afschuiven van de ene laag over de andere in volume uitzetten, zie figuur 1.4. De ruimte tussen de korrels neemt daarbij toe.

Anderzijds heeft een heel losse stapeling bij vervorming de neiging als het ware in te storten, met een verkleining van het volume. Dergelijke volumeverkleiningen van het korrelskelet van grond zijn vooral erg belangrijk als de grond verzadigd is met water. De volumeverkleiningen worden dan namelijk tegengewerkt door het water in de poriën, en dat kan leiden tot een aanzienlijke verhoging van de druk in het poriënwater. Veel ongelukken in de geotechniek zijn ontstaan doordat de waterdrukken werden onderschat. Bij aardbevingen in Japan wordt met water verzadigd zand vaak in korte tijd verdicht. Daarbij ontstaan overdrukken in het grondwater, en de zandkorrels kunnen als het ware gaan drijven in het water: *drijfzand*. Het feit dat in de geulen in de monding van de Oosterschelde het zand erg los gepakt was, heeft het noodzakelijk gemaakt het zand aar ter plaatse eerst te verdichten voor de bouw van de stormvloedkering.

### 1.3.4 Kruip

De vervorming van grond is vaak afhankelijk van de tijd, ook als de belasting constant is. Men noemt dat *kruip*. Vooral klei vertoont dat verschijnsel. Dit leidt bijvoorbeeld tot bijna eeuwig doorgaande zakkingen van de grond onder een ophoging. Een nieuw weglichaam, gebouwd op een slappe ondergrond, blijft vaak nog jarenlang zakken. Bij gebouwen is dit vooral hinderlijk als de zakking niet gelijkmatig is. Dan kan het tot scheuren in de constructie leiden.

Door de aanleg van dijken in Nederland, op behoorlijk samendrukbare kleilagen, worden zakkingen van die kleilagen veroorzaakt, die tientallen jaren doorgaan. Om de dijken op hoogte te houden moeten ze na enige jaren opgehoogd worden. Daardoor neemt de druk verder toe, en wordt weer een verdere zakking veroorzaakt. Zo zal het eeuwig blijven doorgaan. Voor de ingrepen van de mens werd het land geleidelijk opgehoogd, door de overstromingen van de rivier. De menselijke activiteit van de aanleg van dijken leidt daarentegen tot een voortdurende zakking van het land. Waren de Batavieren maar thuis gebleven!

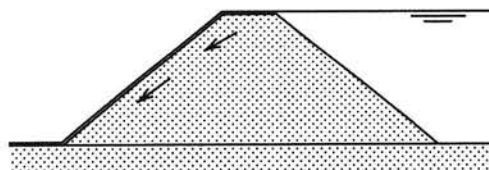
Zand en gesteente vertonen nauwelijks kruip. Alleen bij hoge spanningen en dikke lagen moet men soms rekening houden met kruip van een laag zand of zandsteen. Dit kan van belang zijn bij de winning van olie of gas uit een diep gelegen poreuze laag.

### 1.3.5 Grondwater

Een aparte karakteristiek van grond is dat er zich vaak water in de poriën bevindt. Dat water verzet zich tegen volumeveranderingen en het levert een bijdrage aan het opnemen van de spanningen in de grond. Bovendien kan het grondwater nog in beweging zijn ten opzichte van het vaste korrelskelet. Bij die grondwaterstroming worden krachten uitgeoefend op de korrels, door wrijving. In veel gevallen zal men grond als een twee-fasen materiaal moeten beschouwen. De invloed van het grondwater, en de eventuele gevolgen ervan, is voor vele constructies rampzalig geweest: in 1953 bezweken veel dijken in het Zuid-Westen van Nederland

eigenlijk alleen maar vervormen als het tegelijk wat losser wordt. Men noemt dat *dilatantie*, een verschijnsel ontdekt door Reynolds, in 1885. Deze eigenschap veroorzaakt dat bij het lopen op het strand langs de waterlijn het dicht gepakte zand rondom de voet droog gezogen wordt, door de volume-

doordat er water overheen liep, dat in de grond drong, en daarna door de grond stroomde, zie figuur 1.5. De kracht van het over en door de grond stromende water deed het binnentalud afschuiven, waardoor de dijk zijn kerende functie verloor, en de polders snel vol liepen.



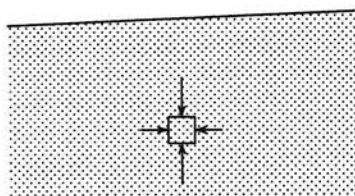
Figuur 1.5. Overstromende dijk.

In het buitenland zijn soms grote stuwdammen bezweken doordat het grondwater in het inwendige van de dam niet goed gekeerd werd (bijvoorbeeld de Teton dam in de Verenigde Staten). Ook door overvloedige regenval kan een berg van losse grond tot bezwijken komen, zoals optrad bij Aberfan in Wales in 1966, toen een berg mijnafval bezweek als gevolg van het hoge niveau van het grondwater.

Van groot belang is ook dat bij een verlaging van de druk in het grondwater, bijvoorbeeld als de grondwaterstand zakt door de winning van grondwater voor drinkwater, de spanning tussen de korrels toeneemt, met als gevolg een zakking van het grondoppervlak. Dit verschijnsel treedt op in veel grote steden (Venetië, Bangkok), die dan dreigen in de zee weg te zinken. Het treedt ook op bij een tijdelijke bronbemaling voor een bouwput. De gebouwen in de omgeving kunnen dan door de zakking gaan scheuren. Op een andere schaal treedt dit zelfde verschijnsel op bij de winning van het aardgas in Groningen. Door de verlaging van de druk in het gas neemt de druk tussen de korrels van het gesteente toe, waardoor de dikte van het gesteente afneemt. Daardoor zakt het land. De totale zakking van het gebied rond Slochteren door de productie van het aardgas wordt geraamd op zo'n 60 cm.

### 1.3.6 Onbekende beginspanningen

De grond waarop wordt gebouwd is in het algemeen al van nature aanwezig, en de begin-toestand waar men van uit moet gaan is vaak verre van homogeen, en vaak zelfs gedeeltelijk onbekend. De beginspanningen bepalen in sterke mate het gedrag van de grond, door de hierboven al genoemde niet-lineariteit van de mechanische eigenschappen. Deze beginspanningen



Figuur 1.6. Spanningen.

zijn afhankelijk van de geologische geschiedenis, die nooit tot in detail bekend is, en dat heeft een grote mate van onzekerheid tot gevolg. Met name de horizontale beginspanningen zijn meestal onbekend. De verticale spanningen zijn vaak nog wel redelijk goed bekend, omdat die vooral bepaald worden door het gewicht van de bovenliggende lagen. In het algemeen kan men stellen dat de beginspanningen zullen toenemen met de diepte. Daardoor nemen zowel de sterkte als de stijfheid van de grond met de diepte toe. De verticale spanningen zullen in het algemeen ongeveer gelijk zijn aan het gewicht van de bovenbelasting (per eenheid van oppervlakte). Maar de horizontale spanningen in de uitgangstoestand zijn veelal onbekend. Als de grond in vroeger tijden in horizontale richting is opgestuikt door tectonische bewegingen kan er een veel grotere horizontale spanning in de grond heersen als wanneer de grond in horizontale richting vroeger uitgevloeid is.

Tezamen met de spanningsafhankelijkheid van het mechanisch gedrag van grond betekent de onbekendheid van de spanningen dat de eigenschappen van de grond op een bepaalde lokatie afhangen van de veelal onbekende geschiedenis van de grond, en dus zeker niet van achter een bureau kunnen worden bepaald.

### 1.3.7 Variabiliteit

Het ontstaan van de grond door geologische processen betekent dat de grond op verschillende plaatsen behoorlijk verschillend kan zijn. Zelfs op twee dicht bij elkaar gelegen plaatsen kan de grond sterk verschillende eigenschappen hebben. Zo kan een vroegere geul lang geleden opgevuld zijn met rivierafzettingen. De loop daarvan kan dan vaak nu nog worden teruggevonden in de ondergrond. Bij de ophoging van een geaccidenteerd terrein tot een vlak bouwterrein met behulp van goed draagkrachtige grond vindt men vaak na enige jaren ongelijkmatige zettingen door de verschillende dikten van de grondlagen. Ook kan de grond plaatselijk verzwakt of juist versterkt zijn door lokale processen, zoals een plaatselijke zware belasting van de grond in een ver verleden.



Figuur 1.7. Pisa.

Een globale indruk van de grondopbouw kan worden verkregen aan de hand van geologische kaarten. Die kaarten geven aan uit welke geologische periode bepaalde lagen afkomstig zijn. Daarmee kan dan redelijk geschat worden wat de grondopbouw is. Een ervaren ingenieur of geoloog kan daarmee vaak ook wel een eerste globale schatting geven van de mechanische eigenschappen van de grond. Ook andere kennis van de geologische geschiedenis kan van grote waarde zijn. Zo kunnen in delen van West-Europa die in een vroegere ijstijd door dikke lagen ijs bedekt zijn geweest lagen slappe klei sterk zijn samengedrukt, waardoor die lagen veel stijver en sterker zijn geworden dan soortgelijke lagen die nooit zijn voorbelast.

Het met enige nauwkeurigheid bepalen van de mechanische eigenschappen van de ondergrond is echter alleen goed mogelijk door onderzoek ter plaatse. Dat kan door de grond in het terrein (*in situ*) te onderzoeken, of door een monster te steken, en dat in het laboratorium te beproeven. Dat zal in dit boek uitgebreid aan de orde komen.

#### Opgaven

- 1.1 Bij hoog water in de Nederlandse rivieren, waarbij door zeer grote afvoer van de rivier het water bijna tot de kruin van de dijk stijgt, neemt men soms zijn toevlucht tot maatregelen als het leggen van zandzakken boven op de dijk. Is dat zinvol?
- 1.2 Bij dreigende overstroming van een rivierdijk legt men ook wel grote lappen plastic op het talud van de dijk. Aan welke kant?
- 1.3 Zal in de nabijheid van een diepe rivier de horizontale spanning in de grond klein zijn of juist groot?
- 1.4 De bodem van de Noordzee is in het Noordelijke gedeelte vaak veel steviger dan in het Zuidelijke gedeelte. Hoe zou dat kunnen komen?
- 1.5 Een mogelijke verklaring voor de scheefstand van de toren van Pisa is dat er in de ondergrond een laag slappe klei zit van variabele dikte. Aan welke kant zou die laag dan het dikst zijn?
- 1.6 Een andere verklaring voor de scheefstand van de toren van Pisa is dat er in vroeger tijden (voor de aanvang van de bouw van deze toren in 1400) een ander zwaar bouwwerk heeft gestaan, met een bodemoppervlak dat niet precies samenvalt met dat van de nieuwe toren. Aan welke kant zou dat bouwwerk dan vermoedelijk gestaan hebben?

## Hoofdstuk 2

# CLASSIFICATIE

### 2.1 Korrelgrootte

Het is gebruikelijk grond onder te verdelen in verschillende soorten. In veel gevallen hebben die verschillende grondsoorten ook mechanisch tamelijk verschillende eigenschappen. Een eenvoudige onderverdeling kan geschieden op basis van de *korrelgrootte* van de deeltjes waaruit de grond voornamelijk bestaat. Zo noemt men grof materiaal grind, en het fijnere materiaal zand. Om een algemeen bruikbaar onderscheid te kunnen maken is internationaal afgesproken dat men spreekt van *grind* als de deeltjes goter zijn dan 2 mm, maar kleiner dan 63 mm. Nog grotere brokken noemt men dan stenen. *Zand* bestaat uit deeltjes die kleiner zijn dan 2 mm, maar groter dan 0.063 mm. Als de deeltjes kleiner zijn dan 0.063 mm en groter dan 0.002 mm spreekt men van *silt*, en grond bestaande uit deeltjes kleiner dan 0.002 mm noemt men *klei* of *lutum*, zie tabel 2.1.

Grondsoort	min.	max.
klei		0.002 mm
silt	0.002 mm	0.063 mm
zand	0.063 mm	2 mm
grind	2 mm	63 mm

Tabel 2.1. Korrelgrootte van diverse grondsoorten.

In sommige landen, zoals Nederland, is ook nog van belang de grondsoort *veen*, dat voor een groot deel bestaat uit organisch materiaal, afkomstig van plantenresten. De deeltjes zijn voor het grootste deel erg klein, maar het kan bijvoorbeeld ook nog resten hout bevatten. De korrelgrootte is bij veen niet zo van belang, maar meer de chemische samenstelling, met veel koolstof. Zoals bekend noemt men dat *organisch* materiaal. De hoeveelheid organisch materiaal in een grondmonster kan men bepalen door te meten hoeveel er verloren gaat door het te verbranden.

Het gedrag van de diverse genoemde grondsoorten, zoals zand, klei en veen, is nogal verschillend. Zo is klei veel slechter doorlatend dan zand, maar in het algemeen ook slapper. Veen is vaak zeer licht (soms nauwelijks zwaarder dan water), en sterk anisotroop, door de invloed van de richting van de vezels van het organische materiaal. Veen is meestal ook sterk samendrukbaar. Zand is in het algemeen goed doorlatend, en vrij stijf, als er tenminste enige voorbelasting is.

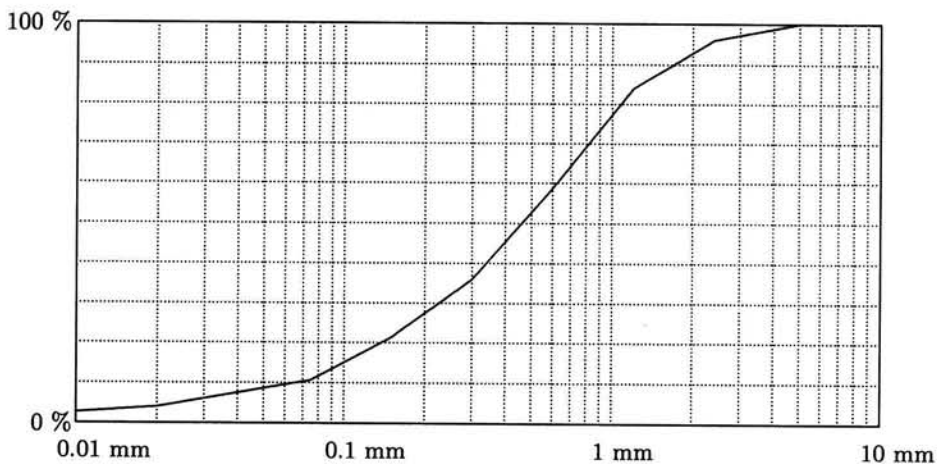
Als een eerste aanduiding voor het gedrag van het materiaal kan de korrelgrootte wel nuttig zijn, maar bepalend is ze niet. Voor de kwantitatieve antwoorden die de ingenieur moet geven zijn de mechanische eigenschappen nodig, en die kunnen voor gronden met dezelfde korrelgrootte nog weer heel verschillend zijn. Men kan zich bijvoorbeeld gemakkelijk

voorstellen dat zand bestaande uit deeltjes met scherpe hoeken (scherp zand) zich anders gedraagt dan zand bestaande uit afgesletten, meer ronde, deeltjes. Ook kan een mengsel van diverse korrelgroottes slecht doorlatend zijn doordat de kleinere deeltjes net in de poriën van de grotere passen.

Het globale karakter van de indeling naar korrelgrootte komt goed tot uiting in de in Duitsland wel gebruikte indeling, waarbij men zegt dat grind bestaat uit deeltjes kleiner dan een kippenei en groter dan een luciferkop, en dat de deeltjes van zand kleiner zijn dan een luciferkop, maar nog wel met het blote oog zichtbaar.

## 2.2 Korrelverdelingsdiagram

De grootte van de deeltjes in een bepaalde grond kan worden weergegeven in een zogenaamd *korrelverdelingsdiagram*, zie figuur 2.1. In een dergelijk diagram wordt aangegeven welk deel (uitgedrukt in gewichtsprocenten) kleiner is dan een bepaalde diameter. Een steile kromme hoort bij een gelijkmatige grondsoort. Als de kromme flauw is betekent dit dat de



Figuur 2.1. Korrelverdelingsdiagram.

grond deeltjes van sterk verschillende diameter bevat. Voor grove korrels, zeg groter dan 0.05 mm, kan men de korrelverdeling bepalen door te zeven. De gebruikelijke procedure is om een aantal zeven van verschillende maaswijdten boven elkaar te plaatsen, met de zeef met de grootste openingen boven, en de fijnste zeef onder. Men vindt dan na enige tijd goed schudden met de hand of trillen met een trilmachine op elke zeef alleen nog de deeltjes die net groter zijn dan de mazen van die zeef en kleiner dan de mazen van alle zeven erboven. Op die manier kan men dan het korrelverdelingsdiagram bepalen. Er zijn voor die bepaling zeefmachines in de handel, en standaardzeven. Het voorbeeld van figuur 2.1 toont een normaal zand. Er zijn blijkbaar geen korrels groter dan 5 mm.

Om de korrelverdeling te beschrijven gebruikt men vaak de grootheden  $D_{60}$  en  $D_{10}$ . Die waarden geven aan dat 60 %, respectievelijk 10 % van de korrels (in gewichtshoeveelheden gemeten) kleiner is dan die waarde. In het geval van figuur 2.1 volgt uit de figuur dat  $D_{60} \approx 0.6$  mm, en  $D_{10} \approx 0.07$  mm. Het quotient van die twee waarden noemt men wel de *uniformiteitscoëfficiënt*  $C_u$ ,

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}. \quad (2.1)$$



In het geval van figuur 2.1 is dat ongeveer 8.5. Dat geeft aan dat de grond korrels van nogal verschillende grootte bevat. Men noemt dat een *goed gegradeerde* grond. Bij een *slecht gegradeerde* grond zijn de korrels bijna allemaal even groot. De uniformiteitscoëfficiënt is dan maar weinig groter dan 1, bijvoorbeeld  $C_u = 2$ .

Voor deeltjes kleiner dan ongeveer 0.05 mm kan men de korrelverdeling niet goed door zeven bepalen, omdat de gaatjes van de zeef dan wel erg onpraktisch klein worden, en omdat bij flink schudden de fijne deeltjes als stof in de lucht vliegen. Men kan dan het gehalte aan deeltjes van een bepaalde diameter beter bepalen door de bezinksnelheid in water te meten. Daarvoor bestaan diverse methoden, die alle gebaseerd zijn op de wet van Stokes. Deze stelt dat de kracht op een kleine bolvormige korrel die bezinkt in een visceuze vloeistof afhangt van de viscositeit van de vloeistof, de korreldiameter van de deeltjes en de snelheid. Omdat de totale kracht die tot bezinken leidt bepaald wordt door de zwaarte van de deeltjes onder water kan men een relatie afleiden voor de bezinksnelheid van een enkel deeltje in een oneindig groot vat met water. De betreffende formule, afgeleid door Stokes, is

$$v = \frac{(\gamma_k - \gamma_w)D^2}{18\mu}, \quad (2.2)$$

waarin  $\gamma_k$  het volumegewicht van het deeltje is,  $\gamma_w$  het volumegewicht van de vloeistof,  $D$  de korreldiameter, en  $\mu$  de dynamische viscositeit van de vloeistof. Omdat de bezinksnelheid van erg kleine deeltjes erg klein is kan de bepaling ervan uiteraard nogal tijdrovend zijn.

### 2.3 Chemische samenstelling

Naast het onderscheid in korrelgrootte tussen verschillende grondsoorten is ook het verschil in chemische samenstelling vaak een goed middel om grondsoorten van elkaar te onderscheiden. Zo bestaan zand en grind voornamelijk uit dezelfde mineralen als waaruit de rots in het gebergte is opgebouwd. Dat kan kwarts zijn, of veldspaat, glimmer, etc. In Nederland bestaat zand voornamelijk uit kwarts. De chemische formule hiervan is voornamelijk  $\text{SiO}_2$ .

Fijnkorrelige gronden bevatten naast de genoemde mineralen ook zogenaamde kleimineralen, die door chemische verwerking ontstaan zijn. Veel voorkomende kleimineralen zijn kaoliniet, montmorilloniet en illiet. In Nederlandse kleisoorten komt vooral het mineraal illiet voor. De kleimineralen bestaan uit verbindingen van aluminium met waterstof, zuurstof en silicaten. Ze verschillen van elkaar door de verhoudingen van de verschillende componenten, maar ook door de microscopische opbouw. De structuur van klei wordt gevormd door kleine deeltjes, vaak in de vorm van dunne plaatjes. Op microscopische schaal oefenen die plaatjes krachten op elkaar uit, met de mogelijkheid om ook water te binden, in de vorm van ionen. Door de geringe grootte van de plaatjes spelen in het krachtenspel naast elektrische krachten ook de zogenaamde Van der Waals krachten een rol.

Hoewel het gedrag van kleideeltjes ten opzichte van elkaar duidelijk anders (en meer gecompliceerd) is dan dat bij de tamelijk grove structuren van een massa zandkorrels of grindkorrels, zijn er toch vele overeenkomsten in het globale gedrag van klei enerzijds en zand en grind anderzijds. Uiteraard zijn er ook verschillen, zoals het tijdsafhankelijke gedrag van klei (kruip). De structuur van een klei, en zijn chemische en mineralogische samenstelling, zijn van grote invloed op het fysisch gedrag. Sommige kleisoorten, vooral die met veel montmorilloniet, kunnen bijvoorbeeld een sterke neiging tot zwellen vertonen. Ook het kruipgedrag van verschillende kleisoorten vertoont een correlatie met de chemische en mineralogische samenstelling.

Veen bevat, zoals reeds eerder gesteld, resten van platen en bomen. Chemisch bestaat het daarom voor een deel uit verbindingen met koolstof. Het is soms brandbaar, of er kunnen

zich gassen in ontwikkelen. Als bouwgrond is het niet geschikt, ook al omdat het nogal licht en slap is. Overigens kan ook klei een zekere hoeveelheid organisch materiaal bevatten.

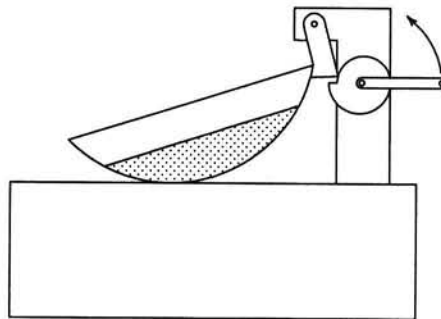
Voor de civiel ingenieur is de chemische samenstelling, en voor klei ook de mineralogische samenstelling, vooral van belang als mogelijk middel dat kan waarschuwen dat de ene grond zich geheel verschillend gedraagt als een andere. Meestal kan men op grond van een chemische analyse echter niet veel zeggen over de grootte van de mechanische parameters, en dat is nu juist wat de ingenieur nodig heeft. Bij werk in een onbekend gebied kan informatie over de chemische samenstelling, tezamen met eigen ervaring of wat goede literatuur, echter wel goed helpen bij het voorspellen van het gedrag in globale zin, en bij het onderkennen van de te verwachten problemen.

## 2.4 Consistentiegrenzen

Vooraf voor zeer fijne grondsoorten, silt en klei, kan de consistentie sterk afhankelijk zijn van de hoeveelheid water in de grond. Men drukt dat vaak uit in het *watergehalte* (zie ook hoofdstuk 3), gedefinieerd als het gewicht van het water gedeeld door het gewicht van de korrelmassa,

$$w = W_w / W_k. \quad (2.3)$$

Als het watergehalte erg gering is kan de grond (men denke bijvoorbeeld aan uitgedroogde klei) erg vast zijn, als een soort steen. Neemt het watergehalte toe dan wordt de klei plastisch, en bij verder toenemend watergehalte kan de klei zelfs vloeibaar worden. Men heeft ter bepaling van het onderscheid tussen deze drie consistenties (vast, plastisch en vloeibaar) een tweetal standaard-proeven afgesproken, die de consistentiegrenzen aangeven.

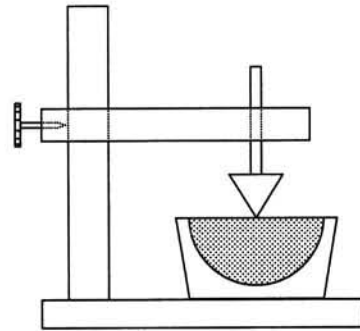


Figuur 2.2. Apparaatje van Casagrande.

Men noemt dat ook wel de Atterbergse grenzen, naar de Zweedse ingenieur die ze voor het eerst gebruikte.

De overgang tussen het plastische gebied en het vloeibare gebied noemt men de *vloeigrens* (liquid limit, of  $w_L$ ). Men bepaalt deze grens met behulp van het apparaatje van Casagrande, zie figuur 2.2. De vloeigrens is afgesproken als het watergehalte waarbij een V-vormige groef, gemaakt met een standaardmes, zich net sluit nadat het bakje 25 maal is opgelicht en weer teruggevallen. Als de groef zich eerder sluit dan na 25 maal is de klei vochtiger dan bij de vloeigrens. Door enige tijd te wachten, en de klei nog wat dooreen te roeren, verdampt er wat water, zodat men het wat later nog eens kan proberen. Als dan de groef zich precies na 25 slagen sluit heeft men de vloeigrens bereikt. Op dat moment moet men snel het watergehalte bepalen, voordat er nog weer water verdampt.

Een alternatief voor het apparaat van Casagrande is de valconus, zie figuur 2.3. Daarbij plaatst men een stalen gewicht van 60 gram, met een conusvormige punt met een tophoek van  $60^\circ$ , op een kleimonster, met de punt juist op het oppervlak van de klei, en laat dan de conus los. De penetratiediepte wordt gemeten. De vloeigrens is gedefinieerd als het watergehalte waarbij de penetratie precies 10 mm is. Men kan de vloeigrens dan bepalen door de proef bij verschillende watergehalten uit te voeren. Maar ook heeft men vastgesteld dat de penetratiediepte op logaritmische schaal ongeveer lineair verloopt met het watergehalte. Daardoor kan de vloeigrens ook bepaald worden uit een enkele proef. Dat gaat dan natuurlijk veel sneller dan wanneer men verschillende proeven bij verschillende watergehalten moet doen, maar het is wel minder nauwkeurig.



Figuur 2.3. De valconus.

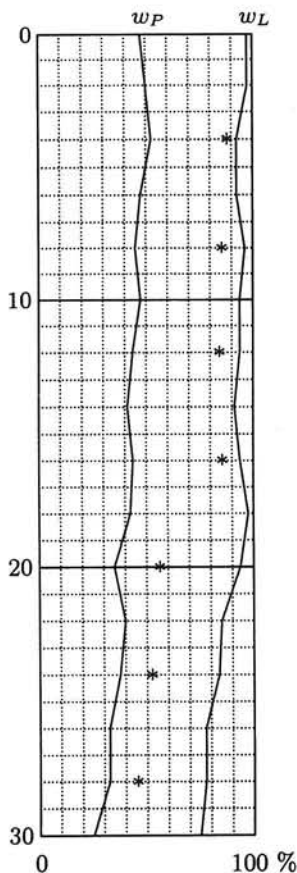
De grens tussen het plastische gebied en het vaste noemt men de *plasticiteitsgrens* (plastic limit, of  $w_P$ ). Deze is afgesproken als het watergehalte waarbij de klei nog net tot draden van 3 mm dikte uitgerold kan worden. Men noemt dit ook wel de uitrolgrens. Zeer vochtige klei kan men uitrollen tot zeer dunne draden, maar droge klei valt al uit elkaar bij tamelijk grote brokken. Als de klei nog tot draden fijner dan 3 mm kan worden uitgerold is de klei natter dan overeenkomt met de plasticiteitsgrens. Door het uitrollen voort te zetten wordt de klei geleidelijk droger, door verdamping van het water. Op het moment dat de klei net te brokkelig wordt om tot draden van 3 mm uit te rollen stopt men en bepaalt direct van die klei het watergehalte. Dat geeft dan de plasticiteitsgrens.

Voor sommige toepassingen is vooral de *plasticiteitsindex* (plasticity index, of PI) van belang. Deze is gedefinieerd als het verschil tussen de vloeigrens en de plasticiteitsgrens,

$$PI = w_L - w_P.$$

De plasticiteitsindex is een goede maat voor de verwerkbaarheid van de klei. Deze grootte is van groot belang voor een pottenbakker, maar ook voor de bouwer van een stuwdam die een kern van slecht doorlatende klei in de dam moet aanbrengen, en voor de ingenieur die op een afvalberging een slecht doorlatende laag moet aanbrengen. In al die gevallen is de verwerkbaarheid van de klei van groot belang.

In landen met dikke kleilagen (Engeland, Japan, de Scandinavische landen) bepaalt men vaak een profiel van de plasticiteitsgrens en de vloeigrens, zie figuur 2.4. In dat diagram kan men dan ook het natuurlijke watergehalte aangeven, zoals bepaald door monsters te steken en daarvan direct het watergehalte te bepalen.



Figuur 2.4. Watergehalten.

daarvan direct het watergehalte te bepalen.

## 2.5 Een internationale classificatie

De grote variabiliteit in grondsoorten, zelfs in een betrekkelijk klein gebied als Nederland, leidt er toe dat regionaal al aanzienlijke verschillen kunnen bestaan in de eigenschappen van gronden die toch veel op elkaar lijken. Daarbij komt dat er slechts een gradueel verschil is tussen "kleihoudend zand" en "zandhoudende klei". De ervaring van een lokale boorfirma kan er ook toe leiden dat men bijvoorbeeld onderscheid maakt tussen "blauwe klei" en "bruine klei", wat dan voor insiders zeer wezenlijk is, maar voor anderen, in een ander deel van het land, volkomen onbruikbaar en onbegrijpelijk is. Uniforme regels voor de classificatie van grond zijn moeilijk te geven, en men zal zich bewust moeten zijn van plaatsgebonden variaties. Voorts is het van belang open te staan voor systemen zoals die in andere landen zijn ontstaan. Internationaal is bijvoorbeeld van belang het classificatie-systeem dat is ontwikkeld door het Amerikaanse Bureau of Reclamation. Dit bestaat uit een twee-letter systeem waarmee een grondsoort wordt aangeduid, zie tabel 2.2. Zo is bijvoorbeeld een grond van het type SM een silthoudend zand, dat is dus een zandsoort die een behoorlijke

Eerste letter		Tweede letter	
G	gravel	W	well graded
S	sand	P	poorly graded
M	silt	M	silty
C	clay	C	clayey
O	organic	L	low plasticity
Pt	peat	H	high plasticity

Tabel 2.2. Unified Classification System (USA).

hoeveelheid niet-organische zeer fijne deeltjes bevat. Oosterschelde-zand zou men zo kunnen aangeven. Zeezand zoals men dat aan de stranden van de Noordzee aantreft is meestal van het type SW. Met het type CL geeft men een klei aan met een lage plasticiteit, dat wil zeggen een klei met een lage plasticiteitsindex. Zo'n klei heeft maar een klein traject waarin ze plastisch is. De klei in een Hollandse polder zal men al gauw als CH classificeren.

De aanduidingen "well-graded" en "poorly graded" in tabel 2.2 komen overeen met de Nederlandse termen "goed gegradeerd" en "slecht gegradeerd", zoals eerder in dit hoofdstuk al beschreven. Deze aanduidingen ontleen hun naam aan het feit dat een goed gedradeerd materiaal zich goed leent voor allerlei technische toepassingen. Het is meestal relatief stijf en sterk, omdat de kleinere deeltjes zo ongeveer de poriën tussen de grovere deeltjes opvullen.

Globale indelingen van grondsoorten zoals hierboven genoemd kunnen bruikbaar zijn als een eerste grove classificatie, met behulp van zeer eenvoudige middelen. Voor de civiel ingenieur hebben ze slechts beperkte waarde, omdat deze meestal vooral geïnteresseerd is in mechanische eigenschappen zoals sterkte en stijfheid. Vaak is er wel enige correlatie, maar die is hooguit indicatief. Voor het verkrijgen van getalwaarden die het mechanisch gedrag van grond beschrijven zal men zijn toevlucht moeten nemen tot mechanische proeven, waarbij bijvoorbeeld spanningen en vervormingen gemeten worden. Daarop wordt nog uitgebreid teruggekomen.

## Hoofdstuk 3

# KORRELS, WATER, LUCHT

### 3.1 Porositeit

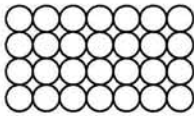
Grond bestaat uit korrels, water en lucht. Om te beschrijven hoeveel van elk van deze componenten in een zekere grond voorkomt worden diverse kengetallen gebruikt, die bijvoorbeeld aangeven hoe de hoeveelheid water zich verhoudt tot de hoeveelheid korrels. Deze grootheden zijn ook van belang bij de bepaling van het volumegewicht. In dit hoofdstuk worden ze gedefiniëerd.

Een belangrijke grootheid is de *porositeit*  $n$ , gedefiniëerd als het volume van de poriën gedeeld door het totale volume van de grond,

$$n = V_p/V_g. \quad (3.1)$$

Voor de meeste grondsoorten is de porositeit een getal tussen 0.30 en 0.45 (of, uitgedrukt als een percentage, tussen 30 % en 45 %). Als de porositeit klein is, noemt men de grond dicht gepakt, of vast gepakt. Men spreekt van een los gepakt materiaal als de porositeit groot is.

Het is interessant om voor een tweetal bijzondere gevallen de porositeit te berekenen. Het eerste geval is een losse stapeling van bollen waarbij de bollen alleen met elkaar in contact

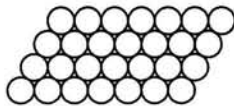


Figuur 3.1. Kubische stapeling.

zijn in drie onderling loodrechte richtingen. Men noemt dit een *kubische* stapeling, zie figuur 3.1. Als de diameter van de bollen  $D$  is, dan neemt elke bol in de ruimte een kubus met een volume  $D^3$  in beslag. Het volume van de bol zelf in zo'n kubus is  $\pi D^3/6$ . De verhouding van de vaste stof tot het totale volume is  $V_k/V_g = \pi/6 = 0.5236$ , en

de porositeit van deze stapeling is dus  $n = 0.4764$ . Dit is de meest losse stapeling, en de grootst mogelijke waarde van de porositeit. Deze stapeling is niet stabiel: als er een kleine verstoring optreedt stort de stapeling in.

De meest dichte stapeling van bollen ontstaat als men uitgaat van lagen waarin de bollen een patroon van gelijkzijdige driehoeken vormen, zie figuur 3.2. De stapeling wordt opgebouwd door zulke lagen zodanig op elkaar te leggen dat de bollen van de volgende laag



Figuur 3.2. Rhombische stapeling.

precies in de ruimte tussen drie bollen uit de laag eronder vallen. De verbindingslijnen van een bol met de drie eronder vormen een gelijkzijdige tetraëder, met zijden  $D$ . De hoogte van zo'n tetraëder is  $D\sqrt{2/3}$ . Elke bol van de stapeling neemt in de ruimte een totaal volume in groot  $D \times (D\sqrt{3/4}) \times (D\sqrt{2/3}) = D^3\sqrt{1/2}$ . Omdat het

volume van elke bol  $\pi D^3/6$  is, is de porositeit van deze stapeling dus  $n = 1 - \pi/\sqrt{18} = 0.2595$ . Dit is de meest dichte stapeling die men met bollen bereiken kan.

Hoewel grond nooit uit zuivere bollen bestaat en deze berekeningen dus niet geldig zijn voor echte grond, hebben de twee waarden wel indicatieve waarde voor de porositeit van

een zeer losse of een zeer dichte stapeling. Men kan verwachten dat de porositeit  $n$  van een korrelachtig materiaal een waarde zo ongeveer tussen 0.25 en 0.45 heeft.

De hoeveelheid poriën kan ook worden uitgedrukt met het *poriëngetal*  $e$ , gedefiniëerd als de verhouding van het volume van de poriën en het volume van de korrels

$$e = V_p/V_k. \quad (3.2)$$

Deze grootheid wordt vooral in de Angelsaksische landen veel gebruikt. Men noemt het daar de *void ratio*. Omdat het volume van de grond  $V_g$  gelijk is aan de som van de volume van de poriën en dat van de korrels ( $V_g = V_p + V_k$ ) kan men de porositeit en het poriëngetal als volgt in elkaar uitdrukken

$$e = n/(1 - n), \quad n = e/(1 + e). \quad (3.3)$$

De porositeit kan principieel niet kleiner zijn dan 0, en niet groter dan 1. Het poriëngetal kan wel groter zijn dan 1. Deze grootheid krijgt soms de voorkeur omdat het volume van de korrels bij vervorming van de grond niet verandert, en het poriëngetal geeft dus het volume van de poriën ten opzichte van een constante grootheid.

Het poriëngetal wordt internationaal veel gebruikt om de *relatieve dichtheid* van een bepaalde grond te beschrijven. Deze relatieve dichtheid wordt gedefiniëerd als

$$RD = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}. \quad (3.4)$$

Hierin is de  $e_{max}$  de maximaal te bereiken waarde van het poriëngetal  $e$ , en  $e_{min}$  de minimaal mogelijke waarde. Deze waarden kan men in het laboratorium bepalen. Door de grond goed te verdichten, bijvoorbeeld met een vibrator, bereikt men de minimale waarde van het poriëngetal. Door het materiaal voorzichtig te strooien, of voorzichtig te laten bezinken in een water, ontstaat de maximale waarde. Helaas zijn zowel het minimum als het maximum van de dichtheid moeilijk nauwkeurig te bepalen, zodat de relatieve dichtheid ook een nogal onnauwkeurige grootheid is. Meer en harder stampen of trillen maakt de grond vaak steeds weer dichter, en ook de meest losse stapeling is moeilijk te bereiken, omdat bij de minste of geringste trilling de grond al verdicht. Uit formule (3.4) volgt dat de relatieve dichtheid kan variëren tussen 0 en 1. Een lage relatieve dichtheid, zeg  $RD < 0.5$ , betekent dat de grond gemakkelijk verdicht kan worden. Een dergelijke verdichting kan ook onverwacht optreden, bijvoorbeeld bij een schok in de grond, met alle vervelende gevolgen vandien.

Uiteraard kan men, met behulp van de formules (3.3) de relatieve dichtheid ook uitdrukken in de werkelijke, de maximale en de minimale porositeit  $n$ , maar dat leidt tot een vrij ingewikkelde, en daarom ongebruikelijke formule.

### 3.2 Verzadigingsgraad

Om te beschrijven hoeveel water, respectievelijk lucht zich in de poriën bevindt gebruikt men de *verzadigingsgraad*  $S$ ,

$$S = V_w/V_p. \quad (3.5)$$

Hierin is  $V_w$  het volume van het water, en  $V_p$  het totale volume van de poriënruimte. Het volume lucht (of een ander gas) in de grond wordt aangegeven door de fractie  $1 - S$  van het poriënvolume.

Als  $S = 1$  is de grond volledig verzadigd, als  $S = 0$  is de grond volkomen droog.

### 3.3 Dichtheid

Voor de beschrijving van de dichtheid en het volumegewicht van de grond zijn naast de verhoudingsgetallen, zoals  $e$ ,  $n$  en  $S$ , ook de dichtheden van de respectievelijke fasen van belang. De *dichtheid* is de massa per eenheid van volume. Voor water wordt dit aangegeven met  $\rho_w$ , en zoals bekend is de waarde daarvan ongeveer  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Kleine afwijkingen hiervan kunnen optreden afhankelijk van bijvoorbeeld de temperatuur of het zoutgehalte. In veel gevallen is dat in de grondmechanica van ondergeschikt belang, en kan men volstaan met te stellen dat

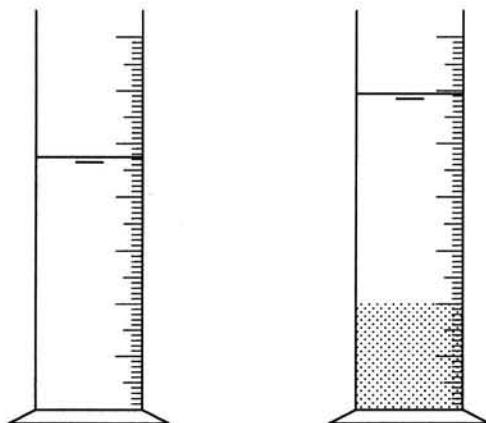
$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3. \quad (3.6)$$

De dichtheid van de lucht is voor grondmechanische beschouwingen in het algemeen verwaarloosbaar.

De dichtheid van het korrelmateriaal hangt af van de samenstelling ervan. In veel gevallen, met name voor de meeste zandsoorten, geldt ongeveer

$$\rho_k = 2650 \text{ kg/m}^3. \quad (3.7)$$

Men kan deze waarde bepalen door een zekere gewichtshoeveelheid van de korrels (zeg  $W_k$ ) in een hoeveelheid water in een maatglas te strooien, zie figuur 3.3. Er bestaan maatglazen voorzien van een schaalverdeling die het volume aangeven, bijvoorbeeld in  $\text{cm}^3$ . Het volume van de korrels kan men meten door de stijging van de waterspiegel te bepalen als men een zekere hoeveelheid korrels in een gedeeltelijk met water gevuld maatglas strooit. De stijging van het water in het maatglas geeft aan hoe groot het volume van de korrels is,  $V_k$ . Het



Figuur 3.3. Bepaling dichtheid korrelmateriaal

totale gewicht van de korrels,  $W_k$ , kan men meten door het gewicht van het maatglas te bepalen, voor en na het strooien van de zandkorrels. De dichtheid van het korrelmateriaal volgt dan direct uit de definitie

$$\rho_k = W_k/V_k. \quad (3.8)$$

Meestal vindt men voor zand een waarde van ongeveer  $2650 \text{ kg/m}^3$ .

Het principe van dit eenvoudige proefje, waarbij men het volume van een ingewikkeld gevormd lichaam bepaalt door het onder water te dompelen, is ontleend aan Archimedes. Aan hem was gevraagd te controleren of een kroon wel van zuiver goud was. Hij zag in

dat dat kan door het gewicht per eenheid van volume te vergelijken met dat van een blok zuiver goud. Het gewicht bepalen is niet zo moeilijk, maar de bepaling van het volume van een kroon stelde hem voor problemen. De legende zegt dat Archimedes ineens door had dat je het volume kunt bepalen door onderdompeling onder water toen hij in het bad stapte. Onder het roepen van "Eureka" rende hij de straat op.

### 3.4 Volumegewicht

In de grondmechanica is het vaak van groot belang te weten wat het totale gewicht van een zekere hoeveelheid grond is. Dat kan men berekenen als de porositeit, de verzadigingsgraad en de dichtheden bekend zijn. Het gewicht van het water in een volume grond groot  $V$  is immers  $Sn\rho_w gV$ , en het gewicht van de korrels is  $(1-n)\rho_k gV$ , waarin  $g$  de sterkte van het zwaarteveld is, of de versnelling van de zwaartekracht. Bij benadering geldt dat  $g = 9.8 \text{ N/kg}$ , of ruwweg  $g = 10 \text{ N/kg}$ . Het totale gewicht  $W$  is dus

$$W = [Sn\rho_w g + (1-n)\rho_k g]V. \quad (3.9)$$

Hieruit volgt voor het *volume*gewicht  $\gamma$ , dat is het gewicht per eenheid van volume,

$$\gamma = W/V = Sn\rho_w g + (1-n)\rho_k g. \quad (3.10)$$

Deze formule geeft aan dat men nogal wat basis-grootheden moet kennen om het volumegewicht van grond te bepalen: de verzadigingsgraad, de porositeit, de dichtheden van water en korrels, en de versnelling van de zwaartekracht. In de praktijk is het dan veel eenvoudiger om het volumegewicht rechtstreeks te bepalen door het totale gewicht  $W$  van een volume  $V$  van die grond te bepalen, door een afgemeten volume te wegen. Om de porositeit en de verzadigingsgraad hoeft men zich dan niet te bekommeren.

Als de grond droog is vindt men voor het droog volumegewicht

$$\gamma_d = W_d/V = (1-n)\rho_k g. \quad (3.11)$$

Ook deze waarde kan men eenvoudig rechtstreeks bepalen. De grond moet dan wel eerst droog gemaakt worden, bijvoorbeeld door het monster een tijdlang in een oven te plaatsen. De temperatuur in zo'n oven wordt meestal op iets meer dan 100 graden gehouden, zodat het water snel verdampt. En niet veel hoger dan 100 graden, om verbranden van eventuele organische bestanddelen te vermijden.

Uit het droog volumegewicht kan men de porositeit  $n$  bepalen, zie formule (3.11), mits de dichtheid van de korrels bekend is. Dat is in het laboratorium de meest gebruikelijke methode voor de bepaling van de porositeit.

Als zowel het aanvankelijke volumegewicht  $\gamma$  als het droog volumegewicht  $\gamma_d$  bekend zijn, door meting van gewichten en volumina, zoals hierboven beschreven, dan kan men met formule (3.11) de porositeit  $n$  bepalen, en daarna met formule (3.10) de verzadigingsgraad  $S$ . Deze laatste bepaling is voor bijna verzadigde gronden (waarvoor  $S$  ongeveer 1 is) helaas nogal onnauwkeurig, omdat een kleine fout in een van de metingen tot gevolg kan hebben dat men bijvoorbeeld vindt dat  $S = 0.97$  in plaats van  $S = 0.99$ . Dat scheelt wel niet zo veel, maar voor de indicatie van de hoeveelheid lucht betekent het een fout van 300 %. Voor bijvoorbeeld de samendrukbaarheid van het water-lucht mengsel is dat een ernstige fout.

### 3.5 Watergehalte

Een andere belangrijke grootheid, in het vorige hoofdstuk al gebruikt, is het *watergehalte*. Dat is de verhouding van het gewicht van het water en dat van de korrels,

$$w = W_w/W_k. \quad (3.12)$$



Men kan eenvoudig inzien dat dit geen nieuwe onafhankelijke parameter is. Er blijkt te gelden dat

$$w = S \frac{n}{1-n} \frac{\rho_w}{\rho_k} = S e \frac{\rho_w}{\rho_k}. \quad (3.13)$$

Voor volledig verzadigde gronden geldt dan, omdat  $\rho_k/\rho_w$  ongeveer 2.65 is, dat bij benadering het poriëngetal  $e$  2.65 maal het watergehalte is.

Een normale waarde voor de porositeit  $n$  is 0.40. Men vindt dan voor het droog volumege-  
wicht, als  $\rho_k = 2650 \text{ kg/m}^3$ , uit formule (3.11),  $\gamma_d = 15900 \text{ N/m}^3$ , ofwel  $\gamma_d = 15.9 \text{ kN/m}^3$ .  
Waarden in de buurt van  $16 \text{ kN/m}^3$  zijn normaal voor droog zand. Als het materiaal vol-  
ledig verzadigd is met water vindt men uit formule (3.10) ongeveer  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ . Voor  
nat zand is dit een normale waarde. Het volumege-  
wicht van kleigronden kan ook ongeveer  
 $20 \text{ kN/m}^3$  zijn, maar ook lagere waarden komen voor, uiteraard vooral als het watergehalte  
laag is. Veën is vaak veel lichter, en is soms maar nauwelijks zwaarder dan water, waarvan  
het volumege-  
wicht zoals bekend ongeveer  $10 \text{ kN/m}^3$  is.

### Opgaven

**3.1** Een vrachtwagen met  $2 \text{ m}^3$  droog zand blijkt bij weging op een weegbrug "3 ton" meer te  
wegen dan in lege toestand. Wat wordt bedoeld met die aanduiding "3 ton", en wat betekent dit  
voor het volumege-  
wicht van het zand, in  $\text{kN/m}^3$ ?

**3.2** Als van het materiaal in opgave 1 bekend is dat de massadichtheid van de korrels  $2600 \text{ kg/m}^3$   
is, wat is dan de porositeit  $n$ ? En het poriëngetal  $e$ ?

**3.3** Men zou de poriën van het zand nog kunnen vullen met water. Hoeveel  $\text{m}^3$  water kan er dan  
maximaal bij (aannemende dat het volume  $2 \text{ m}^3$  blijft), en hoe groot is dan het volumege-  
wicht van  
het zand?

**3.4** De grond in een polder bestaat uit een kleilaag van 5 meter dikte, met een porositeit van  
50 %. Daaronder bevindt zich een vast zandpakket. De grondwaterstand in de kleilaag wordt met  
1.5 meter verlaagd op basis van een ruilverkavelingsplan. Uit ervaring is bekend dat de porositeit  
van de klei dan geleidelijk afneemt tot uiteindelijk 40 %. Hoeveel zakt de bodem?

**3.5** De korrelgrootte van zand is ongeveer 1 mm. Van grind zijn de korrels veel groter, in de orde  
van grootte van 1 cm, dat is een factor 10 groter. De vorm van de korrels is ongeveer dezelfde. Er  
zijn ook fijne grondsoorten met korrelgrootte in de orde van 0.01 mm of nog kleiner. Wat is de  
invloed van deze korrelgrootte op de porositeit?

**3.6** Lees in figuur 3.3 het volume van de grond op de bodem van het maatglas af, en ook de  
toename van het totale volume, aan de stijging van de waterspiegel. Welke grootte is daarmee  
bepaald, en wat is zijn waarde?

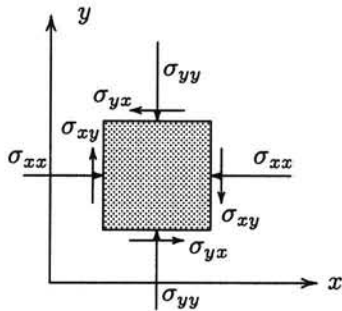
**3.7** Een glazen vat is voor een deel gevuld met water. De schaalverdeling op de wand geeft aan  
dat het volume water  $312 \text{ cm}^3$  is. Glas en water wegen samen 568 gram. Men voegt aan het glas  
voorzichtig enig zand toe, zodat dit op de bodem terecht komt, onder water. De waterspiegel in het  
glas stijgt tot een niveau dat aangeeft dat het  $400 \text{ cm}^3$  zand en water bevat. Bij weging blijkt het  
glas, met water en zand, nu 800 gram te wegen. Bepaal de massadichtheid van de korrels, in  $\text{kg/m}^3$ .

## Hoofdstuk 4

# SPANNINGEN IN DE GROND

### 4.1 Spanningen

In de grond kunnen, zoals in andere materialen, spanningen werken als gevolg van een uitwendige belasting en het eigen gewicht van het materiaal. Grond heeft daarbij een aantal eigenschappen die het onderscheidt van de meeste andere materialen. Een belangrijke speciale eigenschap is dat grond wel drukspanningen kan overbrengen, maar geen trekspanningen. Voorts kunnen schuifspanningen alleen maar worden overgebracht als ze relatief klein zijn, ten opzichte van de normaalspanningen. Tenslotte is nog van groot belang dat een deel van de spanningen in de grond overgebracht wordt door het water. In dit hoofdstuk zal vooral op dat laatste aspect worden ingegaan.



Figuur 4.1. Spanningen.

Omdat de normaalspanningen in grond bijna altijd drukspanningen zijn wordt in de grondmechanica meestal een spanningsbegrip gehanteerd dat iets afwijkt van het gebruikelijke, namelijk zodanig dat drukspanningen positief zijn. De spanningstensor zal worden aangegeven met  $\sigma$ . De tekenafspraken voor de spanningen is geïllustreerd in figuur 4.1. De afspraak is dat een spanningscomponent positief is als deze werkt in *negatieve* richting op een vlakje met zijn normaal in de *positieve* richting, of in *positieve* richting werkt op een vlakje met zijn normaal

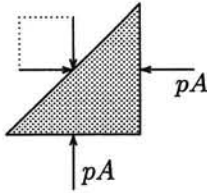
in *negatieve* richting. Er wordt op gewezen dat dit juist het tegengestelde is van de spanningstensor die gebruikt wordt in de continuum mechanica en de toegepaste mechanica. Alle tekenafspraken zijn net het tegengestelde, ook voor de schuifspanningen.

Bij de aanduiding van de spanningen is de afspraak dat de eerste index aangeeft op welk vlakje de spanning werkt, en de tweede index de richting van de kracht geeft. Dit is gelijk aan de afspraak in de continuum mechanica. Het betekent bijvoorbeeld dat de spanning  $\sigma_{xy}$  aangeeft dat de component in  $y$ -richting van de kracht op een vlakje met zijn normaal in de  $x$ -richting gelijk is aan  $F_y = -\sigma_{xy}A_x$ , waarin  $A_x$  de oppervlakte van dat vlakje is. Het minteken moet er hier bij vanwege de afwijkende tekenafspraken. De tekenafspraken voor krachten is gelijk aan die in de continuum mechanica.

### 4.2 Waterspanningen

Grond is een poreus materiaal, opgebouwd uit deeltjes die tezamen het korrelskelet vormen. In de poriën van dit korrelskelet kan zich een vloeistof bevinden: meestal water. De poriënstructuur van de meeste normale grondsoorten is zodanig dat alle poriën met elkaar in open verbinding staan. Het water bevindt zich als het ware in een ruimte van zeer ingewikkelde vorm, maar het vormt wel een continu systeem, waarin druk kan worden overgebracht, en eventueel stroming kan optreden. De druk in het water wordt de *waterspanning* genoemd.

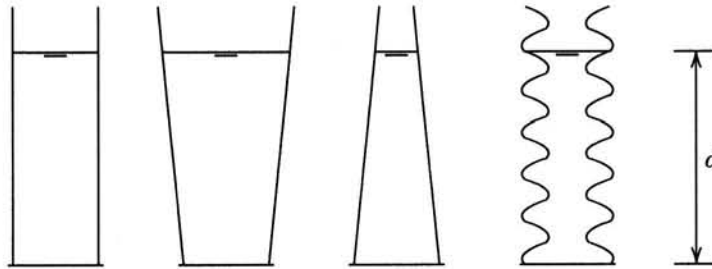
In een vloeistof in rust kan geen schuifspanning worden overgedragen. Dit betekent dat de druk in alle richtingen gelijk is. Dit kan worden bewezen met behulp van een beschouwing van het evenwicht van een klein driehoekje in het water, zie figuur 4.2. De helling van het schuine vlakje is  $45^\circ$ . Stel dat op de rechterkant van het driehoekje een druk  $p$  werkt. De totale kracht op dat vlak is dan  $pA$ , als  $A$  het oppervlak van dat vlakje is. Omdat op het ondervlak geen schuifspanning werkt moet de horizontale kracht op het rechtervlakje in evenwicht gehouden worden door de horizontale component van de kracht op het schuine vlakje. Die component is dus ook  $pA$ . Omdat ook op dit vlak geen schuifspanning werkt is de verticale component van de kracht ook  $pA$ . Alleen dan is de kracht op dat vlakje loodrecht op het vlak gericht.



Figuur 4.2. Pascal.

Die verticale kracht moet weer evenwicht maken met de verticale kracht op het ondervlak. Die is dus ook  $pA$ , en omdat dat oppervlak ook  $A$  is, is ook de druk op het ondervlak gelijk aan  $p$ . Men kan dan eenvoudig bewijzen dat die druk  $p$  op elk vlakje werkt. Dat de druk in een vloeistof in alle richtingen gelijk is noemt men het principe van Pascal.

Als het water in rust is (dat wil zeggen als het water niet stroomt) wordt de druk in het water in een punt bepaald door de ligging van dat punt ten opzichte van het wateroppervlak. Zoals aangetoond door Stevin hangt de grootte van de waterdruk op de bodem van een vat



Figuur 4.3. Waterdruk alleen afhankelijk van diepte.

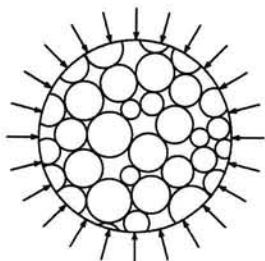
met water alleen af van de hoogte van de waterkolom in het vat, en niet van de vorm van het vat, zie figuur 4.3. De druk op de bodem is steeds

$$p = \gamma_w d, \quad (4.1)$$

waarin  $\gamma_w$  het volumegewicht van het water is, en  $d$  de diepte. De totale verticale kracht op de bodem is  $\gamma_w dA$ . Alleen in het geval van een vat met verticale wanden is dit gelijk aan het gewicht van het water in het vat. Stevin liet zien dat ook voor de andere vaten uit figuur 4.3 de totale kracht  $\gamma_w dA$  is. Dat volgt uit een evenwichtsbeschouwing van het watervolume, daarbij rekening houdend met het feit dat er geen schuifspanningen in het water kunnen werken, en op de wanden de kracht dus loodrecht op de wand moet staan. Het meest rechtse vat in figuur 4.3 lijkt al aardig op een grondlichaam gevormd door korrels. Het water daarin voldoet net zo goed aan de principes van de hydrostatica als het water in een eenvoudig vat, mits het water in de poriënruimte continu met elkaar in verbinding staat.

### 4.3 Effectieve spanningen

Op een elementje grond zullen in het algemeen normaalspanningen en schuifspanningen werken. Het eenvoudigste geval is dat van een alzijdige belasting door een uniforme normaalspanning, zie figuur 4.4. Stel dat de grootte van de alzijdig werkende normaalspanning  $\sigma$  is. In het inwendige van de grond, bijvoorbeeld door een snede op halve hoogte, wordt deze spanning overgedragen door een druk  $p$  in het water, de *waterspanning* en voorts door spanningen in de korrels. De spanningen in de korrels worden voor een deel veroorzaakt door de geconcentreerde krachten die ze in hun contactpunten overbrengen, en gedeeltelijk door de druk in het water, dat de korrels praktisch geheel omsluit. Van belang voor de vervormingen van het korrelskelet zijn in de eerste plaats de geconcentreerde contactkrachten, omdat de vervormingen van grond praktisch alleen optreden als een gevolg van schuiven en rollen in de contactpunten. De druk in het water, die op zichzelf een daaraan gelijke gemiddelde druk in



Figuur 4.4. Alzijdige spanning.

de korrels met zich meebrengt, moet men van de totaalspanning  $\sigma$  aftrekken om een maat voor de contactkrachten te krijgen. Men kan het ook zo beschouwen: als er geen geconcentreerde krachten in de contactpunten zijn, en als  $p = \sigma$ , dan heerst in de korrels, die immers volledig door water omringd zijn, ook een drukspanning  $\sigma$ . De vervormingen die dan optreden zijn een compressie van de korrels en van het water. Nu zijn kwarts en water zeer stijve materialen, met een elasticiteitsmodulus ongeveer een tiende van die van staal. Dit betekent dat er slechts zeer kleine vervormingen optreden, die praktisch verwaarloosbaar zijn vergeleken met de grote vervormingen die men in de werkelijkheid bij grond observeert. Dit alles leidt er toe om als een zinvolle spanningsgrootte in te voeren het verschil van de totaalspanning  $\sigma$  en de waterdruk  $p$ ,

$$\sigma' = \sigma - p. \quad (4.2)$$

Men noemt  $\sigma'$  de *effectieve spanning*. De effectieve spanningen zijn een maat voor de geconcentreerde krachten die in de contactpunten van het korrelskelet worden overgedragen. Als  $p = \sigma$  vindt men  $\sigma' = 0$ , hoewel er dan toch wel spanningen in de korrels zijn (namelijk een gelijkmatige spanning  $\sigma$ ). De basisgedachte is, zoals gezegd, dat de vervormingen van het korrelskelet bepaald worden door de geconcentreerde krachten in de contactpunten en het is dan zinvol een zodanige maat in te voeren dat de vervormingen nul zijn als die maat voor de spanningen ook nul is. Dat is het geval met het hier ingevoerde begrip effectieve spanning (afkomstig van Terzaghi), ook wel aangeduid als *korrelspanning*. Formule (4.2) kan men uiteraard ook schrijven als

$$\sigma = \sigma' + p. \quad (4.3)$$

Men zegt wel "totaalspanning is effectieve spanning plus waterspanning", maar daarmee moet men wel voorzichtig zijn, omdat het hier alleen maar gaat om de normaalspanningen. Schuifspanningen kunnen alleen worden overgebracht door de korrels.

Opgemerkt moge nog worden dat de redenering er op gebaseerd is dat de korrels erg stijf zijn ten opzichte van de grond als geheel, en dat de contactoppervlakken erg klein zijn. Voor de meeste grond is dat redelijk, maar voor poreuze rots geldt het niet. Dan moet men ook de compressibiliteit van de korrels in rekening brengen, hetgeen leidt tot een kleine correctie in de formule.

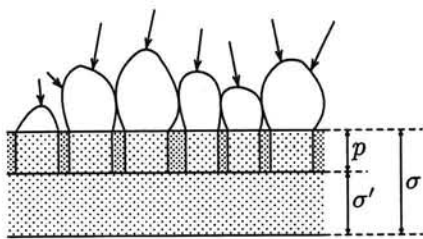
Om de splitsing van de totaalspanningen in een aandeel van het water, en een aandeel van de contactkrachten, ook voor het algemene geval van een willekeurige spanningstoestand

uit te voeren, kan men het volgende bedenken. Om te beginnen moet het geval van een alzijdige normaalspanning, zie formule (4.3), er als een bijzonder geval uit volgen. Voorts kan gesteld worden dat het water niet in staat is een bijdrage te leveren tot het overdragen van schuifspanningen. De spanning in het water is immers in hoofdzaak een alzijdige druk. Weliswaar kunnen in stromend water visceuze schuifspanningen optreden, maar deze zijn een aantal orden van grootte kleiner dan de waterdruk. Op grond van deze overwegingen komt men tot de volgende algemene formules

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma'_{xx} + p, & \sigma_{yz} &= \sigma'_{yz}, \\ \sigma_{yy} &= \sigma'_{yy} + p, & \sigma_{zx} &= \sigma'_{zx}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma'_{zz} + p, & \sigma_{xy} &= \sigma'_{xy}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dit noemt men het *principe van de effectieve spanningen*. Het is een van de grondslagen van de grondmechanica. Het is gebruikelijk de effectieve spanningen (of korrelspanningen) aan te geven met  $\sigma'$ . De totaalspanningen (of grondspanningen) worden aangegeven met  $\sigma$ , zonder accent.

Hoe eenvoudig de formules (4.4) er ook uitzien, en hoe logisch en vanzelfsprekend ze ook lijken, men vindt in sommige literatuur soms afwijkende relaties, met name van de vorm  $\sigma = \sigma' + np$ , waarin  $n$  dan de porositeit is. De gedachte daarbij is dan dat de waterspanning  $p$  alleen maar in de poriën werkt, en dat van de totaalspanning  $\sigma$  dus een waarde  $np$  moet worden afgetrokken om de effectieve spanning te krijgen. Dat lijkt ook wel logisch,



Figuur 4.5. Effectieve spanning.

en het leidt ook tot een goede waarde voor de gemiddelde spanning in de korrels, maar het is toch een te simpele gedachte. De redenering houdt er namelijk geen rekening mee dat er twee mechanismen zijn waardoor er spanning in de korrels kan zijn. In de eerste plaats is er een spanning in de korrels door het water dat de korrels omsluit, en in de tweede plaats is er een spanning ten gevolge van de krachten die de korrels aan elkaar overdragen in de contactpunten. De

vervormingen van het korrelskelet worden voornamelijk veroorzaakt door schuiven en rollen van de korrels in de contactpunten. De samendrukking van de korrels zelf is daarmee vergeleken praktisch verwaarloosbaar, omdat ze zo stijf zijn. Om een spanning te krijgen die een goede maat is voor de vervormingen moeten de effectieve spanningen een maat zijn voor de geconcentreerde krachten die de korrels in de contactpunten aan elkaar overdragen. Dat betekent dat men het deel van de spanning in de korrels dat veroorzaakt wordt door het omringende water er van af moet trekken. En dus moet de waterspanning over het hele oppervlak gerekend van de totaalspanning worden afgetrokken om een goede maat voor de vervormingen te krijgen, zie ook figuur 4.5.

In matrixnotatie schrijft men de relaties (4.4) wel als

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p \delta_{ij}, \quad (4.5)$$

waarin  $\delta_{ij}$  dan de Kronecker delta is, of de eenheidsmatrix. De definitie ervan is

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases} \quad (4.6)$$

Het berekenen van de spanningen in de grond is een van de hoofdproblemen uit de grondmechanica. Daarbij is het vooral van belang de grootte van de effectieve spanningen

vast te stellen, omdat die bepalend zijn voor de vervormingen. In het volgende hoofdstuk zal dat voor het meest eenvoudige geval, een enkele grondlaag, worden uitgewerkt. In latere hoofdstukken zullen gecompliceerder gevallen worden beschouwd, met belastingen door funderingen of ophogingen, en met stromend grondwater.

#### 4.4 Archimedes en Terzaghi

Het begrip effectieve spanning is voor de grondmechanica zo belangrijk dat het zorgvuldige beschouwing verdient. Zo is het van belang te bedenken dat het begrip in overeenstemming is met het principe van Archimedes van de opwaartse kracht op lichamen onder water. Beschouwt men een volume grond ter grootte  $V$ , met een porositeit  $n$ , dan is het gewicht van de korrels in dat volume  $(1 - n)\gamma_k V$ , waarin  $\gamma_k$  het volumegewicht van het korrelmateriaal is, dat is ongeveer  $26.5 \text{ kN/m}^3$ . Onder water is de opwaartse druk, volgens Archimedes, gelijk aan het gewicht van het door de korrels verplaatste water, dat is  $(1 - n)\gamma_w V$ , waarin  $\gamma_w$  het volumegewicht van water is. Er resteert dus een kracht groot

$$F = (1 - n)\gamma_k V - (1 - n)\gamma_w V,$$

die moet worden opgenomen door de bodem waar de korrels op rusten. Heeft het volume  $V$  een oppervlakte  $A$  en een hoogte  $h$ ,  $V = Ah$ , dan is de op te nemen gemiddelde spanning, omdat spanning gedefinieerd wordt als kracht per oppervlak ( $\sigma' = F/A$ ),

$$\sigma' = (1 - n)\gamma_k h - (1 - n)\gamma_w h = (1 - n)(\gamma_k - \gamma_w)h. \quad (4.7)$$

De grootheid  $(\gamma_k - \gamma_w)$  noemt men wel het *volumegewicht onder water*.

De redenering volgens Terzaghi is dat de effectieve spanning wordt gevonden als het verschil van de totaalspanning en de waterspanning. De totaalspanningen worden daarbij gegenereerd door het totale gewicht van de grond, dat is dus  $\gamma_n h$ , waarin  $\gamma_n$  het volumegewicht van de natte grond is. De waterdruk wordt, althans in het geval dat het water niet stroomt, bepaald door de diepte onder het freatisch vlak, dat is in dit geval  $\gamma_w h$ . De effectieve spanning (of korrelspanning) is dus

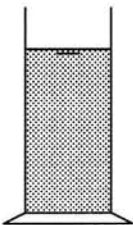
$$\sigma' = \gamma_n h - \gamma_w h. \quad (4.8)$$

Omdat voor een verzadigd grondmonster geldt dat

$$\gamma_n = n\gamma_w + (1 - n)\gamma_k,$$

kan men dit ook schrijven als

$$\sigma' = (1 - n)\gamma_k h - (1 - n)\gamma_w h = (1 - n)(\gamma_k - \gamma_w)h. \quad (4.9)$$



Figuur 4.6. Archimedes.

Dit is identiek aan de uitdrukking (4.7). Het principe van Terzaghi is dus in overeenstemming met dat van Archimedes, en de beide redeneringen leiden tot hetzelfde resultaat. Dat is natuurlijk plezierig, want de beschouwingen van Archimedes over opwaartse krachten zijn in de natuurkunde zo fundamenteel dat men er niet mee in tegenspraak mag komen.

De redenering van Terzaghi, leidend tot de uitdrukking (4.8), is eenvoudiger, en vooral eenvoudiger te generaliseren. Zo komt in die redenering de porositeit niet voor, en die hoeft men dus niet te kennen om de spanningen uit te rekenen. Die grootheid

zit als het ware verborgen in het volumegewicht  $\gamma_n$ . Verder is de berekening volgens de methode van Terzaghi gemakkelijk te generaliseren naar gecompliceerdere gevallen. Als de grond niet geheel verzadigd is met water vindt men dat de totaalspanningen kleiner zijn omdat de grond lichter is. De waterdruk is echter nog steeds hydrostatisch, en dus zijn ook de effectieve spanningen lager, hoewel er evenveel korrels zijn als in het verzadigde geval. Ook kan men relatief eenvoudig gevallen met verschillende grondsoorten of verschillende vloeistoffen (zoet en zout grondwater, of water en olie) beschouwen. Ook in gevallen waarin het grondwater stroomt kunnen de spanningen in het korrelskelet, de effectieve spanningen, relatief eenvoudig worden bepaald met behulp van het principe van Terzaghi. De invloed van de grondwaterstroming kan eenvoudig in rekening worden gebracht als men de waterspanningen maar eenmaal kent.

De procedure volgens Terzaghi is steeds dat men eerst de totaalspanningen bepaalt, op basis van het totale gewicht van de grond en alle eventuele belastingen, vervolgens de waterspanningen bepaalt, en tenslotte de effectieve spanningen bepaalt door de waterspanningen van de totaalspanningen af te trekken.

### Opgaven

4.1 Een slappe rubber ballon is gevuld met droog zand. Men verlaagt de druk in de poriën met een vacuümpomp, met een bedrag van 5 kPa. Hoe veranderen nu de totaalspanning en de effectieve spanning?

4.2 Een astronaut neemt een pak vacuüm-koffie mee bij een reis in de ruimte. Wat kunt u zeggen van de stijfheid van het pak (en dus van de effectieve spanningen) in het ruimteschip? En na landing op de maan, waar de zwaartekracht een zesde is van die op aarde?

4.3 Iemand laat een pak vacuüm-koffie in een 10 meter diep meer vallen. Wordt het dan nog harder?

4.4 Een schatgraver wil een verzameling antieke Chinese borden uit een gezonken schip halen. Onder water moeten de borden natuurlijk voorzichtig opgetild worden. Maakt het daarbij uit hoe diep het schip onder water ligt?

4.5 De bodem van een meer bestaat uit zand. Het water in het meer stijgt, waardoor de waterdruk op de bodem toeneemt. Zakt nu de bodem van het meer door vervorming van de grond?

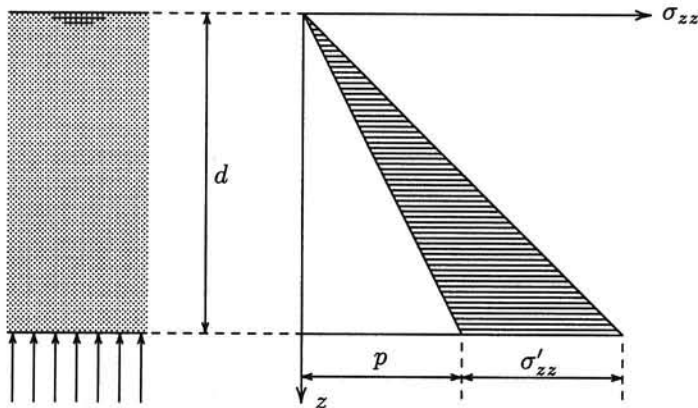
## Hoofdstuk 5

# SPANNINGEN IN EEN HORIZONTALE LAAG

### 5.1 Verticale spanningen

In de natuur vindt men vaak gronden die zijn opgebouwd uit praktisch horizontale lagen. Als zo'n grond niet belast wordt door bijvoorbeeld gebouwen, en het eventuele grondwater erin niet stroomt, kan men de verticale spanningen berekenen uit een beschouwing van het verticale evenwicht. Dat zal in deze paragraaf voor verschillende gevallen worden geïllustreerd.

Een van de eenvoudigste gevallen is dat van een homogeen grondpakket, geheel verzadigd met water, zie figuur 5.1. De druk in het water wordt bepaald door de ligging van het *freatisch vlak*, dat is het vlak waar de druk in het grondwater gelijk is aan de atmosferische



Figuur 5.1. Spanningen in een homogene laag.

druk, dat wil zeggen dat op dat niveau  $p = 0$ . Als er geen capillaire effecten in het spel zijn is dat ook de hoogte van het water in de grond, de *grondwaterstand*. Aangenomen wordt dat in dit geval het freatisch vlak samenvalt met de bovenkant van de grond, zie figuur 5.1. Als het volumegewicht van de natte grond  $\gamma$  is, met  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ , dan zal de verticale normaalspanning in de grond lineair met de diepte verlopen,

$$\sigma_{zz} = \gamma d. \quad (5.1)$$

Dit is een gevolg van het verticale evenwicht van een kolom grond met een hoogte  $d$ . Er is hierbij aangenomen dat op de zijvlakken van de kolom geen schuifspanningen werken. Dat lijkt redelijk als het een uitgestrekt en homogeen terrein betreft, met een zelfde geologische geschiedenis. Bij gebrek aan nadere informatie neemt men dat vaak maar aan.

Op een diepte van 10 m is de verticale totaalspanning in de grond nu  $200 \text{ kN/m}^2 = 200 \text{ kPa}$ . Omdat het grondwater in rust is, zal in dit water een hydrostatische drukverdeling heersen. De grond, met zijn ingewikkelde systeem van onderling verbonden poriën, kan



worden beschouwd als een watervat van erg ingewikkelde vorm, maar voor de druk in het water doet dat er niet toe. De druk in het water op een diepte  $d$  is gelijk aan het gewicht van een kolom water van die hoogte, zie ook figuur 4.3,

$$p = \gamma_w d, \quad (5.2)$$

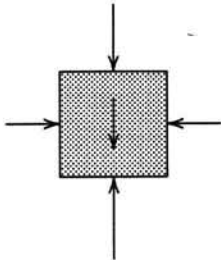
waarin  $\gamma_w$  het volumegewicht van het water is, met  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ . Er volgt nu dat de verticale effectieve spanning op een diepte van 10 m gelijk is aan  $200 \text{ kPa} - 100 \text{ kPa} = 100 \text{ kPa}$ .

Men kan ook stellen, met  $\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - p$ , en met (5.1) en (5.2), dat in dit geval

$$\sigma'_{zz} = (\gamma - \gamma_w)d. \quad (5.3)$$

De verticale effectieve spanningen blijken ook lineair met de diepte te verlopen. Dat is alleen in dit geval zo, omdat zowel de totaalspanning als de waterspanning lineair met de diepte verlopen, en beide op hetzelfde niveau (het grondoppervlak) nul zijn.

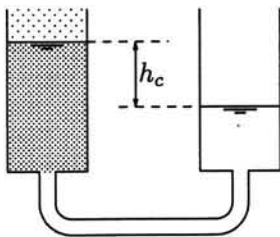
Het is van belang te beseffen dat hierboven op basis van een beschouwing van uitsluitend het verticale evenwicht, tezamen met de aanname dat er geen schuifspanningen werken op verticale vlakken, waarden zijn gevonden voor de verticale spanningen, dat zijn de spanningen op horizontale vlakjes. De grootte van de horizontale normaalspanningen is onbepaald, ook als men het horizontaal evenwicht mede in beschouwing neemt. Het horizontaal evenwicht van een elementair blokje, zie figuur 5.2, geeft wel enige informatie, namelijk dat de horizontale spanningen in horizontale richting constant zijn, maar hun grootte blijft onbekend, omdat het massief in horizontale richting onbegrensd is en er in het algemeen bij deze schematisering onvoldoende informatie over de spanningen in het oneindige is. Het bepalen van de horizontale spanningen in de grond is een van de moeilijkste zaken in de geotechniek. Omdat die spanning niet uit het evenwicht volgt kan men



Figuur 5.2. Evenwicht.

er vaak weinig van zeggen. In latere hoofdstukken wordt er nog uitgebreid op dit probleem teruggekomen.

Het eenvoudige voorbeeld van figuur 5.1 kan als uitgangspunt dienen voor een aantal iets gecompliceerder gevallen. Daartoe zal bekeken worden hoe de spanningen veranderen als het freatisch vlak verlaagd wordt, zeg met 2 meter. Dat zou het gevolg kunnen zijn van een bemaling van de polder, waarbij de waterstand in de sloten gebracht wordt op een peil van 2 meter beneden het maaiveld. Er zijn nu nog twee mogelijkheden. Als de grond bestaat uit grote korrels zal de grondwaterstand met het freatisch vlak meezakken. Als de grond echter bestaat uit fijn materiaal (klei) is het mogelijk dat de grondwaterstand hoger wordt dan het freatisch vlak. In de fijne poriën van de grond stijgt het water door oppervlaktenspanningen aan de wand van water en korrels tot

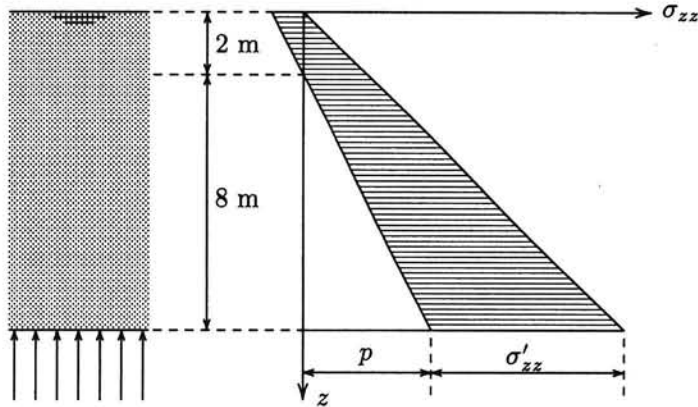


Figuur 5.3. Capillaire opstijging.

een hoogte boven het freatisch vlak, zie figuur 5.3. Men noemt dat capillair water, en de maximale hoogte van het grondwater boven het freatisch vlak noemt men de *capillaire stijghoogte*.

Als de capillaire stijghoogte  $h_c$  groter is dan 2 meter, zal de grond in de polder bij een verlaging van het freatisch vlak met 2 meter toch volledig nat blijven. In de bovenste 2 meter ontstaan capillaire spanningen, dat wil zeggen dat de druk in het grondwater lager is dan

de atmosferische druk. De totaalspanningen veranderen niet, omdat de grond precies even zwaar blijft. De waterspanningen nemen echter overal af met  $\gamma_w \times 2 \text{ m} = 20 \text{ kN/m}^2$ . Dit



Figuur 5.4. Freatisch vlak 2 m lager, met capillaire opstijging.

betekent dat de effectieve spanningen overal met hetzelfde bedrag toenemen. In figuur 5.4 is dat geïllustreerd.

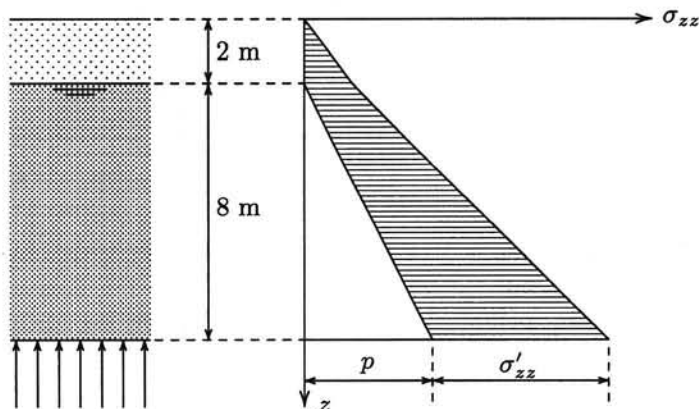
De daling van het freatisch vlak blijkt te leiden tot een toename van de effectieve spanningen. In de praktijk zal dit betekenen dat er ook vervormingen optreden, en wel verkortingen. De grond heeft de neiging tot zakken, zoals men in de praktijk ook constateert bij verlagingen van de grondwaterdrukken. Een bemaling, of een verlaging van het waterpeil in de sloten, leidt tot verlaging van de grondwaterstand, en dus tot verhoging van de effectieve spanningen, en dus tot zettingen. Soms kan daardoor een aanzienlijke schade aan gebouwen of woningen ontstaan. Als de zakking gelijkmatig is, is het allemaal vaak zo ernstig niet, maar als de toename van de effectieve spanningen niet gelijkmatig is zijn ook de zettingen niet gelijkmatig, en kan ernstige schade aan de bebouwing optreden.

De verlaging van het freatisch vlak heeft, naast het nadeel van het opwekken van zakkings, ook een groot voordeel. Dat is dat de toename van de effectieve spanningen, met name aan het oppervlak, zie figuur 5.4, de grond veel sterker maakt. In deze situatie kan men er gemakkelijk met een voertuig (bijvoorbeeld een tractor of een andere landbouwmachine) op rijden. In het geval van een hoog freatisch vlak, zoals getekend in figuur 5.1, is de effectieve spanning aan het oppervlak vrijwel nul. Mens, dier en machine zakken dan weg in de bodem, omdat de korrels zo los tegen elkaar liggen, en er geen extra kracht kan worden opgenomen. Men spreekt in zo'n geval van *drassige* grond. De toename van de begaanbaarheid van het terrein is vaak een belangrijke reden voor een verlaging van het freatisch vlak. Een gevolg ervan is dat de grond meer gaat zakken. Op de lange duur verdwijnt dan een deel van het voordeel. In sommige Nederlandse polders is het waterpeil al een aantal malen verlaagd, om de grond droog te houden, en het hoofd te bieden aan de doorgaande zakkings.

Bodemdaling kan ook voorkomen door de de winning van olie of gas. Op de grote diepte waar het gas of de olie gewonnen wordt ontstaan lagere drukken in het gas of de vloeistof, en daardoor hogere effectieve spanningen in het gesteente en de grond, hetgeen tot behoorlijke zakkings aanleiding kan geven. Omdat die zich over een groot gebied uitstrekken is de zakking van het grondoppervlak meestal wel tamelijk gelijkmatig. De constructies en gebouwen op het maaiveld zakken uiteraard met de grond mee, maar er is weinig aanleiding tot scheuren, omdat de zakking zo gelijkmatig is. Uiteraard moet men in laag gelegen gebie-

den, zoals in Groningen, wel zorgen dat de dijken ten opzichte van de zeespiegel op hoogte blijven, om overstromingen te voorkomen.

In het geval dat de grond bestaat uit grof materiaal zal er niet of nauwelijks sprake zijn van capillaire opstijging. In dat geval zal bij een verlaging van het freatisch vlak met 2 meter de bovenste 2 meter grond droog worden, zie figuur 5.5. Deze bovenste 2 meter grond wordt dan lichter, en in dit geval veranderen dus ook de totaalspanningen. Een redelijke waarde



Figuur 5.5. Freatisch vlak 2 m lager, zonder capillaire opstijging.

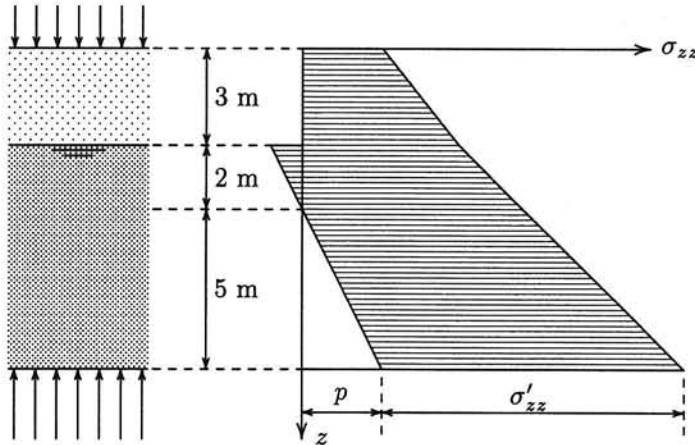
voor het droge volumegewicht is  $\gamma_d = 16 \text{ kN/m}^3$ . Op een diepte van 2 m is nu de verticale effectieve spanning  $\sigma'_{zz} = 32 \text{ kPa}$ , en op een diepte van 10 m is de effectieve spanning  $\sigma'_{zz} = 112 \text{ kPa}$ . Blijkbaar nemen de effectieve spanningen in dit geval toe met 12 kPa. De verdeling van de totaalspanningen, effectieve spanningen en waterspanningen is getekend in figuur 5.5. Ook nu zal er een neiging tot zakken zijn. Men noemt dat ook wel *klink* van de bodem. Hoe men de grootte van die klink kan voorspellen zal later worden behandeld. Daarvoor is het nodig dat eerst het verband tussen effectieve spanningen en vervormingen wordt behandeld.

## 5.2 De algemene procedure

Hierboven is voor een aantal gevallen aangegeven hoe men de totaalspanningen, effectieve spanningen en waterspanningen op een horizontaal vlakje in de grond kan bepalen. De procedure is in het algemeen dat men eerst de totaalspanningen bepaalt, uit het verticaal evenwicht van een kolom grond. Die totaalspanning is dan gelijk aan het totale gewicht van die kolom (korrels + water), plus eventueel nog de bovenbelasting. Vervolgens bepaalt men de waterspanningen met behulp van de gegevens over het grondwater. Als het grondwater niet stroomt is het daarvoor voldoende om de ligging van het freatisch vlak te kennen. De waterspanningen verlopen dan verder hydrostatisch, dat wil zeggen lineair met de diepte onder het freatisch vlak. Indien de grond fijn is moet men daarbij nog rekening houden met een capillaire zone, met negatieve waterspanningen boven het freatisch vlak. De maximaal mogelijke negatieve waterspanning hangt af van de korrelgrootte, en van de korrelverdeling. Men kan dit in het laboratorium meten. Aannemende dat men voldoende gegevens heeft over het grondwater om de verdeling van de waterspanningen over de diepte te kunnen bepalen,

kan men tenslotte de effectieve spanningen bepalen als het verschil van de totaalspanningen en de waterspanningen.

Een laatste voorbeeld van de procedure om de effectieve spanningen te bepalen is nog getekend in figuur 5.6. Het betreft hier een laag grond van 10 m dikte, met een bovenbelasting van 50 kPa. Het freatisch vlak ligt op 5 m diepte, en in het laboratorium is



Figuur 5.6. Voorbeeld.

gemeten dat in deze grond een capillaire opstijging van 2 m normaal is. Het volumegewicht van de grond is  $16 \text{ kN/m}^3$  in droge toestand, en  $20 \text{ kN/m}^3$  in natte toestand. Op grond van deze gegevens kan men stellen dat de bovenste 3 m van de grond droog is, en dat de onderste 7 m verzadigd is. De totaalspanning op 10 m diepte wordt dan  $50 \text{ kPa} + 3 \text{ m} \times 16 \text{ kN/m}^3 + 7 \text{ m} \times 20 \text{ kN/m}^3 = 238 \text{ kPa}$ . Op die diepte is de waterspanning  $5 \text{ m} \times 10 \text{ kN/m}^3 = 50 \text{ kPa}$ . De effectieve spanning op 10 m diepte is dus  $188 \text{ kPa}$ .

De verdeling van totaalspanningen, effectieve spanningen en waterspanningen tot een diepte van 10 m onder het maaiveld is getekend in figuur 5.6.

Men merke op dat in deze paragraaf steeds is aangenomen dat het grondwater niet stroomt. De waterspanningen verlopen dan hydrostatisch. Als het grondwater stroomt is dat niet zo, en er zijn dan meer gegevens nodig. Daartoe moet eerst worden ingegaan op de stroming van grondwater in het algemeen. Dat zal in de volgende hoofdstukken gebeuren.

### Opgaven

**5.1** Een meer wordt drooggelegd. De grond bestaat uit 10 meter homogene klei met een nat volumegewicht van  $18 \text{ kN/m}^3$ . Daaronder bevindt zich een zandlaag. Na de drooglegging ligt het freatisch vlak op 2 m beneden het maaiveld, maar de grond blijft volledig verzadigd. Teken grondspanningen, effectieve spanningen en waterspanningen voor en na de drooglegging.

**5.2** Een caisson met een massa van 5000 ton, een bodemoppervlak van  $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ , en een hoogte van 10 m, wordt neergezet op droog zand. Hoe groot zijn dan de gemiddelde totaalspanningen en de gemiddelde effectieve spanningen vlak onder het caisson?

**5.3** Een zelfde caisson als in de vorige opgave wordt geplaatst in open water, op een bodem van zand. De waterstand is 5 m boven de bovenkant van het zand, zodat het caisson 5 m boven het water uitsteekt. Hoe groot zijn nu de (gemiddelde) totaalspanningen, effectieve spanningen en waterspanningen?

**5.4** Wat verandert er als de waterstand in de vorige opgave 10 m is? En als die 150 m is?

5.5 Een zekere grondsoort heeft een droog volumegewicht van  $15.7 \text{ kN/m}^3$ , en een nat volumegewicht van  $21.4 \text{ kN/m}^3$ . Het freatisch vlak ligt op een diepte van 2.5 m onder het maaiveld. De capillaire stijghoogte is 1.3 m. Bereken de verticale korrelspanning op een diepte van 6.0 m, in kPa.

5.6 Een laag met water verzadigde klei heeft een dikte van 4 m, en een volumegewicht van  $18 \text{ kN/m}^3$ . Boven deze laag bevindt zich een laag zand met een droog volumegewicht van  $16 \text{ kN/m}^3$  en een verzadigd volumegewicht van  $20 \text{ kN/m}^3$ . Het grondwater staat op een diepte van 1 m beneden het maaiveld, dat samenvalt met de bovenkant van de zandlaag. Er is in het zand geen capillaire opstijging, en de grondwaterdrukken verlopen hydrostatisch. Bereken de gemiddelde effectieve spanning in de kleilaag, in kPa.

5.7 De grond uit de vorige opgave wordt opgehoogd met 2 m van het zelfde zand. De grondwaterstand blijft op het zelfde niveau gehandhaafd. Bereken de toename van de gemiddelde effectieve spanning in de kleilaag, in kPa.

## Hoofdstuk 6

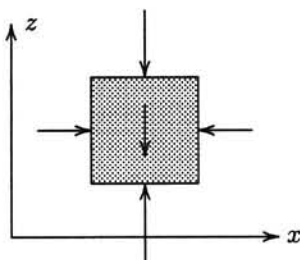
# DE WET VAN DARCY

### 6.1 Hydrostatica

Zoals in het vorige hoofdstuk gesteld is de spanningsverdeling in niet-stromend grondwater hydrostatisch. Meer precies kan men stellen dat als het grondwater niet stroomt de spanningen erin moeten voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen in de volgende vorm

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w &= 0.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Hierin is aangenomen dat de  $z$ -as verticaal omhoog wijst. De grootte  $\gamma_w$  is het volumegewicht van het water, waarvoor geldt dat  $\gamma_w \approx 10 \text{ kN/m}^3$ . Er is verder aangenomen dat er in het water geen schuifspanningen optreden, Dat is hier een goede aanname.



Figuur 6.1. Evenwicht water.

Weliswaar is water een visceuze vloeistof en kunnen er wel degelijk schuifspanningen in optreden, maar die treden alleen op als het water stroomt, en dat is hier niet het geval. Bovendien zijn, als het water wel stroomt, de schuifspanningen zeer klein ten opzichte van de normaalspanning (de waterdruk).

De eerste twee vergelijkingen van (6.1) stellen dat de waterdruk in horizontale richting niet kan veranderen. Dat volgt uit het evenwicht in de horizontale richtingen. Uit het verticale evenwicht van een blokje water, zie figuur 6.1, volgt dat het verschil tussen de druk aan de bovenkant van een elementje in het water en de druk aan de onderkant van dat elementje gelijk is aan  $\Delta p = -\gamma_w \Delta z$ . Hierin is  $\Delta z$  de hoogte van het elementje. In de limiet  $\Delta z \rightarrow 0$  volgt dan de derde vergelijking van (6.1).

De waarde van het volumegewicht van het grondwater  $\gamma_w$  in de laatste vergelijking van (6.1) hoeft niet per sé constant te zijn. Ook voor het geval van een variabel volumegewicht van het water zijn de vergelijkingen geldig. Zo'n variabel volumegewicht kan het gevolg zijn van bijvoorbeeld een variabel zoutgehalte van het water, maar ook van variaties in de temperatuur. Zelfs is het mogelijk dat het volumegewicht discontinu is. Dat is het geval als de grond meerdere vloeistoffen bevat, bijvoorbeeld olie en water. Ook in dat geval drukken de vergelijkingen (6.1) op correcte wijze het evenwicht van de vloeistof uit.

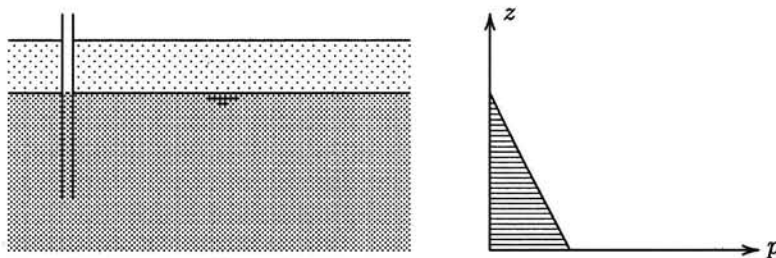
In dit boek wordt in het algemeen aangenomen dat de grond alleen water bevat, en dat het grondwater homogeen van samenstelling en temperatuur is, zodat het volumegewicht  $\gamma_w$  een constante is. Men kan nu uit de formules (6.1) afleiden dat de druk  $p$  onafhankelijk is van de coördinaten in het horizontale vlak,  $x$  en  $y$ . Voorts kan de derde evenwichtsvergelijking

worden geïntegreerd tot

$$p = -\gamma_w z + C, \quad (6.2)$$

waarin  $C$  een integratieconstante is. Formule (6.2) betekent dat de waterspanning volledig bekend is als men de integratieconstante  $C$  kan bepalen. Daarvoor is het noodzakelijk en voldoende om ergens de waterspanning te kennen. Dat kan bijvoorbeeld het geval zijn als men ergens de ligging van het freatisch vlak kent. Dan is immers voor een bepaalde waarde van  $z$  de druk  $p$  gelijk aan nul.

De ligging van het freatisch vlak in de grond kan men bepalen aan de hand van de waterstand in een sloot of vijver, als men weet dat er geen grondwaterstroming is. In principe zou men de ligging van het freatisch vlak ook kunnen bepalen door een kuil te graven, en dan te wachten tot het water tot rust is gekomen. Gemakkelijker is om de ligging van het freatisch vlak te bepalen met behulp van een open peilbuis, zie figuur 6.2. Een stijgbuis is



Figuur 6.2. Stijgbuis.

een stalen buis, met een diameter van ongeveer 2.5 cm, die aan de onderzijde voorzien is van kleine gaatjes, zodat er grondwater in kan opstijgen. Zo'n buis kan betrekkelijk gemakkelijk in de grond gedrukt of geslagen worden. De diameter van de buis is groot genoeg om capillaire opstijging erin te kunnen verwaarlozen. Dit betekent dat, als men enige tijd wacht om het grondwater de gelegenheid te geven in de buis te stijgen, de hoogte van het water in de peilbuis de ligging van het freatisch vlak aangeeft. Omdat dit meestal onder het maaiveld is kan men de waterpiegel niet met het blote oog zien. Men kan de waterstand in de buis het gemakkelijkst meten door er een blokje metaal aan een touwtje in te laten zakken. Bij de aanraking van het wateroppervlak hoort men een klokkend geluid. Houdt men een oor dicht bij de bovenkant van de stijgbuis dan kan uit dat geluid de stijghoogte heel nauwkeurig en gemakkelijk bepaald worden.

Uiteraard kan men de meting ook verrichten met geavanceerde elektronische apparatuur. Zo kan men de waterspanning rechtstreeks meten met behulp van een elektrische waterspanningsmeter. Een dergelijk instrument geeft, na omrekening met een ijkfactor, de waterdruk aan die op een sensor werkt. Zo'n sensor bestaat uit een rekstrookje op een dun metalen membraan, waartegen het grondwater drukt. Aan de andere kant van het membraan heerst een constante druk, in een afgesloten kamertje.

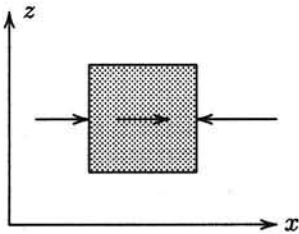
## 6.2 Stromend grondwater

Zoals gesteld is de hydrostatische drukverdeling een gevolg van de aanname dat het grondwater in rust is. Als het grondwater stroomt is de drukverdeling niet hydrostatisch, omdat dan de evenwichtvergelijkingen in de vorm (6.1) niet meer volledig zijn. Als het grondwater stroomt is er namelijk een interactie tussen het grondwater en het korrel skelet in de

vorm van onderlinge wrijvingskrachten. Gesteld wordt dat het korrelskelet op het water een volumekracht  $f$  uitoefent. Er geldt dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} - f_x &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} - f_y &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w - f_z &= 0.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Hierin zijn  $f_x$ ,  $f_y$  en  $f_z$  de componenten van de kracht die per eenheid van volume door het korrelskelet op het grondwater wordt uitgeoefend. Het teken kan men verifiëren door een beschouwing van het evenwicht, bijvoorbeeld in  $x$ -richting, zie figuur 6.3. Als de druk in  $x$ -richting toeneemt moet er een kracht in positieve  $x$ -richting op het water werken, om het evenwicht te verzekeren. Beide termen in de eerste vergelijking zijn dan positief.



Figuur 6.3. Stromend water.

Men zou kunnen denken dat als het grondwater stroomt men ook rekening moet houden met eventuele versnellingen. In het rechterlid van de vergelijkingen zouden dan termen  $\rho a_x$ ,  $\rho a_y$  en  $\rho a_z$  moeten voorkomen. Die zijn echter meestal verwaarloosbaar omdat de versnellingen van grondwater meestal erg klein zijn. Om de gedachten te bepalen kan men stellen dat de snelheid van bewegend grondwater in de orde van 1 m/d ligt. Als die snelheid in één uur twee maal zo groot wordt is de versnelling  $(1/24) \times (1/3600)^2$  m/s<sup>2</sup>, en dat is ten opzichte van de versnelling van de zwaartekracht  $g$  (10 m/s<sup>2</sup>), die ook in de vergelijkingen voorkomt, een faktor  $3 \times 10^8$  kleiner, en dus zeker verwaarloosbaar.

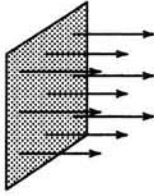
Het is aannemelijk dat de wrijvingskracht tussen de korrels en het water afhankelijk is van de snelheid van het grondwater ten opzichte van de korrels, en wel zodanig dat de kracht toeneemt met toenemende snelheid en er tegen in is gericht. Ook kan worden verwacht dat de wrijvingskracht groter zal zijn, bij dezelfde snelheid, naarmate de vloeistof visceuzer (taaiër) is. Door zorgvuldige metingen heeft men kunnen vaststellen dat bij niet al te grote snelheden er een lineair verband bestaat tussen de wrijvingskracht en de snelheid van het grondwater ten opzichte van het korrelskelet. Als de grond in alle richtingen dezelfde eigenschappen heeft (d.w.z. *isotroop* is) kan men dit als volgt in formule brengen

$$\begin{aligned}f_x &= -\frac{\mu}{\kappa} q_x, \\ f_y &= -\frac{\mu}{\kappa} q_y, \\ f_z &= -\frac{\mu}{\kappa} q_z.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Hierin zijn  $q_x$ ,  $q_y$  en  $q_z$  de componenten van het specifieke debiet, of de volumestroomdichtheid. De waarde van  $q_x$  is gedefiniëerd als de volumestroom door een oppervlak met zijn normaal in de  $x$ -richting, gedeeld door de grootte van dat oppervlak,  $q_x = Q/A$ , zie figuur 6.4. Men drukt dit uit in m<sup>3</sup>/s per m<sup>2</sup>, een debiet per eenheid van oppervlakte. Die eenheid reduceert in het SI-stelsel tot m/s. Dit is niet de gemiddelde snelheid van het grondwater, omdat men daarvoor de volumestroom zou moeten delen door het oppervlak van de poriën, en dat is een fractie  $n$  kleiner dan het totale oppervlak, als  $n$  de porositeit is. Wel is het specifiek debiet evenredig met de gemiddelde snelheid van het grondwater,

$$\mathbf{v} = \mathbf{q}/n.\tag{6.5}$$





Figuur 6.4. Specifiek debiet.

De omstandigheid dat het specifiek debiet wordt uitgedrukt in meter per seconde, en dat het lijkt op de snelheid leidt soms tot verwarring met die snelheid. Die verwarring wordt soms nog vergroot doordat men het specifieke debiet aangeeft als *filtersnelheid*. Interessant is dat in landen waar nog antieke eenheden worden gebruikt die verwarring niet optreedt. In de USA gebruikt men vaak nog de gallon (dat is 3.785 liter) als volumemaat. Het debiet wordt dan uitgedrukt in gallons per day (gpd). Een

oppervlakte drukt men vaak nog uit in square foot (met 1 foot = 30 cm). Het specifieke debiet wordt dan uitgedrukt in gallon per day per square foot (gpd/sqft). Dat is voor iemand die vertrouwd is met SI-eenheden wel een rare eenheid, maar hij heeft wel het voordeel dat verwarring met een snelheid (die meet men in de USA in miles per hour, mph) vrijwel is uitgesloten.

Formule (6.4) drukt uit dat er een extra kracht in de evenwichtsvergelijkingen optreedt, die evenredig is met het specifieke debiet (en dus met de snelheid, zoals de bedoeling was). De evenredigheidsconstante is weergegeven als  $\mu/\kappa$ , waarin  $\mu$  de *dynamische viscositeit* van de vloeistof is, en  $\kappa$  de *intrinsieke doorlatendheid*. De factor  $1/\kappa$  is een maat voor de grootte van de wrijving. In het algemeen geldt dat  $\kappa$  groter is naarmate de afmetingen van de poriën groter zijn. Er is dan immers minder wrijving. Als de poriën heel nauw zijn is de wrijving groot, en  $\kappa$  zal dan klein zijn.

Substitutie van de formules (6.4) in (6.3) geeft

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\kappa} q_x &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\kappa} q_y &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w + \frac{\mu}{\kappa} q_z &= 0.\end{aligned}\tag{6.6}$$

In tegenstelling tot vergelijking (6.1), die betrekking kan hebben op een heel klein elementje, in principe binnen een enkele porie, is vergelijking (6.6) een evenwichtsvergelijking voor het grondwater in een elementje waarin zich een groot aantal poriën bevinden. De bijdrage van de visceuze schuifspanningen in het grondwater is als een gemiddelde in rekening gebracht, en wel in de vorm van termen evenredig met het specifieke debiet.

De vergelijkingen (6.6) kan men ook schrijven als

$$\begin{aligned}q_x &= -\frac{\kappa}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ q_y &= -\frac{\kappa}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ q_z &= -\frac{\kappa}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w \right).\end{aligned}\tag{6.7}$$

Hiermee kan men de componenten van het specifieke debiet uitrekenen als de drukverdeling bekend is.

De vergelijkingen (6.7) noemt men de *wet van Darcy*, naar de stadsingenieur van de stad Dijon, die dat verband in 1856 experimenteel vaststelde. Darcy ontwierp de drinkwatervoorziening van Dijon, op basis van de winning van grondwater in het centrum van de stad, met voeding vanuit de omliggende bergen, door de ondergrond. Om te kunnen vaststellen of op die manier voldoende water kon worden aangevoerd stelde hij zijn basisformule voor de grondwaterstroming op, en deed metingen van de plaatselijke doorlatendheid.

De vergelijkingen (6.7) zijn algemeen toepasbaar, ook als het volumegewicht  $\gamma_w$  van de vloeistof niet constant is. Als nu verder de beschouwingen beperkt worden tot een homogene vloeistof, zeg zoet water, dan is het zinvol een nieuwe grootte in te voeren, namelijk de *stijghoogte*  $h$ , gedefinieerd als

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w}. \quad (6.8)$$

Als het volumegewicht  $\gamma_w$  constant is vindt men uit vergelijking (6.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{1}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{1}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Met behulp van deze relaties kan men de wet van Darcy, zie (6.7), ook schrijven als

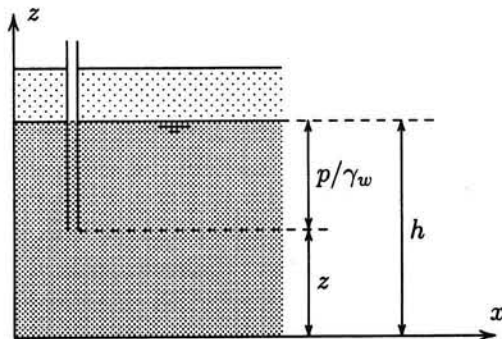
$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial h}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial h}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.10)$$

De grootte  $k$  hierin is de *doorlatendheidscoëfficiënt*, gedefinieerd als

$$k = \frac{\kappa \gamma_w}{\mu}. \quad (6.11)$$

Darcy schreef zelf zijn formule in de vorm van de vergelijkingen (6.10). Voor de praktijk is dit een handige vorm, omdat men de stijghoogte  $h$  vaak eenvoudig kan meten en omdat de formule eenvoudig van karakter is, en van de zelfde vorm in alle drie richtingen. Men bedenke wel dat de oorspronkelijke vorm (6.7) fundamenteeler is. Als het volumegewicht  $\gamma_w$  niet constant is, is alleen (6.7) bruikbaar. De definitie (6.8) is dan zinloos.

Het begrip stijghoogte kan men goed illustreren aan de hierboven reeds beschreven open



Figuur 6.5. Stijghoogte.

peilbuis voor de meting van het freatisch vlak in het geval van grondwater in rust, zie figuur 6.5. De hoogte van het wateroppervlak in de peilbuis ten opzichte van het horizontale vlak  $z = 0$  is  $h$ . De druk onderin de buis is dan immers  $p = (h - z)\gamma_w$ , dat is het gewicht van de kolom water in de buis. Men noemt  $z$  wel de *plaatshoogte* en  $p/\gamma_w$  de *drukhoogte*. Als het grondwater niet stroomt is de stijghoogte overal in het grondmassief gelijk. Als de stijghoogte niet constant is stroomt het grondwater, en volgens (6.10) gaat dat van plaatsen met een grote waarde van de stijghoogte naar plaatsen met een kleinere stijghoogte.

Ook onder de grond stroomt het water van hoog naar laag. Als de grondwaterstroming niet door externe factoren (bijvoorbeeld regen, of pompen) in

stand gehouden wordt zal het grondwater er daarbij naar streven dat de stijghoogte overal gelijk wordt.

De Wet van Darcy wordt erg eenvoudig van vorm als men weet in welke richting het water stroomt, bijvoorbeeld als het water door een met grond gevulde buis stroomt. Het water kan dan maar in één richting stroomt. Noemt men die richting de  $s$ -richting, dan geldt er voor het specifiek debiet in die richting, op grond van (6.10)

$$q = -k \frac{dh}{ds}. \quad (6.12)$$

De grootheid  $dh/ds$  is de toename van de stijghoogte per eenheid van lengte in de stromingsrichting. Het minteken drukt uit dat het water altijd in de richting van afnemende stijghoogte stroomt. Dit is de vorm van de Wet van Darcy zoals men die voor eenvoudige gevallen direct kan gebruiken. De grootheid  $dh/ds$  noemt men vaak de hydraulische gradiënt  $i$ ,

$$i = \frac{dh}{ds}. \quad (6.13)$$

Dit is een dimensieloze grootheid, die de helling van het freatisch vlak weergeeft.

### Stromingsdruk

Hierboven is gesteld dat de stroming van grondwater zich manifesteert door een wrijvingskracht tussen het water en het systeem van korrels. Volgens (6.3) is de wrijvingskracht (per eenheid van volume) die de korrels op het grondwater uitoefenen gelijk aan

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ f_y &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ f_z &= \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Met  $h = z + p/\gamma_w$  kan men dit in de stijghoogte uitdrukken, aannemende dat  $\gamma_w$  constant is,

$$\begin{aligned} f_x &= \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x}, \\ f_y &= \gamma_w \frac{\partial h}{\partial y}, \\ f_z &= \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

De kracht die door het water op de korrels wordt uitgeoefend, per eenheid van volume, zal worden aangegeven met  $\mathbf{j}$ . Op grond van het principe van actie en reactie is dit net het tegengestelde van de kracht  $\mathbf{f}$ . Men noemt deze vectorgrootheid de *stromingsdruk*, ook al is het eigenlijk geen druk, maar een volumekracht (kracht per volume). Blijkbaar geldt er

$$\begin{aligned} j_x &= -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial x}, \\ j_y &= -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial y}, \\ j_z &= -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

De stromingsdruk is vooral van belang voor de analyse van het lokale evenwicht in de grond, bijvoorbeeld voor het proces van interne erosie, waarbij deeltjes lokaal instabiel kunnen worden als de snelheid te groot is.

### Opgaven

- 6.1** In de geohydrologie wordt vaak de eenheid m/d gebruikt voor de doorlatendheidscoëfficiënt. Wat is het verband met de SI-eenheid m/s? En wat zijn dan normale waarden voor zand?
- 6.2** In de USA wordt soms nog de eenheid gpd/sqft (gallon per day per square foot) gebruikt voor de doorlatendheidscoëfficiënt en het specifiek debiet. Wat is het verband met de SI-eenheid m/s? En wat zijn dan normale waarden voor zand?
- 6.3** Van een zekere grondsoort is bekend dat de doorlatendheidscoëfficiënt  $k = 5$  m/d. Die blijkt gemeten te zijn in de zomer. Bekend is dat in de winter de temperatuur van het grondwater veel lager is, en dat de viscositeit  $\mu$  dan een factor 1.5 maal zo groot is als in de zomer. Hoe groot is de doorlatendheidscoëfficiënt in de winter?

## Hoofdstuk 7

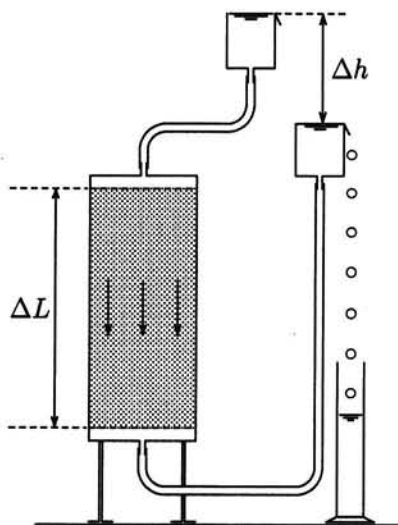
# DOORLATENDHEID

### 7.1 Doorlatendheidsproef

In het vorige hoofdstuk is de wet van Darcy voor de stroming van een vloeistof door een poreus medium in zijn eenvoudigste vorm geformuleerd als

$$q = -k \frac{dh}{ds}. \quad (7.1)$$

De doorlatendheidscoëfficiënt  $k$  kan men derhalve bepalen als men het specifieke debiet  $q$  kan meten, bij een gegeven waarde van de gradiënt  $dh/ds$ . Een veel gebruikte opstelling is getekend in figuur 7.1. Een dergelijk apparaat werd ook al door Darcy gebruikt. Het bestaat uit een glazen buis, gevuld met grond. De twee uiteinden zijn door slangen verbonden met bakjes die in hoogte verstelbaar zijn. In deze bakjes wordt een constant, maar verschillend waterpeil gehandhaafd. Onder invloed van het verschil in stijghoogte  $\Delta h$  stroomt er water



Figuur 7.1. Doorlatendheidsproef.

door de grond. Men kan het debiet  $Q$  meten door te meten hoeveel water er in een zekere tijd wordt opgevangen. Als het oppervlak van de buis waarin de grond zich bevindt  $A$  is, en de lengte van het grondmonster is  $\Delta L$ , dan geldt er

$$Q = kA \frac{\Delta h}{\Delta L}. \quad (7.2)$$

Omdat  $Q = qA$  is deze formule in overeenstemming met (7.1). Darcy gebruikte een opstelling zoals getekend in figuur 7.1 om zijn formule (7.2) te testen. Daarom deed hij proeven met

verschillende waarden van  $\Delta h$ , en vond daarbij inderdaad een lineair verband tussen  $Q$  en  $\Delta h$ . De proef wordt nog veel gebruikt om de doorlatendheid te bepalen.

Als men  $\Delta h$ ,  $\Delta L$ ,  $A$  en  $Q$  meet kan men uit (7.2) de waarde van  $k$  bepalen. Men noemt dat de *hydraulische geleidbaarheid* of de *doorlatendheidscoëfficiënt*. Voor zand vindt men hiervoor meestal waarden tussen  $10^{-6}$  m/s en  $10^{-3}$  m/s. Voor klei kan de grootte van

grondsoort	$k$ (m/s)
grind	$10^{-3} - 10^{-1}$
zand	$10^{-6} - 10^{-3}$
silt	$10^{-8} - 10^{-6}$
klei	$10^{-10} - 10^{-8}$

Tabel 7.1. Doorlatendheidscoëfficiënt.

de doorlatendheidscoëfficiënt vele malen kleiner zijn, bijvoorbeeld  $10^{-9}$  m/s of nog kleiner. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat de doorlatendheid ongeveer evenredig is met het kwadraat van de korreldiameter. Een indicatie voor de doorlatendheid van verschillende grondsoorten vindt men in tabel 7.1.

De doorlatendheid hangt, zoals reeds eerder gesteld, ook af van de vloeistof. Voor een taai vloeistof is de weerstand tegen stroming groter. Dit wordt tot uitdrukking gebracht in de formule (6.11),

$$k = \frac{\kappa \gamma_w}{\mu}, \quad (7.3)$$

waarin  $\mu$  de dynamische viscositeit van de vloeistof is. De grootte  $\kappa$  (de intrinsieke doorlatendheid) hangt alleen van de geometrie van het korrelskelet. Men gebruikt hiervoor wel de formule van Kozeny-Carman

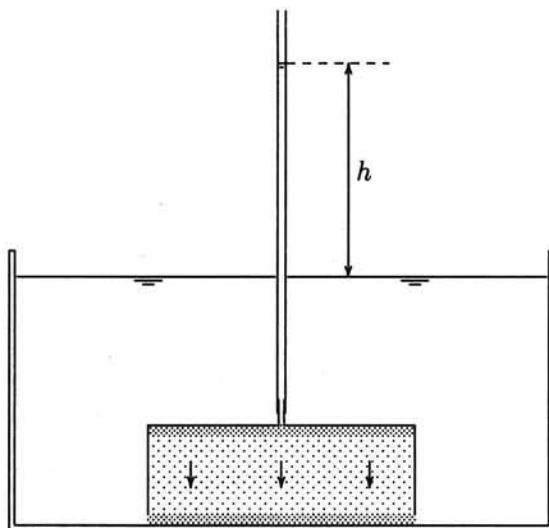
$$\kappa = cd^2 \frac{n^3}{(1-n)^2}. \quad (7.4)$$

Hierin is  $d$  een maat voor de korreldiameter, en  $c$  een coëfficiënt die nu alleen nog maar afhangt van de warrigheid van het stelsel van poriën, en de vorm van de korrels. De waarde ervan is ongeveer 1/200 à 1/100. Formule (7.4) is voor de bepaling van de  $k$ -waarde niet van veel waarde, omdat de coëfficiënt nog variabel is, en omdat men de waarde van de doorlatendheid eenvoudig direct uit een doorlatendheidsproef kan bepalen. Wel is van belang dat men de afhankelijkheid van porositeit en korrelgrootte uit de formule van Kozeny-Carman kan afleiden. Zo ziet men dat de korreldiameter kwadratisch voorkomt in de doorlatendheid. Dit betekent dat een factor 1000 in de korreldiameter, zoals tussen zand en klei kan bestaan, leidt tot een factor  $10^6$  in de doorlatendheid, zoals ook vaak wordt gevonden.

De zeer grote variabiliteit van de doorlatendheid betekent dat dit een erg belangrijke grootte kan zijn. Zo past men in een stuwdam vaak een kern van klei toe, in een dam van grind of zand. Die kern heeft tot doel de hoeveelheid water die uit het stuwmeer weglekt door de dam te beperken. Als die kern niet goed homogeen is, en bijvoorbeeld een hoeveelheid zand bevat, kan de werking ervan sterk verminderd zijn.

## 7.2 Falling head test

Voor slecht doorlatende gronden, zoals klei, is de gewone doorlatendheidsproef van figuur 7.1 ongeschikt, omdat men dan zeer lang moet wachten om een klein beetje water te kunnen opvangen, en het erg lang duurt voor zich een stationaire toestand instelt. Men maakt voor dergelijke gronden wel gebruik van een proefje zoals getekend in figuur 7.2, de *falling head test* (head is Engels voor stijghoogte). De opstelling bestaat uit een monster klei in



Figuur 7.2. Falling head test.

een cirkelvormige ring, die in een grotere bak wordt geplaatst, onder water. De onderkant van het monster is in open verbinding met het water in de bak. Aan de bovenkant is het kleimonster verbonden met een dun buisje, waarin water staat tot een grotere hoogte dan het water in de bak. Aan de onderkant en de bovenkant van het grondmonster bevindt zich een goed doorlatende drainage, bijvoorbeeld in de vorm van cirkelvormige poreuze platen. Onder invloed van het stijghoogteverschil  $h$  stroomt het water door het monster, naar beneden.

In dit geval is het stijghoogteverschil niet constant, maar wordt het gedurende de proef steeds kleiner, omdat het water niet wordt aangevuld, en de hoogte  $h$  geleidelijk afneemt. Men meet het verloop van de stijghoogte in het buisje, als functie van de tijd. Er geldt nu, op grond van de wet van Darcy,

$$Q = \frac{kAh}{L}. \quad (7.5)$$

Als het oppervlak van het buisje  $a$  is dan geldt er ook dat

$$Q = -a \frac{dh}{dt}. \quad (7.6)$$

Eliminatie van  $Q$  uit deze twee vergelijkingen geeft

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{kA}{aL} h. \quad (7.7)$$

Dit is een differentiaalvergelijking voor  $h$ , met als oplossing

$$h = h_0 \exp(-kAt/aL). \quad (7.8)$$

waarin  $h_0$  de waarde van het stijghoogteverschil  $h$  is op het tijdstip  $t = 0$ . Meet men op het tijdstip  $t$  een hoogteverschil  $h$ , dan volgt de waarde van de doorlatendheidscoëfficiënt uit de formule

$$k = \frac{aL}{At} \ln\left(\frac{h_0}{h}\right). \quad (7.9)$$

Als het oppervlak  $a$  van het buisje klein is ten opzichte van het oppervlak  $A$  van het monster kan men op deze wijze relatief kleine waarden van  $k$  nog behoorlijk nauwkeurig bepalen. Het grote voordeel is dat er, als het buisje erg nauw is, heel kleine hoeveelheden water kunnen worden gemeten.

Opgemerkt moge worden dat de bepaling van de doorlatendheid in het laboratorium weliswaar vrij nauwkeurig kan geschieden, maar dat men op moet passen dat het monster bij het steken, en bij het transport naar het laboratorium, zorgvuldig behandeld wordt. Bovendien heeft de gevonden waarde uiteraard alleen betrekking op het monster, dat slechts beperkte afmetingen heeft. Deze waarde hoeft niet representatief te zijn voor de waarde in de natuur voor een groot grondmassief. Vooral als men een dun kleilaagje over het hoofd ziet, of niet weet dat een bepaalde slecht doorlatende kleilaag gaten kan vertonen, kan men de werkelijke gemiddelde doorlatendheid flink overschatten of onderschatten. Het is vaak verstandig de doorlatendheid in het terrein (men noemt dat *in situ*) te bepalen, waarbij men er dan voor moet zorgen dat het gehele grondmassief meespeelt in de stroming.

### Opgaven

**7.1** In een doorlatendheidsapparaat (zie figuur 7.1) wordt een stijghoogteverschil van 20 cm gehandhaafd tussen onder- en bovenzijde. De lengte van het monster is 40 cm, en de binnendiameter van de ronde buis is 10 cm. Gemeten wordt dat in 1 minuut een hoeveelheid water groot  $35 \text{ cm}^3$  door het monster stroomt. Bereken de waarde van de doorlatendheidscoëfficiënt.

**7.2** Een doorlatendheidsapparaat (zie figuur 7.1) wordt gevuld met 20 cm zand met een doorlatendheidscoëfficiënt groot  $10^{-5} \text{ m/s}$ , en daarboven 20 cm zand met een 4 maal zo grote doorlatendheid. De diameter van de ronde buis is 10 cm. Bereken de hoeveelheid water die door het gelaagde grondmonster stroomt onder invloed van een stijghoogteverschil van 20 cm tussen de onderkant en bovenkant.

**7.3** In figuur 7.1 stroomt het water in verticale richting door de buis. In principe zou men de buis ook horizontaal kunnen opstellen. Dat maakt voor de gebruikte formules niet uit. Waarom doet men dit toch liever niet?

**7.4** Een ingenieur moet ergens in den vreemde snel een schatting maken van de doorlatendheid van een zekere zandsort. Hij herinnert zich dat de doorlatendheidscoëfficiënt die hij ooit in Nederland van een zekere zandsort bepaald heeft  $8 \text{ m/d}$  was. Het zand waar het nu om gaat bestaat zo op het oog uit korrels die ongeveer  $\frac{1}{4}$  maal zo groot zijn. Hoe groot schat hij de doorlatendheidscoëfficiënt?



## Hoofdstuk 8

# GRONDWATERSTROMING

In de vorige hoofdstukken is aangegeven hoe men, met de wet van Darcy, uit de drukverdeling, of de verdeling van de stijghoogte, de stroming van het grondwater kan afleiden. In veel gevallen kent men die drukverdeling van tevoren niet. Vaak wil men de drukverdeling voorspellen op basis van berekeningen, maar de wet van Darcy alleen is daarvoor niet voldoende. Men moet er nog een vergelijking bij in rekening brengen, en wel de *continuïteitsvergelijking*, of, met andere woorden, het *behoud van massa* van het grondwater, of, met nog andere woorden, de *grondwaterbalans*. In dit hoofdstuk zullen de beschouwingen worden beperkt tot relatief eenvoudige gevallen. Er wordt aangenomen, zoals in het vorige hoofdstuk, dat de grond isotroop is, en volledig verzadigd met een homogene vloeistof (zoet water). Voorts wordt aangenomen dat de stroming onafhankelijk is van de tijd.

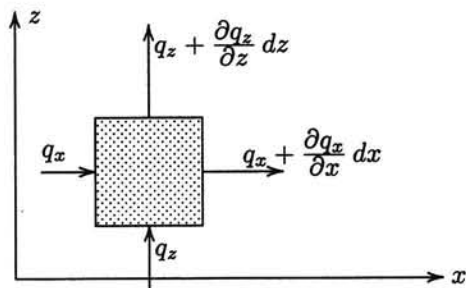
### 8.1 Stroming in een verticaal vlak

Stel dat de stroming van het grondwater plaats vindt in een verticaal vlak, en dat de coördinaten in dat vlak worden aangegeven met  $x$  en  $z$ . De twee relevante componenten van de wet van Darcy zijn nu

$$q_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{8.1}$$

$$q_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Behoud van massa vereist nu dat er geen water gewonnen kan worden uit, of verloren kan



Figuur 8.1. Continuïteit.

gaan in, een elementair blokje, met afmetingen  $dx$  en  $dz$  in het  $x, z$ -vlak, zie figuur 8.1. In de  $x$ -richting stroomt het water door een verticaal oppervlak ter grootte  $dy dz$ , waarin  $dy$  de dikte van het elementje loodrecht op het vlak van tekening is. Het verschil van de uitstroom door het rechter zijvlak en de instroom door het linker zijvlak is nu, uitgedrukt als een debiet,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz.$$

In  $z$ -richting stroomt het water door een hori-

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz.$$

Tezamen moeten deze twee grootheden nul zijn, en men vindt dus, na deling door  $dx dy dz$ ,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0. \quad (8.2)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de veronderstelling dat de dichtheid van de vloeistof constant is, zodat behoud van massa overeenkomt met behoud van volume. Vergelijking (8.2) drukt uit dat een situatie zoals getekend in figuur 8.1, waarbij zowel de stroming in  $x$ -richting als die in  $z$ -richting toeneemt, onmogelijk is.

Substitutie van (8.1) in (8.2) leidt tot de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0, \quad (8.3)$$

waarbij als nieuwe aanname nog gesteld is dat de doorlatendheid  $k$  van de grond constant is. Men noemt (8.3) wel de vergelijking van Laplace. Deze differentiaalvergelijking beschrijft, tezamen met de randvoorwaarden, de stroming van het grondwater, als de grond homogeen en isotroop is, en als de dichtheid van de vloeistof constant is. Bovendien is nog aangenomen dat er geen berging kan optreden. Dat is het geval als de grond niet vervormt, en volledig verzadigd is.

Het wiskundige probleem is om een oplossing van vergelijking (8.3) te vinden, die ook nog aan de randvoorwaarden voldoet. In dit boek zal niet uitvoerig worden ingegaan op de verschillende methoden die er bestaan voor de oplossing van dat probleem. Over grondwatermechanica (of grondwaterstroming) zijn veel gespecialiseerde boeken beschikbaar. Er zal in dit boek alleen een aantal particuliere oplossingen beschouwd worden, en een benaderingsmethode met behulp van een vierkantennet.

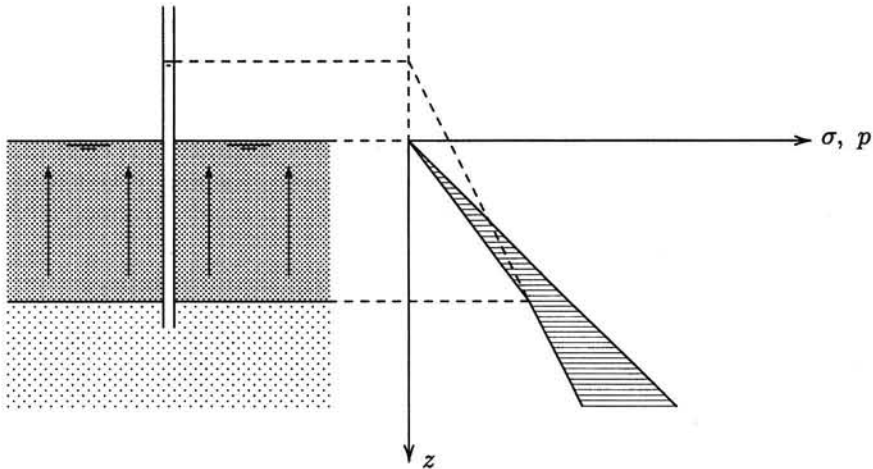
## 8.2 Opwaartse stroming

Een zeer eenvoudige particuliere oplossing is die voor een uniforme stroming in  $x$ -richting of in  $z$ -richting. Voor een stroming in  $z$ -richting is die oplossing  $h = iz$ , waarin  $i$  een constante is, die een maat is voor het specifieke debiet. De grootte  $i$ , dat is dus  $dh/dz$ , noemt men het *verhang*, of de *gradiënt*. Er geldt nu  $q_x = 0$  en  $q_z = -ki$ . Dat voldoet uiteraard altijd aan de continuïteitsvergelijking (8.2). Als het specifieke debiet in verticale richting aangegeven wordt met  $q_0$  vindt men  $i = -q_0/k$ . Omdat in het algemeen  $h = z + p/\gamma_w$  geldt er nu voor de druk in het grondwater

$$p = -\gamma_w z(1 - i) = -\gamma_w z(1 + q_0/k). \quad (8.4)$$

De eerste term is de hydrostatische druk, en de tweede term beschrijft de invloed van de verticale stroming.

In figuur 8.2 is een voorbeeld getekend van een kleilaag boven op een zandlaag, waarbij de grondwaterstand bovenin de kleilaag samenvalt met het maaiveld, terwijl in het diepe zand de stijghoogte hoger is. Daardoor treedt in de kleilaag een opwaartse stroming op. De stijghoogte in het diepe zand is in de figuur aangegeven door de waterstand in een stijgbuis die tot in dat zand reikt. Een dergelijk geval kan optreden in een polder, als onder een slecht doorlatende grond een diepe zandlaag aanwezig is, die zeer goed doorlatend is, en die in open verbinding staat met een gebied van hogere waterstanden, of bijvoorbeeld met de ringvaart van de polder. Er is aangenomen dat het diepe zand ten opzichte van de klei zo goed doorlatend is dat de waterdruk in het diepe zand hydrostatisch verloopt. De opwaartse stroming in de kleilaag noemt men *kwel*. De bemaling van de polder moet zodanig ontworpen zijn dat deze zowel het regenwater als de kwel kan afvoeren. Het verloop van de



Figuur 8.2. Opwaartse grondwaterstroming, Voorbeeld 1.

waterspanningen in de zandlaag volgt uit de gegeven ligging van het freatisch vlak, en de aanname dat het verloop hydrostatisch is. Dit leidt tot een waarde voor de waterspanning aan de onderkant van de kleilaag. In de kleilaag zelf verloopt de waterspanning dan lineair tussen deze beide waarde en de gegeven waarde 0 aan het oppervlak, als de doorlatendheid van die kleilaag constant is. De verticale stroming moet immers constant zijn om aan continuïteit te voldoen.

In figuur 8.2 zijn ook de totaalspanningen  $\sigma$  getekend. Daarbij is aangenomen dat de klei en het zand in verzadigde toestand even zwaar zijn. De totaalspanningen verlopen dan lineair vanaf de waarde  $\sigma = 0$  op het maaiveld. De effectieve spanningen zijn in figuur 8.2 aangegeven met een horizontale arcering. Ze worden zoals gebruikelijk gevonden als het verschil van de totaalspanningen en de waterspanningen. Men ziet dat de effectieve spanningen in de kleilaag kleiner zijn dan in het geval zonder grondwaterstroming, omdat de waterspanningen groter zijn dan in het hydrostatische geval, als de grondwaterstand in het zand gelijk zou zijn aan het maaiveldniveau. De opwaartse stroming leidt dus tot een verlaging van de effectieve spanningen.

Het is zelfs mogelijk dat de stijghoogte in het diepe zand zo groot is dat de effectieve spanningen in de slecht doorlatende laag nul worden. Nog kleiner kunnen ze niet worden, omdat de korrels niet aan elkaar kunnen trekken. De situatie dat de effectieve spanningen nul worden is kritiek. Tussen de korrels worden dan geen krachten meer overgedragen. Als de waterdruk onder de kleilaag nog verder op zou lopen wordt de kleilaag opgetild, en deze zal dan ongetwijfeld scheuren en breken. De grond heeft als  $\sigma' = 0$  geen enkele weerstand meer. Men spreekt wel van *drijfzand*. De grootte van het verhang  $dh/dz$  waarbij dat optreedt noemt men het *kritieke verhang*. Als het volumegewicht van de natte grond aangegeven wordt met  $\gamma_n$  dan zijn de grondspanningen

$$\sigma_{zz} = -\gamma_n z. \quad (8.5)$$

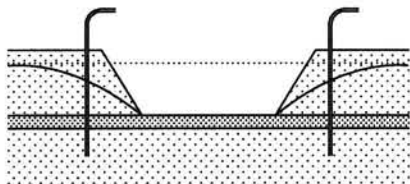
De waterspanningen, zie (8.4), zijn gelijk aan de grondspanningen als  $i = i_{kr}$ , met

$$i_{kr} = -\frac{\gamma_n - \gamma_w}{\gamma_w}. \quad (8.6)$$

Een dergelijke negatieve gradiënt betekent, omdat de  $z$ -as positief is naar boven, dat de stijghoogte naar beneden toe toeneemt. De orde van grootte van het kritieke verhang is, in absolute waarde, gelijk aan 1, omdat  $\gamma_n$  meestal ongeveer 2 maal zo groot is  $\gamma_w$ .

In de kritieke toestand is de verticale snelheid zo groot dat de opwaartse wrijvingskracht op de korrels er toe leidt dat ze geen contact meer met elkaar hebben. Een dergelijke situatie, waarbij de korrels geen enkele samenhang meer vertonen, zal een goede civiel ingenieur uiteraard vermijden. In de praktijk is het verstandig om daarbij een behoorlijke veiligheidsmarge te gebruiken. Als de bovenste grondlaag niet homogeen is kan bij een gemiddeld verhang beduidend lager dan 1 heel gemakkelijk plaatselijk het verhang groter worden, hetgeen tot stabiliteitsverlies kan leiden.

In een aantal gevallen heeft dit verschijnsel tot calamiteiten geleid, bijvoorbeeld bij diepe bouwputten waarvan de bodem open gebarsten is. Het voorkomen daarvan is weliswaar kostbaar, maar altijd veel goedkoper dan herstel achteraf, en kan geschieden door



Figuur 8.3. Bemaling bouwput.

een kunstmatige verlaging van de stijghoogte in het diepe grondwater, met een bronbemaling. In figuur 8.3 is een voorbeeld van een bouwput getekend. Als de grondwaterstand in de bovenste zandlaag verlaagd wordt door een open bemaling op de bodem van de bouwput zal de grondwaterpiegel ongeveer verlopen zoals aangegeven door de getrokken kromme lijnen. Het water uit de bovenste laag stroomt af naar de bouwput, die dan ook continu bemalen moet worden. Het nulniveau van het grondwater in de diepe laag wordt, als de kleilaag slecht doorlatend is, maar nauwelijks beïnvloed door de bemaling van de bouwput. Dat nulniveau is in figuur 8.3 aangegeven met een stippellijn. Het getekende geval is zeer gevaarlijk. In dit geval is er immers maar een dunne kleilaag die het diepe zand scheidt van het bovenste pakket. De waterdruk onder de kleilaag is veel te groot om evenwicht te maken met het gewicht van de kleilaag, die dan ook zeker zal worden opgedrukt, of opbarsten. Om dat te voorkomen zullen de waterspanningen in het diepe zand verlaagd moeten worden, met een bronbemaling. Die is in de figuur al wel getekend, maar zijn werking nog niet.

Interessant is nog dat men het kritieke verhang ook kan bepalen met behulp van het begrip stromingsdruk, zoals in het vorige hoofdstuk ingevoerd. Men beschouwt dan alle krachten zoals die op het korrelskelet worden uitgeoefend. Allereerst zijn daar de krachten door het eigen gewicht. Die komen er op neer dat de effectieve spanningen lineair met de diepte toenemen, met een vermenigvuldigingsfactor  $\gamma_n - \gamma_w$ ,

$$\sigma'_{zz} = -(\gamma_n - \gamma_w)z. \quad (8.7)$$

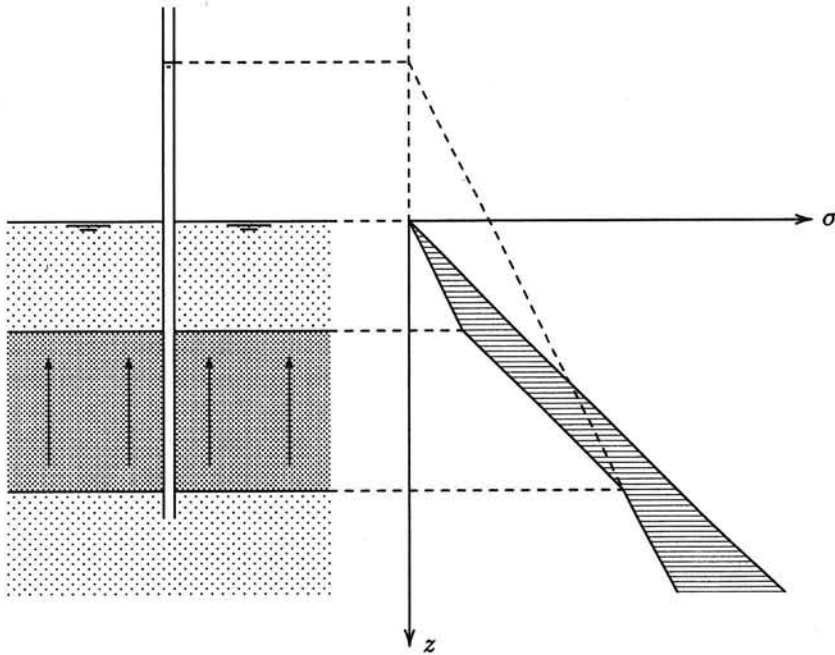
Men zegt wel dat de korrels een *schijnbaar volumegewicht* hebben van  $\gamma_n - \gamma_w$ . Men noemt dat ook wel het *volumegewicht onder water*. De stromingsdruk is, zie (6.16), in absolute zin,  $j = \gamma_w i$ . De twee volumekrachten kunnen elkaar opheffen als de waarden gelijk en tegengesteld zijn, d.w.z. als  $i = i_{kr}$ , met

$$|i_{kr}| = \frac{\gamma_n - \gamma_w}{\gamma_w}. \quad (8.8)$$

Dit komt overeen met de waarde gevonden in (8.6).

In het algemeen geeft men in de grondmechanica de voorkeur aan de eerste redenering, waarbij de effectieve spanningen worden afgeleid uit het verschil van totaalspanningen en waterspanningen, en de kritieke toestand ontstaat als de effectieve spanning ergens nul wordt, boven een redenering met "kritiek verhang". Dat is namelijk veel algemener. Ter toelichting is een wat gecompliceerder geval getekend in figuur 8.4, met twee zandlagen onder en boven een kleilaag. Gesteld wordt dat in beide zandlagen de waterdruk hydrostatisch verloopt,

maar in de onderste laag is er weer een overdruk. Door de kleilaag stroomt grondwater omhoog. De toestand getekend in figuur 8.4 is nog niet kritiek, ook al is het opwaartse

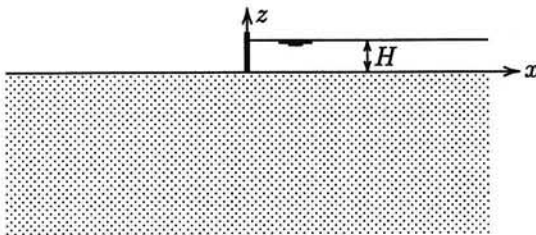


Figuur 8.4. Opwaartse grondwaterstroming, Voorbeeld 2.

verhang in de kleilaag  $i = 1$ , zoals men kan zien aan het feit dat de effectieve spanningen in de kleilaag niet met de diepte variëren. Blijkbaar maakt het gewicht onder water evenwicht met de stromingsdruk. Echter, door de bovenbelasting die op de kleilaag werkt zijn de effectieve spanningen nergens nul, en is er geen gevaar voor opbarsten. De waterspanning in de onderste laag kan nog aanzienlijk worden vergroot voordat ergens (aan de onderkant van de kleilaag) de effectieve spanningen nul worden. Pas dan zal de grond worden opgedrukt door het diepe grondwater.

Concluderend kan men stellen dat bij een opwaartse grondwaterstroming een kritieke toestand kan ontstaan, en dat dat optreedt als de effectieve spanning ergens nul wordt. Die toestand moet worden vermeden.

Een niet zo triviale oplossing van de differentiaalvergelijking als de vorige is die voor de



Figuur 8.5. Stroming onder een muur.

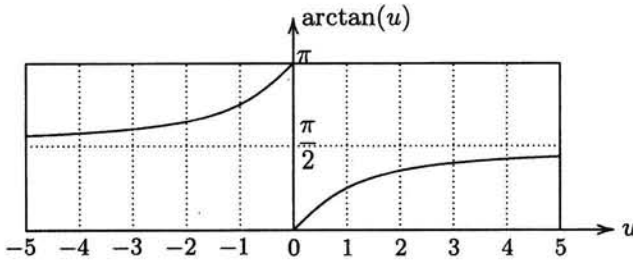
stroming in een zeer diepe laag, begrensd door het horizontale vlak  $z = 0$ , onder een dunne verticale muur op  $x = 0$  door, zie figuur 8.5. Het water aan de rechterkant van de muur staat op een hoogte  $H$  boven het maaiveld. Aan de linkerkant van de muur staat het water gelijk met het maaiveld. De oplossing van dit probleem van grondwaterstroming kan men vinden

met behulp van de theorie van complexe functies. Hoe dat precies werkt doet het er hier niet toe. Het is hier voldoende om te stellen dat men voor dit geval als oplossing verkrijgt

$$h = \frac{H}{\pi} \arctan(z/x). \quad (8.9)$$

Om met deze oplossing te kunnen werken moet men wel controleren of deze juist is. Daartoe is het voldoende te constateren dat de gestelde oplossing inderdaad voldoet aan de differentiaalvergelijking en aan de randvoorwaarden.

Dat de oplossing (8.9) aan de differentiaalvergelijking (8.3) voldoet kan men eenvoudig



Figuur 8.6. Functie  $\arctan(u)$ .

nagaan door substitutie in die vergelijking. Om na te gaan of de gestelde oplossing ook aan de randvoorwaarden voldoet moet men in de oplossing  $z \uparrow 0$  laten gaan. De waarde van  $z/x$  wordt dan 0 van de onderkant als  $x > 0$ , en van de bovenkant als  $x < 0$ . Er wordt nu afgesproken dat  $\arctan(u)$  loopt van 0 tot  $\pi/2$  als het argument  $u$  loopt van 0

tot  $\infty$ , en daarna van  $\pi/2$  tot  $\pi$  als het argument loopt van  $-\infty$  tot 0, zie figuur 8.6. Er volgt dan inderdaad dat  $h = H$  als  $x > 0$  en  $z \uparrow 0$ , en dat  $h = 0$  als  $x < 0$  en  $z \uparrow 0$ .

Voor de verticale component van het specifieke debiet vindt men

$$q_z = -\frac{kH}{\pi} \frac{x}{x^2 + z^2}. \quad (8.10)$$

In het bijzonder geldt langs de horizontale as, waar  $z = 0$ ,

$$z = 0 : q_z = -\frac{kH}{\pi x}. \quad (8.11)$$

Als  $x > 0$  is dit negatief, dat wil zeggen naar beneden gericht. Rechts van de muur stroomt het water dus verticaal naar beneden de grond in, zoals men ook kan verwachten. Als  $x < 0$ , dat wil zeggen links van de muur, is het specifieke debiet positief, de stroming is dan in opwaartse richting, zoals men ook zou verwachten. Vlak bij de verticale muur, d.w.z. voor kleine waarden van  $x$ , is de snelheid erg groot. Dat zou lokaal wel eens tot uitspoeling van de grond kunnen leiden.

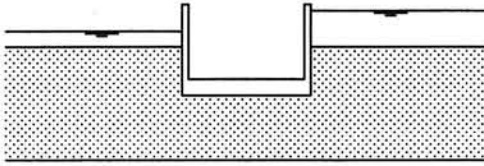
Uit de oplossing volgt ook nog, omdat  $\arctan(\infty) = \pi/2$ , dat op de verticale as,  $x = 0$ , de stijghoogte juist gelijk is aan  $H/2$ . Dat spreekt eigenlijk vanzelf, vanwege de symmetrie van de stroming.

Het totale debiet dat uit het rechter-reservoir stroomt tussen de punten  $x = a$  en  $x = b$  (met  $b > a$ ) vindt men door integratie van vergelijking (8.11). Het resultaat is

$$Q = \frac{kHB}{\pi} \ln(b/a). \quad (8.12)$$

waarin  $B$  de afmeting loodrecht op het vlak van stroming is. Formule (8.12) laat zien dat als  $b \rightarrow \infty$  of als  $a \rightarrow 0$  het totale debiet oneindig wordt. Een dergelijk geval kan in werkelijkheid gelukkig niet optreden.

Men kan formule (8.12) met vrucht gebruiken om een eerste schatting te maken voor het



Figuur 8.7. Strooming onder een sluis.

debiet onder een waterbouwkundige constructie door, zoals een stuw of een sluis. Als de lengte van de sluis in figuur 8.7 aangegeven wordt met  $2a$ , en de hoogte van de grondlaag onder de sluis met  $d$ , dan zou men kunnen stellen dat het water links en rechts van de sluis ook stroomt door

een strook met een breedte  $d$ . De strooming lijkt dan op een deel van de strooming van figuur 8.5 tussen  $x = b = a + d$  en  $x = a$ . In figuur 8.7 is  $a = d$ , en dus  $\ln(b/a) = 0.693$ . Men vindt dan  $Q = 0.22kHB$  als eerste benadering voor het debiet.

### Opgaven

**8.1** Een kleilaag heeft een dikte van 8 m en een nat volumegewicht van  $18 \text{ kN/m}^3$ . Erboven ligt een laag goed doorlatend zand, met een dikte van 4 m, een nat volumegewicht van  $20 \text{ kN/m}^3$ , en een droog volumegewicht van  $16 \text{ kN/m}^3$ . De grondwaterstand valt samen met het maaiveld. Onder de kleilaag bevindt zich een tweede zandlaag, waarin de stijghoogte 4 m hoger is dan het maaiveld. Teken de totaalspanningen, waterspanningen en effectieve spanningen in de drie lagen. Bereken in het bijzonder de effectieve spanning in het midden van de kleilaag.

**8.2** Wat verandert er in het vorige probleem als de grondwaterstand in de bovenste laag, door een systeem van slootjes, wordt verlaagd tot 2 m beneden het maaiveld?

**8.3** En wat verandert er als daarna de grond belast wordt door een betonplaat, met een gewicht van  $40 \text{ kN/m}^2$ ?

**8.4** Een kleilaag heeft een dikte van 3 m en een nat volumegewicht van  $18 \text{ kN/m}^3$ . Erboven ligt een laag goed doorlatend zand, met een dikte van 3 m, een nat volumegewicht van  $20 \text{ kN/m}^3$ , en een droog volumegewicht van  $16 \text{ kN/m}^3$ . De grondwaterstand ligt op 1 m beneden het maaiveld. Onder de kleilaag bevindt zich een tweede zandpakket, waarin de stijghoogte variabel is. Hoe groot kan deze stijghoogte maximaal zijn (ten opzichte van het maaiveld) voordat de kleilaag opbarst?

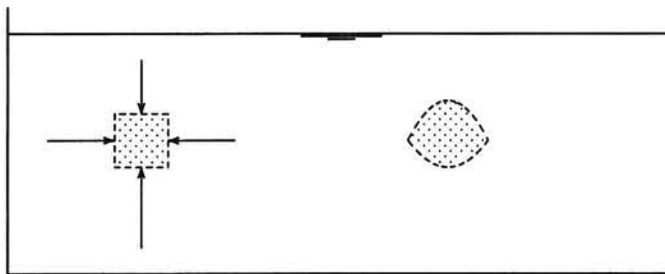
## Hoofdstuk 9

# OPDRIJVEN

In het vorige hoofdstuk is gezien dat er soms een situatie kan ontstaan waarbij de effectieve spanningen tot nul worden gereduceerd. Dat is een kritieke situatie: als de effectieve spanningen nul zijn verliest de grond zijn inwendige samenhang, en de grond kan geen spanningen meer overbrengen. Bij de geringste externe belasting die tot trekspanningen in de grond aanleiding zou geven, of tot extra schuifspanningen, is er geen evenwicht mogelijk, en een calamiteit is het gevolg. Van dergelijke calamiteiten zijn er diverse voorbeelden, vaak met zeer grote schade: het opbarsten van de bodem van bouwkuipen, en het opdrijven van kelders, tunnels en pijpleidingen.

### 9.1 Het principe van Archimedes

Het basisprincipe van de oprijvende kracht op lichamen onder water is afkomstig van Archimedes. Men kan dat principe het eenvoudigst begrijpen aan de hand van een klein rechthoekig blokje in een vloeistof die in rust verkeert, zie figuur 9.1. Van welke stof het blokje is gemaakt doet er niet toe, maar het moet wel in rust zijn. De druk in het water is



Figuur 9.1. Het principe van Archimedes.

alleen afhankelijk van de diepte, en in een homogene vloeistof is die druk

$$p = \rho g z, \quad (9.1)$$

waarin  $\rho$  de massadichtheid van de vloeistof is,  $g$  de versnelling van de zwaartekracht, en  $z$  de diepte onder het wateroppervlak. De drukken op de linkerkant en de rechterkant van een elementair rechthoekje zijn gelijk en tegengesteld, en heffen elkaar dus op. De druk aan de onderkant is groter dan die aan de bovenkant, en er resteert dus een kracht omhoog gelijk aan het drukverschil vermenigvuldigd met het oppervlak van de horizontale onder- en bovenvlakjes. Omdat dat drukverschil juist gelijk is aan  $\rho g h$ , waarin  $h$  de hoogte van het elementje is, is de opwaartse kracht juist gelijk aan het gewicht van water in het volume van



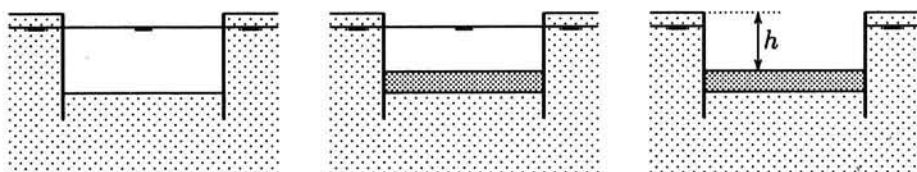
het blokje. Omdat men elk lichaam opgebouwd kan denken uit een verzameling van kleine blokjes volgt de algemene geldigheid van het principe van Archimedes.

Een iets andere redenering, direct geldig voor een lichaam van willekeurige vorm, is dat het voor de kracht op een lichaam niet uitmaakt of het bestaat uit water of uit een andere stof, dat dan wellicht wel kunstmatig op zijn plaats moet worden gehouden. Omdat het lichaam in water in rust is moet de opwaartse kracht gelijk zijn aan het gewicht van het water, en dus werkt er op een ander lichaam in rust in het zelfde volume ook een opwaartse kracht gelijk aan het gewicht van het verplaatste water. Dit is het bewijs dat men in de meeste natuurkundeboeken vindt voor het principe van Archimedes. Er is al ruim 2000 jaar geen speld tussen te krijgen.

De opwaartse kracht op een lichaam in een vloeistof kan er toe leiden dat het gaat drijven, als het gewicht van het lichaam zelf kleiner is dan de opwaartse kracht. Opdrijven van een lichaam in water kan dus optreden als het lichaam gemiddeld lichter is dan water. Meer algemeen kan men stellen dat opdrijven kan optreden als de opwaartse kracht op het lichaam groter is dan alle neerwaartse krachten. Dat kan bij buizen, tunnels of kelders gemakkelijk het geval zijn. In principe kan men opdrijven eenvoudig voorkomen: het lichaam moet zwaar genoeg zijn. Beschouwd als grondmechanisch probleem is de eis dat er voor gezorgd moet worden dat de *effectieve spanningen* onder alle omstandigheden groter dan nul zijn (en dan liefst nog met een redelijke veiligheidsmarge). In de praktijk blijkt dat soms toch nog tamelijk lastig, omdat men niet altijd alle omstandigheden heeft voorzien, en omdat men soms niet in de gaten heeft dat er ergens zo'n kritieke toestand kan ontstaan. De analyse kan het best worden gepresenteerd aan de hand van een paar voorbeelden.

## 9.2 Een vloer van onderwaterbeton

Als eerste voorbeeld wordt beschouwd het geval van een betonvloer van een ingraving. Dergelijke ingravingen worden in Nederland veel gebruikt bij toeritten van tunnels, of voor de fundering van een kelder. Een goede methode is om eerst een ingraving te maken onder water, tussen twee betonnen of stalen wanden. Met zo'n natte ontgraving is in Nederland veel ervaring, oorspronkelijk opgedaan bij het baggeren van geulen in rivieren. Nadat de



Figuur 9.2. Ontgraving met onderwaterbetonvloer.

put op diepte is gebracht wordt dan onder water een betonvloer gestort, waarbij er speciale aandacht wordt geschonken aan een goede aansluiting tussen de wanden en de vloer, en aan de waterdichtheid en continuïteit van de vloer. Als de betonvloer gereed is kan de bouwput ontwaterd worden, en pas in dat stadium komt aan de orde of de betonvloer zwaar genoeg is om opdrijven te voorkomen.

In principe kan de berekening van de stabiliteit op twee manieren geschieden. De beste manier is om na te gaan hoe groot de effectieve spanningen juist onder de betonvloer zijn. Zolang die positief zijn (en er dus druk op de korrels wordt overgebracht) is er niets aan de hand. Maar als er trekspanningen zouden ontstaan is het ontwerp niet goed, en zal de vloer

niet in evenwicht kunnen zijn, en dus opdrijven. Stel voor het geval getekend in figuur 9.2 dat de grondwaterstand op een diepte  $d = 1$  m onder maaiveld ligt, en dat de diepte van de bovenkant van de betonvloer volgens het ontwerp  $h = 5$  m onder het maaiveld moet liggen. Stel verder dat de dikte van de betonvloer  $D$  is. Dan is de totaalspanning vlak onder de betonvloer

$$\sigma = \gamma_b D, \quad (9.2)$$

waarin  $\gamma_b$  het volumegegewicht van het beton is, bijvoorbeeld  $\gamma_b = 25 \text{ kN/m}^3$ . De waterspanning vlak onder de betonvloer is

$$p = (h - d + D)\gamma_w, \quad (9.3)$$

en de effectieve spanning is dus

$$\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - p = \gamma_b D - \gamma_w (h - d + D) = (\gamma_b - \gamma_w)D - \gamma_w (h - d). \quad (9.4)$$

De eis dat dit groter dan nul moet zijn leidt tot de voorwaarde

$$D > (h - d) \frac{\gamma_w}{\gamma_b - \gamma_w}, \quad (9.5)$$

en de effectieve spanning is dus positief als de dikte van de betonvloer groter is dan deze kritieke waarde. In het als voorbeeld genoemde geval, waarin  $h - d = 4$  m en het beton 2.5 maal zo zwaar is als water, betekent dit dat de betonvloer minstens 2.67 m dik moet zijn.

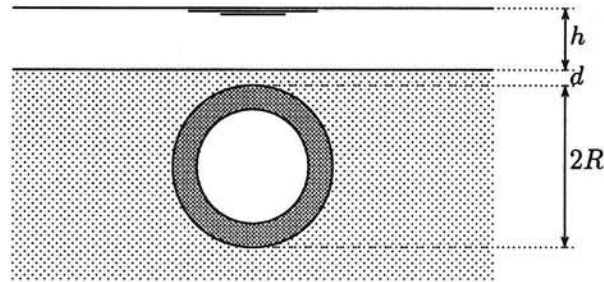
Men kan de analyse van dit geval nogal wat sneller uitvoeren door direct te stellen dat het gewicht van het beton voldoende moet zijn om de opwaartse druk werkend aan de onderkant van de vloer te weerstaan. Dat leidt tot het zelfde resultaat. De redenering via de effectieve spanning lijkt wat omslachtiger, maar is wel algemener, en gemakkelijker te generaliseren naar andere gevallen, met name als het grondwater ook nog stroomt. De grondwaterdrukken zijn dan niet hydrostatisch, maar moeten op andere wijze berekend worden.

De betonvloer in het voorbeeld wordt nogal dik, en voor diepere ingravingen wordt de benodigde dikte nog veel groter. Daarom gebruikt men in de praktijk soms dunnere vloeren, in combinatie met een veld van trekpalen, die dan tot doel hebben om het gewicht van de grond onder de vloer te mobiliseren voor het bieden van weerstand tegen de opwaartse druk van het water. Men dient daarbij te bedenken dat de maximale trekkracht van een paal een nogal wat onzekerder grootte is dan het gewicht van een betonvloer, omdat niet zo goed valt te zeggen hoeveel van de grond rondom de paal aan de paal blijft "hangen" als hij uit de grond zou worden getrokken. De toe te passen veiligheidsfactoren moeten bij zo'n oplossing met trekpalen veel groter zijn dan bij een vloer die zijn weerstand ontleent aan zijn eigen gewicht.

### 9.3 Opdrijven van een buis

Het tweede voorbeeld heeft betrekking op een pijpleiding in de zeebodem (of een ronde tunnel onder een rivier), zie figuur 9.3. De pijpleiding is van staal gemaakt, met een betonnen bekleding, en heeft een diameter  $2R$  en een totaal gewicht  $G$ , in  $\text{kN/m}$ . Dat gewicht bestaat uit het gewicht van het staal en dat van de bekleding, per strekkende meter pijpleiding. Voor het opdrijven is de meest gevaarlijke toestand als de pijpleiding leeg is, en er wordt aangenomen dat dat inderdaad kan voorkomen.

Voor de beoordeling van de stabiliteit van de pijpleiding is het handig het gewicht ervan uit te drukken door het gemiddelde volumegegewicht  $\gamma_p$ , gedefinieerd als het totale gewicht



Figuur 9.3. Een buis in de grond.

van alle materialen (inclusief de vloeistof in de leiding) gedeeld door het totale volume. In het ongunstige geval van een lege pijpleiding is dat

$$\gamma_p = G/\pi R^2. \quad (9.6)$$

De pijpleiding zal door het omringende water een opwaartse kracht  $F$  ondervinden die volgens het principe van Archimedes gelijk is

$$F = \gamma_w \pi R^2, \quad (9.7)$$

waarin  $\gamma_w$  het volumegewicht van het water is. Als de opwaartse kracht  $F$  kleiner is dan het gewicht  $G$  van de pijpleiding is er zeker geen gevaar van opdrijven. De pijpleiding zou dan zelfs in open water zinken. Dat is dus het geval als  $\gamma_p > \gamma_w$ . Voor een pijpleiding op de zeebodem is dat een nuttig criterium. De grond boven de leiding zou door erosie immers wellicht kunnen verdwijnen, en het zou heel vervelend zijn als de pijpleiding zou opdrijven naar het zee-oppervlak.

Voor een tunnel onder een rivier is er waarschijnlijk meer zekerheid dat de grond boven de tunnel aanwezig blijft. Dan kan het gewicht van de grond boven de tunnel opdrijven voorkomen zelfs als de tunnel lichter is dan water ( $\gamma_p < \gamma_w$ ). Het gewicht  $W$  van de grond boven de tunnel is

$$W = \gamma[2Rd + (2 - \pi/2)R^2], \quad (9.8)$$

waarin  $\gamma$  het volumegewicht van de grond is, en  $d$  de gronddekking, de dikte van de grond boven het hoogste punt van de tunnel. Essentieel is nu dat men zich realiseert dat, overeenkomstig het principe van Archimedes, voor het in evenwicht houden van de tunnel de grond erboven alleen bijdraagt voorzover deze zwaarder is dan water. Het water boven de tunnel draagt daartoe niet bij. Een blok hout blijft immers ook in heel diep water niet op diepte. De effectieve neerwaartse kracht van de grond boven de tunnel op de tunnel is dus

$$W' = (\gamma - \gamma_w)[2Rd + (2 - \pi/2)R^2], \quad (9.9)$$

het verschil van het gewicht van de grond en het gewicht van het water in het zelfde volume. De de minimaal benodigde hoeveelheid grond vindt men uit de voorwaarde

$$W' + G - F > 0. \quad (9.10)$$

Hieruit volgt

$$(\gamma - \gamma_w)[2Rd + (2 - \pi/2)R^2] > (\gamma_w - \gamma_p)\pi R^2. \quad (9.11)$$

Hieruit kan men de benodigde gronddekking berekenen. In principe is er nog enige reserve, omdat bij het omhoog bewegen van de tunnel de grond erboven moet afschuiven langs de

grond ernaast, en daar ontwikkelt zich door de wrijving nog een tegenwerkende kracht. In het algemeen houdt men daar in slappe grond echter meestal geen rekening mee, omdat opdrijven zo'n ernstige calamiteit is.

Men kan de berekening ook iets anders uitvoeren, op de standaard manier van grondmechanische spanningsberekeningen: eerst de totaalspanningen, dan de waterspanningen, en dan met Terzaghi de effectieve spanningen,  $\sigma' = \sigma - p$ . Het criterium voor het voorkomen van opdrijven is dan dat de effectieve spanningen onder de tunnel groter dan nul moeten zijn. Dat werkt als volgt.

De gemiddelde totaalspanning onder de tunnel (gemiddeld over de breedte  $2R$  van de tunnel) is

$$\sigma = \gamma_w h + W/2R + G/2R = \gamma_w h + \gamma[d + (1 - \pi/4)R] + \gamma_p \pi R/2, \quad (9.12)$$

waarin  $h$  de diepte van het water in de rivier is.

De gemiddelde waterspanning onder de tunnel wordt bepaald door het volume van de ruimte ingenomen door de tunnel en alles erboven, tot aan het wateroppervlak,

$$p = \gamma_w h + \gamma_w [d + (1 - \pi/4)R] + \gamma_w \pi R/2. \quad (9.13)$$

Hieruit volgt voor de gemiddelde effectieve spanning onder de tunnel

$$\sigma' = (\gamma - \gamma_w)[d + (1 - \pi/4)R] + (\gamma_p - \gamma_w)\pi R/2. \quad (9.14)$$

De eis dat dit niet negatief kan zijn omdat de korrels geen trek kunnen overdragen leidt tot hetzelfde criterium als hierboven, zie (9.11).

### Opgaven

**9.1** Een vierkant blok hout met een volume van  $0.1 \text{ m}^3$  wordt in een bassin onder water gehouden door een touw bevestigd aan de bodem van het bassin. Het volumegewicht van het hout is  $9 \text{ kN/m}^3$ . Hoe groot is de kracht in het touw?

**9.2** Het bassin wordt gevuld met zout water (volumegewicht  $10.2 \text{ kN/m}^3$ ), en daarboven zoet water. De overgang van zoet naar zout water valt samen met de bovenkant van het blok hout. Wat is dan de kracht in het touw?

**9.3** Een tunnel met een vierkante doorsnede,  $8 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ , heeft een totaal gewicht (boven water) van  $50 \text{ ton}$  per meter lengte. De tunnel wordt drijvend in het water naar zijn bestemming gevaren. Bereken de diepgang.

**9.4** De tunnel van het vorige probleem wordt afgezonken in een tevoren gebaggerde geul in de zandbodem van een rivier. Het volumegewicht van het zand (onder water) is  $20 \text{ kN/m}^3$ . Hoe groot moet de dekking van het zand minstens zijn om opdrijven te verhinderen?

## Hoofdstuk 10

# VIERKANTENNET

### 10.1 Potentiaal en stroomfunctie

Een tweedimensionale grondwaterstroming door een homogeen grondmassief kan men vaak vrij eenvoudig benaderend beschrijven met behulp van een vierkantennet, dat is een net van stroomlijnen en potentiaallijnen. In dit hoofdstuk worden de principes daarvan kort beschreven.

De grondwaterpotentiaal  $\Phi$ , of kortweg de *potentiaal*, wordt gedefiniëerd als

$$\Phi = kh, \quad (10.1)$$

waarin  $k$  de doorlatendheidscoëfficiënt is, en  $h$  de stijghoogte. Aannemende dat  $k$  constant is (alleen dan is het begrip potentiaal bruikbaar) vindt men met de wet van Darcy in de vorm (8.1)

$$q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (10.2)$$

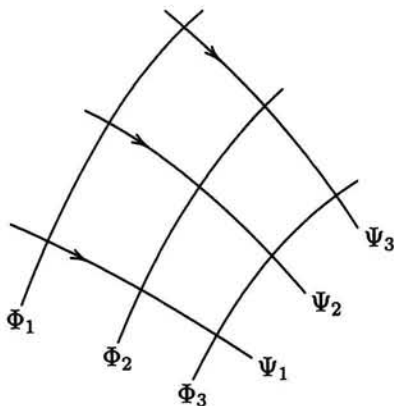
$$q_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

of, in vector-notatie,

$$\mathbf{q} = -\nabla \Phi. \quad (10.3)$$

In de mathematische fysica noemt men een grootheid waarvan de gradiënt een vectorveld is (b.v. krachten of snelheden) vaak een *potentiaal*. Daarom wordt ook bij grondwaterstromingen  $\Phi$  de potentiaal genoemd, of de grondwaterpotentiaal. In sommige literatuur noemt men de stijghoogte  $h$  zelf wel de potentiaal. Dat is eigenlijk niet goed, want het scheelt een factor  $k$  met een echte potentiaal.

Uit de vergelijkingen (10.2) volgt dat het grondwater niet stroomt in een richting waarin  $\Phi$  niet verandert. Dat betekent dat als men een figuur maakt met lijnen van constante potentiaal in het  $x, z$ -vlak (dat noemt men potentiaallijnen), dat dan de stroomrichting overal loodrecht op die lijnen staat, zie figuur 10.1.



Figuur 10.1. Potentiaallijnen en Stroomlijnen.

De stroming kan men ook beschrijven met behulp van een stroomfunctie. Die kan men het best als volgt introduceren. Omdat de stroming overal aan de continuïteitsvergelijking (8.2) moet voldoen, d.w.z.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0, \quad (10.4)$$

moet er een functie  $\Psi$  bestaan zodanig dat

$$q_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (10.5)$$

$$q_z = +\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Door invoering van deze functie  $\Psi$ , de *stroomfunctie*, is altijd aan de continuïteitsvergelijking (10.4) voldaan. Men ziet dat als er alleen een stroming in  $x$ -richting is de waarde van  $\Psi$  in  $x$ -richting niet verandert, immers uit  $q_z = 0$  volgt dat  $\partial \Psi / \partial x = 0$ . Evenzo vindt men dat als er alleen een stroming in  $z$ -richting is dat dan  $\Psi$  in  $z$ -richting niet verandert. Uit  $q_x = 0$  volgt immers  $\partial \Psi / \partial z = 0$ . Dit suggereert dat  $\Psi$  in het algemeen niet verandert in de stroomrichting. Langs de stroomlijnen in figuur 10.1 is de waarde van  $\Psi$  constant. Formeel kan men deze eigenschap bewijzen uitgaande van de totale differentiaal

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = q_z dx - q_x dz. \quad (10.6)$$

Dit is nul als  $dz/dx = q_x/q_z$ , en dat betekent dat de richting waarin  $d\Psi = 0$  gelijk is aan  $q_z/q_x$ , en dat is precies de stroomrichting. Er kan nu geconcludeerd worden dat in het veld van potentiaal- en stroomlijnen langs de stroomlijnen de waarde van  $\Psi$  constant is.

Als de  $x$ -richting samenvalt met de stromingsrichting geldt er  $q_z = 0$ . Uit (10.2) en (10.5) volgt dan dat  $\Phi$  niet verandert in  $z$ -richting en dat  $\Psi$  niet verandert in  $x$ -richting. Bovendien geldt dan, bij benadering

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta z}. \quad (10.7)$$

Hieruit volgt dat als men de intervallen  $\Delta \Phi$  en  $\Delta \Psi$  gelijk kiest, dat dan  $\Delta x = \Delta z$ , d.w.z. er ontstaat een elementair vierkantje. Dat is een algemene eigenschap: stroomlijnen en potentiaallijnen vormen een net van vierkantjes als  $\Delta \Phi = \Delta \Psi$ .

De betekenis van  $\Delta \Phi$  is direct duidelijk uit de definitie van de potentiaal  $\Phi$ , zie formule 10.2. Als het verschil in stijghoogte tussen twee stroomlijnen  $\Delta h$  is, dan is  $\Delta \Phi = k \Delta h$ . De betekenis van  $\Delta \Psi$  kan het eenvoudigst worden ingezien door weer een punt te bekijken waar de stroming alleen in  $x$ -richting is. Dan is  $q = q_x = -\Delta \Psi / \Delta z$ , en dus  $\Delta \Psi = -q \Delta z$ , of meer algemeen

$$\Delta \Psi = -q \Delta n, \quad (10.8)$$

waarin  $n$  de richting loodrecht op de stroomrichting is, met de oriëntatie van  $n$  en de stroomrichting  $s$  net zoals  $z$  en  $x$ . Als de dikte van het vlak van stroming aangegeven wordt met  $B$  is het doorstroomde oppervlak tussen twee stroomlijnen gelijk aan  $\Delta n B$ . Er geldt dan

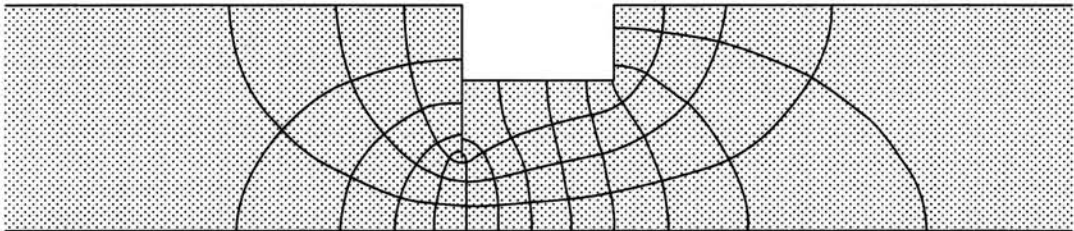
$$\Delta \Psi = -\Delta Q / B. \quad (10.9)$$

De grootte  $\Delta \Psi$  is gelijk is aan het debiet dat per eenheid van dikte tussen twee stroomlijnen wordt afgevoerd. Het zal nog blijken dat men met dat gegeven het totale debiet kan berekenen.

## 10.2 Stroming onder een constructie

Bij wijze van voorbeeld wordt de stroming onder een constructie door beschouwd, zie figuur 10.2. Het betreft een sluis die over een zekere hoogte in de grond is ingegraven. Aangenomen wordt dat de waterstand aan de linkerkant van de sluis  $H$  hoger is dan die aan de rechterkant. Op een zekere diepte bevindt zich een ondoorlatende laag. Ter beperking van de grondwaterstroming onder de sluis door (de *onderloopsheid*) is er een damwand aangebracht, die de kwelweg verlengt.

Het vierkantennet voor een dergelijke stroming wordt iteratief bepaald. Het beste kan men beginnen met een aantal stroomlijnen te schetsen, bijvoorbeeld 2 of 3, van de bovenstroomse rand naar de benedenstroomse rand, daarbij de vorm van de ondoorlatende bovenrand en de ondoorlatende onderrand zo ongeveer volgend. Daarbij kan men al gebruik maken van de wetenschap dat de stroomlijnen loodrecht op de twee gegeven potentiaalijnen



Figuur 10.2. Vierkantennet.

links en rechts van de sluis moeten staan. Daarna kan men de potentiaalijnen schetsen, loodrecht op de stroomlijnen, van onderen naar boven (of andersom), daarbij probeerend de afstand tussen de potentiaalijnen zo ongeveer gelijk aan die tussen de stroomlijnen te maken. Bij de eerste poging zal dat vaak niet overal even goed lukken, en blijkt dat plaatselijk de potentiaalijnen te dicht op elkaar komen, of te ver uit elkaar. Dat betekent dan dat de oorspronkelijke stroomlijnen niet goed waren, en men moet overnieuw beginnen, met nieuwe stroomlijnen. Na een aantal iteraties verkrijgt men een redelijk bevredigend patroon van vierkantjes, zoals getekend in figuur 10.2. In de buurt van de hoekpunten van de randen ontstaan daarbij speciale vierkantjes, waarvan een van de vier zijden geknikt is, en het wel eens lijkt of er een vierkantje met 5 zijden ontstaan is. In het geval getekend in figuur 10.2 blijft er aan de rechterzijde ook een rij van halve vierkantjes over. Er blijken 12.5 potentiaalintervallen zijn, en blijkbaar is dus het verschil in potentiaal tussen twee potentiaalijnen

$$\Delta\Phi = \frac{kH}{12.5}. \quad (10.10)$$

Omdat het net bestaat uit vierkantjes moet gelden dat  $\Delta\Psi = \Delta\Phi$ , en dus

$$\Delta\Psi = \frac{kH}{12.5}, \quad (10.11)$$

en omdat er 4 stroombanen zijn vindt men nu voor het totale debiet

$$Q = \frac{4}{12.5} kHB = 0.32 kHB, \quad (10.12)$$

waarin  $B$  de breedte loodrecht op het vlak van tekening is. De waarde van het debiet  $Q$  is onafhankelijk van het aantal gekozen stroomlijnen. Neemt men bijvoorbeeld 5 stroomlijnen

in plaats van 4, dan zal men vanzelf vinden dat er ook meer potentiaalijnen zijn. Het quotiënt van het aantal vierkantjes loodrecht op de stroomrichting en het aantal vierkantjes in de stroomrichting is altijd (ongeveer) constant.

Uit het vierkantennet volgt uiteraard ook de verdeling van de stijghoogte over het veld. Zo vindt men bijvoorbeeld dat tussen het meest linkse punt onder de sluisvoer en het rechter uittreepunt 6 vierkantjes liggen (5 hele en 2 halve). Hieruit volgt dat de stijghoogte in dat punt gelijk is aan

$$h = \frac{6}{12.5} H = 0.48 H, \quad (10.13)$$

als de stijghoogte gemeten wordt ten opzichte van de waterstand aan de rechterzijde.

Uit de stijghoogte en de plaatshoogte kan men tenslotte de waterspanning afleiden, omdat  $h = z + p/\gamma_w$ . Deze waterdruk is van belang voor de constructeur voor de berekening van de constructie, en voor de geotechnicus voor de berekening van de effectieve spanningen, en daarmee de te verwachten zettingen.

Uit het vierkantennet volgt ook de kracht die door de stroming op de gronddeeltjes wordt uitgeoefend, de stromingsdruk. Volgens formule (6.16) is die stromingsdruk

$$j_x = -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$j_z = -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (10.14)$$

In het geval van figuur 10.2 vindt men aan de rechterzijde vlak naast de constructie in het laatste vierkantje  $\Delta h = -H/(2 \times 12.5)$  en  $\Delta z = 0.3 d$ , als  $d$  de diepte van de constructie in de grond is. Er geldt dan, bij benadering,  $\partial h/\partial z = -0.133 H/d$ , en dus  $j_z = 0.133 \gamma_w H/d$ . Dit is positief, de kracht is dus omhooggericht, zoals men ook zou verwachten. Op de korrels aan de bovenkant van de grond werkt verder, afgezien van zijdelingse schuifspanningen, alleen de zwaartekracht, die voor de korrels leidt tot een volumekracht  $-(\gamma_n - \gamma_w)$ , negatief omdat deze kracht naar beneden gericht is. Men zou in de verleiding kunnen komen om te stellen dat er geen gevaar voor uitspoeling te duchten is als de opwaartse stromingsdruk maar kleiner is dan de neerwaartse volumekracht door het eigengewicht onder water. Dat zou er toe leiden dat men, aannemende dat  $\gamma_n/\gamma_w = 2$ , zodat  $(\gamma_n - \gamma_w)/\gamma_w = 1$ , waarden van  $H/d$  zou mogen toelaten van ongeveer 7.5. Bij grotere waarden van  $H/d$  treedt lokaal het kritieke verhang op, en dat leidt tot uitspoeling, waarna de sluisvloer weg zou kunnen zakken.

In werkelijkheid kan de zaak veel gevaarlijker zijn. Als de grond niet homogeen is kan de gradiënt  $\partial h/\partial z$  aan de benedenstroomse zijde veel groter zijn, met name als daar ter plaatse de grond wat slechter doorlatend is. Er bouwt zich dan onder de slechter doorlatende grond als het ware een extra druk op. Of beter gezegd, op grond van continuïteit zal in het slechter doorlatende materiaal de gradiënt groter zijn dan in het beter doorlatende. Ruwweg kan men stellen dat uit  $k_1 i_1 = k_2 i_2$ , volgt dat  $i_1 > i_2$  als  $k_1 < k_2$ . Het is daarom best mogelijk dat het verhang aan de benedenstroomse zijde een aantal malen groter is dan berekend op basis van de aanname dat het pakket homogeen is. Het kritieke verhang treedt dan veel eerder op. Men spreekt in dit soort gevallen van *piping*, omdat er een soort pijp kan ontstaan, door uitgespoeld zand. Die pijp trekt weer water aan, en de pijp kan steeds groter worden. Voor *piping* is het uiteraard erg gevaarlijk als er ergens aan het grondoppervlak zeer hoge snelheden optreden. Dat kan het geval zijn als een constructie vlak op de bodem wordt gezet. Zou men de constructie van figuur 10.2 niet in de zandlaag hebben gebouwd



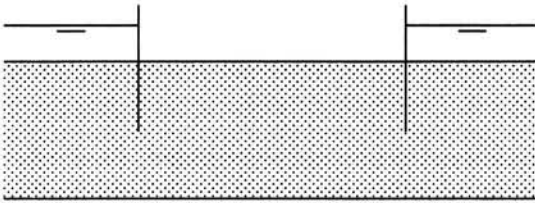
maar er *op*, dan zouden aan de benedenstroomse zijde veel hogere snelheden optreden, met een groot risico van uitspoeling, erosie van het zand, en wellicht scheefzakken van de sluis.

Het aangeven van een veilig verhang is niet zo eenvoudig, en men gebruikt daarvoor in de praktijk dan ook vaak behoorlijke veiligheidsfactoren (bijvoorbeeld een factor 2), tenzij er een zeer nauwkeurige berekening is gemaakt, waarbij rekening is gehouden met piping. In veel gevallen is bij een verhang dat aanmerkelijk kleiner was dan het kritieke verhang bij homogene grond, piping geconstateerd. Achteraf vindt men dan vaak dat de grond toch minder homogeen was als gedacht. Een technische remedie is in principe vrij eenvoudig, maar meestal nogal kostbaar: aan de bovenstroomse zijde dient een slecht doorlatend element te worden gemaakt. Dat kan een kleilaag zijn, of een ondoorlatend doek, bijvoorbeeld van kunststof. Ook kan men de gemiddelde gradiënt kleiner maken, bijvoorbeeld door aan de bovenstroomse zijde een damwand te heien. Een andere mogelijkheid is om aan de benedenstroomse zijde een filter te maken van grof materiaal (grind of mijnsteen). Vooral die laatste oplossingen vereisen wel regelmatige inspectie op hun goede werking. In het geval van figuur 10.2, met een volledig ondoorlatende laag op een zekere diepte, is er een perfecte technische oplossing: een damwand tot in de ondoorlatende laag.

### Opgaven

**10.1** Schets een vierkantennet voor de situatie getekend in figuur 8.7, en bereken daaruit het totale debiet. Vergelijk het resultaat met de schatting aan het eind van het vorige hoofdstuk.

**10.2** Een bouwput in een meer wordt gevormd door een damwand waarbinnen het water wordt weggepompt. Binnen de damwand wordt het grondwater tot het maaiveldniveau verlaagd. Buiten de damwand staat het water 5 m hoger. De damwand is 10 m in de grond geheid, en de dikte van de grondlaag is 20 m. Teken een vierkantennet, en maak op basis daarvan een schatting voor de grootste waarde van de gradiënt van de stijghoogte aan



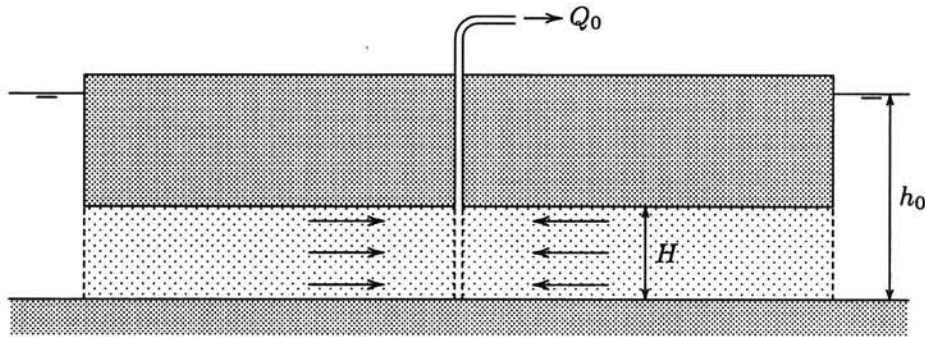
het oppervlak, binnen de bouwput.

**10.3** Stel dat in het geval beschreven in de vorige opgave de grond bestaat uit een laag klei van 1 meter dikte op homogeen zand. Dan is de benodigde pompcapaciteit natuurlijk veel kleiner, en de situatie lijkt dus gunstiger. Of zijn er dan nog andere risico's?

## Hoofdstuk 11

### BRONBEMALING

Voor de berekening van grondwaterstromingen bestaan vele rekenmethodes, analytische en numerieke. De analyse van de grondwaterstroming is voor de grondmechanica van groot belang, want de invloed van de waterspanningen op het gedrag van grond is zeer groot. Veel dramatische ongelukken zijn veroorzaakt doordat de waterdrukken in werkelijkheid hoger bleken te zijn dan gedacht. De studie van grondwatermechanica is daarom erg belangrijk. In dit hoofdstuk zal daarvan nog een enkel voorbeeld behandeld worden, namelijk de stroming onder invloed van putten. Dit is bijvoorbeeld van belang voor de berekening van de verlaging van de waterdrukken ten gevolge van een bronbemaling.



Figuur 11.1. Put in aquifer.

De te beschouwen oplossingen hebben betrekking op een homogeen zandpakket, opgesloten tussen twee ondoorlatende kleilagen, zie figuur 11.1. Men noemt dat een *confined aquifer*. In het Nederlands spreekt men wel van *spanningswater* om aan te geven dat de druk in het grondwater zo hoog is dat in de hele laag een overdruk aanwezig is, en er geen vrij wateroppervlak is.

De grondwaterstroming geschiedt ditmaal in een horizontaal vlak. In dit vlak worden de cartesische assen aangegeven met  $x$  en  $y$ . De grondwaterstroming wordt beschreven door de vergelijkingen van Darcy in het horizontale vlak,

$$q_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{11.1}$$

$$q_y = -k \frac{\partial h}{\partial y},$$

en de continuïteitsvergelijking voor een elementje in het horizontale vlak,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0. \tag{11.2}$$

Hieruit volgt, aannemende dat de doorlatendheid  $k$  constant is, de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (11.3)$$

Dit is weer de vergelijking van Laplace, maar nu in het horizontale vlak.

Het probleem betreft de stroming in een cirkelvormig gebied, met straal  $R$ , naar een put precies in het middelpunt van de cirkel. Dit is een belangrijk basisprobleem uit de grondwatermechanica. De randvoorwaarden zijn dat op de buitenrand (voor  $r = R$ ) de stijghoogte gefixeerd is op de waarde  $h_0$ , en dat in het centrum (voor  $r \rightarrow 0$ ) een debiet  $Q_0$  aan de grond wordt onttrokken.

Gesteld wordt dat de oplossing van dit probleem is

$$h = h_0 + \frac{Q_0}{2\pi kH} \ln\left(\frac{r}{R}\right), \quad (11.4)$$

waarin  $Q_0$  de onttrekking in de put is,  $H$  de laagdikte,  $h_0$  de grootte van de gegeven stijghoogte aan de buitenrand ( $r = R$ ), en  $r$  de poolcoördinaat,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (11.5)$$

Dat de uitdrukking (11.4) inderdaad voldoet aan de differentiaalvergelijking (11.3) kan men betrekkelijk eenvoudig nagaan door de oplossing in die differentiaalvergelijking te substitueren. De oplossing voldoet ook aan de randvoorwaarde aan de buitenrand omdat men voor  $r = R$  vindt dat  $h = h_0$ , immers  $\ln(1) = 0$ . De randvoorwaarde aan de binnenrand is dat in de oorsprong een hoeveelheid water  $Q_0$  aan de grond wordt onttrokken. Om na te gaan of ook dat klopt moet men de oplossing (11.4) eerst differentiëren naar  $r$ . Dat geeft

$$\frac{dh}{dr} = \frac{Q_0}{2\pi kHr}. \quad (11.6)$$

Hieruit volgt voor het specifiek debiet in  $r$ -richting

$$q_r = -k \frac{dh}{dr} = -\frac{Q_0}{2\pi Hr}. \quad (11.7)$$

De totale hoeveelheid water die door het manteloppervlak van een cylinder met straal  $r$  en hoogte  $H$  stroomt vindt men door het specifieke debiet  $q_r$  te vermenigvuldigen met het oppervlak  $2\pi rH$  van de cylinder,

$$Q = 2\pi rHq_r = -2\pi kHr \frac{dh}{dr} = -Q_0 \quad (11.8)$$

Deze grootte is constant, dat wil zeggen onafhankelijk van  $r$ , in overeenstemming met continuïteit. Het blijkt dat door elke cylinder (dus ook een heel kleine) een hoeveelheid water  $-Q_0$  in positieve  $r$ -richting stroomt. Dat klopt precies met de eis dat er  $Q_0$  naar de oorsprong stroomt. De oplossing voldoet aan alle voorwaarden (de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden) en moet dus wel de juiste zijn.

De stroomsnelheid dicht bij de put is zeer groot, omdat daar het totale debiet door een cylinder met een klein oppervlak moet stromen. Aan de buitenrand is de snelheid gering, omdat er een groot oppervlak beschikbaar is. Aan die buitenrand is dan ook het verhang gering. Het lijkt daarom waarschijnlijk dat de precieze vorm van de buitenrand niet erg belangrijk is. De oplossing (11.4) is, althans als eerste benadering, ook bruikbaar voor een put in een gebied dat niet precies cirkelvormig is. Zo kan men een vierkant gebied benaderen door een equivalente cirkel, bijvoorbeeld door het oppervlak gelijk te kiezen.

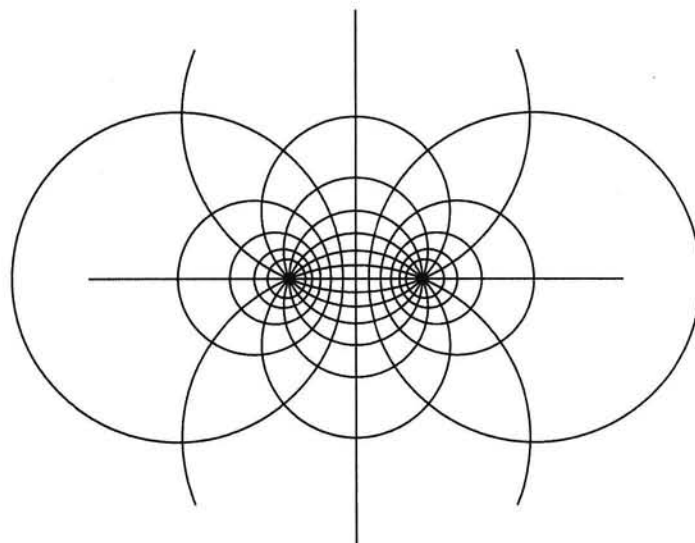
Opgemerkt kan nog worden dat in de hele aquifer  $r < R$ . Dan is de logaritme in (11.4) negatief, en dus is  $h < h_0$ , zoals men ook zou verwachten. Door de werking van de put zal de grondwaterstand immers verlaagd worden.

Van groot praktisch belang is dat de differentiaalvergelijking (11.3) lineair is, en dat daarom superpositie van oplossingen mogelijk is. Met behulp van superpositie kan men oplossingen vinden voor systemen van meerdere putten, bijvoorbeeld voor het geval van een *bronnema-ling*. De putten moeten allemaal werken in de buurt van het centrum van een groot gebied, waarvan de buitenrand kan worden geschematiseerd tot een cirkel met straal  $R$ . Voor een systeem van  $n$  putten is de oplossing

$$h = h_0 + \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{2\pi kH} \ln\left(\frac{r_j}{R}\right). \quad (11.9)$$

Hierin is  $Q_j$  het debiet van put  $j$ , en  $r_j$  is de afstand tot die put. De invloed van ieder van de putten is domweg bij elkaar opgeteld. Het debiet  $Q_j$  kan positief zijn, voor een put die water onttrekt, of negatief, voor een put waar juist water in de grond gebracht wordt. Men noemt zo'n negatieve put meestal een bron. Aan de buitenrand van het gebied zijn alle stralen  $r_j$  ongeveer gelijk aan  $R$ , de straal van het cirkelvormige gebied, mits de putten allemaal dicht bij het centrum zijn gelegen. Dan zijn alle logaritmische termen gelijk aan 0, en voldoet de oplossing dus ook aan de voorwaarde dat  $h = h_0$  aan de buitenrand.

In figuur 11.2 is voor het geval van een bron en een put in een oneindig veld het patroon



Figuur 11.2. Bron en put.

van stroomlijnen en potentiaallijnen getekend, aannemende dat de debieten van de bron en de put gelijk zijn.

### Opgaven

**11.1** Voor een air-conditionings-installatie wordt water onttrokken aan een laag ter dikte van 10 m, met een doorlatendheid van 1 m/d. Het debiet is  $50 \text{ m}^3/\text{d}$ . Het water wordt op een afstand van 100 m weer in de grond gebracht door een persput. Hoe verandert de stijghoogte midden tussen

de twee putten?

11.2 Een put in een cirkelvormig gebied met een straal van 1000 m blijkt op een afstand van 10 m tot een verlaging van de stijghoogte met 1 m te leiden. Hoe groot is de verlaging op 100 m afstand? Of zijn er onvoldoende gegevens?

11.3 Teken het verloop van de oplossing (11.4) voor waarden van  $r/R$  tussen 0.001 en 1, waarin die waarde 0.001 behoort bij een waarde van  $r = r_w$ , waarin  $r_w$  de straal is van de buis waardoor het water wordt geproduceerd. Neem  $h_0 = 20$  m,  $H = 10$  m, en  $Q_0/2\pi kH = 1$  m. Wat gebeurt er als  $r_w \rightarrow 0$ ?

11.4 Als  $R \rightarrow \infty$  is de oplossing (11.4) niet bruikbaar omdat  $\ln(0) = -\infty$ . Betekent dit dat men in een heel groot eiland (Australië) geen grondwater kan winnen?

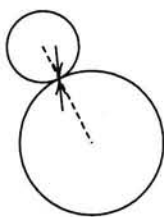
## Hoofdstuk 12

# SPANNING-REK-RELATIES

Zoals reeds eerder gesteld worden de vervormingen van grond bepaald door de effectieve spanningen, ook wel de korrelspanningen genoemd, die een maat zijn voor de contactkrachten in de punten waar de korrels elkaar raken. De vervormingen van grond zijn in de eerste plaats een gevolg van de vervormingen in de contactpunten tussen de korrels. In dit hoofdstuk zal een aantal hoofdzaken van de relaties tussen effectieve spanningen en vervormingen worden besproken. De beschouwingen zullen louter kwalitatief zijn. In latere hoofdstukken zullen kwantitatieve relaties gegeven worden.

### 12.1 Compressie en distorsie

In een contactpunt tussen twee korrels kunnen een normaalkracht en een schuifkracht worden overgebracht, zie figuur 12.1. De normaalkracht kan alleen een drukkracht zijn, een



Figuur 12.1. Korrelcontact.

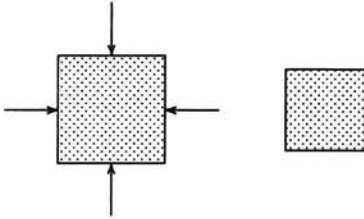
trekkracht kan niet worden overgebracht. Afhankelijk van de grootte van de drukkracht kan ook een schuifkracht worden overgebracht. Verwacht kan worden, op grond van de elementaire natuurkunde, dat als de verhouding tussen schuifkracht en normaalkracht een zekere kritische waarde bereikt (de wrijvingscoëfficiënt  $f$ ) de korrels over elkaar gaan schuiven, hetgeen tot grote deformaties van het korrelskelet leidt. De deformaties van het korrelskelet ten gevolge van het indrukken van de

korrels verdwijnen hierbij in het niet. De korrels zelf kunnen eigenlijk wel als onsamendrukbare worden beschouwd.

Men kan dat ook aannemelijk maken door de vervormingen van grond bij gebruikelijke spanningen te vergelijken met de mogelijke (elastische) vervormingen ten gevolge van de korreldeformaties. We beschouwen daartoe een laag grond van normale dikte, zeg 20 m, die wordt opgehoogd met een laag droog zand van 5 m dik. De bijkomende spanning door het gewicht van die 5 meter zand is ongeveer  $100 \text{ kN/m}^2$ , of  $0.1 \text{ MPa}$ . Vervormingen van de orde van grootte van  $0.1 \%$  of zelfs  $1 \%$  zijn voor grond niet uitzonderlijk. Voor een laag van 20 m dikte betekent een rek van  $0.1 \%$  een zetting van 2 cm, en dat soort vervormingen zijn heel normaal. Veel grondlichamen (men denke bijvoorbeeld aan wegen) zakken nog heel wat meer. Vaak worden wel zakkings in de orde van 20 cm gevonden. Voor een laag van 20 m dikte betekent dat een rek van  $1 \%$ . Bij een rek van  $0.1 \%$  en een spanning van  $0.1 \text{ MPa}$  hoort een vervormingsmodulus (als men in eerste instantie globaal stelt dat  $\sigma = E\varepsilon$ ) van  $E \approx 100 \text{ MPa}$ . En bij een rek van  $1 \%$  zou men vinden  $E \approx 10 \text{ MPa}$ . De elasticiteitsmodulus van het korrelmateriaal zelf, dat is meestal kwarts, vindt men in een encyclopedie of handboek als ongeveer  $20 \text{ GPa}$ , ongeveer een tiende van die van staal. Die waarde is 200 maal of 2000 maal zo groot als men in de praktijk vindt voor een grondlichaam. Er mag dus geconcludeerd worden dat de vervormingen van grond niet zozeer worden veroorzaakt door vervorming van

de korrels, maar voornamelijk het gevolg zijn van wijzigingen in de stapeling, met schuiven en rollen in de contactpunten.

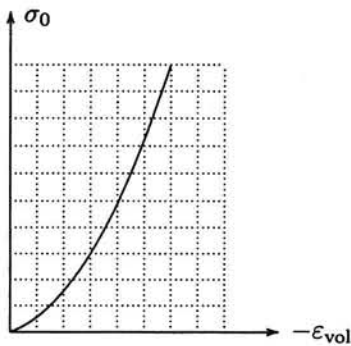
Op grond van dit principe kan men allerlei gedragingen van grond al voor een groot



Figuur 12.2. Compressie.

de belasting getekend bij het oorspronkelijke elementje, links in de figuur.

Bij een dergelijke belasting is er weinig aanleiding voor de contactkrachten om van richting te veranderen. Door het onregelmatige karakter van de korrelstapeling zullen er lokaal wel schuifkrachten zijn, maar die hoeven relatief gesproken niet groter te worden om een toenemende compressie over te dragen. Als alle krachten, normaalkrachten en schuifkrachten, proportioneel groter worden, kan een steeds grotere uitwendige alzijdige druk worden opgenomen. Daarbij zouden, als de korrels volkomen onsamendrukbaar waren, helemaal geen vervormingen optreden. In werkelijkheid zijn de korrels natuurlijk wel enigszins samendrukbaar, en omdat in de ene korrel de over te brengen kracht veel groter is dan in een andere, is het goed mogelijk dat hier en daar toch de schuifkracht te groot wordt, en er een contact verbroken wordt, of er toch schuiven of rollen optreedt. In principe kan men echter verwachten dat bij compressie grond aanzienlijk stijver reageert dan bij belasting door schuifspanningen. In dat laatste geval is er immers een noodzaak voor de lokale schuifkrachten om ook gemiddeld gezien toe te nemen, anders kan de groter wordende schuifspanning niet worden overge-



Figuur 12.3. Stijfheid bij compressie.

dragen. In werkelijkheid blijken grondmassa's onder alzijdige belasting ook inderdaad relatief stijf te zijn, ten opzichte van de stijfheid bij schuifvervormingen, niet ten opzichte van echt stijve materialen zoals metalen.

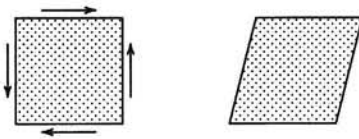
Men kan ook verwachten dat bij doorgaande compressie het aantal contactpunten geleidelijk zal toenemen naarmate de stapeling gecompriëerd wordt. De deeltjes komen immers dichter bij elkaar, en zullen dus meer met elkaar in contact komen. Dit betekent dat grond met een dichte stapeling stijver zal zijn dan grond bestaande uit dezelfde korrels, maar in een lossere stapeling. Het betekent ook dat bij toenemende compressie grond steeds stijver wordt. Samenvattend kan gesteld worden dat bij compressie een verband tussen spanningen en vervormingen van de vorm zoals getekend in figuur 12.3 verwacht kan worden. De grootte  $\sigma_0$  is de alzijdig werkende normaalspanning. Men noemt dat ook wel de *isotrope spanning*. De grootte  $\epsilon_{\text{vol}}$  is de volumerek, de toename van het volume gedeeld door het oorspronkelijke volume,

$$\epsilon_{\text{vol}} = \frac{\Delta V}{V}. \quad (12.1)$$

Omdat het volume natuurlijk afneemt als de alzijdige spanning toeneemt staat in figuur 12.3 op de horizontale as de grootte  $-\varepsilon_{vol}$  uitgezet.

Geconcludeerd mag worden dat de stijfheid van grond bij compressie toeneemt met doorgaande compressie, of met toenemende alzijdige spanning. Omdat in het terrein de spanningen in het algemeen toenemen met de diepte betekent dit ook dat men verwachten kan dat de stijfheid van grond toeneemt met de diepte. Al deze effecten worden ook inderdaad in de natuur gevonden, en in het laboratorium.

Een heel ander type vervorming is dat van zuivere distorsie: verandering van de vorm van een grondlichaam bij gelijk blijvend volume, zie figuur 12.4. Bij belasting door steeds

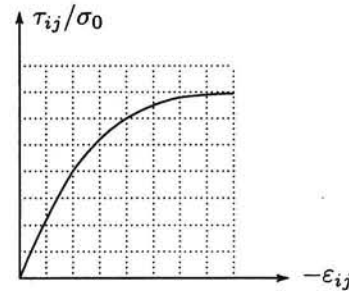


Figuur 12.4. Distorsie.

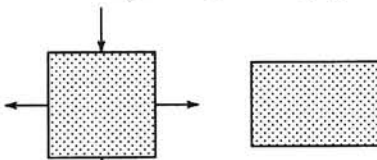
toenemende schuifspanningen is het te verwachten dat ook in de contactpunten een steeds groter wordende schuifkracht moet worden overgebracht. Er is daarbij veel meer aanleiding tot schuiven dan bij compressie. Bovendien is het denkbaar dat het verschuiven van een korrelcontact tot gevolg heeft dat in een ander contact de schuifkracht op zijn beurt groter wordt. Het is zelfs mogelijk dat er

een soort kettingreactie op gang gebracht wordt, de grond vervormt dan zeer sterk, en kan zelfs bezwijken.

Er kan bij distorsie een verband tussen spanningen en vervormingen zoals getekend in figuur 12.5 verwacht worden. In deze figuur is op de verticale as een schuifspanning  $\tau_{ij}$  uitgezet, gedeeld door de isotrope spanning  $\sigma_0$ . De gedachte daarbij is dat het wrijvingskarakter van het basis-mechanisme in de contactpunten tot uiting komt in een kritische verhouding van schuifkracht en normaalkracht, en dat dit tot consequentie heeft dat voor de spanningen bepalend zal zijn de verhouding tussen schuifspanning en normaalspanning. Bij proeven op droog zand vindt men ook inderdaad dat het optreden van grote vervormingen en eventueel bezwijken bij hogere alzijdige spanningen een evenredig grotere schuifspanning vereist. Door de schuifspanning te delen door de alzijdige spanning, en dat uit te zetten tegen de bijbehorende vervorming  $\varepsilon_{ij}$ , kan men de resultaten van verschillende proeven, bij verschillende spanningsniveaus, in principe door één enkele basis-kromme weergeven. Bedacht dient te worden dat dit slechts een eerste benadering is. In werkelijkheid vindt men toch weer enigszins andere krommen bij andere alzijdige spanningsniveaus, maar in elk geval liggen de verschillende krommen dicht bij elkaar als men de proeven uitzet in termen van een verhouding tussen schuifspanning en alzijdige spanning of normaalspanning.



Figuur 12.5. Stijfheid bij distorsie.



Figuur 12.6. Distorsie.

Er wordt nog op gewezen dat figuur 12.4 maar een van de diverse mogelijke illustraties is van distorsie. Een dergelijke vervorming kan uiteraard ook optreden in andere vlakken dan het hier getoonde vlak van tekening. Bovendien kan distorsie ook optreden als van een vierkant elementje de breedte toeneemt en de hoogte afneemt, zie figuur 12.6. Ook in dit geval is het volume immers constant.



Dat er eigenlijk geen verschil is met de hoekvervorming van figuur 12.4 kan men inzien door in figuur 12.6 de middens van de vier zijden te verbinden, en de 4 hoeken weg te denken. Dan ziet men dat na de vervormingen een ruit ontstaat, net als in figuur 12.4, maar dan over  $45^\circ$  gedraaid.

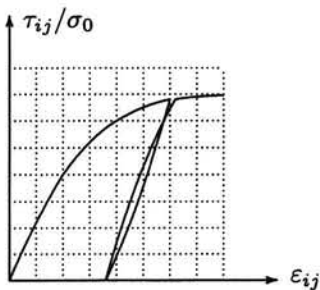
## Conclusies

In verbanden tussen spanningen en vervormingen zoals hierboven beschreven is van groot belang het principiële verschil in gedrag bij compressie en distorsie. Niet alleen zijn de vervormingen bij distorsie in het algemeen groter dan bij compressie: bij doorgaande compressie wordt grond steeds stijver, bij doorgaande distorsie wordt grond juist steeds slapper.

## 12.2 Ontlasten en herbelasten

Omdat praktisch alle vervormingen van grond het gevolg zijn van veranderingen in de korrelstapelings, waarbij schuiven van korrels over elkaar optreedt, is het te verwachten dat bij ontlasten de oorspronkelijke toestand niet zal terugkeren. Het schuiven van korrels over elkaar is een in wezen irreversibel proces, waarbij warmte wordt geproduceerd, die niet meer in mechanische energie kan worden teruggetransformeerd. Het is te verwachten dat bij ontlasten een blijvende deformatie zal optreden, en dat wordt bij proeven ook inderdaad geconstateerd.

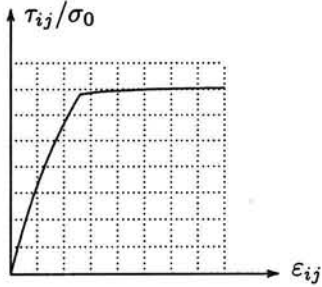
Bij hernieuwd belasten zullen veel minder contacten verbroken worden dan bij de eerste maal belasten, en het is te verwachten dat de grond dan stijver reageert. Soms is het gedrag bij ontlasten en herbelasten bijna elastisch, maar meestal vindt men na iedere volledige cyclus van ontlasten en herbelasten een zekere irreversibele vervorming. In figuur 12.7 is dit getekend voor een belasting door schuifspanningen.



Figuur 12.7. Ontlasten en herbelasten.

Er treedt maar een heel geringe terugvering plaats. Dat is ook juist het mooie: er gaat veel energie verloren in plastische vervorming van de grond. Kinetische energie wordt omgezet in warmte, bij de plastische vervorming van de grond. De na belasten en ontlasten gedissipeerde energie vindt men in figuur 12.7 terug als het oppervlak tussen de tak van de grafiek geldig bij het belasten en de tak bij het ontlasten.

Interessant is nog dat men bij ontlasten en vervolgens weer herbelasten tot het oorspronkelijke spanningsniveau, bij spanningen boven dat eerder bereikte niveau weer veel grotere vervormingen meet. Dit is voor de praktijk bijvoorbeeld van belang in het geval van een grondlaag die vroeger belast is geweest, en daarna is ontlast. Doet men op een monster van die grond een proef dan vindt men vaak een verband tussen spanningen en vervormingen zoals weergegeven in figuur 12.8, met een duidelijke knik in het verband tussen spanning en vervorming. Vergelijking met het gedrag in figuur 12.7 laat zien dat men dit gedrag heel goed kan verklaren door aan te nemen dat de grond voorbelast is geweest tot aan het spanningsniveau van de knik. Men spreekt in zo'n geval van *overconsolidatie* van de grond.



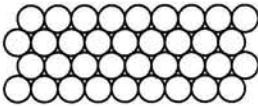
Figuur 12.8. Voorbelasting.

Zolang de spanningen beneden het vroeger ooit bereikte niveau blijven, de *pre-consolidatie* belasting, of kortweg de *voorbelasting*, is de grond stijf. De plaats van de knik in de kromme komt, althans in eerste benadering, overeen met de waarde van de voorbelasting. Dat kan van groot belang zijn als men die voorbelasting helemaal niet kent, omdat die wellicht duizenden jaren geleden is opgetreden. Zo vindt men een dergelijk gedrag vaak voor gronden in het Noorden van Nederland, en op de bodem van de Noordzee. De gebruikelijke verklaring is dat er een voorbelasting is opgetreden in een

vroegere ijstijd, door belasting met een dikke ijslaag.

### 12.3 Dilatantie

Een van de meest karakteristieke verschijnselen die in grond kunnen optreden is het verschijnsel *dilatantie*, ontdekt door Reynolds omstreeks 1885. Dilatantie is een volumevergroting ten gevolge van afschuiving. Bij de meeste materialen (bijvoorbeeld metalen) is het zo dat, als het materiaal isotroop is, een alzijdige normaalspanning alleen leidt tot volumeverandering (en dus niet tot veranderingen van relatieve vorm, d.w.z. geen distorsie), en dat een belasting



Figuur 12.9. Dicht gepakt zand.

door een zuivere schuifspanning alleen een verandering van vorm ten gevolg heeft, en geen volumeverandering. Bij grond is dat vaak niet zo. Het eenvoudigste geval, dat ook het gemakkelijkst is voor te stellen, is dat van dicht gepakt zand, waarbij een individuele korrel als het ware goed is ingepakt tussen zijn burens. Belast men zo'n korrel-

stapeling door schuifspanningen dan zullen de korrels over elkaar moeten gaan schuiven en rollen, maar dat kan alleen als ze ook wat uit elkaar gaan. Daarbij wordt het volume groter. In figuur 12.9 is een dichte stapeling getekend die alleen vervormen kan als het volume groter wordt. Men noemt dat een *dilatant* materiaal.

Dilatantie kan soms tot onverwachte gedragingen leiden, vooral als de grond met water verzadigd is. Een zeer dicht gepakt zand zal bij belasting door schuifspanningen die schuifspanningen alleen kunnen overdragen door te vervormen. De volumevergroting door dilatantie die hierbij optreedt leidt tot een groter poriënvolume. Onder water betekent dit dat er water wordt aangezogen uit de omgeving. Men ziet dat bijvoorbeeld op het strand, bij het lopen langs de kustlijn. De grond rondom de voet wordt droog gezogen door de vervormende grond onder de voet, zie figuur 12.10. Bij zand op grote diepte, bijvoorbeeld onder de fundering van een offshore

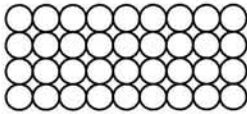


Figuur 12.10. Dilatantie op het strand.

platform, kan soms, vooral als het zand slecht doorlatend is, het water benodigd voor de volumevergroting zo snel niet worden aangezogen, en dat betekent dat er een grote lokale onderdruk in het water wordt gegenereerd. Op den duur verdwijnt die, als het water is toegestroomd, maar op korte termijn is het effect dat de effectieve spanningen toenemen (de waterspanning is immers verlaagd en de grondspanningen blijven gelijk), en de grond dus aanzienlijk stijver en sterker is. Dat is een gunstig effect, waarop men echter alleen kan rekenen als de tijdsduur van de belasting kort is ten opzichte van de tijd die het water nodig heeft om toe te stromen.

Dat dicht gepakt verzadigd zand bij kort durende afschuivende belastingen de neiging heeft stijver te worden is van groot belang voor het baggerproces. Door het snelle proces van het snijden worden onderdrukken in het water opgewekt, hetgeen leidt tot hogere effectieve spanningen, en dus tot een grotere sterkte en stijfheid. Dit bemoeilijkt het doorgaande lossnijden van de grond. Als men er niet op rekt zou een cutterzuiger kunnen vastlopen.

Bij los gepakt zand kan het omgekeerde effect optreden, zie figuur 12.11. Als de korrels in een losse pakking belast worden door schuifspanningen zal er een neiging tot volume-

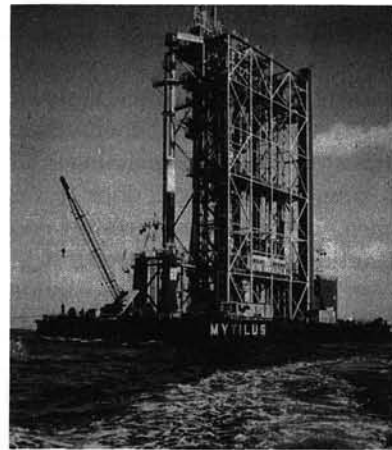


Figuur 12.11. Los gepakt zand.

verkleining zijn. Men noemt dat *contractantie* of *negatieve dilatantie*. De stapeling stort als een soort kaartenhuis in elkaar. Weer is het effect het meest dramatisch als de grond verzadigd is met water. De volumeverkleining betekent dat er minder ruimte is voor het poriënwater, dat dus uit de grond zal moeten stromen. Soms kan dat, als de

grond goed doorlatend is, en de belasting langzaam aangrijpt. Soms kan het niet, en ontstaat er dus een overdruk in het grondwater. Daardoor nemen de effectieve spanningen af, en dat betekent dat de grond slapper en zwakker wordt. Het kan zelfs zijn dat de effectieve spanningen nul worden, en de grond zijn samenhang geheel verliest. Men spreekt dan van *drijfzand*, in het Engels noemt men dit verschijnsel *liquefaction*. In het Nederlands noemt men het verweking

Het spreekt vanzelf dat dit verschijnsel van oplopende waterspanningen, veroorzaakt door de neiging tot contractantie van sommige grondsoorten, ernstige gevolgen kan hebben voor de stabiliteit van een op de grond gebouwde constructie. In Nederland komt los gepakt zand bijvoorbeeld voor in de Zeeuwse getijgeulen. Factoren die daarbij een rol spelen zijn de afgesleten vorm van de korrels, en het voortdurende proces van erosie en afzetting door de getijstrooming. Voor de bouw van de stormvloedkering in de Oosterschelde heeft het betekend dat het zand eerst behoorlijk moest worden verdicht alvorens de eigenschappen zodanig waren verbeterd dat de pijlers er op konden worden geplaatst, zie figuur 12.12. Daarvoor is een speciaal schip gebouwd, de Mytilus, met een serie van verdichtingsnaalden, die tot diep in de ondergrond de grond hebben verdicht. In Japan vindt men na aardbevingen de grootste schade in gebieden waar de grond voor de aardbeving bestond uit los gepakt zand, en er tijdens de aardbeving verdichting van het los gepakte zand is opgetreden, met een gelijktijdige plotse-



Figuur 12.12. De Mytilus.

linge uitpersing van veel water. De waterspanningen worden daarbij tijdelijk sterk vergroot, en de effectieve spanningen dus veel lager, waardoor de grond veel van zijn sterkte verliest. Bij de aardbeving van Kobe, in 1995, was er een enorme schade op het in zee aangelegde kunstmatige eiland "Port Island", met uitzondering van het gedeelte waar men de grond verdicht had ten behoeve van de fundering van een paar flatgebouwen. Het grootste deel van het eiland bestond uit opgespoten zand dat niet verdicht was. In dat gedeelte trad op veel plaatsen verweking (liquefaction) op. Het zand van het kunstmatige eiland voor het vliegveld van Hong Kong, dat door Nederlandse en Belgische baggerbedrijven is aangelegd, is op grote schaal kunstmatig verdicht, met in de grond gebrachte trilnaalden.

Hierboven is gewezen op het grote verschil tussen dicht gepakt zand en los gepakt zand. Dicht gepakt zand heeft de neiging om dilatantie te vertonen, en los gepakt zand zal contractantie kunnen vertonen. Bij doorgaande vervormingen zullen beide tenderen naar een zodanige pakking dat geen verdere volumeverandering optreedt. Men spreekt dan van de *kritieke dichtheid*. Het is echter niet zo dat als het zand een porositeit heeft overeenkomend met die kritieke dichtheid, er dan nooit meer dilatantie of contractantie op kan treden. Daarop blijkt ook de spanningstoestand (de beginspanningen) een belangrijke invloed te hebben. Bij hogere drukken is de kritieke dichtheid wat dichter dan bij lage drukken. Ook vindt men vaak dat dicht gepakt zand aanvankelijk iets verdicht (contractant is), maar bij doorgaand vervormen toch uitzet (dilatant is). Steeds is het wel zo dat bij zeer grote vervormingen het volume tenslotte gelijk blijft. Dat moet ook wel, want een voortdurend uitzetten of verdichten van een korrelstapeling kan natuurlijk niet.

Interessant is nog dat bij cyclische belastingen, dat zijn belastingen wisselend tussen een minimum- en een maximum-waarde, het effect van een volledige cyclus altijd een verdichting is, zelfs als de grond aanvankelijk al zeer dicht gepakt was. Blijkbaar zijn er altijd nog wel een paar korrels die gedurende een volledige cyclus van ontlasten en herbelasten een beter plekje weten te vinden. In een volle tram of trein kan er, door de inhoud wat te vervormen, altijd nog wel iemand bij. Dit effect is vooral van belang voor constructies waarvoor cyclische belastingen door zeegolven belangrijk zijn, zoals offshore platforms. Als na iedere golfklap de grond een klein beetje verdicht wordt kan de waterspanning in de grond tijdens een zware storm oplopen, en dan nemen de effectieve spanningen af. Dat kan de stabiliteit van de constructie in gevaar brengen.

### Opgaven

**12.1** Een grondmonster wordt in het laboratorium belast door een alzijdige druk. Vergroot men de druk van 100 kPa tot 200 kPa dan meet men een volumeverkleining van 0.1 %. Als de druk nu nog verder vergroot wordt tot 300 kPa, is dan de bijkomende volumeverkleining groter dan, kleiner dan, of gelijk aan 0.1 %?

**12.2** Een deel van een middenbermbeveiliging wordt proefbelast door er zijdelings aan te trekken. Bij een kracht van 10 kN vindt men een verplaatsing van 1 cm. Wat verwacht u van de verplaatsing bij een kracht van 20 kN, meer of minder dan 2 cm?

**12.3** Een plastic flesje bevat verzadigd zand, en water dat tot in de hals van het flesje reikt, boven het zand uit. Men knijpt in het flesje, en dan blijkt de waterspiegel te zakken. Hoe kan dat? Is dit zand geschikt om er een pijler van een spoorbrug op te funderen?

**12.4** In een laboratorium wordt drijfzand veroorzaakt in een grote cilindrische tank met verzadigd zand, door er vanaf de bodem water in te pompen, dat aan de bovenkant over de rand terugstroomt in een waterreservoir. Hoe diep zakt een mens daarin weg?

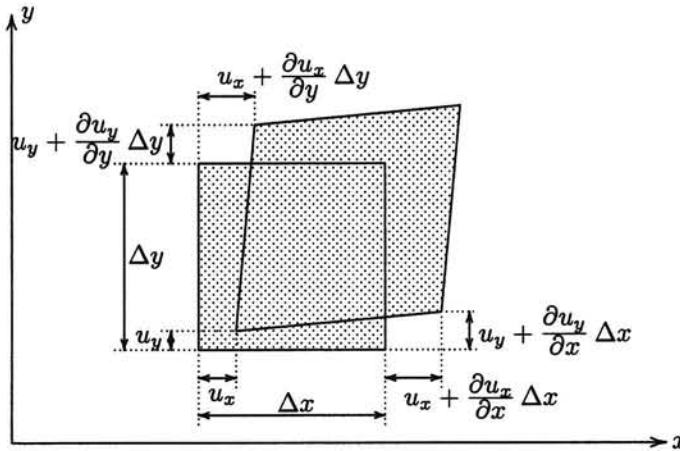
## Hoofdstuk 13

# TANGENT-MODULI

Het verschillend gedrag van grond bij compressie en distorsie suggereert om de spanningen en vervormingen te splitsen in twee delen. Eén voor compressie en één voor distorsie. Dat wordt in dit hoofdstuk uitgewerkt. Het verband tussen spanning en vervorming wordt daartoe iets meer gespecificeerd, maar het blijft voornamelijk kwalitatief. Dilatantie wordt hierbij vooralsnog verwaarloosd.

### 13.1 Vervormingstensor en spanningstensor

De componenten van de verplaatsingsvector van een willekeurig punt zullen worden aangegeven met  $u_x$ ,  $u_y$  en  $u_z$ . Als die verplaatsingen niet constant zijn ontstaan er *vervormingen*, of *rekken*. In figuur 13.1 zijn die in het  $x, y$ -vlak getekend. De lengteverandering van de



Figuur 13.1. Vervormingen.

horizontale afmeting  $\Delta x$ , gedeeld door die oorspronkelijke lengte, is de horizontale rek  $\epsilon_{xx}$ . Daarvoor geldt, zie ook figuur 13.1,

$$\epsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x.$$

De lengteverandering van de verticale afmeting  $\Delta y$ , gedeeld door die oorspronkelijke lengte, is de verticale rek  $\epsilon_{yy}$ . Daarvoor geldt, zie ook figuur 13.1,

$$\epsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y.$$

Omdat  $u_x$  in  $y$ -richting kan toenemen, en  $u_y$  in  $x$ -richting, wordt de rechte hoek linksomder iets verkleind. De helft van die verkleining noemt men de *hoekvervorming*  $\epsilon_{xy}$ . Daarvoor geldt, zie ook figuur 13.1,

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x).$$

In het algemene drie-dimensionale geval kan men schrijven

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (13.1)$$

De afgeleiden  $\partial u_x/\partial x, \partial u_x/\partial y$ , etc., worden klein verondersteld ten opzichte van 1. De rekken zijn dan ook klein ten opzichte van 1. Zelfs in grond is dat meestal wel het geval, zeker als eerste benadering.

Het volume van een elementair blokje kan toenemen als de lengte toeneemt, of als de breedte toeneemt, of als de hoogte toeneemt. De totale volumerek is de som van de rekken in de drie coördinaatrichtingen,

$$\varepsilon_{\text{vol}} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (13.2)$$

Deze volumerek beschrijft de *compressie* van het materiaal.

Het overblijvende deel van de vervormingstensor wordt *distorsie* genoemd. Men voert daartoe de *deviatorrekken* in, gedefinieerd door

$$\begin{aligned}e_{xx} &= \varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\text{vol}}, & e_{xy} &= \varepsilon_{xy}, \\ e_{yy} &= \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\text{vol}}, & e_{yz} &= \varepsilon_{yz}, \\ e_{zz} &= \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\text{vol}}, & e_{zx} &= \varepsilon_{zx}.\end{aligned}\quad (13.3)$$

Deze deviatorrekken bevatten geen volumeveranderingen meer, omdat  $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$ .

Op analoge wijze kan men *deviatorspanningen* definiëren,

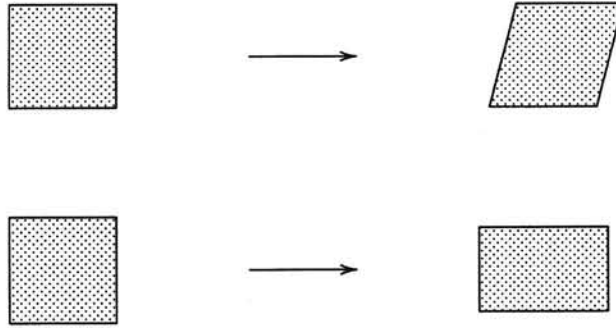
$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_0, & \tau_{xy} &= \sigma_{xy}, \\ \tau_{yy} &= \sigma_{yy} - \sigma_0, & \tau_{yz} &= \sigma_{yz}, \\ \tau_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma_0, & \tau_{zx} &= \sigma_{zx}.\end{aligned}\quad (13.4)$$

Hierin is  $\sigma_0$  de *isotrope spanning*,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (13.5)$$

De isotrope spanning  $\sigma_0$  is de gemiddelde normaalspanning. Men kan verwachten dat voor een isotroop materiaal volumeveranderingen in eerste instantie zullen worden veroorzaakt door veranderingen van deze isotrope spanning. Dat betekent dat  $\varepsilon_{\text{vol}}$  bepaald wordt door de gemiddelde normaalspanning  $\sigma_0$ . Hoe logisch dit ook lijkt, voor grond is het al een sterke benadering, omdat het dilatantie en contractantie uitsluit. Voorlopig wordt dat maar aangeneomen.

Het resterende deel van de spanningstensor, als de isotrope spanning er van wordt afgetrokken, zie (13.4), bestaat uit de deviatorspanningen. Die zijn dan in eerste instantie verantwoordelijk voor veranderingen van vorm, bij gelijkblijvend volume, de distorsie. Die vormveranderingen kunnen nog van alles zijn: hoekvervormingen in de drie coördinaatrichtingen, maar ook een postieve rek in de ene richting en een negatieve rek in een andere richting, zodanig dat het volume gelijk blijft. Voor een van de 3 mogelijke vlakken is dat geïllustreerd in figuur 13.2.



Figuur 13.2. Distorsie.

### 13.2 Lineair elastisch materiaal

Het eenvoudigste verband tussen spanningen en vervormingen voor een deformeerbaar vast materiaal is dat voor een isotroop lineair-elastisch materiaal. Voor zo'n materiaal kan het verband tussen spanningen en vervormingen beschreven worden door twee constanten, een *compressiemodulus*  $K$  en een *glijdingsmodulus*  $G$ . De compressiemodulus  $K$  geeft het verband tussen de volumerek en de isotrope spanning,

$$\sigma_0 = -K \varepsilon_{vol}. \quad (13.6)$$

Het minteken hierin is nodig omdat voor de spanningen druk als positief is gedefinieerd, terwijl bij de vervormingen is vastgehouden aan de in de mechanische gebruikelijke afspraak dat een verlenging positief is en een verkorting negatief.

De glijdingsmodulus  $G$  (distorsiemodulus zou misschien een beter woord zijn) geeft het verband tussen de overeenkomstige deviatorrekken en deviatorspanningen,

$$\tau_{ij} = -2G e_{ij}. \quad (13.7)$$

Hierin kunnen  $i$  en  $j$  alle waarden  $x$ ,  $y$  of  $z$  voorstellen, zodat bijvoorbeeld  $\tau_{xx} = -2G e_{xx}$  en  $\tau_{xy} = -2G e_{xy}$ .

In de toegepaste mechanica wordt het verband tussen spanningen en vervormingen voor een isotroop lineair elastisch materiaal meestal beschreven met de *elasticiteitsmodulus*  $E$ , en de *dwaarscontractiecoëfficiënt*  $\nu$ . Voor de vervormingen bij belasting door normaalspanningen geldt dan

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Het minteken in deze vergelijkingen is weer een gevolg van het feit dat, in tegenstelling tot de toegepaste mechanica, in de grondmechanica de tekenafspraken voor de spanningen is dat drukspanningen positief zijn.

Men kan betrekkelijk eenvoudig nagaan dat de vergelijkingen (13.8) equivalent zijn met (13.6) en (13.7), mits

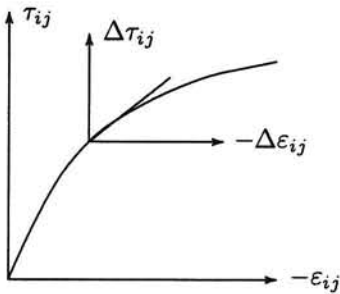
$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad (13.9)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (13.10)$$

Voor de beschrijving van compressie en distorsie, waarvoor het gedrag van grond zo verschillend is, zijn  $K$  en  $G$  meer geschikt dan  $E$  en  $\nu$ . Ook in de theoretische continuüm-mechanica geeft men vaak de voorkeur aan  $K$  en  $G$ . Op grond van thermodynamische overwegingen kan dan gesteld worden dat deze twee grootheden positief moeten zijn,  $K > 0$  en  $G > 0$ .

### 13.3 Niet-lineair materiaal

In hoofdstuk 12 is reeds betoogd dat grond niet-lineair en niet-elastisch is. Bovendien is grond vaak ook nog anisotroop. Bij het geologische proces van afzetting van een zand- of een kleilaag ontstaat namelijk gemakkelijk een verschil in eigenschappen in de richting van sedimentatie (de verticale richting) en de richtingen loodrecht daarop (de horizontale richtingen).



Figuur 13.3. Tangent-modulus.

Ter vereenvoudiging zal hier voorlopig afgezien worden van anisotropie, en zelfs wordt voorlopig afgezien van het irreversibele niet-elastische gedrag bij belasten en ontlasten. Dat laatste betekent dat de beschouwingen beperkt zijn tot het voor de eerste maal belasten van een droog materiaal. Onder die omstandigheden kan men het gedrag bij compressie en bij distorsie wel weer van elkaar scheiden, maar men kan het niet met een constante modulus beschrijven.

Een niet-lineair verband tussen spanningen en vervormingen is schematisch weergegeven in figuur 13.3. Voor een kleine verandering van de

spanningen zou men kunnen rekenen met de raaklijn aan de kromme. Dat betekent dat men dan schrijft

$$\Delta \sigma_0 = -K \Delta \epsilon_{vol}, \quad (13.11)$$

voor de incrementele volumeverandering, en

$$\Delta \tau_{ij} = -2G \Delta e_{ij}. \quad (13.12)$$

voor de incrementele deviatorvervorming. De grootheden  $K$  en  $G$  hierin zijn dan wel telkens verschillend, afhankelijk van de plaats op de totale kromme. Men noemt dit *tangent-moduli*, om aan te geven dat het eigenlijk de raaklijnen zijn aan een niet-lineaire kromme. De tangent-moduli  $K$  en  $G$  zijn afhankelijk van de beginspanning, en mogelijk nog van meer grootheden (bijvoorbeeld de geschiedenis, of de tijd). Men kan voor compressie verwachten dat  $K$  bij toenemende isotrope spanning steeds groter wordt, zie ook figuur 12.2. Bij proeven hebben veel onderzoekers gevonden dat de stijfheid bij compressie ongeveer lineair toeneemt met de isotrope spanning, hoewel anderen menen dat de toename minder sterk is, bijvoorbeeld met de wortel uit de isotrope spanning. Als eerste benadering stelt men vaak dat de stijfheid lineair toeneemt met de spanning. In een homogene grondlaag, alleen belast door zijn eigen gewicht betekent dit dat de stijfheid lineair toeneemt met de diepte.

Voor distorsie kan men verwachten dat de glijdingsmodulus  $G$  bij doorgaande deformatie steeds kleiner wordt, en zelfs wel nul kan worden als de schuifspanningen erg groot worden, zie ook figuur 13.2.

Het zal duidelijk zijn dat een linearisatie met tangent-moduli alleen verantwoord is bij een kleine verandering van de spanningen. Dat komt in de praktijk nog vrij vaak voor. Vaak zijn



namelijk de beginspanningen in een grondlaag al redelijk groot, door de bovenbelasting van andere grondlagen. Opgemerkt moet wel worden dat er hier allerlei effecten verwaarloosd zijn. Zo is bijvoorbeeld anisotropie uitgesloten, en ook het verschijnsel dat bij belasting en vervolgens ontlasten een blijvende rek optreedt. Ook is tijdsafhankelijk gedrag (kruip) verwaarloosd, evenals dilatantie. Een elastische analyse is op zijn best een eerste benadering, maar vaak toch wel erg nuttig, mits men de relatieve waarde ervan beseft. Er zijn de laatste jaren betere methoden ontwikkeld om het gedrag te analyseren en in berekeningen te gebruiken. Vooral elasto-plastische berekeningen lijken, in combinatie met numerieke rekentechnieken, goede perspectieven te bieden.

### Opgaven

**13.1** Een collega werkzaam in het buitenland meldt dat hij opgekregen heeft dat de elasticiteitsmodulus van een zandlaag waar hij mee te maken heeft 2000 kPa is. Die waarde is teruggerekend uit de vervormingen ten gevolge van een belasting, door een ophoging, van 20 kPa tot 40 kPa. Er komt een nieuwe ophoging, waarbij de spanningen toenemen van 40 kPa tot 60 kPa. Geld voor onderzoek is er niet. Welke waarde suggereert u hem om te gebruiken als schatting voor de elasticiteitsmodulus?

**13.2** Een grondmonster wordt in het laboratorium een groot aantal malen met dezelfde belasting belast en weer ontlast, waarbij in iedere cyclus grote schuifvervormingen optreden. Wat verwacht u van de volumeverandering in de 100<sup>e</sup> cyclus? En hoe zou zich dat vertalen in een waarde voor de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ ?

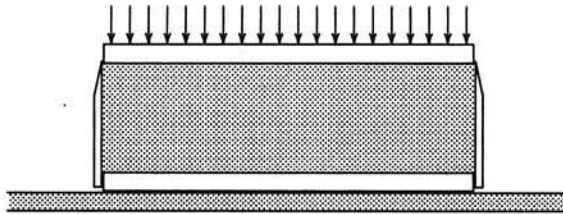
## Hoofdstuk 14

# EENDIMENSIONALE SAMENDRUKKING

In de vorige hoofdstukken is de vervorming van grond gesplitst in compressie en distorsie. Zuivere compressie is een verandering van volume zonder verandering van de onderlinge verhoudingen in een lichaam, terwijl bij distorsie juist wel die verhoudingen veranderen (d.w.z. de vorm, of de gedaante), maar het volume constant blijft. Het zou mooi zijn als men de grondeigenschappen voor compressie en distorsie ook onafhankelijk van elkaar zou kunnen bepalen. Helaas is een zuivere compressie-proef niet zo eenvoudig uit te voeren, evenmin als een zuivere distorsie-proef. In de grondmechanica worden daarom vaak iets andere proeven gedaan, waarbij steeds een combinatie van distorsie en compressie optreedt, maar waarbij toch een van beide overheerst. Een proef waarbij vooral compressie optreedt is de eendimensionale samendrukkingsproef. Die wordt in dit hoofdstuk beschreven.

### 14.1 Samendrukkingsproef

Bij de samendrukkingsproef (of *oedometer*test) wordt een grondmonster opgesloten in een cirkelvormige ring, en belast in verticale richting via een cirkelvormige poreuze plaat, zie figuur 14.1. Het gehele apparaat wordt vaak nog opgesteld in een iets grotere bak, gevuld



Figuur 14.1. Samendrukkingsproef.

met water. Eventueel poriënwater kan dan door de poreuze platen boven en onder het monster afstromen. De belasting wordt meestal aangebracht in de vorm van een gewicht dat via een hefboom of een beugel op de bovenkant van het monster drukt. Die belasting kan dan in stappen vergroot worden door het bijplaatsen van gewichten. De ring heeft vaak aan de bovenkant een scherpe rand. Die maakt het mogelijk een monster uit een groter brok grond te steken.

In dit geval zijn er, door de zijdelingse opsluiting van het monster, geen horizontale vervormingen mogelijk,

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0. \quad (14.1)$$

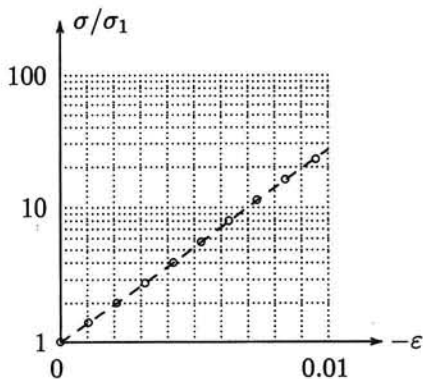
Dit betekent dat er alleen maar een verticale rek is, en de volumerek is gelijk aan die verticale rek,

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon = \varepsilon_{zz}. \quad (14.2)$$

De verticale rek wordt voor het gemak aangegeven met  $\varepsilon$ . De belasting van het monster bestaat uit de verticale spanning  $\sigma_{zz}$ , die voor het gemak zal worden aangegeven met  $\sigma$ ,

$$\sigma = \sigma_{zz}. \quad (14.3)$$

Bij de uitvoering van de proef vindt men, zoals te verwachten, dat bij een toename van de spanning van bijvoorbeeld 1 kPa naar 2 kPa, de rek groter is als bij een toename van 2 kPa naar 3 kPa. De grond wordt immers steeds stijver. Vaak vindt men dat bij een toename van 2 kPa naar 4 kPa de rek ongeveer gelijk is aan die bij toename van 1 kPa naar 2 kPa. En bij een verdere toename van 4 kPa naar 8 kPa vindt men weer ongeveer dezelfde rek. Bij elke verdubbeling van de spanning vindt men ongeveer een gelijke rek. Het is daarom zinvol om de proefresultaten uit te zetten op papier met een logaritmische schaalverdeling, zie figuur 14.2. In die figuur is  $\log(\sigma/\sigma_1)$  uitgezet tegen  $\varepsilon$ , waarin  $\sigma_1$  de beginspanning is. De proefresultaten blijken zo ongeveer op een rechte lijn te liggen. Dit logaritmische



Figuur 14.2. Meetresultaat.

verband tussen de verticale spanning en de verticale rek is voor het eerst gevonden door Terzaghi, in de dertiger jaren.

Het betekent dat men de proefresultaten redelijk kan weergeven met een formule van de vorm

$$\varepsilon = -\frac{1}{C} \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right). \quad (14.4)$$

Dan vindt men immers bij elke verdubbeling, d.w.z. belastingen in de reeks 1,2,4,8,16,..., een gelijke rek in elke stap. Men noemt (14.4) wel de *logaritmische samendrukkingswet van Terzaghi*. In latere jaren hebben veel proeven in laboratoria de bruikbaarheid van deze empirische relatie bevestigd.

In de praktijk gebruikt men vaak de logaritme met het grondtal 10 in plaats van de natuurlijke logaritme. Dat hangt samen met het in de handel verkrijgbare logaritmische papier, een fundamentele reden is er niet voor. Men schrijft dan

$$\varepsilon = -\frac{1}{C_{10}} \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right). \quad (14.5)$$

Omdat  $\log(x) = \ln(x)/2.3$  geldt er

$$C_{10} = \frac{C}{2.3}, \quad (14.6)$$

ofwel

$$C = 2.3 \times C_{10}. \quad (14.7)$$

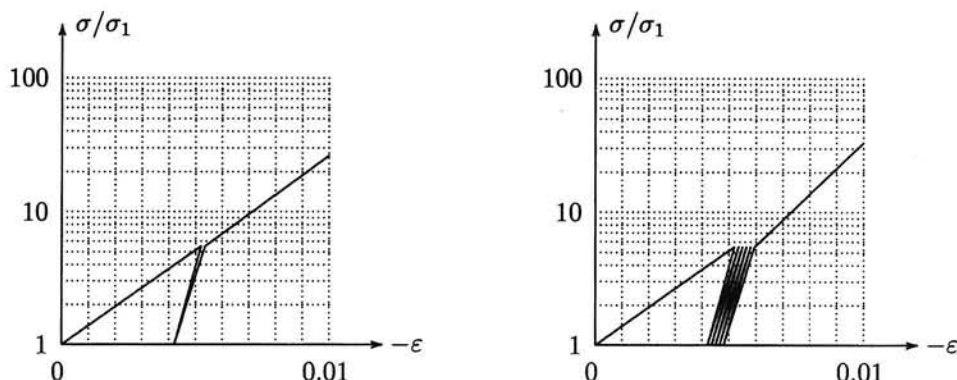
De samendrukkingsconstanten  $C$  en  $C_{10}$  zijn dimensieloos. Een aantal veel voorkomende waarden is weergegeven in tabel 14.1. De grote variatie in de waarde van de samendrukkingsconstante maakt dat deze tabel slechts oriënterende betekenis heeft. De samendrukkingsproef is echter eenvoudig uit te voeren, en daarom kan men de waarde van de constante  $C_{10}$  het beste in het laboratorium bepalen. Men zij er wel goed op bedacht dat er tussen de

Grondsoort	$C$	$C_{10}$
zand	50-500	20-200
silt	25-125	10-50
klei	10-100	4-40
veen	2-25	1-10

Tabel 14.1. Samendrukkingsconstante.

twee vormen van de samendrukkingsconstante een factor 2.3 verschil is. Bij gebruikmaking van resultaten van een ander dient men zich er goed van te vergewissen welke vorm van de formule, d.w.z. welke logaritme, er gebruikt is.

De waarden in tabel 14.1 hebben betrekking op grond met een toenemende belasting. Doet men een proef waarbij de grond eerst belast wordt, daarna wordt ontlast, en vervolgens weer belast, dan vindt men, op logaritmische schaal, ongeveer een verband zoals aangegeven



Figuur 14.3. Belasten en ontlasten, en cyclisch belasten.

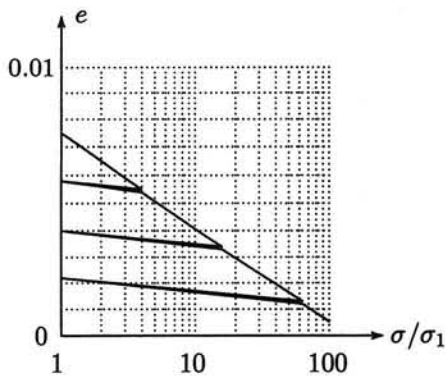
in figuur 14.3. Ook bij het ontlasten vindt men op logaritmische schaal ongeveer een rechte lijn, maar de respons is veel stijver dan bij de eerste maal belasten (dat laatste noemt men in het Engels *virgin loading*). Bij herbelasten wordt ongeveer dezelfde lijn gevolgd als bij ontlasten, althans tot aan de maximaal bereikte waarde van de spanning. In plaats van de constante  $C$  gebruikt men voor ontlasten vaak het symbool  $A$ . De waarde van die constante  $A$  kan wel een factor 10 maal zo groot zijn als die van  $C$ . Bij herhaald belasten van een grondconstructie dient men dus met samendrukkingsconstanten te werken die een factor 10 groter zijn dan die in tabel 14.1. Dergelijke waarden dient men ook te gebruiken bij de analyse van trillingen. De respons bij een aantal cycli van belasten en ontlasten is schematisch weergegeven in de rechter helft van figuur 14.3. Na elke cyclus is er een kleine permanente vervorming. Bij vervorming boven de hoogste belasting die het monster ooit gehad heeft vervormt het weer sterk.

Een iets andere manier om de resultaten van een samendrukkingsproef wordt veel gebruikt in Scandinavische en Angelsaksische landen. Men gebruikt daar vaak het poriëngetal  $e$  (de *void ratio*) om de volumeveranderingen uit te drukken. Men schrijft de formule dan in de

vorm

$$e_1 - e = C_c \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right), \quad (14.8)$$

waarin  $e_1$  het poriëngetal is bij de beginspanning  $\sigma_1$ .



Figuur 14.4.  $e - \log p$ .

Ook in dit geval leiden de resultaten van samendrukkingsproeven bij benadering tot een rechte lijn. Bij toenemende spanning neemt daarbij het poriëngetal af. De coëfficiënt  $C_c$  noemt men de samendrukkingsindex (in het Engels de *compression index*). Hoe slapper de grond hoe groter de waarde van  $C_c$ . Zoals al gezien is de grond bij ontlasten en herbelasten veel stijver dan bij de eerste maal belasten. De te gebruiken constante  $C_c$  is dan veel kleiner. In figuur 14.4 zijn daarvan een drietal takken te zien. De alzijdige spanning geeft men ook vaak aan met  $p$ . Een verband zoals getekend in figuur 14.4 noemt men dan een  $e - \log(p)$  diagram.

Om te laten zien dat de formule (14.8) overeenkomt met de eerder gegeven formule (14.5) kan men bedenken dat de rek  $\varepsilon$  gedefiniëerd is als

$\varepsilon = \Delta V/V$ , waarin  $V$  het volume grond is. Er geldt nu  $V = (1 + e)V_k$ , waarin  $V_k$  het volume van de korrels is. Omdat dat volume constant is geldt er  $\Delta V = \Delta e V_k$ , en dus

$$\varepsilon = \frac{\Delta e}{1 + e}. \quad (14.9)$$

De formule (14.8) kan men daarom ook schrijven als

$$\varepsilon = -\frac{C_c}{1 + e} \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right), \quad (14.10)$$

Vergelijking met (14.5) laat zien dat het verband tussen  $C_c$  en  $C_{10}$  is

$$\frac{1}{C_{10}} = \frac{C_c}{1 + e}. \quad (14.11)$$

Dat er verschillende grootheden voor hetzelfde verband gebruikt worden is natuurlijk ongelukkig, en alleen historisch verklaarbaar. Vooral vervelend is dat in beide formules de constante  $C$  genoemd wordt, maar in de ene vorm in de teller staat en in de andere in de noemer. Een grote waarde van  $C_{10}$  komt overeen met een kleine voor  $C_c$ . Verwacht kan worden dat op den duur de samendrukkingsindex algemeen gebruikt zal worden, omdat die door de Internationale Normalisatie Organisatie ISO gestandaardiseerd is.

Opgemerkt moge nog worden dat een veel gebruikt model voor elasto-plastische berekeningen van vervormingen, het in Cambridge ontwikkelde Cam clay model, de samendrukking weer iets anders uitdrukt, namelijk als

$$\varepsilon = -\lambda \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right). \quad (14.12)$$

Het verschil met de formule (14.8) is dat er nu een natuurlijke logaritme gebruikt wordt in plaats van een logaritme met het grondtal 10 (dat scheelt een factor 2.3), en dat als maat voor de vervorming weer de rek  $\varepsilon$  wordt gebruikt, en niet de verandering van de void ratio  $e$ . Dat scheelt een factor  $1 + e$ .

Aan de hier gegeven logaritmische verbanden tussen spanning en vervorming dient men niet te veel fundamentele waarde toe te kennen. Veel niet-lineaire verschijnselen geven op logaritmische schaal uitgezet ongeveer een rechte lijn, vooral als het bereik niet te groot is. Dat leidt tot voor de praktijk handzame formules, maar veel fundamentele betekenis hoeft het niet te hebben, en de fout kan soms behoorlijk groot zijn, bijvoorbeeld enige procenten. Men bedenke dat de benadering in de samendrukkingswet van Terzaghi van een heel andere orde is dan bijvoorbeeld die in de wetten van Newton. Die laatste zijn fysische wetten (al heeft Einstein dan nog een kleine correctie aangebracht). De logaritmische samendrukkingswet is niet meer dan een redelijke benadering van veel proefresultaten.

## 14.2 Elastische analyse

Doet men een samendrukkingsoefening op een monster van isotroop lineair elastisch materiaal dan vindt men, op basis van (13.8), met  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$ ,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}. \quad (14.13)$$

Uit de laatste vergelijking van het stelsel (13.8) vindt men dan

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \sigma_{zz}. \quad (14.14)$$

Uitgedrukt met  $K$  en  $G$  kan men dit verband ook schrijven, in zijn inverse vorm, als

$$\sigma_{zz} = -(K + \frac{4}{3}G) \varepsilon_{zz}. \quad (14.15)$$

De elastische coëfficiënt bij verticale samendrukking met zijdelingse opsluiting blijkt  $K + \frac{4}{3}G$  te zijn. Men gebruikt hiervoor soms wel de notatie  $D$ , en noemt het de modulus bij zijdelingse opsluiting (*constrained modulus*),

$$D = K + \frac{4}{3}G = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = 3K\left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu}\right). \quad (14.16)$$

Als  $\nu = 0$  is  $D = E$ ; als  $\nu > 0$  is  $D$  groter dan  $E$ . In het extreme geval dat  $\nu = \frac{1}{2}$  is  $D$  oneindig groot. Zo'n materiaal is ook inderdaad onsamendrukbaar.

Analoog aan de beschouwingen in het vorige hoofdstuk over tangentmoduli kan men de logaritmische relatie (14.4) voor kleine veranderingen van de spanningen beschouwen. Men kan die relatie lineariseren door differentiatie. Dit geeft

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = -\frac{1}{C\sigma}. \quad (14.17)$$

en dus

$$\Delta\sigma = -C\sigma\Delta\varepsilon. \quad (14.18)$$

Vergelijkt men nu (14.15) en (14.18) dan blijkt te gelden, althans bij benadering, en alleen voor de incrementele spanningen en vervormingen,

$$D = K + \frac{4}{3}G = C\sigma. \quad (14.19)$$

Dit betekent dat de stijfheid lineair toeneemt met de spanning, en dat is in overeenstemming met eerdere beweringen.

De formule (14.19) is van groot praktisch belang om de elasticiteitsmodulus van grond te schatten. In allerlei berekeningen gebruikt men nu eenmaal graag de elasticiteitsmodulus, ook al realiseert men zich dat grond geen lineair elastisch materiaal is. Op grond van (14.19) kan men dan toch een orde van grootte schatten. Voor een zandlaag op 20 m diepte kan men bijvoorbeeld schatten dat de effectieve spanning zo ongeveer 170 kPa zal zijn (aannemende dat het grondwater ongeveer samenvalt met het maaiveld). Voor zand is  $C_{10}$  zo ongeveer 100, en dus is  $C$  zo ongeveer 230. De elasticiteitsmodulus is dan ongeveer 40000 kPa = 40 MPa. Dat is een aardige schatting voor de elasticiteitsmodulus bij het aanbrengen van een belasting. Zoals al gesteld is grond bij ontlasten en weer opnieuw belasten veel stijver dan bij de eerste maal belasten. Voor een probleem als de voortplanting van trillingen gaat het om een voortdurend ontlasten en herbelasten. De daarvoor te gebruiken elasticiteitsmodulus is dan in de orde van grootte van 400 MPa. Men bedenke wel dat dit allemaal maar eerste schattingen zijn. De echte waarden kunnen best een factor 2 groter of kleiner zijn. En niets kan op tegen een meting in het laboratorium of in het terrein.

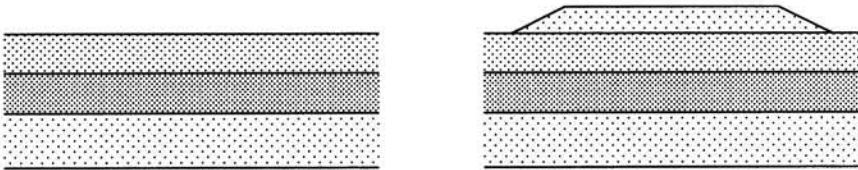
### Opgaven

- 14.1 Bij een samendrukkingsproef in het laboratorium is een grondmonster van 2 cm dikte voorbelast met een spanning van 100 kPa. Er wordt een belasting aangebracht van 20 kPa. Dit leidt tot een verkorting van 0.030 mm. Bepaal de samendrukkingsconstante  $C_{10}$ .
- 14.2 Als de proef uit de vorige opgave wordt voortgezet door nogmaals 20 kPa belasting aan te brengen, hoeveel zal dan in de tweede stap de verkorting zijn? Hoe groot zou de extra belasting hebben moeten zijn om weer 0.030 mm verkorting te veroorzaken?
- 14.3 Een kleilaag van 4 m dikte bevindt zich onder een zandlaag van 10 m dikte. De volumegewichten zijn  $20 \text{ kN/m}^3$ , en de grondwaterstand valt samen met het maaiveld. De samendrukkingsconstante van de klei is  $C_{10} = 20$ . Bepaal de zetting van de grond door samendrukking van de kleilaag bij het aanbrengen van een bovenbelasting van 40 kPa.
- 14.4 Een zandlaag bevindt zich onder een wegdek waarvan het gewicht leidt tot een verticale effectieve spanning van ongeveer 20 kPa. Het zand is bij de bouw van de weg goed verdicht. Schat de orde van grootte van de elasticiteitsmodulus die men kan gebruiken bij de berekening van trillingsvoortplantingen door het verkeer.
- 14.5 In een Amerikaans boek (Lambe & Whitman, Soil Mechanics, Wiley, 1968) wordt de waarde  $C_c = 0.47$  gegeven voor een zekere kleisoort. De void ratio is ongeveer 0.95. Hoe groot is nu  $C_{10}$ , en klopt die waarde met tabel 14.1?

## Hoofdstuk 15

# CONSOLIDATIE

In de vorige hoofdstukken is bij de beschrijving van het gedrag van grond eenvoudigheidshalve gesteld dat de vervormingen eenduidig door de spanningstoename worden bepaald. Daarbij zijn tijdsafhankelijke verschijnselen uitgesloten. In veel gevallen vindt men echter een duidelijke afhankelijkheid van de tijd, vooral bij proeven op klei. Dat kan kruip zijn, maar het kan, bij natte grond, ook een gevolg zijn van de vertraging die optreedt doordat een volumeverkleining gepaard gaat met een verkleining van het poriënvolume, en dat kan alleen als het water er uit geperst wordt. Afhankelijk van de doorlatendheid kan dit een zekere tijd vergen. Men noemt dit proces *consolidatie*, en in dit hoofdstuk zal worden behandeld wat de invloed daarvan op de samendrukking is. De beschouwingen zullen worden beperkt



Figuur 15.1. Ophoging.

tot eendimensionale gevallen, waarbij de grond zijdelings niet kan vervormen, en ook de afstroming van het water alleen in verticale richting kan plaats vinden. Dit is het geval bij een samendrukkingsproef in het laboratorium, maar ook bij een gelijkmatige belasting over een groot gebied in het veld, zie figuur 15.1.

### 15.1 Afleiding differentiaalvergelijking

Ter vereenvoudiging wordt aangenomen dat de spanningsverandering zeer klein is. Dan is het volgens de beschouwingen in het vorige hoofdstuk mogelijk de spanning-rek-relatie in eerste benadering lineair elastisch aan te nemen, met een elastische coëfficiënt  $K + \frac{4}{3}G$ . De waarde van die coëfficiënt hangt nog wel af van de beginspanningen. Men kan nu schrijven voor het verband tussen de toename van de verticale effectieve spanning  $\Delta\sigma'$  en de toename van de verticale rek  $\Delta\varepsilon$

$$\Delta\sigma' = -(K + \frac{4}{3}G) \Delta\varepsilon. \quad (15.1)$$

In het vervolg van dit hoofdstuk zal de toevoeging  $\Delta$  weggelaten worden. De toename van de effectieve spanning zal dus aangegeven worden met  $\sigma'$ , en de toename van de rek met  $\varepsilon$ ,

$$\sigma' = -(K + \frac{4}{3}G) \varepsilon. \quad (15.2)$$

Het gebruik van spanningen en rekken ten opzichte van de begintoestand is in de grondmechanica zeer gebruikelijk. Voor de rekken is dat ook eigenlijk niet anders mogelijk. Men kan alleen maar vervormingen meten ten opzichte van de begintoestand, dat is de situatie die



men aantreft voor het civiel-technische werk. Er is dan ook al een spanning, namelijk ten gevolge van het eigen gewicht van de grond. Men zij er op bedacht dat om de werkelijke spanning te verkrijgen deze beginspanning vaak nog bij de spanning  $\sigma'$  die men berekent moet worden opgeteld.

In de grondmechanica is het gebruikelijk het verband (15.2) te schrijven als

$$\varepsilon = -m_v \sigma', \quad (15.3)$$

waarin men  $m_v$  dan de samendrukbaarheidscoëfficiënt noemt, of kortweg de *samendrukbaarheid*. In de literatuur vindt men voor  $m_v$  ook wel het symbool  $a_s$  of  $\alpha$ . Als de incrementele verticale grondspanning (eigenlijk  $\Delta\sigma_{zz}$ ) aangegeven wordt met  $\sigma$ , en de incrementele waterspanning met  $p$ , dan geldt, op grond van Terzaghi's principe van de effectieve spanningen,

$$\sigma' = \sigma - p. \quad (15.4)$$

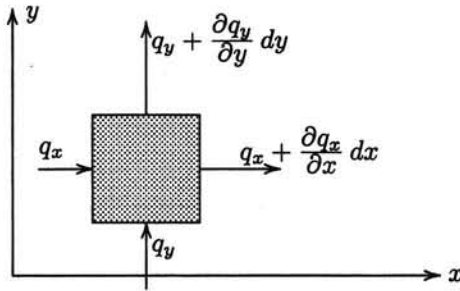
Uit (15.3) volgt dan

$$\varepsilon = -m_v(\sigma - p). \quad (15.5)$$

In veel gevallen is het verloop van de totaalspanning  $\sigma$  als functie van de tijd bekend. Het verloop daarvan wordt immers vaak door de voortgang van het werk bepaald. Aanvankelijk is de spanning  $\sigma = 0$ , omdat het de toename ten opzichte van de begintoestand is. Tijdens het

werk wordt  $\sigma$  bijvoorbeeld in korte tijd verhoogd, en daarna blijft de totaalspanning vaak weer langere tijd constant. De waterspanning kan nog in de tijd variëren. Om dat te beschrijven is een beschouwing van de continuïteit van het water nodig.

Beschouwd wordt een elementair volume  $V$  in de grond, zie figuur 15.2. Het volume van het water daarin is  $V_w = nV$ , als  $n$  de porositeit is, en het volume van de korrels is  $V_k = (1 - n)V$ . Zoals reeds eerder gesteld kan men de korrels wel als onsamendrukbaar beschouwen. Dit betekent dat het



Figuur 15.2. Uitstroming.

volume  $V$  alleen kan veranderen als het poriënvolume verandert. En dat kan weer alleen als het water in de poriën samengedrukt wordt, of het water uit de poriën stroomt.

De eerste mogelijkheid, volumeverandering door samendrukking van het water, kan optreden als de waterdruk verandert. Men kan verwachten dat de verandering van het volume evenredig is met de drukverandering, en met het oorspronkelijke volume water, dus

$$\Delta V_1 = -\beta V_w \Delta p = -n\beta V \Delta p, \quad (15.6)$$

waarin  $\beta$  de samendrukbaarheid van het water is. Voor zuiver water geldt er volgens handboeken van fysische eigenschappen  $\beta = 0.5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}$ , en dat is erg klein. Water is dan ook bijna onsamendrukbaar. Als er echter wat lucht in de poriën voorkomt, kan de waarde van  $\beta$  veel groter zijn. In eerste instantie kan men dan stellen

$$\beta = S\beta_0 + \frac{(1-S)}{p_0}, \quad (15.7)$$

waarin  $\beta_0$  de samendrukbaarheid van zuiver water is,  $S$  de verzadigingsgraad, en  $p_0$  de totale druk in het water, absoluut gerekend (d.w.z. dat de druk onder atmosferische condities 100 kPa is). Als  $S = 0.99$  en de druk is  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ , dan vindt men  $\beta = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{N}$ . Dat

is ook nog klein, maar toch 200 maal zo groot als voor zuiver water. De schijnbare samen-drukbaarheid van het water komt nu eigenlijk door het samendrukken van de luchtbelletjes. De formule (15.7) kan men afleiden met beschouwingen gebaseerd op de Wet van Boyle. Om ook niet-verzadigde grond te kunnen beschouwen wordt het hier beschouwde effect van de samendrukbaarheid van het water in de afleiding niet verwaarloosd, ook al is het meestal erg klein.

De tweede mogelijkheid van volumeverandering, namelijk die ten gevolge van de wa-teruitpersing, wordt beschreven door de divergentie van het specifieke debiet, zie figuur 15.2. Alleen als er meer water uit een elementje stroomt dan er in stroomt is er een netto-verlies, en dus een volumeverandering. In een tijdje  $\Delta t$  is de volumeverandering

$$\Delta V_2 = -(\nabla \cdot \mathbf{q})V\Delta t = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)V\Delta t. \quad (15.8)$$

Het minteken is hier ingevoerd omdat een positieve waarde van  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  aangeeft dat er meer water uit het elementje stroomt dan er in stroomt. Het volume van de grond neemt dan af, en de toename is dus negatief.

Er volgt nu voor de verandering van de volumerek in een tijdje  $\Delta t$

$$\Delta \varepsilon_{\text{vol}} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V} = -n\beta \Delta p - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)\Delta t. \quad (15.9)$$

Deelt men dit door  $\Delta t$ , en gaat men dan over in de limiet  $\Delta t \rightarrow 0$ , dan vindt men

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial t} = -n\beta \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right). \quad (15.10)$$

Dit is een belangrijke basisvergelijking uit de consolidatietheorie. Men noemt het de *ber-gingsvergelijking*. De vergelijking drukt uit dat een volumeverandering ( $\partial e/\partial t$ ) op kan treden door een drukverandering (daarbij geeft de factor  $n$  aan hoeveel water er is en de factor  $\beta$  hoe samendrukbaar dat water is), of door een netto-uitstroming van water uit de poriën (de tweede term in het rechterlid).

In het eendimensionale geval van alleen verticale stroming reduceert de bergingsvergelij-king tot

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial t} = -n\beta \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad (15.11)$$

De grootte van het specifieke debiet  $q_z$  hangt samen met de drukgradiënt, volgens de wet van Darcy. Daarvoor geldt

$$q_z = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (15.12)$$

Men merke op dat het hier niet nodig is rekening te houden met de drukgradiënt door het eigen gewicht van het water, omdat met  $p$  de incrementele waterspanning bedoeld wordt, d.w.z. de verandering ten opzichte van een begintoestand, waarin de zwaartekracht al ver-disconteerd is.

Uit (15.11) en (15.12) volgt, aannemende dat de doorlatendheidscoëfficiënt  $k$  een con-stante is,

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial t} = -n\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (15.13)$$

Deze vergelijking bevat nog twee variabelen, de volumerek  $\varepsilon_{\text{vol}}$  en de waterdruk  $p$ . Er zal nog een vergelijking moeten worden gevonden om het probleem oplosbaar te maken. Die

tweede vergelijking kan men vinden door de vervorming van de grond te beschrijven.

In het eendimensionale geval zijn er geen horizontale rekken, en is dus de volumerek  $\varepsilon_{\text{vol}}$  gelijk aan de verticale rek  $\varepsilon$ ,

$$\varepsilon_{\text{vol}} = \varepsilon. \quad (15.14)$$

Men vindt nu uit (15.5), (15.13) en (15.14), aannemende dat de samendrukbaarheid  $m_v$  niet met de tijd verandert,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m_v}{m_v + n\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (15.15)$$

waarin  $c_v$  de *consolidatiecoëfficiënt* is,

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w(m_v + n\beta)}. \quad (15.16)$$

Vergelijking (15.15) is de basisvergelijking van de consolidatietheorie. Uit deze differentiaalvergelijking zal men de waterspanning  $p$  moeten bepalen.

Het eenvoudigste geval treedt op als de totaalspanning  $\sigma$  tijdens het proces niet verandert. Dat zal het geval zijn als de belasting op de grond niet verandert tijdens de consolidatie. Men krijgt dan

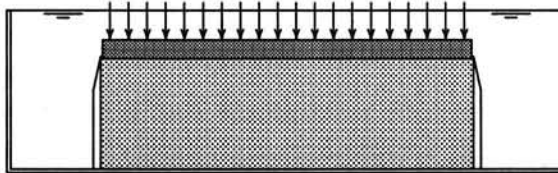
$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (15.17)$$

In de mathematische fysica noemt men een vergelijking van het type (15.17) een *diffusievergelijking*.

Opgemerkt moge nog worden dat de vergelijking nauwelijks eenvoudiger wordt als het water onsamendrukbaar is ( $\beta = 0$ ). Dit heeft alleen invloed op een van de coëfficiënten. Men kan het effect van de samendrukbaarheid van het water dus met weinig moeite meenemen.

## 15.2 Rand- en beginvoorwaarden

Om de differentiaalvergelijking (15.17) te kunnen oplossen moeten nog rand- en beginvoorwaarden gegeven worden. In het geval van een samendrukkingsproef, zie figuur 15.3, wordt



Figuur 15.3. Samendrukkingsproef.

het monster meestal aan de bovenzijde gedraineerd, door het aanbrengen van een dun filterpapiertje, en een stalen plaat met gaatjes, of een poreuze steen. De waterstand in het bakje waarin de ring met het grondmonster wordt geplaatst wordt constant gehouden. Dit betekent dat aan de bovenzijde de wateroverspanning nul is,

$$z = h : p = 0. \quad (15.18)$$

De onderzijde wordt soms ook gedraineerd, soms niet. In het laatste geval kan er aan de onderzijde geen water uit, en is de randvoorwaarde daar

$$z = 0 : \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (15.19)$$

Deze twee randvoorwaarden lijken fysisch voldoende, en zijn wiskundig in overeenstemming met een tweede afgeleide naar  $z$  in de differentiaalvergelijking. Men verwacht dan immers twee randvoorwaarden.

De beginvoorwaarde hangt samen met de wijze van belasten. Een gebruikelijke proefprocedure is dat in zeer korte tijd een extra bovenbelasting wordt aangebracht, die daarna constant gehouden wordt. Integreert men vergelijking (15.10) over de korte tijd  $\Delta t$  dan vindt men

$$\varepsilon_{\text{vol}} = -n\beta p - \int_0^{\Delta t} \frac{\partial q_z}{\partial z} dt.$$

De integraal hierin stelt voor de hoeveelheid water die in een tijdje  $\Delta t$  uit het monster stroomt. Als  $\Delta t$  zeer klein is kan dat nog niets zijn, en men vindt dan

$$t = 0 : \quad \varepsilon_{\text{vol}} = -n\beta p. \quad (15.20)$$

Uit (15.5) volgt, rekening houdend met het feit dat in dit geval  $\varepsilon_{\text{vol}} = \varepsilon$ ,

$$\varepsilon_{\text{vol}} = -m_v(\sigma - p). \quad (15.21)$$

Uit de vergelijkingen (15.20) en (15.21) vindt men nu

$$t = 0 : \quad p = \frac{\sigma}{1 + n\beta/m_v}. \quad (15.22)$$

Dit is de gezochte beginvoorwaarde. Het betekent dat in dit geval op het begintijdstip  $t = 0$ , dat wil zeggen vlak na het aanbrengen van de belasting  $\sigma$ , de waterspanning bekend is.

Als het water onsamendrukbaar is (bij een volledig verzadigd monster is dat een redelijke aanname) reduceert (15.22) tot

$$t = 0, \beta = 0 : \quad p = \sigma. \quad (15.23)$$

De beginwaterspanning is dan gelijk aan de opgelegde belasting. Dat kan men ook als volgt inzien. Door de zijdelingse opsluiting is een volumeverandering alleen mogelijk door een verticale rek. Omdat het water onsamendrukbaar is, is een instantane volumeverandering onmogelijk, en dus ook een instantane verticale rek. Dat betekent dat de verticale effectieve spanning op het moment van belasten niet veranderen kan (anders zou er immers een rek zijn). En dat heeft weer tot gevolg dat de verandering van de verticale grondspanning in dit geval tot een even grote verandering van de waterspanning leidt. Onder deze omstandigheden (zijdelingse opsluiting en onsamendrukbaar water) neemt het water aanvankelijk de volledige belasting op.

Men bedenke dat in dit hoofdstuk alleen sprake is van een zijdelings opgesloten monster. De vergelijkingen, en de uitspraken, zijn alleen daarop van toepassing. Als er wel zijdelingse vervorming kan optreden (bijvoorbeeld bij plaatselijke belasting op een grondlaag) kan er wel een instantane verticale zakking optreden, met een gelijktijdige horizontale uitzetting. De effectieve spanningen veranderen dan wel instantaan, en het water draagt, ook in het begin, maar een deel van de belasting, vaak zelfs maar een gering deel. In dergelijke gevallen is het consolidatieprobleem driedimensionaal, en veel ingewikkelder.

## Hoofdstuk 16

# ANALYTISCHE OPLOSSING

In dit hoofdstuk wordt een analytische oplossing van het probleem van eendimensionale consolidatie gegeven. De oplossing van het probleem is in de grondmechanica voor het eerst gegeven door Terzaghi, in 1923. In de wiskunde was de oplossing van dit type problemen (diffusieproblemen) al bekend sinds het begin van de 19e eeuw. Fourier ontwikkelde de oplossing om de opwarming en afkoeling van een staaf te berekenen. Daarvoor geldt dezelfde differentiaalvergelijking.

### 16.1 Het probleem

Het wiskundige probleem van eendimensionale consolidatie is als volgt. De differentiaalvergelijking is

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (16.1)$$

met als beginvoorwaarde

$$t = 0 : \quad p = p_0 = \frac{q}{1 + n\beta/m_v}, \quad (16.2)$$

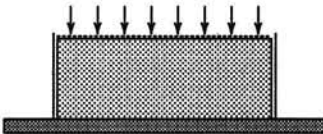
waarin  $q$  de op het tijdstip  $t = 0$  plotseling aangebrachte belasting is. Aangenomen is dat die belasting voor  $t > 0$  constant blijft.

De randvoorwaarden zijn, als de dikte van het grondmonster of de grondlaag wordt aangegeven met  $h$ , en als de grond aan de bovenzijde gedraineerd is, en aan de onderzijde ondoorlatend,

$$z = 0 : \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (16.3)$$

$$z = h : \quad p = 0. \quad (16.4)$$

Deze vergelijkingen zijn van toepassing op een grondmonster in een samendrukkingsapparaat, met drainage alleen aan de bovenkant en met een constante belasting. De vergelijkingen



Figuur 16.1. Consolidatie.

zijn ook van toepassing op een monster met een dikte  $2h$  dat aan onder- en bovenzijde gedraineerd is. De bovenste helft van zo'n monster draineert naar de bovenrand, de onderste helft naar de onderrand. Hetzelfde probleem treedt op bij de consolidatie in het terrein van een kleilaag tussen twee goed doorlatende lagen, bijvoorbeeld zandlagen, wanneer daar in korte tijd

over een zeer groot oppervlak een constante bovenbelasting wordt opgebracht. Als het oppervlak in horizontale richting zeer uitgestrekt is mag men wel stellen dat er geen horizontale verplaatsingen zullen zijn, en dat de afstroming alleen in verticale richting zal optreden.

De belasting zou een zeer snel aangebrachte zandophoging kunnen zijn. Op de vraag hoe snel dat moet gebeuren om van een instantane belasting te kunnen spreken zal nog worden teruggekomen.

## 16.2 Oplossing

Men kan het probleem beschreven door de vergelijkingen (16.1)-(16.4) oplossen met behulp van scheiding van variabelen, of, beter nog, met behulp van de Laplace-transformatie. Die laatste methode zal hier worden gevolgd, maar zonder op details in te gaan.

De Laplace-transformatie  $\bar{p}$  van de druk  $p$  wordt gedefiniëerd als

$$\bar{p} = \int_0^{\infty} \exp(-st) dt. \quad (16.5)$$

Het principe van de Laplace-transformatie is dat men de differentiaalvergelijking (16.1) vermenigvuldigt met  $\exp(-st)dt$ , en dan integreert van  $t = 0$  tot  $t = \infty$ . Men vindt dan, met behulp van partiële integratie, en met de beginvoorwaarde (16.2),

$$s\bar{p} - p_0 = c_v \frac{d^2 \bar{p}}{dz^2}. \quad (16.6)$$

De partiële differentiaalvergelijking (16.1) is nu teruggebracht tot een gewone differentiaalvergelijking. De algemene oplossing hiervan is

$$\bar{p} = \frac{p_0}{s} + A \exp(z\sqrt{s/c_v}) + B \exp(-z\sqrt{s/c_v}). \quad (16.7)$$

Hierin zijn  $A$  en  $B$  integratieconstanten, die niet van  $z$  afhangen, maar mogelijk wel van de transformatieparameter  $s$ . Met behulp van de randvoorwaarden (16.3) en (16.4) vindt men voor de integratieconstanten de volgende uitdrukkingen.

$$A = -\frac{p_0}{2s \cosh(h\sqrt{s/c_v})}, \quad (16.8)$$

$$B = -\frac{p_0}{2s \cosh(h\sqrt{s/c_v})}. \quad (16.9)$$

Er volgt nu voor de getransformeerde waterspanning

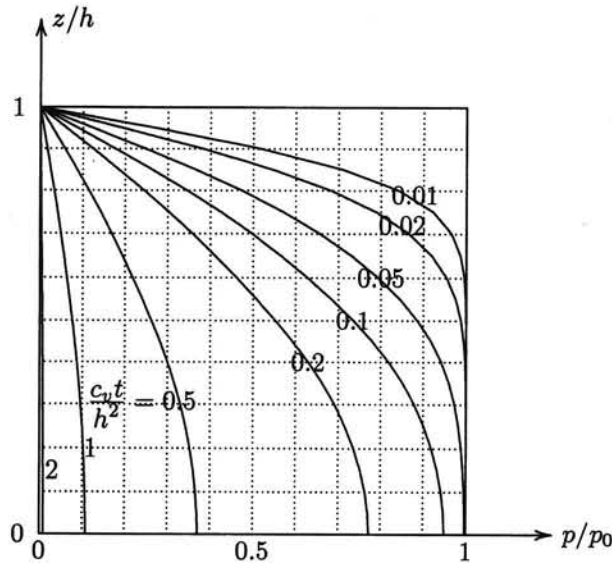
$$\frac{\bar{p}}{p_0} = \frac{1}{s} - \frac{\cosh(z\sqrt{s/c_v})}{s \cosh(h\sqrt{s/c_v})}. \quad (16.10)$$

Het probleem is nu teruggebracht tot het terugtransformeren van de uitdrukking (16.10). Dat is een wiskundig probleem, dat een behoorlijke kennis van de techniek der Laplace-transformaties vereist, met name het inversie-theorema. Zonder op de details van de afleiding in te gaan wordt hier gesteld dat het resultaat tenslotte de volgende formule is.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi z}{2h}\right] \exp\left[-(2j-1)^2 \frac{\pi^2 c_v t}{4h^2}\right]. \quad (16.11)$$

Dit is de gezochte analytische oplossing, zie figuur 16.2.

Erg inzichtelijk ziet de oplossing (16.11) er op het eerste gezicht niet uit. Toch kan men bij nader inzien een aantal eigenschappen vrij eenvoudig nagaan. Zo ziet men dat voor  $z = h$  de druk  $p$  altijd nul is, en de oplossing dus voldoet aan de randvoorwaarde (16.4).



Figuur 16.2. Analytische oplossing.

De cosinus in elke term van (16.11) is voor  $z = h$  nul, omdat  $\cos(\pi/2) = 0$ ,  $\cos(3\pi/2) = 0$ ,  $\cos(5\pi/2) = 0$ , etc., en dus is ook  $p = 0$  voor  $z = h$ . Dat de oplossing (16.11) aan de differentiaalvergelijking (16.1) voldoet kan ook eenvoudig worden nagegaan, omdat elke term van de reeks aan die differentiaalvergelijking voldoet. Dat aan de randvoorwaarde (16.3) wordt voldaan kan men het gemakkelijkst inzien door te bedenken dat na differentiatie naar  $z$  elke term een factor  $\sin(\dots z)$  bevat, en die zijn allemaal 0 als  $z = 0$ . Het lastigst is het nog om de beginvoorwaarde te controleren, omdat dan de reeks slecht convergeert, en er dus veel termen moeten worden berekend. Men kan die controle het beste uitvoeren door de waarden voor  $t = 0$  te berekenen met een computerprogramma.

Een indruk van het gedrag van de oplossing kan men ook krijgen door na te gaan wat er gebeurt als de tijd  $t$  erg groot wordt. Omdat de exponentiële functies een factor  $(2j - 1)^2$  bevatten, dat wil zeggen factoren 1, 9, 16, ..., zijn alle volgende termen verwaarloosbaar klein als de eerste al redelijk klein is. Dat betekent dat voor grote waarden van de tijd de eerste term als benadering kan worden gebruikt,

$$\frac{c_v t}{h^2} \gg 0.1 : \quad \frac{p}{p_0} \approx \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 c_v t}{4 h^2}\right). \quad (16.12)$$

Na voldoende lange tijd blijft er maar één term van de oneindige reeks over, en dat is een cosinus-functie in  $z$ -richting. De waarden daarvan gaan exponentieel naar nul met de tijd  $t$ . De benadering (16.12) is goed bruikbaar als de tijd maar niet te klein is. In de praktijk is deze benadering al goed genoeg als  $c_v t / h^2 > 0.2$ .

Het verloop van de waterspanningen als functie van  $z/h$  en  $c_v t / h^2$  is getekend in figuur 16.2. Voor de berekening van de waarden in figuur 16.2 is gebruik gemaakt van een eenvoudig computerprogramma in BASIC, zie programma 16.1. Dat programma geeft de waarden van de waterspanning als functie van de diepte, voor een bepaalde waarde van de tijd. In dit programma worden alle termen van de oneindige reeks meegenomen waarvoor het argument van de exponentiële functie kleiner is dan 20. Daarbij is er van uitgegaan dat alle termen met een factor  $\exp(-20)$ , of kleiner, verwaarloosbaar zijn. Dat lijkt wel nauwkeurig genoeg.

```

100 CLS:PRINT "One-dimensional Consolidation"
110 PRINT "Analytical solution":PRINT
120 INPUT "Thickness of layer ..... ";H
130 INPUT "Consolidation coefficient ..... ";C
140 INPUT "Number of subdivisions ..... ";N
150 INPUT "Value of time ..... ";T
160 PRINT:TT=C*T/(H*H):PI=4*ATN(1):A=4/PI:PP=PI*PI/4
170 FOR K=0 TO N:Z=K/N:P=0:C=-1:J=0
180 J=J+1:C=-C:JJ=2*J-1:JT=JJ*JJ*PP*TT
190 P=P+(A*C/JJ)*COS(JJ*PI*Z/2)*EXP(-JT)
200 IF JT<20 THEN GOTO 180
210 PRINT " z/h = ";Z;" - p/po = ";P
220 NEXT K:END

```

Programma 16.1. Analytische oplossing eendimensionale consolidatie.

### 16.3 De zetting

Nu het verloop van de waterspanningen gevonden is, kan het verloop van de verticale vervormingen berekend worden. Daartoe wordt gebruik gemaakt van de formule

$$\varepsilon = -m_v(\sigma - p). \quad (16.13)$$

Voor de verlenging van het grondmonster vindt men

$$\Delta h = \int_0^h \varepsilon dz = -m_v h q + m_v \int_0^h p dz. \quad (16.14)$$

De eerste term in het rechterlid is de uiteindelijke zetting, bereikt als alle waterspanningen tot nul zijn gereduceerd. Die waarde zal  $\Delta h_\infty$  worden genoemd,

$$\Delta h_\infty = -m_v h q. \quad (16.15)$$

Onmiddellijk na het aanbrengen van de belasting is de waterspanning  $p$  gelijk aan  $p_0$ , zie (16.2). De verlenging is dan, met (16.14),

$$\Delta h_0 = -m_v h q \frac{n\beta/m_v}{1 + n\beta/m_v}. \quad (16.16)$$

Als het water onsamendrukbaar is ( $\beta = 0$ ), is dit nul, zoals was te verwachten. De uitdrukkingen (16.15) en (16.16) zijn negatief als  $q > 0$ , hetgeen betekent dat het monster korter wordt bij belasten.

Om het verloop van de zettingen in de tijd aan te geven wordt vaak gebruik gemaakt van een relatieve grootheid, de *consolidatiegraad*  $U$ , gedefiniëerd als

$$U = \frac{\Delta h - \Delta h_0}{\Delta h_\infty - \Delta h_0}. \quad (16.17)$$

Dit is een dimensieloze grootheid, die varieert tussen 0 (voor  $t = 0$ ) en 1 (voor  $t \rightarrow \infty$ ). De consolidatiegraad geeft aan hoe ver het consolidatieproces is voortgeschreden.

Men vindt, met (16.14), (16.15) en (16.16),

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{p_0 - p}{p_0} dz. \quad (16.18)$$

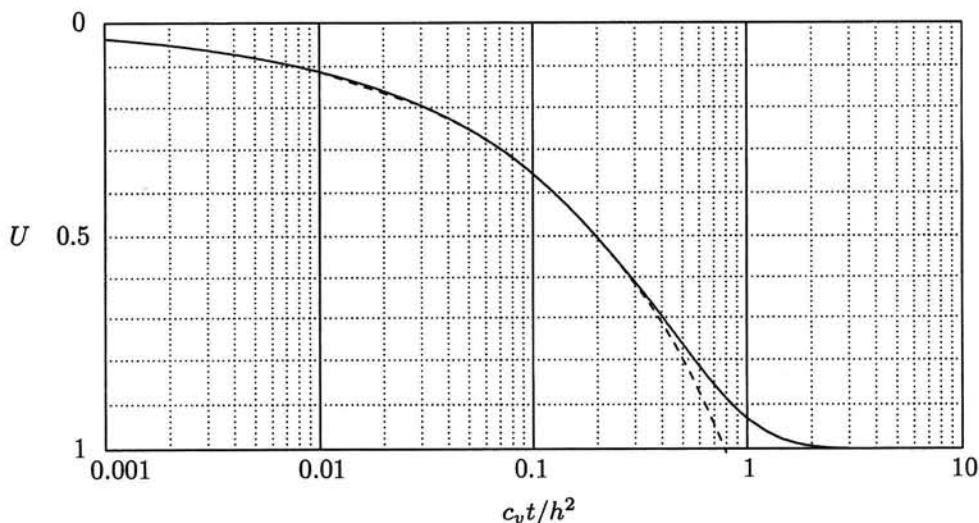


Met behulp van de uitdrukking (16.11) wordt dit

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \exp[-(2j-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{c_v t}{h^2}]. \quad (16.19)$$

Voor  $t \rightarrow \infty$  is dit uiteraard gelijk aan 1. Dat de waarde voor  $t = 0$  gelijk is aan nul volgt uit de reeks

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (16.20)$$



Figuur 16.3. Consolidatiegraad.

Het verloop van de consolidatiegraad, die alleen een functie is van de dimensieloze tijdsfactor  $c_v t / h^2$ , is getekend in figuur 16.3. De berekeningen zijn uitgevoerd met het programma 16.2.

```

100 CLS:PRINT "One-dimensional Consolidation"
110 PRINT "Consolidation ratio":PRINT
120 INPUT "Thickness of layer ..... ";H
130 INPUT "Consolidation coefficient ..... ";C
140 INPUT "Value of time ..... ";T
160 PRINT:TT=C*T/(H*H):PI=4*ATN(1):PP=PI*PI/4
170 A=8/(PI*PI):J=0:U=1
180 J=J+1:JJ=2*J-1:JT=JJ*JJ*PP*TT
190 U=U-A*EXP(-JT)/(JJ*JJ):IF JT<20 THEN GOTO 180
200 PRINT " c*t/(h*h) = ";TT;" U = ";U;
210 PRINT " U' = ";2*SQR(T/PI):END

```

Programma 16.2. Consolidatiegraad.

Dit programma geeft ook nog een benaderingswaarde ( $U'$ ), zie hiervoor de volgende paragraaf.

Theoretisch duurt het consolidatieproces oneindig lang. Voor de praktijk is het natuurlijk wel voldoende als de laatste term in (16.19), de oneindige reeks, nog maar 0.01 is. Dan is 99% van de uiteindelijke zetting bereikt. Men vindt dat dat het geval is als  $c_v t/h^2 = 1.784$ , of grofweg als  $c_v t/h^2 = 2$ . Dit betekent dat

$$t_{99\%} = \frac{2h^2}{c_v} = \frac{2h^2(m_v + n\beta)\gamma_w}{k}. \quad (16.21)$$

In deze nuttige formule zijn een aantal van de belangrijkste karakteristieken van het consolidatieproces samengevat. Omdat de consolidatiecoëfficiënt  $c_v$  bestaat uit het quotiënt van de doorlatendheidscoëfficiënt  $k$  en de samendrukbaarheid  $m_v$  kan men aan (16.21) zien dat het consolidatieproces langer duurt naarmate de doorlatendheid kleiner is, of de samendrukbaarheid groter. Realiseert men zich de aard van het proces van consolidatie, met uitpersing van water tot een zekere eindvorming is bereikt, dan is dat ook logisch. Als de doorlatendheid kleiner is gaat het uitpersen van water langzamer, en duurt de consolidatie dus langer. Als de grond meer samendrukbaar is moet er meer water worden uitgeperst, en ook dan duurt het consolidatieproces langer.

Voor de praktijk is van groot belang dat de tijd in formule (16.19) alleen voorkomt in de combinatie  $c_v t/h^2$ . Dit betekent dat het proces bij een tweemaal zo dik grondmonster vier maal zo lang duurt. Men noemt dat het *laagdikte-effect*. Het betekent ook dat als men in het laboratorium bij een monster van 2 cm dikte meet dat het proces van consolidatie praktisch is afgelopen na 1 uur (het zuiverste kan men dat meten aan het nul worden van de waterspanning, als die tenminste gemeten wordt), dat dan een laag van diezelfde klei van 2 m dikte in werkelijkheid 10000 maal zo lang nodig heeft om te consolideren, dat is ruim 1 jaar.

Een andere belangrijke consequentie van het voorkomen van de drainagelengte  $h$  in het kwadraat is dat men het consolidatieproces aanzienlijk kan versnellen door de drainagelengte te verkleinen. Als voorbeeld moge dienen een geval van een kleilaag van 10 m dikte. Stel dat de doorlatendheid  $k$  ongeveer  $10^{-9}$  m/s is. Stel verder dat verwacht wordt dat de eindzakking van de kleilaag bij een belasting door een ophoging met 3 m droog zand 20 cm is. Dat is dus een rek van 2% bij een spanning van ongeveer 50 kPa. De daarbij behorende waarde van  $m_v$  is dan, met (15.3):  $m_v = 0.0004$  m<sup>2</sup>/kN. De consolidatiecoëfficiënt is dan, met (15.16),  $c_v = 0.25 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, en de consolidatietijd is dan, met (16.21),  $t_{99\%} = 2 \times 10^8$  s. Dat is ongeveer 6 jaar, hetgeen betekent dat de zakkings vele jaren voortduren. Om het consolidatieproces te versnellen kan men verticale drainages aanbrengen, bijvoorbeeld in de vorm van doorlatende strips van kunststof, die machinaal in de grond worden gebracht. Brengt men deze draianges aan in een regelmatig patroon met onderlinge afstanden van zeg 1.60 m, dan wordt de drainagelengte (schattenderwijs) 6 maal korter. Als men aan mag nemen dat de horizontale doorlatendheid gelijk is aan de verticale, dan wordt de consolidatietijd met een factor 36 bekort, en deze wordt dan dus ongeveer 2 maanden. De zettingen door consolidatie zijn dan na 2 maanden al opgetreden. Voor een nieuwe weg betekent dit dat er na de oplevering veel minder zettingen zijn te verwachten, en er dus enorm bespaard kan worden op onderhoud.

## 16.4 Benadering voor kleine waarden van de tijd

Als de tijdparameter  $c_v t/h^2$  erg klein is, moet men om enige nauwkeurigheid te bereiken wel erg veel termen meenemen. Dat is niet zo erg, omdat het werk door een computer wordt verricht, maar het maakt de oplossing ondoorzichtig, en men gaat zich afvragen of dat niet

handiger kan. Dat is inderdaad het geval, omdat de theorie der Laplace-transformaties een stelling kent die stelt dat men benaderingen voor kleine waarden van de tijd  $t$  kan vinden door in de getransformeerde uitdrukkingen de parameter  $s$  groot te nemen. Op de details zal niet worden ingegaan. Volstaan wordt met de vermelding van het resultaat voor de consolidatiegraad,

$$U = \frac{\Delta h - \Delta h_0}{\Delta h_\infty - \Delta h_0} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c_v t}{h^2}}. \quad (16.22)$$

Blijkbaar neemt in het begin van het consolidatieproces de zetting toe met de wortel uit de tijd. Van die eigenschap zal later nog een nuttig gebruik gemaakt worden. Het computerprogramma 16.2 berekent ook de benaderde waarde, en in figuur 16.3 is de benaderde waarde getekend als een stippellijn. De benadering blijkt erg goed te zijn, tot aan waarden voor de relatieve zetting van ongeveer 70%.

De benaderingsformule (16.22) maakt het ook mogelijk om te zeggen hoe kort een belasting moet duren om als instantaan te kunnen worden beschouwd. Men ziet dat er maar 1% van de consolidatie heeft plaats gevonden als  $c_v t/h^2 = 10^{-4} \pi/4$ , of ongeveer  $t = t_1\%$ , met

$$t_1\% = 10^{-4} \frac{h^2}{c_v}. \quad (16.23)$$

Een belasting die sneller wordt opgebracht dan in dit tijdsinterval kan als praktisch instantaan worden beschouwd.

### Opgaven

**16.1** Een kleimonster van 2 cm hoogte wordt beproefd in een samendrukkingsapparaat. Het monster wordt aan beide zijden gedraineerd. De consolidatiecoëfficiënt is  $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Op een zeker tijdstip wordt een belasting aangebracht. Na hoeveel tijd is de waterspanning in het midden van het monster gereduceerd tot 50% van de beginwaarde?

**16.2** Hoe lang zou het proces uit de vorige opgave duren als het monster maar aan één zijde wordt gedraineerd?

**16.3** Bij beproefing van een kleimonster van 2 cm dikte in het laboratorium heeft men gemeten dat na een kwartier de waterspanningen praktisch tot nul zijn gereduceerd. Hoe lang duurt het consolidatieproces voor een laag van dezelfde klei van 5 m dikte?

**16.4** Bij een samendrukkingsproef op een kleimonster heeft men na het aanbrengen van de belasting verzuimd de beginzakking te meten. Wel is na 1 minuut een zakking van 0.06 mm gemeten, en na 4 minuten een zakking van 0.08 mm. Maak een schatting voor de initiële zakking.

**16.5** Ga na hoe groot de fout in de benadering (16.12) is voor  $c_v t/h^2 = 0.2$ , door de tweede term van de reeks te bepalen. Neem  $z = 0$ .

**16.6** De programma's uit dit hoofdstuk zijn niet bruikbaar als  $t = 0$ , omdat ze dan in een oneindige lus raken. Toch convergeren de reeksen wel. Dan moet het afbreekcriterium iets anders worden geformuleerd. Breng die verbetering in de programma's aan.

**16.7** Breid de programma's uit dit hoofdstuk uit met betere voorzieningen voor uitvoer, zoals een grafiek van de waterspanningen, of uitvoer op een printer.

## Hoofdstuk 17

### NUMERIEKE OPLOSSING

Het verloop van de waterspanningen gedurende het consolidatieproces kan vrij eenvoudig numeriek berekend worden, met behulp van de methode der eindige differenties. Dat wordt in dit hoofdstuk behandeld. De gebruikte numerieke techniek is zo eenvoudig mogelijk gehouden.

#### 17.1 Eindige differenties

De differentiaalvergelijking voor eendimensionale consolidatie is vergelijking (15.17),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (17.1)$$

De afgeleide naar de tijd kan men benaderen door

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t}, \quad (17.2)$$

waarin de index  $i$  aangeeft dat de waarden betrekking hebben op het punt  $z = z_i$ . Vergelijking (17.2) is niets anders dan de definitie van  $\partial p / \partial t$ , alleen is de limietovergang  $t \rightarrow 0$  weggelaten.

Ook in  $z$ -richting zal gebruik gemaakt worden van eindige differenties. Daartoe wordt de hoogte  $h$  van het grondmonster onderverdeeld in  $n$  stukjes met een hoogte  $\Delta z$ ,

$$\Delta z = \frac{h}{n}. \quad (17.3)$$

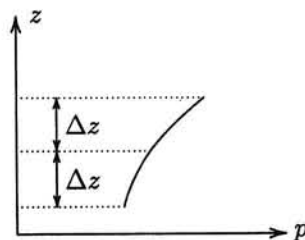
De tweede afgeleide naar  $z$  kan benaderd worden door

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \approx \frac{p_{i+1}(t) - 2p_i(t) + p_{i-1}(t)}{(\Delta z)^2}. \quad (17.4)$$

Dit verband is geïllustreerd in figuur 17.1. Men kan de formule het eenvoudigst vinden door te bedenken dat de tweede afgeleide de afgeleide is van de eerste afgeleide. De tweede afgeleide is dus het verschil van de helling in het bovenste deel van de figuur min de helling in het onderste deel, gedeeld door de afstand  $\Delta z$ . Men ziet aan deze benadering ook eenvoudig dat voor een rechte lijn de uitdrukking (17.4) voor de tweede afgeleide inderdaad naar nul gaat. De waarde in het midden is dan immers het gemiddelde van de twee waarden er naast.

Substitutie van (17.2) en (17.4) in (17.1) leidt tot de volgende formule

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + \alpha \{p_{i+1}(t) - 2p_i(t) + p_{i-1}(t)\}, \quad (17.5)$$



Figuur 17.1. Tweede afgeleide.

waarin

$$\alpha = c_v \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}. \quad (17.6)$$

De uitdrukking (17.5) is een expliciete formule voor de nieuwe waarde van de waterdruk in het punt  $i$ , als de oude waarden (op het tijdstip  $t$ ) in dat punt en de twee punten er juist boven en er juist onder bekend zijn.

De randvoorwaarden moeten ook vertaald worden in numerieke zin. Voor de randvoorwaarde aan de bovenkant, waar de druk  $p$  nul moet zijn, zie (15.18), gaat dat eenvoudig,

$$p_n = 0. \quad (17.7)$$

De randvoorwaarde aan de onderkant stelt dat voor  $z = 0$  de afgeleide  $\partial p / \partial z = 0$  moet zijn, zie (15.18). Dat kan het beste numeriek benaderd worden door de onderverdeling in  $z$ -richting door te zetten tot juist onder de onderrand, zodanig dat ook in het punt op een diepte  $\Delta z$  onder de rand een waterdruk wordt gedefinieerd, zeg  $p_{-1}$ . Door nu te stellen dat er steeds moet gelden dat  $p_{-1} = p_1$ , wat ook de waarde van  $p_0$  precies op de onderrand ook moge zijn, is dan steeds voldaan aan de voorwaarde dat  $\partial p / \partial z = 0$  op de symmetrie-lijn  $z = 0$ . Dit betekent dus dat

$$p_{-1} = p_1. \quad (17.8)$$

Het algemene algoritme (17.5) voor het punt aan de onderkant kan men nu ook schrijven als

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) + \alpha \{ p_1(t) - 2p_0(t) + p_1(t) \}. \quad (17.9)$$

De twee randvoorwaarden (17.7) en (17.9), die op elk tijdstip gelden, completeren het algoritme, tezamen met de beginvoorwaarden,

$$t = 0 : \quad p_i = p_0, \quad 0 = 1, 2, \dots, n - 1, \quad p_n = 0. \quad (17.10)$$

Op het tijdstip  $t = 0$  zijn alle waarden bekend: alle waarden van de druk zijn dan  $p_0$  behalve die aan de bovenzijde, waar de druk nul is en blijft. De nieuwe waarden, na een tijdstap  $\Delta t$ , kunnen nu worden berekend met het algoritme (17.5). Men kan dat toepassen voor alle waarden van  $i$  in het interval  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Aan de bovenrand, voor  $i = n$ , blijft de waarde van de druk nul. Het numerieke proces is uitgevoerd, voor een laag van 1 m dikte, onderverdeeld in 10 laagjes, in tabel 17.1. De tabel geeft de waarden van  $p/p_0$  na de eerste 4 tijdstappen, voor het geval dat  $\alpha = 0.25$ . Men ziet dat het proces tamelijk langzaam gaat, en dat suggereert om de berekeningen door een computer te laten uitvoeren. Men kan daarvoor een speciaal programma schrijven, maar het kan ook goed worden uitgevoerd met een spreadsheet programma. Het lijkt er ook op dat men het numerieke proces kan versnellen door de parameter  $\alpha$  groter te kiezen. Dat is echter riskant, zoals later zal worden gezien.

Een eenvoudig computerprogramma dat de berekeningen uitvoert is weergegeven als programma 17.1. In dit programma is de randvoorwaarde aan de onderrand ingevoerd door voor het punt  $i = 0$  in het algemene algoritme te stellen dat  $p_{-1} = p_1$ . Voor  $i = 0$  is er dan een enigszins afwijkende formule, zie regel 210. Het programma berekent ook de consolidatiegraad, met behulp van formule (16.18), gebruik makend van de meest simpele numerieke integratieformule, de trapeziumregel. In figuur 17.2 zijn de numerieke resultaten vergeleken met de analytische. De waarden van  $c_v t / h^2$  waarvoor het verloop van de waterspanningen zijn getekend zijn dezelfde als in figuur 16.2.

De numerieke waarden zijn berekend door de hoogte  $h$  in 20 gelijke delen te verdelen,  $\Delta z = h/20$ . De waarde van  $\alpha$  is gekozen als  $\alpha = 0.2$ . Dat betekent dan dat

$x$	$t = 0$	$t = \Delta t$	$t = 2\Delta t$	$t = 3\Delta t$	$t = 4\Delta t$
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	1.000	0.750	0.625	0.547	0.492
0.8	1.000	1.000	0.937	0.875	0.820
0.7	1.000	1.000	1.000	0.984	0.961
0.6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996
0.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabel 17.1. Numerieke oplossing,  $\alpha = 0.25$ .

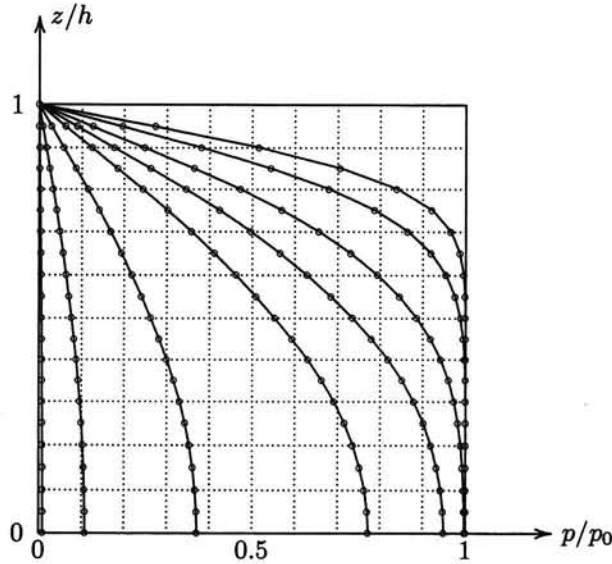
```

100 CLS:PRINT "One-dimensional Consolidation"
110 PRINT "Numerical solution":PRINT
120 INPUT "Thickness of layer ..... ";H
130 INPUT "Consolidation coefficient ..... ";C
140 INPUT "Number of subdivisions ..... ";N
150 T=0:DZ=H/N:DT=0.25*DZ*DZ/C:DIM P(N),PA(N)
160 PRINT "Suggestion for time step ..... ";DT
170 INPUT "Time step ..... ";DT
180 A=C*DT/(DZ*DZ):FOR I=0 TO N:P(I)=1:NEXT I:P(N)=0
190 U=1:T=T+DT
200 FOR I=1 TO N-1:PA(I)=P(I)+A*(P(I+1)-2*P(I)+P(I-1))
210 NEXT I:PA(0)=P(0)+A*(P(1)-2*P(0)+P(1))
220 CLS:FOR I=0 TO N
230 PRINT " z = ";I*DZ;"   p = ";PA(I):P(I)=PA(I)
240 U=U-P(I)/N:NEXT I:PRINT
250 PRINT " t = ";T;"   U = ";U:GOTO 190

```

Programma 17.1. Numerieke oplossing eendimensionale consolidatie.

$\Delta t = 0.0005 h^2/c_v$ . Er zijn dan wel  $2/0.0005 = 10000$  tijdstapjes nodig om het proces helemaal door te rekenen totdat de waterspanningen praktisch nul geworden zijn ( $c_v t/h^2 = 2$ ), maar een computer berekent dat zeer snel. De numerieke resultaten blijken uitstekend overeen te komen met de analytische, zie figuur 17.2. Dat geldt ook voor de numerieke waarden van de consolidatiegraad die het programma 17.1 berekent. De goede overeenstemming tussen beide resultaten, en de eenvoud van de numerieke methode, verklaren het toenemend gebruik van deze laatste.



Figuur 17.2. Vergelijking numerieke en analytische oplossing.

## 17.2 Numerieke stabiliteit

In het programma 17.1 is de waarde van de factor  $\alpha$  in de uitdrukking (17.5) in principe gelijk gekozen aan 0.25. Met behulp van die waarde doet het programma een suggestie voor de tijdstap  $\Delta t$ , maar de gebruiker hoeft die suggestie natuurlijk niet op te volgen. De suggestie wordt gedaan omdat bij een te grote waarde van  $\alpha$  het proces numeriek instabiel is. Men kan dat eenvoudig nagaan door het programma uit te voeren met een grotere waarde van de tijdstap, bijvoorbeeld 4 maal zo groot als het programma voorstelt. Dan blijken de waarden sterk te gaan slingeren, en zelfs oneindig groot te worden.

Men kan dit ook onderzoeken door na te gaan hoe een fout zich door het algoritme voortplant. Stel bijvoorbeeld dat aan het eind van het consolidatieproces, als alle waterspanningen nul behoren te zijn, nog een fout resteert zodanig dat  $p_i(t) = \epsilon$  en  $p_{i+1}(t) = p_{i-1}(t) = -\epsilon$ . Dan vindt men uit (17.5) dat  $p_i(t + \Delta t) = (1 - 4\alpha)\epsilon$ . De fout zal uitdempen als de nieuwe waarden kleiner zijn dan de oude, in absolute zin. Dat is het geval als

$$|1 - 4\alpha| < 1. \quad (17.11)$$

Dit betekent dat er moet gelden

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (17.12)$$

Uiteraard moeten alle andere verdelingen van fouten ook uitdempen, en het is dus niet zeker dat de eis (17.12) voldoende is voor stabiliteit. Toevallig blijkt, bij meer fundamentele beschouwingen, dat wel het geval te zijn. Het criterium (17.12) betekent dat het hier beschreven numerieke algoritme alleen stabiel is als de tijdstap positief is (dat spreekt eigenlijk vanzelf), en niet te groot,

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{(\Delta z)^2}{c_v}. \quad (17.13)$$

In het programma 17.1 is voor de factor  $\alpha$  daarom de waarde 0.25 gekozen. Het is een eenvoudige zaak om  $\alpha$  wat groter dan  $\frac{1}{2}$  te kiezen, en te constateren dat het proces dan

inderdaad instabiel is. De waterspanningen gaan hoe langer hoe meer slingeren, tussen grote negatieve en positieve waarden. Als de tijdstap voldoet aan het criterium (17.13) is het proces altijd stabiel, zoals men ook kan constateren door het met verschillende waarden van de tijdstap uit te voeren. De numerieke uitkomsten zijn als aan (17.13) wordt voldaan ook vrijwel onafhankelijk van de gekozen waarde van de tijdstap.

### 17.3 Numeriek - analytisch

Zoals in dit hoofdstuk en het vorige is gebleken is de numerieke oplossing van het consolidatieprobleem eigenlijk veel eenvoudiger dan de analytische oplossing. Daarbij komt dat men een numerieke oplossing vaak eenvoudiger kan generaliseren dan een analytische. Zo kan men met betrekkelijk weinig moeite een numerieke oplossing construeren voor de consolidatie van een gelaagd systeem, dat is een stelsel lagen met verschillende doorlatendheden en samendrukbaarheden. De analytische oplossing voor zo'n gelaagd systeem is in principe wel mogelijk, maar is wiskundig tamelijk gecompliceerd.

Een analytische oplossing heeft in het algemeen als voordeel ten opzichte van een numerieke oplossing dat men er een goed inzicht mee krijgt in het algemene karakter van de oplossing, zoals de afhankelijkheid van de verschillende parameters. Zo gaf de analytische oplossing aan dat het verloop van het consolidatieproces beheerst wordt door de parameter  $c_v T/h^2$ . Vaak kan men dat inzicht echter ook al krijgen uit de differentiaalvergelijking en de rand- en beginvoorwaarden, zonder dat een analytische oplossing bekend is. Dat gaat als volgt.

Men kan de basisvergelijkingen dimensieloos maken door in de eerste plaats een dimensieloze lengtemaat  $Z = z/h$  in te voeren, en voorts een dimensieloze waterdruk  $P = p/p_0$ . De tijd  $t$  komt verder alleen maar voor in de coëfficiënt  $c_v$ , en dat betekent men de tijd alleen maar dimensieloos kan maken door het invoeren van een parameter  $T = c_v t/h^2$ . Het probleem is dan, in dimensieloze vorm,

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2}, \quad (17.14)$$

met de volgende begin- en randvoorwaarden,

$$T = 0 : P = 1, \quad (17.15)$$

$$Z = 0 : \frac{\partial P}{\partial Z} = 0. \quad (17.16)$$

$$Z = 1 : P = 0, \quad (17.17)$$

De materiaalparameter  $c_v$  en de afmeting  $h$  zijn nu uit het wiskundige probleem geëlimineerd. En de enige numerieke waarden die er nog in voorkomen zijn de getallen 0 en 1. Zowel  $Z$  als  $P$  zijn van de orde van grootte van 1. Dat zal dan ook gelden voor  $T$ , en het is te verwachten dat het proces zal zijn afgelopen als  $T \gg 1$ . Hieruit volgt dus direct dat het tijdsverloop beheerst wordt door de factor  $T = c_v t/h^2$ , zoals ook in het vorige hoofdstuk gevonden is uit de volledige analytische oplossing.

Het feit dat het tijdsverloop van het proces beheerst wordt door de parameter  $c_v t/h^2$  betekent ook dat men kan stellen dat een "snelle" belasting optreedt als het tijdsverloop van die belasting ( $\Delta t$ ) zodanig is dat  $c_v \Delta t/h^2$  klein is ten opzichte van 1, zeg ongeveer 0.0001 of nog kleiner. Dat was in het vorige hoofdstuk ook al geconstateerd, zie formule (16.23), maar hier blijkt dat men dat ook wel kan zeggen zonder dat de oplossing bekend is.



Een numerieke oplossing zoals in dit hoofdstuk gepresenteerd kent een stabiliteitscriterium, waaraan moet worden voldaan om redelijke resultaten te verkrijgen. Opgemerkt moge worden dat er andere numerieke processen zijn ontwikkeld die altijd stabiel zijn. Zo kan men een ander type eindige differenties gebruiken, zoals achterwaartse of centrale interpolaties in de tijd. De numerieke procedures worden dan wel wat ingewikkelder, maar men hoeft zich geen zorgen meer te maken over de stabiliteit. Een andere manier is om gebruik te maken van een formulering met eindige elementen. Dat maakt het ook erg gemakkelijk om de grondeigenschappen te laten variëren. Daarop wordt hier niet verder ingegaan.

### Opgaven

**17.1** Men wil het consolidatieproces van een 4 meter dikke kleilaag voorspellen met behulp van een numeriek proces. De consolidatiecoëfficiënt wordt geschat op  $c_v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . De laag wordt in 20 laagjes van gelijke dikte verdeeld. Hoe groot kan de tijdstap zijn?

**17.2** Om een nauwkeuriger berekening te maken zou men de onderverdeling in laagjes fijner kunnen maken, bijvoorbeeld tweemaal zo fijn, dus 40 laagjes in plaats van 20 laagjes. Hoe groot moet dan de tijdstap zijn?

**17.3** Wat betekent de verfijning uit de vorige opgave voor de totale rekentijd tot aan het praktisch einde van het proces?

**17.4** Voer het in de vorige opgaven genoemde numerieke proces uit, met verschillende waarden voor de parameter  $\alpha$ .

## Hoofdstuk 18

# BEPALING CONSOLIDATIECOËFFICIËNT

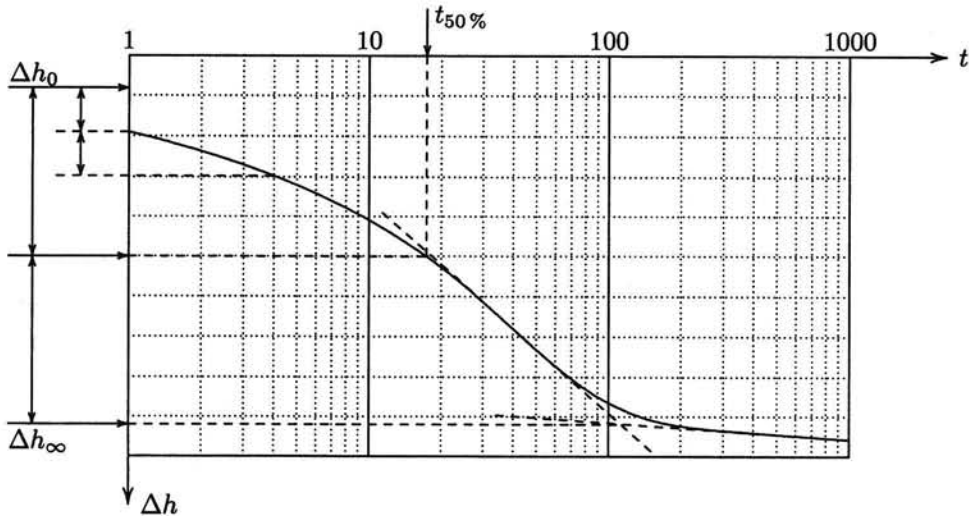
Als de theorie van de vorige hoofdstukken het gedrag van grond perfect zou beschrijven, zou het erg eenvoudig zijn om uit het proefresultaat de waarde van de consolidatiecoëfficiënt  $c_v$  te bepalen. Men zou bijvoorbeeld kunnen meten op welk moment de helft van de eindzakking is bereikt. Theoretisch wordt dit bereikt als  $c_v t / h^2 = 0.197$ , omdat voor deze waarde  $U = 0.5$ , volgens formula (16.19). Omdat de bijbehorende waarden van de tijd  $t$  en de monsterdikte  $h$  bekend zijn volgt dan direct de waarde van  $c_v$ . Helaas stuit men hierbij op technische en praktische moeilijkheden. Zowel de initiële zakking als de eindzakking zijn moeilijk precies vast te stellen. De beginzakking is immers de zakking precies op het moment van belasten, en dat is niet zo makkelijk te meten. Op het moment van belasten schiet de wijzer van het meetinstrument, of het getal op de digitale meter, plotseling omhoog, en loopt daarna direct door. De waarde precies op het moment van belasten is niet goed te constateren. Ook blijkt de zakking vaak niet een constante eindwaarde te bereiken, maar meet men een doorgaande deformatie, ook als de waterspanningen tot nul zijn gereduceerd. Men gebruikt daarom vaak een iets gewijzigde procedure om de "beginzakking" en de "eindzakking" te vinden. In dit hoofdstuk worden twee gebruikelijke procedures om deze moeilijkheden te ontgaan besproken.

### 18.1 Log( $t$ )-methode

De eerste manier om de moeilijkheden met de begin- en eindwaarden op te lossen is voorgesteld door Casagrande. Dat werkt als volgt. Als het verloop van de zetting gemeten bij een samendrukkingsproef wordt uitgezet tegen de logaritme van de tijd ontstaat meestal een kromme zoals aangegeven in figuur 18.1. Er blijkt geen horizontale asymptoot te zijn, maar voor grote waarden van de tijd blijkt er een min of meer rechtlijnig verloop op te treden (zie ook het volgende hoofdstuk). Afgesproken wordt nu, tamelijk willekeurig, dat men het snijpunt van deze rechte asymptoot met de rechte lijn die men met enige fantasie door het midden-deel van de kromme kan trekken (bijvoorbeeld door het buigpunt van de kromme) beschouwt als de eindzakking ten gevolge van de primaire consolidatie. In figuur 18.1 is dit uitgevoerd, hetgeen leidt tot de waarde  $\Delta h_\infty$  voor de eindzakking.

Omdat in de consolidatiegraad de beginzetting nog van alle zettingen moet worden afgetrokken zou die nauwkeurig gemeten moeten worden. Dat is een precare zaak, omdat de zakking "op het moment van belasten" niet goed te meten is. Daarom maakt men gebruik van de wetenschap dat in het begin de consolidatiegraad verloopt volgens  $\sqrt{t}$ , zoals in hoofdstuk 16 uiteengezet. Dit betekent dat tussen  $t = 0$  en  $t = t_1$  de zetting gelijk is aan die tussen  $t = t_1$  en  $t = 4t_1$ . Meet men bijvoorbeeld de zakking na 1 minuut en na 4 minuten, dan kan men stellen dat tussen  $t = 0$  en  $t = 1$  minuut een gelijke zakking moet zijn opgetreden als tussen  $t = 1$  minuut en  $t = 4$  minuten. De constructie is uitgevoerd in figuur 18.1, leidend tot de waarde  $\Delta h_0$  voor de geconstrueerde beginzakking.

Uitgaande van de aldus gevonden begin- en eindvoorwaarden kan men nu vrij scherp de waarde van de tijd bepalen waarvoor de zakking precies tussen de beginzakking en de eindzakking in ligt, en de consolidatiegraad  $U$  dus gelijk is aan 0.5. Die constructie is



Figuur 18.1. Log(t)-methode.

ook in figuur 18.1 uitgevoerd, met als resultaat de waarde van  $t_{50\%}$ . De waarde van de consolidatiecoëfficiënt volgt dan uit  $c_v t_{50\%}/h^2 = 0.197$ , of

$$c_v = 0.197 \frac{h^2}{t_{50\%}}. \quad (18.1)$$

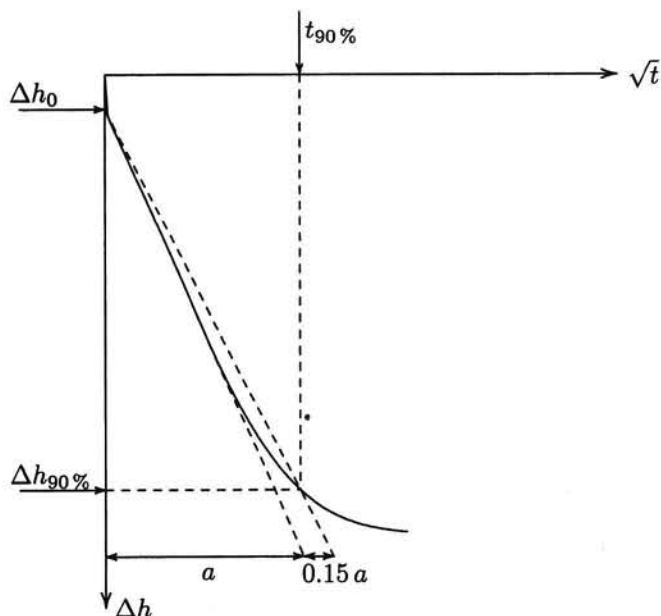
Men bedenke dat de grootte  $h$  in deze formule de laagdikte is, uitgaande van drainage aan een zijde. Dat is het zelfde als een monster met een dikte  $2h$  en drainage aan beide zijden. In de oorspronkelijke oplossing van Terzaghi is dat geval beschouwd, en men vindt het ook zo in veel boeken, maar door de symmetrie maakt het geen verschil in de uiteindelijke oplossing.

## 18.2 Wortel(t)-methode

Een andere manier om de consolidatiecoëfficiënt te bepalen is om nog nadrukkelijker gebruik te maken van het feit dat in het begin het consolidatieproces verloopt volgens de wortel uit de tijd. Men zet daartoe de gemeten waarden van de zakkings uit tegen  $\sqrt{t}$ , zie figuur 18.2. Er geldt dan, zie (16.22),

$$\Delta h - \Delta h_0 = (\Delta h_\infty - \Delta h_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c_v t}{h^2}}. \quad (18.2)$$

In principe zou de waarde van de consolidatiecoëfficiënt  $c_v$  bepaald kunnen worden uit de helling van de rechte tak in de figuur. Daarbij heeft men wel weer de waarden van de beginzakkings en de eindzakkings nodig, omdat die in de formule (16.22) voorkomen. De waarde van de beginzakkings  $\Delta h_0$  vindt men in de figuur door de rechte tak te laten snijden met de as  $\sqrt{t} = 0$ . Maar de eindzakkings  $\Delta h_\infty$  kan helaas niet rechtstreeks uit de figuur worden afgeleid. Om die moeilijkheid te omzeilen is door Taylor voorgesteld om gebruik te maken van de wetenschap dat bij een consolidatiepercentage van 90% de waarde van  $\sqrt{t}$  volgens de exacte formule 15% groter is dan die volgens de benaderingsformule (18.2). Uit de exacte formule (16.11) volgt dat  $U = 0.90$  als  $c_v t/h^2 = 0.8481$ , en uit (18.2) volgt dat  $U$  gelijk zou zijn aan 0.90 als  $c_v t/h^2 = 0.6362$ . De verhouding van die twee waarden is 1.333,

Figuur 18.2. Wortel( $t$ )-methode.

dat is het kwadraat van 1.154. Zet men in figuur 18.2 een rechte lijn uit die 15% minder steil is dan de raaklijn aan de rechte tak van de grafiek in het begin, dan zal die het werkelijke zettingsverloop snijden in het punt waar  $U = 0.90$ . De bijbehorende waarde van  $c_v t/h^2$  is 0.848 en derhalve vindt men de waarde van de consolidatiecoëfficiënt uit

$$c_v = 0.848 \frac{h^2}{t_{90\%}}. \quad (18.3)$$

Als de consolidatietheorie de werkelijkheid exact zou beschrijven zou men uit de twee hierboven beschreven methodes, de  $\log(t)$ -methode en de wortel( $t$ )-methode, dezelfde waarden moeten vinden. Dat blijkt meestal niet het geval te zijn. De afwijkingen kunnen wel enige tientallen procenten zijn. Dat wordt veroorzaakt door twee factoren. In de eerste plaats is de theorie niet exact (met name de aanname van een lineair verband tussen spanningen en rekken is een zwak punt), en bovendien bevat de meting van het verloop van de zetting als functie van de tijd altijd wel enige meetfouten, vooral omdat het vaak om kleine waarden gaat.

### 18.3 Bepaling van $m_v$ en $k$

Zowel bij de  $\log(t)$ -methode als bij de wortel( $t$ )-methode wordt bij de afgesproken procedure een waarde voor de eindzakking gevonden. Bij de  $\log(t)$ -methode komt die waarde in de constructie zelf voor. Bij de wortel( $t$ )-methode vindt men de beginzakking en het punt waar de consolidatiegraad 90% is. Door daarbij nog 10% op te tellen vindt men dan de eindzakking,

$$\Delta h_\infty = \Delta h_0 + \frac{10}{9} (\Delta h_{90\%} - \Delta h_0). \quad (18.4)$$

In het algemeen geldt voor die eindzakking

$$\Delta h_\infty = h m_v q, \quad (18.5)$$

en men vindt de waarde van de samendrukbaarheid  $m_v$ , dus uit

$$m_v = \frac{\Delta h_\infty}{h q}. \quad (18.6)$$

Omdat de consolidatiecoëfficiënt  $c_v$  al eerder gevonden is vindt men de doorlatendheidscoëfficiënt  $k$  uit

$$k = \gamma_w m_v c_v. \quad (18.7)$$

Ook de bepaling van de doorlatendheidscoëfficiënt  $k$  en de samendrukbaarheid  $m_v$  is theoretisch wel eenduidig, maar door benaderingen in de theorie en onnauwkeurigheden bij de metingen is de nauwkeurigheid niet al te groot.

### Opgaven

**18.1** Een consolidatieproef, op een aan beide zijden gedraineerd monster van 2 cm dikte, heeft, bij een belasting van 10 kPa, geleid tot de volgende resultaten.

$t$ (s)	$\Delta h$ (mm)
10	0.070
20	0.082
30	0.089
40	0.094
60	0.105
120	0.127
240	0.157
600	0.201
1200	0.230
1800	0.240
3600	0.258
7200	0.275

Bepaal de consolidatiecoëfficiënt met de  $\log(t)$ -methode, en met de wortel( $t$ )-methode.

**18.2** Bepaal uit de meetresultaten de waarde van de eindzakking  $\Delta h_\infty$  van het consolidatieproces (zonder kruip). Bepaal hieruit, met de twee methoden, de samendrukbaarheid en de doorlatendheidscoëfficiënt.

**18.3** Bereken uit vergelijking (16.19) de waarde van de consolidatiegraad voor diverse waarden van de dimensieloze tijdsparameter  $c_v t/h^2$ . Neem aan dat  $c_v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $\Delta h_0 = 0.005 \text{ m}$  en  $\Delta h_\infty = 0.05 \text{ m}$ . Teken het verloop van de zakking, met de tijd op logaritmische schaal. Controleer vervolgens of de procedure van de  $\log(t)$ -methode de juiste waarde van  $c_v$  oplevert.

**18.4** Teken het verloop van de zakking berekend voor het vorige probleem, met de tijd op de schaal  $\sqrt{t}$ . Controleer vervolgens of de procedure van de wortel( $t$ )-methode de juiste waarde van  $c_v$  oplevert.

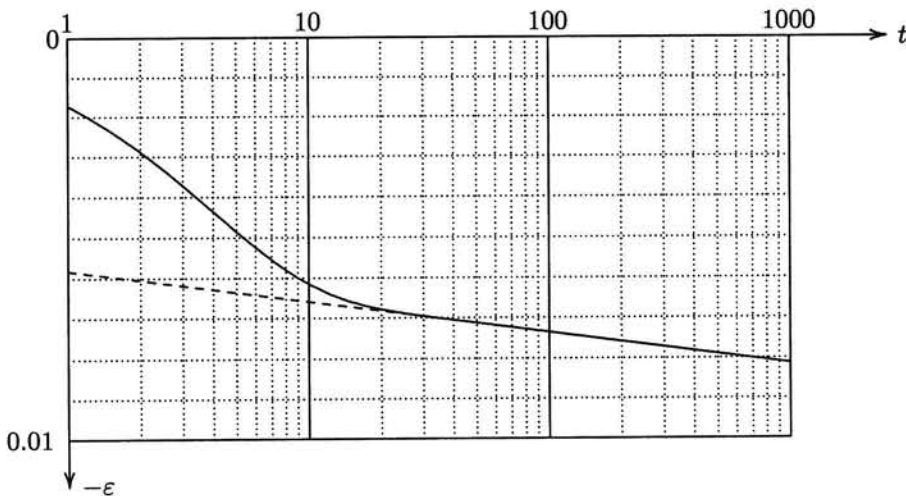
## Hoofdstuk 19

### SECULAIR EFFECT

Zoals in het vorige hoofdstuk reeds opgemerkt vindt men bij een samendrukkingsproef onder constante belasting vaak dat de vervorming nog doorgaat ook als de waterspanningen tot nul zijn gereduceerd, zie figuur 18.1. Dergelijke effecten vindt men bij meer materialen: beton, kunststoffen, en dergelijke. Meestal noemt men dat verschijnsel *kruip*. Voor veel materialen kan men het redelijk goed beschrijven met behulp van de theorie der visco-elasticiteit of visco-plasticiteit. Daarbij wordt het materiaal geacht een respons te vertonen die bestaat uit een combinatie van instantaan reagerende elementen (veren) en elementen waarin de kracht toeneemt bij toenemende vervormingssnelheid (visceuze dempers). Hoewel men er soms in geslaagd is het gedrag van gronden zoals klei op deze manier vrij redelijk te beschrijven, vereist dat meestal een nogal ingewikkeld materiaalmodel, en men stelt zich er in de grondmechanica meestal mee tevreden een meer pragmatische aanpak te volgen, op basis van proefresultaten.

#### 19.1 Keverling Buisman

Door Keverling Buisman is omstreeks 1936 uit langdurige samendrukkingsproeven gevonden dat de vervormingen van klei onder constante belasting niet naderen tot een verder constante waarde, zoals de consolidatietheorie van Terzaghi stelt, maar dat er een doorgaande vervorming optreedt, die weliswaar steeds kleiner wordt, maar nooit oplijkt te houden. Op semi-logarithmisch papier ontstaat ongeveer een rechte lijn, althans als de tijd voldoende groot is. Een voorbeeld is weergegeven in figuur 19.1. Dit suggereert dat het verband tussen



Figuur 19.1. Seculair effect.

de vervorming en de spanningsverhoging op de lange duur geschreven kan worden als

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s \log\left(\frac{t}{t_0}\right). \quad (19.1)$$

Hierin is  $\varepsilon_p$  de *primaire rek*, en  $\varepsilon_s$  de *seculaire rek*. De grootheid  $t_0$  is een referentie-tijd, waarvoor meestal 1 dag gekozen wordt. Keverling Buisman noemde het doorlopen van de vervormingen na het dissiperen van de wateroverspanningen het *seculair effect* (seculum is eeuw in het Latijn). Men spreekt ook wel van *primaire* en *secondaire* consolidatie.

De primaire rek  $\varepsilon_p$  is de vervorming behorende bij het consolidatieproces. Deze wordt in het begin van het vervormingsproces vertraagd doordat het uitstromen van overspannen water enige tijd kost, zoals beschreven in Terzaghi's consolidatietheorie. Als de consolidatie is afgelopen blijkt uit proeven dat de rek niet naar een constante eindwaarde nadert, maar dat er nog een voortgaande rek is, die goed kan worden beschreven met een semi-logaritmisch verband, zie figuur 19.1, met als parameter de seculaire rek  $\varepsilon_s$ . Er zijn verschillende theoretische verklaringen denkbaar voor deze doorgaande vervormingen, zoals het uitpersen van water uit hele kleine poriën tussen de korrels (microporiën), of langzame kruip van kleiplaatjes over elkaar onder invloed van elementaire afstotende en aantrekkende krachten.

Theoretisch gezien is de formule (19.1) enigszins vreemd, omdat voor  $t \rightarrow \infty$  de rek oneindig groot zou zijn. Het lijkt er op dat men met deze formule kan berekenen na hoeveel tijd de dikte van het monster tot nul gereduceerd is. Ook voor  $t < t_0$ , en met name voor  $t \rightarrow 0$  gedraagt de formule zich vreemd. Er zijn wel pogingen gedaan om de formule daarvoor aan te passen, maar voor de praktijk is de formule ook in zijn eenvoudige vorm (19.1) uitstekend bruikbaar, mits men  $t$  alleen maar groter neemt dan  $t_0$ , en bedenkt dat in de praktijk de waarde van de tijd  $t$  toch nooit veel groter wordt dan enige tientallen, (of desnoods honderden of duizenden) jaren.

De grootte van  $\varepsilon_p$  en  $\varepsilon_s$  kan men uit de proefresultaten bepalen door de geschematiseerde zakking te meten op de tijdstippen  $t = t_0$  (= 1 dag) en  $t = 10 t_0$  (= 10 dagen). Men vindt dan in het geval van figuur 19.1  $\varepsilon_p = -0.0058$  en  $\varepsilon_p + \varepsilon_s = -0.0066$  (negatief omdat het verkortingen zijn), en dus  $\varepsilon_s = -0.0008$ . Extrapolleert men dit naar  $t = 100$  jaar dan vindt men voor de rek na 100 jaar:  $\varepsilon = -0.0094$ . En na 1000 jaar is de rek  $\varepsilon = -0.0102$ . Voorspellingen op nog langere termijn zijn in de civiele techniek ongebruikelijk. De levensduur van een civieltechnische constructie is in het algemeen niet langer dan ongeveer 100 jaar.

In Scandinavische en Angelsaksische landen gebruikt men voor de secondaire rek  $\varepsilon_s$  vaak het symbool  $C_\alpha$ , en noemt dat de secondaire samendrukkingsindex. In Nederland gebruikt men, in navolging van Keverling Buisman, Koppejan en Den Haan veelal iets andere grootheden, die hieronder zullen worden beschreven.

De primaire rek  $\varepsilon_p$  zowel als de secondaire of seculaire rek  $\varepsilon_s$  kunnen uiteraard nog afhankelijk zijn van de aangebrachte belasting. Keverling Buisman zelf schreef daartoe de formule als

$$\varepsilon = -\sigma'[\alpha_p + \alpha_s \log\left(\frac{t}{t_0}\right)], \quad (19.2)$$

waarin  $\sigma'$  de belastingsverhoging is. Dat kan de suggestie wekken dat het verband tussen rek en spanningstoename lineair is, hetgeen niet het geval is. De factoren  $\alpha_p$  en  $\alpha_s$  zijn zelf ook nog afhankelijk van de spanning, en ook nog van de voorgeschiedenis.

De afhankelijkheid van de stijfheid van het spanningsniveau is eerder al tot uitdrukking gekomen in de logarithmische samendrukkingsformule van Terzaghi, zie hoofdstuk 14. Men zou kunnen stellen dat de daar berekende rek (voor zandige gronden) een bijzonder geval is van het hier beschouwde geval met  $\varepsilon_s = 0$ , d.w.z. zonder kruip. De primaire rek  $\varepsilon_p$  blijkt

dan niet lineair met de spanning te verlopen maar bij benadering volgens een logaritme. En dan nog met een verschillende waarde voor de constante  $C$  bij belasten, ontlasten, herbelasten, etc. Door Koppejan is voorgesteld de formules van Terzaghi en Keverling Buisman te combineren tot

$$\varepsilon = -\left[\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \log\left(\frac{t}{t_0}\right)\right] \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right). \quad (19.3)$$

De coëfficiënten  $C_p$  en  $C_s$  zijn bij ontlasten en herbelasten nog verschillend van de waarden bij het voor het eerst belasten van een grondmonster.

Door Den Haan is gevonden dat de tijdsafhankelijke term vrijwel niet afhankelijk is van de belasting, en hij stelde dan ook voor de formule te gebruiken in de vorm

$$\varepsilon = -(a+b) \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right) - c \ln\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (19.4)$$

bij belasten, dat wil zeggen als  $\sigma > \sigma_1$ . Bij ontlasten en opnieuw belasten moet de compressibiliteitsindex  $a+b$  vervangen worden door  $a$ . Dit betekent dat de factor  $b$  het irreversibele deel van de vervorming beschrijft, en de factor  $a$  het reversibele deel. Let op dat in de formule (19.4) de natuurlijke logaritme wordt gebruikt, terwijl in andere formules vaak de logaritme met het grondtal 10 wordt gebruikt.

In Scandinavische en Angelsaksische landen wordt vaak een gelijksoortige formule gebruikt, maar men geeft er daar de voorkeur aan de vervorming uit te drukken in termen van het poriëngetal  $e$ , de void ratio. Men schrijft dan, in navolging van Bjerrum,

$$e_0 - e = C_c \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right) + C_\alpha \log\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (19.5)$$

waarin  $e_0$  de void ratio is bij de beginspanning  $\sigma_1$  als  $t = t_0$ . In deze vorm is de formule ook opgenomen in de Nederlandse en Internationale normen.

De relatie tussen de verandering van het poriëngetal en de rek  $\varepsilon$  is in hoofdstuk 14 al afgeleid uit het constant zijn van het korrelvolume. Die relatie is

$$\varepsilon = \frac{\Delta e}{1+e}, \quad (19.6)$$

zie (14.9). Met behulp van deze relatie zijn de hierboven gegeven formules en de er in gebruikte coëfficiënten in elkaar uit te drukken.

Het is natuurlijk jammer dat er zoveel verschillende formules en constanten gebruikt worden. Dat is deels een gevolg van tegenstrijdige interpretaties van proefresultaten, en van verschillen in metingen, maar ook van verschillen in de in verschillende landen opgebouwde ervaringen. In de praktijk valt de moeilijkheid wel mee, als men bij laboratoriumonderzoek en berekeningen maar dezelfde constanten gebruikt. Internationaal is er wel overeenstemming over dat de kruip van grond het beste beschreven kan worden met een logaritme van de tijd.

Een van de belangrijkste toepassingen in de praktijk betreft het voorspellen van de zetting veroorzaakt door de samendrukking van een gelaagde grond onder invloed van een ophoging. Een goede procedure hiervoor is om van elke laag een monster te nemen, dat in het laboratorium eerst weer in de oorspronkelijke spanningstoestand te brengen (d.w.z. belasten met de oorspronkelijke terreinbelasting, en een paar dagen laten staan om tot rust te komen), en dan na enige tijd de spanningsverhoging aan te brengen die overeenkomt met de belasting in het terrein. Men vindt dan meestal met vrij behoorlijke benadering een zettingsverloop dat op logaritmische schaal uitgezet een rechte lijn geeft, in overeenstemming met formule (19.1). De vervorming van elke laag in het terrein vindt men dan direct uit



deze formule, en de bijdrage van elke laag tot de zetting vindt men door vermenigvuldiging van de voorspelde rek met de laagdikte. De totale zetting vindt men door optelling van de zettingen van elke laag. Reeds aan de gang zijnde seculaire zettingen van de grond voordat de belasting werd aangebracht zijn vaak verwaarloosbaar, of worden overschaduwd door de zettingen ten gevolge van de nieuwe belasting.

Complicaties die bij de voorspelling van zettingen nog kunnen optreden zijn bijvoorbeeld dat de stijfheid van de grond sterk afhankelijk is van de voorgeschiedenis. In een terrein met een gecompliceerde voorgeschiedenis (bijvoorbeeld een terrein dat in vroeger eeuwen al eens een hogere belasting te dragen heeft gehad als de huidige) betekent dit dat er een sterk verschillend gedrag kan worden gevonden bij spanningen onder of boven de vroegere terreinsspanning. Omdat men de voorgeschiedenis vaak niet goed kent is extrapoleren van laboratoriummetingen naar praktijksituaties een riskante zaak. Vandaar dat aangeraden wordt in het laboratoriumonderzoek zoveel mogelijk de werkelijke spanningen en spanningsveranderingen na te bootsen. Dan zijn de rekken ook het zelfde. De proef in het laboratorium hoeft niet eens zo lang te duren, want men kan altijd extrapoleren met de logaritmische formule (19.1). Het is voldoende om een stukje van de rechte lijn op semi-logaritmische schaal te meten.

Opgemerkt moet nog worden dat de beschouwing over kruip in dit hoofdstuk, en die over consolidatie in de voorgaande hoofdstukken, alleen betrekking hebben op eendimensionale vervormingen. Dat betekent dat ze alleen geldig zijn in het laboratorium bij een proef met zijdelingse opsluiting, en in het terrein bij belasting over een groot oppervlak. Bij een plaatselijke belasting kan er vaak ook een horizontale vervorming zijn. Consolidatie en kruip moeten dan als tweedimensionaal of driedimensionaal probleem worden beschouwd. Dat is aanzienlijk ingewikkelder dan het eendimensionale geval.

### Opgaven

**19.1** Een terrein bestaat uit 1 meter droog zand ( $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$ ), 4 meter nat zand ( $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ), 2 meter klei ( $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ), 5 meter zand ( $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ), 4 meter klei ( $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ ), en tenslotte een dikke zandlaag. Het terrein wordt opgehoogd met 2 meter droog zand ( $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$ ). Men wil de zettingen van de kleilagen voorspellen met behulp van de samendrukingsproef op een monster uit elke kleilaag. Welke voorbelasting moeten die monsters krijgen, en welke extra belasting moet er op worden aangebracht?

**19.2** Bij de in de vorige opgave bedoelde proeven meet men bij beide monsters na één dag een rek van 2 % en na tien dagen een rek van 3 %. Gevraagd wordt de zakking van het terrein na 1 jaar, 10 jaar en 100 jaar te voorspellen, aannemende dat de zandlagen niet vervormen.

**19.3** In een zekere gemeente eist men dat in de eerste 20 jaar na oplevering van een terrein de zakking niet meer mag zijn dan 20 cm. Voor de ophoging op een bepaalde laag is uit proeven gebleken dat na 1 dag de rek 1.1 % is, en na 10 dagen 2.4 %. De dikte van de laag is 7.6 m. Hoeveel dagen na de ophoging kan het terrein worden opgeleverd?

## Hoofdstuk 20

# SCHUIFSTERKTE

Zoals reeds eerder is opgemerkt is een van de karakteristieke eigenschappen van grond dat



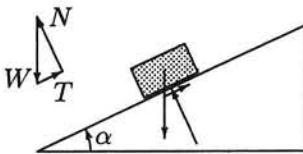
Figuur 20.1. Afschuiving Hekseberg.

bij toenemende schuifspanning de hoekvervormingen progressief groter worden, en dat de grond tenslotte zelfs kan bezwijken als de schuifspanningen te groot worden. In de natuur of bij bepaalde kunstmatige werken, met name dijken, dammen en ophogingen voor wegen of spoorwegen, ziet men soms dat een zekere moot grond is afgeschoven over de onderliggende grond. Als voorbeeld is in figuur 20.1 een afschuiving van een flauwe helling in klei in Noorwegen weergegeven. In dit hoofdstuk wordt beschreven bij welke

spanningstoestanden in de grond dit type van bezwijken van een grondmassief kan optreden.

### 20.1 Coulomb

Het lijkt redelijk om te stellen dat bezwijken van grond gebeurt doordat op een bepaald vlak de schuifspanning te groot is geworden, en dat langs dat vlak de grond is afgeschoven. Langs



Figuur 20.2. Blok op hellend vlak.

andere vlakken is geen afschuiving opgetreden omdat op die vlakken nog voldoende weerstand aanwezig is. Het kan verhelderend werken om te denken aan de analogie met een blok op een hellend vlak (zie figuur 20.2). Uit het krachtenevenwicht volgt voor de schuifkracht op het blok  $T = W \sin \alpha$  en voor de normaalkracht  $N = W \cos \alpha$ , waarin  $W$  het gewicht van het blok is. De verhouding van schuifkracht tot normaalkracht is dus  $T/N = \tan \alpha$ . Zolang dit kleiner is dan een zekere kritische waarde, de wrijvingscoëfficiënt  $f$ , zal het blok blijven liggen. Als de hellingshoek  $\alpha$  zo steil wordt dat  $\tan \alpha = f$  zal het blok naar beneden schuiven. Bij grotere hellingshoeken kan het blok helemaal nooit blijven liggen.

De analogie met het afglijdende blok bracht Coulomb er toe om te stellen dat voor de kritische schuifspanning  $\tau_f$  in een grondlichaam geldt dat

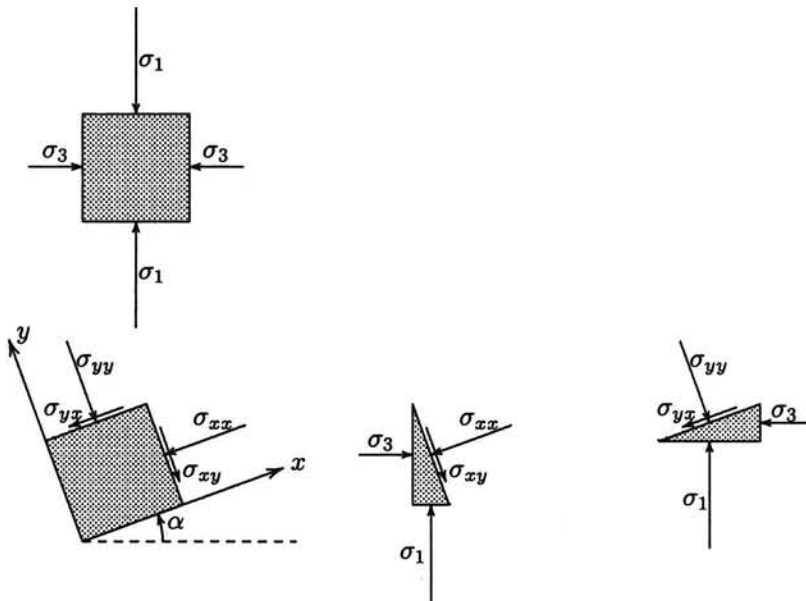
$$\tau_f = c + \sigma' \tan \phi. \quad (20.1)$$

Hierin is  $\sigma'$  de normaalspanning op het beschouwde vlak,  $c$  de *cohesie*, en  $\phi$  de *hoek van inwendige wrijving* of wrijvingshoek. Een elementaire interpretatie is dat als op een bepaald vlak de schuifspanning kleiner is dan de kritieke waarde  $\tau_f$ , dat dan de vervormingen begrensd zijn (vaak beschouwt men ze als elastisch, of verwaarloost ze geheel), en dat als de schuifspanning op een bepaald vlak de kritieke waarde bereikt heeft de vervormingen onbegrensd zijn. De cohesie  $c$  geeft aan dat er ook als er geen normaalkracht is een zekere schuifspanning nodig is om afschuiving te veroorzaken. Bij het schuiven van twee materialen over elkaar (een blok hout over een houten plaat) kan dat veroorzaakt worden door de ruwheid van de twee oppervlakken, waarbij oneffenheden van het ene oppervlak grijpen in oneffenheden van het andere. Bij twee zeer gladde oppervlakken kunnen ook onderlinge aantrekkingskrachten tussen deeltjes van de twee materialen een rol spelen.

Als men de formule (20.1) wil toepassen op grond zijn de spanningen uiteraard effectieve spanningen. Veel auteurs schrijven daarom ook wel  $c'$  en  $\phi'$  om te benadrukken dat deze grootheden betrekking hebben op effectieve spanningen.

## 20.2 De cirkel van Mohr

Uit de spanningsleer (zie Appendix A) is bekend dat men de spanningen die in een bepaald punt op verschillende vlakjes werken in elkaar kan uitdrukken met behulp van analytische formules, waarin de hoek van de beschouwde richting met de hoofdrichting voorkomt. Hier wordt aangenomen dat de grootste hoofdspansing ( $\sigma_1$ ) in verticale richting werkt, en dus de kleinste hoofdspansing ( $\sigma_3$ ) in horizontale richting. De middelste hoofdspansing (die werkt loodrecht op het vlak van tekening) wordt aangegeven met  $\sigma_2$ . Eventueel kan die net gelijk zijn aan  $\sigma_1$  of aan  $\sigma_3$ ; anders zit  $\sigma_2$  tussen die beide in. De spanningen op twee vlakjes



Figuur 20.3. Spanningen op geroteerd vlakje.

met de normaalvectoren in de  $x$ - en  $y$ -richting, die een hoek  $\alpha$  maken met de richtingen van de grootste en kleinste hoofdspansing kunnen met behulp van evenwichtsbeschouwingen worden uitgedrukt in de grootste en de kleinste hoofdspansing, zie figuur 20.3.

De spanningen  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{xy}$ , die werken op een vlakje met de normaal in  $x$ -richting, kunnen worden gevonden uit een evenwichtsbeschouwing voor een klein driehoekje gevormd door een vlakje loodrecht op de  $x$ -richting en een verticaal en een horizontaal vlakje, zie het middelste figuurtje onder in figuur 20.3. Het getekende wigje is een deel van het geroeteerde elementje van de figuur linksonder. Als het oppervlak van het getekende schuine vlakje  $A$  is, dan is het oppervlak van het verticale vlakje  $A \cos \alpha$  en het oppervlak van het horizontale vlakje  $A \sin \alpha$ . Men vindt nu uit het evenwicht van alle krachten werkend in  $x$ -richting

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha. \quad (20.2)$$

Uit het evenwicht van de krachten in  $y$ -richting werkend op het zelfde wigje volgt

$$\sigma_{xy} = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_3 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (20.3)$$

De spanningen  $\sigma_{yy}$  en  $\sigma_{yx}$ , die werken op een vlakje met de normaal in  $y$ -richting, kunnen worden gevonden uit een evenwichtsbeschouwing voor een klein driehoekje gevormd door een vlakje loodrecht op de  $y$ -richting en een verticaal en een horizontaal vlakje, zie het figuurtje rechtsonder in figuur 20.3. Men vindt uit het evenwicht in  $y$ -richting

$$\sigma_{yy} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha. \quad (20.4)$$

Uit het evenwicht in  $x$ -richting volgt

$$\sigma_{yx} = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_3 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (20.5)$$

Vergelijking van (20.5) en (20.3) laat zien dat  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Dat klopt met het momentenevenwicht van het elementje linksonder in figuur 20.3.

Van groot belang is dat in de transformatieformules steeds twee maal een factor  $\sin \alpha$  of  $\cos \alpha$  voorkomt. Dat is karakteristiek voor grootheden als spanningen en vervormingen, die men in de wiskunde als *tensoren* aanduidt. Anders dan een vector, die met een grootte en een enkele richting kan worden beschreven, heeft een tensor steeds betrekking op twee richtingen: de richting van de kracht en de richting van de normaal op het vlakje waarop die kracht werkt. In de afleiding van de transformatieformules vindt men dat terug doordat in het krachtenevenwicht een factor  $\cos \alpha$  of  $\sin \alpha$  verschijnt op grond van het nemen van de component van de kracht in  $x$ - of  $y$ -richting, maar er verschijnt nog zo'n factor  $\cos \alpha$  of  $\sin \alpha$  op grond van de grootte van het betreffende vlakje.

Met behulp van de formules voor de dubbele hoek,

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (20.6)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad (20.7)$$

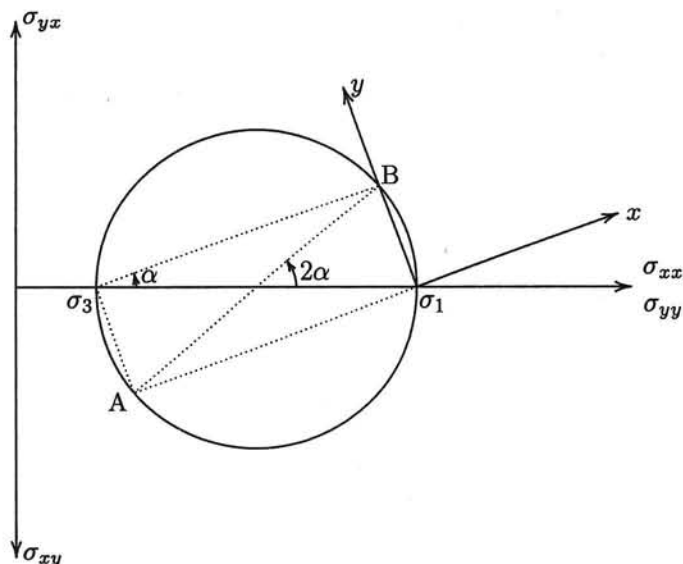
kan men de transformatieformules uitdrukken in  $2\alpha$ ,

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\alpha, \quad (20.8)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\alpha, \quad (20.9)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha. \quad (20.10)$$

Men kan de spanningen op vlakjes met verschillende oriëntatie grafisch weergeven met behulp van de *cirkel van Mohr*, zie figuur 20.4. Een gemakkelijke vorm van het diagram van Mohr wordt verkregen als men afspreekt dat positieve normaalspanningen  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{yy}$  horizontaal naar rechts worden uitgezet, dat een positieve schuifspanning  $\sigma_{xy}$  verticaal naar beneden wordt uitgezet, en dat een positieve schuifspanning  $\sigma_{yx}$  verticaal naar boven wordt uitgezet.



Figuur 20.4. Cirkel van Mohr.

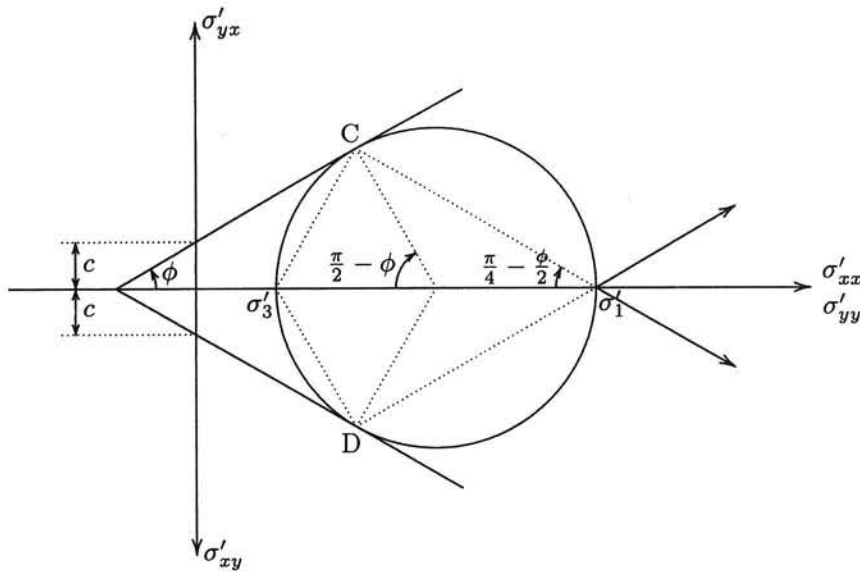
De cirkel wordt geconstrueerd door op de horizontale as afstanden ter grootte van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  uit te zetten. Door die twee punten wordt een cirkel getrokken, met zijn middelpunt op de horizontale as. Het middelpunt ligt dan op een afstand  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$  van de oorsprong, en de straal van de cirkel is  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ . Dit zijn juist de twee waarden die in de formules (20.8) – (20.10) voorkomen. Als men nu in het middelpunt de hoek  $2\alpha$  uitzet, dan volgt dat het punt A de waarden geeft van  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{xy}$ , en het punt B de waarden van  $\sigma_{yy}$  en  $\sigma_{yx}$ . Dan is immers precies voldaan aan de formules (20.8), (20.9) en (20.10). Omdat een omtrekshoek op een bepaalde boog juist de helft is van de middelpuntshoek op dezelfde boog, kan men het punt B ook vinden door uit het meest linkse punt van de cirkel ( $\sigma_3$ ) een lijn onder een hoek  $\alpha$  uit te zetten, en die de cirkel te laten snijden. De lijn van het meest linkse punt naar het punt A staat daar loodrecht op.

Men kan het punt A, dat de spanningen weergeeft op een vlakje loodrecht op de  $x$ -as, natuurlijk ook vinden door vanuit het meest rechtse punt van de cirkel een lijn onder een hoek  $\alpha$  uit te zetten. Dat is juist de richting van de  $x$ -as, zie figuur 20.3. Evenzo kan men het punt B, dat de spanningen weergeeft op een vlakje met zijn normaal in de  $y$ -richting, vinden door vanuit het meest rechtse punt van de cirkel een lijn in de richting van de  $y$ -as te tekenen, en die dan de cirkel te laten snijden. Men noemt het meest rechtse punt van de cirkel daarom wel het *richtingencentrum*. Trekt men vanuit het richtingencentrum de richtingen van de assen  $x$  en  $y$  dan snijden die assen de cirkel in twee diametraal gelegen punten, die de spanningen geven op de vlakjes loodrecht op die assen  $x$  en  $y$ . Als de assen  $x$  en  $y$  draaien doorlopen de punten A en B de cirkel, en dat geeft precies aan hoe de waarden van de spanningen dan veranderen.

Voor  $\alpha = 0$  valt de  $x$ -as samen met de richting van  $\sigma_3$ , en de  $y$ -as met de richting van  $\sigma_1$ . Het punt A ligt dan helemaal links, in  $\sigma_3$ , en het punt B helemaal rechts, in  $\sigma_1$ . Als nu de hoek  $\alpha$  toeneemt van 0 tot  $\frac{\pi}{2}$  lopen die twee spanningspunten over de cirkel, en ze doorlopen precies een halve cirkel. Als  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  komt A in het meest rechtse punt uit, en B in het meest linkse punt. De  $x$ -as wijst dan verticaal omhoog, en de  $y$ -as horizontaal naar links. Als  $\alpha$  loopt van 0 tot  $\pi$  doorlopen de spanningspunten A en B de cirkel eenmaal volledig.

### 20.3 Mohr-Coulomb

Een punt van de cirkel van Mohr geeft de normaalspanning en de schuifspanning op een zeker vlakje aan. De spanningen op alle vlakjes tezamen vormen de cirkel, omdat als het vlakje draait de spanningspunten de cirkel doorlopen. Daarbij blijkt dat op sommige vlakjes de schuifspanning klein is en op andere groot. Het is zelfs mogelijk dat op bepaalde vlakjes de schuifspanning zo groot wordt dat aan de bezwijkvoorwaarde (20.1) voldaan wordt. In



Figuur 20.5. Mohr-Coulomb criterium.

figuur 20.5 is deze bezwijkvoorwaarde getekend. Om goed tot uitdrukking te brengen dat bezwijken van grond bepaald wordt door de effectieve spanningen zijn in deze figuur de spanningen aangegeven als  $\sigma'$ . Er zijn twee vlakjes, weergegeven door de punten C en D in figuur 20.5, waar de schuifspanning juist kritiek is. Op alle andere vlakken is de schuifspanning beneden de kritieke waarde. Men noemt dit het *bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb*. Als de spanningscirkel geheel binnen de omhullende ligt zal er geen bezwijken optreden, omdat op geen enkel vlakje de schuifspanning de maximaal mogelijke waarde van (20.1) bereikt. Cirkels die gedeeltelijk buiten de omhullende vallen zijn onmogelijk, omdat op sommige vlakjes de schuifspanning groter zou zijn dan de kritieke waarde.

Als de cirkel aan de omhullende raakt zijn er twee vlakjes (waarvan de normalen een hoek van  $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$  met de richting van de grootste hoofdspansing maken) waar de spanningstoestand kritiek is. Er kan dan bezwijken optreden. Men kan verwachten dat de grond zal afschuiven over vlakjes in de twee richtingen waarin de spanningstoestand kritiek is. In het geval getekend in de figuren in deze paragraaf, waarin de richting van de grootste hoofdspansing de verticale richting is, zie figuur 20.3, maken de vlakjes waarop de spanningstoestand het meest ongunstig is een hoek van  $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$  met de verticale richting. Men kan dus verwachten dat afschuiven zal optreden in vlakken die iets steiler zijn dan onder  $45^\circ$ . Als  $\phi = 30^\circ$  zal afschuiven optreden op vlakjes die een hoek van  $30^\circ$  maken met de verticale richting, en dus een hoek van  $60^\circ$  met de horizontale richting.

## 20.4 Formulering van het Mohr-Coulomb criterium

De wiskundige formulering van het Mohr-Coulomb criterium kan men vinden door te bedenken dat de straal van de cirkel gelijk is aan  $\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3)$ , en dat de afstand van de oorsprong tot het middelpunt van de cirkel gelijk is aan  $\frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3)$ . Bezwijken zal optreden als

$$\sin \phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3)}{c \cot \phi + \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3)}. \quad (20.11)$$

Men kan dit ook schrijven als

$$\left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0. \quad (20.12)$$

Met behulp van deze formule kan men  $\sigma'_3$  in de kritieke toestand uitdrukken in  $\sigma'_1$ ,

$$\sigma'_3 = \sigma'_1 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (20.13)$$

Andersom kan men natuurlijk ook  $\sigma'_1$  in de kritieke toestand uitdrukken in  $\sigma'_3$ ,

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} + 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (20.14)$$

Van deze formules zal later nog veel gebruik gemaakt worden.

In de metaalkunde vindt men veelal dat de schuifsterkte van metalen onafhankelijk is van de normaalspanning. Het bezwijkcriterium is dan de schuifspanning een vaste begrenzing heeft,  $\tau_f = c$ . Het Mohr-Coulomb criterium reduceert tot dat voor metalen door  $\phi = 0$  te stellen.

Het Mohr-Coulomb criterium beschrijft vrij goed het bezwijken van korrelachtige materialen, zoals zand. Voor dergelijke materialen is de cohesie praktisch nul,  $c = 0$ , en de hoek van inwendige wrijving meestal  $\phi = 30^\circ$  tot  $\phi = 45^\circ$ . Kleigronden hebben meestal wel een behoorlijke cohesie, en een zekere hoek van inwendige wrijving, maar meestal niet zo groot als die van zand.

Voorzichtigheid is wel geboden bij toepassing van het Mohr-Coulomb criterium bij zeer lage spanningen. Zo zou men voor klei vinden dat een cirkel van Mohr mogelijk is in de uiterste linkerhoek van het diagram, links van de as van de schuifspanningen. Dat zou betekenen dat het mogelijk is dat een kleimonster belast wordt door zuivere trek. Bij de meeste normale kleisoorten gaat men er meestal van uit dat dat niet kan. Misschien wel even, door capillaire waterspanningen, maar op den duur kan dat niet. De korrels kunnen immers geen trekspanningen aan elkaar overdragen. Een kleimonster kan men wel even aan zijn bovenkant vastpakken en optillen, maar na enige tijd scheurt het toch en valt uit elkaar. De uiterste linkerhoek van het Mohr-Coulomb diagram wordt daarom meestal als ontoegankelijk gezien. Het bezwijkcriterium snuit men dan af langs de verticale as. Om uit te drukken dat het woord cohesie (dat duidt op inwendige samenhang en treksterkte tussen de deeltjes) voor gronden als zand en klei eigenlijk misleidend is spreekt men daarom soms van *schijnbare cohesie*.

Het criterium van Mohr-Coulomb is niet alleen bruikbaar voor korrelmaterialen, zoals zand, maar, als eerste benadering, ook voor steenachtige materialen zoals ongewapend beton en homogene rots. Bij dergelijke materialen vindt men wel vaak dat de wrijvingshoek  $\phi$  afneemt bij hoge spanningen. Ook bij grond vindt men dat wel, maar men merkt er meestal niet veel van omdat de spanningen toch zelden zo hoog worden. Steenachtige materialen

hebben wel een veel grotere cohesie als grond, en voor dergelijke materialen is het ook echte cohesie, dat wil zeggen sterkte door samenhang van de deeltjes. Trekspanningen zijn in beton en rots dan ook goed mogelijk.

Op sommige plaatsen op aarde, bijvoorbeeld voor de kusten van Brazilië en Australië, vindt men kalkhoudende zandstenen die zich gedragen als een soort zand waarvan de contacten verkit zijn. Een dergelijk materiaal heeft een hoge waarde van  $c$ , die echter volkomen wegvalt als het materiaal eenmaal tot bezwijken belast is. Dan blijft een normaal wrijvingsmateriaal (een soort zand) over. De sterkte van die materialen kan dramatisch wegvallen als gevolg van de spanningen bij de aanleg van een groot werk, bijvoorbeeld een offshore platform. Dit soort materialen lijkt op beschuit. Zolang het materiaal heel blijft is het tamelijk sterk en stijf, maar zodra het kapot gaat neemt de sterkte dramatisch af. Het mooie van korrelachtige materialen zoals zand is juist dat het zijn eigenschappen behoudt, ook als het bezwiken is.

Voor klei is het criterium van Mohr-Coulomb zoals gezegd ook goed bruikbaar. Wel heeft klei nog de bijzondere eigenschap dat de cohesie toeneemt door voorbelasten en daarna weer ontlasten (overconsolidatie). De zaak ligt nog gecompliceerder voor zeer slappe klei. Zoals reeds eerder gezien gedraagt klei met een zeer hoog watergehalte (in de buurt van of boven Atterberg's vloeigrens) zich meer als een visceuze vloeistof dan als een vaste stof. Op een dergelijk materiaal is het Mohr-Coulomb criterium niet goed toepasbaar. Ook moet men voor klei natuurlijk rekening houden met de waterspanningen, die nog weer een functie van de tijd kunnen zijn.

### Opgaven

**20.1** In een zandmonster ( $c = 0$ ) blijkt een spanningstoestand te kunnen optreden waarbij  $\sigma_{xx} = 10$  kPa,  $\sigma_{yy} = 20$  kPa en  $\sigma_{xy} = 5$  kPa, zonder dat er bezwijken optreedt. Wat kunt u zeggen van de hoek van inwendige wrijving  $\phi$ ?

**20.2** Een zandmonster met  $c = 0$  en  $\phi = 30^\circ$  bevindt zich op de grens van bezwijken. De kleinste hoofdspanning is 10 kPa. Hoe groot is de grootste hoofdspanning?

**20.3** In een grondmonster heersen spanningen zodanig dat de verticale normaalspanning  $3p$  is en de horizontale normaalspanning  $p$ . Dit zijn de hoofdspanningen. Bepaal de normaalspanning en de schuifspanning op een vlakje onder een hoek van  $45^\circ$ .

**20.4** Bepaal ook de normaalspanning en de schuifspanning op een vlakje onder een hoek van  $30^\circ$  met de verticaal, en bepaal ook de hoek van de resulterende kracht op zo'n vlakje met de normaal op het vlakje.

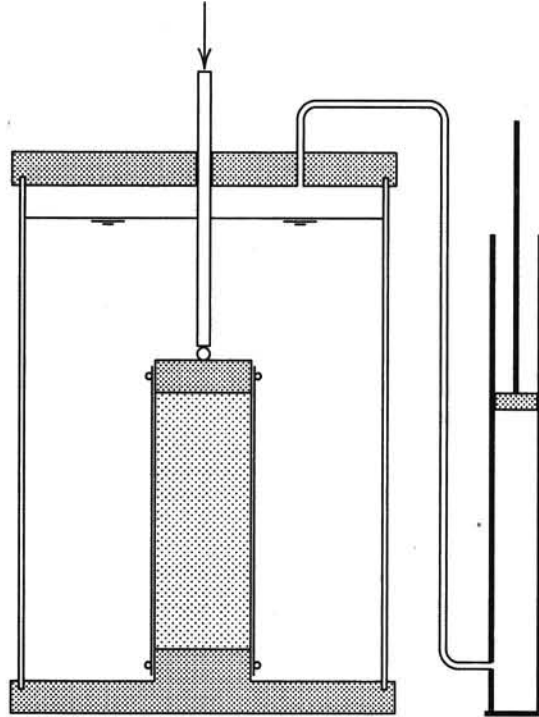
**20.5** Als u de vorige twee opgaven met formules heeft opgelost, doe het dan ook eens grafisch, met behulp van de cirkel van Mohr en het richtingencentrum.



## Hoofdstuk 21

### TRIAXIAALPROEF

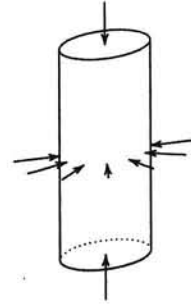
Het eventuele optreden van bezwijken van grond zou men in het laboratorium het beste kunnen onderzoeken aan de hand van een proef op een grondmonster waarbij alleen distorsie optreedt, en het volume constant blijft. Om dat volume constant te houden zou men de isotrope spanning  $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  constant kunnen houden, of, nog beter, een apparaat gebruiken dat de volumeverandering nauwkeurig meten en sturen kan, en die volumeverandering dan op nul te houden. Dat is in principe wel mogelijk, maar proeftechnisch is het eenvoudiger een zogenaamde *triaxiaalproef* uit te voeren, zie figuur 21.1. Ter vermindering van mogelijke complicaties door waterspanningen worden de beschouwingen voorlopig beperkt tot droog zand.



Figuur 21.1. Triaxiaalproef.

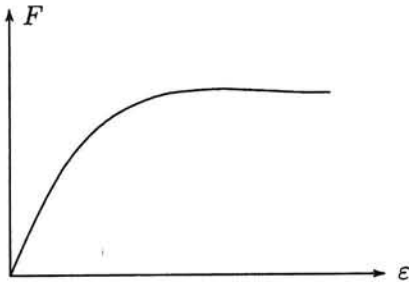
Bij de triaxiaalproef wordt een cilindrisch grondmonster in een glazen of kunststof cel geplaatst, aan de omtrek omringd door een rubber vlies. Het rubber vlies wordt met twee o-ringen tegen een voetplaat en een topplaat gedrukt, waardoor de ruimte binnen het vlies wordt afgesloten van de ruimte in de cel. De cel wordt gevuld met water, waarin de druk kan worden geregeld via een verbinding met een drukcel. Omdat het monster aan alle kanten, aan de zijkant zowel als aan de bovenzijde, begrensd wordt door het water in de cel,

treedt er in eerste instantie overal in het monster een isotrope spanning in op die gelijk is aan de celdruk. Het is gebruikelijk, ook al omdat dat het eenvoudigst is, om die celdruk tijdens het verdere verloop van de proef constant te houden. Het monster kan voorts nog door een verticale kracht worden belast, via een verticale stang die door de bovenkant van de cel wordt geleid. Dat kan bijvoorbeeld gebeuren door middel van een motor die de stang geleidelijk naar beneden drukt, waarbij de kracht gemeten wordt door middel van een drukring of een rekstrookje. De verticale vervormingssnelheid is dan constant, en de kracht neemt geleidelijk toe. De meting bestaat er uit dat men de verticale kracht registreert, tegelijk met de verticale zakking van de as.



Figuur 21.2. Celdruk.

Bij de proef neemt de verticale zakking van de bovenkant van het monster gelijkmatig toe in de loop van de tijd, omdat de motor de stang gelijkmatig naar beneden drukt. De



Figuur 21.3. Proefresultaat.

verticale kracht neemt aanvankelijk ook toe, maar na enige tijd bereikt deze een maximum, en blijft daarna constant, of neemt soms nog een klein beetje toe, of neemt af. Bij de maximale verticale kracht bezwijkt het grondmonster blijkbaar. Meestal zet men de proef door totdat goed duidelijk is dat het monster bezweken is. Er zijn dan grote vervormingen opgetreden, in de orde van 5 % of 10 %. Men kan dat ook duidelijk aan het monster constateren. Soms ziet men zelfs een of meer schuifvlakken in het monster, soms ook is het vrij regelmatig vervormd, met een flinke verticale verkorting en een flinke laterale uitzetting.

De proef wordt triaxiaalproef genoemd omdat in drie richtingen een spanning wordt opgelegd. Dat zou uiteraard nog op veel andere manieren kunnen, en er bestaat bijvoorbeeld ook een *true triaxial test* waarbij op een kubisch monster in de drie richtingen verschillende spanningen kunnen worden opgelegd. Dat geeft veel meer mogelijkheden, maar is een veel gecompliceerder proef. Bij de normale triaxiaalproef is het monster cilindrisch, en zijn de twee horizontale spanningen altijd gelijk. De diameter van het monster is meestal 3.8 cm (dat is 1.5 inch, de proef is in Engeland ontwikkeld).

Noemt men de celdruk  $\sigma_c$  dan geldt er tijdens de proef, als de  $z$ -as verticaal genomen wordt,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_c, \quad (21.1)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_c + \frac{F}{A}, \quad (21.2)$$

waarin  $F$  de verticale kracht is en  $A$  het oppervlak van het monster. Omdat het droog zand betreft, en er dus geen waterspanningen zijn, zijn de effectieve spanningen gelijk aan de totaalspanningen.

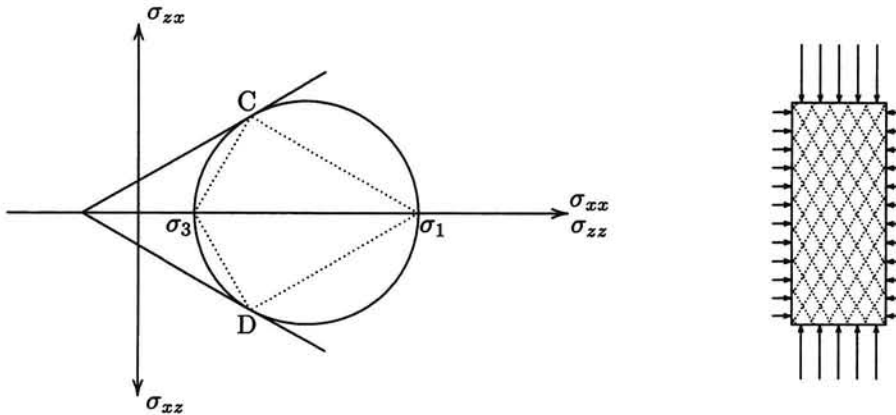
De verticale spanning is in dit geval de grootste hoofdspanning, en de horizontale spanning is de kleinste hoofdspanning,

$$\sigma_1 = \sigma_c + \frac{F}{A}. \quad (21.3)$$

$$\sigma_3 = \sigma_c, \quad (21.4)$$

Opgemerkt wordt nog dat er wordt aangenomen dat de spanningen in het monster gelijkmatig verdeeld zijn. Daartoe is in elk geval nodig dat het monster homogeen van samenstelling is. Verder is aangenomen dat er geen schuifspanningen optreden op het bovenvlak of het ondervlak. Daartoe mag bij het contact tussen het monster en de onder- en bovenplaat geen wrijving optreden. Deze platen moeten dus erg glad zijn. Men kan ze bijvoorbeeld voorzien van een laagje Teflon, of ze met vet insmeren.

De spanningen op vlakjes die een verschillende oriëntatie hebben ten opzichte van de verticale as kunnen worden afgelezen in een diagram van Mohr, zie figuur 21.4.

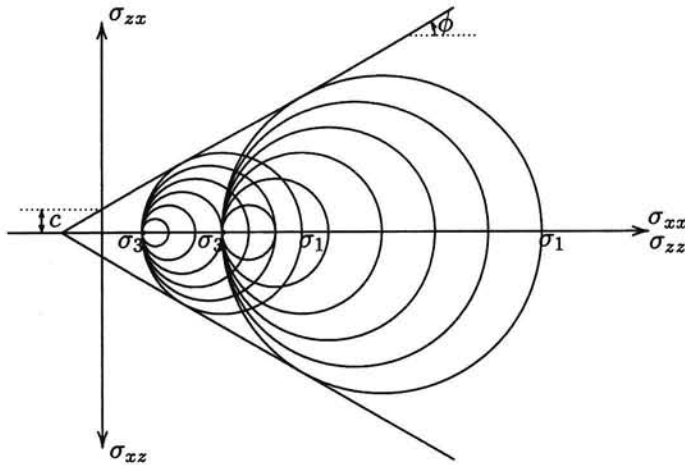


Figuur 21.4. Cirkel van Mohr bij triaxiaalproef.

Het richtingencentrum voor de normalen valt samen met het meest rechtse punt van de cirkel. Op een horizontaal en een verticaal vlak zijn er geen schuifspanningen, maar op alle andere vlakken zijn er wel schuifspanningen. Als de verticale kracht  $F$  geleidelijk groter wordt zal de cirkel steeds groter worden, en op een gegeven moment zal deze raken aan de getekende rechte lijnen (de omhullende van Mohr-Coulomb). Er zijn dan twee vlakjes waarop de schuifspanning en de normaalspanning voldoen aan de kritieke relatie 20.1, namelijk de vlakjes waarvan het bijbehorende spanningspunt op één van de twee rechten ligt. De richting van de normalen op die vlakjes vindt men door de punten C en D met het richtingencentrum te verbinden. De oriëntatie van de vlakjes zelf staat daar loodrecht op. In figuur 21.4 zijn die vlakjes in het rechterdeel van de figuur gestippeld aangegeven.

Doet men de proef verschillende malen op hetzelfde materiaal, bij verschillende celdrukken, dan kan men uit de verschillende kritieke cirkels de omhullende bepalen, en dus de waarde van de cohesie  $c$  en de wrijvingshoek  $\phi$  bepalen. Gebruikelijk is om twee proeven te doen, op twee verschillende monsters van het zelfde materiaal, bij duidelijk verschillende celdrukken. Bij beide proeven kan men uit de proefresultaten vinden hoe groot de maximaal mogelijke waarde van de verticale spanning  $\sigma_1$  is bij een zekere horizontale spanning  $\sigma_3$ . De twee kritieke cirkels kan men tekenen, en de omhullende van Mohr-Coulomb kan dan bepaald worden door twee raaklijnen aan de cirkels te tekenen, zie figuur 21.5. Hiermee zijn  $c$  en  $\phi$  bepaald. Door meer dan twee proeven te doen krijgt men ook een indruk van de juistheid van de uitgangshypothese dat de omhullende (ook wel de *vloeivoorwaarde* genoemd) een rechte lijn is. Vaak vindt men dat bij hogere spanningen de wrijvingshoek  $\phi$  iets afneemt.

Voor zand vindt men uit de proeven meestal dat de cohesie  $c$  praktisch nul is, en dat de hoek van inwendige wrijving  $\phi$  varieert van ongeveer  $30^\circ$  tot  $45^\circ$ , afhankelijk van de zandsoort, en van de pakking van het zand. Scherp zand heeft vaak een grotere wrijvingshoek dan

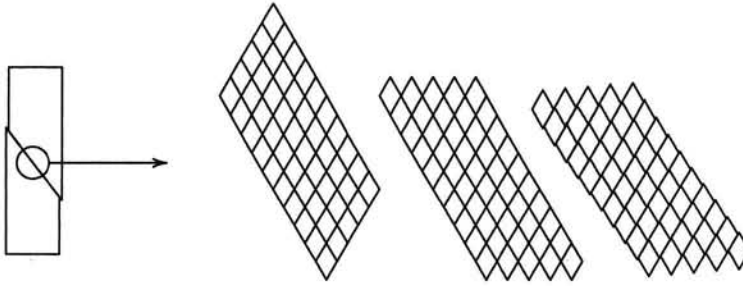


Figuur 21.5. Bepaling van  $c$  en  $\phi$  uit twee proeven.

zand bestaande uit afgeronde korrels, en dicht gepakt zand heeft een grotere wrijvingshoek dan los gepakt zand. Bij klei vindt men dat de cohesie in de orde van grootte van 5 kPa tot 50 kPa kan zijn, of nog groter, terwijl  $\phi$  varieert van ongeveer  $15^\circ$  tot  $30^\circ$ . Voor de bepaling van  $c$  en  $\phi$  bij klei moet men echter wel rekening houden met eventuele waterspanningen, zie hoofdstuk 24. Ook de sterkte van gesteente wordt vaak met een triaxiaalproef bepaald. Daarvoor zijn dan wel veel grotere drukken nodig, en de apparatuur bestaat in dat geval dan ook niet uit een glazen cel, maar uit een metalen cel.

Uit de cirkel van Mohr, zie figuur 21.4, is gevonden dat de richtingen van de meest kritieke vlakjes een hoek van  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$  met de verticale richting maken. Als het bezwijkmechanisme alleen zou bestaan uit glijden langs die vlakken zou bij de proef een discontinuïteit in de vervorming met die richting moeten optreden. Dat vindt men soms ook wel, bij niet te dicht gepakt zand, maar vaak wordt het vervormingspatroon verstoord door het min of meer gelijktijdig optreden van schuifvervormingen in diverse zônes, door rotaties, en door al dan niet elastische volumeveranderingen. Zelfs als wel een duidelijk schuifvlak lijkt op te treden verdient het geen aanbeveling uit de richting daarvan de wrijvingshoek  $\phi$  te bepalen uitgaande van de hypothese dat de richting met de verticaal  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$  zou zijn. Die hypothese is namelijk doorgaans onjuist. Men meet hoeken tussen  $\frac{\pi}{4}$  en  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$ , en bij herhaling van de proef vindt men vaak bij een nieuw monster een wat andere richting van het schuifvlak dan bij een eerdere proef. Om dat te verklaren moet men zich een smalle afschuifzône denken en niet een scherp schuifvlak. In zo'n zône kan afschuiving in de beide kritieke richtingen optreden. Hoe dat op grotere schaal overkomt hangt vooral af van de verhouding van de twee typen afschuiving. In figuur 21.6 is als voorbeeld een geval getekend met mogelijke schuifvlakken onder een hoek van  $30^\circ$  met de verticale richting. Getekend is een geval waarbij eerst een behoorlijke afschuiving van de rechterkant ten opzichte van de linkerkant optreedt, en dan nog een kleine afschuiving van de linkerkant ten opzichte van de rechterkant, over de andere schuifvlakken. Het resultaat blijkt te zijn dat het lijkt of er afschuiving is opgetreden over een hoek met de verticale richting die aanzienlijk groter is dan  $30^\circ$ , dat is minder steil. Als men zou menen dat die hoek  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$  zou zijn, zou men de wrijvingshoek  $\phi$  sterk onderschatten.

Het is ook helemaal niet nodig om de wrijvingshoek  $\phi$  uit de richting van een eventueel afschuifvlak te bepalen. De triaxiaalproef vormt juist zo'n goede en tamelijk eenvoudige



Figuur 21.6. Afschuifvlak bij triaxiaalproef.

methode om de wrijvingshoek  $\phi$  en de cohesie  $c$  te bepalen. Het succes van de proef is vooral te danken aan de directe wijze waarop de spanningen worden opgelegd. De celdruk en de verticale kracht zijn uitstekend te beheersen en te meten, en de bepaling van de kritieke spanningstoestand is daarom zeer nauwkeurig. Dat is bij andere proeven wel anders.

### Opgaven

**21.1** Op twee grondmonsters, met een diameter van 3.8 cm, worden triaxiaalproeven uitgevoerd, bij celdrukken van 10 kPa en 20 kPa, respectievelijk. In de eerste proef blijkt bezwijken op te treden bij een axiale kracht van 22.7 N, en bij de tweede proef bij een axiale kracht van 44.9 N. Hoe groot zijn  $c$  en  $\phi$  van deze grond?

**21.2** Van een zekere zandsoort is bekend dat  $c = 0$  en  $\phi = 30^\circ$ . Men doet een triaxiaalproef op dit zand, bij een celdruk van 100 kPa. Het monster heeft een diameter van 3.8 cm. Hoe groot is de verticale kracht op het moment van bezwijken?

**21.3** Is het technisch mogelijk om op een monster in een triaxiaalapparaat een proef uit te voeren waarbij de verticale spanning kleiner is dan de horizontale spanningen, die altijd gelijk zijn aan de celdruk?

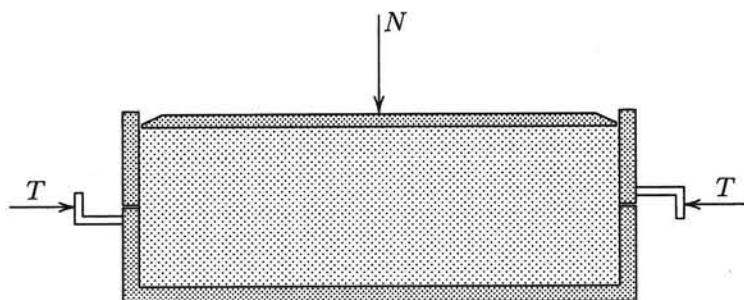
## Hoofdstuk 22

### SCHUIFPROEF

De gedachte dat bezwijken van grond optreedt door schuiven over een vlak waarop de schuifspanning kritiek is heeft geleid tot de ontwikkeling van zogenaamde *schuifapparaten*. In dergelijke apparaten wordt in principe een grondmonster zodanig belast of vervormd dat de bovenkant over de onderkant schuift. Het ligt voor de hand te denken dat schuiven dan optreedt over een enkel horizontaal schuifvlak. Dat er meer aan de hand kan zijn zal in dit hoofdstuk worden uiteengezet.

#### 22.1 Directe schuifproef

Het meest eenvoudige apparaat is getekend in figuur 22.1. Dit apparaat bestaat uit een bakje waarvan de bovenste helft ten opzichte van de onderste helft kan bewegen, door een



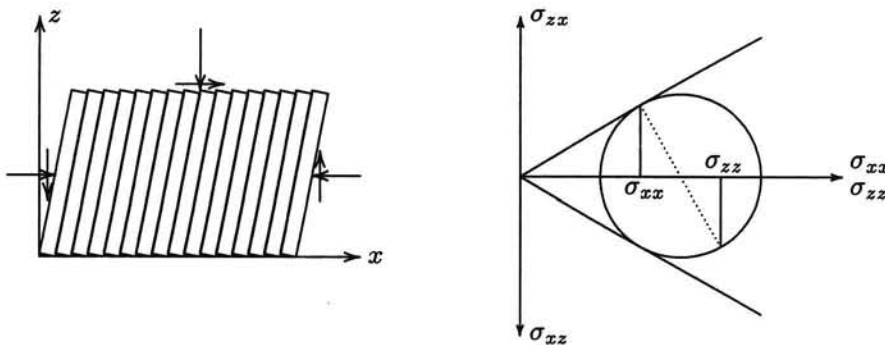
Figuur 22.1. Directe schuifproef.

motor die het onderste bakje ten opzichte van de bovenste ring wegduwt. De doorsnede van de bakjes in het horizontale vlak is meestal rechthoekig. Het grondmonster in het apparaat wordt belast door een constante verticale kracht, die aangebracht wordt door een gewicht via een losse belastingsplaat op het monster te laten drukken. Door die losse belastingsplaat is het grondmonster vrij om tijdens de proef in verticale richting te vervormen. De proef bestaat er uit dat er een horizontale kracht wordt uitgeoefend in het platte vlak tussen de twee helften van het apparaat. Die kracht neemt geleidelijk toe doordat de ene helft van het apparaat ten opzichte van de andere helft langzaam beweegt. Men noemt dit de *directe schuifproef*. De snelheid van bewegen van de twee helften van het apparaat wordt meestal constant gehouden, en de schuifkracht wordt bijvoorbeeld gemeten met behulp van een drukring of een rekstrookje. De horizontale kracht loopt bij uitvoering van de proef aanvankelijk geleidelijk op en bereikt na enige tijd een maximum waarde. Daarna blijft de kracht ongeveer gelijk, of neemt nog wat toe, of soms wat af. Het lijkt logisch om te stellen dat voor die maximale kracht geldt, in analogie met de wrijvingswet van Coulomb,

$$T_f = cA + N \tan \phi, \quad (22.1)$$

waarin  $A$  het oppervlak van het monster is. Voor droog zand, waarvoor  $c = 0$ , kan men dus uit een enkele proef de waarde van de wrijvingshoek  $\phi$  bepalen. In het vervolg van dit hoofdstuk zal gemakshalve aangenomen worden dat de grond inderdaad zand is, met  $c = 0$ .

Veel onderzoekers hebben gevonden dat de proefresultaten van schuifproeven vergeleken met waarden verkregen uit triaxiaalproeven vaak leiden tot waarden voor de schuifsterkte die lager zijn dan die verkregen uit triaxiaalproeven. Ook is de reproduceerbaarheid van de schuifproef veel minder goed dan die van de triaxiaalproef: men krijgt vaak een grote spreiding in resultaten. Om dat te verklaren kan men zich afvragen of het eigenlijk wel juist is om te stellen dat het afschuiven in het inwendige van het monster gebeurt over een horizontaal vlak, zoals in (22.1) is gesteld. Wellicht is het mogelijk dat er andere vlakken zijn waar de schuifspanningen eerder de kritieke waarde bereiken, en dan zal de grond waarschijnlijk langs die vlakken afschuiven. Het is bijvoorbeeld heel goed mogelijk dat afschuiven langs verticale vlakken zal optreden. De schuifspanning op een verticaal vlakje is immers precies even als die op een horizontaal vlakje, ( $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ ), op grond van het momentenevenwicht, en de normaalspanning op een verticaal vlakje zou best eens kleiner kunnen zijn dan de normaalspanning op een horizontaal vlakje. In dat geval is de spanningstoestand op een verticaal vlakje veel ongunstiger dan die op een horizontaal vlakje. De grond zal dan waarschijnlijk bezwijken volgens het door De Josselin de Jong gesuggereerde mechanisme van de *omvallende boekenrij*, zie figuur 22.2.

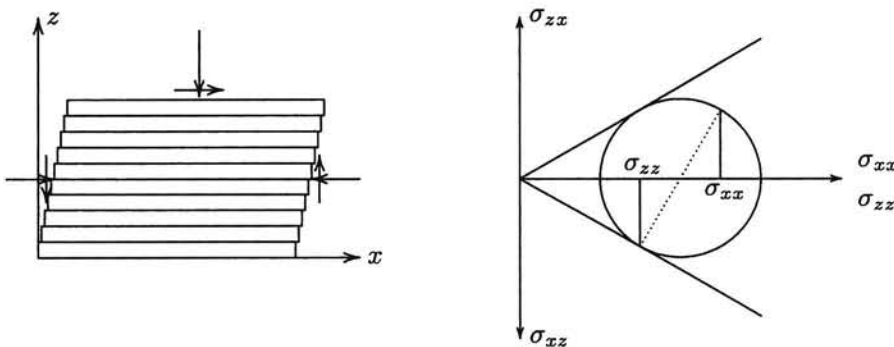


Figuur 22.2. Omvallende boekenrij.

Het lijkt heel goed mogelijk dat de horizontale spanning  $\sigma_{xx}$  kleiner is dan de verticale spanning  $\sigma_{zz}$ . Als men bijvoorbeeld het zand in het apparaat heeft gestort, en daarna de verticale belasting heeft aangebracht, zal de horizontale spanning in eerste instantie kleiner zijn dan de verticale spanning. Als daarna de schuifspanning wordt opgevoerd zal de maximaal mogelijke schuifspanning het eerste worden bereikt op verticale vlakjes, zie de cirkel van Mohr getekend in figuur 22.2. Men bedenke dat in dit geval de schuifspanningen  $\sigma_{xz}$  en  $\sigma_{zx}$  bij het getekende assenstelsel negatief zijn. In de cirkel van Mohr is aangenomen dat  $\sigma_{xx} < \sigma_{zz}$ . Omdat het punt met coördinaten  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{zz}$  links ligt van het punt met coördinaten  $\sigma_{zz}$  en  $\sigma_{xx}$  zal afschuiven eerder optreden op de vlakjes waarop  $\sigma_{xx}$  werkt, dat zijn verticale vlakjes, dan op de vlakjes waarop  $\sigma_{zz}$  werkt, dat zijn horizontale vlakjes. Bij de getekende richtingen van de schuifspanningen zal dit betekenen dat de grond rechts van een verticaal vlakje ten opzichte van de grond links daarvan omhoog beweegt, en in figuur 22.2 is aangenomen dat dit mechanisme optreedt in een groot aantal schuifvlakken. Om de totale vervorming in overeenstemming te laten zijn met de opgelegde vervorming van het apparaat moet er nog een rotatie van het grondmonster als geheel op worden gesuperponeerd, maar daarvoor zijn geen spanningen nodig, omdat bij die rotatie de grond niet vervormt. Het

vervormingsmechanisme lijkt erg op dat van een rij boeken, die bij onvoldoende zijdelingse steun omvalt.

Als men bij een rij boeken het mechanisme van het omvallen wil verhinderen kan men een horizontale voorspanning aanbrengen. Deze kan geleverd worden door twee zware boekensteunen. Ook kan men het omvallen tegengaan door de boeken in te klemmen tussen de twee zijkanten van een boekenkast. Op analoge wijze geldt voor het afschuifmechanisme bij de schuifproef dat het mechanisme van figuur 22.2 kan worden tegengegaan door een grote horizontale spanning aan te brengen. Alleen als de horizontale spanning groter is dan de verticale, door een of andere externe oorzaak, bijvoorbeeld doordat men na het storten van het zand in het apparaat dit verdicht heeft door trillen, zal op horizontale vlakjes de spanningsverhouding ongunstiger zijn dan op verticale vlakjes. De spanningscombinatie van  $\sigma_{zz}$  en  $\sigma_{zx}$ , werkend op een horizontaal vlakje, zal dan eerder de kritieke waarde tan  $\phi$  bereiken als de spanningscombinatie van  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{zx}$ , werkend op een verticaal vlakje. Dan



Figuur 22.3. Afschuiving over horizontale vlakken.

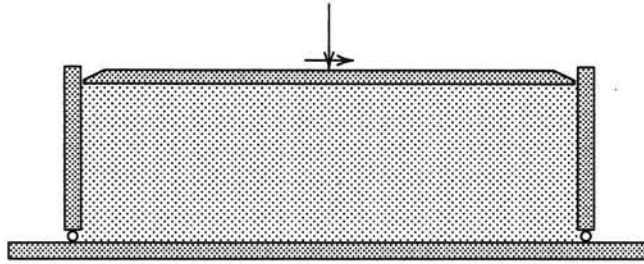
kan afschuiven over horizontale vlakjes verwacht kunnen worden. Die situatie is getekend in figuur 22.3. De cirkel van Mohr voor dit geval is ook getekend in de figuur.

## 22.2 Uniforme schuifproef

Afgezien van het principiële bezwaar dat de spanningstoestand bij de schuifproef niet geheel bekend is, is een nadeel van de directe schuifproef nog dat de vervormingstoestand in het monster nogal ongelijkmatig is, omdat in de twee helften van het apparaat het zand min of meer zit opgesloten, en alleen in de buurt van het middenvlak vervormingen zullen optreden. Om dat te verbeteren is door Roscoe in Cambridge (Engeland) een schuifapparaat ontwikkeld waarin de vervormingstoestand meer homogeen is. Daarbij is er naar gestreefd dat zo goed mogelijk een zuivere hoekvervorming wordt opgelegd, zie figuur 22.4. Men noemt dit het uniforme schuifapparaat, of *simple shear* apparaat. De doorsnede in het horizontale oppervlak is weer rechthoekig. De verbetering van het apparaat ten opzichte van het directe schuifapparaat is dat de zijwanden kunnen scharnieren, waarbij de linkerwand en de rechterwand wel stijf met elkaar zijn verbonden. Beide wanden kunnen alleen tegelijk, en in de zelfde mate roteren, met een uniforme hoekvervorming van het monster als resultaat. Een variant van dit schuifapparaat is een in Noorwegen ontwikkeld apparaat met een cirkelvormige doorsnede. Dan past een monster uit een (ronde) monsterbus direct in het apparaat. De uniforme vervorming wordt in het Noorse apparaat verkregen door het op te bouwen uit een stelsel stijve metalen ringen, die in een richting over elkaar kunnen worden geschoven.

Hoewel de uniforme schuifproef wel een verbetering is ten opzichte van de directe schuif-





Figuur 22.4. Uniforme schuifproef.

proef, omdat de vervormingen veel meer homogeen over het monster zijn verdeeld, is het ook bij bijproeven in dit soort apparaten niet vanzelfsprekend, zoals men wel gedacht heeft, dat alleen afschuiving over horizontale vlakken optreedt. Als dat het geval zou zijn zouden de spanningen op een horizontaal vlak juist kritiek moeten zijn. Dit betekent, zoals hierboven al gezien, dat de horizontale normaalspanning aanzienlijk groter moet zijn dan de verticale. En het is maar de vraag of dat inderdaad zo is. Bij het installeren van het monster in het apparaat is het eerder te verwachten dat de horizontale normaalspanning juist kleiner is dan de verticale. Het is dan goed denkbaar dat afschuiven langs verticale vlakken optreedt, met een gelijktijdige rotatie (waarvoor geen spanningen nodig zijn). Bij dat mechanisme hoort een horizontale spanning die kleiner is dan de verticale.

Het is interessant nat te gaan wat de invloed is van een verkeerde aanname over het afschuifmechanisme. Daartoe gaan we uit van het boekenrij-mechanisme, met afschuiving langs verticale vlakken, zie figuur 22.2. Omdat in dit geval de spanningen op een verticaal vlak kritisch zijn, en die op een horizontaal vlak niet, geldt er

$$\sigma_{xx} + c \cot \phi = (\sigma_{zz} + c \cot \phi) \frac{1 - \sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi},$$

en

$$\sigma_{zx} = c + \sigma_{xx} \tan \phi.$$

Stelt men nu  $\sigma_{zz} = N/A$  en  $\sigma_{zx} = T/A$ , dan vindt men

$$T_f = cA + N \tan \phi \frac{1 - \sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi}. \quad (22.2)$$

Dit is een lagere waarde voor de bezwijkkracht dan de waarde volgend uit (22.1). Het lijkt redelijk om aan te nemen dat de grond volgens het zwakste mechanisme zal bezwijken en dan is (22.2) van toepassing. Als men een proef doet met een lage horizontale spanning dan is te verwachten dat men een lage sterkte vindt, overeenkomstig formule (22.2). Interpreteert men dat echter op de traditionele manier, volgens (22.1) dan leidt dit lage resultaat tot een verondersteld lage waarde van  $\phi$ . Dit verklaart waarom vele onderzoekers bij schuifproeven lagere schuifsterktes vinden dan bij triaxiaalproeven.

Bij de twee mechanismes is de horizontale spanning sterk verschillend, en het lijkt logisch om te veronderstellen dat het optreden van het ene dan wel het andere mechanisme (afschuiven over horizontale vlakken of het boekenrij-mechanisme) afhangt van de grootte van de horizontale spanning in het apparaat. Die grootte zal samenhangen met de manier waarop het monster in het apparaat is gebracht, maar het is moeilijk precies te zeggen hoe

groot de horizontale spanning is, en zelfs is het moeilijk om met enige zekerheid te kunnen zeggen dat de horizontale spanning kleiner dan wel groter is dan de verticale spanning. Die onzekerheid maakt de interpretatie van de proefresultaten nogal moeilijk en onbetrouwbaar.

Concluderend kan gesteld worden dat de schuifproef eigenlijk helemaal niet zo'n goede proef is om de schuifsterkte van grond te bepalen, omdat de spanningstoestand niet volledig bekend is. De verticale normaalspanning en de schuifspanning zijn bekend, uit de opgelegde waarden, maar de horizontale normaalspanning is niet bekend. En het is goed te begrijpen dat het voor de proefresultaten verschil uitmaakt of men het monster zijdelings heel weinig steunt, of zijdelings juist heel sterk voorspant. Dat er zoveel spreiding in de proefresultaten wordt gevonden is dan ook goed verklaarbaar, en ook dat de gevonden schuifweerstand lager is dan die gevonden bij triaxiaalproeven. Bij de triaxiaalproef zijn wel alle spanningen bekend, en die proef is daarom veel beter geschikt om de sterkte van grond (of rots) te bepalen.

Opgemerkt moge worden dat in de praktijk van de grondmechanica laboratoriumproeven vaak voor een deel beschouwd worden als een soort schaalproeven. Voor een probleem zoals de zijdelingse stabiliteit van een caisson, onder invloed van een grote horizontale kracht, geeft men dan toch vaak de voorkeur aan een schuifproef, ondanks alle bezwaren. De gedachte daarbij is dan dat het bezwijkmechanisme in de proef dat in de werkelijkheid goed zal benaderen. Eventuele complicaties, en fouten in de theorie, zullen in het laboratorium en in het terrein hetzelfde effect hebben. Overigens blijft hierbij geldig dat als de resultaten afhankelijk zijn van de horizontale spanning (en dat zijn ze bijna altijd), men er bij de proef wel voor moet zorgen dat deze zo goed mogelijk gelijk zijn aan die in de werkelijkheid.

### Opgaven

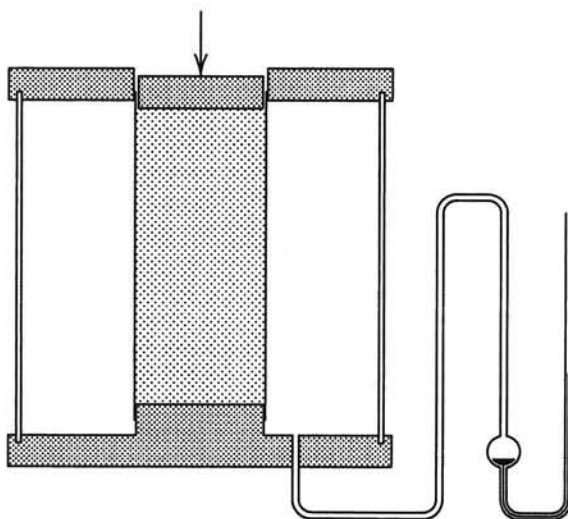
**22.1** Op een zandmonster, waarvan in een triaxiaalapparaat is bepaald dat  $c = 0$  en  $\phi = 40^\circ$ , wordt een schuifproef uitgevoerd. Het zand is voorzichtig in het apparaat gestort, zodat verwacht kan worden dat de horizontale spanning bij de proef erg laag is, en er afschuiven langs verticale vlakjes zal optreden. Bij de proef is de verticale spanning gelijk aan 100 kPa. Bij welke schuifspanning bezwijkt de grond?

**22.2** Als men de proef uit de vorige opgave interpreteert op de klassieke manier, met (22.1), welke waarde van  $\phi$  zou men dan vinden?

## Hoofdstuk 23

### CELPROEF

Een variant van de triaxiaalproef is de omstreeks 1938 door Keverling Buisman ontwikkelde celproef, zie figuur 23.1. Dit is eigenlijk een voorloper van de triaxiaalproef, die pas na 1945 is ontwikkeld, mede op basis van de hier beschreven celproef. In het buitenland noemt dit soms de "Dutch cell test". Het celapparaat bestaat uit een glazen cel, waarin het grondmonster



Figuur 23.1. Celproef.

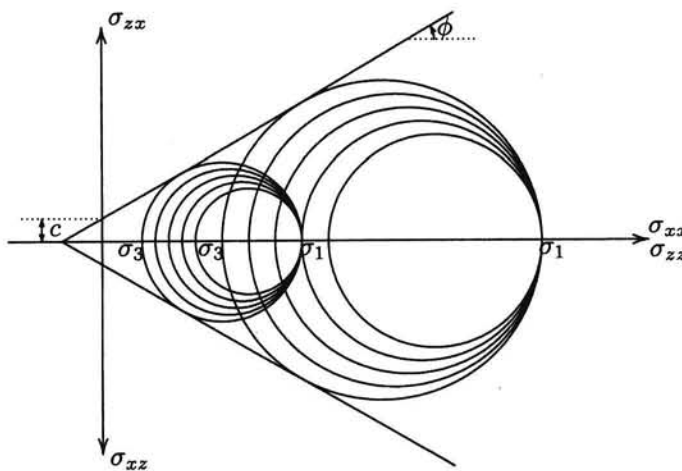
geplaatst is, omringd door een rubber vlies, en water in de cel. In tegenstelling tot het triaxiaalapparaat, waarin de celdruk zowel tegen de zijkant van het monster drukt als op de bovenkant, werkt in het celapparaat de celdruk alleen op het cilindrische zij-oppervlak van het monster, door de constructie van het vlies, dat met lijm vast verbonden is aan de onder- en bovenkant van het apparaat. Verder is het gebruikelijk de verticale kracht op te leggen, door middel van gewichten, en de verticale rek te meten. Bij de triaxiaalproef legt men meestal de vervorming op, en meet dan de bijbehorende verticale kracht. Men stelt dat de celproef *spanningsgestuurd* is, terwijl de triaxiaalproef in verticale zin *vervormingsgestuurd* is. In horizontale zin zijn de triaxiaalproef en de celproef beide *spanningsgestuurd*. Een ander verschil van de celproef met de triaxiaalproef is dat de monsters in een celproef meestal wat groter zijn. De diameter van de monsters in een celproef is normaal 6.5 cm, terwijl de diameter van de monsters in een triaxiaalproef normaal 3.8 cm is. Dit is uiteraard geen wezenlijk verschil, en er bestaan ook apparaten met afwijkende maten. Zo bestaan er bijvoorbeeld voor het beproeven van grof materiaal (grind of steenslag) grote triaxiaalcellen.

De celproef is oorspronkelijk ontwikkeld om na te gaan onder welke spanningstoestanden de grond in staat is belastingen te dragen zonder grote vervormingen, en niet om een monster tot bezwijken te brengen. Bij de oorspronkelijke proef werd er daarom naar gestreefd de

horizontale vervormingen praktisch nul te houden. Dat kan geschieden door het monster te omringen met water, en te verhinderen dat het water afstroomt. De druk in het water in de cel neemt dan toe als men het monster belast. Bij de klassieke celproef worden de celdruk en de verticale vervorming gemeten als functie van de geleidelijk toenemende verticale kracht. Een nadeel van de proef is dat de celdruk nogal afhankelijk is van de stijfheid van het apparaat, en bijvoorbeeld ook van een eventuele plooi in het vlies, of de eventuele aanwezigheid van een luchtbel. Een voordeel is dat men voor een groot aantal spanningstoestanden de bijbehorende vervormingen en eventuele vervormingssnelheden kan bepalen, allemaal op hetzelfde monster. Het monster bezwijkt immers niet.

In de loop van de tijd zijn zowel het triaxiaalapparaat als het celapparaat in allerlei laboratoria aangepast, zodanig dat men de belasting op verschillende manieren kan aanbrengen, en alle vervormingen kan meten, of een vervorming kan opleggen en de bijbehorende spanning kan meten. Het enige verschil tussen een celapparaat en een triaxiaalapparaat is dan nog dat in het celapparaat de celdruk alleen zijdelings op het monster werkt, en in het triaxiaalapparaat ook in verticale richting.

Vele proefprocedures zijn in de diverse laboratoria ontwikkeld. Voor de bepaling van de schuifsterkteparameters  $c$  en  $\phi$  is een veel gebruikte procedure het uitvoeren van twee triaxiaalproeven op twee verschillende monsters bij verschillende constante celdrukken, met constante verticale vervormingssnelheid, zoals beschreven in hoofdstuk 21. Een andere procedure is het belasten van een monster in een celapparaat, en het dan voorzichtig bijna tot

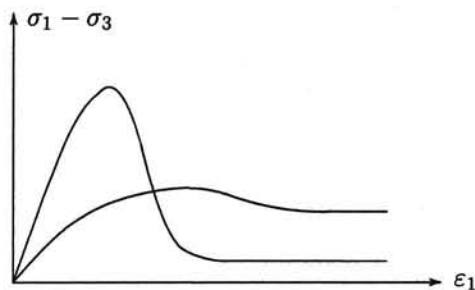


Figuur 23.2. Bepaling van  $c$  en  $\phi$  uit twee celproeven.

bezwijken brengen door het laten weglopen van een kleine hoeveelheid water uit de cel. De steundruk neemt daarbij af, en men tapt water af totdat de steundruk niet of nauwelijks meer afneemt. Het monster is dan bijna bezweken, maar de vervormingen blijven wel beperkt. Men kan in een later stadium op hetzelfde monster een nieuwe proef doen, door de verticale belasting te verhogen. De celdruk neemt daarbij weer toe, met een waarde die afhangt van de opgelegde belasting en de eigenschappen van grond en apparaat. Die nieuwe celdruk kan men gemakkelijk meten, met behulp van de celdrukmeter. Vervolgens kan men het monster nogmaals bijna tot bezwijken brengen door opnieuw wat water af te tappen. De cirkels van Mohr bij deze proeven zijn schematisch getekend in figuur 23.2. Omdat in zo'n celproef het monster net niet volledig tot bezwijken wordt gebracht vindt men op deze wijze waarden voor de schuifsterkteparameters  $c$  en  $\phi$  die aan de lage kant zijn, vergeleken

met de waarden gevonden uit triaxiaalproeven.

Opgemerkt kan nog worden dat het tegenwoordig meer en meer gebruikelijk wordt laboratoriumproeven op grondmonsters te gebruiken om het verband tussen spanningen en



Figuur 23.3. Enige proefresultaten.

vervormingen in zijn algemeenheid te bepalen, vanaf de kleine vervormingen bij het begin van belasten, tot aan bezwijken toe, zie figuur 23.3. Als de verticale belasting vervormingsgestuurd wordt aangebracht kan men ook de afname van de verticale belasting na het bereiken van de maximumspanning goed volgen. Men noemt de maximale sterkte wel de piek-sterkte, en de op den duur overblijvende sterkte de residuele sterkte. Soms is die residuele sterkte aanzienlijk minder dan de piek-sterkte, bijvoorbeeld bij kalkhoudende zanden, zoals ze wel voorkomen voor de kust van Australië of Brazilië. Een voorbeeld van zo'n resultaat is ook getekend in figuur 23.3. Een materiaal met een pieksterkte die veel groter is dan de residuele sterkte komt voor als de korrels in een normaal zand aan elkaar verkit zijn geraakt. Het zand verkrijgt dan een stijve, maar brosse structuur. Een dergelijk zand lijkt vaak heel sterk, en dat is het ook, maar zodra door een of andere oorzaak de structuur verbroken is, valt de sterkte terug tot aanzienlijk lagere waarden. Bij de bouw van twee offshore platforms voor de kust van Australië heeft dit tot grote problemen geleid, omdat de schuifsterkte van de grond na het inheien van de funderingspalen veel minder bleek te zijn geworden.

Het is in veel gevallen niet voldoende om alleen de maximale waarde van de schuifspanning te meten. Men gebruikt dan maar een gering deel van de beschikbare informatie, en loopt grote risico's op overschatting van de sterkte. Het is beter om de relatie tussen schuifspanningen en vervormingen over het hele traject meten. Bij de toepassing kan men dan ook rekening houden met de terugloop van de sterkte na een hoge schuifspanning, hoe kort die misschien ook maar gewerkt heeft.

### Opgaven

**23.1** Bij een celproef wordt een droog zandmonster met een diameter van 6.5 cm belast door een gewicht van 5 kg. Men tapt geleidelijk enig water uit de cel af, totdat de celdruk constant blijft, als indicatie van het begin van bezwijken. De steundruk is dan 5.2 kPa. Als aangenomen wordt dat de cohesie nul is, hoe groot is dan de wrijvingshoek  $\phi$  van het materiaal?

**23.2** In een celapparaat wordt een zandmonster ( $c = 0$ ,  $\phi = 40^\circ$ ) beproefd. De diameter van het monster is 6.5 cm. De steundruk wordt constant gehouden op 10 kPa. Hoe groot kan de verticale belasting zijn?

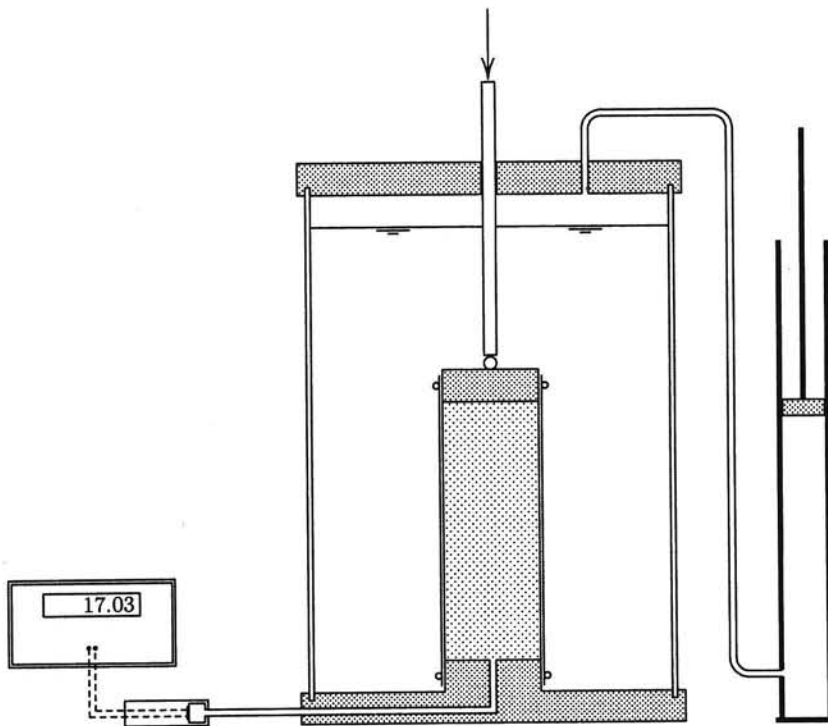
## Hoofdstuk 24

# WATERSPANNINGEN

In de vorige hoofdstukken zijn de belangrijkste principes van triaxiaalproeven en celproeven behandeld. Daarbij is er van uitgegaan dat de grond droog is, zodat er geen rekening gehouden behoeft te worden met eventuele waterspanningen. In werkelijkheid, met name bij proeven op klei, is er steeds water aanwezig in het grondmonster, en kan de belasting van het grondmonster aanleiding geven tot het ontwikkelen van waterspanningen. Daarom zal in dit hoofdstuk besproken worden hoe men deze waterspanningen in rekening kan brengen, of kan meten.

### 24.1 Meting van de waterspanning

Proeftechnisch gezien zijn er twee methodes om de waterspanningen te bepalen: de proef zo langzaam uitvoeren, op een gedraineerd monster, dat er geen waterspanningen optreden, of de waterspanningen meten. In het eerste geval brengt men aan de onder- of bovenzijde (of

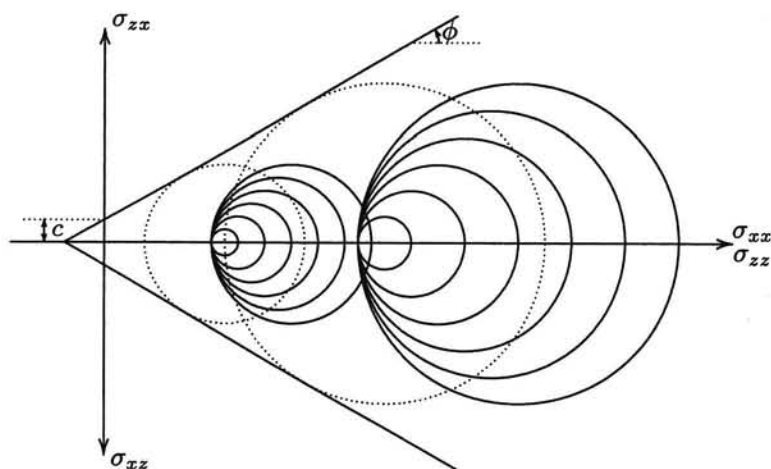


Figuur 24.1. Triaxiaalproef met waterspanningsmeting.

allebei) een drainage aan, bijvoorbeeld door een filterpapiertje en een poreuze plaat, en zorgt er voor dat de duur van de proef lang is ten opzichte van de geschatte consolidatietijd van

het monster. Dat kan natuurlijk wel tot gevolg hebben dat de proef nogal lang duurt. In het tweede geval meet men gedurende de proef de waterspanning, bijvoorbeeld met behulp van een elektrische waterspanningsmeter. Dat is een drukopnemer waarin de druk bijvoorbeeld gemeten wordt aan de hand van de doorbuiging van een dun stalen membraan, met behulp van een rekstrookje dat op het membraan is geplakt. De waterspanningsmeter wordt aangesloten aan onder- of bovenzijde van het monster, zie figuur 24.1. Soms tracht men zelfs de waterspanning in het inwendige van het monster te meten, met behulp van een dunne naald. In alle gevallen moet men er wel voor zorgen dat het meetinstrument erg stijf is, d.w.z. dat er slechts weinig water nodig is om een drukverandering te registreren. Anders treedt er een aanzienlijke vertraging op, en zijn de meetgegevens onbetrouwbaar, omdat ze niet representatief zijn voor de waterspanningen in het inwendige van het monster. Een elektrische waterspanningsmeter met een rekstrookje is in het algemeen zo stijf dat slechts een heel kleine hoeveelheid water nodig is om een duidelijke drukverandering te registreren, bijvoorbeeld  $1 \text{ mm}^3$  vervorming voor een drukverandering van 100 kPa. De respons van zo'n instrument is erg gevoelig voor insluitingen van luchtbelletjes (omdat een luchtbel erg samendrukbaar is). Er moet dus veel zorg worden besteed aan het luchtvrij houden van het meetsysteem en de leidingen.

Zijn de waterspanningen gedurende de proef bekend dan is het een eenvoudige zaak om de effectieve spanningen te bepalen uit de gemeten totaalspanningen, door er de waterspanning van af te trekken. Omdat bezwijken van grond bepaald wordt door kritieke waarden voor de effectieve spanningen kan men dan de schuifweerstandparameters bepalen. In de span-



Figuur 24.2. Bepaling  $c$  en  $\phi$  uit twee proeven.

ningsdiagrammen zet men uiteraard de effectieve spanningen uit, en uit de omhullende van een aantal kritieke spanningscirkels kan men de cohesie  $c$  en de hoek van inwendige wrijving  $\phi$  bepalen. De procedure is geïllustreerd in figuur 24.2. De proefresultaten zijn weergegeven in tabel 24.1. Er zijn twee proeven gedaan, bij celdrukken van 40 kPa en 95 kPa. Bij beide proeven is na het aanbrengen van de celdruk door drainage de waterspanning tot nul gereduceerd. In beide gevallen is daarna een snelle proef gedaan, waarbij de waterspanning is gemeten. In figuur 24.2 zijn de cirkels van Mohr voor de totaalspanningen getekend, voor alle waarnemingen vermeld in tabel 24.1. Voor de laatste cirkels, die horen bij de maximaal gemeten waarde van de verticale spanning, zijn ook de cirkels voor de effectieve spanningen in figuur 24.2 getekend, gestippeld. Met behulp van deze twee kritische cirkels is de omhul-

Proef	$\sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3$	$p$	$\sigma'_3$	$\sigma'_1$
1	40	0	0	40	40
	40	10	4	36	46
	40	20	9	31	51
	40	30	13	27	57
	40	40	17	23	63
	40	50	21	19	69
	40	60	25	15	75
2	95	0	0	95	95
	95	20	8	87	107
	95	40	17	78	118
	95	60	25	70	130
	95	80	33	62	142
	95	100	42	53	153
	95	120	50	45	165

Tabel 24.1. Proefresultaten.

lende getekend, en kunnen de cohesie  $c$  en de wrijvingshoek  $\phi$  worden bepaald. In het geval getekend in figuur 24.2 vindt men  $c = 9$  kPa en  $\phi = 30^\circ$ .

Er wordt met nadruk op gewezen dat het bepalen van de sterkteparameters  $c$  en  $\phi$  alleen kan geschieden op basis van kritische spanningstoestanden voor de *effectieve spanningen*. Als bij de hierboven beschreven proef enige drainage mogelijk was geweest, en er dus lagere waterspanningen waren opgetreden, waren de gevonden totaalspanningen anders geweest (lager). Alleen als men uit de resultaten de effectieve spanningen afleidt vindt men bij dezelfde grond ook dezelfde waarden van  $c$  en  $\phi$ .

## 24.2 Verschillende triaxiaalproeven

De procedure bij de proeven die hierboven zijn beschreven, met de resultaten uit tabel 24.1, is dat men na het aanbrengen van de celdruk consolidatie van het monster toestaat (dat duurt dan wel enige tijd, bijvoorbeeld een aantal uren of misschien wel een hele dag), maar bij het verticaal belasten van het monster geen drainage toestaat. De kraan naar het afvoervat moet dan gesloten worden. Men noemt zo'n proef in het Engels een Consolidated Undrained test, ofwel een CU-test. Dat is een vaak gebruikte procedure, maar er zijn ook andere proefprocedures.

Als men ook in de tweede fase, het verticaal belasten, door drainage en heel langzaam belasten, zorgt dat er geen waterspanningen optreden spreekt men van een Consolidated Drained test, of een CD-test. Zo'n proef duurt natuurlijk nogal lang, en dat is een nadeel.

Nog een andere mogelijkheid is om tijdens de hele proef nooit drainage toe te staan, door het monster geheel af te sluiten. Dat noemt men een Unconsolidated Undrained test, of UU-test. In dit hoofdstuk is aangenomen dat de proef een CU-test is.

## 24.3 Elastische respons

Het is illustratief om te proberen om langs theoretische weg de orde van grootte van de waterspanningen die kunnen ontstaan door belasting van een grondmonster te voorspellen. Dat kan wel niet zo nauwkeurig en betrouwbaar, maar levert wel inzicht in het proces. Men



kan daarvoor gebruik maken van het uitgangspunt dat de aanwezigheid van het water in de poriën een belemmering vormt voor volumeveranderingen van de grond. Het water verzet zich niet tegen hoekvervormingen van de grond, maar een volumeverkleining van de grond kan alleen optreden als er water uitstroomt of als het water zelf samengeperst wordt. De korrels zelf zijn zo stijf dat ze als onsamendrukbaar kunnen worden beschouwd. Op het moment van belasten zelf kan er nog geen water uit het grondmonster gestroomd zijn, en de enige mogelijkheid voor volumeverandering is dan een volumeverandering van het water. Hiervoor geldt, zie ook hoofdstuk 15,

$$\Delta V_w = -n\beta V \Delta p, \quad (24.1)$$

waarin  $V$  het volume van het monster is,  $\Delta p$  de toename van de waterdruk, en  $\beta$  de samendrukbaarheid van het water. Blijkbaar geldt er nu voor de instantane volumerek  $\varepsilon_{vol}$

$$\varepsilon_{vol} = \frac{\Delta V}{V} = -n\beta \Delta p. \quad (24.2)$$

Omdat de samendrukbaarheid van het water  $\beta$  erg klein is, is dit bijna nul.

Anderzijds geldt er voor de volumerek, aannemende dat het korrelskelet elastisch reageert,

$$\varepsilon_{vol} = -\frac{\Delta \sigma'}{K}. \quad (24.3)$$

Hierin is  $K$  de compressiemodulus van de grond, en  $\Delta \sigma'$  de toename van de isotrope effectieve spanning. Omdat de volumerek zo gering is is de toename van de isotrope effectieve spanning ook bijna nul. Men kan deze schrijven als de toename van het gemiddelde van de drie hoofdspansingen

$$\Delta \sigma' = \frac{1}{3}(\Delta \sigma'_1 + \Delta \sigma'_2 + \Delta \sigma'_3). \quad (24.4)$$

Uit (24.3) volgt, omdat  $\sigma' = \sigma - p$ ,

$$\varepsilon_{vol} = -\frac{\Delta \sigma - \Delta p}{K}. \quad (24.5)$$

Door gelijkstelling van (24.2) en (24.5) vindt men nu tenslotte

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma}{1 + n\beta K}. \quad (24.6)$$

Hiermee is de waterspanningstoename uitgedrukt in de toename van de isotrope grondspanning. Als het water onsamendrukbaar is ( $\beta = 0$ ) vindt men dat de waterspanningstoename gelijk is aan de toename van de isotrope grondspanning. Dat is in overeenstemming met de beschouwingen in hoofdstuk 15 over consolidatie. Heel direct kan men het afleiden uit de redenering dat er in korte tijd geen volumeverandering kan zijn, en dus geen verandering van de isotrope effectieve spanning, en daarom moet de toename van de waterspanning wel gelijk zijn aan de toename van de isotrope (of gemiddelde) totaalspanning. Alleen als het water samendrukbaar is kan er een kleine volumeverandering zijn, is er dus een kleine toename van de isotrope effectieve spanning mogelijk, en is dan dus de toename van de waterspanning iets kleiner dan de toename van de isotrope totaalspanning.

In het algemeen kan men (24.6) ook schrijven als

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3}{3(1 + n\beta K)}. \quad (24.7)$$

Bij een proef in een triaxiaalapparaat is  $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$ , en bij dergelijke proeven zijn de gemeten grootheden in het algemeen de celdruk  $\Delta\sigma_3$  en de extra verticale spanning door de belasting, dat is  $\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$ . Men kan voor die omstandigheden (24.7) schrijven als

$$\Delta p = \frac{1}{1 + n\beta K} [\Delta\sigma_3 + \frac{1}{3}(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]. \quad (24.8)$$

Bij een triaxiaalproef zonder drainage zou men op grond van deze beschouwingen kunnen verwachten dat bij een verhoging van de celdruk de waterspanning praktisch evenveel toeneemt als de celdruk, aannemende dat  $n\beta K \ll 1$ . Voorts zou bij constante celdruk, en toenemende verticale belasting de waterspanningstoename ongeveer  $\frac{1}{3}$  van de belastings-toename moeten zijn. Dat meet men soms ook wel, althans bij benadering, zie ook de proefresultaten vermeld in tabel 24.1. Meestal wordt het beeld nogal verstoord doordat het water niet onsamendrukbaar reageert (bijvoorbeeld door de aanwezigheid van luchtbelletjes in de poriën), en doordat het monster niet isotroop is, of niet-elastische verschijnselen vertoont, zoals dilatantie. Bovendien worden de meetresultaten altijd enigszins verstoord doordat er enig water nodig is om de drukopnemer een druktoename te doen registreren. Daarbij kunnen een paar luchtbelletjes in het meetsysteem van grote invloed zijn.

## 24.4 Invloed dilatantie

De beschouwingen van de vorige paragraaf kunnen nog gegeneraliseerd worden door de invloed van dilatantie in rekening te brengen. Het uitgangspunt blijft dat er op het moment van belasten geen drainage kan plaats vinden. De enige mogelijkheid van volumeverandering is dan dat het water in de poriën wordt samengedrukt. Dat wordt uitgedrukt door de formules (24.1) en (24.2). Er geldt dus

$$\epsilon_{vol} = \frac{\Delta V}{V} = -n\beta\Delta p. \quad (24.9)$$

Voor wat betreft het verband tussen vervorming en korrelspanningen wordt nu gesteld dat

$$\epsilon_{vol} = -\frac{\Delta\sigma'}{K} + \frac{\Delta\tau}{M}. \quad (24.10)$$

De eerste term is de volumeverandering ten gevolge van compressie. Die wordt bepaald door de isotrope korrelspanning  $\sigma'$ . De tweede term is de volumeverandering ten gevolge van schuifspanningen. Gesteld is dat die bepaald wordt door een maat voor de deviatorspanningen  $\tau$ . Als eerste benadering is gesteld dat deze volumeverandering evenredig is met de verandering van  $\tau$ , met een stijfheidsfactor  $M$ . Dat is een oversimplificatie van de werkelijkheid, maar het biedt de mogelijkheid de invloed van dilatantie na te gaan. Men ziet aan vergelijking (24.10) dat er een volumevergroting is als  $M > 0$ . Dat is dilatantie, en die hoort bij een dicht gepakte grond. Als  $M < 0$  is er een volumeverkleining bij schuifspanningen. Dat is contractantie, behorend bij los gepakte grond.

Men vindt nu, omdat  $\sigma' = \sigma - p$ ,

$$\Delta p = \frac{1}{1 + n\beta K} (\Delta\sigma - \frac{K}{M} \Delta\tau). \quad (24.11)$$

Dit is de generalisatie van de uitdrukking (24.6). Voor de omstandigheden in een triaxiaalproef geldt

$$\Delta\sigma = \frac{1}{3}(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3) = \Delta\sigma_3 + \frac{1}{3}(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3). \quad (24.12)$$

Verder kan men voor de deviatorspanning  $\tau$  stellen dat

$$\Delta\tau = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3). \quad (24.13)$$

Dit betekent dat men de straal van de cirkel van Mohr gebruikt als maat voor de deviatorspanning  $\tau$ .

Men vindt nu tenslotte

$$\Delta p = \frac{1}{1 + n\beta K} \left[ \Delta\sigma_3 + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{K}{M} \right) (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \right]. \quad (24.14)$$

Dit is de generalisatie van formule (24.8). Men ziet dat dilatantie geen invloed heeft bij alzijdige belasting. Bij verticale belasting wordt de generatie van waterspanningen bepaald door de factor  $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{K}{M}$ . De eerste term is het gevolg van de compressie, de tweede term is het gevolg van de dilatantie of contractantie.

Bij een dilatant materiaal, als  $M > 0$ , is de waterspanning volgens deze beschouwing lager dan bij een materiaal zonder dilatantie. Dat komt omdat het dicht gepakte dilatante materiaal wil uitzetten bij schuifvorming. Dat reduceert dan de volumeverkleining door compressie als gevolg van de toename van de gemiddelde effectieve spanning. Als het dilatantie-effect (hier uitgedrukt door de stijfheidsmodulus  $M$ ) erg groot is, kan de waterspanning zelfs negatief worden. Dat kan het geval bij een zeer dicht gepakt materiaal. Bij vervorming zuigt dat water aan door de neiging tot volumevergroting.

Als het materiaal contractant is ( $M < 0$ ) wordt de waterspanning door contractantie juist extra groter. De (los gepakte) grond wil dan immers bij afschuiving kleiner van volume worden, en deze volumeverkleining vergroot die ten gevolge van de compressie. Het water in de poriën verzet zich tegen deze volumeverandering.

Door Skempton is voorgesteld het verband tussen de waterspanning en de totaalspanningen in het algemeen te schrijven als

$$\Delta p = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]. \quad (24.15)$$

De coëfficiënten  $A$  en  $B$  dient men dan bij een triaxiaalproef meten. Op grond van de beschouwing hierboven zou er gelden dat

$$B = \frac{1}{1 + n\beta K}, \quad (24.16)$$

en

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{K}{M}. \quad (24.17)$$

Inderdaad vindt men voor  $B$  meestal waarden iets kleiner dan 1, en voor  $A$  allerlei waarden, meestal tussen 0 en  $\frac{1}{2}$ , maar soms zelfs negatieve waarden, voor sterk dilatante grond.

De coëfficiënten  $A$  en  $B$  van Skempton zijn voor sommige praktijkproblemen wel nuttig, maar ze hebben het nadeel dat het geen echte fysische materiaaleigenschappen zijn, laat staan constanten. De redenering leidend tot de uitdrukkingen (24.16) en (24.17) is gebaseerd op de tamelijk dubieuze aanname dat de volumeverandering van het korrelskelet kan worden beschreven door een lineaire relatie van het type (24.10), en dat is wel een erg sterke schematisatie en benadering. Er is geen rekening gehouden met fysische effecten zoals gedeeltelijke verzadiging en anisotropie, maar de resultaten hangen ook af van bijvoorbeeld de stijfheid van de waterspanningsmeter.

Bij toepassing van dit soort formules dient men er ook op bedacht te zijn dat de coëfficiënten  $A$  en  $B$  in elk geval afhangen van de spanningen. Het is dus raadzaam om de proeven zoveel mogelijk te doen bij dezelfde beginspanningen, en liefst ook met dezelfde incrementele spanningen als naar verwachting in het terrein zullen optreden.

**Opgaven**

**24.1** Op een aantal identieke monsters worden CU-triaxiaalproeven uitgevoerd. Steeds wordt eerst de celdruk aangebracht, gewacht tot de waterspanning weer nul is, en dan wordt vrij snel het monster tot bezwijken gebracht, zonder drainage. Daarbij worden de waterspanningen gemeten. De resultaten zijn weergegeven in de tabel (spanningen in kPa). Hoe groot zijn in dit geval de cohesie

Proef	$\sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3$	$p$
1	20	40.94	8.19
2	40	69.52	13.90
3	60	98.09	19.62

Tabel 24.2. Proefresultaten triaxiaalproeven.

$c$  en de hoek van inwendige wrijving  $\phi$ ?

**24.2** Wat is er te zeggen over de coëfficiënten  $A$  en  $B$  in het geval beschreven in de vorige opgave?

**24.3** Grond met een dichte structuur zal bij afschuiving iets uitzetten. Men noemt dat dilatantie. Grond met een losse structuur zal daarentegen bij afschuiving kleiner worden. Dat noemt men contractantie. Is de structuur van de grond uit opgave 23.1 relatief dicht of relatief los?

**24.4** Op een volledig verzadigd kleimonster wordt in een celapparaat een verticale spanning van 80 kPa aangebracht. De celdruk loopt daarbij op met 20 kPa. Hoe groot zou de daarbij opgewekte waterspanning zijn als de grond ideaal elastisch zou zijn?

## Hoofdstuk 25

# ONGEDRAINEERD GEDRAG VAN GROND

Als er geen drainage mogelijk is, door opsluiting van de grond, of doordat de belasting zeer snel geschiedt, zal er geen consolidatie kunnen optreden. Men noemt dat ongedraineerd gedrag van de grond. In dit hoofdstuk wordt een inleiding gegeven tot de beschrijving van dat gedrag.

### 25.1 Ongedraineerde proeven

Doet men snelle triaxiaalproeven op verzadigde klei, zodat er geen drainage optreedt, dan treedt bij iedere verhoging van de celdruk een toename van de waterspanning op. Zoals besproken in het vorige hoofdstuk kan men die toename van de waterspanningen beschrijven met de formule van Skempton

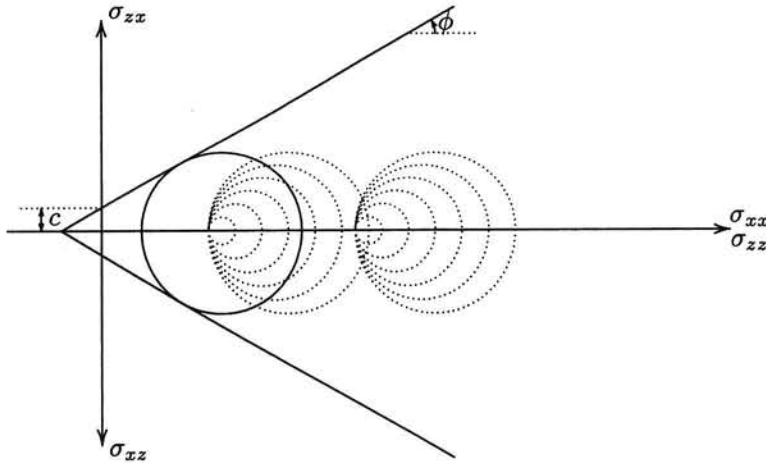
$$\Delta p = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]. \quad (25.1)$$

Voor de coëfficiënt  $B$  hierin kan men verwachten dat

$$B = \frac{1}{1 + n\beta K}, \quad (25.2)$$

waarin  $\beta$  de samendrukbaarheid van het water is (inclusief eventuele luchtbelletjes) en  $K$  de compressiestijfheid van het korrelskelet is, bij afwezigheid van waterspanningen. De coëfficiënt  $B$  zal veelal een waarde dicht bij 1 hebben, omdat het water bijna niet samendrukbaar is.

Verhoging van de celdruk zal dus leiden tot een toename van de waterspanning gelijk of vrijwel gelijk aan de verhoging van de celdruk, en dus niet of nauwelijks tot vergroting van de effectieve spanningen. Als er een drainage-mogelijkheid is, en men geeft het monster voldoende de tijd voor drainage, dan zal de opgebouwde waterspanning geleidelijk afnemen (dat is consolidatie). Maar als er geen mogelijkheid voor drainage is, doordat het grondmonster volledig is opgesloten zonder verbinding met de buitenwereld, of als de proef zo snel gebeurt dat er geen consolidatie kan optreden, spreekt men van *ongeconsolideerde* proeven. Als men daarna in de tweede fase van de triaxiaalproef, waarbij alleen de verticale spanning oploopt door de verticale vervorming van het monster, ook geen drainage toestaat spreekt men van een *ongeconsolideerde ongedraineerde* proef (Unconsolidated Undrained test, of UU-test). Doet men een tweede proef bij een hogere celdruk dan is het enige verschil met de eerste proef bij lagere celdruk dat de waterspanningen groter zijn. De effectieve spanningen zijn bij beide proeven praktisch gelijk, en dat heeft tot gevolg dat als men de resultaten netjes uitzet in termen van de effectieve spanningen, eigenlijk steeds dezelfde kritische spanningscirkel gevonden wordt, zie figuur 25.1. In deze figuur zijn cirkels van Mohr voor de totaalspanningen bij twee proeven gestippeld getekend. Trekt men bij de beide kritische cirkels de waterspanning van de normaalspanningen af dan kan men de cirkels van Mohr voor de effectieve spanningen tekenen. Die zijn in figuur 25.1 als volle lijnen getekend. De twee cirkels vallen samen (of vrijwel samen). Deze proefresultaten zijn onvoldoende om de schuifweerstandsparementen  $c$  en  $\phi$  te bepalen, omdat men maar één kritische cirkel voor de



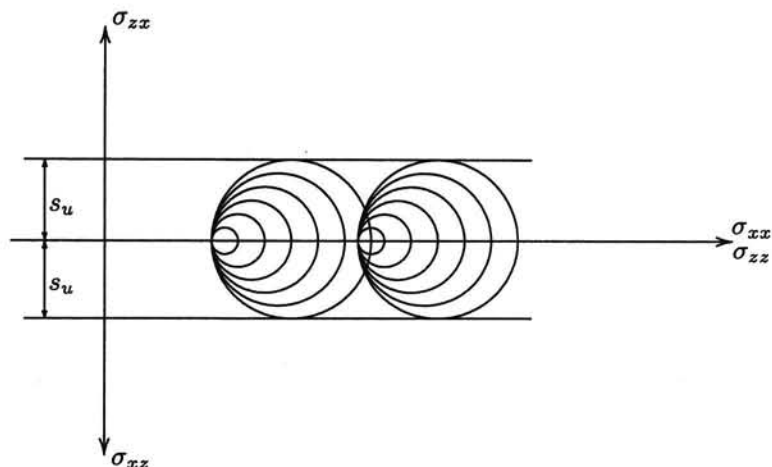
Figuur 25.1. Cirkels van Mohr bij ongedraineerde proeven.

effectieve spanningen heeft. Om de parameters  $c$  en  $\phi$  te bepalen zal men het monster bij de proef met hogere celdruk eerst moeten laten consolideren, door drainage toe te staan. Men spreekt dan, als men in de tweede fase van de proef, het verticaal belasten van het monster, geen drainage toelaat (of de proef zeer snel uitvoert), van een geconsolideerde-ongedraineerde proef (Consolidated Undrained test, of CU-test).

Ongedraineerde proeven zijn vaak erg zinvol omdat in de praktijk vaak ook situaties voorkomen waarin geen drainage mogelijk is. Als men in klei een sleuf graaft, om bijvoorbeeld een leiding te leggen, en die sleuf snel weer dicht gooit, kan geen consolidatie optreden. Ook als men in korte tijd een ophoging aanbrengt op een kleilaag zal er, althans de eerste tijd, geen consolidatie optreden. Om het gedrag van klei onder die omstandigheden na te gaan kan men een ongeconsolideerde ongedraineerde proef doen. Het is voor dergelijke praktijksituaties zelfs mogelijk om een zogenaamde totaalspanningen-analyse te maken. Daarbij wordt veronachtzaamd dat er waterspanningen optreden, en de proefresultaten worden alleen beschouwd in termen van totaalspanningen, zie figuur 25.2. Zoals hierboven al betoogd zullen alle kritische spanningcirkels vrijwel even groot zijn, en men vindt dus, als men deze resultaten wil weergeven met een waarde voor  $c$  en  $\phi$ , dat  $\phi$  praktisch nul lijkt, en dat het materiaal alleen cohesie lijkt te hebben. Men noemt dat  $c_u$ , of liever nog  $s_u$ , de ongedraineerde schuifsterkte (undrained shear strength). Een analyse gebaseerd op grondspanningen, met alleen een schijnbare cohesie  $s_u$ , noemt men wel een  $s_u$ -analyse, of ook wel een  $\phi_u = 0$ -analyse.

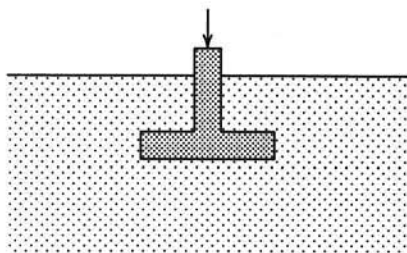
Omdat plasticiteitsberekeningen voor een zuiver cohesief materiaal veel eenvoudiger zijn dan voor een materiaal met inwendige wrijving worden dergelijke analyses tamelijk veel toegepast. Men bedenke dat ze alleen bruikbaar zijn voor ongedraineerde situaties. Voor een permanente ingraving is het wel interessant om te weten dat hij stabiel is in ongedraineerde toestand (d.w.z. direct na het graven), maar het is ook nodig om na te gaan of hij over langere tijd stabiel is. Dan is niet te ontkomen aan een analyse in gedraineerde omstandigheden, met de werkelijke waarden van  $c$  en  $\phi$  gebaseerd op effectieve spanningen.

In veel situaties is het verantwoord alleen maar een grondspanningenanalyse te maken, met  $c = s_u$  en  $\phi = 0$ . Dat is bijvoorbeeld het geval bij een strokenfundering op klei, met constante belasting, zie figuur 25.3. In het begin zullen er onder de fundering waterspanningen optreden, maar die zullen geleidelijk afnemen door consolidatie. Als de waterspanningen

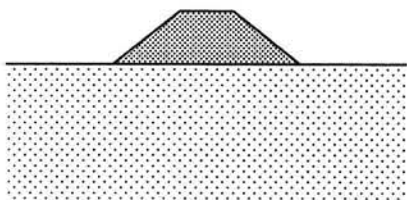


Figuur 25.2. Cirkels van Mohr voor totaalspanningen.

afnemen zal de alzijdige effectieve spanning toenemen. Het gevaar voor bezwijken wordt daarom in het verloop van de tijd steeds kleiner. Als de stabiliteit verzekerd is op het moment van belasten, is dat later zeker zo. Men kan dus volstaan met het controleren van de stabiliteit op het moment van belasten, in ongedraineerde toestand.



Figuur 25.3. Strokenfundering.



Figuur 25.4. Dijklichaam.

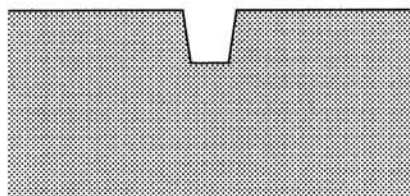
Ook bij de aanleg van een dijklichaam of een weglichaam kan men in veel gevallen met een ongedraineerde analyse volstaan. In de meeste gevallen kan men stellen dat als een dijklichaam de aanleg goed doorstaat ("de aanleg overleeft") dat dit dan later ook steeds stabiel is. Bij de aanleg zijn de waterspanningen in het algemeen het grootst, en later zullen de waterspanningen door consolidatie afnemen. Dan zijn de effectieve spanningen groter, en dus ook de schuifsterkte. In een enkel geval is gebleken dat de waterspanningen kort na het aanbrengen van de belasting eerst nog opliepen, voordat ze door drainage gingen afnemen. Dat kan een gevolg van kruip zijn. Er is dan een neiging van de gronddeeltjes tot volumeverkleining door kruip, maar die volumeverkleining wordt verhinderd door het grondwater, waardoor de druk erin toeneemt.

Het gevolg kan zijn dat de dijk aanvankelijk stabiel is, maar na een paar dagen alsnog afschuift. Zoiets is wel eens een enkele keer voorgekomen, bijvoorbeeld bij Streefkerk.

Uiteraard moet men wel steeds rekening houden met het eventueel toenemen van de waterspanningen in andere omstandigheden, bijvoorbeeld door hoog water of extreme regenval. Een dijk wordt niet aangelegd om onder zijn eigen gewicht te blijven staan (al moet dat ook wel in orde zijn), maar in de eerste plaats om een zelden optredend hoog water te keren. Bij hoog water ontstaat er een grote horizontale druk op het buitentalud, en de dijk moet dat natuurlijk kunnen weerstaan. De stabiliteit moet verzekerd zijn direct bij het eerste

optreden van het hoge water, en dan reageert de grond in het dijklichaam misschien nog ongedraineerd, maar ook enige dagen later moet de dijk nog stabiel zijn. Door het hoge water in een rivier kan de grondwaterstand in de dijk aanzienlijk hoger worden, en daardoor nemen de effectieve spanningen af, en dus ook de sterkte. Er ontstaat dan alsnog gevaar van afschuiving. Een ongedraineerde analyse is voor de berekening van dat risico niet geschikt. Men zal een berekening moeten maken in termen van de effectieve spanningen, rekening houdend met de werkelijk optredende waterspanningen. Daarop wordt later nog uitgebreid teruggekomen.

Ook is een ongedraineerde analyse niet bruikbaar als verwacht kan worden dat de waterspanningen later niet kleiner maar juist groter zullen worden. Dat is bijvoorbeeld het geval bij een ingraving. De ingraving betekent een ontlasting van de grond, en daardoor ontstaan negatieve waterspanningen, maar door consolidatie verdwijnen die na enige tijd. Dan nemen de effectieve spanningen af, en dus neemt de sterkte af. Een ingraving kan aanvankelijk misschien wel even blijven staan door het gunstige effect van negatieve waterspanningen, maar als de tijd voortschrijdt



Figuur 25.5. Ingraving.

neemt de stabiliteit af, en een afschuiving kan het gevolg zijn. Dat kan voor mensen die in de ingraving werken levensgevaarlijk zijn.

## 25.2 De ongedraineerde schuifsterkte

Voor de vergelijking van gedraineerde en ongedraineerde berekeningen, of voor het uitvoeren van een ongedraineerde berekening op basis van gedraineerde grondparameters, is het vaak nodig om een waarde van de ongedraineerde schuifsterkte te bepalen (of te schatten) uit andere gegevens. Daartoe kan men bedenken dat het uitgangspunt in het algemeen is dat bij verzadigde grond niet of nauwelijks volumeverandering kan optreden, en dat dus de alzijdige effectieve spanning niet kan veranderen. De gemiddelde effectieve spanning blijft dus constant, en deze bepaalt de ligging van de cirkel van Mohr. Meestal is in de grond sprake van een spanningstoestand waarbij de verticale totaalspanning redelijk goed bekend is (uit het gewicht van het materiaal en een eventuele bovenbelasting), en ook de aanvankelijke waterspanning (uit de grondwaterstand). Dan is dus  $\sigma'_{zz}$  bekend. Meestal zullen de twee horizontale spanningen wel zo ongeveer gelijk zijn, en ook wel te schatten, al is dat dan ook vaak niet zo eenvoudig. Er wordt vooralsnog maar aangenomen dat ook  $\sigma'_{xx}$  bekend is. Daarmee is dan ook de gemiddelde effectieve spanning  $\frac{1}{3}(\sigma'_{zz} + 2\sigma'_{xx})$  bekend. Bij verandering van de spanningen, ten gevolge van een of andere belasting, zal deze gemiddelde effectieve spanning ongeveer constant blijven,

$$\sigma'_0 = \frac{1}{3}(\sigma'_{zz} + 2\sigma'_{xx}) = \text{constant.} \quad (25.3)$$

Bij bezwijken van de grond zal de combinatie van  $\sigma'_1$  en  $\sigma'_3$  zodanig moeten zijn dat aan het bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb wordt voldaan, dat wil zeggen, overeenkomstig (20.12),

$$\left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0. \quad (25.4)$$

Omdat  $\sigma'_1 + \sigma'_3 = \frac{2}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3) + \frac{1}{3}(\sigma'_1 - \sigma'_3)$  kan men dit ook schrijven als

$$\left(1 - \frac{1}{3} \sin \phi\right) \left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0. \quad (25.5)$$



Omdat de gemiddelde effectieve spanning bij ongedraineerde vervorming niet kan veranderen geldt er ook dan nog, net als voor het aanbrengen van de belasting, volgens (25.3),

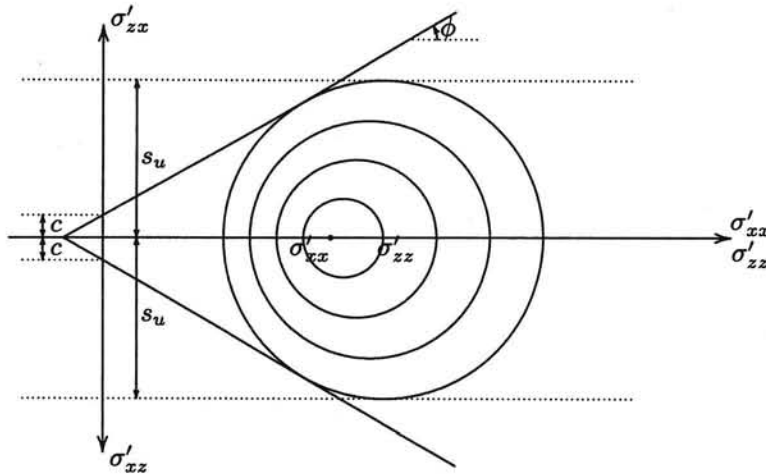
$$\frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3) = \sigma'_0, \quad (25.6)$$

waarin  $\sigma'_0$  een bekende waarde is, bepaald door de beginspanningen, zie (25.3).

Uit (25.5) en (25.6) volgt nu voor de ongedraineerde schuifsterkte  $s_u$

$$s_u = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = c \frac{\cos \phi}{1 - \frac{1}{3} \sin \phi} + \sigma'_0 \frac{\sin \phi}{1 - \frac{1}{3} \sin \phi}, \quad (25.7)$$

Deze formule maakt het mogelijk de ongedraineerde schuifsterkte af te schatten als de gedraineerde parameters  $c$  en  $\phi$  bekend zijn, en als de gemiddelde effectieve spanning  $\sigma'_0$  bekend is. De relaties zijn geïllustreerd in figuur 25.6. In deze figuur is een aantal cirkels voor de



Figuur 25.6. Cirkels van Mohr voor ongedraineerd gedrag.

effectieve spanningen getekend, uitgaand van de stelling dat steeds de gemiddelde effectieve spanning  $\sigma'_0$  gelijk blijft. De totaalspanningen verschillen steeds van die effectieve spanningen met de onbekende grootte van de waterspanning. Waar de cirkels van de totaalspanningen precies liggen is niet bekend, en ook niet relevant. Maar hun grootte is wel steeds gelijk aan die van de cirkels van de effectieve spanningen. De waterspanning vergroot immers alle normaalspanningen, zowel  $\sigma'_{xx}$  als  $\sigma'_{zz}$ .

Vergelijking (25.7) laat zien dat  $s_u = c$  als  $\phi = 0$ , zoals men ook zou mogen verwachten. Als  $\phi > 0$  neemt de ongedraineerde schuifsterkte  $s_u$  toe naarmate de spanning  $\sigma'_0$  groter is. Dit betekent dat voorbelasting, met consolidatie, gunstig werkt voor de sterkte van de grond.

Opgemerkt moge nog worden dat er bij de afleiding hierboven is aangenomen dat volumeverandering van de grond alleen veroorzaakt wordt door een verandering van de gemiddelde effectieve spanning. Dat betekent dat verschijnselen als anisotropie en contractantie of dilatantie buiten beschouwing zijn gelaten. Dat is wel een behoorlijke beperking, en de resultaten zijn dan ook, zoals zo vaak in de grondmechanica, alleen bij eerste benadering geldig.

### Opgaven

**25.1** Men doet een geconsolideerde, ongedraineerde triaxiaalproef op een kleimonster. De celdruk is 50 kPa, en het monster blijkt te bezwijken als de axiale kracht van het apparaat een extra verti-

cale druk van 170 kPa op het monster uitoefent. Hoe groot is  $s_u$ ?

**25.2** Van een zekere grondsoort is bekend dat  $c = 20$  kPa en  $\phi = 30^\circ$ . Men wil een  $s_u$ -analyse maken voor een geval van een grondmassief waarin oorspronkelijk de verticale effectieve spanningen op het niveau van 80 kPa liggen, en de horizontale effectieve spanningen half zo groot zijn (40 kPa). Met welke waarde voor  $s_u$  kan men rekenen?

**25.3** Wat zou het antwoord op de vorige vraag zijn als ook de horizontale effectieve spanningen aanvankelijk 80 kPa zijn?

**25.4** Controleer dat de antwoorden van de vorige twee opgaven, zoals die gevonden kunnen worden uit formule (25.7), of met een grafische oplossing met behulp van de cirkel van Mohr, zie figuur 25.6, met elkaar kloppen.

## Hoofdstuk 26

# SPANNINGSPADEN

Een veel gebruikte manier om proefresultaten weer te geven, en om het gedrag van grond te beschrijven is om gebruik te maken van spanningspaden. Men geeft dan de spanningstoestand weer met behulp van een tweetal (eventueel een drietal) parameters, en zet die uit in een diagram. Het pad dat dit spanningspunt volgt bij een zekere belasting noemt men het *spanningspad*, of in het Engels: *stress path*.

### 26.1 Parameters

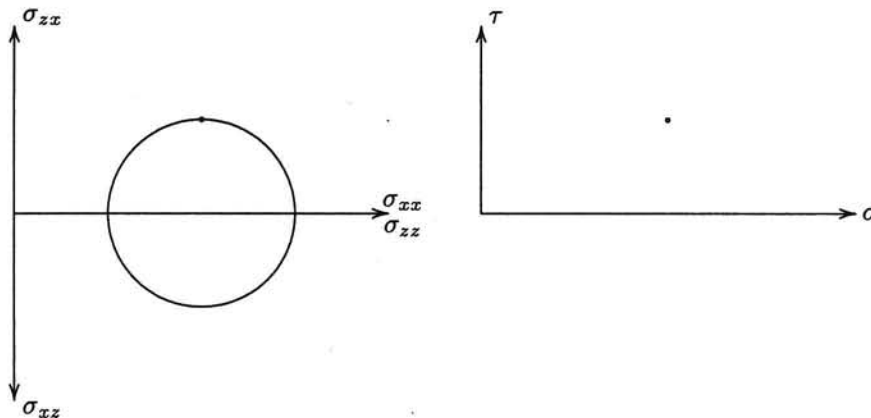
Geschikte parameters om de spanningstoestand te karakteriseren zijn bijvoorbeeld de gemiddelde hoofdspanning,  $\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , en het verschil van de grootste en de kleinste hoofdspanning,  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Er wordt dan gesteld dat het gedrag van de grond alleen van de waarde van deze twee parameters afhangt. Daarbij wordt dan dus aangenomen dat bijvoorbeeld de richting van de hoofdspanningen niet van belang is.

Vaak kiest men in plaats van de gemiddelde hoofdspanning het gemiddelde van de grootste en de kleinste hoofdspanning,  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ . De twee variabelen kan men aangeven als  $\sigma$  en  $\tau$ ,

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad (26.1)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (26.2)$$

Door in de definitie van  $\tau$  nog een factor  $\frac{1}{2}$  in te voeren is bereikt dat  $\sigma$  en  $\tau$  gelijk zijn aan de plaats van het middelpunt van de cirkel van Mohr en de straal van de cirkel, zie figuur 26.1. Door deze parameters te kiezen stelt men, impliciet, dat alleen de parameters  $\sigma$  en  $\tau$  van



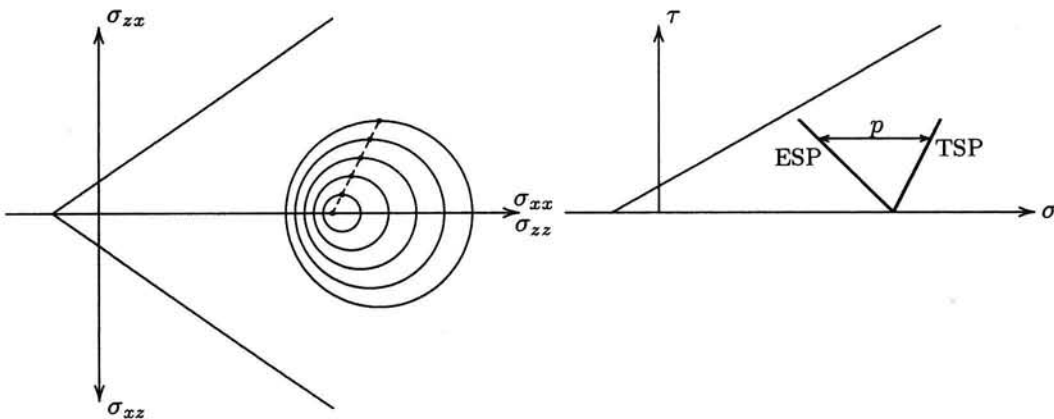
Figuur 26.1. Cirkel van Mohr en spanningspunt.

belang zijn om het grondgedrag te beschrijven, en dus niet de middelste hoofdspanning,

$\sigma_2$ , en ook niet de richting van de hoofdspansingen ten opzichte van de verticaal. In eerste benadering is dat wel redelijk, maar het is niet altijd echt waar.

Internationaal gebruikt men vaak de symbolen  $p$  en  $q$  in plaats van  $\sigma$  en  $\tau$ , en men spreekt dan van een  $p, q$ -diagram. Die conventie wordt hier niet gevolgd omdat  $p$  gebruikt wordt voor de waterdruk. In sommige landen geeft men de waterdruk aan met  $u$ , en is het symbool  $p$  dus bruikbaar voor de gemiddelde totaalspanning, maar in Nederland is het gebruikelijk de waterspanning aan te geven met  $p$ .

De spanningstoestand is in de rechterhelft van figuur 26.1 weergegeven in het  $\sigma - \tau$  diagram. Het komt er eigenlijk op neer dat men in plaats van de gehele cirkel van Mohr alleen de top ervan tekent. Als de spanningstoestand verandert, veranderen de waarden van  $\sigma$  en  $\tau$ , en verandert dus de plaats van het spanningspunt. Het doorlopen pad noemt men het spanningspad. Men kan zo'n spanningspad tekenen zowel voor de totaalspanningen als de effectieve spanningen (de korrelspanningen), in hetzelfde diagram. Het verschil is



Figuur 26.2. Spanningspaden.

uiteeraard de waterspanning, zie figuur 26.2. Het totaalspanningspad is aangegeven met TSP, het effectieve-spanningspad met ESP.

De mogelijke spanningstoestanden worden begrensd door het bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb, zie (20.12). In het diagram van Mohr is dat een rechte lijn waar de cirkels onder moeten blijven, zie de linkerhelft van figuur 26.2. Om de begrenzing van de spanningspaden te beschrijven kan men uitgaan van het criterium van Mohr-Coulomb, dat stelt dat bezwijken optreedt als de effectieve spanningen voldoen aan

$$\left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0. \quad (26.3)$$

In termen van  $\sigma$  en  $\tau$  is dat

$$\tau' = \sigma' \sin \phi + c \cos \phi. \quad (26.4)$$

Dat is de vergelijking van een rechte lijn in het  $\sigma, \tau$ -diagram. In de rechterhelft van figuur 26.2 is die rechte lijn ook getekend. Omdat hier iets andere parameters worden gebruikt als bij de cirkel van Mohr is de helling van de kritieke lijn niet  $\tan \phi$  maar  $\sin \phi$ , dat is iets flauwer dan de omhullende in het diagram van Mohr. Het stuk dat van de verticale as wordt afgesneden is niet  $c$ , zoals in het diagram van Mohr, maar  $c \cos \phi$ .

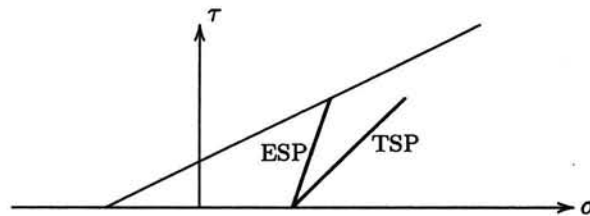
Opgemerkt moge worden dat sommige onderzoekers andere parameters gebruiken voor de beschrijving van de spanningen bij proeven en in het terrein. Zo gebruikt men vaak de

hoofdspanningen zelf als parameters. De voorstelling van de spanningspaden kan dan driedimensionaal worden. De hier gebruikte parameters sluiten gemakkelijk aan bij de weergave met behulp van de cirkel van Mohr. Ze worden tamelijk veel gebruikt voor de weergave van de spanningen in het terrein bij het aanbrengen van belastingen, en bij het weergeven van profresultaten.

## 26.2 Triaxiaalproef

Bij een normale triaxiaalproef wordt de celdruk constant gehouden, en dat is dan de kleinste hoofdspanning. Dan is dus  $\sigma_3$  constant. Tijdens het belasten neemt  $\sigma_1$  toe. Het spanningspad (voor de totaalspanningen) verloopt dan onder een hoek van  $45^\circ$ , zie figuur 26.3. Dat spanningspad kan men mathematisch beschrijven met de formule

$$\Delta\sigma_3 = 0 : \quad \Delta\tau = \Delta\sigma. \quad (26.5)$$



Figuur 26.3. Spanningspad bij triaxiaalproef.

Hoe het spanningspad van de korrelspanningen verloopt hangt af van de grootte van de waterspanningen. In hoofdstuk 24 is hiervoor gesteld dat men algemeen kan schrijven

$$\Delta p = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]. \quad (26.6)$$

waarin  $A$  en  $B$  de coëfficiënten van Skempton zijn. Men kan formule (26.6) ook schrijven als

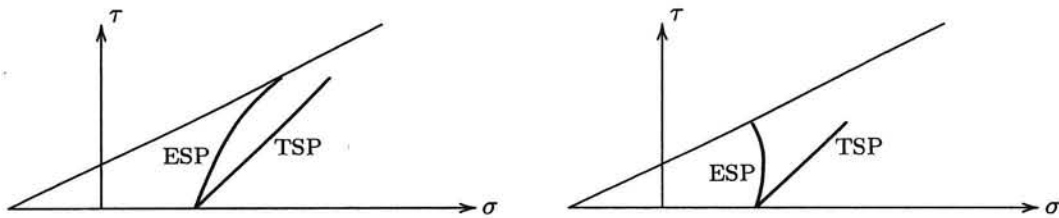
$$\Delta p = B[\Delta\sigma - (1 - 2A)\Delta\tau]. \quad (26.7)$$

In het geval van een triaxiaalproef vindt men dus

$$\Delta\sigma_3 = 0 : \quad \Delta p = 2BA\Delta\sigma. \quad (26.8)$$

Voor een volledig verzadigd ideaal elastisch materiaal geldt, als de samendrukbaarheid van het water wordt verwaarloosd (zie hoofdstuk 24), dat  $B = 1$  en  $A = \frac{1}{3}$ . De waterspanningstoename is dan  $\frac{2}{3}$  van de toename van  $\sigma$ . Dat volgt overigens ook direct uit formule (24.7). Het spanningspad voor de effectieve spanningen verloopt voor een dergelijk materiaal onder een helling 3 : 1, zie figuur 26.3.

In figuur 26.4 zijn de spanningspaden getekend voor een dilatant en een contractant materiaal. Als het materiaal dilatant is (dat wil zeggen dat het uitzet tijdens afschuiven) zijn de waterspanningen lager. Bij een contractant materiaal zijn de waterspanningen hoger. Men ziet dat dit betekent dat bij een contractant materiaal de bezwijktoestand eerder wordt bereikt. In de rechter grafiek zal al snel de bezwijklijn bereikt worden. Bij een contractant materiaal neemt de waterspanning toe doordat de isotrope spanning toeneemt, maar ook doordat bij de schuifvervorming een neiging tot volumeverkleining hoort. Dat kan meestal zo gauw niet, vooral niet als er geen drainage kan optreden, en dus loopt de waterspanning nog



Figuur 26.4. Spanningspaden bij triaxiaalproef op dilatant en contractant materiaal.

verder op. De twee effecten versterken elkaar. Omdat de waterspanningen extra snel toenemen neemt de isotrope korrelspanning  $\sigma'$  af, en daardoor treedt eerder bezwijken op. Een dilatant materiaal daarentegen is veel moeilijker tot bezwijken te brengen, zoals in figuur 26.4 is aangegeven in de linker grafiek. In dit geval werken de twee effecten (samendrukking en dilatantie) elkaar tegen. Doordat het materiaal wil uitzetten bij de schuifvorming, en dat zo gauw niet kan, neemt de waterspanning af (er ontstaat een zekere zuiging), en daardoor is de isotrope effectieve spanning  $\sigma'$  groter dan bij een niet-dilatant materiaal. Het ESP ligt meer naar rechts dan dat in figuur 26.3. De schuifsterkte (de maximaal mogelijke schuifspanning) neemt hierdoor ook toe. Men merkt dit bij de proef doordat de verticale belasting veel verder kan oplopen voordat bezwijken optreedt.

## 26.3 Voorbeeld

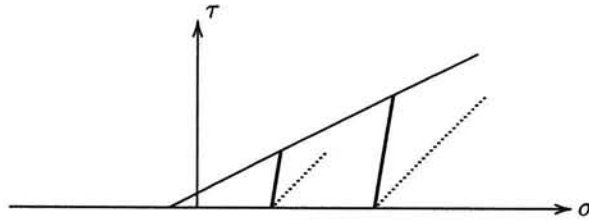
Ter illustratie zal het voorbeeld uit hoofdstuk 24 uitgewerkt worden met behulp van spanningspaden. De proefresultaten zijn ontleend aan tabel 24.1, maar ze zijn iets verder bewerkt,

Proef	$\sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3$	$p$	$\sigma_1$	$\sigma$	$\sigma'$	$\tau$
1	40	0	0	40	40	40	0
	40	10	4	50	45	41	5
	40	20	9	60	50	41	10
	40	30	13	70	55	42	15
	40	40	17	80	60	43	20
	40	50	21	90	65	44	25
	40	60	25	100	70	45	30
2	95	0	0	95	95	95	0
	95	20	8	115	105	97	10
	95	40	17	135	115	98	20
	95	60	25	155	125	100	30
	95	80	33	175	135	102	40
	95	100	42	195	145	103	50
	95	120	50	215	155	105	60

Tabel 26.1. Proefresultaten.

om er de waarden van  $\sigma$ ,  $\sigma'$  en  $\tau$  uit af te leiden, zie tabel 26.1.

De spanningspaden voor de twee proeven zijn getekend in figuur 26.5. De paden voor de totaalspanningen zijn gestippeld getekend, die voor de effectieve spanningen zijn volgetrokken. De twee eindpunten van de effectieve-spanningspaden bepalen de kritieke lijn.



Figuur 26.5. Spanningspaden bij triaxiaalproef.

Volgens vergelijking (26.4) liggen de kritieke punten van de spanningspaden voor de effectieve spanning op een rechte lijn

$$\tau' = a\sigma' + b, \quad (26.9)$$

met  $a = \sin \phi$  en  $b = c \cos \phi$ . In dit geval is bekend dat er twee kritieke punten zijn:  $\sigma' = 45 \text{ kPa}$ ,  $\tau = 30 \text{ kPa}$  en  $\sigma' = 105 \text{ kPa}$ ,  $\tau = 60 \text{ kPa}$ . Substitueert men deze twee paren in (26.9) dan krijgt men twee vergelijkingen met twee onbekenden:  $a$  en  $b$ . Men vindt dan  $a = 0.5$  en  $b = 7.5 \text{ kPa}$ . Hieruit volgt  $\phi = 30^\circ$  en  $c = 8.7 \text{ kPa}$ . Deze waarden zijn in overeenstemming met die gevonden in hoofdstuk 24.

#### Opgaven

**26.1** In een triaxiaalapparaat kan men ook proeven doen waarbij aan het monster in verticale richting getrokken wordt, bij constante celdruk. Men noemt dat een extensie-proef. Teken het spanningspad voor de totaalspanningen bij zo'n proef.

**26.2** Teken voor de proef uit de vorige opgave ook de spanningspaden voor de korrelspanningen, voor een ideaal elastisch materiaal, voor een contractant materiaal, en voor een dilatant materiaal.

## Hoofdstuk 27

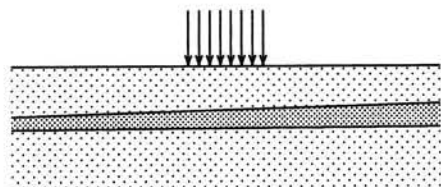
# ELASTISCHE BEREKENINGEN

Een belangrijke klasse van problemen uit de grondmechanica is de berekening van spanningen en vervormingen in een grondmassief ten gevolge van een daarop aangebrachte belasting. Dat kan een weglichaam zijn, of een dijk, of de fundering van een gebouw. In de offshore techniek kan de belasting worden veroorzaakt door het plaatsen van een zwaar caisson. De belasting komt vaak van het gewicht van de geplaatste constructie, maar kan ook worden veroorzaakt door verkeer, opgestapelde goederen, golfbelastingen, etc. De spanningen die door de belasting in de grond worden veroorzaakt moeten worden berekend om te kunnen beoordelen of de grond voldoende stabiliteit kan bieden, en of de vervormingen niet al te groot worden. De spanningen moeten binnen het bezwijkcriterium (Mohr-Coulomb) blijven, anders bezwijkt de grond. Als dat het geval is kan het nog zijn dat de bijbehorende vervormingen onaanvaardbaar groot zijn. Men moet dus niet alleen de spanningen kunnen berekenen, maar ook de vervormingen.

### 27.1 Berekening van spanningen en vervormingen

Een berekening van spanningen en vervormingen moet in het algemeen gebaseerd zijn op de volgende drie typen van vergelijkingen: evenwichtsvergelijkingen, constitutieve vergelijkingen (de relaties tussen spanningen en vervormingen), en compatibiliteitsvergelijkingen. In het geval van het materiaal grond is de moeilijkheid dat de constitutieve vergelijkingen zo gecompliceerd zijn. Het niet-lineaire gedrag, zowel bij compressie als bij distorsie, moet daarin tot uitdrukking worden gebracht, evenals de mogelijke tijdsafhankelijkheid en dilatantie of contractantie. Daarbij komt dan nog dat grond vaak anisotroop is, dat wil zeggen dat de eigenschappen in verticale richting vaak anders zijn dan die in horizontale richting. De berekening van de echte spanningen en vervormingen is een schier onmogelijke opgave, waarvoor geavanceerde numerieke modellen ontwikkeld zijn, en nog worden. Dergelijke numerieke modellen, vaak gebaseerd op de methode der *eindige elementen*, worden in de praktijk meer en meer toegepast, en verwacht mag worden dat het gebruik ervan nog zal toenemen.

Voor een introductie in de berekeningsmethoden zal hier de problematiek zo eenvoudig mogelijk gehouden worden, en zal volstaan worden met elastische berekeningen. Dat wil zeggen dat aangenomen wordt dat het verband tussen spanningen en vervormingen beschreven



Figuur 27.1. Bovenbelasting.

wordt door de wet van Hooke. Men stelt dan dus eigenlijk dat grond, bij wijze van eerste benadering, isotroop is en lineair-elastisch. Dat is verre van juist, maar er is toch wel enige rechtvaardiging voor te geven, althans voor de aldus berekende spanningen. De gedachte daarbij is dat het voor de spanningen in een grondlichaam ten gevolge van een bovenbelasting, zie figuur 27.1, waarschijnlijk niet veel uitmaakt wat de precieze eigenschappen van het materiaal zijn. Maakt men een berekening op basis van de elasticiteitstheorie dan



is in elk geval voldaan aan het evenwicht, terwijl het veld van vervormingen en verplaatsingen voldoet aan de compatibiliteitsvergelijkingen. Wel zal verwacht moeten worden dat de berekende vervormingen niet zo betrouwbaar zijn, omdat daarvoor de spanning-rek-relaties zo essentieel zijn.

Verschillende onderzoekers hebben de hierboven beschreven benadering geverifieerd. Zo zijn er bijvoorbeeld elastische berekeningen gemaakt voor anisotrope materialen, en voor gelaagde materialen, en ook zijn er vele elasto-plastische berekeningen gemaakt. Als de grondeigenschappen niet al te sterk in de diepte variëren blijken vooral de verticale normaalspanningen steeds tamelijk weinig af te wijken van die berekend voor een homogeen isotroop elastisch lichaam. De horizontale spanningen zijn wel tamelijk sterk afhankelijk van de eigenschappen van het materiaal. En de vervormingen en verplaatsingen hangen uiteraard zeer sterk af van de materiaaleigenschappen gebruikt in de berekeningen. Een gelukkige omstandigheid is dat de verticale normaalspanningen vaak de belangrijkste te berekenen grootheden zijn, en die blijken het minst afhankelijk te zijn van de materiaaleigenschappen.

Soms berekent men de spanningen uitgaande van de elasticiteitstheorie, en berekent dan later de vervormingen en verplaatsingen uit die spanningen met behulp van een realistisch niet-lineair verband tussen spanningen en vervormingen. Theoretisch is dat eigenlijk onverantwoord, omdat men dan geen rekening kan houden met compatibiliteit, maar voor de praktijk is het wel een handige en nuttige aanpak. Het komt er op neer dat men bijvoorbeeld voor een gelaagde grond de spanningen berekent als ware de grond homogeen, vervolgens van elke laag de verticale vervorming berekent met behulp van Terzaghi's logaritmische formule, of met een andere realistische formule. Tenslotte sommeert men dan alle verticale vervormingen om de totale zetting te vinden. Deze procedure zal worden uitgewerkt in hoofdstuk 31.

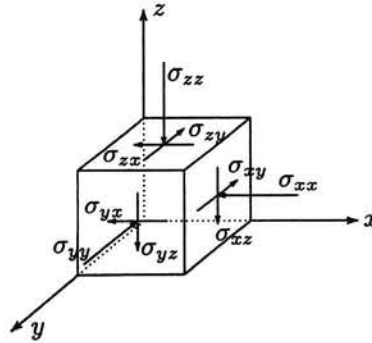
## 27.2 Elasticiteitstheorie

Voor de berekening van spanningen en vervormingen in een homogeen, isotroop, lineair elastisch materiaal bestaan diverse methoden. Voor de algemene theorie wordt verwezen naar leerboeken over elasticiteitstheorie. Hier zal worden volstaan met het geven van de basisvergelijkingen, en, in de volgende hoofdstukken, van een aantal belangrijke oplossingen, zonder op de details van de afleidingen in te gaan. Voor de afleiding van een aantal elementaire oplossingen wordt verwezen naar Appendix B.

In dit hoofdstuk, en de volgende, worden steeds de spanningen en vervormingen berekend ten gevolge van een bijkomende belasting. Het gaat dus steeds om incrementele spanningen en vervormingen. Om de werkelijke spanningen te vinden moet men de beginspanningen er nog bij optellen. Aangenomen wordt dat in die beginspanningen het eigen gewicht van de grond al is verdisconteerd. Dat betekent dat men voor de incrementele spanningen het eigen gewicht van het materiaal kan verwaarlozen. Er zijn dus geen massakrachten.

Voor een elementair blokje zijn de spanningen op de drie zichtbare vlakjes getekend in figuur 27.2. De evenwichtsvergelijkingen in de drie richtingen zijn

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{27.1}$$



Figuur 27.2. Spanningen op elementair blokje.

Op grond van het momentenevenwicht moet de spanningstensor symmetrisch zijn,

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \sigma_{yx}, \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy}, \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz}.\end{aligned}\tag{27.2}$$

De evenwichtsvergelijkingen vormen een stelsel van zes vergelijkingen met negen variabelen. Dat kan op zichzelf nooit oplosbaar zijn, en men zal dus ook de vervormingen en de verplaatsingen moeten beschouwen om tot een oplossing te komen.

Voor een lineair elastisch materiaal wordt het verband tussen spanningen en vervormingen gegeven door de wet van Hooke,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -\frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})],\end{aligned}\tag{27.3}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yz} &= -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz}, \\ \varepsilon_{zx} &= -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{zx}.\end{aligned}\tag{27.4}$$

Het minteken in deze vergelijkingen is nodig in verband met de afwijkende tekenafpraak voor de spanningen. Drukspanningen worden immers positief gerekend, terwijl voor de vervormingen vastgehouden is aan de gebruikelijke afspraak dat verlengingen positief zijn. De vergelijkingen (27.3) en (27.4) voegen zes vergelijkingen aan het stelsel toe, onder invoering van zes nieuwe variabelen.

De zes vervormingen kunnen worden afgeleid van de drie componenten van de verplaatsingsvector,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z},\end{aligned}\tag{27.5}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{27.6}$$

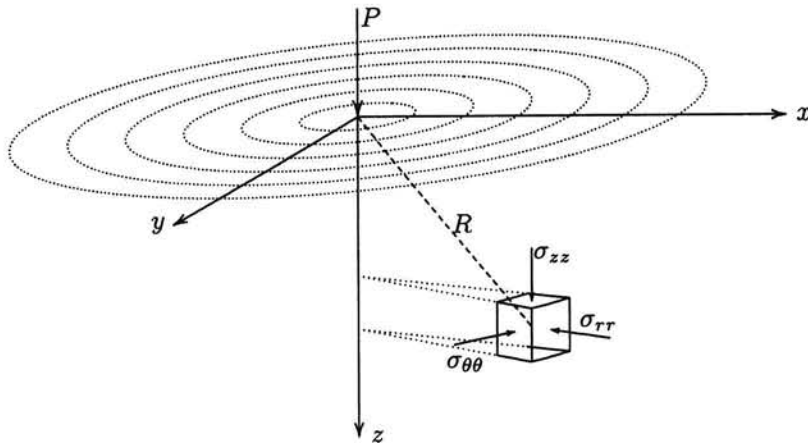
Dit noemt men de compatibiliteitsvergelijkingen. Er zijn nu in totaal even veel vergelijkingen als variabelen, en het stelsel is in principe oplosbaar, als er tenminste ook voldoende randvoorwaarden gegeven zijn.

Oplossingen van de gegeven vergelijkingen voor een groot aantal problemen kunnen worden gevonden in de literatuur over elasticiteitstheorie. Voor de grondmechanica zijn vooral van belang de oplossingen voor half-oneindige ruimtes met een horizontaal bovenvlak, en belasting op dat oppervlak. Een aantal oplossingen van dergelijke problemen wordt beschreven in Appendix B. Om de daar gebruikte formules in overeenstemming te houden met de uitgebreide literatuur op dit gebied, is daar voor de spanningen het symbool  $\tau$  gebruikt, met de in de mechanica gebruikelijke tekenafspraken dat trekspanningen positief zijn. In de hoofdstukken hierna wordt een aantal belangrijke eigenschappen van deze oplossingen gepresenteerd.

## Hoofdstuk 28

### BOUSSINESQ

Door Boussinesq is in 1885 een oplossing gevonden voor de spanningen en vervormingen in een homogene isotrope lineair-elastische halfruimte, belast door een verticale puntlast op het oppervlak, zie figuur 28.1. Voor de afleiding van de oplossing en nadere details zie



Figuur 28.1. Puntlast op halfruimte.

men Appendix B, of een leerboek of handboek over de elasticiteitstheorie (bijvoorbeeld S.P. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, paragraaf 123). Voor de spanningen zijn de volgende formules gevonden.

$$\sigma_{zz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}, \quad (28.1)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3r^2 z}{R^5} - (1 - 2\nu) \frac{1}{R(R+z)} \right], \quad (28.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2\pi} \frac{1 - 2\nu}{R^2} \left( \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right), \quad (28.3)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{R^5}. \quad (28.4)$$

Hierin is  $r$  de cylindercoördinaat,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (28.5)$$

en  $R$  de bolcoördinaat,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (28.6)$$

Voor de verplaatsingen worden de volgende formules gevonden.

$$u_r = \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[ \frac{r^2 z}{R^3} - (1-2\nu) \left(1 - \frac{z}{R}\right) \right], \quad (28.7)$$

$$u_\theta = 0, \quad (28.8)$$

$$u_z = \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[ 2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right]. \quad (28.9)$$

Vooral de zakking van het oppervlak is interessant. Men vindt hiervoor

$$z = 0 : \quad u_z = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi ER}. \quad (28.10)$$

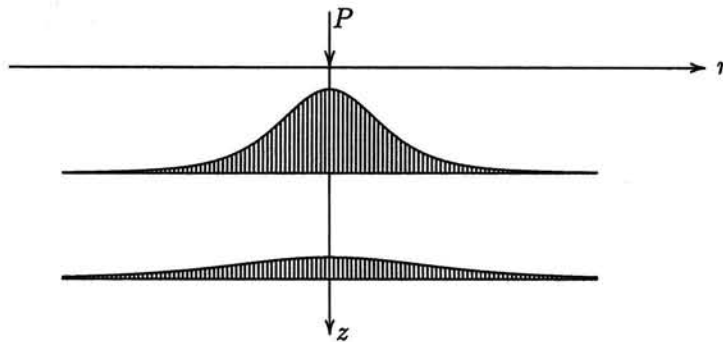
Voor  $R \rightarrow 0$  wordt dit oneindig groot. Het punt precies onder de puntlast verplaatst oneindig veel. Dit singuliere gedrag is een gevolg van de singulariteit in de oppervlaktebelasting. In de oorsprong is de belasting eigenlijk oneindig groot. Dat de verplaatsing daar dan ook erg groot wordt is niet zo verwonderlijk.

Interessant is ook het verloop van de spanningen in de diepte, precies onder de puntlast, dat is voor  $r = 0$ . Men vindt hiervoor

$$r = 0 : \quad \sigma_{zz} = \frac{3P}{2\pi z^2}, \quad (28.11)$$

$$r = 0 : \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -(1-2\nu) \frac{P}{4\pi z^2}. \quad (28.12)$$

Uiteraard worden deze spanningen met de diepte steeds kleiner. Zeer globaal stelt men in de praktijk soms wel dat de belasting zich spreidt onder een hoek van  $45^\circ$ . Dat zou betekenen dat op een diepte  $z$  een verticale spanning zou optreden groot  $P/\pi z^2$ , over een cirkel met straal  $z$ . Dat blijkt niet goed te zijn (50 % fout als  $r = 0$ ), maar de tendens is wel redelijk. De spanningen nemen immers inderdaad af met een factor  $1/z^2$ .

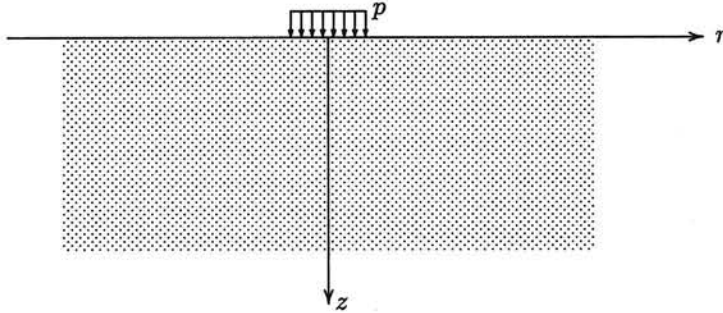


Figuur 28.2. Verticale normaalspanning  $\sigma_{zz}$ .

In figuur 28.2 is het verloop van de verticale normaalspanning  $\sigma_{zz}$  getekend, als functie van de poolcoördinaat  $r$ , voor twee waarden van de diepte  $z$ .

De aanname dat het materiaal lineair elastisch is brengt met zich mee dat superpositie van oplossingen mogelijk is. Zo kan men de oplossing van Boussinesq gebruiken als uitgangspunt voor meer algemene belastingen, bijvoorbeeld een stelsel van puntlasten, of een belasting verdeeld over een zeker oppervlak.

Bij wijze van voorbeeld kan men het geval beschouwen van een gelijkmatig verdeelde belasting, ter grootte  $p$ , over een cirkelvormig gebied, met straal  $a$ . De oplossing voor dat geval kan men vinden door integratie over een cirkelvormig oppervlak (S.P. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, paragraaf 124), zie figuur 28.3. Voor de spanningen langs de as  $r = 0$ ,



Figuur 28.3. Gelijkmatige belasting op cirkelvormig gebied.

d.w.z. midden onder de belasting, vindt men

$$r = 0 : \sigma_{zz} = p\left(1 - \frac{z^3}{b^3}\right), \quad (28.13)$$

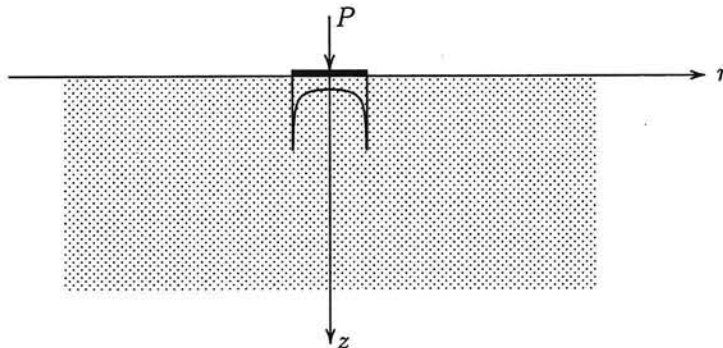
$$r = 0 : \sigma_{rr} = p\left[(1 + \nu)\frac{z}{b} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^3}{b^3}\right)\right], \quad (28.14)$$

waarin  $b = \sqrt{z^2 + a^2}$ . Voor de zakking van de oorsprong vindt men

$$r = 0, z = 0 : u_z = 2(1 - \nu^2)\frac{pa}{E}. \quad (28.15)$$

Van deze oplossing zal in het volgende hoofdstuk nog een nuttig gebruik gemaakt worden.

Een ander belangrijk geval waarvan de oplossing reeds door Boussinesq is afgeleid (zie ook Timoshenko) betreft de belasting van een halfruimte door een oneindig stijve cirkelvormige plaat, die een kracht  $P = \pi a^2 \bar{p}$  overbrengt, zie figuur 28.4. De verdeling van de



Figuur 28.4. Stijve plaat op halfruimte.

normaalspanningen direct onder de plaat is

$$z = 0, 0 < r < a : \quad \sigma_{zz} = \frac{\frac{1}{2}\bar{p}}{\sqrt{1 - r^2/a^2}}. \quad (28.16)$$

Die spanningsverdeling is in figuur 28.4 ook getekend. Aan de rand van de plaat zijn de spanningen oneindig groot. Dat wordt veroorzaakt door de als constant opgelegde verplaatsing. In werkelijkheid zal het materiaal in de buurt van de rand bezwijken, en zal de spanning niet oneindig groot worden. Toch kan men wel algemeen stellen dat bij een zeer stijve fundering de krachtsoverdracht naar de grond zich concentreert bij de rand. Het midden van de plaat zakt wel mee zonder dat daar veel spanningen voor nodig zijn.

De zakking van de plaat is

$$z = 0, 0 < r < a : \quad u_z = \frac{\pi}{2}(1 - \nu^2)\frac{\bar{p}a}{E}. \quad (28.17)$$

Vergelijkt men dit met de zakking midden onder een gelijkmatig verdeelde belasting, zie (28.15), dan blijkt de stijve plaat iets minder te zakken, althans in het midden, zoals ook wel te verwachten was.

### Opgaven

**28.1** Een cirkelvormig gebied wordt belast met een gelijkmatig verdeelde belasting  $p$ . Men benadert de spanningsverdeling door aan te nemen dat de verticale normaalspanning  $\sigma_{zz}$  zich onder een hoek van  $45^\circ$  spreidt. Hoe verlopen dan de spanningen midden onder de belasting? Vergelijk het resultaat met formule (28.13), die voor een elastisch medium geldt.

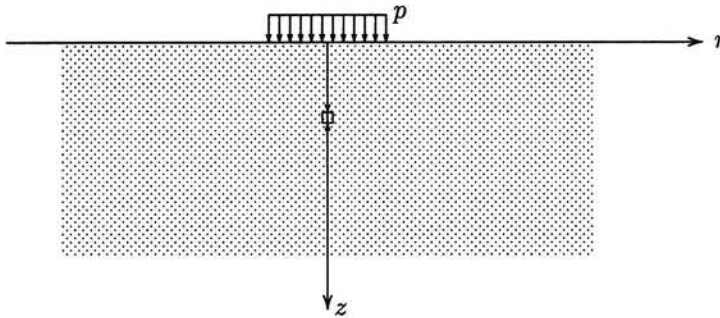
**28.2** Leid uit de in de vorige opgave gevonden uitdrukking met behulp van de relaties  $\varepsilon = \sigma/E$  en  $\varepsilon = \partial u_z / \partial z$  een benadering af voor de zakking van het oppervlak en vergelijk het resultaat met formule (28.15).

**28.3** In de praktijk werkt men voor een belaste plaat vaak met een zogenaamde beddingsconstante. Men stelt dan  $u_z = p/c$ . Hoe zou men nu de beddingsconstante  $c$  kunnen relateren aan de elasticiteitsmodulus  $E$ ?

## Hoofdstuk 29

### NEWMARK

Door Newmark is een handige methode ontwikkeld om de verticale normaalspanningen ten gevolge van een willekeurige belasting op het oppervlak van een elastische halfruimte te bepalen. Het uitgangspunt van deze methode is formule (28.13) voor de spanning midden onder een gelijkmatig verdeelde belasting  $p$  over een cirkelvormig gebied, zie figuur 29.1. Deze formule kan ook geschreven worden als



Figuur 29.1. Gelijkmatige belasting op cirkelvormig gebied.

$$r = 0 : \quad \frac{\sigma_{zz}}{p} = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2/z^2)^3}} \quad (29.1)$$

Op basis van deze formule kan men vrij eenvoudig tabel 29.1 maken, door te berekenen voor

$a/z$	$\sigma_{zz}/p$
0.0000	0.0
0.2698	0.1
0.4005	0.2
0.5181	0.3
0.6370	0.4
0.7664	0.5
0.9176	0.6
1.1097	0.7
1.3871	0.8
1.9083	0.9
$\infty$	1.0

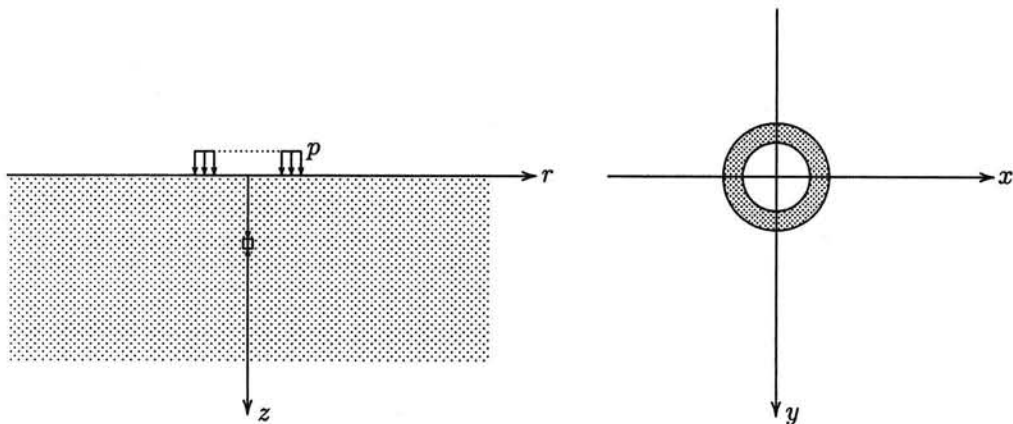
Tabel 29.1. Verticale spanningen onder cirkelvormige belasting.

welke waarde van  $a/z$  de spanning  $\sigma_{zz}$  juist een geheel aantal tienden van de belasting  $p$



is. Stelt men bijvoorbeeld  $\sigma_{zz}/p = 0.5$  dan vindt men uit (29.1) dat  $a/z$  gelijk moet zijn aan 0.7664. Alle waarden uit de tabel laten zich zo eenvoudig verifiëren met behulp van formule 29.1. De eerste waarde stelt dat een ring met straal 0 tot een spanning  $\sigma_{zz} = 0$  leidt, en de laatste waarde stelt dat bij een belasting over het volledige oppervlak de verticale spanning  $\sigma_{zz}$  op een diepte  $z$  altijd  $p$  is. Dat is ook allemaal tamelijk logisch.

Uit de waarden gegeven in de tabel kan men verder concluderen dat bijvoorbeeld bij een belasting over een cirkel met straal 0.7664  $z$  de spanning  $\sigma_{zz}$  op een diepte  $z$  gelijk is aan  $0.5 p$ , en dat bij een belasting over een cirkel met straal 0.9176  $z$  die spanning gelijk is aan  $0.6 p$ . De toename met  $0.1 p$  moet wel het gevolg zijn van de belasting die er bij is gekomen, dat is de belasting over het ringvormige gebied tussen de twee cirkels, met straal 0.7664  $z$  en 0.9176  $z$ , zie figuur 29.2. Men kan dus stellen dat elke ringvormige belasting



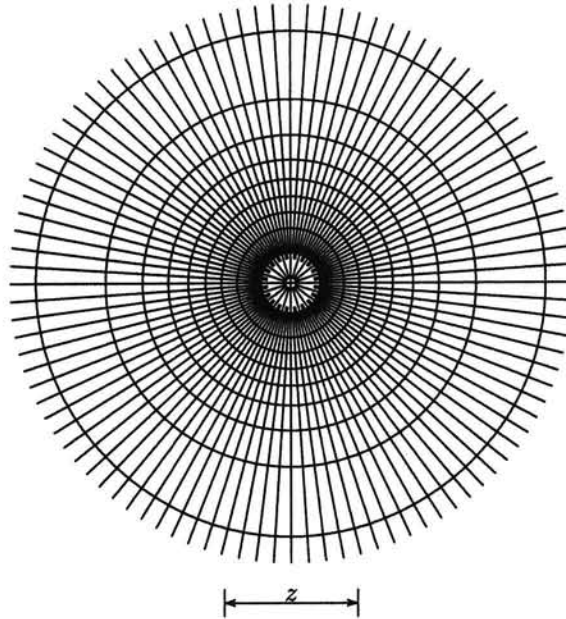
Figuur 29.2. Gelijkmatische belasting op ring.

precies tussen twee van de opvolgende cirkels aangegeven in tabel 29.1 leidt tot een spanning  $\sigma_{zz} = 0.1 p$  in het punt op diepte  $z$  juist onder de oorsprong. Verdeelt men elke ring nog eens in een groot aantal sectoren, bijvoorbeeld 100, dan volgt dat de belasting op elk van die elementaire oppervlakjes juist  $0.001 p$  bijdraagt tot de spanning  $\sigma_{zz}$ . Op deze wijze kan men de *Zon van Newmark* construeren, zie figuur 29.3. Een belasting ter grootte  $p$  op elk van de duizend vakjes in deze figuur leidt tot een spanning  $\sigma_{zz} = 0.001 p$ , in het punt op een diepte  $z$  onder de oorsprong.

In figuur 29.3 zijn voor de duidelijkheid binnen de kleinste cirkel de stralen niet allemaal volledig doorgetrokken, omdat ze elkaar allemaal in de oorsprong snijden, en er dan daar een grote zwarte vlek zou ontstaan. Men bedenke wel dat de binnenste ring, binnen de kleinste cirkel, in totaal ook 100 vakjes bevat. Sommige van de stralen moet men er gedeeltelijk bijdenken. Aan de buitenkant lopen de stralen eigenlijk door tot in het oneindige.

Het principe van de toepassing van de *Zon van Newmark* is dat men uitgaat van het gegeven dat een belasting ter grootte  $p$  op een willekeurig rechthoekje in het punt op een diepte  $z$  onder de oorsprong leidt tot een spanning  $\sigma_{zz} = 0.001 p$ . Dat geldt voor elk rechthoekje, en omdat het een lineair probleem betreft mag men de spanning ten gevolge van verschillende belastingen superponeren. Dat betekent dat een belasting  $p$  op een gebied dat  $n$  van die rechthoekjes omvat leidt tot een spanning  $\sigma_{zz}$  op een diepte  $z$  onder de oorsprong groot  $\sigma_{zz} = n \times 0.001 p$ .

De waarde van de diepte  $z$  speelt een speciale rol in de methodiek. Deze bepaalt eigenlijk de schaal van het probleem in het horizontale vlak. Als men de spanning wil weten op een



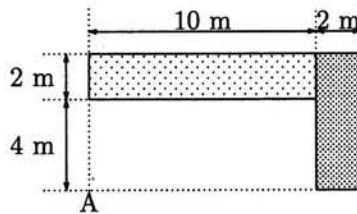
Figuur 29.3. Zon van Newmark.

dieper punt, dan is de waarde van  $z$  groter, en wordt de grootte van het belaste gebied in de figuur kleiner. Dat bedekt dan minder rechthoekjes, en men vindt, zoals verwacht, een lagere spanning. Een voorbeeld zal dat duidelijker maken.

Men kan de methode zelfs gebruiken voor belastingen die niet overal gelijk zijn. In dat geval moet men bij het tellen van de rechthoekjes rekening houden met de lokale belasting, als een vermenigvuldigingsfactor. Ook dit zal duidelijker worden bij de uitwerking van een voorbeeld.

### Voorbeeld

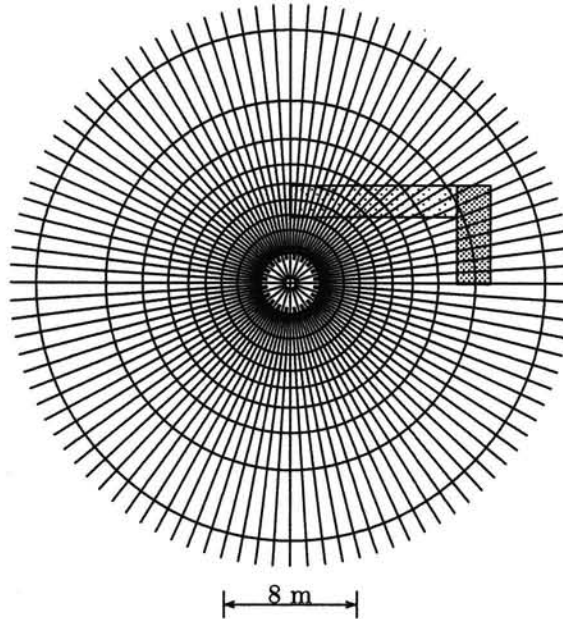
Als voorbeeld wordt beschouwd het geval van een belasting op een L-vormig gebied, zie figuur 29.4. Op de korte poot is de belasting 15 kPa, en op de lange poot 5 kPa. Ge-



Figuur 29.4. Voorbeeld.

vraagd wordt de spanning op een diepte van 8 m onder het punt A. Men tekent daartoe de plattegrond op een zodanige schaal dat de referentie-maat  $z$  in het diagram van Newmark overeenkomt met 8 m, zie figuur 29.5, en het punt A in de oorsprong ligt. De korte poot van de L bedekt nu ongeveer 7 vakjes, en de lange poot ongeveer 34 vakjes. Dit betekent dat men voor de spanning vindt

$$\sigma_{zz} = 7 \times 0.001 \times 15 \text{ kPa} + 34 \times 0.001 \times 5 \text{ kPa} = 0.275 \text{ kPa}.$$



Figuur 29.5. Uitwerking voorbeeld.

Als de diepte waarop men de spanning  $\sigma_{zz}$  wil bepalen groter is, bijvoorbeeld 16 m, dan moet het oppervlak half zo groot getekend worden. Dat bedekt dan minder vierkantjes, en men vindt een kleinere spanning.

### Opgaven

**29.1** Bereken in het voorbeeld hierboven de verticale normaalspanning op een diepte van 8 m onder het hoekpunt rechtsboven in de plattgrond.

**29.2** Bereken ook uit de Zon van Newmark de spanning in dat hoekpunt precies op het oppervlak (voor  $z = 0$ ). Bereken ook de spanning in het punt A op het oppervlak. Hoe groot is de spanning op 8000 m diepte?

**29.3** Een vierkant gebied met afmetingen van 4 m bij 4 m wordt belast door een gelijkmatige spanning van 10 kPa. Bereken de spanning op een diepte van 4 m in een aantal karakteristieke punten : onder het midden, onder een hoekpunt en onder het midden van een zijde.

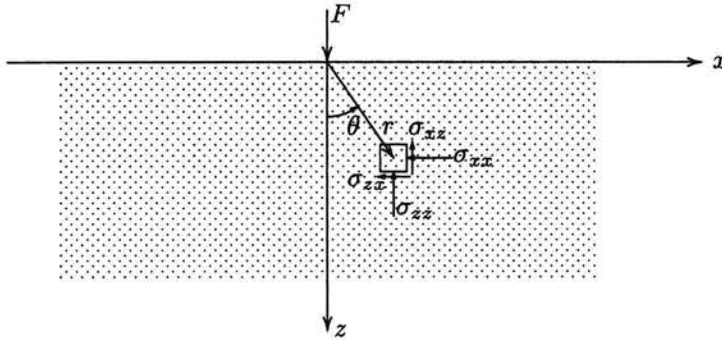
**29.4** Als men uitgaat van de (foutieve) hypothese dat de spanningen zich spreiden onder een hoek van  $45^\circ$  kan men ook een figuur als de Zon van Newmark tekenen. Worden dan de spanningen onderschat of overschat?

**29.5** Voor de constructie van de Zon van Newmark is uitgegaan van formule (28.13) voor de spanning  $\sigma_{zz}$  midden onder een gelijkmatig verdeelde belasting  $p$  over een cirkelvormig gebied. Formule (28.14) geeft de spanning  $\sigma_{rr}$  voor dat zelfde basisgeval. Kan men voor dat geval ook een Zon van Newmark maken, die dan de horizontale spanning geeft bij een belasting over een willekeurig oppervlak?

## Hoofdstuk 30

### FLAMANT

Door Flamant is in 1892 de oplossing gevonden voor het geval van een verticale lijnlast op een homogene isotrope lineair elastische halfruimte, zie figuur 30.1. Dit is het tweedimensionale



Figuur 30.1. Probleem van Flamant.

equivalent van het probleem van Boussinesq. Men kan het ook zien als een superpositie van een groot aantal (oneindig veel) puntlasten, gelijkmatig verdeeld over de  $y$ -as. Voor een afleiding van de oplossing van Flamant zie men bijvoorbeeld Appendix B.

In dit geval vindt men voor de spanningen in het  $x, z$ -vlak

$$\sigma_{zz} = \frac{2F}{\pi} \frac{z^3}{r^4} = \frac{2F}{\pi r} \cos^3 \theta, \quad (30.1)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2F}{\pi} \frac{x^2 z}{r^4} = \frac{2F}{\pi r} \sin^2 \theta \cos \theta, \quad (30.2)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{2F}{\pi} \frac{x z^2}{r^4} = \frac{2F}{\pi r} \sin \theta \cos^2 \theta. \quad (30.3)$$

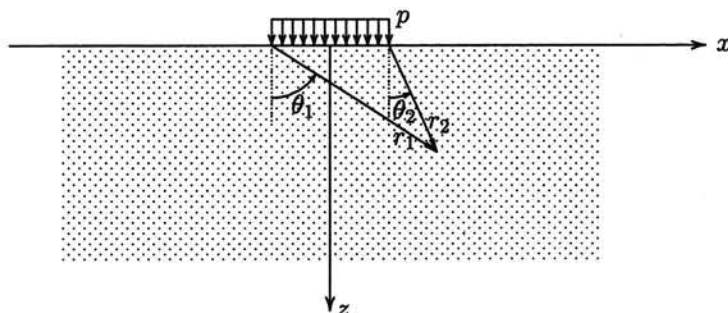
Hierin is  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . De grootte  $F$  heeft de dimensie kracht/lengte, zodat  $F/r$  de dimensie van een spanning heeft.

Voor de verplaatsingen zijn ook uitdrukkingen bekend, maar die bevatten singuliere termen, met een factor  $\ln r$ , die wordt oneindig in de oorsprong en op het oneindige. Die uitdrukkingen zijn daardoor voor de praktijk minder nuttig.

Ook op basis van de oplossing van Flamant kan men door superpositie andere belangrijke resultaten verkrijgen. Bekend is het geval van een stripvormige belasting ter grootte  $p$ , over een breedte  $2a$ , zie figuur 30.2. Men vindt voor dit geval

$$\sigma_{zz} = \frac{p}{\pi} [(\theta_1 - \theta_2) + \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2], \quad (30.4)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{p}{\pi} [(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2], \quad (30.5)$$



Figuur 30.2. Stripbelasting.

$$\sigma_{xz} = \frac{p}{\pi} [\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1]. \quad (30.6)$$

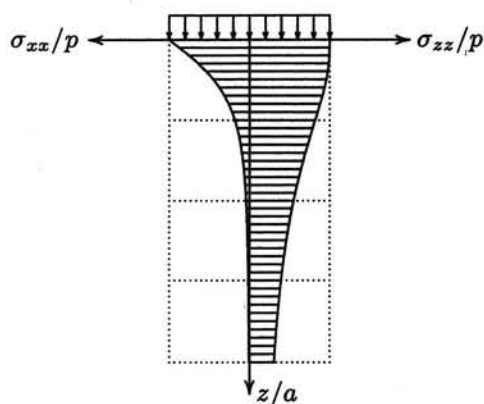
Midden onder de belasting, voor  $x = 0$ , is  $\theta_2 = -\theta_1$ . Men vindt dan

$$x = 0 : \sigma_{zz} = \frac{2p}{\pi} [(\theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1), \quad (30.7)$$

$$x = 0 : \sigma_{xx} = \frac{2p}{\pi} [(\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1), \quad (30.8)$$

$$x = 0 : \sigma_{xz} = 0. \quad (30.9)$$

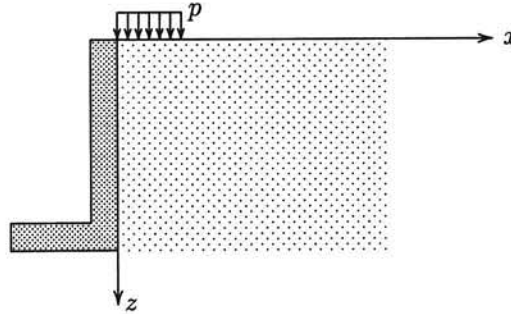
Dat de schuifspanning  $\sigma_{xz}$  midden onder de belasting 0 is, is in overeenstemming met de symmetrie voor dit geval. De normaalspanningen  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{zz}$  zijn als functie van de diepte getekend in figuur 30.3. Uiteraard gaan beide spanningen naar nul als  $z \rightarrow \infty$ , maar de horizontale normaalspanning blijkt veel sneller naar nul te gaan als de verticale normaalspanning. Ook blijkt dat op het oppervlak de horizontale spanning gelijk is aan de verticale spanning, en die laatste is natuurlijk gelijk aan de belasting  $p$ , dat is een randvoorwaarde.

Figuur 30.3. Spanningen voor  $x = 0$ .

Zoals gezien leidt de symmetrie van het probleem getekend in figuur 30.2 tot het resultaat dat  $\sigma_{xz} = 0$  langs de symmetrie-as  $x = 0$ . Hetzelfde geldt voor de horizontale verplaatsing. Voor  $x = 0$  zal ook  $u_x = 0$ . Dat betekent dat men deze oplossing ook kan gebruiken voor het geval bestaande uit alleen de rechterhelft van de halfruimte, met als randvoorwaarden aan de rand  $x = 0$  dat daar  $u_x = 0$  en  $\sigma_{xz} = 0$ . Die randvoorwaarden zullen gelden als de rand  $x = 0$  gevormd wordt door een niet-verplaatsbare stijve wand, die tevens zo glad is dat er geen schuifspanningen kunnen worden overgebracht. Dit geval is getekend in figuur 30.4.

De formules (30.7) en (30.8) kan men ook schrijven als

$$x = 0 : \sigma_{zz} = \frac{2p}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{a}{z}\right) + \frac{az}{a^2 + z^2} \right], \quad (30.10)$$



Figuur 30.4. Stripbelasting naast gladde wand.

$$x = 0 : \sigma_{xx} = \frac{2p}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{a}{z}\right) - \frac{az}{a^2 + z^2} \right]. \quad (30.11)$$

Integratie van de horizontale spanningen  $\sigma_{xx}$  van  $z = 0$  tot  $z = -h$  geeft de totale horizontale kracht op een wand met totale hoogte  $h$ ,

$$Q = \frac{2}{\pi} ph \arctan\left(\frac{a}{h}\right). \quad (30.12)$$

Voor een zeer diepe wand vindt men, omdat dan  $\arctan(a/h) \approx a/h$ ,

$$h \rightarrow \infty : Q = \frac{2}{\pi} pa = 0.637 pa. \quad (30.13)$$

De grootte  $pa$  is de totale verticale belasting  $F$  (per eenheid van lengte loodrecht op het vlak van tekening). Blijkbaar is de horizontale reactie in een elastisch materiaal  $0.637 F$ .

Voor een zeer ondiepe wand vindt men, omdat dan  $\arctan(a/h) \approx \pi/2$ ,

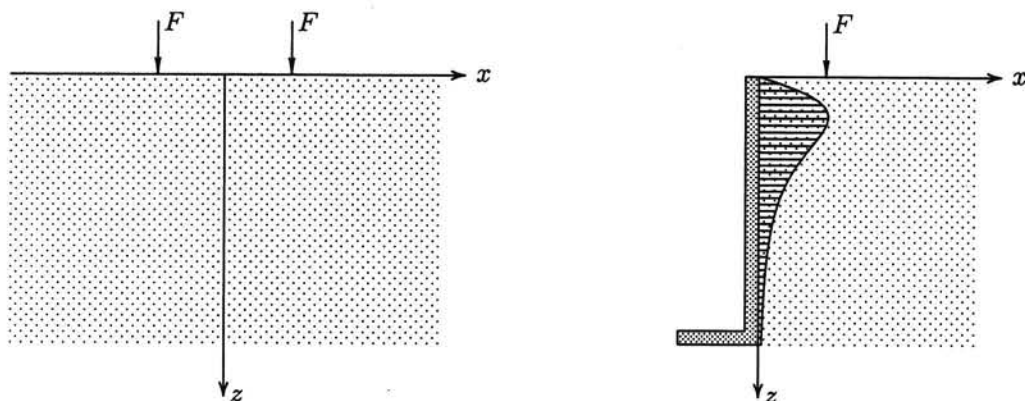
$$h \rightarrow 0 : Q = ph. \quad (30.14)$$

Dit is in overeenstemming met de waarde van de horizontale spanning aan de bovenzijde ( $\sigma_{xx} = p$ ). Voor een heel kort wandje zal de kracht gelijk zijn aan de spanning aan de bovenkant, vermenigvuldigd met de hoogte van het wandje.

Een andere interessante toepassing van de oplossing van Flamant met behulp van symmetrie is getekend in figuur 30.5. Bij een belasting door twee puntlasten kan men verwachten dat op de symmetrie-as de horizontale verplaatsing nul is, evenals de schuifspanning  $\sigma_{xz}$ . Dat betekent dat dezelfde oplossing bruikbaar is voor een lijnlast op een zekere afstand van een onverplaatsbare gladde wand. Langs die wand zijn immers de randvoorwaarden dat de horizontale verplaatsing nul moet zijn, evenals de schuifspanning langs de wand. Door de symmetrie wordt daar precies aan voldaan.

De horizontale spanning tegen de wand vindt men uit de formule (30.2) voor het basisgeval van Flamant. In deze formule is nu  $x = a$ , waarin  $a$  de constante afstand van de kracht tot de wand is. Men kan dus ook schrijven

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{\pi} \frac{Fa^2z}{(a^2 + z^2)^2}. \quad (30.15)$$



Figuur 30.5. Lijnlast naast gladde wand.

De verdeling van deze horizontale spanningen tegen de wand is ook getekend in figuur 30.5. De grootste waarde voor de horizontale spanning treedt op voor  $z = 0.577 a$ , en die spanning is

$$\sigma_{xx-max} = 0.4135 \frac{F}{a}$$

De totale kracht op een wand met diepte  $h$  vindt men door integratie van de spanningen over de diepte. Het resultaat is

$$Q = \frac{2}{\pi} \frac{F}{1 + a^2/h^2}. \quad (30.16)$$

Als  $a = 0$  is dit  $Q = 0.637 F$ . Als  $a$  groter is wordt  $Q$  steeds kleiner. Dat is ook logisch, een kracht ver van de wand zal weinig druk tegen de wand geven.

### Opgaven

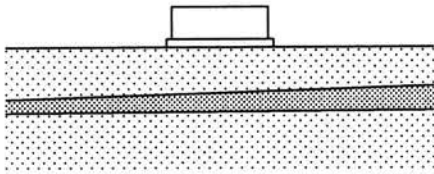
**30.1** Is het toeval dat in de formules (30.12) en (30.16) dezelfde factor  $2/\pi$  voorkomt?

**30.2** Transformeer de spanningen uit de oplossing van Flamant in poolcoördinaten, d.w.z. bepaal uitdrukkingen voor de spanningscomponenten  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  en  $\sigma_{r\theta}$ . Merk op dat het resultaat nogal bijzonder is.

## Hoofdstuk 31

# ZETTINGSBEREKENINGEN

Een belangrijk probleem uit de praktijk van de grondmechanica is de berekening van de zettingen die te verwachten zijn bij de bouw van een zekere constructie. Voor een homogeen, lineair elastisch materiaal zou men de vervormingen kunnen berekenen met behulp van de elasticiteitstheorie. Die theorie is immers volledig consistent, en levert niet alleen de



Figuur 31.1. Belasting.

spanningen behorende bij een bepaalde belasting, maar ook de vervormingen. Helaas is grond geen homogeen lineair elastisch materiaal, maar is de grond meestal niet-homogeen, niet-lineair, en niet-elastisch. Voor een dergelijk materiaal is het al erg moeilijk om de mechanische eigenschappen precies te beschrijven, laat staan dat men er een volledig consistente berekening van spanningen en vervormingen voor kan maken. Dat is ook wiskundig

vaak erg gecompliceerd. De bepaling van een oplossing voor een elastisch probleem is vaak al een moeilijk wiskundig probleem.

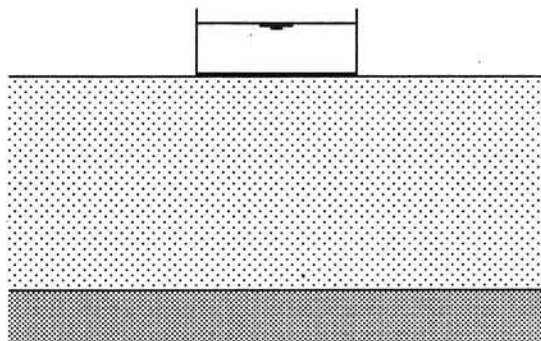
Om al deze redenen wordt in de grondmechanica vaak gebruik gemaakt van een semi-elastische benadering. Daarbij stelt men dan dat de spanningen in de werkelijkheid waarschijnlijk niet zo veel verschillend zullen zijn van die welke men berekent met de elasticiteitstheorie. Uitgaande van die spanningen kan men dan voor de grond de vervormingen berekenen, door de grond uit laagjes opgebouwd te denken, en dan voor elk laagje de vervorming te berekenen, rekening houdend met de werkelijke stijfheid van elke laag. Op die manier kan men dus rekening houden met de gelaagde opbouw van de grond, en bijvoorbeeld ook met een met de diepte toenemende stijfheid.

De hierboven geschetste procedure is niet helemaal consistent, omdat voor een massief opgebouwd uit lagen met verschillende eigenschappen, de spanningsverdeling anders zal zijn dan die volgend uit de elasticiteitstheorie. Een gedeeltelijke rechtvaardiging voor de procedure is dat de spanningen volgend uit een elastische berekening in elk geval voldoen aan het evenwicht. Ook heeft men wel geconstateerd, aan de hand van berekeningsresultaten voor gelaagde elastische materialen, dat de invloed van de gelaagdheid op de belangrijkste spanningen (de verticale normaalspanningen) niet al te groot is, tenzij men zulke extreme gevallen bekijkt als een heel stijve laag op een heel slappe ondergrond. Maar meestal is grond niet zo ontzettend stijf, vooral niet aan het oppervlak.

### 31.1 Voorbeeld

De methodiek kan het best worden geïllustreerd aan de hand van een eenvoudig voorbeeld. Dit voorbeeld betreft een ronde vloeistof-tank, met een diameter van 20 meter, die gebouwd wordt op een funderingsplaat op een 20 meter dikke laag tamelijk slappe grond, zie figuur 31.2. Daaronder bevindt zich een vaste zandlaag. Van de grond is bekend dat de samendrukbaarheid,  $C_{10}$ , ongeveer gelijk is aan 50. Gesteld wordt dat de funderingsplaat een druk op de grond uitoefent van 20 kPa, en dat de extra belasting door de vloeistof in





Figuur 31.2. Tank op slappe grond.

de tank gelijk is aan 100 kPa. Gevraagd wordt de zetting te berekenen door die belasting, in het midden van de tank.

Het voorbeeld is uitgewerkt in tabel 31.1. De eerste kolom van die tabel geeft de gemiddelde diepte van de lagen, uitgaande van een verdeling in lagen van 2 m dikte. De tweede kolom geeft de effectieve spanningen ten gevolge van het eigen gewicht van de grond. Daarbij is gesteld dat die per meter diepte met 10 kPa toenemen. De derde kolom geeft de spanningen ten gevolge van de funderingsplaat. Die spanningen zijn berekend met de formule voor de spanningen midden onder een gelijkmatige cirkelvormige belasting, formule (26.13),

$$\sigma_{zz} = p \left( 1 - \frac{z^3}{b^3} \right), \quad (31.1)$$

waarin  $b = \sqrt{z^2 + a^2}$ , en  $a$  de straal van het cirkelvormige gebied is. De vierde kolom is de som van de tweede en de derde kolom. Dit zijn de beginspanningen, voor het aanbrengen van de belasting, maar na het aanbrengen van de funderingsplaat. De vijfde kolom bevat

diepte (m)	e.g. (kPa)	fund. (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	bel. (kPa)	$\sigma$ (kPa)	$\log(\sigma/\sigma_1)$	$\Delta h$ (m)
1	10.00	19.98	29.99	99.90	129.89	0.6366	0.025
3	30.00	19.52	49.52	97.63	147.15	0.4730	0.019
5	50.00	18.21	68.21	91.06	159.27	0.3683	0.015
7	70.00	16.23	86.23	81.14	167.37	0.2880	0.011
9	90.00	14.01	104.01	70.06	174.07	0.2236	0.009
11	110.00	11.90	121.90	59.49	181.39	0.1726	0.007
13	130.00	10.04	140.04	50.20	190.24	0.1330	0.005
15	150.00	8.48	158.48	42.40	200.88	0.1030	0.004
17	170.00	7.19	177.19	35.96	213.15	0.0802	0.003
19	190.00	6.14	196.14	30.70	226.84	0.0631	0.002

Tabel 31.1. Berekening vervormingen.

de spanningen ten gevolge van de belasting, die ook met formule (31.1) berekend zijn. De zesde kolom is de som van de vierde en de vijfde kolom. Dit zijn de uiteindelijke effectieve spanningen. De zevende en de achtste kolom bevatten tenslotte de eigenlijke berekening van de vervormingen, met de formule van Terzaghi, zie hoofdstuk 14. Telt men de verkortingen

van alle lagen bij elkaar op dan vindt men dat de totale zetting 0.1 m is. Dat is nogal veel, en het zou best kunnen betekenen dat op een dergelijke slappe grond de bouw van deze tank niet verantwoord is.

De hierboven geschetste procedure leent zich goed voor uitbreidingen. Zo is het zonder meer mogelijk voor elke laag een andere waarde voor de samendrukkingsconstante te gebruiken om op die manier rekening te houden met een eventuele gelaagde opbouw van de grond. Ook is de methode natuurlijk niet beperkt tot belastingen over een cirkelvormig gebied. Men kan de methode uitstekend combineren met de berekening van spanningen met behulp van de Zon van Newmark. Dan kan het belaste gebied willekeurig van vorm zijn, en behoeft de belasting niet gelijkmatig te zijn. De methode kan ook uitstekend worden uitgewerkt in de vorm van een computerprogramma. De invoer bestaat dan uit de gegevens van de verschillende lagen, en de belasting. Het computerprogramma berekent eerst de spanningen, bijvoorbeeld met behulp van een numeriek equivalent van de methode van Newmark, en vervolgens berekent het computerprogramma de zetting van elke laag, eventueel rekening houdend met tijdsafhankelijk gedrag in de vorm van kruip.

### Opgaven

**31.1** De methode beschreven in deze paragraaf leent zich goed voor uitvoering met behulp van een spreadsheet programma op een computer. Voer de berekening van het voorbeeld op die wijze uit. Maak daartoe aparte kolommen voor de tussenberekeningen, en bijvoorbeeld ook een kolom voor de samendrukkingsconstanten van alle lagen.

**31.2** Voer de berekeningen van het voorbeeld uit voor het geval van een gelaagde grond, met  $C_{10} = 20$  in de bovenste 10 m, en  $C_{10} = 80$  in de onderste 10 m. Dat is gemiddeld ook 50, maar de zetting zal niet hetzelfde blijken te zijn.

**31.3** Bereken de zetting van een punt op de rand van de tank. Gebruik de Zon van Newmark om de verticale spanningen op de verschillende dieptes te berekenen.

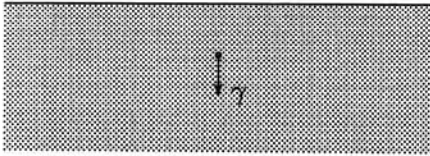
## Hoofdstuk 32

# HORIZONTALE GRONDDRUK

Na de beschouwingen over elastische berekeningen in de voorgaande hoofdstukken keren we terug naar meer realistische beschrijvingen van het materiaal grond. Het doel daarbij is de berekening van de horizontale spanningen in een grondmassief, bijvoorbeeld tegen een keermuur of een damwand. De beschouwingen van dit hoofdstuk zullen allereerst betrekking hebben op droge grond. Daarna worden er overeenkomstige relaties gelegd voor met water verzadigde grond, op basis van effectieve spanningen.

### 32.1 Coëfficiënt van horizontale gronddruk

Zoals reeds eerder gesteld (zie hoofdstuk 5) is het zelfs in het allereenvoudigste geval, namelijk een half-oneindig grondmassief zonder bovenbelasting, zie figuur 32.1, al niet eens mogelijk alle spanningen ten gevolge van het eigen gewicht eenduidig te bepalen. Het lijkt wel redelijk om voor een homogeen massief met een horizontaal bovenvlak te stellen dat de schuifspanningen  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$  en  $\sigma_{xy}$  nul zijn, en dat de verticale normaalspanning  $\sigma_{zz}$  lineair toeneemt met de diepte,



Figuur 32.1. Halfruimte.

volgens  $\sigma_{zz} = \gamma z$ . Daarmee is dan aan het evenwicht in verticale richting voldaan. De horizontale normaalspanningen  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{yy}$  kunnen echter niet ondubbelzinnig worden bepaald uit het evenwicht in horizontale richting.

Meer precies kan men stellen dat de spanningen moeten voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (32.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0, \quad (32.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \gamma = 0, \quad (32.3)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad (32.4)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \quad (32.5)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}. \quad (32.6)$$

Dit zijn zes vergelijkingen waaraan de negen spanningen moeten voldoen, in elk punt van het grondmassief. Er zijn waarschijnlijk vele oplossingen mogelijk, en het is niet te zeggen welke de voorkeur verdient. Een voor de hand liggende oplossing is die waarbij de verticale

normaalspanning lineair met de diepte toeneemt, evenredig met het eigen gewicht van de grond. Daartoe wordt gesteld dat

$$\sigma_{zz} = \gamma z, \quad (32.7)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = f(z), \quad (32.8)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0, \quad (32.9)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 0, \quad (32.10)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0. \quad (32.11)$$

Dit veld voldoet aan alle evenwichtsvergelijkingen, en aan de randvoorwaarden  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\sigma_{zx} = 0$ , en  $\sigma_{zy} = 0$  voor  $z = 0$ , dat is het bovenoppervlak van het grondlichaam. Dat de schuifspanningen  $\sigma_{xz}$  en  $\sigma_{yz}$  nul zijn lijkt ook erg logisch. Als alle verticale kolommen grond in dezelfde omstandigheden verkeren zullen ze geen schuifspanningen op elkaar willen overdragen

De functie  $f(z)$  in de uitdrukking (32.8) kan nog volkomen willekeurig zijn, en in principe zou voor  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{yy}$  zelfs een verschillende functie kunnen worden gekozen. Er is hierboven maar aangenomen dat de horizontale spanning in alle richtingen gelijk is, om een voorkeursrichting in het horizontale vlak te vermijden. De functie  $f(z)$  die de horizontale spanningen bepaalt behoeft in  $z$ -richting niet eens continu te zijn. Er mogen in principe sprongen in die functie voorkomen, als de functie maar niet varieert in  $x$ -richting of in  $y$ -richting. Er moge voorts nog worden opgemerkt dat ook de spanning  $\sigma_{zz}$  en de schuifspanningen niet eenduidig volgen uit de evenwichtsvergelijkingen. Het is best denkbaar dat, door een verschil in stijfheden in de ondergrond, deze spanningen afhankelijk zijn van  $x$  en  $y$ , en dat de verticale normaalspanning niet precies lineair verloopt met  $z$ . Men spreekt bijvoorbeeld van *boogwerking* boven een slap gedeelte, of een holte. In redelijk homogene grond is de gegeven spanningsverdeling echter in het algemeen een goede eerste benadering. Vaak is een dergelijk grondmassief geologisch tot stand gekomen door het geleidelijk opbouwen van afzettingen, vaak onder water. Dan zijn de hierboven gebruikte aannames wel van toepassing. Als het grondmassief op andere wijze tot stand is gekomen, bijvoorbeeld door uit te gaan van een hellend terrein dat later geëgaliseerd is, of door een met bulldozers uitgebouwd zandlichaam, zijn die aannames minder realistisch.

De spanningstoestand (32.7) - (32.11) wordt wat inzichtelijker door de functie  $f(z)$  te schrijven als  $K\sigma_{zz}$ ,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = K\sigma_{zz} = K\gamma z, \quad (32.12)$$

waarin  $K$  de *coëfficiënt van horizontale gronddruk* genoemd wordt. Deze geeft de verhouding tussen de horizontale en verticale effectieve spanning. Het probleem is nu theoretisch gezien alleen maar verschoven, omdat  $K$  in principe nog een willekeurige functie van de diepte  $z$  kan zijn. Toch is het zinvol om de horizontale spanning zo uit te drukken, omdat verwacht mag worden dat de grootte  $K$  veel minder sterk zal afhangen van de diepte dan de horizontale spanningen zelf. Omdat de verticale normaalspanningen lineair verlopen met de diepte is immers een dergelijk verloop van de horizontale normaalspanningen ook waarschijnlijk.

De grootte van de gronddrukcoëfficiënt  $K$  hangt af van het materiaal, en van de omstandigheden waarin de grond verkeert. Daarbij is ook van belang hoe de grond geologisch is ontstaan, en welke historie is doorgemaakt. Er zullen eerst een aantal eenvoudige gevallen worden beschouwd, als referentie. Het is daarbij illustratief de verhouding tussen horizontale en verticale spanning ook weer te geven in de vorm van een spanningspad. In hoofdstuk 26

zijn daartoe de grootheden  $\sigma$  en  $\tau$  geïntroduceerd, als het middelpunt en de straal van de cirkel van Mohr. In dit geval is dat dus

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}), \quad (32.13)$$

$$\tau = \frac{1}{2}|\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|. \quad (32.14)$$

Hieruit volgt, met (32.12), aannemende dat  $K < 1$ ,

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{1 - K}{1 + K}. \quad (32.15)$$

Meestal zal de horizontale spanning wel kleiner zijn dan de verticale spanning, en is dus  $K < 1$ , maar dat is niet absoluut noodzakelijk.

## 32.2 Vloeistof

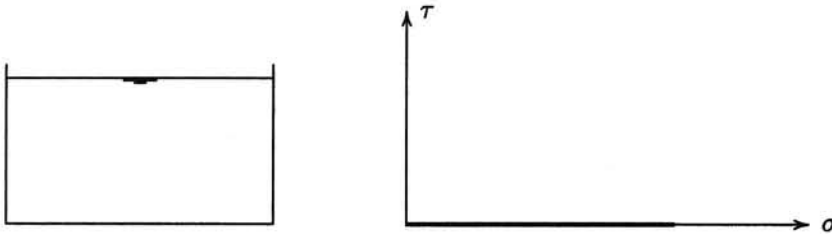
In een vloeistof zijn de eventuele schuifspanningen verwaarloosbaar klein ten opzichte van de druk. Men kan dus stellen dat in alle richtingen de druk gelijk is. Dat betekent dat

$$K = 1. \quad (32.16)$$

Als  $K = 1$  is de horizontale spanning gelijk aan de verticale spanning. Met (32.15) vindt men dan

$$\frac{\tau}{\sigma} = 0. \quad (32.17)$$

Het spanningspad is getekend in figuur 32.2. Het getekende spanningspad hoort bij een



Figuur 32.2. Spanningspad voor vloeistof.

geval waarbij het vat geleidelijk met water wordt gevuld, of de zwaartekracht geleidelijk tot ontwikkeling komt.

Grond is geen vloeistof, maar er bestaan zeer slappe gronden die er dicht bij komen : bagger, of zeer zachte klei. Voor dergelijke grondsoorten zal  $K$  dicht bij 1 liggen, en is het spanningspad getekend in figuur 32.2 dus nog best realistisch.

## 32.3 Elastisch materiaal

Een mogelijke benadering van het gedrag van grond is om het als een lineair elastisch materiaal te beschouwen. In een dergelijk materiaal moeten de spanningen en de vervormingen voldoen aan de wet van Hooke. Als men zich voorstelt dat de spanningen in de grond ontstaan in een situatie waarbij er geen zijdelingse vervorming kan optreden, dan geldt er

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = 0,$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] = 0,$$

In een half-oneindig massief kan verwacht worden dat  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ . Men vindt dan

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0 : \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz},$$

ofwel

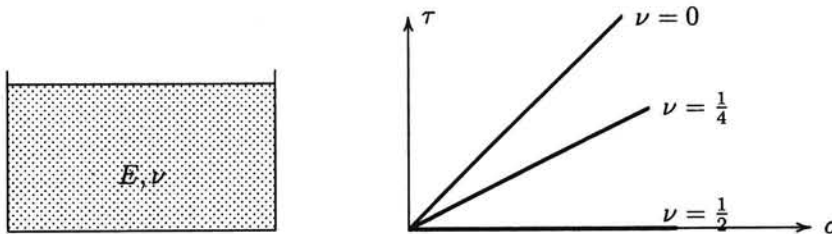
$$K = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (32.18)$$

Als de dwarscontractiecoëfficiënt verloopt tussen 0 en 0.5, dan verloopt  $K$  tussen 0 en 1.

Uit (32.15) en (32.18) volgt dat in dit geval

$$\frac{\tau}{\sigma} = 1 - 2\nu. \quad (32.19)$$

Een aantal mogelijke spanningspaden, voor verschillende waarden van  $\nu$  tussen 0 en  $\frac{1}{2}$ , is getekend in figuur 32.3. Als  $\nu = \frac{1}{2}$  zijn de horizontale spanningen gelijk aan de verticale.



Figuur 32.3. Spanningspad voor elastisch materiaal.

Dat is het geval dat er geen volumeverandering mogelijk is, net als in een vloeistof. Het spanningspad is dan ook gelijk aan dat voor een vloeistof. Als  $\nu = 0$  loopt het spanningspad onder een hoek van  $45^\circ$  omhoog.

Als de horizontale rekken niet nul zijn, maar men stelt wel dat de twee horizontale spanningen,  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{yy}$ , aan elkaar gelijk zijn, dan vindt men

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz} - \frac{E}{1-\nu}\varepsilon_{xx}. \quad (32.20)$$

Als er een positieve horizontale rek is, neemt de horizontale spanning blijkbaar af, en wordt  $K$  dus kleiner. Als er een negatieve horizontale rek optreedt, bijvoorbeeld door lateraal opstuiken, neemt de horizontale spanning toe, en wordt  $K$  dus groter. Dit lijken redelijke tendenzen, die wel algemene geldigheid zullen hebben.

Men heeft wel gedacht dat de uitdrukking (32.18) de werkelijkheid goed beschrijft voor samenhangende grond, of voor rots. Dat is in het algemeen echter zeker niet het geval. De elastische berekening veronderstelt immers, impliciet, dat de spanningen in het materiaal tot ontwikkeling komen als het materiaal er al is, en dat dan de zwaartekracht begint te werken, waarbij dan absoluut geen horizontale vervormingen mogen optreden. Dat legt nogal wat restricties op aan de geologische voorgeschiedenis. Meestal zal die veel ingewikkelder zijn, waardoor de waarde van  $K$  niet eenduidig te voorspellen is. Men mag verwachten dat in een gebied tussen twee diepe rivieren de gronddrukcoëfficiënt  $K$  klein zal zijn, omdat de rivieroever immers geen horizontale spanning kunnen overdragen. Ook kan men verwachten dat in een dal tussen twee bergruggen die door tectonische beweging naar elkaar toe bewegen, de gronddrukcoëfficiënt  $K$  relatief groot zal zijn.

### 32.4 Elastisch materiaal onder water

Om de invloed van het grondwater in rekening te brengen kan men grond schematiseren tot een lineair elastisch materiaal dat tot stand komt door afzetting onder water, zie figuur 32.4. Als het eigen gewicht van de grond weer alleen door de verticale spanningen wordt gedragen



Figuur 32.4. Elastisch materiaal onder water.

verlopen de verticale totaalspanningen lineair met de diepte,

$$\sigma_{zz} = \gamma z, \quad (32.21)$$

waarin  $\gamma$  het totale volumegewicht van de grond is, inclusief het water in de poriën. De waterspanningen verlopen hydrostatisch,

$$p = \gamma_w z, \quad (32.22)$$

en de verticale effectieve spanningen zijn dus

$$\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - p = (\gamma - \gamma_w)z. \quad (32.23)$$

Gesteld wordt nu dat bij het tot ontwikkeling komen van deze spanningen geen horizontale vervormingen van het korrelskelet kunnen optreden. De vervormingen van het korrelskelet worden bepaald door de effectieve spanningen, en omdat het verband tussen effectieve spanningen en vervormingen hier lineair elastisch is verondersteld geldt er dan, overeenkomstig het droge geval,

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma'_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} (\gamma - \gamma_w)z. \quad (32.24)$$

Er geldt dan

$$K' = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad (32.25)$$

als men de coëfficiënt van horizontale gronddruk  $K'$  opvat als de verhouding van de horizontale en verticale *effectieve* spanningen.

De horizontale totaalspanning is nu

$$\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + p = K'(\gamma - \gamma_w)z + \gamma_w z. \quad (32.26)$$

Men zou dit kunnen schrijven als

$$\sigma_{xx} = K \sigma_{zz}, \quad (32.27)$$

waarin dan blijktbaar

$$K = K' - (1 - K') \frac{\gamma_w}{\gamma}. \quad (32.28)$$

De waarde van deze relatie is gering. De afleiding is er op gebaseerd dat de grondwaterstand samenvalt met het bovenvlak van de grond, die bovendien in de diepte homogeen moet zijn.

Eigenlijk is het alleen voor de effectieve spanningen zinvol te spreken van een coëfficiënt van horizontale gronddruk, omdat die (althans in sommige gevallen) als een eigenschap van de grond kan worden beschouwd. De horizontale totaalspanningen kan men steeds het beste maar afleiden door eerste de horizontale effectieve spanning te bepalen, en daar dan de waterspanning bij op te tellen.

### Opgaven

**32.1** Teken het spanningspad voor de effectieve spanningen (ESP : effective stress path) op een zekere diepte onder water als daarin een elastisch materiaal wordt opgebouwd, zoals getekend in figuur 32.4, aannemende dat  $\nu = \frac{1}{4}$ .

**32.2** Teken ook, op dezelfde schaal het spanningspad voor de totaalspanningen (TSP : total stress path) in het zelfde punt.



## Hoofdstuk 33

### RANKINE

In vervolg op de beschouwingen van het vorige hoofdstuk wordt in dit hoofdstuk verder ingegaan op de mogelijke horizontale gronddrukken, uitgaande van de grenzen gesteld door het bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb. De mogelijke extreme spanningstoestanden die uit dat bezwijkcriterium volgen zijn het eerst geformuleerd door de Engelsman W.J.M. Rankine in 1857.

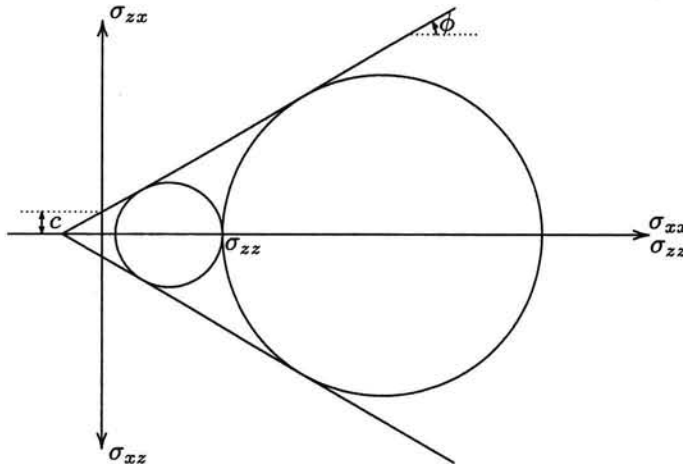
Ter vereenvoudiging zal in dit hoofdstuk eerst worden aangenomen dat de grond droog is. Dan is er geen verschil tussen totaalspanningen en effectieve spanningen. Daarna zal de generalisatie tot het geval van met water verzadigde grond worden gegeven.

#### 33.1 Mohr-Coulomb

Zoals eerder gesteld, in hoofdstuk 20, geldt voor grond met goede benadering het bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb, dat wil zeggen dat de schuifspanning op elk vlakje begrensd is door de conditie

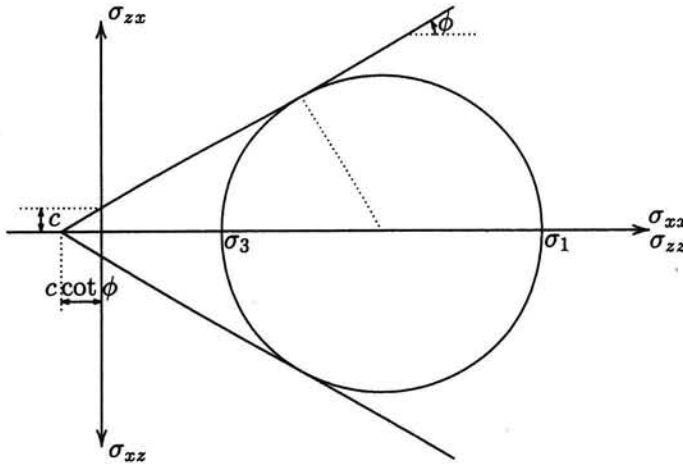
$$\tau < \tau_f = c + \sigma \tan \phi, \quad (33.1)$$

waarin  $c$  de cohesie is, en  $\phi$  de hoek van inwendige wrijving. Men kan dit criterium goed weergeven met behulp van de cirkel van Mohr, zie figuur 33.1. Neemt men aan dat  $\sigma_{xx}$  en



Figuur 33.1. Mohr-Coulomb.

$\sigma_{zz}$  de hoofdspansingen zijn, en dat  $\sigma_{zz}$  bekend is (door het gewicht van de bovenbelasting), dan blijkt dat  $\sigma_{xx}$  niet kleiner kan zijn dan aangegeven door de kleine cirkel, en niet groter dan aangegeven door de grote cirkel. De verhouding tussen de kleinste en de grootste hoofdspansing kan men berekenen door te bedenken, zie figuur 33.2, dat de straal van de



Figuur 33.2. Verhouding van de hoofdspinningen.

cirkel van Mohr gelijk is aan  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , en dat het middelpunt ligt op een afstand  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$  rechts van de oorsprong. Hieruit volgt voor een cirkel die raakt aan de omhullende,

$$\sin \phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cot \phi},$$

en dus

$$\sigma_3 = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_1 - \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} 2c. \quad (33.2)$$

Deze vergelijking is overigens ook al afgeleid in hoofdstuk 20.

De twee coëfficiënten in vergelijking (33.2) kan men nog met elkaar in verband brengen door te bedenken dat

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{(1 - \sin \phi)(1 + \sin \phi)}.$$

Hieruit volgt

$$\cos \phi / (1 + \sin \phi) = \sqrt{(1 - \sin \phi) / (1 + \sin \phi)}.$$

Men kan vergelijking (33.2) derhalve ook schrijven als

$$\sigma_3 = K_a \sigma_1 - 2c \sqrt{K_a}, \quad (33.3)$$

waarin

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (33.4)$$

Afgezien van de constante factor  $2c\sqrt{K_a}$  blijkt er een vaste verhouding te zijn tussen de grootste en de kleinste hoofdspinning.

Men kan formule (33.3) omgekeerd schrijven als

$$\sigma_1 = K_p \sigma_3 + 2c \sqrt{K_p}, \quad (33.5)$$

waarin

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (33.6)$$

De factoren  $K_a$  en  $K_p$ , die de kleinste en de grootste verhouding geven tussen de twee hoofdspansingen (afgezien van de constante factor), noemt men de coëfficiënten van *actieve gronddruk* ( $K_a$ ), respectievelijk *passieve gronddruk* ( $K_p$ ).

Als de cohesie nul is ( $c = 0$ ) blijkt er te gelden

$$c = 0 : K_a < K < K_p. \quad (33.7)$$

Als  $\phi = 30^\circ$  (dat is een redelijke waarde voor zand, aan de lage kant), vindt men

$$c = 0 \text{ en } \phi = 30^\circ : \frac{1}{3} < K < 3. \quad (33.8)$$

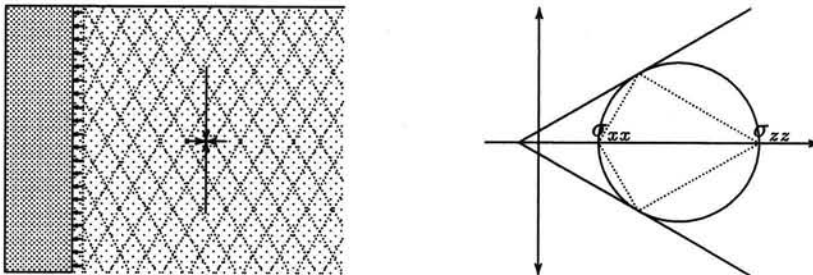
De gronddrukcoëfficiënt  $K$  blijkt niet kleiner te kunnen zijn dan ongeveer  $\frac{1}{3}$ , en niet groter dan ongeveer 3. De precieze waardes hangen af van de hoek van inwendige wrijving  $\phi$ .

Zoals al uiteengezet in de vorige paragraaf voor het elastische geval, zal een lage waarde horen bij zijdelings meegeven van de grond, en een hoge waarde bij het horizontaal opstuiken van de grond. In het eerste geval spreekt men van *actieve gronddruk*. In het tweede geval van *passieve gronddruk*. De termen actief en passief drukken uit dat bij actieve gronddruk de grond de constructie als het ware wegdrukt, en dat bij passieve gronddruk een beweging van de constructie door andere oorzaken in de grond een reactie oproept.

Dat er zo'n groot verschil kan zijn in de horizontale gronddruk in verschillende gevallen is een van de karakteristieken van het materiaal grond.

### 33.2 Actieve gronddruk

Men kan verwachten dat de laagste waarde van de horizontale gronddruk bijvoorbeeld zal



Figuur 33.3. Actieve gronddruk.

optreden in het geval van een meegevende keermuur, zie figuur 33.3. De bijbehorende spanningscirkel is ook in de figuur getekend. Het richtingencentrum voor de normaalvectoren op verschillende vlakjes is het meest rechtse punt van de cirkel. Dit betekent dat de kritieke schuifspanning optreedt op vlakjes die een hoek van  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  maken met de horizontale richting, en dus  $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$  met de verticale richting. Deze vlakken zijn in de linkerhelft van figuur 33.3 ook getekend. Veelal stelt men zich voor dat de grond bij bezwijken ook werkelijk langs deze vlakken afschuift.

De verticale spanningen langs de wand zijn

$$\sigma_{zz} = \gamma z, \quad (33.9)$$

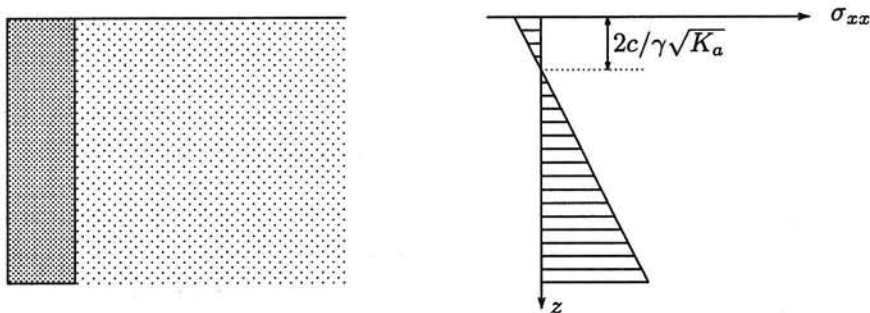
waarin  $\gamma$  het volumegewicht van de grond is, en  $z$  de diepte langs de wand. Men vindt nu voor de horizontale spanning, met (33.3),

$$\sigma_{xx} = K_a \gamma z - 2c\sqrt{K_a}. \quad (33.10)$$

De resulterende horizontale kracht op een wand met hoogte  $h$  vindt men door integratie van  $z = 0$  tot  $z = h$ . Dit geeft

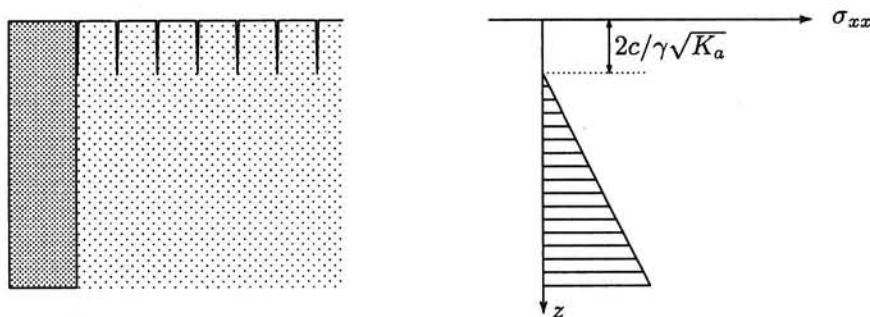
$$Q = \frac{1}{2} K_a \gamma h^2 - 2ch\sqrt{K_a}. \quad (33.11)$$

De verdeling van de normaalspanningen  $\sigma_{xx}$  tegen de wand is getekend in figuur 33.4. Het



Figuur 33.4. Horizontale spanning bij actieve gronddruk.

blijkt dat er aan de bovenzijde van de grond trekspanningen optreden, over een hoogte  $2c/\gamma\sqrt{K_a}$ . Dat kan alleen gedurende korte tijd in ongedraineerde toestand, met een negatieve spanning in het water. In gedraineerde toestand is het niet mogelijk, omdat dan de korrels aan elkaar, of aan de wand zouden moeten trekken. Men stelt daarom meestal dat er in de bovenste laag, ter diepte van ongeveer  $2c/\gamma\sqrt{K_a}$ , scheuren zullen optreden, in de grond, en tussen de grond en de wand. De spanningsverdeling wordt dan zoals getekend in figuur 33.5.



Figuur 33.5. Horizontale spanning, met scheuren in de grond.

Voor de verticale spanningen werkt de gescheurde zone als een bovenbelasting.

De totale horizontale kracht wordt nu

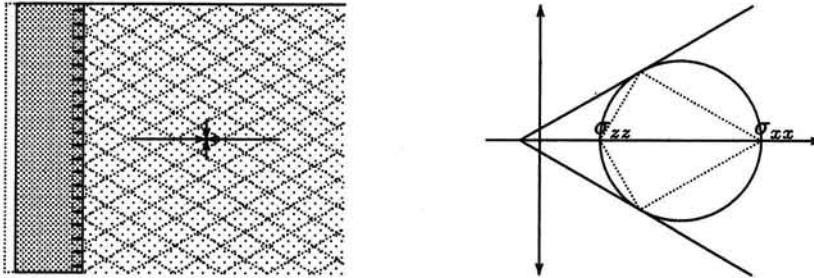
$$Q = \frac{1}{2} K_a \gamma h_r^2, \quad (33.12)$$

waarin  $h_r$  de gereduceerde hoogte van de wand is,

$$h_r = h - 2c/\gamma\sqrt{K_a}. \quad (33.13)$$

### 33.3 Passieve gronddruk

Het geval van passieve gronddruk, waarbij juist de hoogste waarde van de horizontale gronddruk optreedt, kan verwacht worden te behoren bij een gladde verticale wand die in horizontale richting tegen de grond in bewogen wordt, zie figuur 33.6. Ook voor dit geval is



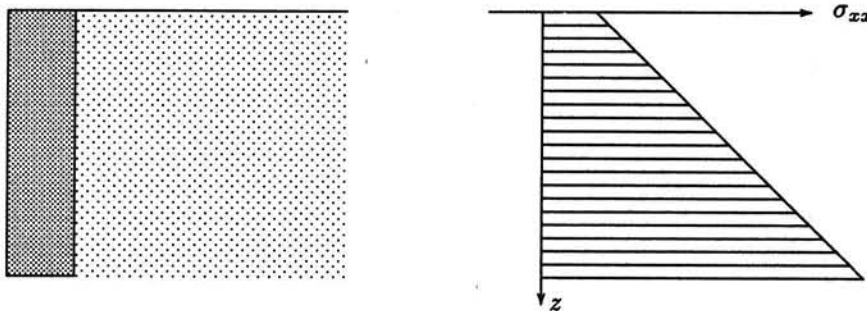
Figuur 33.6. Passieve gronddruk.

de spanningscirkel getekend, met het richtingencentrum ditmaal gelegen in het meest linkse punt van de cirkel. De kritieke spanningstoestand  $\tau = \tau_f = c + \sigma \tan \phi$  heerst ditmaal op vlakjes die een hoek van  $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$  maken met de horizontale richting. Deze vlakken zijn getekend in de linkerhelft van de figuur. In dit geval lopen de potentiële glijvlakken dus flauwer dan onder  $45^\circ$ .

In dit geval zijn de horizontale spanningen tegen de wand, als functie van de diepte  $z$ ,

$$\sigma_{xx} = K_p \gamma z + 2c\sqrt{K_p}. \quad (33.14)$$

Ze zijn getekend in figuur 33.7.



Figuur 33.7. Horizontale spanning bij passieve gronddruk.

De resulterende horizontale kracht op een wand met hoogte  $h$  vindt men door integratie van  $z = 0$  tot  $z = h$ . Dit geeft

$$Q = \frac{1}{2} K_p \gamma h^2 + 2ch\sqrt{K_p}. \quad (33.15)$$

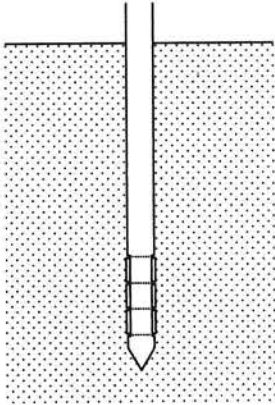
De cohesie  $c$  leidt in dit passieve geval tot een positieve constante factor in de uitdrukking voor de horizontale spanningen. Er is nu geen aanleiding voor scheuren, omdat er geen terkspanningen optreden.

De twee hier beschouwde extreme spanningstoestanden noemt men de *Rankine-toestanden*, naar de Engelsman Rankine (1857), die aangegeven heeft dat deze spanningstoestanden in

de genoemde twee situaties extremen zijn. Bij een keermuur op een deugdelijke fundering, zal de werkelijk optredende gronddruk tussen de twee extremen liggen. Omdat de grenzen zo ruim zijn (er zit ongeveer een faktor 9 tussen) is de horizontale spanning  $\sigma_{xx}$  nog in hoge mate onbepaald.

### 33.4 Neutrale gronddruk

Het is natuurlijk wel mooi dat de kleinst mogelijke horizontale gronddruk en de grootst mogelijke horizontale gronddruk bepaald kunnen worden, maar de grenzen daartussen zijn erg groot (tussen ongeveer  $\frac{1}{3}$  en 3), en de werkelijke waarde in het terrein, als er helemaal geen sprake is van een meegevende of bewegende wand, is nog steeds onbepaald. Men spreekt in dit geval van *neutrale gronddruk*, en de bijbehorende coëfficiënt wordt aangegeven met  $K_0$ . De gedachte is dat deze coëfficiënt de verhouding geeft tussen de horizontale en verticale effectieve spanning als er geen horizontale verplaatsing optreedt. Deze waarde is van groot belang voor de berekening van de horizontale gronddrukken tegen een in de grond gebrachte wand, bijvoorbeeld een damwand, of de wand van een tunnel, als die tunnel is gebouwd door eerst twee wanden in de grond te heien of trillen. In de praktijk werkt men vaak met waarden tussen 0.5 en 1, waarbij dan voor slappe klei



Figuur 33.8. CAMKO-meter.

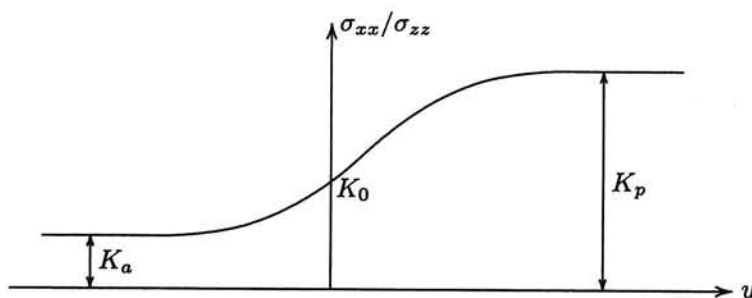
waarden dicht bij 1 gebruikt worden, en voor zand meestal wat lagere waarden (bijvoorbeeld 0.6 of 0.7). Bij gebrek aan beter gebruikt men in de praktijk als schatting wel de correlatie van Jaky,

$$K_0 \approx 1 - \sin \phi, \quad (33.16)$$

maar daarvoor is eigenlijk geen andere achtergrond dan dat er waarden tussen ongeveer 0.5 en 1 uitkomen, en dat voor  $\phi = 0$  de waarde  $K_0 = 1$  gevonden wordt. Enige theoretische basis is er voor deze formule niet.

Het beste kan men proberen  $K_0$  te meten, met een of ander instrument dat men in de grond brengt, en dat reageert op de horizontale spanning. In de in Cambridge ontwikkelde CAMKO-meter wordt een rubber vlies om een pijp iets opgeblazen. Daarbij is de gedachte dat een toenemende weerstand zal worden ondervonden bij spanningen boven de oorspronkelijke horizontale spanning. Het vlies bestaat uit drie cellen, waarbij de middelste de meetcel is. Ook heeft men wel gebruik gemaakt van apparaten waarbij water onder steeds toenemende druk in de grond gebracht wordt. Als de wateroverdruk groter wordt dan de horizontale effectieve spanning ontstaat waarschijnlijk een scheur, omdat de grond geen trek kan opnemen en dat kan men constateren aan een toename van het debiet. In de petroleumtechniek noemt men dit *hydraulic fracturing*.

De afhankelijkheid van de horizontale gronddruk van de horizontale verplaatsing is geïllustreerd in figuur 33.9. Als de constructie ten opzichte van de grond niet verplaatst is de gronddrukcoëfficiënt  $K_0$ . Als de constructie de grond wegdrukt neemt de gronddruk toe, tot uiteindelijk de passieve toestand bereikt wordt, en als de constructie ten opzichte van de grond meegeeft neemt de gronddruk af, tot uiteindelijk de actieve toestand bereikt wordt. In geavanceerde berekeningen wordt soms wel gebruik gemaakt van relaties tussen gronddruk

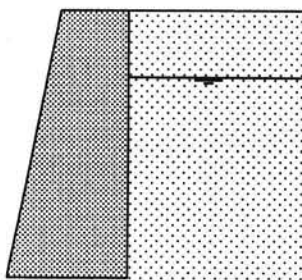


Figuur 33.9. Horizontale gronddruk als functie van de verplaatsing.

en verplaatsing als getekend in figuur 33.9. In veel gevallen kan men zich beperken tot een van de limietwaarden, afhankelijk van het soort probleem. Men moet dan wel een idee hebben van de vermoedelijke richting van de verplaatsingen.

### 33.5 De invloed van het grondwater

In het geval van grond met grondwater in de poriën dient men te bedenken dat het bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb grenzen aangeeft voor de mogelijke *effectieve* spanningen in de grond. De procedure moet dan ook zijn dat men de kleinste of de grootste horizontale effectieve spanning afleidt uit de verticale effectieve spanning. De horizontale totaalspanning vindt men door de waterspanning bij de horizontale effectieve spanning op te tellen.



Figuur 33.10. Grond met grondwater.

Als voorbeeld is in figuur 33.10 een kerende wand getekend, die een hoogte van 8 meter grond moet keren, met een grondwaterstand op 2 meter onder het maaiveld. Gevraagd wordt de horizontale totaalspanning op een diepte van 8 meter te bepalen, voor het geval van actieve gronddruk. De grond is zand, met  $c = 0$  en  $\phi = 30^\circ$ , en met een

volumegewicht boven het grondwater, in droge toestand, van  $16 \text{ kN/m}^3$  en een volumegewicht onder water van  $20 \text{ kN/m}^3$ . Er is geen capillaire opstijging in het zand. De verticale grondspanning op een diepte van 8 meter is in dit geval het gewicht van 2 meter droge grond, en 6 meter natte grond, dus  $\sigma_{zz} = 152 \text{ kPa}$ . Omdat de waterdruk op die diepte  $60 \text{ kPa}$  is, is de verticale effectieve spanning  $\sigma'_{zz} = 92 \text{ kPa}$ . De coëfficiënt van horizontale gronddruk is  $K_a = \frac{1}{3}$ , en dus is de horizontale effectieve spanning  $\sigma'_{xx} = 31 \text{ kPa}$ . De gevraagde horizontale totaalspanning is dus  $\sigma_{xx} = 91 \text{ kPa}$ . Interessant is om op te merken dat deze gronddruk voor  $2/3$  uit waterdruk bestaat, en voor maar  $1/3$  uit druk door de gronddeeltjes. Dat illustreert hoe belangrijk het aandeel van de waterdruk vaak is.

#### Opgaven

**33.1** Maak een eenvoudige tabel voor de coëfficiënten van actieve en passieve gronddruk, als functie van de hoek van inwendige wrijving  $\phi$ .

**33.2** Als de cohesie ongelijk nul is volgt uit formule (33.3) dat de kleinste hoofdspansing  $\sigma_3$  nul kan zijn terwijl de grootste hoofdspansing  $\sigma_1$  ongelijk nul is. Dit betekent dat men in cohesieve

grond een verticale ingraving kan maken. Hoe diep kan zo'n ingraving op grond van deze formule maximaal zijn?

**33.3** Waarom zou men het apparaat uit figuur 33.8 de CAMKO-meter noemen?

**33.4** Een bulldozer met een blad met een breedte van 4 m en een hoogte van 1 m moet een berg droog zand, met een hoogte van 1 m wegduwen. Hoe groot schat u de benodigde kracht?

**33.5** Een betonnen wand die een berg grind, met een hoogte van 5 m, moest keren is omgedrukt. Hoe groot schat u dat de kracht per meter lengte van de wand was bij het bezwijken?

**33.6** Teken voor het geval van figuur 33.10 het verloop van de horizontale totaalspanningen over hoogte van de wand, en bereken de resulterende kracht per strekkende meter wand, loodrecht op het vlak van tekening.



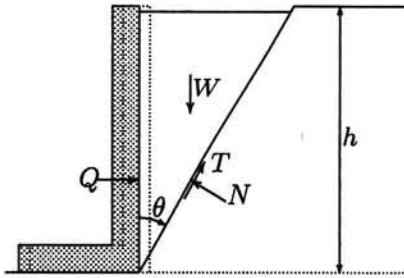
## Hoofdstuk 34

# COULOMB

Lang voor de beschouwingen van Rankine publiceerde Coulomb een theorie over gronddrukken (in 1776) die van groot praktisch belang is. De theorie levert voor de gevallen van actieve en passieve gronddruk de bijbehorende gronddruk door een beschouwing van het evenwicht langs rechte glijvlakken.

### 34.1 Actieve gronddruk

Voor het actieve geval (een terugwijkende wand) is de procedure als volgt, zie figuur 34.1. Er wordt gesteld dat bij verplaatsing van de muur naar links een driehoekige moot grond zal afschuiven over een recht glijvlak, dat een hoek  $\theta$  met de verticaal maakt. Er wordt aangenomen dat op het moment van afschuiven het gewicht van de moot grond nog net in evenwicht wordt gehouden door de krachten op het glijvlak, en de reactie van de muur. Ter vereenvoudiging wordt voorlopig aangenomen dat de reactie van de muur loodrecht op de wand staat. Dat betekent dat die wand als zeer glad wordt aangenomen. In het volgende hoofdstuk zal dat worden gegeneraliseerd. De bedoeling



Figuur 34.1. Actieve gronddruk.

is om de grootte van de kracht  $Q$  te bepalen. De wand moet in staat zijn afschuiven langs alle potentiële glijvlakken net te verhinderen. Daarom is het glijvlak dat de grootste waarde van  $Q$  levert maatgevend. De hoek  $\theta$  zal daarom zodanig bepaald worden dat  $Q$  maximaal is.

Uitgangspunt is het gewicht van de moot grond ( $W$ ), per eenheid van lengte loodrecht op het vlak van tekening,

$$W = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \theta. \quad (34.1)$$

Dit gewicht moet in evenwicht gehouden worden door de horizontale kracht  $Q$  (horizontaal omdat de wand perfect glad is verondersteld), en de reactiekrachten  $N$  en  $T$  op het glijvlak. Door de veronderstelde bewegingsrichting van de moot grond, die de terugwijkende muur volgt, is de richting van de schuifkracht  $T$  bekend. Er geldt verder, omdat de lengte van het schuifvlak  $h / \cos \theta$  is,

$$T = \frac{ch}{\cos \theta} + N \tan \phi. \quad (34.2)$$

De vergelijkingen voor het evenwicht van de moot grond in horizontale en verticale richting zijn

$$Q + T \sin \theta - N \cos \theta = 0, \quad (34.3)$$

$$W - N \sin \theta - T \cos \theta = 0. \quad (34.4)$$

Met behulp van (34.2) is hieruit de schuifkracht  $T$  te elimineren. Dat geeft

$$Q = \frac{N}{\cos \phi} \cos(\theta + \phi) - ch \tan \theta, \quad (34.5)$$

$$W = \frac{N}{\cos \phi} \sin(\theta + \phi) + ch. \quad (34.6)$$

Uit deze twee vergelijkingen kan de normaalkracht  $N$  worden geëlimineerd. Dan krijgt men

$$Q = W \frac{\cos(\theta + \phi)}{\sin(\theta + \phi)} - ch \frac{\cos \phi}{\cos \theta \sin(\theta + \phi)}. \quad (34.7)$$

Met (34.1) vindt men dan

$$Q = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\sin \theta \cos(\theta + \phi)}{\cos \theta \sin(\theta + \phi)} - ch \frac{\cos \phi}{\cos \theta \sin(\theta + \phi)}. \quad (34.8)$$

Deze uitdrukking geeft de kracht  $Q$  als functie van de hoek  $\theta$ . Die hoek komt wel erg vaak in de formule voor (6 maal), en het is dan ook niet zo eenvoudig om het maximum van  $Q$  te bepalen. Gelukkig kan men de formule nog aanmerkelijk vereenvoudigen, door gebruik te maken van de relatie  $\sin \theta \cos(\theta + \phi) = \cos \theta \sin(\theta + \phi) - \sin \phi$ . Men krijgt dan

$$Q = \frac{1}{2} \gamma h^2 - \frac{\frac{1}{2} \gamma h^2 \sin \phi + ch \cos \phi}{\cos \theta \sin(\theta + \phi)}. \quad (34.9)$$

Nu komt  $\theta$  nog maar 2 maal voor in de uitdrukking voor  $Q$ , en alleen in de noemer van de tweede term. Het maximum van  $Q$  wordt bepaald door het maximum van de functie

$$f(\theta) = \cos \theta \sin(\theta + \phi).$$

Het maximum hiervan treedt op als de afgeleide naar  $\theta$  nul is. Men vindt door differentiatie

$$\frac{df}{d\theta} = \cos(2\theta + \phi),$$

en, na nogmaals differentieren,

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -2 \sin(2\theta + \phi).$$

Er volgt nu dat  $df/d\theta = 0$  als  $2\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$ , ofwel

$$\frac{df}{d\theta} = 0 : \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}. \quad (34.10)$$

Dan is  $d^2 f/d\theta^2 = -2$ , en de functie  $f$  heeft dus voor die waarde van  $\theta$  inderdaad een maximum. Dat betekent dat ook de horizontale kracht  $Q$  een maximum heeft voor die waarde van  $\theta$ . De bijbehorende waarde van  $Q$  is, na enig rekenwerk,

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} : \quad Q = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a - 2ch \sqrt{K_a}, \quad (34.11)$$

waarin  $K_a$  de al eerder gedefiniëerde coëfficiënt van actieve gronddruk is,

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (34.12)$$

Dit alles is precies in overeenstemming met de resultaten van het vorige hoofdstuk over actieve gronddruk, zie vergelijking (33.11). De gevonden waarde voor de horizontale kracht  $Q$  hoort bij de afschuiving van een moot grond over een schuifvlak dat een hoek  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$  maakt met de verticale richting. Dat zijn precies de vlakken getekend in figuur 33.3. Op die vlakken bleek in het vorige hoofdstuk de schuifspanning kritiek te zijn. Men merke op dat er geen rekening is gehouden met eventuele trekscheuren in de grond.

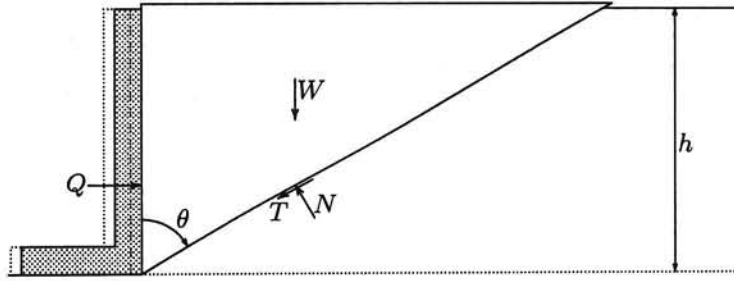
De methode van Coulomb bevat een mogelijk verwarrend element, omdat de procedure van de bepaling van de waarde van de hoek  $\theta$ , zodanig dat de horizontale kracht  $Q$  maximaal wordt, zou kunnen suggereren dat de berekening een hoge waarde voor  $Q$  geeft, en dus aan de veilige of conservatieve kant is. Dat is geenszins het geval, integendeel. Vergelijking met de beschouwingen uit het vorige hoofdstuk leert dat Coulomb's procedure juist de kleinste mogelijke waarde voor de kracht  $Q$  levert. Het verwarrende element zit hem er in dat a priori wordt aangenomen dat de grond langs een vlak onder een hoek  $\theta$  afschuift, en dus *niet* over enig ander vlak. Bij de aanname van een schuifvlak onder een andere hoek dan  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$  is de kracht  $Q$  weliswaar lager, maar dan zijn er andere vlakken waar de schuifspanning groter is dan de kritieke waarde. Eigenlijk zou men nog moeten nagaan of het vlak onder de hoek  $\theta$  inderdaad het meest kritieke vlak is. Dat blijkt alleen zo te zijn als  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi$ , zoals volgt uit de beschouwingen van Rankine. In die afleiding wordt immers in principe de spanning op elk vlak bekeken, door gebruik te maken van de cirkel van Mohr.

De horizontale gronddruk tegen een kerende wand wordt in de praktijk vaak berekend met behulp van de coëfficiënt van actieve gronddruk. Dat lijkt erg gevaarlijk, omdat de actieve gronddruk immers de minimaal mogelijke is, en alleen optreedt bij bezwijken van de grond. De toepassing in de praktijk berust op de volgende redenering. De berekeningsmethode volgens Coulomb of Rankine, met actieve gronddruk, geeft de laagst mogelijke waarde van de kracht  $Q$ . In werkelijkheid, bij een goed gefundeerde muur, is het waarschijnlijk dat de werkelijk optredende kracht groter, misschien zelfs veel groter, is. Wellicht zelfs zo groot dat de wand sterk deformeert. Daarbij neemt dan de kracht  $Q$  gelukkig af, zodat uiteindelijk wel evenwicht kan worden bereikt, zij het dan ten koste van behoorlijke vervormingen. Als men geen bezwaar heeft tegen grote deformaties, en de fundering heeft voldoende vervormingscapaciteit, dan is het verantwoord de muur te ontwerpen op actieve gronddruk. Zo kan men dus bijvoorbeeld de paalfundering van een kademuur ontwerpen op basis van de aanname dat tegen de kademuur de actieve gronddruk optreedt. Als in werkelijkheid aanvankelijk een grotere gronddruk optreedt (en dat is zeer waarschijnlijk), zal de paalfundering grote vervormingen vertonen, waardoor de gronddruk automatisch afneemt, en tenslotte overgaat in de actieve toestand. De vervormingen daarvoor zijn wel tamelijk groot, in de orde van grootte van 1 % of 2 % van de kerende hoogte. Wil men dat niet, dan moet de fundering op een hogere gronddruk worden ontworpen. In de praktijk betekent dit dat er dan meer palen onder de kademuur moeten.

## 34.2 Passieve gronddruk

Voor het geval van passieve gronddruk (dat wil zeggen voor een wand die door een of andere externe oorzaak de grond in wordt gedrukt) verloopt de procedure van Coulomb als volgt, zie figuur 34.2. Omdat de wig van grond ditmaal naar boven gedrukt wordt zal de schuifkracht  $T$  naar beneden gericht zijn. Ook nu geldt

$$W = \frac{1}{2}\gamma h^2 \tan \theta. \quad (34.13)$$



Figuur 34.2. Passieve gronddruk.

De evenwichtsvergelijkingen in  $x$ - en  $z$ -richting zijn nu

$$Q - T \sin \theta - N \cos \theta = 0, \quad (34.14)$$

$$W - N \sin \theta + T \cos \theta = 0. \quad (34.15)$$

Men vindt nu, op dezelfde manier als voor het geval van actieve gronddruk,

$$Q = \frac{1}{2} \gamma h^2 + \frac{\frac{1}{2} \gamma h^2 \sin \phi + ch \cos \phi}{\cos \theta \sin(\theta - \phi)}. \quad (34.16)$$

Ook nu blijkt deze kracht, zoals te verwachten was, af te hangen van de hoek  $\theta$ . De minimale waarde van  $Q$  treedt op als de functie

$$f(\theta) = \cos \theta \sin(\theta - \phi),$$

zo groot mogelijk is. Men vindt nu door differentiatie

$$\frac{df}{d\theta} = \cos(2\theta - \phi),$$

en

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -2 \sin(2\theta - \phi).$$

Er volgt nu dat  $df/d\theta = 0$  als  $2\theta - \phi = \frac{1}{2}\pi$ , ofwel

$$\frac{df}{d\theta} = 0 : \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}. \quad (34.17)$$

Dan is  $d^2 f/d\theta^2 = -2$ , en de functie  $f$  heeft dus voor die waarde van  $\theta$  een maximum. Dat betekent dat de horizontale kracht  $Q$  dan een minimum heeft. De bijbehorende waarde van  $Q$  is

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} : \quad Q = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p + 2ch \sqrt{K_p}, \quad (34.18)$$

waarin  $K_p$  de al eerder gedefiniëerde coëfficiënt van passieve gronddruk is,

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (34.19)$$

Ook in dit geval is het resultaat precies in overeenstemming met die van het vorige hoofdstuk. De procedure van Coulomb blijkt nu precies de maximale (passieve) gronddruk op te leveren.

De procedure van Coulomb kan eenvoudig worden uitgebreid voor meer algemene gevallen. Zo kan men bijvoorbeeld het vlak van de wand een hoek met de verticale richting laten maken, en een helling van het terrein invoeren. Ook kan de grond nog belast worden door een bovenbelasting. Voor dat soort gevallen kan men de procedure in principe gemakkelijk generaliseren. Steeds gaat men uit van rechte glijvlakken, kiest een bewegingsrichting, en maximaliseert of minimaliseert dan de gronddruk. Daarvoor zijn ook wel grafische methodes ontwikkeld. In het volgende hoofdstuk is een aantal resultaten verzameld in tabelvorm.

### Opgaven

34.1 In sommige boeken vindt men voor de coëfficiënten  $K_a$  en  $K_p$  de uitdrukkingen

$$K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\phi\right), \quad K_p = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\phi\right).$$

Berust dat op een vergissing?

34.2 Als men alleen  $K_a$  kent, is het dan moeilijk om  $K_p$  te bepalen?

34.3 Een keermuur moet een hoogte van 4 m droog zand keren. De hoek van inwendige wrijving van het zand is  $30^\circ$ , en het volumegewicht is  $17 \text{ kN/m}^3$ . Op welke horizontale kracht (per meter lengte) moet de keermuur worden ontworpen als er geen strenge eisen worden gesteld aan de vervormingen?

34.4 Hoeveel procent groter of kleiner zou de kracht uit de vorige opgave zijn als de wrijvingshoek van het zand 10 % groter is?

34.5 Op welke kracht moet de keermuur worden ontworpen als de opdrachtgever om esthetische redenen absoluut geen vervormingen van de muur wil?

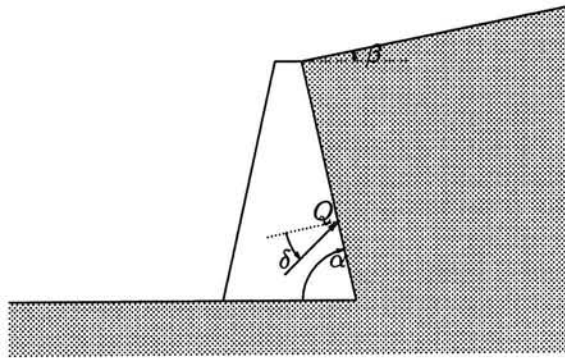
## Hoofdstuk 35

# TABELLEN VOOR HORIZONTALE GRONDDRUK

De berekening van de gronddruk tegen keermuren en dergelijke is een zo vaak voorkomend probleem dat men er tabellen voor heeft samengesteld, alles op basis van de methode van Coulomb. Men vindt die tabellen in diverse handboeken, bijvoorbeeld het Duitse "Grundbau Taschenbuch". In navolging van Coulomb zijn de tabellen alleen geldig voor homogene cohesieloze grond ( $c = 0$ ), dat is dus zand of grind. In dit hoofdstuk worden enige tabellen gegeven voor de actieve en de passieve gronddruk tegen ongeveer verticale wanden, met eventueel een olopend talud boven de muur.

### 35.1 Probleemstelling

Het algemene geval beschouwd in dit hoofdstuk betreft een kerende wand die een hoek  $\alpha$  maakt met de horizontale richting. Het grondoppervlak loopt vanaf de bovenkant van de wand onder een hoek  $\beta$  omhoog, zie figuur 35.1. De wand hoeft niet glad te zijn, zodat de



Figuur 35.1. Horizontale gronddruk.

richting van de kracht  $Q$  niet loodrecht op het vlak van de wand is, maar daar een hoek  $\delta$  mee maakt. Die hoek, de wrijvingshoek tussen grond en wand, wordt geacht bekend te zijn. Omdat de wand meestal nogal glad is neemt men voor  $\delta$  vaak een waarde die wat kleiner is dan de hoek van inwendige wrijving  $\phi$  van de grond, bijvoorbeeld  $\delta = \frac{2}{3}\phi$ . De hoek  $\delta$  van de kracht  $Q$  met de normaal op het vlak van de wand wordt positief gerekend tegen de wijzers van de klok in. In het geval van passieve gronddruk is die hoek dan negatief.

De tabellen geven waarden voor de coëfficiënt  $K$  in de formule

$$Q = \frac{1}{2}K\gamma h^2. \quad (35.1)$$

Die coëfficiënt zou 1 zijn voor het geval van een vloeistof tegen een verticale wand. Men bedenke dat de kracht  $Q$  een hoek  $\alpha - \delta$  met de verticale richting maakt, en dus niet de

horizontale gronddruk geeft, maar de grootte van de resultante. De horizontale component van de kracht is

$$Q_h = Q \sin(\alpha - \delta). \quad (35.2)$$

Bij gebruik van de tabellen om de horizontale kracht te bepalen moet men vaak zelf nog met de factor  $\sin(\alpha - \delta)$  vermenigvuldigen.

De waarden van de actieve coëfficiënt  $K_a$  zijn al door Coulomb berekend. Hij vond langs analytische weg

$$K_a = \frac{\sin^2(\alpha + \phi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha - \delta) \left[ 1 + \sqrt{\{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta)\} / \{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + \beta)\}} \right]^2} \quad (35.3)$$

Voor het passieve geval geldt

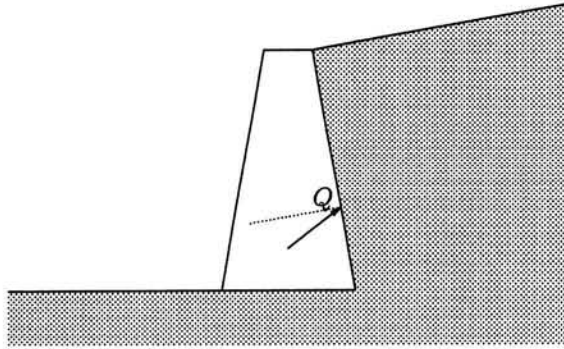
$$K_p = \frac{\sin^2(\alpha - \phi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha - \delta) \left[ 1 - \sqrt{\{\sin(\phi - \delta) \sin(\phi + \beta)\} / \{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + \beta)\}} \right]^2} \quad (35.4)$$

Er wordt op gewezen dat de actieve waarden in het algemeen aan de lage kant zijn, en de passieve aan de hoge kant. En dat niet alleen omdat in werkelijkheid de grond vaak nog niet aan bezwijken toe is, maar ook omdat de bezwijktoestand niet altijd goed berekend wordt. Dat komt door de aanname van rechte glijvlakken. Het is namelijk best mogelijk dat een gebogen glijvlak (bijvoorbeeld een cirkelvormig glijvlak) een hogere actieve gronddruk geeft of een lagere passieve gronddruk. Vooral het effect van dat laatste zal men zich eenvoudig kunnen voorstellen: als de grond bij een kleinere kracht kan bezwijken langs een cirkelvormig glijvlak zal dat ook gebeuren. Er is niets dat de grond dwingt om te wachten tot een recht glijvlak mogelijk is.

Er is gevonden dat cirkelvormige glijvlakken de actieve gronddruk niet veel verhogen. De actieve waarden behorende bij rechte glijvlakken, zoals in de tabellen vermeld, zijn derhalve redelijk nauwkeurig. Anders is het met de waarden voor de passieve gronddruk. Die worden soms aanzienlijk overschat als alleen rechte glijvlakken worden beschouwd. Vooral de getallen groter dan 10 zijn onbetrouwbaar. Dat kan erg gevaarlijk zijn, bijvoorbeeld bij de berekening van de toelaatbare trekkracht op een anker in de grond. Dat heeft dan in werkelijkheid een veel lagere maximale trekkracht dan men uit een tabel voor passieve gronddruk zou afleiden. Er zijn wel tabellen vervaardigd waarin ook rekening gehouden wordt met de mogelijkheid van cirkelvormige glijvlakken. Men zie hiervoor bijvoorbeeld Deel 1 van het Grundbau Taschenbuch. In de literatuur vindt men wel vaak andere notaties voor de hoeken  $\alpha$  en  $\beta$ , en andere tekenafspraken. Ook het teken van de wrijvingshoek  $\delta$  wordt soms anders gekozen. Men zij daarop bedacht bij toepassing van andere formules of andere tabellen.

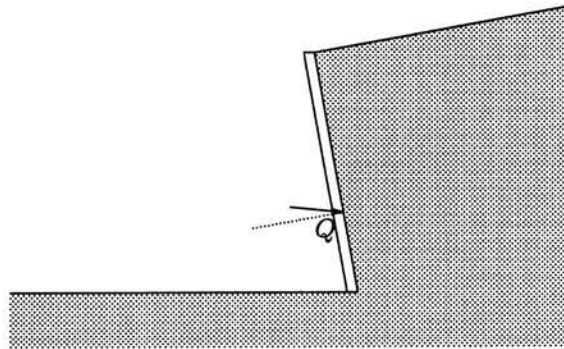
### 35.2 Voorbeeld

Als voorbeeld wordt het geval beschouwd dat de wand een hoek van  $80^\circ$  maakt met de horizontale richting, en de grond onder een hoek van  $10^\circ$  omhoog maakt, zie figuur 35.2. De grond is zand met  $\phi = 30^\circ$ , en de wrijvingshoek tussen de grond en het beton van de keermuur is  $\delta = 20^\circ$ . Gevraagd wordt de horizontale kracht tegen de muur in het geval van actieve gronddruk. In dit geval vindt men uit tabel 35.2 dat  $K = 0.438$ . Dat betekent dat de kracht op de wand is  $Q = 0.219 \gamma h^2$ . De horizontale component is dan, met (35.2),  $Q_h = 0.190 \gamma h^2$ .



Figuur 35.2. Voorbeeld: Actieve gronddruk.

In het geval van passieve gronddruk, als de wand naar rechts beweegt (dat kan bijvoorbeeld als de wand gebruikt wordt als verankering voor een kracht naar rechts), zal de wand een moot grond omhoog persen. Verwacht kan worden dat op de wand dan een schuifkracht naar beneden gericht zal werken. Dat betekent dat de hoek  $\delta$  dan negatief is,  $\delta = -20^\circ$ , zie figuur 35.3. In dit geval vindt men uit tabel 35.3 dat  $K = 7.162$ . De kracht op de wand is



Figuur 35.3. Voorbeeld: Passieve gronddruk.

dus  $Q = 3.581 \gamma h^2$ . De horizontale component is dan, met (35.2),  $Q_h = 3.527 \gamma h^2$ . In dit geval is immers  $\alpha - \delta = 100^\circ$ , omdat  $\delta$  negatief is.

### 35.3 Tabellen

Op de volgende pagina's zijn enige waarden voor  $K_a$  en  $K_p$  weergegeven in tabelvorm.



$\alpha = 90^\circ, \beta = 0^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	0.704	0.589	0.490	0.406	0.333	0.271	0.217	0.172
5°	0.662	0.556	0.465	0.387	0.319	0.260	0.210	0.166
10°	0.635	0.533	0.447	0.373	0.308	0.253	0.204	0.163
15°	0.617	0.518	0.434	0.363	0.301	0.248	0.201	0.160
20°	0.607	0.508	0.427	0.357	0.297	0.245	0.199	0.160
25°	0.604	0.505	0.424	0.355	0.296	0.244	0.199	0.160
30°	0.606	0.506	0.424	0.356	0.297	0.246	0.201	0.162

 $\alpha = 90^\circ, \beta = 10^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	0.970	0.704	0.569	0.462	0.374	0.300	0.238	0.186
5°	0.974	0.679	0.547	0.444	0.359	0.289	0.230	0.180
10°	0.985	0.664	0.531	0.431	0.350	0.282	0.225	0.177
15°	1.004	0.655	0.522	0.423	0.343	0.277	0.221	0.174
20°	1.032	0.654	0.518	0.419	0.340	0.275	0.220	0.174
25°	1.070	0.658	0.518	0.419	0.340	0.275	0.221	0.175
30°	1.120	0.669	0.524	0.422	0.343	0.278	0.223	0.177

 $\alpha = 90^\circ, \beta = 20^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°			0.883	0.572	0.441	0.344	0.267	0.204
5°			0.886	0.558	0.428	0.333	0.259	0.199
10°			0.897	0.549	0.420	0.326	0.254	0.195
15°			0.914	0.546	0.415	0.323	0.251	0.194
20°			0.940	0.547	0.414	0.322	0.250	0.193
25°			0.974	0.553	0.417	0.323	0.252	0.195
30°			1.020	0.565	0.424	0.328	0.256	0.198

 $\alpha = 90^\circ, \beta = 30^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°					0.750	0.436	0.318	0.235
5°					0.753	0.428	0.311	0.229
10°					0.762	0.423	0.306	0.226
15°					0.776	0.422	0.305	0.225
20°					0.798	0.425	0.305	0.225
25°					0.828	0.431	0.309	0.228
30°					0.866	0.442	0.315	0.232

Tabel 35.1. Coëfficiënt van actieve gronddruk,  $K_a$ .

$\alpha = 80^\circ, \beta = 0^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	0.757	0.652	0.559	0.478	0.407	0.343	0.287	0.238
5°	0.720	0.622	0.536	0.460	0.393	0.333	0.280	0.233
10°	0.699	0.603	0.520	0.448	0.384	0.326	0.275	0.229
15°	0.687	0.592	0.511	0.441	0.378	0.323	0.273	0.228
20°	0.684	0.588	0.508	0.438	0.377	0.322	0.273	0.229
25°	0.689	0.591	0.510	0.440	0.379	0.325	0.276	0.232
30°	0.702	0.600	0.517	0.446	0.385	0.330	0.281	0.237

 $\alpha = 80^\circ, \beta = 10^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	1.047	0.784	0.654	0.550	0.461	0.384	0.318	0.261
5°	1.067	0.766	0.636	0.534	0.448	0.374	0.311	0.255
10°	1.097	0.759	0.626	0.524	0.440	0.368	0.307	0.253
15°	1.138	0.759	0.622	0.520	0.437	0.366	0.305	0.252
20°	1.191	0.768	0.625	0.521	0.438	0.367	0.306	0.254
25°	1.259	0.785	0.634	0.528	0.443	0.371	0.310	0.257
30°	1.346	0.811	0.650	0.539	0.452	0.379	0.317	0.264

 $\alpha = 80^\circ, \beta = 20^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°			1.015	0.684	0.548	0.444	0.360	0.291
5°			1.035	0.676	0.538	0.436	0.354	0.286
10°			1.064	0.674	0.534	0.432	0.351	0.283
15°			1.103	0.679	0.535	0.432	0.350	0.284
20°			1.155	0.690	0.540	0.435	0.354	0.286
25°			1.221	0.708	0.551	0.443	0.360	0.292
30°			1.305	0.734	0.568	0.456	0.370	0.300

 $\alpha = 80^\circ, \beta = 30^\circ :$ 

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°					0.925	0.566	0.433	0.337
5°					0.943	0.563	0.428	0.333
10°					0.969	0.564	0.427	0.332
15°					1.005	0.570	0.430	0.333
20°					1.051	0.582	0.437	0.338
25°					1.111	0.600	0.448	0.346
30°					1.189	0.624	0.463	0.358

Tabel 35.2. Coëfficiënt van actieve gronddruk,  $K_a$ .

$\alpha = 90^\circ, \beta = 0^\circ :$

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	1.420	1.698	2.040	2.464	3.000	3.690	4.599	5.828
-5°	1.569	1.901	2.313	2.833	3.505	4.391	5.593	7.278
-10°	1.730	2.131	2.635	3.285	4.143	5.309	6.946	9.345
-15°	1.914	2.403	3.029	3.855	4.976	6.555	8.872	12.466
-20°	2.130	2.735	3.525	4.597	6.105	8.324	11.771	17.539
-25°	2.395	3.151	4.169	5.599	7.704	10.980	16.473	26.696
-30°	2.726	3.691	5.036	7.013	10.095	15.273	24.933	46.087

$\alpha = 90^\circ, \beta = 10^\circ :$

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°		2.099	2.595	3.235	4.080	5.228	6.841	9.204
-5°		2.467	3.086	3.908	5.028	6.605	8.923	12.518
-10°		2.907	3.700	4.783	6.314	8.569	12.076	17.944
-15°		3.456	4.496	5.969	8.145	11.536	17.225	27.812
-20°		4.166	5.572	7.652	10.903	16.370	26.569	48.891
-25°		5.122	7.093	10.181	15.384	25.117	46.474	108.431
-30°		6.470	9.371	14.274	23.468	43.697	102.545	426.159

$\alpha = 80^\circ, \beta = 0^\circ :$

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	1.363	1.582	1.843	2.156	2.535	3.002	3.587	4.332
-5°	1.480	1.737	2.045	2.418	2.879	3.456	4.193	5.158
-10°	1.600	1.905	2.273	2.725	3.292	4.017	4.966	6.244
-15°	1.732	2.096	2.540	3.094	3.802	4.730	5.981	7.726
-20°	1.883	2.321	2.861	3.549	4.450	5.666	7.363	9.838
-25°	2.060	2.590	3.257	4.127	5.299	6.937	9.329	13.021
-30°	2.274	2.923	3.759	4.881	6.450	8.742	12.286	18.184

$\alpha = 80^\circ, \beta = 10^\circ :$

$\delta \setminus \phi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°		1.935	2.308	2.767	3.343	4.079	5.043	6.340
-5°		2.218	2.668	3.233	3.960	4.914	6.201	7.998
-10°		2.541	3.093	3.805	4.742	6.010	7.783	10.372
-15°		2.922	3.614	4.528	5.767	7.504	10.045	13.969
-20°		3.387	4.272	5.474	7.162	9.636	13.465	19.844
-25°		3.975	5.131	6.759	9.148	12.854	19.039	30.500
-30°		4.740	6.295	8.583	12.137	18.084	29.127	53.188

Tabel 35.3. Coëfficiënt van passieve grondruk,  $K_p$ .

**Opgaven**

- 35.1** Controleer of de twee basisgevallen van Coulomb correct in de tabellen zijn terug te vinden.
- 35.2** Controleer of voor het voorbeeld in dit hoofdstuk de tabellen inderdaad geven dat  $K_a = 0.438$  en  $K_p = 7.162$ . Controleer of de analytische formules van Coulomb ook die waarden geven.
- 35.3** Waarom zouden in de tabellen de waarden ontbreken voor gevallen met  $\phi < \beta$ ?
- 35.4** Een keermuur van 5 m hoogte, met een gladde verticale zijwand, keert een grondlichaam met een horizontale bovenbegrenzing. De hoek van inwendige wrijving is  $\phi = 35^\circ$ , en het volumegewicht van de grond is  $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$ . Hoe groot is de horizontale kracht tegen de muur?
- 35.5** Hoe verandert het antwoord op de vorige vraag als de zijwand van de keermuur niet verticaal is, maar een hoek van  $10^\circ$  maakt met de verticale richting?
- 35.6** Een verankering in droog zand bestaat uit een vierkante plaat, met afmetingen  $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . De plaat is in verticale positie in het zand gebracht met zijn bovenkant gelijk met de bovenkant van het zand. Schat de op te nemen trekkracht.

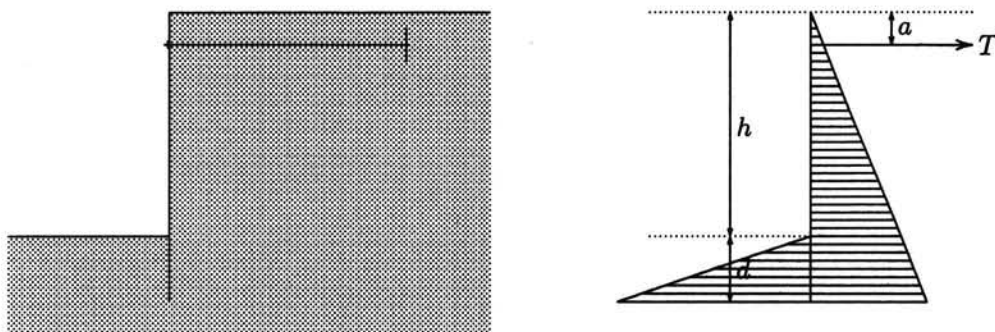
## Hoofdstuk 36

# DAMWANDEN

Voor het keren van een grondlichaam gebruikt men vaak een damwand, dat is een wand opgebouwd uit verticale stalen elementen, of houten of betonnen planken, die door middel van een voegconstructie met elkaar verbonden zijn. Vergeleken met een keermuur zijn het flexibele constructies, die op buiging worden belast, en daarop moeten worden berekend. Er zijn verschillende berekeningsmethoden ontwikkeld. De simpelste bevatten een aantal theoretisch niet goed verantwoorde schematiseringen, maar ze hebben in de praktijk hun waarde wel bewezen.

### 36.1 Damwand in homogene droge grond

Een standaarduitvoering van een damwandconstructie is getekend in figuur 36.1. De gedachte is dat de damwand door de belasting van de grond de neiging zal hebben naar links



Figuur 36.1. Verankerde damwand.

te bewegen. Daardoor zal aan de hoge kant de gronddruk in de buurt van de actieve druk komen te liggen. Deze belasting zal onder meer worden weerstaan door een passieve gronddruk die zich aan de onderzijde links van de damwand zal ontwikkelen. Men neemt nu vaak aan dat aan de hoge kant over de volle hoogte de actieve gronddruk werkt, en aan de lage kant de passieve gronddruk. Omdat de resultante van deze passieve gronddruk altijd beneden die van de actieve gronddruk ligt is er zo geen evenwicht mogelijk. Men kan dat evenwicht verzekeren met behulp van trekankers aan de bovenzijde. Doet men dit niet dan zal de damwand roteren, eventueel net zo lang totdat aan de uiterste onderkant een verplaatsing naar rechts optreedt met een daarbij behorende (passieve) gronddruk naar links. Ook dan is er evenwicht mogelijk, maar men kan verwachten dat daarbij zeer grote verplaatsingen van de bovenkant van de damwand optreden. Daarom lijkt het beter een verankerung aan te brengen. Een alternatief daarvoor kan zijn een stempeling van twee damwanden tegen elkaar, bijvoorbeeld in het geval van een smalle bouwput.

Voor het verkrijgen van evenwicht is een zekere minimale inheidiepte nodig. Bij een zeer geringe inheidiepte zou de onderkant van de damwand door de grond kunnen worden

gedrukt. Er zal eerst getracht worden de minimale inheidiepte te bepalen, voor een eenvoudig geval. Het eenvoudigste geval treedt op als er geen grondwater is, en de grond homogeen is. Dan is de spanningsverdeling zoals getekend in figuur 36.1. Als de kerende hoogte (dat is het verschil tussen de grond links en rechts van de damwand)  $h$  is, de inheidiepte  $d$ , en de diepte van de trekstang  $a$ , dan vindt men uit het momentenevenwicht ten opzichte van het aangrijpingspunt van de ankerkracht

$$\frac{1}{2}K_a\gamma(h+d)^2\left(\frac{2}{3}h + \frac{2}{3}d - a\right) - \frac{1}{2}K_p\gamma d^2\left(h + \frac{2}{3}d - a\right) = 0.$$

Hieruit volgt

$$(h+d)^2\left(\frac{2}{3}h + \frac{2}{3}d - a\right) = \frac{K_p}{K_a}d^2\left(h + \frac{2}{3}d - a\right). \quad (36.1)$$

Dit is een derdegraadsvergelijking in de variabele  $d$ . Men kan die bijvoorbeeld iteratief oplossen door te schrijven

$$\left(\frac{d}{h}\right)^2 = \frac{2K_a}{3K_p}\left(1 + \frac{d}{h}\right)^2 \frac{1 + (d/h) - \frac{3}{2}(a/h)}{1 + \frac{2}{3}(d/h) - (a/h)}. \quad (36.2)$$

Uitgaande van een beginschatting (bijvoorbeeld  $d/h = 0$ ) kan men steeds betere waarden voor  $d/h$  vinden door de schatting in het rechterlid in te voeren. Dit proces blijkt vrij snel te convergeren. Er zijn ongeveer 10 iteraties nodig om een precisie van  $10^{-6}$  te bereiken. De resultaten voor verschillende waarden van  $K_p/K_a$  en  $d/h$  zijn weergegeven in tabel 36.1.

$a/h$	$K_p/K_a$							
	4	6	8	9	10	12	14	16
0.00	0.793	0.550	0.438	0.401	0.371	0.326	0.294	0.269
0.05	0.785	0.545	0.433	0.396	0.367	0.323	0.290	0.265
0.10	0.777	0.539	0.428	0.392	0.363	0.319	0.287	0.262
0.15	0.768	0.532	0.422	0.386	0.358	0.314	0.282	0.258
0.20	0.759	0.524	0.416	0.380	0.352	0.309	0.278	0.254
0.25	0.749	0.516	0.409	0.374	0.346	0.303	0.273	0.249
0.30	0.737	0.507	0.401	0.366	0.339	0.297	0.267	0.243
0.35	0.724	0.496	0.392	0.358	0.330	0.289	0.260	0.237
0.40	0.710	0.484	0.381	0.348	0.321	0.281	0.252	0.229
0.45	0.693	0.470	0.369	0.336	0.310	0.270	0.242	0.220
0.50	0.674	0.454	0.354	0.322	0.296	0.258	0.230	0.209

Tabel 36.1. Inheidiepte damwand, ( $d/h$ ).

De grootte van de ankerkracht vindt men uit het horizontale evenwicht,

$$T = \frac{1}{2}\gamma(h+d)^2 - \frac{1}{2}K_p\gamma d^2. \quad (36.3)$$

De waarden van  $T/F_a$  zijn verzameld in tabel 36.2. De grootte  $F_a$  hierin is de totale actieve kracht,

$$F_a = \frac{1}{2}K_a\gamma(h+d)^2. \quad (36.4)$$

Het anker blijkt een behoorlijk deel van de totale actieve kracht op te nemen, variërend van 20 % tot ruim 50 %. De rest wordt uiteraard opgenomen door de passieve gronddruk.

$a/h$	$K_p/K_a$							
	4	6	8	9	10	12	14	16
0.00	0.218	0.244	0.258	0.263	0.267	0.274	0.279	0.283
0.05	0.226	0.254	0.269	0.275	0.279	0.286	0.292	0.296
0.10	0.235	0.265	0.281	0.287	0.292	0.300	0.306	0.310
0.15	0.245	0.277	0.295	0.301	0.306	0.315	0.321	0.326
0.20	0.255	0.290	0.309	0.316	0.322	0.331	0.338	0.344
0.25	0.267	0.305	0.326	0.334	0.340	0.350	0.358	0.364
0.30	0.280	0.321	0.345	0.353	0.360	0.371	0.380	0.387
0.35	0.294	0.340	0.366	0.375	0.383	0.395	0.405	0.413
0.40	0.311	0.361	0.390	0.401	0.409	0.423	0.434	0.443
0.45	0.329	0.386	0.419	0.431	0.441	0.456	0.469	0.478
0.50	0.351	0.415	0.453	0.466	0.478	0.496	0.510	0.521

Tabel 36.2. Ankerkracht damwand, ( $T/F_a$ ).

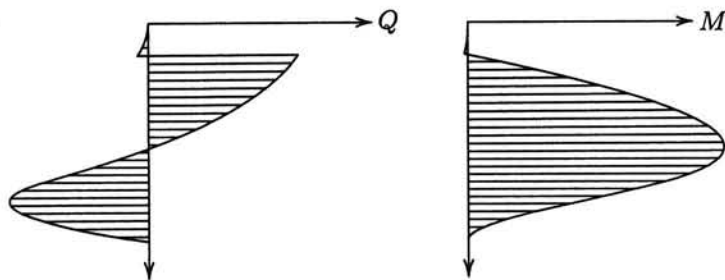
Als de lengte van de damwand ( $h + d$ ) en de ankerkracht bekend zijn, kan men eenvoudig de dwarskracht  $Q$  en het buigend moment  $M$  in de damwand berekenen. Voor het geval dat  $K_a = \frac{1}{3}$ ,  $K_p = 3$ , en  $a/h = 0.2$  zijn de resultaten weergegeven in tabel 36.3. Ter plaatse van het anker vertoont de dwarskracht een sprong ter grootte van de ankerkracht. Aan de bovenzijde en de onderzijde van de damwand zijn de dwarskracht en het buigend moment uiteraard nul.

$z/h$	$f/\gamma h$	$Q/\gamma h^2$	$M/\gamma h^3$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.10000	-0.03333	-0.00167	-0.00006
0.19999	0.06666	-0.00667	-0.00044
0.20001	0.06667	0.09381	-0.00044
0.30000	0.10000	0.08548	0.00855
0.40000	0.13333	0.07381	0.01654
0.50000	0.16667	0.05881	0.02320
0.60000	0.20000	0.04048	0.02819
0.70000	0.23333	0.01881	0.03119
0.80000	0.26667	-0.00619	0.03184
0.90000	0.30000	-0.03452	0.02984
1.00000	0.33333	-0.06619	0.02483
1.10000	0.06667	-0.08619	0.01699
1.20000	-0.20000	-0.07952	0.00848
1.30000	-0.46667	-0.04619	0.00197
1.38047	-0.68125	0.00000	0.00000

Tabel 36.3. Damwandberekening.

Het maximale moment, waarop de damwand moet worden gedimensioneerd, is  $0.032 \gamma h^3$ . De resultaten van het voorbeeld zijn grafisch weergegeven in figuur 36.2.

Een grove controle kan men uitvoeren door de damwand te beschouwen als een ligger op twee steunpunten, zeg tussen  $z/h = 0.2$  en  $z/h = 1.2$ . De lengte van die ligger is dan  $h$ , en de gemiddelde belasting is  $K_a \gamma (0.7 h)$ . Verdeelt men die belasting gelijkmatig over



Figuur 36.2. Dwarskracht en Buigend moment.

de ligger, dan vindt men als grootste moment  $M = 0.029\gamma h^3$ . Dat is voor zo'n eenvoudige benadering niet eens zo slecht.

Zou men de damwand construeren zoals hier berekend dan is er geen enkele reserve tegen bezwijken. Daarom reduceert men soms de passieve gronddruk, door een enigszins voorzichtige waarde voor  $K_p$  in te voeren. De tabellen uit dit hoofdstuk blijven dan geldig. Men vindt dan uiteraard wel een grotere inheidiepte, zoals blijkt uit de eerste tabel. Als  $K_p/K_a$  kleiner wordt, wordt  $d/h$  groter. In het volgende hoofdstuk wordt nog een andere, en meer evenwichtige, methode beschreven om het risico van bezwijken te reduceren.

```

100 CLS:PRINT "Damwand in homogene droge grond"
110 PRINT "Minimale lengte":PRINT
120 INPUT "Kerende hoogte ..... ";H
130 INPUT "Diepte van het anker ..... ";A
140 INPUT "Coeff. van actieve gronddruk .... ";KA
150 INPUT "Coeff. van passieve gronddruk ... ";KP
160 PA=KP/KA:A=A/H:B=1/(1.5*PA):D=0:A$="& ###.#####"
170 C=B*(1+D)*(1+D)*(1+D-1.5*A)/(1+D/1.5-A)
180 IF C<0 THEN PRINT "Geen oplossing":END
190 C=SQR(C):E=ABS(C-D):D=C:IF E>0.000001 THEN 170
200 PRINT USING A$;"d/h = ";D
210 T=KA*(1+D)*(1+D)/2-KP*D*D/2
220 PRINT USING A$;"T/ghh = ";T
230 INPUT "z/h = ";Z
240 IF Z<0 THEN END
250 IF Z>1+D THEN PRINT " Dat kan niet":GOTO 230
260 F=KA*Z:IF Z>1 THEN F=F-KP*(Z-1)
270 Q=-KA*Z*Z/2:IF Z>A THEN Q=Q+T
280 IF Z>1 THEN Q=Q+KP*(Z-1)*(Z-1)/2
290 M=-KA*Z*Z*Z/6:IF Z>A THEN M=M+T*(Z-A)
300 IF Z>1 THEN M=M+KP*(Z-1)*(Z-1)*(Z-1)/6
310 PRINT USING A$;" f/gh = ";F;
320 PRINT USING A$;" Q/ghh = ";Q;
330 PRINT USING A$;" M/ghhh = ";M
340 GOTO 230

```

Programma 36.1. Damwand in homogene droge grond.



Een eenvoudig computerprogramma voor de berekening van de minimale lengte, de bijbehorende ankerkracht, en de dwarskrachten en de buigende momenten is weergegeven als programma 36.1. Het programma werkt interactief. Na het invoeren van de parameters  $K_a$ ,  $K_p$  en  $a/h$  berekent het programma eerst  $d/h$  en de ankerkracht  $T$ , en geeft daarna, voor door de gebruiker in te voeren waarden van  $z/h$ , de resulterende belasting, de dwarskracht en het buigend moment.

## 36.2 Waterspanningen

Als de damwand in grond staat met links en rechts grondwater wordt het probleem nogal wat ingewikkelder. Omdat het bezwijken van de grond volgens het Mohr-Coulomb criterium betrekking heeft op de effectieve spanningen zijn ook alle relaties die in de vorige hoofdstukken zijn afgeleid tussen verticale en horizontale spanningen, met coëfficiënten van actieve en passieve gronddruk  $K_a$  en  $K_p$ , uitsluitend geldig voor de effectieve spanningen. Dat betekent dat men eerst de verticale effectieve spanningen moet berekenen voordat men de horizontale effectieve spanning kan bepalen. De algemene procedure voor de bepaling van horizontale gronddrukken is als volgt.

1. Bepaal de verticale totaalspanningen, uit het gewicht van de grond en een eventuele bovenbelasting.
2. Bepaal de waterspanningen, uitgaande van de waterstand. Eventueel moet hierbij nog rekening worden gehouden met de grondwaterstroming. De waterspanningen zijn dan niet hydrostatisch.
3. Bepaal op elke diepte de verticale effectieve korrelspanning, als het verschil van de verticale totaalspanning en de waterspanning.
4. Bepaal de horizontale effectieve spanningen, met de op elke diepte van toepassing zijnde waarden van  $K_a$  of  $K_p$ , en eventueel de cohesie  $c$ .
5. Bepaal de horizontale totaalspanning, door de waterspanning bij de horizontale korrelspanning op te tellen.

In formulevorm is dit, schematisch:

$$\sigma_{zz} = q_z + \sum \gamma dz, \quad (36.5)$$

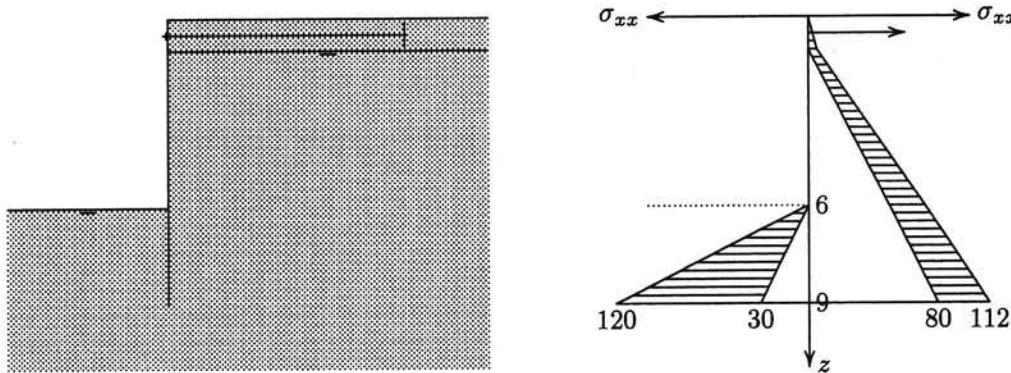
$$p = \gamma_w(z - z_w), \quad (36.6)$$

$$\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - p, \quad (36.7)$$

$$\sigma'_{xx} = K\sigma'_{zz} \pm 2c\sqrt{K}, \quad (36.8)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + p. \quad (36.9)$$

Hierin is aangenomen dat de waterdruk overal aanwezig is, en bepaald wordt door het niveau  $z_w$ . Er kan ook best een zone zijn, boven de grondwaterspiegel, waar de waterspanningen nul zijn. Ook is er nog geen rekening mee gehouden dat formule (36.8) in het geval van actieve gronddruk tot negatieve horizontale effectieve spanningen (trek) kan leiden. Dat kan niet, en moet dan dus worden vervangen door  $\sigma'_{xx} = 0$ . In het geval van een damwand moet de berekening apart worden uitgevoerd voor de beide zijden van de damwand, omdat links en rechts zowel het maaiveldniveau als de waterstand kunnen verschillen. Daar is de damwand immers juist voor bedoeld.



Figuur 36.3. Damwand in grond met grondwater.

rechts zowel het maaiveldniveau als de waterstand kunnen verschillen. Daar is de damwand immers juist voor bedoeld.

Een voorbeeld is getekend in figuur 36.3. Het betreft een ingraving van 6 m diepte in homogene grond. Aan de rechterzijde ligt de grondwaterstand op 1 m beneden maaiveld. Aan de linkerzijde valt de grondwaterstand samen met de bodem van de bouwput. Er wordt, ter vereenvoudiging, aangenomen dat zowel links als rechts de waterdrukken hydrostatisch verlopen. Dat zou kunnen als de damwand met zijn voet in een slecht doorlatende laag staat. De damwand is voorzien van een anker op 0.50 m diepte. De lengte van de damwand is vooralsnog onbekend, maar wordt voorlopig als 9 m aangenomen. De grond is homogeen zand, met een droog volumegewicht van  $16 \text{ kN/m}^3$ , een nat volumegewicht van  $20 \text{ kN/m}^3$ . Voor dit zand wordt gesteld dat  $K_a = 0.3333$ ,  $K_p = 3.0$  en  $c = 0$ .

Om de spanningen tegen de wand te berekenen of te tekenen is het het handigst een paar karakteristieke punten te beschouwen. Aan de rechterkant is tot op een diepte van 1 m de grond droog. Op 1 m diepte is de verticale totaalspanning  $\sigma_{zz} = 16 \text{ kPa}$ . Omdat de waterspanning daar nul is, is de verticale effectieve spanning  $\sigma'_{zz} = 16 \text{ kPa}$ . De horizontale effectieve spanning is dan  $\sigma'_{xx} = 5.3 \text{ kPa}$ , en de horizontale totaalspanning is daaraan gelijk, omdat  $p = 0$ . Op een diepte van 9 m komt er 8 m natte grond bij. De verticale totaalspanning is dan  $\sigma_{zz} = 176 \text{ kPa}$ . De waterspanning is daar  $p = 80 \text{ kPa}$ , en de verticale effectieve spanning is dus  $\sigma'_{zz} = 96 \text{ kPa}$ . Omdat  $K_a = 0.3333$  is de horizontale effectieve spanning  $\sigma'_{xx} = 32 \text{ kPa}$ . De horizontale totaalspanning is dan tenslotte  $\sigma_{xx} = 112 \text{ kPa}$ . Aan de linkerzijde zijn alle spanningen, inclusief de waterspanning, op de bodem van de bouwput, dat is dus op 6 m diepte, gelijk aan nul. Op 9 m diepte is  $\sigma_{zz} = 60 \text{ kPa}$  en  $p = 30 \text{ kPa}$ . Dan is  $\sigma'_{zz} = 30 \text{ kPa}$ , en dus  $\sigma'_{xx} = 90 \text{ kPa}$ . De horizontale totaalspanning vindt men door hier weer de waterspanning bij op te tellen,  $\sigma_{xx} = 120 \text{ kPa}$ . Zelfs in dit eenvoudige geval is de verdeling van de horizontale belasting van de damwand al tamelijk ingewikkeld. In veel praktijkgevallen is die verdeling nog aanmerkelijk ingewikkelder. Meestal bestaat de grond namelijk uit lagen met verschillende eigenschappen. Niet alleen de volumegewichten zijn dan verschillend, maar ook de gronddrukcoëfficiënten. Dit leidt tot sprongen in de verdeling van de horizontale spanning.

De lengte van de damwand moet zodanig worden bepaald dat er juist evenwicht is, met de onderkant van de damwand als vrij uiteinde. Daar moet de dwarskracht nul zijn, evenals het buigend moment. Net als in het eenvoudige droge geval dat eerder in dit hoofdstuk is beschouwd, zie figuur 36.1, kan men de lengte bepalen uit het momentenevenwicht van de belasting ten opzichte van het aangrijpingspunt van de ankerkracht. Het handigste gaat dat iteratief, en numeriek. De berekeningen kunnen worden uitgevoerd met het programma 36.2.

linkerkant wordt van boven naar beneden uitgerekend, en dan wordt ook steeds het moment ten opzichte van het verankeringspunt bepaald (dat is de grootheid MT). Dat gebeurt eerst

```

100 CLS:PRINT "Damwand in homogene grond":PRINT:NN=10000
110 DIM M(NN),Q(NN),F(NN)
120 INPUT "Diepte van de ingraving (m) ..... ";H
130 INPUT "Diepte van het anker (m) ..... ";DA
140 INPUT "Coef. van actieve gronddruk ..... ";CA
150 INPUT "Coef. van passieve gronddruk ..... ";CP
160 INPUT "Volumegewicht droog (kN/m3) ..... ";GD
170 INPUT "Volumegewicht nat (kN/m3) ..... ";GN
180 INPUT "Diepte grondwater links (m) ..... ";WL
190 INPUT "Diepte grondwater rechts (m) ..... ";WR
200 N=NN/3:HH=H:DZ=HH/N:DZ2=DZ/2:WW=10:A$="#####.###":PRINT
210 TLZ=0:PL=0:TRZ=0:PR=0:MT=0:Z=0:F(0)=0:Q(0)=0:M(0)=0
220 FOR I=1 TO N:Z=Z+DZ:G=WW:W=WW:IF Z-DZ2<WL THEN G=0:W=0
230 TLZ=TLZ+G*DZ:PL=PL+W*DZ:SLZ=TLZ-PL:SLX=SLZ:TLX=SLX+PL
240 G=GN:W=WW:IF Z-DZ2<WR THEN G=GD:W=0
250 TRZ=TRZ+G*DZ:PR=PR+W*DZ:SRZ=TRZ-PR:SRX=CA*SRZ:TRX=SRX+PR
260 F(I)=TRX-TLX:FF=(F(I)+F(I-1))*DZ2:Q(I)=Q(I-1)-FF
270 M(I)=M(I-1)+(Q(I)+Q(I-1))*DZ2:MT=MT+FF*(Z-DA-DZ2):NEXT I
280 WHILE MT>0:N=N+1:Z=Z+DZ:G=GN:W=WW:IF Z-DZ2<WL THEN G=GD:W=0
290 TLZ=TLZ+G*DZ:PL=PL+W*DZ:SLZ=TLZ-PL:SLX=CP*SLZ:TLX=SLX+PL
300 G=GN:W=WW:IF Z-DZ2<WR THEN G=GD:W=0
310 TRZ=TRZ+G*DZ:PR=PR+W*DZ:SRZ=TRZ-PR:SRX=CA*SRZ:TRX=SRX+PR
320 F(N)=TRX-TLX:FF=(F(N)+F(N-1))*DZ2:Q(N)=Q(N-1)-FF
330 M(N)=M(N-1)+(Q(N)+Q(N-1))*DZ2:MT=MT+FF*(Z-DA-DZ2)
340 IF N=NN THEN PRINT "Geen oplossing":STOP:END
350 WEND
360 HH=Z:FT=-M(N)/(HH-DA):Z=0:MM=0
370 FOR I=1 TO N:Z=Z+DZ:IF (Z>DA) THEN Q(I)=Q(I)+FT:M(I)=M(I)+FT*(Z-DA)
380 IF (M(I)>MM) THEN MM=M(I)
390 NEXT I
400 PRINT "Minimale lengte (m) ..... ";:PRINT USING A$;HH
410 PRINT "Ankerkracht (kN/m) ..... ";:PRINT USING A$;FT
420 PRINT "Maximaal moment (kNm/m) ..... ";:PRINT USING A$;MM
430 PRINT "Dwarskracht aan de voet ..... ";:PRINT USING A$;Q(N)
440 PRINT "Moment aan de voet ..... ";:PRINT USING A$;M(N)
450 STOP:END

```

### Programma 36.2. Damwand in homogene grond.

voor het deel van de damwand tot de bodem van de ingraving, in regel 220 tot en met 270. De verticale totaalspanningen  $\sigma_{zz}$  links en rechts van de damwand worden aangegeven met TLZ en TRZ, de verticale effectieve spanningen met SLZ en SRZ, de horizontale effectieve spanningen met SLX en SRX, en de horizontale totaalspanningen met TLX en TRX. De grootheid F(I) is de resulterende belasting. De lengte van de damwand wordt geleidelijk vergroot, vanaf de startwaarde HH=H, in kleine stapjes ter grootte DZ, net zo lang totdat MT van teken wisselt. Dan is de lengte van de damwand bepaald (HH). Als bij een lengte van 3

maal de diepte van de ingraving nog geen evenwicht is gevonden geeft het programma een foutmelding, en stopt. Tijdens de berekening worden steeds ook de dwarskracht  $Q(I)$  en het buigend moment  $M(I)$  bepaald, onder verwaarlozing van de invloed van de ankerkracht, die immers nog onbekend is. Als de lengte van de damwand eenmaal bepaald is kan de grootte van de ankerkracht worden gevonden uit de voorwaarde dat het buigend moment aan de onderkant nul moet zijn. Dat gebeurt in regel 360. Dan kunnen de dwarskracht en het buigend moment worden gecorrigeerd voor de bijdrage van de ankerkracht, en drukt het programma enige uitvoergegevens af. Daarbij is ook de dwarskracht aan de onderkant, die eigenlijk nul moet zijn. Meestal klopt dat niet precies, door de numerieke benadering. Dat geeft een indruk van de nauwkeurigheid van de berekening.

In het voorbeeld is:  $H=6.0$ ,  $DA=0.5$ ,  $CA=0.3333$ ,  $CP=3.0$ ,  $GD=16.0$ ,  $GN=20.0$ ,  $WL=6.0$ ,  $WR=1.0$ . Het programma geeft dat in dit geval de lengte van de damwand 11.825 m moet zijn. De ankerkracht is 162.710 kN/m, en het grootste buigend moment is 544.263 kNm/m. De dwarskracht aan de onderkant blijkt niet precies nul te zijn, maar 0.043 kN. Het buigend moment is aan de onderkant wel precies nul.

### Opgaven

**36.1** Controleer een aantal waarden uit de tabellen 36.1 en 36.2 met behulp van het computerprogramma 36.1.

**36.2** Controleer de waarden uit tabel 36.3 met behulp van het computerprogramma 36.1.

**36.3** Een damwand moet een hoogte van 5 m keren, in droog zand, met  $\phi = 30^\circ$ . De diepte van het anker is 1 m. Bereken de benodigde inheidiepte, volgens de tabel 36.1, met het programma 36.1 en met het programma 36.2.

**36.4** Controleer de uitvoer van het voorbeeld van programma 36.2. In dit geval moet de damwand blijkbaar nogal lang zijn, bijna tweemaal de diepte van de ingraving. Hoe lang moet de damwand zijn als de diepte van het anker 2.0 m is?

**36.5** Wijzig het programma 36.2 zodat het als uitvoer ook de verdeelde belasting, de dwarskracht en het buigend moment geeft, als functie van de diepte.

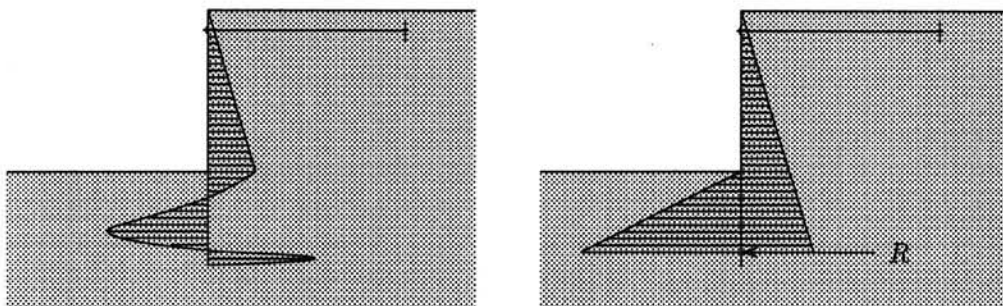
## Hoofdstuk 37

### BLUM

In het vorige hoofdstuk is beschreven hoe men de minimaal benodigde lengte van een damwand kan berekenen. In de praktijk doet men er natuurlijk verstandig aan die lengte iets groter te kiezen. Het zou immers fataal zijn als de lengte van de damwand net onvoldoende is om evenwicht te verzekeren. Dan bezwijkt de constructie gegarandeerd, doordat de passieve gronddruk onvoldoende is om de actieve gronddruk te weerstaan. Men zegt dan dat de damwand *onderruit* gaat. Om die reden neemt men de damwand meestal wat langer dan minimaal nodig. Door Blum is daarvoor een rekenmethode ontwikkeld die enerzijds die extra lengte motiveert, en anderzijds de extra lengte gebruikt om een wat lichter profiel te kunnen kiezen. De methode Blum werd vroeger vooral toegepast met behulp van grafische oplossingsmethoden (met "poolfiguur en stangenveelhoek"), tegenwoordig voert men de berekening meestal uit met behulp van een computerprogramma. Een eenvoudige versie van zo'n programma wordt in dit hoofdstuk en het volgende gepresenteerd.

#### 37.1 Schematisering volgens Blum

Neemt men de damwand iets langer dan minimaal nodig, dan zal de passieve gronddruk zich niet over de volle lengte hoeven te ontwikkelen. Men kan verwachten dat de gronddruk tegen de damwand dan ongeveer zal zijn zoals getekend in figuur 37.1. Door de extra lengte van de damwand zal de onderkant als een soort inklemming werken, waarbij de onderkant van de damwand de neiging heeft naar rechts te verplaatsen. Daar zal zich dan een druk naar links opbouwen, die tezamen met de onvolledige passieve gronddruk het inklemmingsmoment levert. Door Blum is voorgesteld de belasting te schematiseren zoals voorgesteld in de rechterhelft van de figuur. De kracht  $R$  (door Blum de *Ersatzkraft* genoemd) is daarbij equivalent met de gronddruk onderaan de damwand. De precieze verdeling daarvan wordt verder in het midden gelaten. Voorts wordt gesteld dat ter plaatse van de kracht  $R$ , en daaronder, het moment nul is. Het inklemmingsmoment wordt geleverd door de kracht  $R$  en



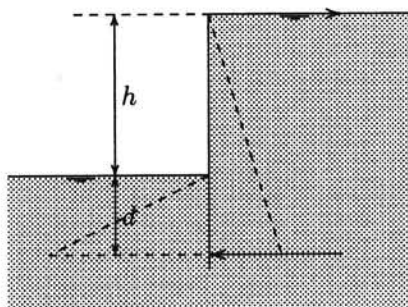
Figuur 37.1. Schematisering volgens Blum.

de passieve gronddruk er juist boven. De gedachte van Blum is dat dat inklemmingsmoment waarschijnlijk de buigende momenten in de damwand zal reduceren, en dat daardoor met

een lichter profiel kan worden volstaan. Zo worden de extra kosten die ontstaan door de langere damwand enigszins gecompenseerd door het lichtere profiel. Daarbij speelt op de achtergrond ook een rol dat bezwijken door een te korte damwand rampzalig is, maar dat bezwijken door overschrijden van het maximale buigend moment enige reserve kent. Bij vloeien van het staal blijft het moment toch minstens constant, en neemt meestal nog wat toe, en ook de gronddruk kan zich nog wat herverdelen, omdat die nog niet overal de uiterste waarden heeft bereikt.

## 37.2 Principe van de rekenmethode

Het principe van de rekenmethode van Blum is dat men de damwand aan de onderkant ingeklemd denkt, met aan die onderkant een buigend moment gelijk aan nul, en een dwarskracht ongelijk nul. Deze dwarskracht wordt ge-



Figuur 37.2. Voorbeeld.

acht de resultante te zijn van de spanningen beneden het denkbeeldige niveau van de inklemming. Die inklemming wordt wel geacht zo stevig te zijn dat er geen verplaatsing is, geen rotatie, en ook geen tweede afgeleide, en dus ook geen buigend moment. De lengte van de damwand wordt nu zodanig bepaald dat er evenwicht is, met actieve gronddruk aan de hoge kant en passieve gronddruk aan de lage kant, en zo dat de horizontale verplaatsing ter plaatse van het anker nul is. De methode kan het best worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

Een eerste eenvoudig voorbeeld betreft een damwand met een kerende hoogte  $h$ , in homogene met water verzadigde grond, zie figuur 37.2. Om een analytische berekening nog net mogelijk te maken wordt aangenomen dat zowel links als rechts van de damwand de grondwaterstand samenvalt met de bovenkant van de grond, en dat er een verankering is precies aan de bovenkant van de damwand. De diepte  $d$  van de inklemming van de damwand in de grond is nog onbekend. Dit is juist de belangrijkste grootte die berekend moet worden.

Aan de actieve kant van de damwand is de verticale totaalspanning

$$\sigma_{zz} = \gamma z,$$

waarin  $\gamma$  het volumegewicht van de verzadigde grond is. De waterspanningen zijn

$$p = \gamma_w z,$$

en de effectieve spanningen zijn dus

$$\sigma'_{zz} = (\gamma - \gamma_w)z.$$

De horizontale effectieve spanningen zijn nu, voor niet-cohesieve grond,

$$\sigma'_{xx} = K_a(\gamma - \gamma_w)z.$$

De horizontale totaalspanningen vindt men door de waterspanningen daar weer bij op te tellen,

$$\sigma_{xx} = [K_a(\gamma - \gamma_w) + \gamma_w]z.$$

Men kan dit ook schrijven als

$$\sigma_{xx} = K_a^* \gamma z, \quad (37.1)$$

waarin

$$K_a^* = K_a(1 - \gamma_w/\gamma) + \gamma_w/\gamma. \quad (37.2)$$

Als  $K_a = 0.3333$  en  $\gamma_w/\gamma = 0.5$  is  $K_a^* = 0.6667$ . Men merke op dat de eenvoudige uitdrukking (37.1), die lineair is in  $z$ , alleen geldig is als de grond homogeen is, met  $c = 0$ , en de grondwaterspiegel samenvalt met het grondoppervlak. Dat zijn nogal wat beperkingen, maar de berekening is ook alleen maar bedoeld om het principe van de methode Blum te illustreren.

Op dezelfde manier als voor de spanningen aan de actieve kant vindt men voor de horizontale totaalspanningen aan de passieve kant, voor  $z > h$ ,

$$\sigma_{xx} = K_p^* \gamma (z - h), \quad (37.3)$$

waarin

$$K_p^* = K_p(1 - \gamma_w/\gamma) + \gamma_w/\gamma. \quad (37.4)$$

Als  $K_p = 3.0$  en  $\gamma_w/\gamma = 0.5$  is  $K_p^* = 2.0$ .

De resulterende actieve en passieve krachten zijn

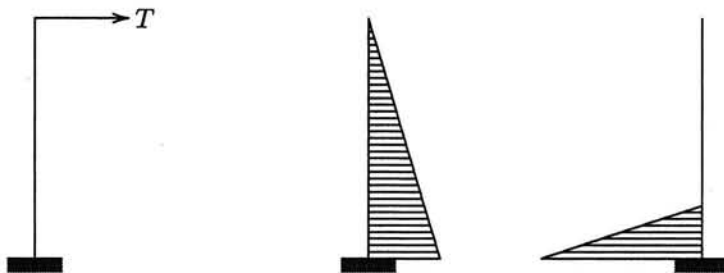
$$F_a = \frac{1}{2} K_a^* \gamma (h + d)^2,$$

$$F_p = \frac{1}{2} K_p^* \gamma d^2.$$

De voorwaarde dat het buigend moment aan de onderkant van de damwand ter plaatse van de denkbeeldige inklemming nul moet zijn geeft

$$T(h + d) = \frac{1}{6} K_a^* \gamma (h + d)^3 - \frac{1}{6} K_p^* \gamma d^3. \quad (37.5)$$

Voor de berekening van de horizontale verplaatsing van de bovenkant van de damwand, die nul moet zijn, kan men het effect van de drie belastingen het beste apart beschouwen, zie figuur 37.3.



Figuur 37.3. Belastingen van de ingeklemde damwand volgens Blum.

Het eerste belastingsgeval is de ankerkracht  $T$ , werkend aan de top van de damwand. Deze kracht leidt tot een verplaatsing

$$u_1 = \frac{T(h + d)^3}{3EI}. \quad (37.6)$$

Dit is een bekend basisgeval (een *vergeet-me-nietje*) uit de toegepaste mechanica.

Voor het geval van een driehoekige belasting  $f = az$  op een ingeklemde ligger met een lengte  $l$ , zie het middelste belastingsgeval in figuur 37.3, kan men de verplaatsingen vinden met behulp van de theorie van buiging van liggers uit de toegepaste mechanica. Door integratie van de differentiaalvergelijking  $EI d^4 u/dz^4 = f$ , met als randvoorwaarden dat aan de bovenkant het moment en de dwarskracht nul zijn, en dat aan de onderkant de verplaatsing  $u$  en de hoekverdraaiing nul zijn, vindt men voor de verplaatsing van het vrije uiteinde

$$u_0 = \frac{al^5}{30 EI}. \quad (37.7)$$

Voor de hoekverdraaiing van het vrije uiteinde vindt men

$$\varphi_0 = \frac{al^4}{24 EI}. \quad (37.8)$$

Met behulp van deze formules vindt men voor de horizontale verplaatsing van de bovenkant van de damwand ten gevolge van de actieve gronddruk aan de rechterkant van de damwand, met (37.1) en (37.7),

$$u_2 = -\frac{K_a^* \gamma (h+d)^5}{30 EI}. \quad (37.9)$$

Het minteken hierin geeft aan dat de verplaatsing naar links is.

Voor de verplaatsing ten gevolge van de passieve gronddruk aan de linkerkant van de damwand, zoals beschreven door (37.3), vindt men

$$u_3 = \frac{K_p^* \gamma d^5}{30 EI} + \frac{K_p^* \gamma d^4 h}{24 EI}. \quad (37.10)$$

De eerste term is de verplaatsing aan de bovenkant van de belasting, de tweede term geeft de extra verplaatsing van de bovenkant van de damwand door de rotatie aan de bovenkant van de belasting. Tezamen vormen die twee grootheden de verplaatsing van de top van de damwand. Het bovenste, onbelaste, deel van de damwand vervormt immers niet bij deze belasting.

De drie verplaatsingen (37.6), (37.9) en (37.10) moeten samen nul zijn. Dit geeft, met (37.5), en na vermenigvuldiging met  $EI/K_p^* \gamma$ ,

$$\frac{K_a^*}{K_p^*} \frac{(h+d)^5}{18} - \frac{d^3(h+d)^2}{18} - \frac{K_a^*}{K_p^*} \frac{(h+d)^5}{30} + \frac{d^5}{30} + \frac{d^4 h}{24} = 0,$$

ofwel, na enige hergroepering van termen,

$$\left(\frac{d}{h}\right)^3 = \frac{8(K_a^*/K_p^*)(1+d/h)^5}{20(1+d/h)^2 - 15d/h - 12(d/h)^2}. \quad (37.11)$$

Uit deze vergelijking kan  $d/h$  iteratief worden opgelost, uitgaande van een beginschatting, eventueel simpelweg  $d/h = 0.0$ .

De berekeningen kunnen worden uitgevoerd met het programma 37.1. Het programma vraagt alleen om de volumegewichten van water en (verzadigde) grond, en de coëfficiënten van actieve en passieve gronddruk, en berekent dan de waarden van  $d/h$  en  $T/\gamma h^2$ , volgens de formules (37.11) en (37.5). Voor het geval dat  $GW=10$ ,  $GG=20$ ,  $CA=0.3333$  en  $CP=3.0$  vindt het programma  $d/h = 1.534$  en  $T/\gamma h^2 = 0.239$ . Het blijkt dat de damwand in dit geval



```

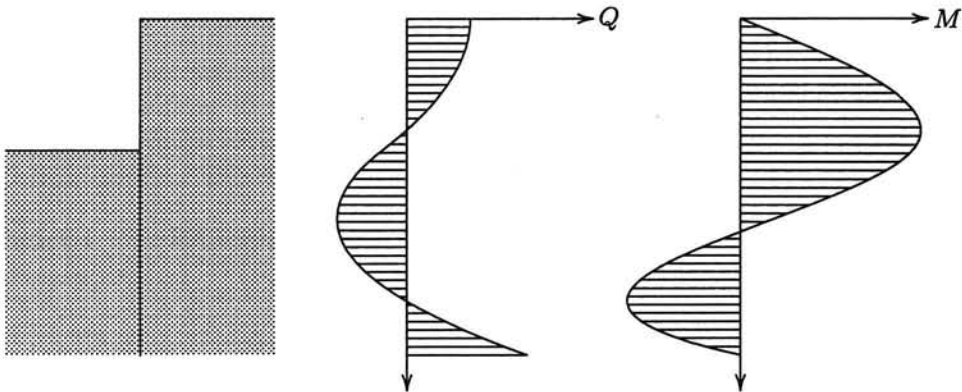
100 CLS:PRINT "Damwand in homogene verzadigde grond"
110 PRINT "Methode Blum":PRINT:A$="& ####.###"
120 INPUT "Volumegewicht water ..... ";GW
130 INPUT "Volumegewicht grond ..... ";GG
140 INPUT "Coeff. van actieve gronddruk .... ";KA
150 INPUT "Coeff. van passieve gronddruk ... ";KP
160 KSA=KA*(1-GW/GG)+GW/GG:KSP=KP*(1-GW/GG)+GW/GG:D=0
170 C=8*(KSA/KSP)*(1+D)^5/(20*(1+D)^2-15*D-12*D*D)
180 IF C<0 THEN PRINT "Geen oplossing":END
190 C=C^(1/3):E=ABS(C-D):D=C:IF E>0.000001 THEN 170
200 PRINT USING A$;"d/h = ";D
210 T=(KSA*(1+D)^3-KSP*D^3)/(6*(1+D))
220 PRINT USING A$;"T/ghh = ";T
230 END

```

Programma 37.1. Methode Blum voor homogene verzadigde grond.

over een aanzienlijke diepte (ruim 1.5 maal de kerende hoogte) in de grond moet worden gebracht.

Het verloop van de dwarskracht en het buigend moment over de lengte van de damwand is getekend in figuur 37.4. De dwarskracht aan de bovenkant is de ankerkracht. De waarde aan de onderkant is de geconcentreerde kracht  $R$  van Blum. Het blijkt dat die kracht tot gevolg heeft dat de positieve momenten in de damwand inderdaad gerduceerd worden, zoals



Figuur 37.4. Dwarskracht en Buigend moment.

in het begin van dit hoofdstuk gesteld, en dat er aan de onderkant negatieve momenten optreden. Het is voor de bepaling van het benodigde damwandprofiel natuurlijk gunstig dat er positieve en negatieve momenten van vergelijkbare grootte optreden. Dan kan met een lichter profiel worden volstaan.

De berekeningsresultaten voor een aantal waarden van de gronddrukcoëfficiënten  $K_a$  en  $K_p$  zijn verzameld in tabel 37.1. Daarbij is aangenomen dat het volumegewicht van het water  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ , en dat van de verzadigde grond  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ , zoals veel voorkomend.

Essentieel in de methode Blum is de geconcentreerde kracht  $R$  aan de onderkant van de damwand. Bedacht dient te worden dat die kracht eigenlijk de resultante is van een verdeelde

$\phi$	$K_a$	$K_p$	$d/h$	$T/\gamma h^2$
10°	0.7041	1.4203	5.228	0.881
15°	0.5888	1.6984	3.406	0.554
20°	0.4903	2.0396	2.481	0.394
25°	0.4059	2.4639	1.917	0.300
30°	0.3333	3.0000	1.534	0.239
35°	0.2710	3.6902	1.255	0.196
40°	0.2174	4.5989	1.040	0.165
45°	0.1716	5.8284	0.868	0.141

Tabel 37.1. Methode Blum voor homogene grond.

belasting aan de rechterkant van de damwand, die ontstaat als reactie op het doorbuigen van de damwand. Eigenlijk zou voor het optreden van die reactie nog enige extra ruimte moeten worden gegeven, door de damwand iets langer te kiezen dan de berekende lengte. Er is wel gesteld dat de inheidiepte (de afstand  $d$  in figuur 37.2) 10 % tot 20 % groter zou moeten worden genomen dan volgt uit de berekening. De damwand wordt dan echter wel erg veel langer dan eigenlijk strikt nodig is voor het keren van de belasting. De winst van de methode Blum is dat volstaan kan worden met een wat lichter profiel, en dat de inklemming er voor zorgt dat de vervormingen klein blijven.

Overigens is het in dit hoofdstuk beschouwde geval wel erg ongunstig. Aan de actieve kant staat het grondwater erg hoog, en aan de passieve kant staat het erg laag. In het volgende hoofdstuk worden meer algemene gevallen beschouwd, maar ook dan zal blijken dat de methode Blum leidt tot erg lange damwanden. De veiligheid is groot, maar het wordt wel erg kostbaar.

### Opgaven

**37.1** Verifieer een aantal waarden uit tabel 37.1 door substitutie in vergelijking (37.11), of door berekening met het programma 37.1.

**37.2** Een damwand wordt gebruikt voor een bouwput in een polder. De diepte van de bouwput is 5 m, en aan beide zijden staat het water tot het grondoppervlak. De damwand is afgestempeld tegen een identieke damwand aan de andere kant van de bouwput. Hoe lang moet de damwand zijn volgens de methode Blum, als  $c = 0$  en  $\phi = 30^\circ$ ?

**37.3** Iemand suggereert dat de wrijvingshoek van het materiaal uit de vorige opgave niet  $30^\circ$  is maar  $40^\circ$ . Hoe lang moet dan de damwand zijn?

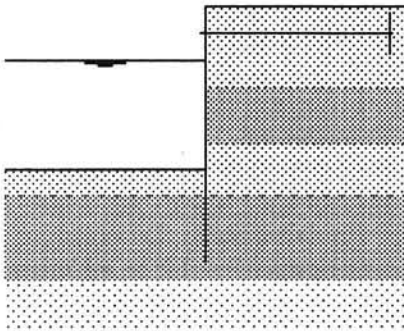
**37.4** Vergelijking (37.11) is geldig voor met water verzadigde grond, met de grondwaterstand samenvallend met het grondoppervlak. Stel een overeenkomstige vergelijking op voor homogene droge grond. Bereken daarna de benodigde waarde van  $d/h$  voor droge grond met  $\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 0$  en  $\phi = 30^\circ$ .

**37.5** Verifieer de formules (37.7) en (37.8) voor de verplaatsing en hoekverdraaiing van het uiteinde van een ingeklemde ligger met een driehoekvormige belasting.

## Hoofdstuk 38

# DAMWAND IN GELAAGDE GROND

Voor een damwand in gelaagde grond is de berekening niet principeel anders of moeilijker dan voor een damwand in homogene grond. Het belangrijkste verschil is dat de horizontale gronddrukken tegen de damwand lastiger zijn uit te rekenen, vaak zo lastig dat een handberekening erg veel werk vereist. Daarom kan men de berekeningen beter met een computerprogramma uitvoeren. In dit hoofdstuk wordt een eenvoudig programma gepresenteerd, voor de methode Blum.



Figuur 38.1. Gelaagde grond.

De complicaties zijn dat het gewicht van de lagen verschillend kan zijn, en ook de grond-drukcoëfficiënten, en het nulniveau van het grondwater. Het handigste is het om de berekening van de gronddrukken tegen de damwand als een apart probleem te beschouwen, dat voorafgaat aan de eigenlijke damwandberekening. Men kan die grond-drukken in principe op eenvoudige wijze bereke-

nen, door van boven naar beneden eerst het verloop van de verticale totaalspanningen te berekenen, uit het totale gewicht van de grond (en een eventuele bovenbelasting), en het verloop van de waterspanningen uit de ligging van het freatisch vlak, wat voor verschillende lagen nog verschillend kan zijn. Dan volgt de verticale effectieve spanning uit  $\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - p$ , en de horizontale effectieve spanning  $\sigma'_{xx}$  uit de van toepassing zijnde formule voor actieve dan wel passieve gronddruk. De horizontale totaalspanning vindt men tenslotte door de plaatselijke waterspanning er bij op te tellen,  $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + p$ . Ter plaatse van de laagseparaties kunnen er sprongen in de horizontale totaalspanning optreden omdat de gronddrukcoëfficiënten per laag verschillend kunnen zijn.

### 38.1 Computerprogramma

De berekeningen kunnen worden uitgevoerd met het programma 38.1. De gegevens moeten interactief worden ingevoerd. Naast enige algemene gegevens als het aantal lagen en de diepte van het anker moeten voor elke laag worden ingevoerd: de laagdikte, de cohesie, de coëfficiënt van actieve gronddruk, de coëfficiënt van passieve gronddruk, het volumegewicht van de grond in droge toestand (als er geen grond is is dat 0), het volumegewicht van de grond in verzadigde toestand (als er geen grond is is dat 10, het volumegewicht van water), en het nulniveau van het grondwater, gerekend ten opzichte van de bovenkant van de damwand. Die laatste drie gegevens moeten zowel voor de linkerkant als de rechterkant worden opgegeven. Het programma gaat er van uit dat de ontgraving aan de linkerkant van de damwand plaats vindt. Aan die kant treden passieve gronddrukken op, aan de rechterkant actieve gronddrukken.

Het programma gaat uit van een eerste aanname voor de lengte van de damwand, als de som van alle laagdikten. Het verloop van de belastingen aan beide zijden van de damwand,

```

100 CLS:PRINT"Damwand in gelaagde grond":NN=1000
110 PRINT"Methode Blum":PRINT
120 DIM D(20),Z(20),CA(20),CP(20)
130 DIM GDL(20),GNL(20),WL(20),GDR(20),GNR(20),WR(20)
140 DIM M(NN),Q(NN),F(NN),P(NN),U(NN)
150 INPUT "Diepte van het anker (m) ..... ";DA
160 INPUT "Aantal lagen ..... ";N
170 Z(0)=0:GW=10:FOR I=1 TO N:CLS:PRINT "Laag ";I:PRINT
180 INPUT "Laagdikte (m) ..... ";D(I)
190 INPUT "Cohesie (kN/m2) ..... ";CC(I)
200 INPUT "Coef. van actieve gronddruk ..... ";CA(I)
210 INPUT "Coef. van passieve gronddruk ..... ";CP(I)
220 INPUT "Vol.gew. droog links (kN/m3) ..... ";GDL(I)
230 INPUT "Vol.gew. nat links (kN/m3) ..... ";GNL(I)
240 INPUT "Diepte grondwater links (m) ..... ";WL(I)
250 INPUT "Vol.gew. droog rechts (kN/m3) .... ";GDR(I)
260 INPUT "Vol.gew. nat rechts (kN/m3) ..... ";GNR(I)
270 INPUT "Diepte grondwater rechts (m) ..... ";WR(I)
280 Z(I)=Z(I-1)+D(I):NEXT I
290 HH=Z(N):DZ=HH/NN:DZ2=DZ/2:TLZ=0:TRZ=0:J=1:ZZ=0
300 FOR I=1 TO NN:ZZ=ZZ+DZ:IF ZZ>Z(J) THEN J=J+1
310 IF ZZ<WL(J) THEN GL=GDL(J) ELSE GL=GNL(J)
320 IF ZZ<WR(J) THEN GR=GDR(J) ELSE GR=GNR(J)
330 IF ZZ<WL(J) THEN PL=0 ELSE PL=GW*(ZZ-WL(J))
340 IF ZZ<WR(J) THEN PR=0 ELSE PR=GW*(ZZ-WR(J))
350 TLZ=TLZ+DZ*GL:SLZ=TLZ-PL:TRZ=TRZ+DZ*GR:SRZ=TRZ-PR
360 SLX=CP(J)*SLZ+2*CC(J)*SQR(CP(J))
370 SRX=CA(J)*SRZ-2*CC(J)*SQR(CA(J)):IF SRX<0 THEN SRX=0
380 TLX=SLX+PL:TRX=SRX+PR:F(I)=TRX-TLX:NEXT I
390 F(0)=0:Q(0)=0:M(0)=0:JJ=0:FOR I=1 TO NN
400 FF=(F(I)+F(I-1))*DZ2:IF I*DZ<DA THEN JJ=I
410 Q(I)=Q(I-1)-FF:M(I)=M(I-1)+(Q(I)+Q(I-1))*DZ2
420 NEXT I:NH=NN+1:UA=1:WHILE UA>0:NH=NH-1
430 HT=NH*DZ:T=-M(NH)/(HT-DA):P(NH)=0:U(NH)=0
440 FOR I=NH-1 TO JJ STEP -1:M1=M(I)+T*(I*DZ-DA)
450 M2=M(I+1)+T*(I*DZ+DZ-DA):P(I)=P(I+1)+M1+M2
460 U(I)=U(I+1)-P(I)-P(I+1):NEXT I:UA=U(JJ)
470 WEND:NH=NH+1:HT=NH*DZ:T=-M(NH)/(HT-DA):A$="####.###"
480 FOR I=JJ TO NH:Q(I)=Q(I)+T:M(I)=M(I)+T*(I*DZ-DA):NEXT I
490 PRINT"Lengte      : ";:PRINT USING A$;HT
500 PRINT"Ankerkracht : ";:PRINT USING A$;T
510 END

```

Programma 38.1. Methode Blum voor gelaagde grond.

actief aan de rechterkant en passief aan de linkerkant, wordt voor een groot aantal punten (in het programma 1000 punten) berekend uit de gegevens van de laagdiktes, hun gewichten, de gronddrukcoëfficiënten en de van toepassing zijnde diepte van de grondwaterspiegel. Daarbij

is een opdracht opgenomen om te verhinderen dat er aan de actieve kant trek zou optreden, in regel 370. De resulterende belasting wordt aangegeven met  $F(I)$ . Dit is het verschil van de gronddruk aan de rechterkant en de linkerkant, zie regel 380. Vervolgens worden de dwarskracht  $Q(I)$  en het buigend moment  $M(I)$  numeriek berekend, zonder rekening te houden met de nog onbekende ankerkracht. Daarna wordt de ankerkracht  $T$  berekend uit de voorwaarde dat het buigend moment nul is aan de onderkant (in regel 430). Dan worden de hoekverdraaiing  $\varphi$  en de horizontale verplaatsing  $u$  berekend door het buigend moment tweemaal te integreren, uitgaande van de inklemming aan de onderkant, waar zowel  $\varphi = 0$  als  $u = 0$ . Eigenlijk zou hier nog de buigstijfheid  $EI$  gebruikt moeten worden, omdat  $d\varphi/dz = M/EI$  en  $du/dz = \varphi$ , maar omdat het toch gaat om het nul zijn van de verplaatsing maakt een constante factor  $EI$  niet uit. In het programma worden de grootheden  $\varphi$  en  $u$  aangegeven met  $P(I)$  en  $U(I)$ . De verplaatsing ter plaatse van het anker is  $UA$ . Als die verplaatsing positief is wordt de lengte van de damwand iets verkleind, en wordt de berekening herhaald, net zo lang totdat  $UA$  negatief wordt. De procedure kan alleen werken als de beginschatting van de lengte groter is dan de uiteindelijke waarde. De dikte van de onderste laag moet daarom in voldoende mate te groot worden opgegeven.

Het programma geeft als uitvoer alleen de gevonden benodigde lengte en de daarbij behorende ankerkracht. De dwarskracht en het buigend moment worden wel berekend, maar niet afgedrukt. Het is uiteraard een kleine moeite om het programma zodanig te veranderen dat die grootheden worden afgedrukt.

Het eenvoudige voorbeeld uit het vorige hoofdstuk, voor het geval van homogene cohesieloze grond getekend in figuur 37.2, kan men berekenen met de volgende data.

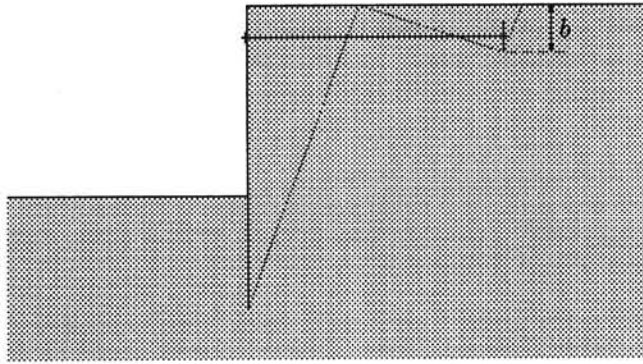
```
DA=0.0:N=2
D(1)=1.0:CA(1)=0.3333:CP(1)=3.0
GDL(1)=0.0:GNL(1)=10.0:WL(1)=1.0
GDR(1)=16.0:GNR(1)=20.0:WR(1)=0.0
D(2)=2.0:CA(2)=0.3333:CP(2)=3.0
GDL(2)=16.0:GNL(2)=20.0:WL(2)=1.0
GDR(2)=16.0:GNR(2)=20.0:WR(2)=0.0
```

De diepte van de ingraving (de dikte van de eerste laag) is 1 m gesteld, en de dikte van de tweede laag is als 2 m aangenomen. De beginschatting voor de lengte van damwand is dan 3 m. Dat zal wel voldoende lang zijn. Om de ingraving te simuleren is het droog volumegegewicht van de grond aan de linkerkant in de eerste laag op 0.0 gesteld. Het nat volumegegewicht van de grond is gelijk gesteld aan dat van water, 10.0. Er is daar weliswaar helemaal geen water, maar men hoeft dat getal dan niet te veranderen als men de grondwaterstand wat hoger zou nemen.

Uitvoeren van het programma geeft dat de lengte van de damwand 2.532 m moet zijn, en dat  $T = 4.751$  kN/m. Dan is  $T/\gamma h^2 = 0.238$ . Deze uitkomsten zijn in overeenstemming met die in het vorige hoofdstuk zijn gevonden met de analytische oplossing.

## 38.2 Berekening ankerschot

Het ankerschot moet natuurlijk de berekende ankerkracht  $T$  op kunnen nemen. Voor de berekening van de maximaal op te nemen kracht van een ankerschot maakt men meestal weer gebruik van een analyse volgens Coulomb, zie figuur 38.2. Aan de linkerkant van het schot wordt de passieve gronddruk in rekening gebracht, en aan de rechterkant de actieve gronddruk. Dat betekent voor een doorgaand ankerschot dat de maximaal op te nemen



Figuur 38.2. Verankering.

kracht is

$$T_{\max} = \frac{1}{2}(K_p - K_a)\gamma b^2. \quad (38.1)$$

Deze waarde moet groter zijn dan de berekende ankerkracht. Het is verstandig daarbij nog een behoorlijke belastingsfactor (bijvoorbeeld 1.5) in rekening te brengen. Uiteraard moet de ankerstang, die het anker verbindt met de damwand, die kracht ook over kunnen brengen.

Het ankerschot behoeft niet altijd van de grootste diepte  $b$  tot aan het oppervlak te lopen. Dat zou aan het oppervlak vaak erg hinderlijk zijn. Ook als het schot niet tot aan de oppervlakte reikt zal bij bezwijken zo ongeveer hetzelfde glijvlak optreden. In de praktijk rekent men meestal met een schot over de volle diepte als de hoogte ervan tenminste  $\frac{1}{2}b$  is.

Het ankerschot moet op voldoende afstand van de damwand worden geplaatst, zodat de passieve gronddruk de gelegenheid heeft zich te ontwikkelen. In principe moet deze afstand zo groot zijn dat het actieve gebied van de damwand en het passieve gebied van het ankerschot elkaar juist niet kunnen beïnvloeden, zie figuur 38.2.

Het systeem van damwand, verankering en grondlichaam vormt een grondkering die uiteraard ook als geheel stabiel moet zijn. Daartoe zal men een analyse van deze totale stabiliteit moeten maken, bijvoorbeeld uitgaande van een cirkelvormig glijvlak onder de damwand en het ankerschot door. Die procedure wordt later behandeld.

Er bestaan nog wel andere, meer geavanceerde methodes voor de berekening van damwanden. Een veel gebruikte methode is om de damwand op te vatten als een ligger die ondersteund wordt door niet-lineaire veren. De veerstijfheden kiest men daarbij zo dat de gronddruk minstens gelijk is aan de actieve gronddruk, en niet groter kan zijn dan de passieve gronddruk. Afhankelijk van de plaatselijke verplaatsing verloopt de gronddruk tegen de damwand dan van de minimale tot de maximale waarde. Op deze wijze is het mogelijk een damwand met meerdere verankeringen door te rekenen, en in verschillende bouwfases, bijvoorbeeld zodanig dat eerst over een zekere hoogte wordt ontgraven, vervolgens een anker wordt aangebracht, en daarna weer verder wordt ontgraven. De berekening wordt numeriek uitgevoerd, en verloopt iteratief, omdat de respons van de veren afhangt van de verplaatsing. Programma's die deze berekening uitvoeren zijn op diverse plaatsen ontwikkeld, en bij veel instituten en bureau's beschikbaar. Een belangrijk voordeel is dat de berekening van de verplaatsingen nogal wat betrouwbaarder is, omdat er ook rekening wordt gehouden met de vervormingen van de grond. Maar vooral is van nut dat er met meerdere ankers of stempels gerekend kan worden, wat meestal leidt tot aanzienlijk kortere damwanden dan volgt uit de methode Blum, die beperkt is tot 1 anker, aan of nabij de bovenkant van de damwand.

Ook volledig numerieke rekenmodellen gebaseerd op de eindige-elementen-methode, zoals het aan de TU Delft ontwikkelde programma PLAXIS, bevatten soms een voorziening voor damwanden. Een damwand wordt dan beschouwd als een ligger-element in een medium dat voor de rest uit elasto-plastische grond-elementen bestaat.

### Opgaven

**38.1** Voer de berekening van het geval getekend in figuur 37.2 uit met een anker op diepte  $0.2 h$ . Hoe lang moet dan de damwand zijn, als  $h = 5$  m?

**38.2** Voer de berekening van het geval getekend in figuur 37.2 uit met een anker op diepte  $0.2 h$ , en een waterstand aan beide zijden op  $0.2 h$  beneden de bovenkant van de damwand. Hoe lang moet dan de damwand zijn, als  $h = 5$  m?

**38.3** Breid het programma 38.1 uit met opdrachten die het verloop van de belasting, de dwarskracht en het buigende moment afdrukken, en ook het grootste en kleinste buigend moment.

**38.4** In de analyse wordt het anker als doorgaand beschouwd. In werkelijkheid worden de ankers meestal op een zekere onderlinge afstand geplaatst. Hoe berekent men dan de kracht op een enkel anker?

## Hoofdstuk 39

# GRENSTOESTANDEN

De berekening van gronddrukken met de methode Coulomb is gericht op de bepaling van extreme toestanden, waarbij de grond op het punt van bezwijken staat. Dergelijke berekeningen kunnen van een verantwoorde theoretische basis worden voorzien door de *plasticiteitstheorie*. Dat biedt tevens de mogelijkheid tot generalisatie, en geeft ook inzicht in de beperkingen ervan, en in de begrenzing van het geldigheidsgebied.

Zoals bekend gaat men in de elasticiteitstheorie, en in daarvan afgeleide methoden, uit van 3 soorten van vergelijkingen: evenwicht, constitutieve relaties, en compatibiliteit. Daarbij worden dan de werkelijk optredende spanningen en vervormingen berekend, onder invloed van gegeven belastingen en randvoorwaarden. De spanningen moeten in elk punt van het lichaam voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen, in de drie ruimtelijke richtingen. Het verband tussen spanningen en vervormingen moet voldoen aan de wet van Hooke (of bij meer gecompliceerde materialen dan lineair-elastische aan een andere eenduidige relatie tussen spanningen en vervormingen). Die vervormingen moeten compatibel zijn (moeten kloppen) met een drietal continu-verlopende verplaatsingen, in de drie ruimtelijke richtingen. Bij materialen met gecompliceerde constitutieve betrekkingen leidt deze aanpak tot praktisch onoverkomelijke moeilijkheden. Zelfs voor lineair-elastische materialen is het aantal bekende oplossingen beperkt tot oplossingen voor eenvoudige gevallen als halfruimtes, bollen en cilindfers. Een berekening waarin met het werkelijke verband tussen spanningen en vervormingen van grond wordt rekening gehouden is niet of nauwelijks uitvoerbaar, al kan men met de moderne rekentechnieken redelijk ver komen. Een alternatief wordt geleverd door de berekening van *grenstoestanden* op basis van de plasticiteitstheorie. In het Engels noemt men dit *limit analysis*.

### 39.1 Basisstellingen plasticiteitstheorie

Bij de berekening van grenstoestanden volgens de plasticiteitstheorie wordt er naar gestreefd het materiaalgedrag (dat wil zeggen de constitutieve relaties) zo goed mogelijk in rekening te brengen, en wel vooral de begrenzing van de mogelijke spanningen door bezwijkcriteria. Er wordt wel een concessie gedaan, ofwel ten aanzien van het evenwicht, ofwel ten aanzien van de compatibiliteit. Men berekent dan niet de werkelijke spanningen en vervormingen, maar een grenswaarde. Het streven is daarbij om ofwel een *ondergrens* ofwel een *bovengrens* voor de bezwijkbelasting aan te geven. Heeft men een ondergrens gevonden dan is er zekerheid dat een bepaalde belasting gedragen kan worden. Het is mogelijk dat een grotere belasting ook nog gedragen kan worden, maar daarover valt dan niets met zekerheid te zeggen. Heeft men een bovengrens gevonden dan is er zekerheid dat bij een bepaalde belasting bezwijken optreedt, maar wellicht ook al bij een lagere belasting.

In zijn eenvoudigste vorm gaat de plasticiteitstheorie uit van een enkele vaste vloeivoorwaarde, als functie van de spanningen. Dat betekent dat voor bepaalde combinaties van spanningen in het materiaal plaatselijk de vervormingen onbegrensd kunnen toenemen (men spreekt dan van plastisch vloeien), en dat bij lagere spanningen geen plastische vervormingen optreden. Voor grond is die vloeivoorwaarde het criterium voor Mohr-Coulomb.



Een materiaal met zo'n eenduidige vloeivoorwaarde, die alleen van de spanningen afhangt, noemt men *perfect plastisch*.

Bij de stellingen van de plasticiteitstheorie wordt gebruik gemaakt van twee soorten van velden, die als volgt worden gedefiniëerd.

1. Een *evenwichtssysteem* (of een statisch toelaatbare spanningsveld) is een veld van spanningen dat aan de volgende voorwaarden voldoet :
  - a. het voldoet overal aan de evenwichtsvergelijkingen,
  - b. het voldoet aan de randvoorwaarden voor de spanningen,
  - c. de vloeivoorwaarde wordt nergens overschreden.
2. Een *mechanisme* (of een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld) is een veld van verplaatsingen en vervormingen dat aan de volgende voorwaarden voldoet :
  - a. het veld is compatibel, dat wil zeggen het leidt nergens tot gapingen of overlappingen (het langs elkaar glijden van onderdelen is wel toegestaan),
  - b. het voldoet aan de randvoorwaarden voor de verplaatsingen, c. daar waar vervormingen optreden voldoen de spanningen aan de vloeivoorwaarde.

Er zijn nu twee fundamentele stellingen, die hier zonder bewijs worden vermeld. Voor theoretische bewijzen zie men Appendix C. De stellingen zijn als volgt.

1. *Ondergrenstheorema.*

De werkelijke bezwijkbelasting is groter dan de belasting behorend bij een evenwichtssysteem.

2. *Bovengrenstheorema.*

De werkelijke bezwijkbelasting is kleiner dan de belasting behorend bij een mechanisme, daaruit berekend met behulp van het principe der virtuele arbeid.

Het eerste theorema stelt dat als men een evenwichtssysteem bij een zekere belasting kan vinden (zonder rekening te houden met compatibiliteit), dat die belasting dan in elk geval kan worden gedragen. Het tweede theorema stelt dat als men bij een zekere belasting een mechanisme vindt (alleen rekening houdend met het evenwicht behorend bij de gekozen bezwijkvorm), dat die belasting dan zeker niet kan worden gedragen. Bij geen van beide velden speelt het verband tussen spanningen en vervormingen een rol.

Voor een bewijs van deze theorema's zie men Appendix C. Daarbij blijkt dat de theorema's, hoe logisch en bijna vanzelfsprekend ze misschien ook lijken, slechts een beperkte geldigheid bezitten. De belangrijkste beperking is dat ze voor een materiaal als grond, waarvoor de vloeivoorwaarde het bezwijkcriterium van Mohr-Coulomb is, met een cohesie  $c$  en een hoek van inwendige wrijving  $\phi$ , alleen geldig zijn als bij plastische vervormingen een doorgaande plastische volumevergroting optreedt, die zich verhoudt tot de plastische hoekvervormingen als  $\sin \phi : 1$ . Dat is een uiterst onwaarschijnlijke zaak, omdat men verwachten kan (en bij proeven ook inderdaad vindt) dat bij plastische vervormingen het volume ongeveer constant blijft. Een doorgaande plastische volumevergroting zou betekenen dat het materiaal onbeperkt uitzet. Dit betekent dat de plasticiteitstheorema's voor grond niet algemeen geldig zijn, als tenminste  $\phi \neq 0$ . Als  $\phi = 0$  zijn de theorema's wel geldig, omdat dan bij doorgaand plastisch vloeien de theorie stelt dat het volume constant blijft, en dat is een goede beschrijving van de realiteit. Dit betekent dat men op deze basis veilige en onveilige berekeningen kan maken voor zuiver cohesieve materialen. Bij snelle belastingen gedraagt klei zich als zo'n materiaal, zoals gesteld in hoofdstuk 25. Voor zand, waarbij juist essentieel is dat  $\phi > 0$ , zijn de theorema's in principe niet van toepassing. In de praktijk gebruikt men ze echter wel als zodanig. Enige voorzichtigheid daarbij is geboden.

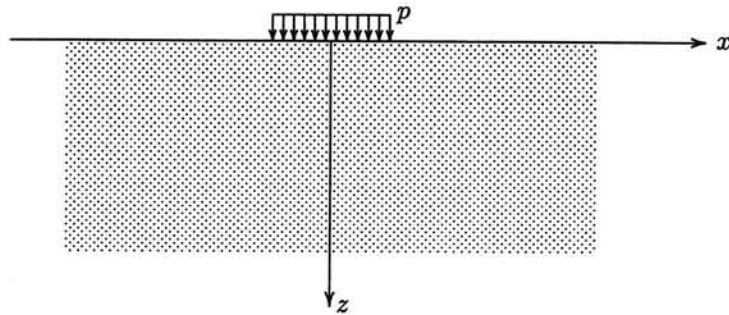
Eigenlijk zijn de grenstheorema's al gebruikt in de hoofdstukken 33 en 34. De beschouwingen volgens Rankine in hoofdstuk 33 gaan uit van mogelijke evenwichtstoestanden, en daarbij is de horizontale spanning zo gekozen dat de grens van bezwijken wordt bereikt. Daarbij wordt dus de bezwijkbelasting van de onderkant benaderd. Bij de beschouwingen volgens Coulomb in hoofdstuk 34 is uitgegaan van een kinematisch systeem, met afschuiven langs een recht glijvlak. Daarbij wordt de bezwijkbelasting van de bovenkant benaderd.

In de volgende hoofdstukken zal voor een aantal problemen met behulp van de grenstheorema's de bezwijkbelasting benaderd worden. Een belangrijke toepassing is de draagkracht van een fundering. Maar ook de analyse van de stabiliteit van taluds kan men op deze stellingen baseren.

## Hoofdstuk 40

# STROKENFUNDERING

Een van de eenvoudigste gevallen waarvoor ondergrenzen en bovengrenzen van de bezwijkbelasting kunnen worden gevonden is dat van een oneindig lange stripvormige belasting op een dikke laag van zuiver cohesief materiaal ( $\phi = 0$ ), zie figuur 40.1. Het eigen gewicht van



Figuur 40.1. Strokenfundering.

het materiaal wordt voorlopig ook verwaarloosd, dat wil zeggen dat gesteld wordt dat  $\gamma = 0$ .

Er zal eerst worden getracht een ondergrens voor de bezwijkbelasting te vinden met behulp van een evenwichtssysteem. Een dergelijk systeem moet bestaan uit een veld van spanningen dat overal in het veld aan evenwicht voldoet, en op de rand aansluit bij de gegeven spanningsrandvoorwaarden, en dat nergens de vloeiwaaarde overschrijdt.

### 40.1 Ondergrens

Een zeer eenvoudige oplossing van de evenwichtsvergelijkingen is dat alle spanningen in een bepaald gebied constant zijn. Dan wordt immers altijd voldaan aan de evenwichtsvergelijkingen

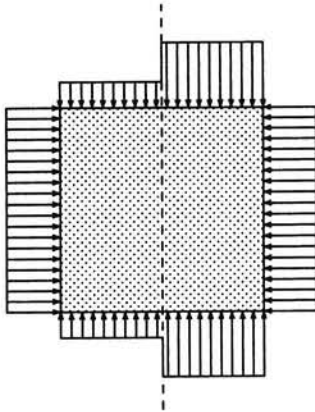
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (40.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (40.2)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}. \quad (40.3)$$

De moeilijkheid is om ook nog aan de randvoorwaarden te voldoen, omdat de normaalspanning  $\sigma_{zz}$  langs de rand, zie figuur 40.1, niet constant is, maar sprongsgewijs verandert. De uitweg uit deze moeilijkheid wordt geboden door te bedenken dat in een statisch toelaatbaar veld van spanningen (een evenwichtssysteem) niet alle spanningen continu behoeven te zijn. Formeel kan men dit zien aan de evenwichtsvergelijkingen (40.1) – (40.3).

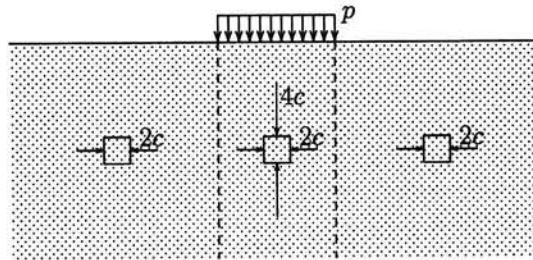
Alle afgeleiden in deze vergelijkingen moeten bestaan, dat wil zeggen dat de spanningen in de richting waarin ze gedifferentieerd moeten worden minstens continu moeten zijn. Dit



Figuur 40.2. Spanningsdiscontinuïteit.

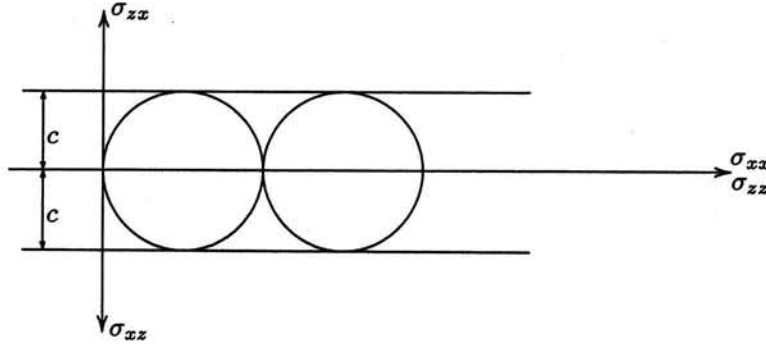
betekent dat de schuifspanning  $\sigma_{xz}$  in beide richtingen continu moet zijn, de normaalspanning  $\sigma_{xx}$  in  $x$ -richting, en  $\sigma_{zz}$  in  $z$ -richting. Twee van de afgeleiden, namelijk  $\partial\sigma_{xx}/\partial z$  en  $\partial\sigma_{zz}/\partial x$ , komen niet in de vergelijkingen voor, en daar hoeven dus ook helemaal geen eisen aan gesteld te worden. Dit betekent dat  $\sigma_{xx}$  in  $z$ -richting discontinu mag zijn, en dat  $\sigma_{zz}$  in  $x$ -richting discontinu mag zijn. Een dergelijke spanningsdiscontinuïteit is getekend, voor de verticale richting, in figuur 40.2. In die figuur is een klein blokje getekend, met normaalspanningen die er op werken. De normaalspanning loodrecht op de discontinuïteitslijn moet continu zijn in zijn eigen richting, vanwege evenwicht, zoals men erg gemakkelijk kan inzien door de breedte van het blokje naar nul te laten naderen. De continuïteit is dan een gevolg van het principe van actie = reactie. De normaalspanning evenwijdig aan de discontinuïteitslijn mag echter een sprong vertonen, zonder dat dat het evenwicht verstoort. In figuur 40.2 is  $\sigma_{zz}$  discontinu in  $x$ -richting. De afgeleide  $\partial\sigma_{zz}/\partial x$  is oneindig ter plaatse van de verticale as, maar het blokje, en elk onderdeel ervan, is keurig in evenwicht.

Door Drucker, een van de grondleggers van de plasticiteitstheorie, is de genoemde eigenschap van evenwichtssystemen vertaald in een methode om zulke velden te construeren. Daarbij wordt het gebied verdeeld in deelgebieden van eenvoudige vorm waarin de spanning constant is. Dan is automatisch aan de evenwichtsvergelijkingen voldaan. De deelgebieden worden aan elkaar aangesloten via discontinuïteitslijnen. Een voorbeeld is gegeven in figuur 40.3, voor het geval van een strokenfundering. In een verticale strook onder de belas-



Figuur 40.3. Evenwichtssysteem volgens Drucker.

ting is  $\sigma_{xx} = 2c$ ,  $\sigma_{zz} = 4c$ , en  $\sigma_{xz} = 0$ . In de gebieden links en rechts daarvan is  $\sigma_{xx} = 2c$ ,  $\sigma_{zz} = 0$ , en  $\sigma_{xz} = 0$ . Op de discontinuïteitslijnen springt alleen  $\sigma_{zz}$ , de normaalspanning in de richting van die lijnen. De andere spanningen zijn continu, zoals vereist. Deze spanningsverdeling voldoet overal aan de evenwichtsvergelijkingen, overschrijdt nergens de vloeivaarde, zie figuur 40.4, en voldoet aan alle randvoorwaarden als  $p = 4c$ . Naast de belasting is de verticale normaalspanning op het oppervlak 0. Aan alle vereisten voor een



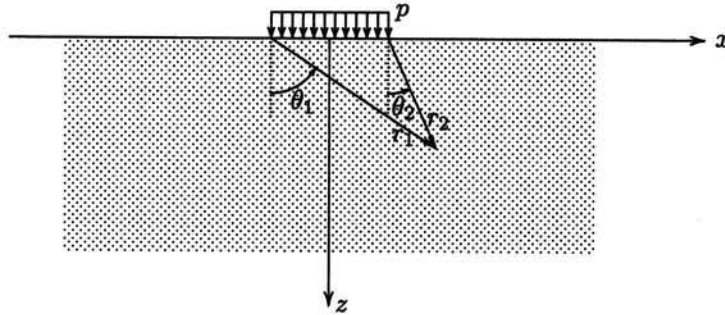
Figuur 40.4. Cirkels van Mohr bij evenwichtssysteem van Drucker.

evenwichtssysteem is nu voldaan, en de belasting  $p = 4c$  is dus een ondergrens voor de bezwijkbelasting. Er geldt dus, als de echte bezwijkbelasting  $p_c$  is,

$$p_c \geq 4c. \quad (40.4)$$

Door meerdere discontinuïteitslijnen te gebruiken kan men nog iets hogere ondergrenzen vinden. Daarop wordt hier niet verder ingegaan.

Een andere methode om statisch toelaatbare spanningsvelden te vinden is om gebruik te maken van oplossingen uit de elasticiteitstheorie. Een dergelijke oplossing voldoet aan evenwicht en de randvoorwaarden (en ook nog aan de wet van Hooke en compatibiliteit, wat voor het huidige doel niet nodig is, maar ook niet verboden). Zoekt men dan het punt op waar de grootste schuifspanning optreedt, en stelt men die gelijk aan  $c$ , dan vindt men een ondergrens voor de bezwijkbelasting. Voor het geval van een stripvormige belasting,



Figuur 40.5. Elastische oplossing.

zie figuur 40.5, vindt men uit de oplossing gegeven in hoofdstuk 30 dat voor de maximale schuifspanning  $\tau$  geldt dat

$$\tau = \frac{p}{\pi} |\sin(\theta_1 - \theta_2)|. \quad (40.5)$$

Deze formule kan men afleiden uit de formules (29.4)–(29.6) door te bedenken dat

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{xz}^2. \quad (40.6)$$

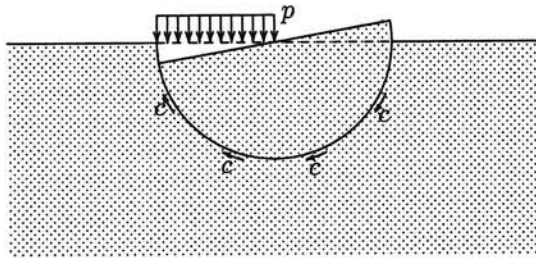
De grootste waarde van  $|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$  is 1. De maximale elastische schuifspanning is dus  $p/\pi$ . Stelt men dit gelijk aan  $c$ , dan vindt men  $p = \pi c$ . Als  $p = \pi c$  voldoet de elastische oplossing aan alle voorwaarden voor een evenwichtssysteem, en de bijbehorende belasting is dan dus een ondergrens voor de bezwijkbelasting, dat wil zeggen

$$p_c \geq 3.14c. \quad (40.7)$$

Dat is helaas een lagere ondergrens dan de eerder gevonden waarde  $4c$ , en de elastische oplossing draagt dus niet bij om de bezwijkwaarde dichter te benaderen.

## 40.2 Bovengrens

Om een bovengrens voor de bezwijkbelasting te vinden beschouwen we eerst het mechanisme getekend in figuur 40.6. Het bestaat uit een verplaatsingsveld waarbij een halve cirkel, met



Figuur 40.6. Mechanisme 1.

straal  $a$ , iets roteert, zonder inwendige vervormingen. Deze halve cirkel glijdt daarbij over de rest van het massief. Het veld is compatibel, en voldoet aan de randvoorwaarden voor de verplaatsingen (dat is in dit geval nogal eenvoudig, want die zijn er niet). De belasting die hier bij hoort vindt men uit een beschouwing van de virtuele arbeid bij een kleine verplaatsing volgens het mechanisme. Als de halve cirkel roteert over een hoek  $\theta$  dan is er een verplaatsing  $\theta a$  langs de omtrek. De arbeid verricht door de inwendige spanningen op de virtuele vervormingen (die in dit geval geconcentreerd zijn langs de cirkelomtrek) is, als de schuifspanning maximaal geacht wordt te zijn, dat wil zeggen  $\tau = c$ ,

$$\pi c a^2 \theta,$$

omdat de lengte van de cirkelboog  $\pi a$  is. De uitwendige belasting zakt gemiddeld over een afstand  $\frac{1}{2} a \theta$ , en verricht dus een virtuele arbeid

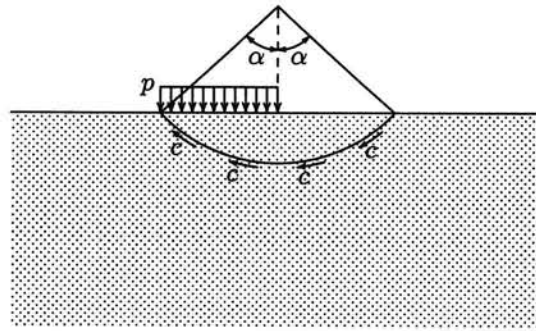
$$\frac{1}{2} p a^2 \theta.$$

Deze twee grootheden moeten gelijk zijn, en men vindt dus

$$p = 2\pi c.$$

Dit is een bovengrens voor de bezwijkbelasting  $p_c$ . Dus

$$p_c \leq 6.28c. \quad (40.8)$$



Figuur 40.7. Mechanisme 2.

Een lagere bovengrens kan men vinden door het middelpunt van de cirkel wat hoger te kiezen, zie figuur 40.7. Als de tophoek  $2\alpha$  is en de rotatie is weer  $\theta$ , dan vindt men

$$2cR^2\alpha\theta = \frac{1}{2}pa^2\theta,$$

en omdat  $a = R \sin \alpha$ , waarin  $R$  de straal van de cirkel is, en  $a$  de breedte van de belasting, vindt men nu

$$p = \frac{4c\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Voor  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$  vindt men de vorige bovengrens terug. De kleinste waarde vindt men als  $\alpha = 1.165562$  (in radialen), of  $\alpha = 66.78^\circ$ . Het middelpunt van de cirkel ligt dan op een hoogte  $0.429a$ . De bijbehorende waarde van  $p$  is  $5.52c$ . Dit is een bovengrens, dus

$$p_c \leq 5.52c. \quad (40.9)$$

Concluderend kan gesteld worden dat nu bewezen is dat

$$4c \leq p_c \leq 5.52c. \quad (40.10)$$

In het volgende hoofdstuk zal de bezwijkbelasting nog nauwer worden begrensd.

Er wordt met nadruk op gewezen dat voor de bepaling van een evenwichtssysteem de vervormingen niet van belang zijn. Die spelen dan geen rol. Bij een mechanisme wordt geen aandacht besteed aan het inwendig evenwicht. Wel is de virtuele arbeidsvergelijking equivalent met één evenwichtsvergelijking. Bij de hier beschouwde mechanismen van een rotatie van het ene starre deel ten opzichte van een ander star deel, is die evenwichtsvergelijking een vergelijking voor het momentenevenwicht ten opzichte van het middelpunt van de cirkel. Bij berekeningen met een cirkelvormig glijvlak is het momentenevenwicht ten opzichte van het middelpunt van de cirkel de essentiële voorwaarde waaruit de bezwijkbelasting moet worden bepaald. In plaats van een beschouwing van virtuele arbeid kan men dan dus ook het momentenevenwicht ten opzichte van het middelpunt van de cirkel nemen. Omdat bij een mechanisme niet aan alle evenwichtsvergelijkingen behoeft te worden voldaan, is het niet verantwoord de bezwijkbelasting uit een andere evenwichtsvergelijking te bepalen. Ook kan het niet uit het momentenevenwicht ten opzichte van een ander punt dan het middelpunt van de cirkel.

## Hoofdstuk 41

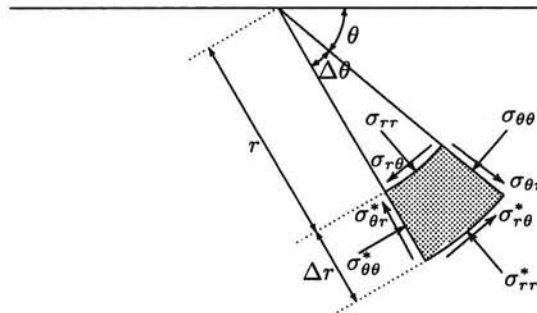
### PRANDTL

Door Prandtl is in 1920 een oplossing gevonden voor het probleem van de stripvormige belasting die zowel statisch als kinematisch toelaatbaar is. Die oplossing moet dus de ware bezwijkbelasting geven. De oplossing van Prandtl zal in dit hoofdstuk gepresenteerd worden, maar alleen in de vorm van een evenwichtssysteem. Dat de oplossing ook kinematisch toelaatbaar is zal hier niet worden bewezen. Net als in het vorige hoofdstuk wordt alleen een zuiver cohesief materiaal beschouwd, met cohesie  $c$ . Ter vereenvoudiging wordt het eigen gewicht verwaarloosd,  $\gamma = 0$ , en ook de inwendige wrijving,  $\phi = 0$ . Dat is nogal een beperking, maar daarop wordt later teruggekomen.

Om de oplossing te kunnen verifiëren is het nodig de evenwichtsvergelijkingen in poolcoördinaten uit te drukken. Die vergelijkingen worden daarom eerst afgeleid. Voor een volledige beschouwing en afleiding van de oplossing van Prandtl zie men overigens de literatuur over plasticiteitstheorie.

#### 41.1 Evenwichtsvergelijkingen in poolcoördinaten

In figuur 41.1 is een elementair blokje getekend in een coördinatenstelsel met poolcoördinaten  $r$  en  $\theta$ , en met alle spanningen die er op kunnen werken. Het evenwicht in  $r$ -richting vereist



Figuur 41.1. Poolcoördinaten.

dat

$$\sigma_{rr}^*(r + \Delta r)\Delta\theta - \sigma_{rr}r\Delta\theta + \sigma_{\theta r}^*\Delta r - \sigma_{\theta r}\Delta r - \sigma_{\theta\theta}\Delta r\Delta\theta = 0.$$

De laatste term hierin is nodig omdat de krachten  $\sigma_{\theta\theta}\Delta r$  en  $\sigma_{\theta\theta}^*\Delta r$ , die slechts infinitesimaal van elkaar verschillen, niet precies dezelfde richting hebben, maar een hoek  $\Delta\theta$  met elkaar maken. Daardoor geven ze een bijdrage aan de krachten in  $r$ -richting. Stelt men nu

$$\sigma_{rr}^* - \sigma_{rr} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \Delta r,$$



$$\sigma_{\theta r}^* - \sigma_{\theta r} = \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} \Delta \theta,$$

dan krijgt men, na deling door  $r \Delta r \Delta \theta$ ,

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (41.1)$$

Dit is de evenwichtsvergelijking in radiale richting.

Het evenwicht in  $\theta$ -richting vereist dat

$$\sigma_{\theta\theta}^* \Delta r - \sigma_{\theta\theta} \Delta r + \sigma_{r\theta}^* (r + \Delta r) \Delta \theta - \sigma_{r\theta} r \Delta \theta + \sigma_{\theta r} \Delta r \Delta \theta = 0$$

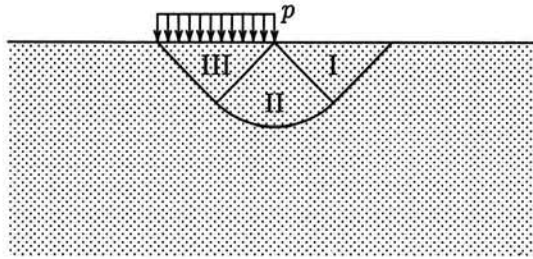
In dit geval vereist de laatste term wellicht enige toelichting. Die term ontstaat doordat de krachten  $\sigma_{\theta r} \Delta r$  en  $\sigma_{r\theta}^* \Delta r$  een hoek  $\Delta \theta$  met elkaar maken. Men krijgt nu, met  $\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}$ ,

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0. \quad (41.2)$$

Dit is de evenwichtsvergelijking in tangentiële richting.

## 41.2 Prandtl's oplossing

Het uitgangspunt voor de oplossing van Prandtl voor de bezwijkbelasting in het geval van een stripvormige belasting is getekend in figuur 41.2. De oplossing maakt gebruik van een



Figuur 41.2. Prandtl's schematisering.

verdeling in drie gebieden. In elk punt van deze drie gebieden is de spanningstoestand kritiek. Het is het eenvoudigst de bijbehorende belasting af te leiden uit een evenwichtsbeschouwing.

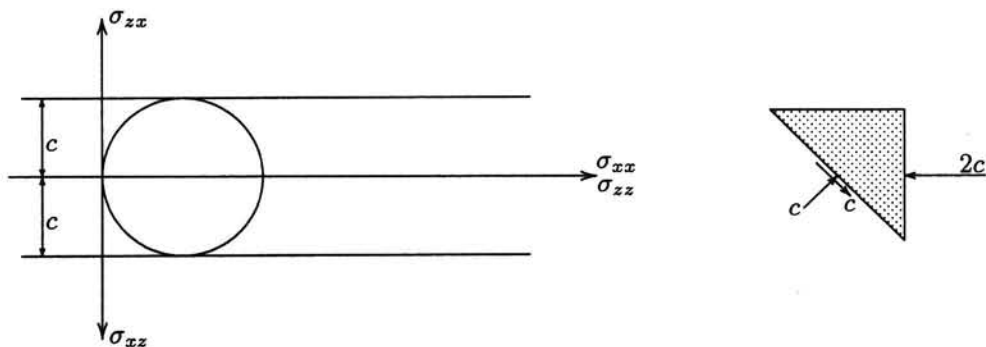
In het gebied I wordt de spanningstoestand als volgt aangenomen.

$$I : \quad \sigma_{xx} = 2c, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0. \quad (41.3)$$

Deze spanningstoestand voldoet aan het evenwicht en de randvoorwaarden, en overschrijdt nergens de vloeivaarde (overall in dat gebied wordt die niet bereikt). Op een vlak onder  $45^\circ$  is nu, zie ook figuur 41.3,  $\sigma_{\theta\theta} = c$ , en  $\sigma_{\theta r} = -c$ . Het teken van deze spanningen volgt uit vergelijking van de definitie van de positieve spanningen, zoals geïllustreerd in figuur 41.1, en de spanningsverdeling getekend in figuur 41.2. De normaalspanning in radiale richting op de overgang van gebied I naar gebied II is eveneens  $\sigma_{rr} = c$ .

Voor gebied II wordt aangenomen dat overall in dat gebied  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$  en  $\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = -c$ . De cirkel van Mohr raakt dan in dit gebied ook steeds juist aan de omhullende. Van de twee evenwichtsvoorwaarden (41.1) en (41.2) blijven dan nog maar een paar termen over,

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = 0, \quad (41.4)$$



Figuur 41.3. Spanningen in gebied I.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 2c. \quad (41.5)$$

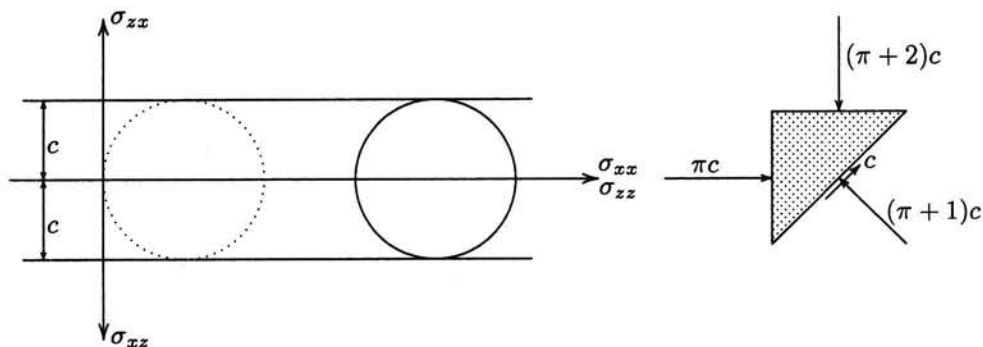
Hieraan wordt voldaan door het veld

$$\text{II} : \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = c + 2c\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = -c, \quad (41.6)$$

De integratieconstante is hierbij zodanig gekozen dat  $\sigma_{\theta\theta}$  continu is op de overgang van gebied I naar gebied II. Op de overgang van gebied II naar gebied III is  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ . Dan is dus

$$\theta = \frac{3}{4}\pi : \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = c(\pi + 1), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = -c. \quad (41.7)$$

In gebied III worden de spanningen weer constant verondersteld. Een mogelijk veld is, zie ook figuur 41.4,



Figuur 41.4. Spanningen in gebied III.

$$\text{III} : \quad \sigma_{xx} = \pi c, \quad \sigma_{zz} = (\pi + 2)c, \quad \sigma_{xz} = 0. \quad (41.8)$$

Aan de randvoorwaarden voor de spanningen is voldaan als  $p = (\pi + 2)c$ .

De oplossing van Prandtl voldoet aan alle voorwaarden voor een evenwichtssysteem. De belasting die er bij hoort is dus een ondergrens. De bezwijkbelasting is minstens zo groot,

$$p_c \geq (\pi + 2)c = 5.14c. \quad (41.9)$$

Men kan bewijzen dat Prandtl's oplossing ook een bovengrens is, door er een geschikt vervormingsveld bij te beschouwen. Daarin treedt een complicatie op in het hoekpunt van de wig,

waar de vervormingen singulier zijn. Op het precieze mechanisme, en de erbij behorende belasting, die dan ook juist  $(\pi + 2)c$  blijkt te zijn, wordt hier niet ingegaan, men zie hiervoor de literatuur over plasticiteitstheorie.

Aannemende dat inderdaad bewezen kan worden dat de waarde  $(\pi + 2)c$  ook een bovengrens is geldt dus dat de ware bezwijkbelasting is

$$p_c = (\pi + 2)c = 5.14c. \quad (41.10)$$

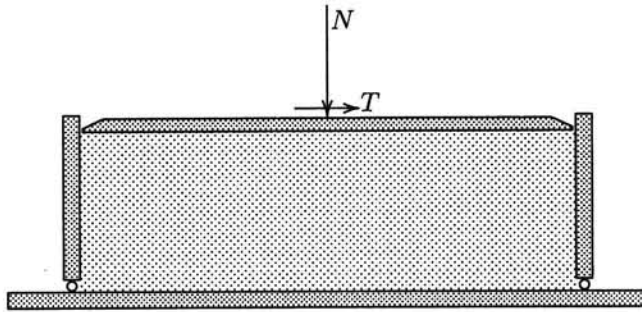
Deze waarde is inderdaad hoger dan de ondergrenzen gevonden in het vorige hoofdstuk, en lager dan de bovengrenzen gevonden in dat hoofdstuk. Dit vormt een bevestiging van de onder- en bovengrenstheorema's.

## Hoofdstuk 42

# WRIJVINGSMATERIALEN EN GRENSTHEOREMA'S

In de vorige hoofdstukken zijn de grenstheorema's toegepast voor de berekening van bezwijkbelastingen voor een zuiver cohesief materiaal ( $\phi = 0$ ). Bij materialen met inwendige wrijving zoals zand, treedt een principiële moeilijkheid op, namelijk dat de theorema's van de plasticiteitstheorie (ondergrens- en bovengrenstheorema's) niet geldig zijn, zie appendix C. Daarmee vervalt eigenlijk de basis aan berekeningen van grenstoestanden voor zand.

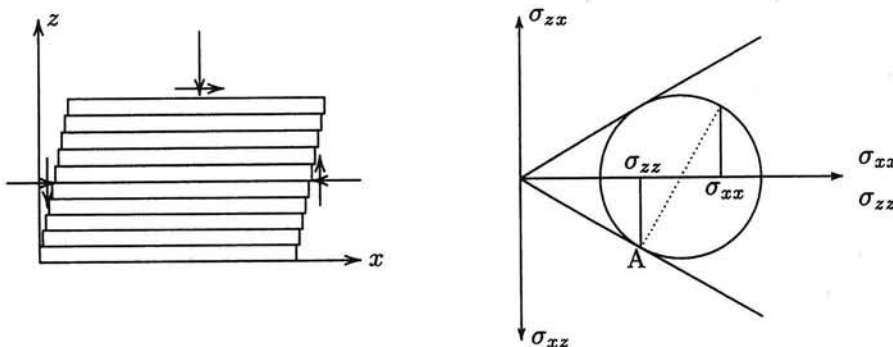
Om de moeilijkheid te illustreren wordt het geval van zuivere afschuiving beschouwd (simple shear), zie figuur 42.1. Voor dit geval zijn door De Josselin de Jong twee mogelijke



Figuur 42.1. Uniforme schuifproef op zand.

spannings- en vervormingsvelden aangegeven, die zowel statisch als kinematisch toelaatbaar zijn, althans voor een wrijvingsmateriaal (zand) waarbij tijdens de plastische vervormingen geen volumeverandering optreedt. De twee mogelijkheden worden weergegeven met behulp van een eenvoudig model voor de vervormingen van zand. Dat model bestaat uit een reeks van over elkaar afschuivende schijven.

Het eerste systeem, zie figuur 42.2, bestaat uit een aantal (in de limiet oneindig veel zeer



Figuur 42.2. Afschuiving over horizontale vlakken.

kleine) afschuivingen over horizontale vlakken. Om dat te veroorzaken is het nodig dat  $\sigma_{zz}$  en  $\sigma_{xx}$  een kritieke spanningscombinatie vormen. Bij de aangenomen vervormingsrichting is  $\sigma_{zz}$  negatief. In de cirkel van Mohr is deze kritieke spanningscombinatie aangegeven als het punt A. De horizontale normaalspanning  $\sigma_{xx}$  kan men indien gewenst vinden met behulp van het richtingencentrum. Die horizontale normaalspanning blijkt groter te zijn dan de verticale normaalspanning.

Aangenomen wordt dat de spanningen in het hele zandlichaam constant zijn. Dan is aan alle evenwichtsvoorwaarden voldaan. De normaalkracht is  $N = \sigma_{zz}A$ , waarin  $A$  het oppervlak van het zand in het apparaat is. De schuifkracht is  $T = \sigma_{zx}A$ , en omdat  $\sigma_{zx} = \sigma_{zz} \tan \phi$  geldt er nu dus

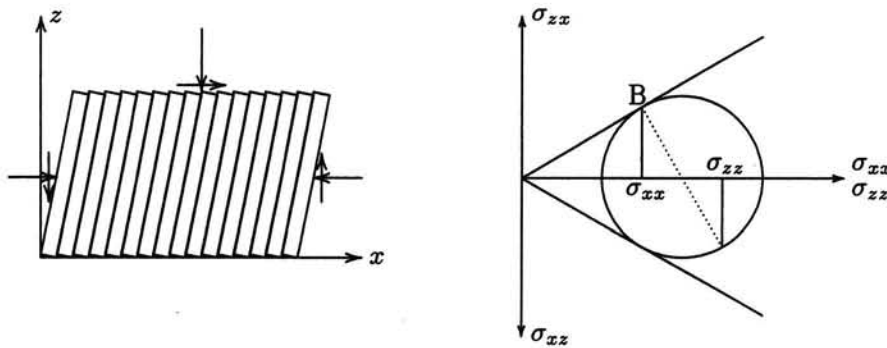
$$T = N \tan \phi. \quad (42.1)$$

Dit systeem voldoet aan alle voorwaarden voor een evenwichtssysteem. De belasting die er bij hoort is dus een ondergrens voor de bezwijkbelasting, en er geldt dus dat

$$T_c \geq N \tan \phi. \quad (42.2)$$

De bezwijkbelasting is immers altijd hoger dan de belasting bij een evenwichtssysteem.

Het tweede systeem, zie figuur 42.3, bestaat uit een combinatie van glijden langs verticale



Figuur 42.3. Afschuiving over verticale vlakken.

vlakken, plus een rotatie (waarvoor geen spanningen nodig zijn). In dit geval is de spanningstoestand op verticale vlakken kritiek. Omdat  $\sigma_{zz}$  negatief is vindt men zo het punt B van de cirkel van Mohr. Met behulp van het richtingencentrum vindt men de spanning  $\sigma_{zz}$ . In dit geval is de horizontale normaalspanning kleiner dan de verticale normaalspanning. De verhouding van de horizontale en verticale normaalspanningen is

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{1 - \sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi}.$$

Hieruit volgt voor de kritische schuifkracht

$$T_c = N \tan \phi \frac{1 - \sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi}. \quad (42.3)$$

Dit systeem voldoet aan alle voorwaarden voor een kinematisch toelaatbaar veld (een bezwijkmechanisme). De bijbehorende belasting is dus een bovengrens voor de bezwijkbelasting,

$$T_c \leq N \tan \phi \frac{1 - \sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi}. \quad (42.4)$$

De bezwijkbelasting is immers altijd lager dan de belasting bij een mechanisme.

Er is nu een tegenspraak ontstaan. Omdat de laatste factor in (42.4) altijd kleiner is dan 1 (als  $\phi > 0$ ) kunnen (42.2) en (42.4) niet allebei waar zijn. De grenstheorema's kunnen voor zand niet geldig zijn.

Ondanks deze principiële moeilijkheid worden berekeningen van grenstoestanden voor materialen als zand nog veel toegepast, zie bijvoorbeeld ook de berekening van horizontale gronddrukken in eerdere hoofdstukken. Men probeert daarbij het geheel van aannamen ten aanzien van de spanningen en de vervormingen zo realistisch mogelijk te doen zijn. Indien beschikbaar wordt daarbij ook rekening gehouden met proefresultaten of praktijkervaringen. De beschouwingen van dit hoofdstuk tonen aan dat men van een dergelijke berekening niet met zekerheid kan zeggen dat deze aan de veilige of onveilige kant is. De onderbouwing van dergelijke berekeningen is meer van praktisch-technische dan van fundamenteel-theoretische aard.

## Hoofdstuk 43

# BRINCH HANSEN

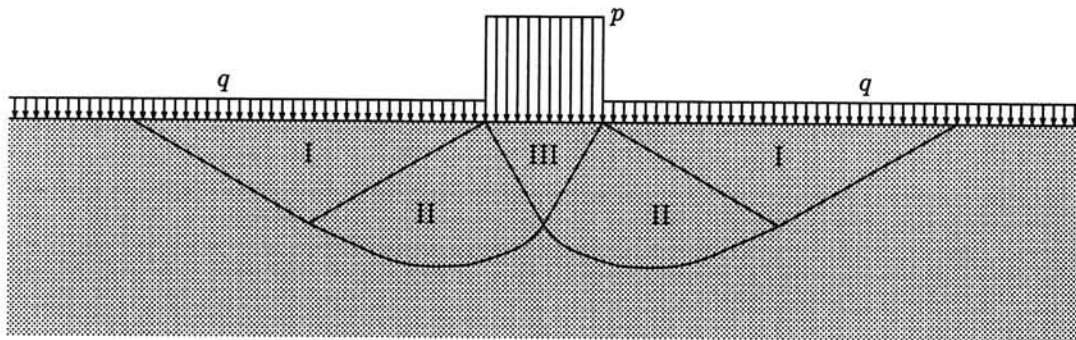
Hoewel van berekeningen van grenstoestanden op basis van de stellingen uit de plasticiteitstheorie voor materialen met inwendige wrijving, zoals zand, niet met zekerheid kan worden gezegd of ze de werkelijke bezwijkbelasting overschatten of onderschatten, worden ze toch vrij vaak toegepast. De gedachte is dan dat men door het doen van min of meer redelijk lijkende aannamen tracht een berekening te maken die aansluit bij ervaringen uit de praktijk, bij waarnemingen uit proeven, en bij intuïtieve overwegingen. Daarbij kan dan ook gezorgd worden voor aansluiting bij bekende resultaten voor limietgevallen.

In dit hoofdstuk worden formules gegeven voor het geval van een fundering op staal (in het Engels noemt men dat een *shallow foundation*). Het eenvoudigste geval is dat van een lange funderingsstrook, van beton of metselwerk, op geringe diepte in de grond. Dit is een generalisatie van het probleem van Prandtl, behandeld in hoofdstuk 41. De grondeigenschappen die in rekening worden gebracht zijn de cohesie  $c$ , de wrijvingshoek  $\phi$ , en het eigen gewicht  $\gamma$ . De beschouwingen zijn beperkt tot homogene grond, dat wil zeggen grond met overal dezelfde eigenschappen.

### 43.1 Draagvermogen strokenfundering

Een belangrijk probleem uit de funderingstechniek is de bepaling van het maximale draagvermogen (ook wel *evenwichtsdraagvermogen* genoemd) van een strokenfundering. Een dergelijke fundering is een voorbeeld van het meer algemene geval van een fundering op staal.

Voor het eenvoudigste geval van een oneindig lange strook op gewichtsloze grond is door Prandtl een berekening gemaakt, zie figuur 43.1, uitgaande van de aanname dat in een gebied aan de oppervlakte overal voldaan is aan de evenwichtsvergelijking en aan het Mohr-Coulomb criterium. Het materiaal staat dan dus in een geheel gebied op hetzelfde moment



Figuur 43.1. Strokenfundering.

op het punt van bezwijken. Deze berekening is in feite een directe generalisatie van de eerder

behandelde oplossing voor het geval van een cohesief materiaal. De oplossing van Prandtl, die hier niet in detail wordt behandeld, maakt weer gebruik van een verdeling van de grond in drie gebieden, zie figuur 43.1. In gebied I is de horizontale hoofdspansing groter dan de verticale, die gelijk is aan de bovenbelasting  $q$ . In gebied III is de verticale normaalspanning de grootste spanning en gelijk aan de belasting van de fundering. De overgang wordt gevormd door het wigvormige gebied II, dat wordt begrensd door een logaritmische spiraal. Het resultaat van de berekeningen kan worden geschreven als

$$p = cN_c + qN_q, \quad (43.1)$$

waarin  $c$  de cohesie is, en  $q$  de bovenbelasting naast de belaste strook. Deze bovenbelasting kan bijvoorbeeld het gevolg zijn van het gewicht van een laag slappe grond. De coëfficiënten  $N_c$  en  $N_q$  zijn dimensieloze constanten, waarvoor door Prandtl werd gevonden

$$N_q = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \exp(\pi \tan \phi), \quad (43.2)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi. \quad (43.3)$$

In tabel 43.1 zijn de waarden van  $N_c$  en  $N_q$  voor verschillende waarden van  $\phi$  weergegeven. Uiteraard vindt men voor het limietgeval  $\phi = 0$  dat  $N_c = 2 + \pi$ , zoals ook gevonden in hoofdstuk 41. Als  $c = 0$  en  $\phi = 0$  is het draagvermogen gelijk aan de bovenbelasting,  $p = q$ . Zelfs een laag modder kan nog belasting dragen, als die maar overal hetzelfde is.

Door Keverling Buisman, Caquot en Terzaghi en Brinch Hansen is de formule uitgebreid met een term voor het eigen gewicht van de grond. Men schrijft dan

$$p = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma. \quad (43.4)$$

Hierin is  $B$  de totale breedte van de belaste strook, en  $\gamma$  het volumegewicht van de grond. Dat alle invloeden gesuperponeerd mogen worden, zoals in formule (43.4) is gedaan, is een aanname die vermoedelijk niet helemaal terecht is, maar waarvan de redelijkheid door verschillende onderzoekers wel min of meer is aangetoond. Voor de coëfficiënt  $N_\gamma$  zijn verschillende waarden voorgesteld, op basis van verschillende berekeningen. Een veel gebruikte relatie is

$$N_\gamma = 2(N_q - 1) \tan \phi. \quad (43.5)$$

Over het karakter van deze uitdrukking bestaat een redelijke mate van internationale overeenstemming, ook al is er geen strenge afleiding voor. De achtergrond is wel gedeeltelijk theoretisch, maar ook is geprobeerd proefresultaten redelijk te benaderen, en uiteraard is er gebruik gemaakt van overwegingen van elementaire logica. Waarschijnlijk uit voorzichtigheid stelde Brinch Hansen zelf destijds een factor  $\frac{3}{2}$  voor in plaats van de thans gebruikelijke factor 2. Het is tegenwoordig niet meer gebruikelijk in de theoretische formules al rekening te houden met veiligheid. Veiligheidscoëfficiënten kunnen altijd expliciet in rekening worden gebracht, bij de sterkteparameters of bij de belasting.

Door verschillende onderzoekers is formule (43.4) nog uitgebreid met een groot aantal reductiefactoren, voor de vorm van de fundering, de richting van de belasting, de helling van de onderkant van de fundering, en voor de helling van de grond. Daarvoor zijn verschillende empirische relaties voorgesteld, op basis van berekeningen, proeven, en intuïtieve beschouwingen. Over deze reductiefactoren bestaat nog veel verschil van inzicht, en men moet ze



$\phi$	$N_c$	$N_q$	$N_\gamma$
0	5.142	1.000	0.000
1	5.379	1.094	0.003
2	5.632	1.197	0.014
3	5.900	1.309	0.032
4	6.185	1.433	0.060
5	6.489	1.568	0.099
6	6.813	1.716	0.151
7	7.158	1.879	0.216
8	7.527	2.058	0.297
9	7.922	2.255	0.397
10	8.345	2.471	0.519
11	8.798	2.710	0.665
12	9.285	2.974	0.839
13	9.807	3.264	1.045
14	10.370	3.586	1.289
15	10.977	3.941	1.576
16	11.631	4.335	1.913
17	12.338	4.772	2.307
18	13.104	5.258	2.767
19	13.934	5.798	3.304
20	14.835	6.399	3.930
21	15.815	7.071	4.661
22	16.883	7.821	5.512
23	18.049	8.661	6.504
24	19.324	9.603	7.661
25	20.721	10.662	9.011
26	22.254	11.854	10.588
27	23.942	13.199	12.432
28	25.803	14.720	14.590
29	27.860	16.443	17.121
30	30.140	18.401	20.093
31	32.671	20.631	23.591
32	35.490	23.177	27.715
33	38.638	26.092	32.590
34	42.164	29.440	38.366
35	46.124	33.296	45.228
36	50.586	37.753	53.404
37	55.630	42.920	63.178
38	61.352	48.933	74.899
39	67.867	55.957	89.007
40	75.313	64.195	106.054

Tabel 43.1. Coëfficiënten voor draagvermogen strokenfundering.

dus met enige voorzichtigheid hanteren. Door Brinch Hansen zijn tenslotte alle factoren en alle gevallen in een enkele formule ondergebracht. Deze formule is van de vorm

$$p = i_c s_c c N_c + i_q s_q q N_q + i_\gamma s_\gamma \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma. \quad (43.6)$$

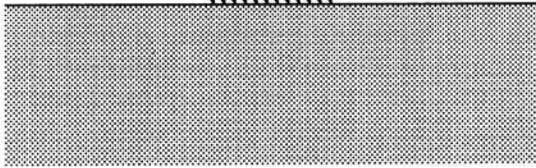
Hierin zijn de coëfficiënten  $i_c$  en  $i_q$  correctiefactoren voor een eventuele schuine richting van de belasting (*inclination factors*), en  $s_c$  en  $s_q$  correctiefactoren voor de vorm van het

belaste oppervlak (*shape factors*). Er worden soms nog andere correctiefactoren gebruikt, bijvoorbeeld voor een grondvlak onder een zekere helling, maar die worden hier niet vermeld.

### 43.2 De richting van de belasting

Als naast een verticale belasting ook een horizontale belasting moet worden overgedragen, zie figuur 43.2, dan wordt het draagvermogen aanzienlijk gereduceerd. De horizontale belasting moet immers in elk geval kleiner zijn dan de kracht waarbij afschuiving over het oppervlak van de grond zou optreden,

$$t \leq c + p \tan \phi.$$



Figuur 43.2. Niet-verticale belasting.

De formules zullen zo moeten zijn dat bij een dergelijke waarde van de schuifspanning  $t$  (ten opzichte van de normaalspanning  $p$ ) geen draagvermogen overblijft.

Voor gevallen dat de schuifkracht kleiner is dan de maximale waarde zijn veel ge-

bruikte waarden voor de reductiefactoren voor de richting van de belasting

$$i_c = 1 - \frac{t}{c + p \tan \phi}, \quad (43.8)$$

$$i_q = i_c^2, \quad (43.9)$$

$$i_\gamma = i_c^3. \quad (43.10)$$

Over de precieze waarde van deze factoren bestaat nog veel onzekerheid, en verschil van mening, zelfs op nationaal niveau. Verschillende onderzoekers geven vaak verschillende uitdrukkingen, en zelfs de Nederlandse voorschriften (NEN 6744) geven andere waarden.

In de hierboven gegeven formules is er wel voor gezorgd dat de extreme waarden kloppen met de te verwachten limieten. Zo worden de coëfficiënten nul als de schuifkracht gelijk is aan de maximaal toelaatbare waarde,  $t_{\max} = c + p \tan \phi$ . Het andere limietgeval treedt op als er geen horizontale belasting is. Dan worden alle factoren precies 1.

### 43.3 Vormfactoren

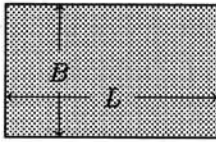
Als de fundering niet de vorm van een oneindig lange strook heeft, maar rechthoekig van vorm is, met breedte  $B$  en lengte  $L$  (waarbij wordt afgesproken dat  $L \geq B$ ), gebruikt men vaak factoren van de volgende vorm.

$$s_c = 1 + 0.2 \frac{B}{L}, \quad (43.11)$$

$$s_q = 1 + \frac{B}{L} \sin \phi, \quad (43.12)$$

$$s_\gamma = 1 - 0.3 \frac{B}{L}. \quad (43.13)$$

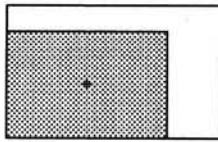
Ook over deze factoren bestaat internationaal geen algemene overeenstemming. Zo stellen



Figuur 43.3. Rechthoekige belasting.

sommigen dat  $s_q = 1$ , voor alle waarden van  $\phi$ , en sommige onderzoekers gebruiken andere coëfficiënten dan de waarden 0.2 en 0.3. Een rechtvaardiging voor het feit dat de coëfficiënten  $s_c$  en  $s_q$  groter dan 1 zijn is dat bij afschuiving van een rechthoekige plaat een deel van de grond naast de plaat ook meevervormt, en dat er dus een groter gebied bijdraagt aan de draagkracht van de fundering dan alleen de breedte van de plaat. De coëfficiënt  $s_\gamma$  is kleiner dan 1 omdat uit proeven is gebleken dat bij een rechthoekige plaat in zand een glijvlak optreedt dat minder diep is als bij een lange strook.

Als de belasting excentrisch op de fundering aangrijpt worden de breedte  $B$  en de lengte  $L$  meestal zodanig gereduceerd dat de resultante van de belasting steeds aangrijpt in het zwaartepunt van het gereduceerde oppervlak, zie figuur 43.4. Een deel van de funderingsplaat draagt dan niet bij tot het draagvermogen, althans voor dit belastingsgeval. Uiteraard kan het wel bijdragen aan het draagvermogen voor andere belastingsgevallen.



Figuur 43.4. Excentrische belasting.

Zoals reeds gesteld is er internationaal geen algemene overeenstemming over de grootte van bepaalde reductiefactoren, omdat de resultaten van theoretisch en experimenteel onderzoek van verschillende onderzoekers niet altijd met elkaar in overeenstemming zijn. Men zij hierop bedacht bij bestudering van de literatuur.

Vervelender is nog dat er vroeger zelfs geen overeenstemming was over de uitgangsformule (43.4). In sommige oudere literatuur ontbreekt daarin de factor  $\frac{1}{2}$ . De waarden van de faktor  $N_\gamma$  zijn dan half zo groot, zodat het allemaal geen wezenlijk verschil maakt, maar wel tot verwarring aanleiding kan geven. Hier is de oorspronkelijke formule van Terzaghi aangehouden, zoals in de Angelsaksische literatuur en thans internationaal algemeen gebruikelijk is. Vooral in oude Duitse literatuur vindt men de formule soms zonder de faktor  $\frac{1}{2}$ .

De formules gepresenteerd in dit hoofdstuk zijn oorspronkelijk afgeleid voor funderingen op het land, met betrekkelijk geringe afmetingen, zeg enige vierkante meters. De derde term in de formule (43.6) van Brinch Hansen is dan, door de factor  $B$ , zo klein dat men die meestal niet meeneemt. Bij de ontwikkeling van offshore platforms is men gekomen tot toepassing van "gravity foundations", waarbij een platform gefundeerd wordt op een reusachtig betonnen caisson. Het grondoppervlak daarvan kan wel afmetingen hebben van 80 m  $\times$  80 m. Ook voor het draagvermogen van dergelijke constructies wordt vaak, althans als eerste benadering, gebruik gemaakt van de formule van Brinch Hansen. Een belangrijk verschil met toepassingen op het land is dat de derde term in de formules (43.4) en (43.6), die de invloed van het eigen gewicht van de grond beschrijft, bij offshore toepassingen in plaats van een onbelangrijke kleine reserve vaak de belangrijkste bijdrage tot het draagvermogen is, vooral in zand. In de laatste decennia is dan ook veel onderzoek gedaan om deze term nauwkeuriger vast te stellen.

Er wordt met nadruk op gewezen dat de beschouwingen in dit hoofdstuk in principe beperkt zijn tot droge grond, waarin er geen verschil is tussen effectieve spanningen en totaalspanningen. Voor grond onder water dient men de formules te hanteren in termen van effectieve spanningen. In sommige gevallen betekent dit dat de enige wijziging in de formules is dat

het volumegewicht  $\gamma$  moet worden vervangen door het verschil van het nat volumegewicht van de grond en het volumegewicht van het water,  $\gamma_n - \gamma_w$ . Dat is een heel eenvoudige maar wel zeer essentiële aanpassing.

### Opgaven

**43.1** Laat zien dat de uitdrukking (43.3) nadert tot  $\pi + 2$  als  $\phi \rightarrow 0$ .

**43.2** Voor zand kan men meestal wel aannemen dat de hoek van inwendige wrijving  $\phi$  minstens  $30^\circ$  is. Als men vermoedt dat de waarde in werkelijkheid wat groter is, bijvoorbeeld 10 % groter, is het dan voor het draagvermogen van een fundering de moeite waard daarnaar onderzoek te doen?

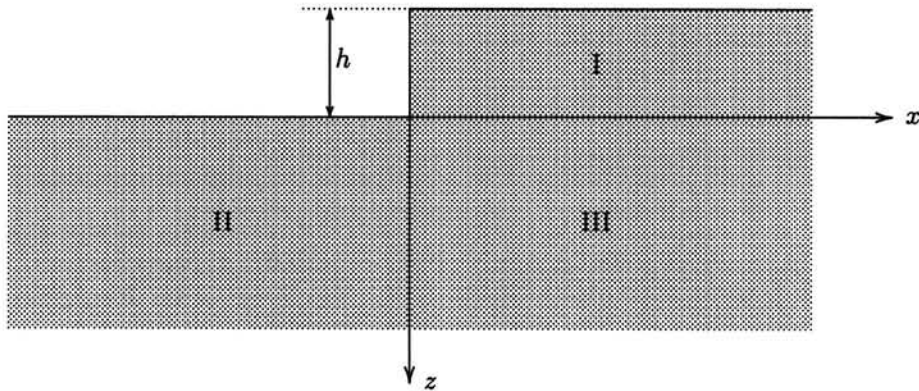
**43.3** Schat het draagvermogen van een gravity foundation, met afmetingen van het grondoppervlak van  $60 \text{ m} \times 60 \text{ m}$ , op een zandbodem, onder water.

**43.4** Schat het puntdraagvermogen van een vierkante paal, met een doorsnede van  $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ , gefundeerd op een zandlaag, die 20 m beneden een pakket van slappe grond ligt.

## Hoofdstuk 44

# VERTICAAL TALUD IN COHESIEF MATERIAAL

Een bekend en belangrijk probleem uit de theoretische grondmechanica is dat van een verticaal talud in een zuiver cohesief materiaal ( $\phi = 0$ ), zoals dat optreedt bij het maken van een verticale ingraving, zie figuur 44.1. Het gaat er daarbij om een ondergrens of een bovengrens



Figuur 44.1. Verticaal talud.

te vinden voor de maximaal mogelijke hoogte  $h_c$  van het talud, uitgaande van een overal gelijke cohesie  $c$ , en een constant volumegewicht  $\gamma$ .

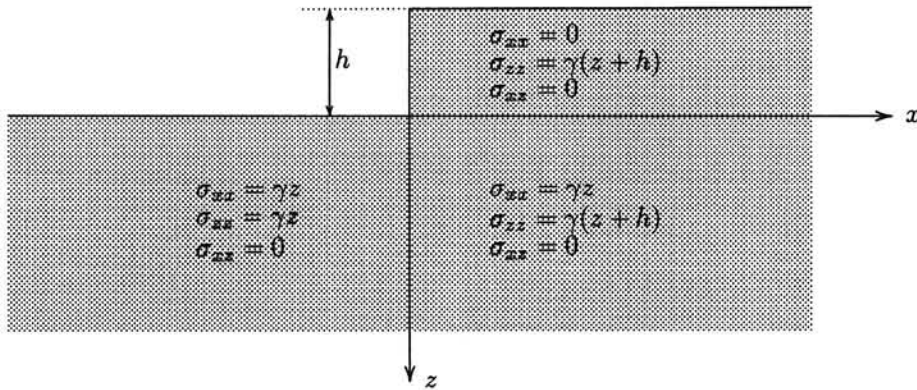
### 44.1 Ondergrens

In dit geval moet rekening gehouden worden met het eigen gewicht van het materiaal. De evenwichtsvergelijkingen zijn dan

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (44.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \gamma = 0. \quad (44.2)$$

Een eenvoudig evenwichtssysteem is getekend in figuur 44.2, bestaande uit drie gebieden. Op de overgangen tussen de drie gebieden treden discontinuïteiten op in de normaalspanning evenwijdig aan de discontinuïteitslijn, wat is toegestaan, zie hoofdstuk 40. De randvoorwaarden voor de spanningen zijn dat de normaalspanningen en schuifspanningen langs de gehele bovenrand nul moeten zijn. Daaraan is exact voldaan door de spanningsvelden vermeld in figuur 44.2. Men kan dat veld construeren door eerst te stellen dat om aan de randvoorwaarden voor de schuifspanning en aan de continuïteitsvoorwaarden te voldoen het vrijwel niet anders kan dan dat overal  $\sigma_{xz} = 0$ . Om aan de randvoorwaarde voor  $\sigma_{xx}$  in



Figuur 44.2. Evenwichtssysteem.

gebied I te voldoen volgt dan direct uit de evenwichtsvergelijking (44.1) dat in dat hele gebied  $\sigma_{xx} = 0$ . De uitdrukkingen voor  $\sigma_{zz}$  volgen automatisch uit de evenwichtsvergelijking (44.2) door daarin  $\sigma_{xx} = 0$  te stellen, en gebruik te maken van de randvoorwaarden aan de bovenrand. De uitdrukkingen voor  $\sigma_{xx}$  in de onderste twee gebieden kunnen nog vrij worden gekozen, maar die moeten wel zo zijn dat de horizontale normaalspanning constant is in  $x$ -richting, en liefst zo dicht mogelijk bij  $\sigma_{zz}$  ligt, opdat de maximale schuifspanning zo klein mogelijk is. De keuze  $\sigma_{xx} = \gamma z$  zorgt er voor dat in het gebied II, linksonder, de cirkel van Mohr reduceert tot een punt. Dat lijkt gunstig, maar leidt er wel toe dat in het gebied III, rechtsonder, de spanningen  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{zz}$  nogal wat van elkaar verschillen.

De verticale en horizontale normaalspanningen zijn in dit geval hoofdspansingen, omdat overall  $\sigma_{xz} = 0$ . Daarom vereist het Mohr-Coulomb criterium in dit geval  $|\sigma_{xx} - \sigma_{zz}| \leq 2c$ . Het grootste verschil tussen  $\sigma_{xx}$  en  $\sigma_{zz}$  treedt op in het gebied rechtsonder. Daar is  $\sigma_{zz} - \sigma_{xx} = \gamma h$ . Men vindt nu als ondergrens de waarde  $h = 2c/\gamma$ , dat wil zeggen

$$h_c \geq \frac{2c}{\gamma}. \quad (44.3)$$

In de literatuur is nog een aantal hogere ondergrenzen te vinden, gevonden uit meer gecompliceerde velden van spanningen. Door De Josselin de Jong (1965) en Heyman (1973) werd gevonden

$$h_c \geq \frac{2.82c}{\gamma}. \quad (44.4)$$

In de jaren tot 1978 is De Josselin de Jong er in geslaagd steeds hogere waarden te vinden, tot aan

$$h_c \geq \frac{3.39c}{\gamma}. \quad (44.5)$$

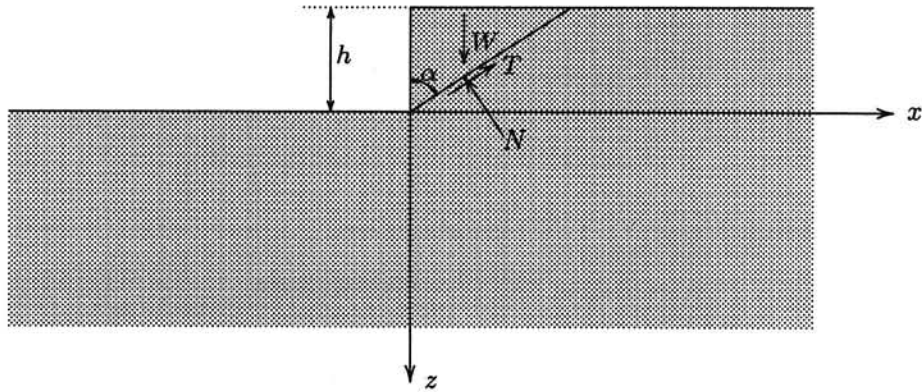
Een nog hogere waarde is gevonden door Pastor, ook in 1978,

$$h_c \geq \frac{3.64c}{\gamma}. \quad (44.6)$$

Al deze oplossingen zijn correcte ondergrenzen. Een hogere waarde als die volgens (44.6) is nog niet gevonden, maar het is niet uitgesloten dat men nog hogere waarden vindt.

## 44.2 Bovengrens

Een eenvoudige bovengrens vindt men door een mechanisme te beschouwen, met een recht glijvlak, onder een hoek  $\alpha$  met de verticaal, zie figuur 44.3. Het gewicht van de afschuivende



Figuur 44.3. Mechanisme met recht glijvlak.

wig is  $W = \frac{1}{2}h^2 \tan \alpha$ , en uit het evenwicht in de richting van afschuiven (dat is equivalent met de stelling van virtuele arbeid voor een beweging volgens het mechanisme) vindt men nu

$$T = W \cos \alpha = \frac{1}{2}h^2 \sin \alpha.$$

Omdat de lengte van het glijvlak gelijk is aan  $h/\cos \alpha$  geldt er dat

$$T = \frac{c h}{\cos \alpha}.$$

Men vindt dus nu

$$h = \frac{4c}{\gamma} \frac{1}{\sin 2\alpha}. \quad (44.7)$$

De hoogte van de ingraving blijkt nog van de hoek  $\alpha$  af te hangen. Het meest kritieke glijvlak is dat waarvoor  $h$  zo klein mogelijk is. Dat is als  $\sin 2\alpha$  zo groot mogelijk is, en dat is als  $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ , ofwel  $\alpha = 45^\circ$ . Er geldt dus, omdat dit een bovengrens is

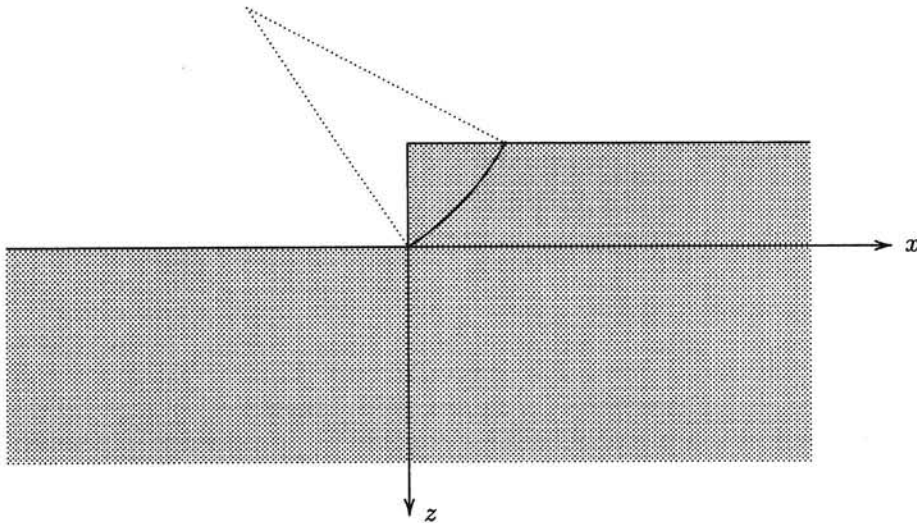
$$h_c \leq \frac{4c}{\gamma}. \quad (44.8)$$

Dit is de bovengrens behorend bij rechte glijvlakken.

Lagere bovengrenzen kan men vinden door ook cirkelvormige glijvlakken te beschouwen. Door Fellenius is op die manier al in 1927 een lagere bovengrens gevonden,

$$h_c \leq \frac{3.83c}{\gamma}, \quad (44.9)$$

zie figuur 44.4. Ondanks vele pogingen is nog nooit een lagere bovengrens gevonden.



Figuur 44.4. Mechanisme van Fellenius.

Concluderend kan men stellen dat voor de kritische hoogte  $h_c$  van een verticale ingraving in een zuiver cohesief materiaal, zonder inwendige wrijving (d.w.z.  $\phi = 0$ ), geldt dat

$$\frac{3.64c}{\gamma} \leq h_c \leq \frac{3.83c}{\gamma}. \quad (44.10)$$

Hiermee is de bezwijkbelasting tamelijk nauw ingesloten, maar er is nog enige ruimte voor verbetering van de grenzen. Het is wellicht verbazend dat zelfs voor dit zeer eenvoudige geval, voor homogene grond met alleen een constante cohesie  $c$ , er nog ruimte zit tussen de hoogste ondergrens en de laagste bovengrens.

### Opgaven

- 44.1** In het evenwichtssysteem van figuur 44.2 kan men de grootste schuifspanning in het gebied rechtsonder nul maken door te stellen dat  $\sigma_{xx} = \gamma(z + h)$ . Moeten dan de spanningen in de andere twee gebieden worden aangepast?
- 44.2** Wat is de ondergrens behorende bij het evenwichtssysteem uit de vorige opgave?
- 44.3** In een laag grond met een cohesie van 10 kPa moet een kabel gelegd worden, op een diepte van 2 m. Kan men dat doen door een sleuf te graven met verticale wanden?
- 44.4** Door zand te mengen met lange vezels (kunststof garen) krijgt men een materiaal met cohesie en inwendige wrijving. Men beweert dat de cohesie wel 100 kPa is. Hoe hoog kan dan een verticaal talud zijn?



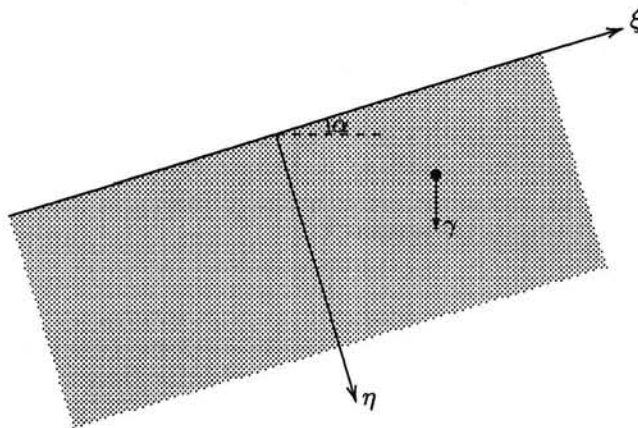
## Hoofdstuk 45

# STABILITEIT VAN ONEINDIG TALUD

De beoordeling van de stabiliteit van het talud van een dijk of een weglichaam is een belangrijk probleem uit de grondmechanica. In het vorige hoofdstuk is dat bekeken voor een verticaal talud in een zuiver cohesief materiaal ( $c \neq 0$ ,  $\phi = 0$ ). Ter voorbereiding op het algemene geval, dat in het volgende hoofdstuk wordt behandeld, wordt in dit hoofdstuk gekeken naar een aantal gevallen van oneindig doorlopende taluds in een homogeen materiaal, met inwendige wrijving, maar zonder cohesie ( $c = 0$ ,  $\phi \neq 0$ ).

### 45.1 Oneindig talud in droog zand

Beschouwd wordt een oneindig lang talud, in droog zand, onder een constante hoek  $\alpha$ , zie figuur 45.1. Het is het handigst om de evenwichtsvergelijkingen uit te drukken in coördinaten



Figuur 45.1. Oneindig talud in droog zand.

evenwijdig aan en loodrecht op het talud,

$$\frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \gamma \sin \alpha = 0, \quad (45.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}}{\partial \eta} - \gamma \cos \alpha = 0. \quad (45.2)$$

De spanningen hierin zijn totaalspanningen. Maar omdat er geen waterspanningen zijn, zijn het in dit geval ook de effectieve spanningen.

De spanningstoestand is niet eenduidig bepaald door de evenwichtsvergelijkingen. Eén van de mogelijke oplossingen krijgt men door aan te nemen dat de spanningstoestand onafhankelijk is van  $\xi$ , de coördinaat langs het talud. Dat lijkt wel een redelijke aanname, omdat op een talud dat zich zowel naar onderen als naar boven oneindig uitstrekt de oorsprong

willekeurig gekozen kan worden. Een echte absolute noodzaak voor de onafhankelijkheid van  $\xi$  is er echter niet, en het is dan ook niet meer dan een aanname. Met behulp van deze aanname vindt men nu, als de spanningen worden geïnterpreteerd als effectieve spanningen,

$$\sigma'_{\eta\xi} = -\gamma\eta \sin \alpha, \quad (45.3)$$

$$\sigma'_{\eta\eta} = +\gamma\eta \cos \alpha. \quad (45.4)$$

De integratieconstanten hierin zijn nul gesteld omdat op het oppervlak  $\eta = 0$  de spanningen  $\sigma'_{\eta\eta}$  en  $\sigma'_{\eta\xi}$  nul moeten zijn. Er geldt nu

$$\frac{|\sigma'_{\eta\xi}|}{|\sigma'_{\eta\eta}|} = \tan \alpha. \quad (45.5)$$

Op grond van het bezwijkcriterium van Coulomb kan deze verhouding voor een materiaal zonder cohesie ( $c = 0$ ) niet groter zijn dan  $\tan \phi$ . Dat betekent dat  $\alpha$  niet groter kan zijn dan  $\phi$ ,  $\alpha < \phi$ .

Men stelt wel

$$F = \frac{|\sigma'_{\eta\xi}/\sigma'_{\eta\eta}|_{\max}}{|\sigma'_{\eta\xi}/\sigma'_{\eta\eta}|}, \quad (45.6)$$

en noemt  $F$  de *stabiliteitsfactor*, of de *veiligheidscoëfficiënt*. In dit geval is dus

$$F = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}. \quad (45.7)$$

Als  $\alpha < \phi$  is dit groter dan 1. Het talud is dan stabiel. Als  $\alpha > \phi$  is  $F < 1$ . Het talud is dan niet stabiel.

Men merke op dat de waarde van de stabiliteitsfactor  $F$  in dit geval onafhankelijk is van het volumegewicht  $\gamma$ . Dat is karakteristiek voor een zuiver wrijvingsmateriaal. In het algemeen wordt de veiligheid vaak gedefinieerd als

$$F = \frac{\text{sterkte}}{\text{belasting}}. \quad (45.8)$$

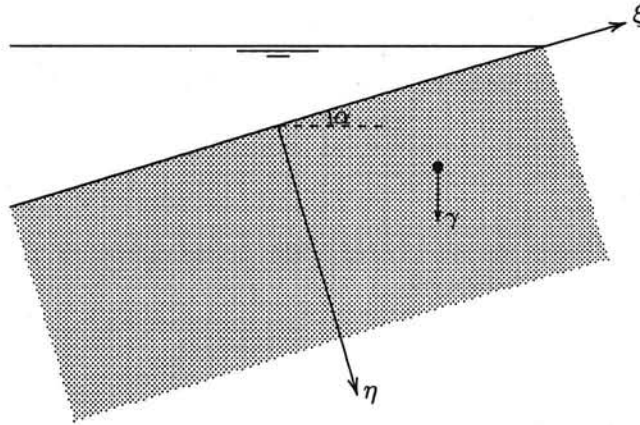
Bij een belasting door eigen gewicht van een wrijvingsmateriaal is de belasting evenredig met het volumegewicht, maar de sterkte ook, en de veiligheid hangt dus niet van het volumegewicht af.

In het geval van een talud onder een hoek  $\phi$  in droog zand (dat is dan het steilste talud dat nog stabiel kan zijn) spreekt men wel van het *natuurlijk talud*. Dit is ongeveer de helling waaronder een berg droog gestort zand tot rust komt. Het vormt een eenvoudige manier om de wrijvingshoek  $\phi$  van een droog niet-cohesief korrelmateriaal te meten.

## 45.2 Oneindig talud onder water

In het geval van een oneindig talud onder water, zonder stroming van het grondwater, zie figuur 45.2, kan men een mogelijke spanningstoestand als volgt vinden. De evenwichtsvergelijkingen (45.1) en (45.2) zijn ook in dit geval geldig, alleen is er nu wel een waterspanning. Schrijft men  $\sigma_{\xi\xi} = \sigma'_{\xi\xi} + p$  en  $\sigma_{\eta\eta} = \sigma'_{\eta\eta} + p$ , dan krijgt men, in termen van effectieve spanningen,

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} + \gamma \sin \alpha = 0, \quad (45.9)$$



Figuur 45.2. Oneindig talud onder water.

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} - \gamma \cos \alpha = 0. \quad (45.10)$$

Als het grondwater in rust is, is de drukverdeling in het grondwater hydrostatisch. Als aangenomen wordt dat de  $z$ -as verticaal omhoog wijst geldt er nu voor de drukverdeling

$$p = p_0 - \gamma_w z = p_0 + \gamma_w \eta \cos \alpha - \gamma_w \xi \sin \alpha. \quad (45.11)$$

De referentiedruk  $p_0$  hierin is de druk op het niveau  $z = 0$ . Als het hele talud onder water is moet men zich het freatisch vlak (het vlak waar  $p = 0$ ) op het oneindige denken, aan de bovenkant. Dan is de waterdruk op het niveau  $z = 0$  oneindig groot,  $p_0 = \infty$ . Het hier beschouwde geval is dus niet erg reëel, maar dat is een oneindig talud natuurlijk toch al niet. Op zijn best is het een limietgeval voor een heel lang talud.

Substitutie van (45.11) in (45.9) en (45.10) geeft

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\xi}}{\partial \eta} + (\gamma - \gamma_w) \sin \alpha = 0, \quad (45.12)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\eta}}{\partial \eta} - (\gamma - \gamma_w) \cos \alpha = 0. \quad (45.13)$$

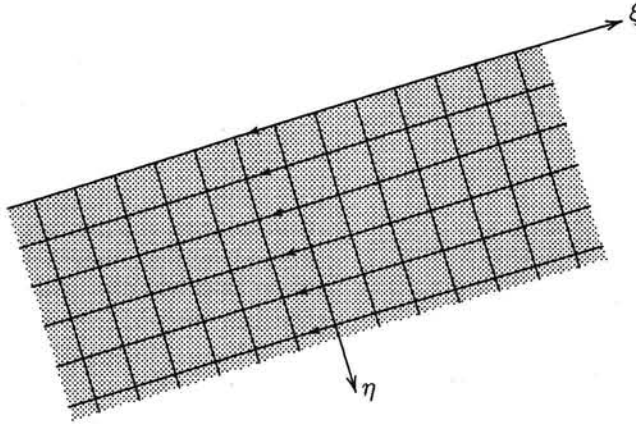
Dit zijn precies dezelfde vergelijkingen als in het droge geval, alleen is  $\gamma$  vervangen door  $\gamma - \gamma_w$ . Omdat al gevonden was dat de stabiliteitsfactor  $F$  onafhankelijk is van  $\gamma$ , zie (45.7), is blijkbaar ook in dit geval

$$F = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}. \quad (45.14)$$

In stilstaand water is onder water blijkbaar ook een talud onder een helling  $\phi$  mogelijk. Dat lijkt een conclusie die in strijd is met veel ervaringen dat een talud onder water veelal nogal wat flauwer is dan boven water. Dat kan men zich veroorzaakt denken doordat in werkelijkheid er meestal wel enige stroming van het water is. Door diverse oorzaken (o.a. erosie, bijvoorbeeld door golven, maar ook door uittredend grondwater) kan men dan verklaren dat het talud onder water meestal aanzienlijk flauwer is dan boven water. In een aquarium met absoluut stilstaand water is het door heel voorzichtig zand te strooien mogelijk inderdaad een talud op te bouwen dat praktisch net zo steil is als in droog zand.

### 45.3 Stroming evenwijdig aan het talud

Een interessant geval is ook dat van een talud waarin een grondwaterstroming optreedt evenwijdig aan het talud, naar beneden, zie figuur 45.3. Dat kan het geval zijn bij een



Figuur 45.3. Stroming evenwijdig aan het oppervlak.

dijk die net te laag is om het water te keren, en daarom overstroomd wordt. Over het binnentalud stroomt dan water, en na enige tijd kan er een situatie ontstaan waarbij ook in het dijklichaam een stroming optreedt, zie figuur 45.4.

Bij een uniforme stroming van het grondwater moet de drukverdeling lineair zijn in  $\xi$  en  $\eta$ , dat wil zeggen

$$p = A\eta + B\xi + C.$$

Als langs het oppervlak de druk nul is (dat is het geval als de grond verzadigd is, en er geen water boven staat, of hoogstens een dun laagje), moet  $p = 0$  als  $\eta = 0$ . Hieruit volgt dat  $B = C = 0$ , en dus wordt de drukverdeling

$$p = A\eta.$$

Voor de stijghoogte  $h$  geldt dan

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w} = A \frac{\eta}{\gamma_w} - \eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha.$$

Als de stroming evenwijdig aan het oppervlak is moet  $q_\eta = 0$ , en dus  $\partial h / \partial \eta = 0$ . Hieruit volgt  $A = \gamma_w \cos \alpha$ . De druk is dan

$$p = \gamma_w \eta \cos \alpha. \quad (45.15)$$

Substitutie hiervan in de evenwichtsvergelijkingen (45.9) en (45.10) geeft in dit geval

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \gamma \sin \alpha = 0, \quad (45.16)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\eta}}{\partial \eta} - (\gamma - \gamma_w) \cos \alpha = 0. \quad (45.17)$$

Een oplossing onafhankelijk van  $\xi$  hiervan is

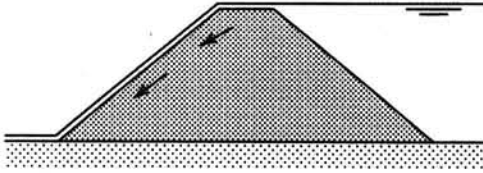
$$\sigma'_{\eta\xi} = -\gamma \eta \sin \alpha, \quad (45.18)$$

$$\sigma'_{\eta\eta} = (\gamma - \gamma_w)\eta \cos \alpha. \quad (45.19)$$

Voor de stabiliteitsfactor  $F$  vindt men nu

$$F = \frac{\gamma - \gamma_w}{\gamma} \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}. \quad (45.20)$$

Omdat  $(\gamma - \gamma_w)/\gamma < 1$  (in de praktijk ongeveer 0.5) vindt men nu dat het steilst mogelijke talud veel flauwer is dan  $\phi$ . De grondwaterstroming heeft een erg ongunstige invloed op de stabiliteit van het talud.



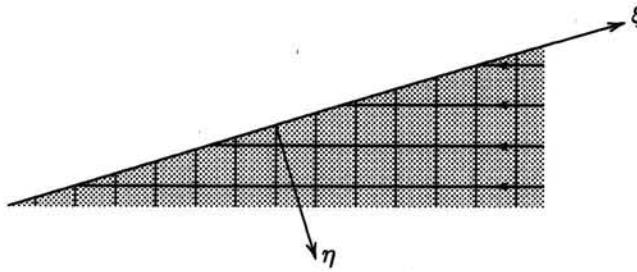
Figuur 45.4. Overstromende dijk.

in de bovenste laag van het talud een neerwaartse grondwaterstroming ontstaat. Dit mechanisme wordt vaak verantwoordelijk gesteld voor het bezwijken van veel dijken in Zuidwest-Nederland in 1953.

Een van de consequenties van het hier gevonden resultaat is dat het voor het binnentalud van een dijk erg ongunstig is als er in een laag juist onder het oppervlak grondwater door de dijk naar beneden stroomt. Dat kan het geval zijn als de vrije grondwaterspiegel zo hoog uitkomt dat er een kweloppervlak ontstaat. Het kan ook optreden als er veel water over de dijk loopt, waarbij

#### 45.4 Horizontale stroming

Een ander interessant geval is dat waarbij het grondwater horizontaal door een dijk stroomt, zie figuur 45.5. Bij een zuiver horizontale stroming is de stijghoogte onafhankelijk van  $z$ ,



Figuur 45.5. Horizontale stroming.

$\partial h/\partial z = 0$ , en dus, omdat  $h = z + p/\gamma_w$ :  $\partial p/\partial z = -\gamma_w$ . Verder moet langs het oppervlak, dat is als  $z = x \tan \alpha$ , de druk  $p$  nul zijn. Als de stroming uniform is moet de drukverdeling lineair zijn. De enige drukverdeling die aan al deze eisen voldoet is

$$p = \gamma_w x \tan \alpha - \gamma_w z. \quad (45.21)$$

Dit kan men uitdrukken in  $\xi$  en  $\eta$  met de bekende transformatieformules voor de rotatie van het assenstelsel,

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha,$$

$$z = -\eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha.$$

Het resultaat is

$$p = \gamma_w \eta / \cos \alpha. \quad (45.22)$$

Substitutie hiervan in de evenwichtsvergelijkingen (45.9) en (45.10) geeft in dit geval

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \gamma \sin \alpha = 0, \quad (45.23)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{\eta\eta}}{\partial \eta} - \gamma \cos \alpha - \gamma_w / \cos \alpha = 0. \quad (45.24)$$

Een oplossing onafhankelijk van  $\xi$  hiervan is

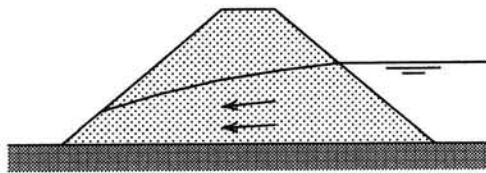
$$\sigma'_{\eta\xi} = -\gamma \eta \sin \alpha, \quad (45.25)$$

$$\sigma'_{\eta\eta} = \left( \gamma - \frac{\gamma_w}{\cos^2 \alpha} \right) \eta \cos \alpha. \quad (45.26)$$

Voor de stabiliteitsfactor  $F$  vindt men nu

$$F = \frac{\gamma - \gamma_w / \cos^2 \alpha}{\gamma} \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}. \quad (45.27)$$

Deze waarde is nog kleiner dan die in het vorige geval, zie (45.20), omdat de waarde van  $\cos^2 \alpha$  altijd kleiner dan 1 is. Horizontaal uitstromend grondwater is dus nog gevaarlijker dan

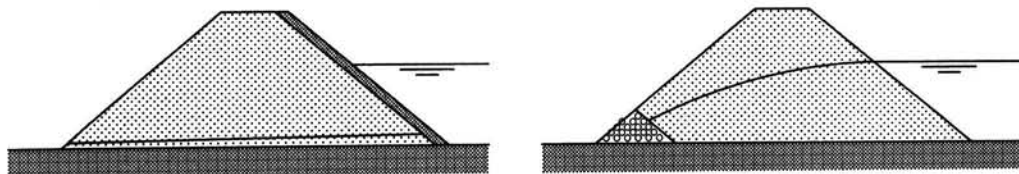


Figuur 45.6. Doorstroomde dijk.

water dat evenwijdig aan het talud stroomt. Dit geval treedt bij benadering op bij een homogene dijk op een ondoorlatende ondergrond. Stuwdammen worden vaak aangelegd op zo'n ondoorlatende ondergrond, om lekkage van water uit het stuwmeer door de ondergrond te vermijden. Als men de dam uit homogeen materiaal opbouwt, zie figuur 45.6, zal aan de benedenstroomse zijde het water uit de dam treden, en over

het talud naar beneden stromen, en dan worden afgevoerd door de afwatering van het land aldaar, bijvoorbeeld via sloten of drainagebuizen. De praktisch horizontale stroming door een dijk is erg gevaarlijk, en moet dan ook vermeden worden.

Er zijn twee belangrijke technische oplossingen. De eerste is om aan de bovenstroomse zijde, of in de kern van de dijk of de dam, een zeer slecht doorlatende laag (een kleilaag)



Figuur 45.7. Dijk met kleilaag of drain.

aan te brengen. De tweede oplossing is om aan de benedenstroomse zijde, aan de voet van de dijk of de dam, een heel goed doorlatend filter (bijvoorbeeld bestaande uit grind) aan te brengen, dat het uitstromende grondwater afvangt, en via een leiding verder naar buiten brengt. Het beste is natuurlijk om beide oplossingen toe te passen: een kleilaag op het buitentalud, en een filter in de teen van de dam aan de binnenkant.

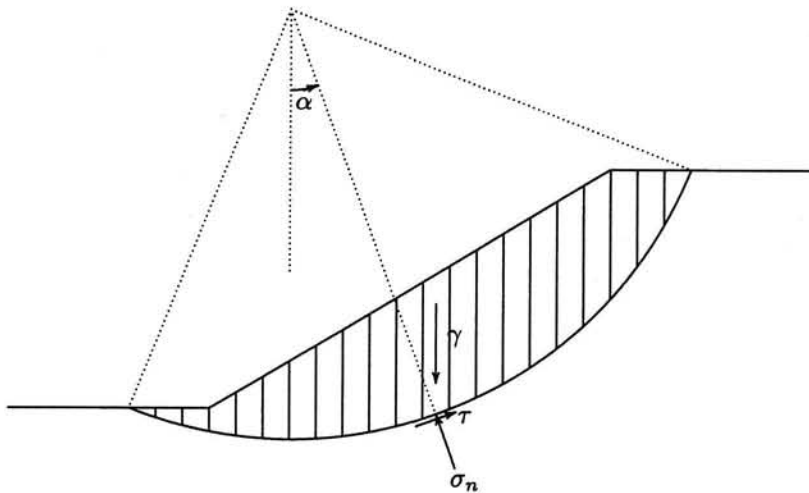
## Hoofdstuk 46

# GLIJVLAKBEREKENINGEN

Voor de beoordeling van de stabiliteit van taluds van willekeurige vorm, in materialen met cohesie en inwendige wrijving, bestaan vele methoden. De meeste gaan uit van cirkelvormige glijvlakken. Met behulp van een aantal vereenvoudigde aannamen tracht men dan een waarde voor de stabiliteitsfactor  $F$ , gedefinieerd als de verhouding van sterkte tot belasting, te vinden. Als maatgevend wordt dan de cirkel beschouwd waarvoor  $F$  het kleinst is. De veelheid van methoden (o.a. volgens Fellenius, Taylor, Bishop, Morgenstern-Price, Spencer, Janbu) illustreert op zichzelf al dat geen van de methoden exact is. Men zij voorzichtig met het hanteren van de gevonden resultaten. Als men vindt dat  $F = 1.05$  wil dat nog niet met zekerheid zeggen dat het talud stabiel is. In dit hoofdstuk worden twee van de eenvoudigste methoden behandeld, namelijk die van Fellenius en die van Bishop.

### 46.1 Cirkelvormige glijvlakken

In de meeste methoden wordt uitgegaan van een cirkelvormig glijvlak, zie figuur 46.1. De



Figuur 46.1. Glijvlakberekening.

moot grond daarboven wordt opgedeeld in een aantal *lamellen* (Engels : *slices*) begrensd door verticale vlakken. Langs het glijvlak werkt een schuifspanning  $\tau$ , waarvoor gesteld wordt dat die overal een factor  $F$  kleiner is dan de maximaal mogelijke, dat wil zeggen

$$\tau = \frac{1}{F} (c + \sigma'_n \tan \phi). \quad (46.1)$$

Men merke op dat hier al de eerste aanname wordt gedaan, namelijk dat de factor  $F$  voor alle lamellen gelijk is.

Uit het momentenevenwicht ten opzichte van het middelpunt van de cirkel volgt dat

$$\sum \gamma h b R \sin \alpha = \sum \frac{\tau b R}{\cos \alpha}. \quad (46.2)$$

Hierin is  $h$  de hoogte van een lamel,  $b$  de breedte,  $\gamma$  het volumegewicht in die lamel, en  $R$  de straal van de cirkel. Meer algemeen kan men stellen dat  $\gamma h b$  het gewicht van de lamel is, mogelijk opgebouwd uit de som van delen met verschillend volumegewicht. Als alle lamellen dezelfde breedte hebben vindt men nu, uit (46.1) en (46.2)

$$F = \frac{\sum [(c + \sigma'_n \tan \phi) / \cos \alpha]}{\sum \gamma h \sin \alpha}. \quad (46.3)$$

Dit is de basisformule voor veel berekeningen. De diverse methoden verschillen vooral door de wijze waarop de normaalspanning  $\sigma'_n$  wordt berekend.

## 46.2 Methode Fellenius

In de methode van Fellenius, de oudste methode voor de analyse van glijvlakken, wordt aangenomen dat de lamellen onderling geen krachten op elkaar uitoefenen. Op een lamel, zie figuur 46.2, werken dan alleen het gewicht  $\gamma$ , en een normaalspanning  $\sigma_n$  en een schuifspanning  $\tau$  aan de onderzijde. De normaalspanning  $\sigma_n$  kan het gemakkelijkst in het bekende gewicht  $\gamma$  uitgedrukt worden door het evenwicht van de lamel in de richting loodrecht op het glijvlak te beschouwen. Dit geeft

$$\sigma_n = \gamma h \cos^2 \alpha, \quad (46.4)$$

en dus, omdat  $\sigma_n = \sigma'_n + p$ ,

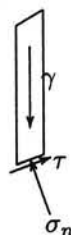
$$\sigma'_n = \gamma h \cos^2 \alpha - p. \quad (46.5)$$

Substitutie hiervan in (46.3) geeft tenslotte

$$F = \frac{\sum \{ [c + (\gamma h \cos^2 \alpha - p) \tan \phi] / \cos \alpha \}}{\sum \gamma h \sin \alpha}. \quad (46.6)$$

Dit is de formule van Fellenius.

Voor een talud in homogene grond geschiedt de berekening door een cirkel aan te nemen, en de moot grond in bijvoorbeeld 10 of 20 lamellen te verdelen. Men kan dan, door opmeting van  $h$  en  $\alpha$  voor elke lamel, de waarde van  $F$  bepalen. Dat moet dan voor een groot aantal cirkels gebeuren, om de kleinste waarde van  $F$  te vinden. De berekening vergt veel werk, maar men kan dat ook door een computer laten verrichten. In niet-homogene grond is de berekening nog wat meer werk, omdat men dan het totale gewicht van een lamel moet berekenen, waarbij die lamel mogelijk uit lagen van verschillend gewicht bestaat. De grootheid  $\gamma h$  stelt immers in feite de verticale totaalspanning voor, te berekenen uit het totale gewicht van de grond in een lamel.



Figuur 46.2. Lamel.

Tegen de methode van Fellenius kunnen nogal wat bezwaren worden ingebracht. Om te beginnen ontbreekt, zoals al eerder gesteld, een degelijke fundamentele basis voor alle glijvlakberekeningen voor een materiaal met inwendige wrijving. Het is dus niet bekend hoe de stabiliteitsfactor voor het ongunstigste cirkelvormige glijvlak zich verhoudt tot de werkelijke veiligheid van het talud. Maar ook als men voorbijgaat aan dit fundamentele bezwaar zijn er



nog wel een paar andere bezwaren. Zo worden de krachten tussen de lamellen verwaarloosd, en wordt er alleen rekening gehouden met het momentenevenwicht, niet met het volledige krachtenevenwicht. Verder is de benadering intern inconsistent. Enerzijds wordt gesteld dat de cirkel een glijvlak is, anderzijds wordt gesteld dat de verticale normaalspanning een hoofdspansing is (er werken immers geen schuifspanningen op de lamellen). Die inconsistentie komt het best tot uitdrukking in de lamel waarvoor  $\alpha = 0$ . Daar is  $\sigma_n = \gamma h$ , en er wordt daar geacht een schuifspanning te werken groot  $(\sigma_n - p)/F$ , en dat klopt niet met de aanname dat de verticale richting een hoofdrichting is. Ook het evenwicht in horizontale richting van die lamel klopt duidelijk niet.

De methode Fellenius heeft wel de prettige eigenschap dat hij in een aantal bijzondere gevallen reduceert tot bekende limiet-waarden. Sommige andere methoden hebben zelfs die eigenschap niet. Voor een oneindig talud bijvoorbeeld in droog niet-cohesief materiaal ( $c = 0$ ) vindt men, voor een recht glijvlak op een diepte  $d$  onder het talud uit formule (46.6) met  $p = c = 0$ ,

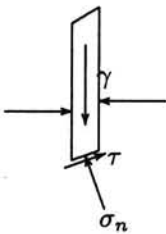
$$F = \frac{\sum \gamma d \cos \alpha \tan \phi}{\sum \gamma d \sin \alpha} = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}.$$

Dit is precies in overeenstemming met formule (45.7) uit het vorige hoofdstuk.

In het geval van een talud onder water, zonder grondwaterstroming, zie figuur 45.2, vindt men niet zonder meer het limiet-geval (45.14) terug. Voor dergelijke gevallen kan men in de formule van Fellenius werken met  $(\gamma - \gamma_w)h$  in plaats van  $\gamma h$  (het gewicht "onder water"), en voor de waterdruk  $p$  alleen nog de overdruk ten opzichte van de hydrostatische druk in rekening brengen. Dan klopt het limietgeval wel, maar dit vereist blijkbaar wel een kunstgreep. Om deze reden wordt de methode van Fellenius in computerprogramma's voor algemene toepassingen niet meer gebruikt, en geeft men meestal de voorkeur aan de methode Bishop.

### 46.3 Methode Bishop

Een van de meest gebruikte methoden voor de analyse van de stabiliteit van taluds is de methode van Bishop. Bij deze methode worden de krachten tussen de lamellen niet verwaarloosd, wat een duidelijke verbetering is ten opzichte van de methode van Fellenius, maar er wordt wel aangenomen dat de resultante van elke lamelkracht horizontaal is, zie figuur 46.3. Door nu alleen het evenwicht in verticale richting van de lamellen te beschouwen spelen de horizontale interactiekrachten tussen de lamellen geen rol in de beschouwingen. Overigens is het verzekeren van het verticale evenwicht ook een punt in het voordeel van de methode van Bishop.



Figuur 46.3. Bishop.

Het uitgangspunt is ook nu de vergelijking voor het momentenevenwicht, zie (46.3). Uit het evenwicht in verticale richting van een lamel volgt nu

$$\gamma h = \sigma_n + \tau \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sigma'_n + p + \tau \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Stelt men hierin weer, overeenkomstig (46.1),  $\tau = (c + \sigma'_n \tan \phi)/F$ , dan vindt men

$$\sigma'_n \left(1 + \frac{\tan \alpha \tan \phi}{F}\right) = \gamma h - p - \frac{c}{F} \tan \alpha. \quad (46.7)$$

Substitutie van  $\sigma'_n$  in (46.3) geeft nu

$$F = \frac{\sum \frac{c + (\gamma h - p) \tan \phi}{\cos \alpha (1 + \tan \alpha \tan \phi / F)}}{\sum \gamma h \sin \alpha} \quad (46.8)$$

Omdat de stabiliteitsfactor  $F$  ook in het rechterlid voorkomt moet men de waarde van  $F$  iteratief bepalen, door uit te gaan van een beginschatting (bijvoorbeeld  $F = 1$ ) en dan een paar keer een betere waarde te berekenen uit (46.8). In het algemeen convergeert het proces erg snel. Omdat men de berekeningen meestal toch met een computer uitvoert (er moeten immers vele cirkels worden onderzocht) is die iteratie geen bezwaar.

Als  $\phi = 0$  zijn de formules van Bishop en van Fellenius identiek. Als  $\phi \neq 0$  geeft de methode Bishop meestal iets lagere waarden. Omdat de methode Bishop wat consistentier is (het verticaal evenwicht van elke lamel is in orde, en het totale momentenevenwicht) geeft men in de praktijk aan deze methode vaak de voorkeur. Daarbij komt dat de methode Bishop voor allerlei limietgevallen de juiste waarde geeft.

Er zijn nog vele varianten ontwikkeld, waarbij bijvoorbeeld de krachten die de lamellen aan elkaar overdragen ook een rol spelen. De methode wordt dan nogal wat ingewikkelder, en vaak blijkt nog dat de resultaten nauwelijks afwijken van die verkregen met de methode Bishop. Vandaar dat de methode Bishop een grote populariteit geniet.

### Opgaven

- 46.1** Ga na of de methode Fellenius de juiste limietwaarde geeft voor een oneindig talud met daarin grondwaterstroming evenwijdig aan het talud.
- 46.2** Ga na of de methode Bishop de juiste limietwaarden geeft voor de gevallen behandeld in het vorige hoofdstuk.
- 46.3** Hoe zou men in de methode Bishop de invloed van een aardbeving in rekening kunnen brengen?

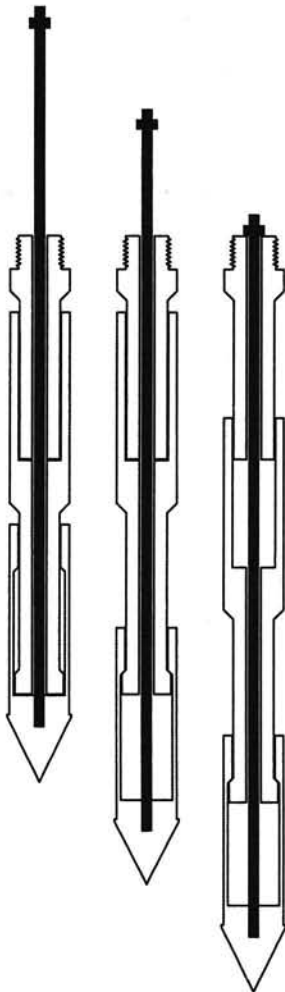
## Hoofdstuk 47

# TERREINONDERZOEK

Er zijn vele methoden om in het terrein (*in situ*) de mechanische eigenschappen van grond te bepalen. In dit hoofdstuk worden er enkele kort beschreven.

### 47.1 Sondering

Een eenvoudige, maar zeer nuttige, methode van terreinonderzoek bestaat er uit een staaf de



Figuur 47.1. Mechanische sondering.

grond in te drukken en dan de kracht te meten die daarvoor nodig is, als functie van de diepte. Die kracht bestaat uit de weerstand van de grond aan de punt en langs het oppervlak van de staaf. De methode is oorspronkelijk in Nederland ontwikkeld, in de dertiger jaren. Ze wordt vooral gebruikt voor een indicatie van de grondopbouw en voor de bepaling van het draagvermogen van palen. De *sondering*, of CPT (Cone Penetration Test), heeft zich ontwikkeld uit een eenvoudig apparaat waarmee met handkracht een conus de grond in wordt gedrukt, eventueel nog gevolgd door een zogenaamde kleefmantel, met behulp van een stelsel van buizen en stangen, zie figuur 47.1, tot een geavanceerd meetinstrument. Om de benodigde reactiekracht te kunnen leveren moet het apparaat aan de grond worden verankerd, of op een zware vrachtauto worden gemonteerd. Dergelijke vrachtwagens ziet men in Nederland vaak langs de kant van de weg of in het terrein aan het werk.

Oorspronkelijk was de sondering een zuiver mechanische proef. Een veel gebruikte uitvoering is getekend in figuur 47.1. Het meetapparaat bestaat uit drie losse delen, die om een centrale stang kunnen bewegen. Het bovenste deel wordt door middel van een schroefdraad bevestigd aan een buitenbuis, die reikt tot boven de grond, uit stukken van 1 meter lengte. De procedure is dat afwisselend op de binnenstang en op de buitenste buis gedrukt wordt. Bij het drukken op de binnenstang wordt eerst alleen de conus weggedrukt, over een afstand van 35 mm. De twee andere delen bewegen niet ten opzichte van de grond, en de gemeten kracht is dan dus alleen de weerstand van de conus. Bij verder drukken op de binnenstang wordt

ook de kleefmantel meegetrokken. De twee onderste delen van de conus bewegen dan samen naar beneden. Het bovenste deel van de conus, dat door een schroefverbinding vast zit aan het stelsel van buitenstangen, beweegt daarbij niet. De kracht die men nu aan de bovenzijde meet is de som van conusweerstand en mantelwrijving. Neemt men aan dat de conusweerstand nog dezelfde is als in de eerste fase, dan is de mantelwrijving (de kleef) nu ook apart bekend. Door vervolgens te drukken op de buitenbuis worden de drie delen van de conus weer in elkaar gedrukt, en het geheel wordt naar de volgende diepte gedrukt. Dan is de uitgangstoestand weer bereikt maar op een iets grotere diepte (10 cm). De conusmantel wordt aan de onderzijde soms ingesnoerd om in de eerste fase zo goed mogelijk alleen de puntweerstand te meten. Zo is dat in figuur 47.1 ook getekend.

Tegenwoordig wordt meestal gebruik gemaakt van een elektrische conus, zie figuur 47.2. Zowel de conusweerstand als de kleef worden daarbij continu gemeten, met behulp van een stelsel van rekstrookjes in het inwendige van de conus. Het instrument bestaat uit drie delen die ten opzichte van elkaar een heel klein beetje kunnen bewegen (met rubber ertussen), waarbij de gevoelige rekstrookjes in het inwendige de krachten op de onderste twee delen kunnen registreren.

Uit de resultaten van een sondering krijgt men om te beginnen een goede indruk van de opbouw van de grond. Kleilagen hebben een veel lagere conusweerstand dan zandlagen. Een typische weerstand voor zand is 10 MPa. Voor klei is de conusweerstand veel kleiner, van de orde van 1 MPa of nog lager, voor erg slappe klei. Als ook de plaatselijke kleef wordt gemeten is de onderscheiding nog gemakkelijker. De verhouding tussen kleef en conusweerstand is voor klei groter dan voor zand, omdat de conusweerstand meestal klein is, en de kleef relatief groot is. Om dit tot uitdrukking te brengen rekent men de metingen vaak om tot het zogenaamde *kleefgetal*, dat is de kleef gedeeld door de conusweerstand, maal 100 %. Een relatief lage waarde (1 à 2) duidt op zand, voor klei is het kleefgetal 3 à 5, nog hogere waarden (8 à 10) duiden op veen. Veen heeft namelijk meestal nog wel een redelijke kleef, maar een heel kleine conusweerstand.

Een tamelijk recente ontwikkeling is dat men de conus voorziet van een waterspanningsmeter. Men noemt dat de *piëzoconus*. In de conus worden kleine gaatjes aangebracht, in verbinding met een drukkamertje in de conus. Op die manier kan men dan de plaatselijke waterspanning meten. Die waterspanning wordt beïnvloed door het inbrengen van de conus, en wel in verschillende mate voor verschillende grondsoorten. De precieze waarde van de meting op zich zelf geeft niet zo veel informatie, omdat niet bekend is in hoeverre de gemeten waterdruk beïnvloed is door de initiële waterdruk, het inbrengen van de conus, en drainage. Maar wel kan men er een verschil in reactie op zeer kleine schaal mee constateren. Zo kan men dan heel dunne kleilensjes in een dik zandpakket vinden. In de meting van de conusweerstand en de plaatstelijke kleef ziet men die niet.

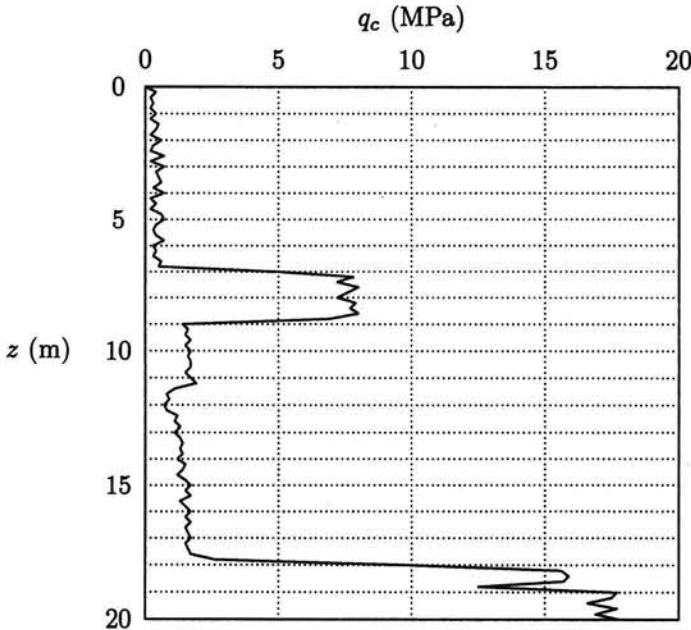
Een voorbeeld van een sondering is getekend in figuur 47.3. Op ongeveer 7 m bevindt zich een zandlaag van ongeveer 2 m dikte. Op ongeveer 18 m diepte begint een dikke zandlaag. De lage waarden aan de bovenkant en tussen de twee zandlagen duiden op slappe grond, waarschijnlijk klei. Een niet te zwaar gebouw (bijvoorbeeld een huis) kan men wellicht op de bovenste zandlaag funderen. Dan moet die tussenzandlaag wel overal aanwezig zijn (1 sondering is niet genoeg om dat te constateren, er zijn toch wel minstens 3 sonderingen



Figuur 47.2. Elektrische conus.

nodig), en een behoorlijke dikte hebben. Ook moet bij het heien van de palen natuurlijk worden opgepast dat er niet door de zandlaag heen geheid wordt. Een zware constructie zal een fundering op de onderste zandlaag vereisen.

In Nederland wordt de sondering vooral gebruikt als modelproef voor paalfunderingen. In West-Nederland vindt men in het algemeen een grondopbouw bestaande uit eerst ongeveer 10 à 20 meter slappe grond, en dan een behoorlijk stijve zandlaag. Bij zo'n grondopbouw kan men heel goed een paalfundering toepassen, waarbij de paal zijn draagkracht voornamelijk ontleent aan de draagkracht van de zandlaag. De slappe lagen werken daarbij gunstig, omdat ze een bovenbelasting vormen voor het zand. De toelaatbare plaatselijke druk op het zand hangt af van de cohesie, de hoek van inwendige wrijving, en van de bovenbelasting, zoals in hoofdstuk 43 uiteengezet. Van de afmetingen van de fundering hangt deze toelaatbare druk praktisch niet af, omdat de term voor het eigen gewicht in de formule van Brinch Hansen bij



Figuur 47.3. Sondering.

kleine waarden van de breedte  $B$  onbelangrijk is. Dat betekent dat de maximaal mogelijke druk voor een grote paal en een kleine paal vrijwel gelijk zal zijn. Een extreem kleine paal is de sondeerstang, en dit betekent dat men de toelaatbare spanning onder een paal kan meten door de conusweerstand te registreren. In hoofdstuk 49 zal dit nog iets worden gepreciseerd.

De laatste jaren wordt de sondering ook nogal eens gebruikt om de schuifsterkteparameters van de grond te bepalen. Zo kan men bijvoorbeeld stellen dat voor kleigronden de conusweerstand vooral bepaald wordt door de ongedraineerde schuifsterkte, en wel zal het verband, analoog aan de formule van Brinch Hansen, van de volgende vorm zijn,

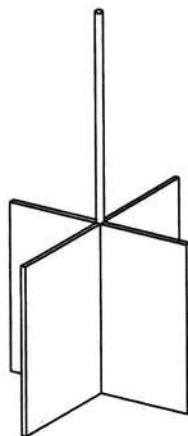
$$q_c - \sigma_v = N_c s_u. \quad (47.1)$$

Hierin is  $\sigma_v$  de plaatselijke verticale spanning ten gevolge van de bovenbelasting, en is  $N_c$  een dimensieloze factor. Voor het inbrengen van een ronde conus in een oneindig massief zal de coëfficiënt  $N_c$  waarschijnlijk behoorlijk wat groter zijn dan voor het geval van een strokenfundering op een half-oneindig massief. Voor dat laatste geval is die factor 5.14. Voor

de conus-factor  $N_c$  worden meestal waarden groot ongeveer 15 à 20 gebruikt. Door meting van de conusweerstand  $q_c$  kan men dus de ongedraineerde schuifsterkte  $s_u$  bepalen. Door de zwakheden in de theoretische basis is die bepaling niet zo nauwkeurig, maar aan de andere kant kan men stellen dat het feit dat men de sterkte in situ bepaalt, op ongeroerde grond, een groot voordeel is. Het alternatief is een monster te steken, dat naar het laboratorium te brengen, het daar weer uit te pakken, en dan een laboratoriumproef te doen. Daarbij kunnen allerhande verstoringen optreden die men met een proef in situ vermijdt.

## 47.2 Vinproef

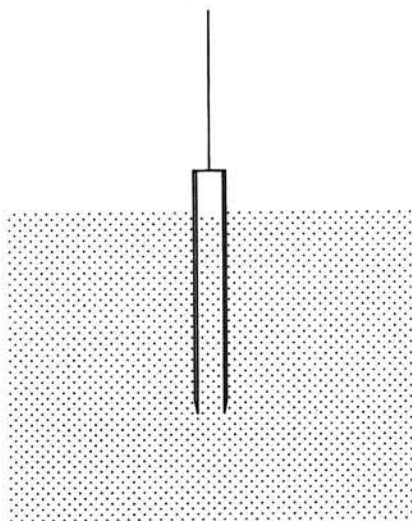
Voor de bepaling van de schuifsterkte van de grond in situ kan men ook goed gebruik maken van de vinproef (in het Engels: *vane test*), zie figuur 47.4. Bij deze proef wordt een klein vinvormig instrument in de grond gebracht, door wegdrücken aan het onderuiteinde van een systeem van stangen, net als bij de sondering. De vin is door een binnenstang verbonden met een schroef aan de bovenzijde. Door die te draaien kan men de vin laten roteren, waarbij de grond langs de buitenwand van een cilindervormig grondelementje tot bezwijken wordt gebracht. Uit het benodigde moment kan de schuifsterkte worden berekend, als men de afmetingen van de vin kent. De proef wordt vooral in de Scandinavische landen, waar veel dikke kleilagen voorkomen, veel gebruikt.



Figuur 47.4. Vinproef.

## 47.3 Standard Penetration Test

In het buitenland, vooral in Angelsaksische landen, wordt vaak gebruik gemaakt van de Standard Penetration Test (SPT). Bij die proef wordt een monsterbus in een boorgat in de grond geslagen met behulp van een gestandaardiseerd valgewicht. Gemeten wordt het aantal slagen dat nodig is om de steekbus 300 mm (1 voet) de grond in te drijven. Men noemt dat de *blow count*, aangegeven met  $N$ , en uitgedrukt in slagen per voet (*blows per foot*). Een voordeel ten opzichte van de CPT is dat men geen zware apparatuur nodig heeft, zoals bij de statisch ingebrachte CPT, die immers een grote statische tegendruk vereist, meestal geleverd door het gewicht van de vrachtwagen. Een ander voordeel van de SPT is dat men direct ook een monster van de grond heeft. De methode is echter nogal grof, en de resultaten reproduceren niet zo goed. Ook is het onderscheid tussen zand en klei minder sterk als bij de CPT.



Figuur 47.5. Pulsboring, SPT.

Voor werk in het buitenland moet men vaak wel genoegen nemen met summere gegevens als een blow count voor de SPT. Een redelijke blow count voor zand is  $N = 20$ . In slappe klei vindt men waarden als  $N = 5$ , of nog lager. Een veel gebruikte interpretatie (ontleend aan Terzaghi & Peck) is weergegeven in table 47.1. Verschillende onderzoekers hebben getracht

Zand		Klei	
N	Dichtheid	N	Consistentie
< 4	Zeer los	< 2	Zeer zacht
4-10	Los	2-4	Zacht
10-30	Normaal	4-8	Normaal
30-50	Dicht	8-15	Stijf
> 50	Zeer dicht	15-30	Zeer stijf
		> 30	Hard

Tabel 47.1. Interpretatie SPT volgens Terzaghi & Peck.

een correlatie met de CPT te vinden, maar dat blijkt niet zo gemakkelijk te zijn.

#### 47.4 Steken van monsters

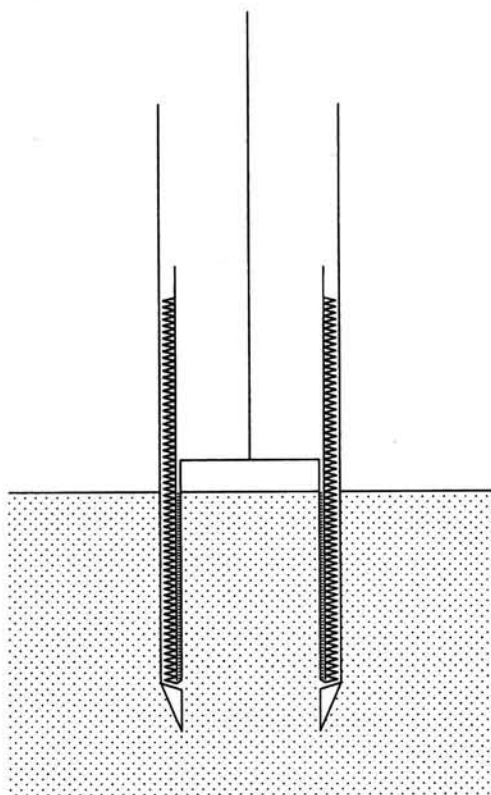
In veel gevallen is het gewenst om een monster van de grond te steken, en dat dan in het laboratorium te onderzoeken. Dat onderzoek kan bestaan uit een visuele inspectie (men ziet dan of er zand of klei of veen zit), uit een chemische analyse, of uit een mechanische proef, bijvoorbeeld een samendrukkingsproef of een triaxiaal-proef.

Eenvoudige methoden om een grondmonster te nemen bestaan er uit om een buis de grond in te drukken of te slaan, en dan weer omhoog te trekken. Een veel gebruikt systeem is dat van de al eerder genoemde *puls boring*, zie figuur 47.5. Daarbij wordt de grond verwijderd met een zogenaamde puls, dat is een buis van ongeveer 1 meter lengte, soms met een klep aan de onderzijde. De puls wordt in de grond gebracht door hem op te tillen en dan te laten vallen, of door er op te slaan. Groot voordeel van dit systeem is dat er geen zware apparatuur voor nodig is. Men kan bij wijze van spreken midden in de rimboe te voet een monster gaan steken. Het spreekt vanzelf dat men op deze wijze echter geen mooi monster krijgt, en vaak ook weinig gedetailleerde informatie. De grond is sterk vermengd en verstoord (*geroerd*), maar bij redelijk dikke lagen kan wel een goede indruk van de opbouw van de grond worden verkregen. In cohesieve grond kan het boorgat vaak uit zichzelf blijven staan, maar in veel grondsoorten is het nodig om een systeem met een aparte boorbuis gebruiken. Het monster wordt dan gestoken binnen de boorbuis.

Een beter systeem is om de steekbuis langzaam de grond in te drukken, zoals bijvoorbeeld gebeurt met de zogenaamde spitsmuis. Het indrukken geschiedt met een hydraulisch systeem, vanaf een zware vrachtwagen die de tegendruk moet leveren. De monsters zijn hierbij van wat betere kwaliteit. Door de wrijving met de grond treedt langs de wand nog wel een behoorlijke verstoring op.

Er zijn door diverse laboratoria op de wereld nog betere systemen bedacht om monsters te steken, waarbij dan getracht wordt het te steken monster zo min mogelijk te verstoren.

Het streven is om een *ongeroid monster* te nemen. Helemaal perfect kan dat natuurlijk nooit, maar men kan er wel dicht bij in de buurt komen. Een mooi systeem is dat van het continu-steekapparaat van Grondmechanica Delft, ontwikkeld door Begemann, zie figuur 47.6. Bij dit systeem worden twee buizen tezamen omlaag gedrukt. Het monster wordt geleidelijk omgeven door een nylonkous die aanvankelijk om de binnenste buis is opgerold, en langzamerhand wordt afgestroopt doordat de plunjier waaraan het uiteinde van de kous is bevestigd aan de bovenzijde wordt vastgehouden. Er ontstaat tenslotte een continu monster van grote lengte (tot ongeveer 20 meter), omringd door een nylonkous. Rondom de kous bevindt zich een dunne laag van een zware steunvloeistof ( $\gamma \approx 15 \text{ kN/m}^3$ ). Die vloeistof heeft tot doel om horizontale steun aan het monster te geven, en om wrijving langs het monster te voorkomen. Op deze wijze kunnen monsters van zeer goede kwaliteit worden gestoken. Ook zeer dunne laagjes kunnen worden geïdentificeerd, los zand kan net zo goed worden gestoken als klei, en de monsters zijn goed genoeg voor laboratoriumproeven, althans bij de zwaarste uitvoering (met 66 mm diameter). De boring wordt vaak gepresenteerd met een kleurenfoto van over de lengte doorsgesneden delen van het monster. Aan het feit dat zeer dunne laagjes in de doorsnede ook bij de rand niet verstoord zijn kan men zien dat bij de boring slechts zeer geringe schuifspanningen op het monster worden uitgeoefend.

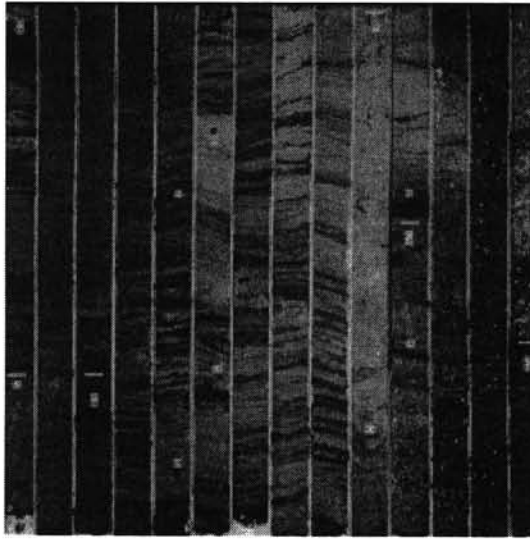


Figuur 47.6. Begemann-boring.

Interessant is nog dat men tegenwoordig ook monsters kan steken vanaf de zeebodem. Een fraaie methode is die met een duikerklok, die tot op de zeebodem wordt neergelaten. Vanuit de duikerklok, waarin de luchtdruk gelijk gehouden wordt aan die in het water, kan men dan een monster steken of een sondering maken. Ook bestaan er methoden waarbij een zwaar stalen frame op de zeebodem wordt neergelaten, vanaf een schip. Met behulp van op afstand bestuurd apparaat kan dan een monster worden gestoken, of een sondering worden gemaakt. Deze methode kan ook worden toegepast bij grote waterdiepten. Een voorbeeld van een continuboring gemaakt vanaf de bodem van de Oosterschelde is weergegeven in figuur 47.7. De figuur is ontleend aan Begemann *et al.*, *Terreinonderzoekingen, LGM-mededelingen*, vol. 18, sept.1977.

Onderzoek van de zeebodem is vooral van belang voor toepassingen in de offshore-technologie. Platforms voor de winning van olie en gas worden vaak op grote palen gefundeerd. Meestal zijn dat holle buispalen, met een diameter van vaak meer dan een meter, en een lengte van vele tientallen meters. Die palen ontleen hun draagkracht vooral aan de wrijving langs de schacht, en niet zozeer aan het puntdraagvermogen, zoals bij de normale heipalen toegepast in West-Nederland. Het is dan natuurlijk van groot belang de wrij-





Figuur 47.7. Continu-boring.

vingsweerstand (of *kleef*) tevoren goed te kunnen voorspellen. Dat kan goed geschieden met behulp van een sondering vanaf de zeebodem. Die geeft uiteraard ook goede informatie over de samenstelling van de zeebodem, naast de numerieke waarden voor de plaatselijke kleef en de conusweerstand.

#### Opgaven

47.1 Zou in formule (47.1) de spanning  $\sigma_v$  niet eigenlijk de effectieve spanning  $\sigma'_v$  moeten zijn? De schuifweerstand van de grond hangt toch alleen af van de effectieve spanningen, en niet van de waterdruk?

47.2 Voorspel de te verwachten conusweerstand in een zandlaag op 20 m diepte, onder een laag klei met een volumegewicht van  $18 \text{ kN/m}^3$ , met behulp van de formule van Brinch Hansen, zie hoofdstuk 43. Neem daarbij aan dat voor het zand geldt dat  $\phi = 35^\circ$ , en dat het grondwater ongeveer tot maaiveldniveau reikt.

## Hoofdstuk 48

# MODELONDERZOEK

In de techniek wordt vaak gebruik gemaakt van schaalproeven om het gedrag van een constructie te onderzoeken. Soms is het doel alleen maar om een verschijnsel kwalitatief te onderzoeken, meestal wil men er ook kwantitatieve informatie uit verkrijgen. Dan moeten de schaalregels wel bekend zijn. Voor grond is daarbij een moeilijkheid dat de mechanische eigenschappen van grond in het algemeen sterk afhankelijk zijn van de spanningstoestand, en dat die spanningstoestand voor een groot deel bepaald wordt door het eigen gewicht van de grond. Dat betekent dat in een schaalmodel de grondeigenschappen niet goed worden weergegeven, omdat in het schaalmodel de spanningen veel kleiner zijn dan in de werkelijkheid (het *prototype*).

Een manier om de spanningen goed te simuleren is het vergroten van de zwaartekracht, door het model in een snel ronddraaiende bak te plaatsen : men noemt dat een geotechnische centrifuge. Deze techniek heeft zich vooral de laatste jaren sterk ontwikkeld. De principes van dergelijk onderzoek worden in dit hoofdstuk kort gepresenteerd. Ook wordt nog aangegeven hoe men in sommige eenvoudige gevallen ook verantwoord modelonderzoek kan doen zonder verscaling van de zwaartekracht. Men noemt dat wel *1g*-onderzoek.

Een geschikte procedure om schaalregels af te leiden is in het algemeen om de vergelijkingen die het proces beschrijven te beschouwen, en er dan voor te zorgen dat alle relevante termen in elk van de vergelijkingen op dezelfde wijze worden verschaald (d.w.z. vergroot of verkleind). Die vergelijkingen kunnen eventueel geheel of gedeeltelijk symbolisch zijn, omdat men de exacte vorm van de vergelijking niet kent, maar er moet vooral op gelet worden dat alle factoren die voor het proces van belang zijn in rekening worden gebracht. Anderzijds kunnen minder belangrijke termen worden verwaarloosd.

### 48.1 Eenvoudige schaalmodellen

Een van de belangrijkste eigenschappen van grond is dat er afschuiven in kan optreden, en dat dit afschuiven voor een groot deel bepaald wordt door de verhouding van de schuifspanningen tot de normaalspanningen. In het bezwijkcriterium van Coulomb,

$$\tau_{max} = c + \sigma' \tan \phi, \quad (48.1)$$

komt dit tot uiting als de eerste term in het rechterlid verwaarloosd kan worden. Dat is vaak het geval bij zand. Men kan dan schrijven

$$c = 0 : \frac{\tau_{max}}{\sigma'} = \tan \phi. \quad (48.2)$$

Blijkbaar is voor bezwijken alleen de verhouding van de spanningen van belang. Dat betekent nog niet direct dat die verhouding het gedrag van de grond volledig bepaalt. Bij kleine vervormingen gedraagt de grond zich min of meer elastisch, en het is niet zeker dat men dat gedrag ook volledig kan beschrijven met de verhouding van de schuifspanning tot de normaalspanning. Verder is ook altijd nog het gedrag bij compressie van belang, en bekend is dat daarbij vooral ook het niveau van de spanningen de stijfheid bepaalt, zoals dat

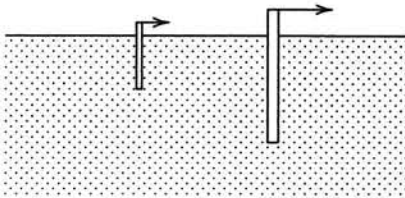
bijvoorbeeld wordt beschreven in de logaritmische samendrukkingswet van Terzaghi. Dat gedrag bij compressie is uiteraard vooral belangrijk bij met water verzadigde grond, waarbij volumeveranderingen kunnen leiden tot waterspanningen, en dus tot veranderingen in de korrelspanningen. Tenslotte moet bedacht worden dat soms het optreden van dilatantie of contractantie van grote invloed is op het totale gedrag van de grond, en die verschijnselen zijn weer sterk afhankelijk van het niveau van de spanningen.

Dit alles neemt niet weg dat voor sommige problemen vooral het gedrag bij afschuiven bepalend is, en niet compressie, en ook niet dilatantie of contractantie. In dergelijke gevallen zou men kunnen stellen dat het verband tussen spanningen en vervormingen van de volgende vorm is

$$\varepsilon_{ij} = f\left(\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma'_o}\right), \quad (48.3)$$

waarin  $\sigma'_o$  een invariant van de spanningstensor is, met name de isotrope spanning.

Dit betekent dat gesteld is dat de vervormingen in alle omstandigheden bepaald worden door de verhouding van de schuifspanningen tot de normaalspanningen. Voor zand is dat soms een bruikbare benadering. Aardig is dat ook bij compressie het vaak de verhouding van de spanningen is die de vervorming bepaalt. In de samendrukkingsformule van Terzaghi komen de spanningen immers in de verhouding  $\sigma/\sigma_1$  voor, waarbij  $\sigma_1$  de beginspanning is, en  $\sigma$  de uiteindelijke spanning. Wel moeten effecten als consolidatie, kruip, en dilatantie onbelangrijk zijn ten opzichte van afschuiving en primaire compressie, anders is de aanname (48.3) niet verantwoord. De benadering kan goed bruikbaar zijn voor gevallen waarbij afschuiving sterk overheerst, zoals een lateraal belaste paal, of een over de grond schuivend caisson.



Figuur 48.1. Schaalproef.

Stelt men dat in het model alle lengte-afmetingen op schaal  $n_L$  worden weergegeven, dat wil zeggen dat

$$x_{i-m} = x_{i-p}/n_L, \quad (48.4)$$

dan wordt aan de evenwichtsvergelijkingen, inclusief de term voor het eigen gewicht, voldaan als de spanningen op diezelfde schaal worden weergegeven,

$$\sigma_{ij-m} = \sigma_{ij-p}/n_L. \quad (48.5)$$

Dat kan men inzien door te bedenken dat de evenwichtsvergelijkingen bestaan uit termen van het type  $\partial\sigma_{xx}/\partial x$ , en de zwaartekrachtterm  $\gamma$ . Al deze termen zijn nu identiek in het model en in het prototype.

Als het verband tussen spanningen en vervormingen van de vorm (48.3) is, worden nu de vervormingen op schaal 1 weergegeven,

$$\varepsilon_{ij-m} = \varepsilon_{ij-p}. \quad (48.6)$$

Omdat de vervormingen worden bepaald door afgeleiden van de verplaatsingen naar de coördinaten (bijvoorbeeld  $\varepsilon_{xx} = \partial u_x/\partial x$ ), zijn de verplaatsingen dus op lengteschaal,

$$u_{i-m} = u_{i-p}/n_L, \quad (48.7)$$

In elk van de van belang zijnde vergelijkingen (evenwicht, compatibiliteit, en constitutieve vergelijkingen) is nu de verhouding van alle relevante termen in het model tot de overeenkomstige termen in het prototype gelijk, en dat betekent dat men inderdaad verantwoord

modelonderzoek kan doen, als men de randvoorwaarden ook op de juiste schaal weergeeft : spanningen en verplaatsingen op lengteschaal.

Problemen die men op deze wijze kan bestuderen zijn bijvoorbeeld het gedrag van een paal in zand, onder invloed van een laterale belasting, zie figuur 48.1. Compressie is dan niet of nauwelijks van belang, en er zullen dus nauwelijks waterspanningen worden opgewekt. Van bepalende invloed is dan inderdaad de verhouding van de spanningen. In het model en in het prototype kan men die verhoudingen gemakkelijk gelijk houden. De vervormingen zijn dan op schaal 1 : 1.

Een ander geval uit de praktijk dat men op deze wijze, met 1*g*-onderzoek, kan bestuderen is dat van een lange keermuur of een damwand, in een niet-cohesief materiaal, dat wil zeggen in zuiver zand.

Men kan zelfs dynamische problemen op deze wijze bestuderen, door te bedenken dat dan in de bewegingsvergelijkingen termen voorkomen van de vorm  $\rho \partial^2 u_i / \partial t^2$ . Die termen veranderen niet als de tijd verschaald wordt volgens de wortel van de lengteschaal,

$$t_m = t_p / \sqrt{n_L}. \quad (48.8)$$

Hierbij is aangenomen dat de dichtheid  $\rho$  in het model niet verschaald wordt, hetgeen vanzelf goed komt als men het zelfde materiaal gebruikt. Overigens moge worden opgemerkt dat echte dynamische problemen in de grondmechanica vrij zeldzaam zijn. Aardbevingen en heien zijn voorbeelden van echte dynamische problemen waarbij de traagheid een rol speelt. In veel gevallen van wat men in de praktijk ook dynamische problemen noemt, gaat het er alleen om dat de belasting van een grondmassief in de tijd wisselt, zonder dat traagheidseffecten van belang zijn. Een voorbeeld hiervan is de cyclische belasting van een offshore-constructie. De tijdschaal zelf is dan niet zo belangrijk, wel dat de grond in elke belastingcyclus verder deformeert. Vaak is dan echter ook de cyclische volumeverandering van belang, en die wordt bij de hier besproken modelproeven niet goed gemodelleerd.

Het lijkt in principe zelfs mogelijk problemen waarbij consolidatie een rol speelt te bestuderen in een schaalmodel bij gelijkblijvende zwaartekracht, althans in eerste benadering. Dan moet er voor gezorgd worden dat in de consolidatievergelijking,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -n\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad (48.9)$$

alle termen op dezelfde wijze verschaald worden. Bekend is al dat de spanningen, en dus ook de waterspanning  $p$ , op lengteschaal worden gerepresenteerd, en de vervormingen op schaal 1. Dat betekent dat de term in het linkerlid alleen in overeenstemming met de laatste drie kan worden gebracht als de tijd op lengteschaal wordt verschaald,

$$t_m = t_p / n_L. \quad (48.10)$$

De eerste term in het rechterlid is dan niet goed verschaald, omdat die term bestaat uit het quotiënt van twee factoren op lengteschaal. Gelukkig is deze term meestal zeer klein, en de invloed van de fout zal dus ook klein zijn.

Het zal duidelijk zijn dat het niet lukt om rekening te houden met zowel consolidatie als traagheid, omdat die beide effecten tot een verschillende eis ten aanzien van de lengteschaal leiden. Een ingenieuze manier om dat toch weer enigszins goed te krijgen is om de doorlatendheid op geschikte wijze te verscalen, door toepassing van een vloeistof met een andere viscositeit.

Zoals gesteld gaat dit alles niet op als het gedrag van de grond wat ingewikkelder is als beschreven door de formule (48.3), wat vaak het geval is, zoals bij gelijktijdige invloed van elastische en plastische vervormingen. Dat betekent dat men grote reserve moet hebben bij

dit soort modelonderzoek voor de analyse van zettingen en draagkracht, of bij proeven op klei (dan speelt cohesie een belangrijke rol, en die kan al helemaal niet verschaald worden). In principe is  $1g$ -modelonderzoek alleen verantwoord als wrijving het dominerende effect is voor de vervormingen, en als de plastische vervormingen groot zijn.

## 48.2 Centrifuge-onderzoek

Een tamelijk algemene manier van beschrijving van het verband tussen spanningen en vervormingen is

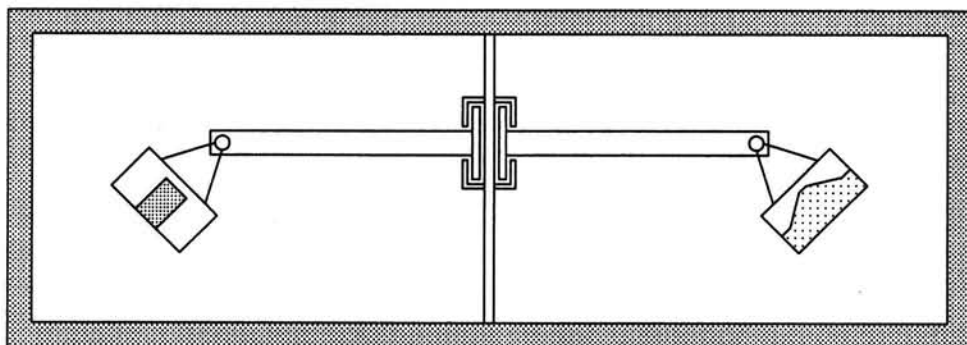
$$\Delta\varepsilon_{ij} = f(\sigma'_{ij}, \Delta\sigma'_{ij}, h_k), \quad (48.11)$$

waarin  $f$  een nog willekeurige functie is, en  $h_k$  symbolisch aangeeft dat er nog een aantal fysische parameters in het spel is (bijvoorbeeld de cohesie  $c$ , de wrijvingshoek  $\phi$ , of een aantal stijfheidsparameters, zoals  $K$  en  $G$ , of  $E$  en  $\nu$ ). Formule (48.11) stelt dat de toename van de rekken bepaald wordt door de spanningen, en door de toename van de spanningen, op een nog niet gespecificeerde wijze. Allerlei mogelijke verbanden vallen onder de relatie (48.11), zoals elastische en plastische vervormingen. Met name is van belang dat de toename van de rekken afhankelijk kan zijn van de spanningen zelf. De stijfheid kan dus bijvoorbeeld met de spanning toenemen. Ook dilatantie of contractantie kan met het algemene verband (48.11) beschreven worden. En ook elastische vervormingen, waarbij de vervormingen alleen bepaald worden door de toename van de spanningen, kunnen met het verband (48.11) worden beschreven.

Om in het geval van een algemene relatie van de vorm (48.11) modelproeven te kunnen doen, is de enige mogelijkheid dat zowel de spanningen als de rekken op schaal 1 worden gemodelleerd, en dat dezelfde grond, met dezelfde eigenschappen, wordt gebruikt. Dit betekent dat ook de spanningen door het eigen gewicht van de grond op schaal 1 moeten worden weergegeven. In de evenwichtsvergelijkingen komen termen voor zoals  $\partial\sigma_{xx}/\partial x$  en een term  $\gamma$  (de volumekracht). Om die beide op dezelfde schaal weer te geven moet het volumegewicht  $\gamma$  omgekeerd evenredig zijn met de lengteschaal,

$$\gamma_m = \gamma_p \times n_L. \quad (48.12)$$

Dat kan gerealiseerd worden door het model snel te laten ronddraaien, in een *centrifuge*. De zwaartekracht wordt dan als het ware vergroot. Een voorbeeld is weergegeven in figuur 48.2. Het apparaat bestaat uit een arm, die kan draaien om een centrale as. Aan beide uiteinden



Figuur 48.2. Geotechnische centrifuge.

van de arm bevindt zich een vat waarin een grondmonster of een contragewicht kan worden

geplaatst. Als de arm snel gaat draaien werkt er een middelpuntvliedende kracht op de vaten, die dan om het scharnier waaraan ze zijn opgehangen draaien. Bij grote draaisnelheden is de positie van de vaten vrijwel horizontaal. De centrifuge moet voor de veiligheid worden beschermd door zware muren en platen. Veelal vindt men een centrifuge dan ook in de kelder van een laboratorium.

Uit een elementaire beschouwing van de beweging van een lichaam dat een cirkelvormige baan volgt, met straal  $R$ , blijkt dat er daarbij een versnelling loodrecht op de baan optreedt groot

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (48.13)$$

Men noemt dit de *centripetale versnelling*. In het geval van een hoeveelheid grond in een ronddraaiende bak wordt die versnelling van de grond veroorzaakt door een kracht door de bak uitgeoefend op de grond, en door de grond ook overgebracht, van onderen naar boven. Men kan het zo zien dat de grond eigenlijk recht door zou willen vliegen, maar door de bak in een cirkelvormige baan wordt gedwongen. Daartoe is dan een grote kracht nodig, en die kracht is des te groter naarmate de snelheid groter is, en de straal kleiner. De krachtsoverdracht zou hetzelfde zijn als de bak stil zou staan en er een massakracht op de grond zou werken. Noemt men die massakracht  $g_m$  dan geldt dus

$$g_m = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad (48.14)$$

waarin  $\omega$  de hoeksnelheid is van de centrifuge. Veel van de bestaande centrifuges hebben een arm met een straal van ongeveer 5 m lengte. Dat betekent dat men een versnelling van  $100 g = 1000 \text{ m/s}^2$  kan bereiken als de snelheid van de bak 71 m/s is, of 254 km/h. De hoeksnelheid is dan 14.14 rad/s, en dat betekent dat de bak elke 0.444 s voorbijkomt. Het aantal toeren is dan 2.25 toeren per seconde, of 135 toeren per minuut.

Het grote voordeel van een centrifuge is dat alle spanningen in het model gelijk zijn aan die in het prototype, en men er dus zeker van kan zijn dat de grond zich in principe identiek gedraagt als in werkelijkheid. Een centrifuge is wel een tamelijk gecompliceerde machine, en er treden grote krachten in de constructie op. Bovendien is het nog niet zo eenvoudig om waarnemingen te verrichten. Men kan dat doen door elektrische meetinstrumenten in te bouwen. Die moeten dan wel redelijk klein zijn, en de signalen moeten worden doorgevoerd naar buiten, via de centrale as waarom de arm draait. Ook is de preparatie van de monsters niet zo eenvoudig. Men moet veel zorg besteden aan een zorgvuldige opbouw van het monster, waarbij de grond in dezelfde toestand moet zijn als in het prototype, qua opbouw, samenstelling en dichtheid. Een kleine verstoring in de preparatie van het model komt overeen met een grote verstoring in de werkelijkheid. Dit alles betekent dat centrifuge-onderzoek meestal nogal kostbaar is. Het wordt alleen toegepast voor belangrijke werken, en voor fundamenteel onderzoek.

Problemen waarbij de tijd een rol speelt kunnen ook in een centrifuge worden bestudeerd. Als consolidatie bepalend is betekent dit dat de termen  $\partial e / \partial t$  en  $\partial^2 p / \partial x^2$  gelijk verschaald moeten worden. Omdat zowel de rekken als de drukken niet worden verschaald vindt men dat de tijdschaal het kwadraat van de lengteschaal moet zijn,

$$t_m = t_p / n_L^2. \quad (48.15)$$

Als de tijdschaal bepaald wordt door dynamische verschijnselen (traagheid), dan moeten termen als  $\rho \partial^2 u / \partial t^2$  gelijk verschaald moeten worden als de afgeleiden van de spanningen,  $\partial \sigma_{xx} / \partial x$ . Dat komt goed als de tijdschaal gelijk is aan de lengteschaal,

$$t_m = t_p / n_L. \quad (48.16)$$

Ook nu is het weer niet zonder meer mogelijk zowel dynamische effecten als consolidatie in rekening te brengen, tenzij men zijn toevlucht neemt tot zulke kunstgrepen als verandering van de doorlatendheid door verandering van de viscositeit van de vloeistof.

### Opgaven

48.1 Kan men in een  $1g$ -modelproef het probleem van de afschuiving van een dijk bestaande uit zand bestuderen? En in een centrifuge?

48.2 Kan men in een  $1g$ -modelproef het probleem van de afschuiving van een dijk bestaande uit klei bestuderen? En in een centrifuge?

48.3 Grondmechanica Delft heeft de beschikking over een centrifuge met een arm van 6 m lengte, die kan werken met maximaal 300  $g$ . Wat is dan het toerental? En de snelheid van de bak?

48.4 Op de kermis zie je soms een grote ronddraaiende cylinder, waarin de mensen tegen de wand blijven hangen als de bodem naar beneden zakt. Als we stellen dat de wrijvingscoëfficiënt tussen mens en stalen wand ongeveer 0.2 is, dan moet de radiale versnelling ongeveer  $0.2g$  zijn. Als de straal van de cylinder 4.5 m is, met welke snelheid moeten de mensen dan worden rondgedraaid? Reken die snelheid ook om in km/h.

## Hoofdstuk 49

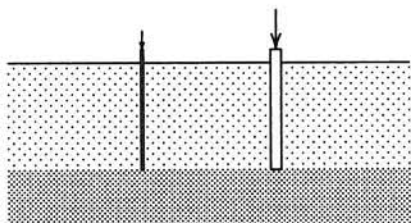
# PAALFUNDERINGEN

In veel gevallen, bijvoorbeeld op veel plaatsen in het Westen van Nederland, vindt men aan de oppervlakte slappe lagen (klei of veen), maar bevindt zich op zekere diepte een stevige zandlaag. Men noemt dat een draagkrachtige laag. Zijn draagkracht ontleent zo'n laag voor een groot deel aan de diepe ligging, en de daarmee samenhangende bovenbelasting, en uiteraard aan de eigenschappen van het zand. In dit hoofdstuk wordt in kort bestek een aantal grondmechanische aspecten van paalfunderingen belicht. Men zie verder de gespecialiseerde literatuur.

### 49.1 Draagvermogen van een paal

Voor de berekening van het draagvermogen van een paal zou men in principe kunnen uitgaan van theoretische beschouwingen, rekening houdend met de mechanische eigenschappen van de grond, zoals de cohesie  $c$  en de hoek van inwendige wrijving  $\phi$ . Zo zou men op basis van de formules van Brinch Hansen, rekening houdend met de bovenbelasting naast de paal door het gewicht van de slappe lagen, het puntdraagvermogen kunnen berekenen. In de praktijk blijkt het echter eenvoudiger, en meestal ook veel nauwkeuriger en betrouwbaarder, om uit te gaan van een sondering, en die op te vatten als een modelproef. Nog beter is het om een proefbelasting op een paal uit te voeren, maar dat is wel erg kostbaar, omdat men dan een grote belasting op de paal moet aanbrengen.

In een homogeen massief kan men stellen dat onder statische omstandigheden de bezwijkspanning onder een lange paal niet of nauwelijks afhankelijk is van de diameter van de paal. Dat betekent dat men de gevonden sondeerweerstand zonder meer kan overbrengen naar het geval van een paal. De gedachte hierachter is dat het bezwijken van de grond optreedt doordat in een zeker gebied rondom de paal de spanningstoestand kritiek wordt. Zie figuur 49.1. Als de paaldiameter 2 maal zo groot wordt, worden de afmetingen van dat gebied ook 2 maal zo groot. Dit betekent, als het hele verschijnsel zich afspeelt in een beperkte



Figuur 49.1. Sondering en paal.

zone rondom de paal, in homogene grond, dat de totale kracht (spanning maal oppervlak) 4 maal zo groot is. Dat is ook in overeenstemming met de theorie die ten grondslag ligt aan de draagkrachtformules van Brinch Hansen, mits de term voor het eigen gewicht daarin geen rol van betekenis speelt. Dat laatste is het geval als de diameter van de paal klein is ten opzichte van de lengte van de paal.

In werkelijkheid is de grond ter plaatse van de paalpunt nooit homogeen, maar opgebouwd uit diverse lagen. Daarom zijn er aangepaste rekenregels ontwikkeld die rekening houden met de verschillen in conusweerstand onder en boven de paalpunt. Bovendien wordt er in die rekenregels rekening mee gehouden dat in een grondlaag waarvan de sondeerweerstand sterk varieert het bezwijkmechanisme een voorkeur zal vertonen voor zwakke plekken.



De jarenlange ervaring met paalfunderingen die in Nederland, en daarbuiten, is opgebouwd, heeft geleid tot een vrij algemeen aanvaarde methode (men noemt dat vaak de regel van Koppejan), waarbij de paalvoetweerstand opgebouwd gedacht wordt uit een bijdrage van de grond boven het niveau van de paalvoet, en een bijdrage van de grond onder dat niveau. Van de grond onder de paalvoet brengt men een gebied ter diepte  $0.7d$  à  $4d$  (waarin  $d$  de paaldiameter is) in rekening, en van de grond erboven een gebied met een hoogte van  $8d$ . De bijdrage van de grond onder de paalvoet wordt nog in 2 delen gesplitst. Op die manier wordt de formule voor de puntweerstand

$$p = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (p_1 + p_2) + p_3 \right]. \quad (49.1)$$

Voor de drie bijdragen  $p_1$ ,  $p_2$  en  $p_3$  zijn, op grond van ervaring, procedures afgesproken, die er op neerkomen dat men voor  $p_1$  de kleinste waarde van de sondeerwaarde onder de paalvoet neemt (tot een diepte van maximaal  $4d$ ), voor  $p_2$  de gemiddelde sondeerwaarde over dat gebied, en voor  $p_3$  een representatieve lage waarde voor de sondeerwaarde boven de paalvoet (tot een hoogte van  $8d$ ).

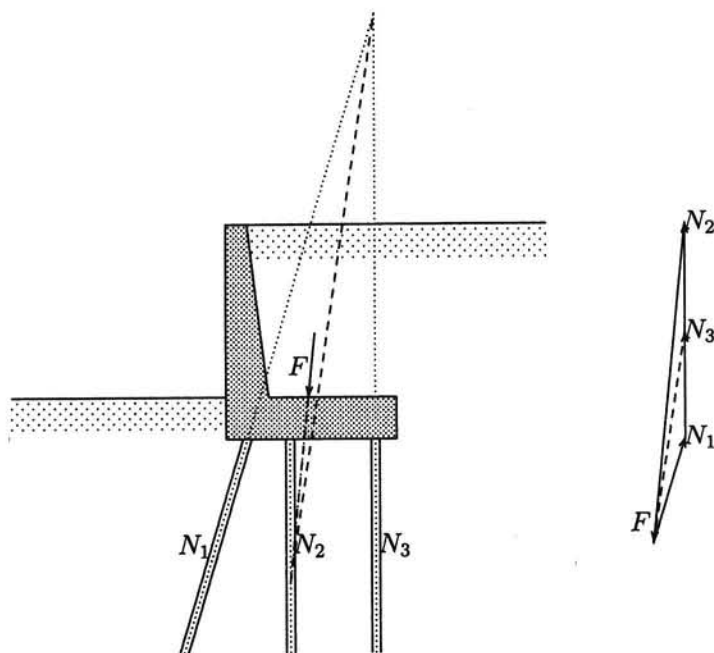
Een paal ontleent vaak zijn draagvermogen niet alleen aan het puntdragvermogen, maar ook aan mantelwrijving (of kleef). Bij toepassingen in het Westen van Nederland kan men daar meestal niet op rekenen, omdat de slappe bovenlagen vaak onderhevig zijn aan zakkingen, ten opzichte van de vaste zandlaag. Er ontwikkelt zich dan vaak zelfs *negatieve kleef*, die het draagvermogen ongunstig beïnvloedt.

De maximale waarde van de kleef kan men goed bepalen met behulp van een sondering met kleefmantel. Daarbij wordt die waarde rechtstreeks gemeten. Men kan ook stellen dat de maximale waarde van de kleef sterk gecorreleerd zal zijn met de maximaal mogelijke schuifspanning op een verticaal vlakje. Dat betekent dat men de horizontale normaalspanning moet kennen (of schatten), en de schuifweerstandparameters  $c$  en  $\phi$ . Veel offshore platforms worden gefundeerd op paalfunderingen bestaande uit lange, holle, ronde, stalen palen. Die ontlene hun draagvermogen vooral aan kleef. Ook bij dergelijke toepassingen is de sondering een goed hulpmiddel.

## 49.2 Statisch bepaalde paalfundering

Zoals in de vorige paragraaf gesteld kan men op diverse wijzen het draagvermogen van een paal bepalen (proefbelasting, of sondering, of iets dergelijks). Als de toelaatbare belasting van een enkele paal bekend is (rekening houdend met een veiligheidscoëfficiënt, bijvoorbeeld 2), kan men het aantal benodigde palen berekenen uit de totale belasting die de constructie levert. In veel gevallen (bijvoorbeeld voor een huis of een klein gebouw) is de belasting bijna uitsluitend verticaal gericht. De palen kan men dan allemaal verticaal zetten. Dat is bij het heien ook eenvoudiger. Een kleine horizontale kracht kan door het stelsel van palen en grond nog wel worden opgenomen.

Het wordt iets anders als er een niet onbelangrijke horizontale kracht moet worden opgenomen. Dat is bijvoorbeeld het geval bij een kademuur, zoals getekend in figuur 49.2. Er zijn dan schoorpalen nodig. Bij een dergelijke paalfundering neemt men meestal aan dat de kracht in elke paal de paalas volgt. Dat is ook wel redelijk omdat de paal in zijn lengterichting veel stijver is dan loodrecht erop. In het geval getekend in figuur 49.2, met drie paalrijen, kan men de kracht op elk van de drie paalrijen bepalen uit de evenwichtsvergelijkingen. Men kan dat ook grafisch doen. Men kan dan stellen dat de kracht  $F$  evenwicht moet maken met de paalkrachten  $N_1$ ,  $N_2$  en  $N_3$ . Omdat  $N_2$  en  $N_3$  verticaal zijn kan men dan de krachtenveelhoek construeren, zie het rechterdeel van figuur 49.2; alleen de verdeling tussen  $N_2$  en  $N_3$  is dan nog onbekend. Omdat de de resultante van  $F$  en  $N_2$  evenwicht moet maken



Figuur 49.2. Statisch bepaalde paalfundering.

met de resultante van  $N_1$  en  $N_3$  moeten die twee resultantes de zelfde werklijn hebben, even groot zijn, en tegengesteld gericht. De resultante van  $N_1$  en  $N_3$  moet door het snijpunt van deze twee krachten gaan, en de resultante van  $F$  en  $N_2$  moet door het snijpunt van deze twee gaan. Daarmee ligt de werklijn van deze resultantes vast. In de krachtenveelhoek kan men deze werklijn dan ook tekenen. De 3 paalkrachten zijn dan bekend.

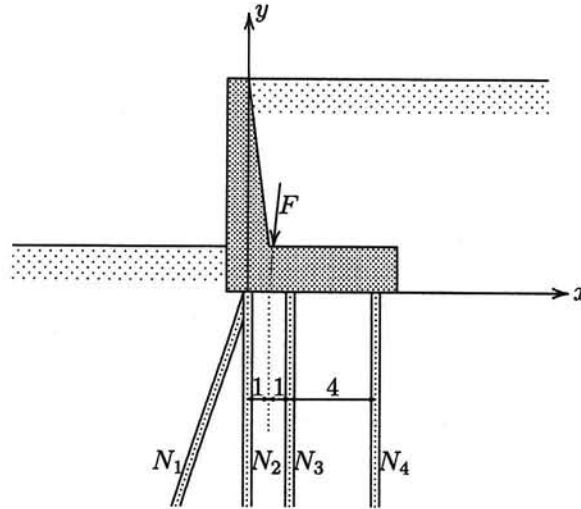
### 49.3 Statisch onbepaalde paalfundering

Indien er meer dan 3 rijen palen zijn, is het probleem van de verdeling van de belasting over de palen statisch onbepaald. De oplossing is dan afhankelijk van de flexibiliteit van de palen en van de bovenbouw. Een veel toegepaste aanpak is om de palen als lineaire veren te beschouwen, met alleen weerstand in de richting van de paalas. Er geldt dan

$$N_i = k_i u_i. \quad (49.2)$$

waarin  $N_i$  de kracht in paal  $i$  is, en  $u_i$  de verplaatsing van de paalkop (dat is de bovenkant van de paal). De veerconstante  $k_i$  bevat de stijfheid van de paal ( $EA/l$ ), maar is meestal iets kleiner omdat ook de vervormingen aan de paalpunt (dat is de onderkant van de paal) er in verdisconteerd moeten worden. Ruwweg stelt men soms, als er geen informatie is over de stijfheid van de grond, dat de vervorming aan de paalkop 2 maal zo groot is als die van de paal alleen. Uiteraard is dat alleen bruikbaar als eerste schatting.

Als de bovenbouw zelf, in eerste benadering, oneindig stijf is kan de berekening van de verdeling van de belasting over de palen geschieden met behulp van de verplaatsingenmethode. Dat zal worden geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld, zie figuur 49.3. In dit twee-dimensionale geval zijn er drie parameters: de twee verplaatsingen en de rotatie van het fundament. Gesteld wordt dat alle vier de paalrijen dezelfde stijfheid ( $k$ ) hebben. De belasting  $F$  die moet worden opgenomen heeft een verticale component van 2000 kN en een



Figuur 49.3. Statisch onbepaalde paalfundering.

horizontale van 200 kN. De werklijn van die kracht gaat door het punt met coördinaten  $x = 1$  m,  $y = 0$ , zie figuur 49.3. De palenrij 1 heeft een helling van 3:1.

De oplossing van het probleem kan worden gevonden met de gebruikelijke procedure van de verplaatsingenmethode. Men begint met de vrijheidsgraden van het systeem vast te stellen (dat zijn in dit geval de verplaatsingen in horizontale en verticale richting, en een rotatie), drukt dan de inwendige krachten in die verplaatsingen uit, en formuleert tenslotte de evenwichtsvergelijkingen. In dit geval gaat dat als volgt.

Bij een horizontale verplaatsing  $u$  zijn de paalkrachten :

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} ku, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 0, \quad N_4 = 0.$$

Bij een verticale verplaatsing  $v$  zijn de paalkrachten :

$$N_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} kv, \quad N_2 = kv, \quad N_3 = kv, \quad N_4 = kv.$$

Bij een rotatie om de oorsprong over een hoek  $\theta = w/1$  m zijn de paalkrachten :

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 2kw, \quad N_4 = 6kw.$$

Alles bij elkaar geldt dus

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ku \\ kv \\ kw \end{pmatrix} \quad (49.3)$$

De krachten in de palen zijn positief gerekend bij trek.

De evenwichtsvergelijkingen voor de funderingsplaat zijn dat de som van de horizontale krachten -200 kN moet zijn, dat de som van de verticale krachten -2000 kN moet zijn, en

dat de som van de momenten ten opzichte van de oorspong -2000 kNm moet zijn. Die evenwichtsvergelijkingen kan men dus schrijven als

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \text{ kN} \\ -2000 \text{ kN} \\ -2000 \text{ kN} \end{pmatrix} \quad (49.4)$$

Men vindt nu na substitutie van (49.3) in (49.4) voor de evenwichtsvergelijkingen uitgedrukt in de verplaatsingen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{39}{10} & 8 \\ 0 & 8 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ku \\ kv \\ kw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \text{ kN} \\ -2000 \text{ kN} \\ -2000 \text{ kN} \end{pmatrix} \quad (49.5)$$

Dit zijn drie lineaire vergelijkingen met drie onbekenden. De oplossing van dit stelsel lineaire vergelijkingen is een eenvoudig wiskundig probleem, met als resultaat

$$\begin{aligned} ku &= 143 \text{ kN}, \\ kv &= -714 \text{ kN}, \\ kw &= 93 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (49.6)$$

Voor de paalkrachten geldt dan

$$\begin{aligned} N_1 &= -632 \text{ kN}, \\ N_2 &= -714 \text{ kN}, \\ N_3 &= -529 \text{ kN}, \\ N_4 &= -157 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (49.7)$$

De verticale component van de kracht in palenrij 1 is 600 kN, en de horizontale component is 200 kN. Dat had men ook direct kunnen zeggen, omdat dit de enige palenrij is die de horizontale kracht kan opnemen.

Niet elke palenrij blijkt evenveel kracht te dragen. De kracht in rij 4 blijkt nogal wat kleiner te zijn dan die in de andere palenrijen. Als dit de enige belasting is waarop de paalfundering moet worden gedimensioneerd is het zinvol de palen in rij 4 op grotere onderlinge afstanden te plaatsen. De veerstijfheid van die palenrij wordt dan wel kleiner, en de berekening moet eigenlijk herhaald worden.

De hier gebruikte procedure kan men in principe eenvoudig generaliseren tot het driedimensionale geval. Er zijn dan 6 vrijheidsgraden, en 6 evenwichtsvergelijkingen. De procedure leent zich ook goed voor een computerprogramma.

### Opgaven

**49.1** Voer de berekening van de verdeling van de krachten, zie figuur 49.3, ook uit voor het geval dat de stijfheid van palenrij 4 half zo groot is als die van de andere palenrijen. Wat is dan de paalkracht in rij 1?

**49.2** Als men de beschikking heeft over een programma voor de berekening van raamwerken, kan men dat dan gebruiken voor de berekening van de krachten in een paalfundering?

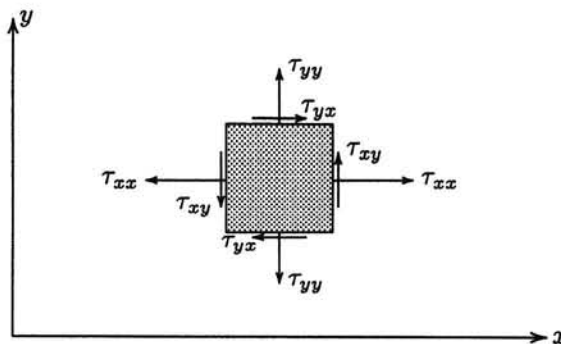
## Appendix A

### SPANNINGSLEER

In deze appendix wordt een korte uiteenzetting gegeven van een aantal belangrijke formules uit de spanningsleer. Tevens wordt de grafische constructie met behulp van de cirkel van Mohr behandeld. Ter vereenvoudiging worden de beschouwingen beperkt tot het tweedimensionale geval. De generalisatie naar het algemene drie-dimensionale geval is zonder meer mogelijk.

#### A.1 Transformatieformules

Stel dat gegeven is dat in een bepaald punt de spanningstoestand beschreven wordt door de spanningen  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  en  $\tau_{yy}$ , zie figuur A.1. Zoals in de mechanica gebruikelijk



Figuur A.1. Spanningen in twee dimensies.

zijn de spanningscomponenten positief gerekend als ze een kracht beschrijven in positieve coördinaat-richting op een vlakje waarvan de naar buiten wijzende normaalvector ook in positieve coördinaatrichting wijst, of als ze een kracht beschrijven in negatieve coördinaatrichting op een vlakje waarvan de naar buiten wijzende normaalvector ook in negatieve coördinaatrichting wijst. Voor normaalspanningen betekent dit dat trekspanningen positief zijn, en drukspanningen negatief. In de grondmechanica wordt meestal net de tegengestelde tekenafspraken gebruikt. Om dat verschil tot uitdrukking te brengen wordt in deze appendix het symbool  $\tau$  gebruikt voor de spanningen, terwijl in het boek zelf het symbool  $\sigma$  gebruikt wordt. Formeel kan men alles met elkaar in overeenstemming brengen door af te spreken dat

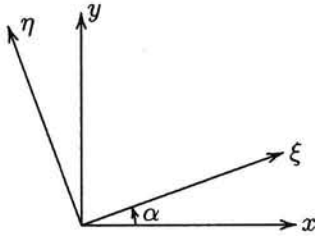
$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\tau_{xx}, \\ \sigma_{xy} &= -\tau_{xy}, \\ \sigma_{yx} &= -\tau_{yx}, \\ \sigma_{yy} &= -\tau_{yy}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

De spanningstoestand in een bepaald punt wordt volledig gekarakteriseerd door de vier spanningscomponenten  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  en  $\tau_{yy}$ . Van deze vier zijn de schuifspanningen aan

elkaar gelijk, zoals volgt uit een beschouwing van het momentenevenwicht om het middelpunt van het elementje,

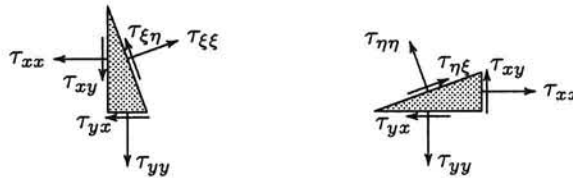
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (\text{A.2})$$

Het is vaak nodig om ook de krachtsoverdracht door andere vlakjes te kennen, of de spanningen op een vlakje in een gerooteerd assenstelsel. Men kan daartoe de spanningstoestand beschrijven in een ander cartesiaans assenstelsel, met assen  $\xi$  en  $\eta$ , die ten opzichte van de oorspronkelijke assen  $x$  en  $y$  gerooteerd zijn over een hoek  $\alpha$ , zie figuur A.2. De transformatieformules kunnen het eenvoudigst worden afgeleid uit een beschouwing van het evenwicht van een geschikt gekozen elementje, zie figuur A.3. Hierbij dient bedacht te worden dat de termen in de evenwichtsvergelijkingen krachten moeten zijn, geen spanningen. Dat betekent dat men er rekening mee moet houden dat de oppervlakjes waarop de verschillende spanningcomponenten werken verschillend zijn.



Figuur A.2. Rotatie assenstelsel.

Men vindt nu uit beschouwingen van het evenwicht in  $\xi$ -richting en in  $\eta$ -richting van een



Figuur A.3. Spanningen in getransformeerd assenstelsel.

geschikt gekozen driehoekje, waarop steeds maar twee onbekende spanningcomponenten werken, zie figuur A.3,

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\xi} &= \tau_{xx} \cos^2 \alpha + \tau_{yy} \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{\eta\eta} &= \tau_{xx} \sin^2 \alpha + \tau_{yy} \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\tau_{yy} - \tau_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Deze formules worden nog wat eenvoudiger als men ze uitdrukt met behulp van de dubbele hoek,  $2\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\xi} &= \left( \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \right) + \left( \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{\eta\eta} &= \left( \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \right) - \left( \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = \tau_{xy} \cos 2\alpha - \left( \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Hoofdrichtingen

Voor bepaalde waarden van de hoek  $\alpha$  worden de schuifspanningen  $\tau_{\xi\eta}$  en  $\tau_{\eta\xi}$  gelijk aan nul. Dat betekent dat er vlakjes zijn waar alleen een normaalspanning wordt overgedragen, en geen schuifspanning. Men noemt dat de *hoofdrichtingen* van de spanningstensor. De hoek

waarvoor dat het geval is zal met  $\alpha_0$  worden aangegeven. Men vindt die hoek door de laatste vergelijking van (A.4) nul te stellen. Er blijkt te gelden dat

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\tau_{xx} - \tau_{yy})}. \quad (\text{A.5})$$

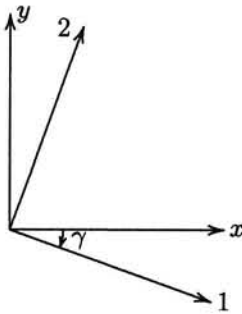
De bijbehorende waarden van de normaalspanningen vindt men nu door substitutie in de eerste twee vergelijkingen van (A.4). Ze worden aangegeven met  $\tau_1$  en  $\tau_2$ . Men noemt dat de *hoofdspansingen*, waarbij meestal wordt afgesproken dat  $\tau_1$  de grootste hoofdspansing is en  $\tau_2$  de kleinste. Met behulp van bekende goniometrische relaties vindt men

$$\tau_{1,2} = \left(\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{A.6})$$

De hier in fysische zin geïntroduceerde begrippen hoofdspansing en hoofdrichting komen precies overeen met de begrippen *eigenwaarde* en *eigenvector* zoals die in de wiskunde worden gebruikt bij matrices en tensoren.

### A.3 Cirkel van Mohr

De hierboven afgeleide formules lenen zich goed voor een grafische interpretatie, met behulp van de *cirkel van Mohr*. Daartoe is het het handigst uit te gaan van de transformatieformules (A.4), maar dan uitgedrukt in de hoofdspansingen. Gesteld wordt dat de  $x$ -as een hoek  $\gamma$  maakt met de richting van de grootste hoofdspansing, zie figuur A.4. De richtingen van de hoofdspansingen zijn aangegeven met 1 en 2.

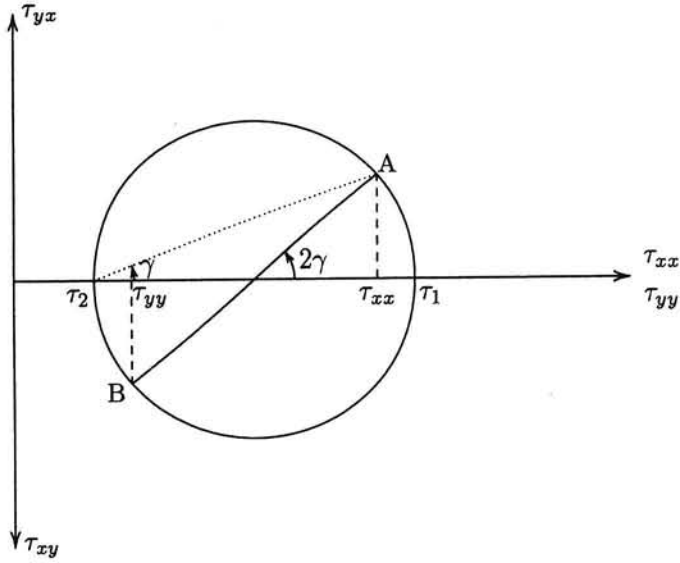


Figuur A.4. Rotatie assenstelsel.

De transformatieformules voor de overgang van de assen 1 en 2 naar de assen  $x$  en  $y$  kunnen eenvoudig uit de formules (A.4) worden afgeleid, door  $x$  en  $y$  te vervangen door 1 en 2 (met  $\tau_{12} = 0$ ),  $\xi$  en  $\eta$  te vervangen door  $x$  en  $y$ , en  $\alpha$  door  $\gamma$ . Het resultaat is

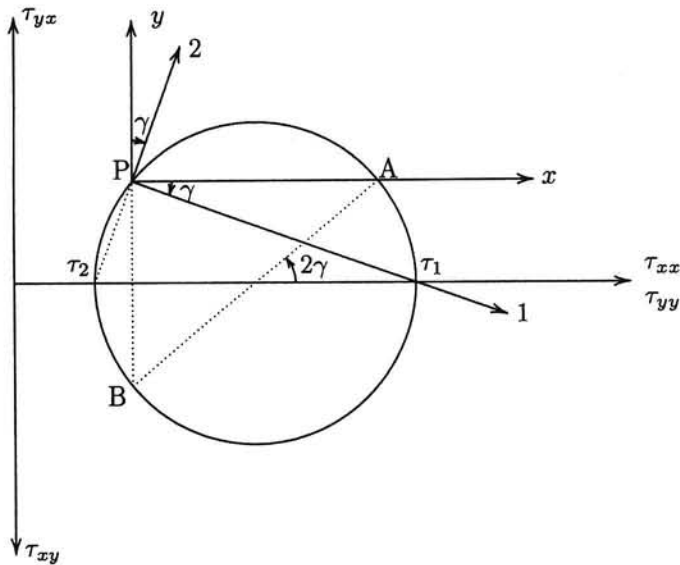
$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) + \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}\right) \cos 2\gamma, \\ \tau_{yy} &= \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) - \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}\right) \cos 2\gamma, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}\right) \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Deze formules laten een eenvoudige grafische interpretatie toe, zie figuur A.5. In deze figuur, het diagram van Mohr, worden de spanningen  $\tau_{xx}$  en  $\tau_{yy}$  naar rechts positief uitgezet. De spanning  $\tau_{yx}$  wordt naar boven positief uitgezet, en de spanning  $\tau_{xy}$  wordt naar beneden positief uitgezet. De spanningen  $\tau_{xx}$  en  $\tau_{yy}$  vormen tezamen het punt A in het vlak getekend in figuur A.5. De spanningen  $\tau_{yy}$  en  $\tau_{yx}$  worden weergegeven door het punt B. De formules (A.7) geven aan dat die spanningspunten een cirkel beschrijven als de hoek  $\gamma$  varieert, met het middelpunt gelegen in het punt op een afstand  $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$  rechts van de oorsprong, en met als straal  $\frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)$ . De plaats op de cirkel wordt bepaald door de hoek  $\gamma$ , of beter nog door de dubbele hoek  $2\gamma$ . Als de hoek  $\gamma$  verandert bewegen de spanningspunten over de cirkel, waarbij de middelpuntshoek  $2\gamma$  is. In het getekende geval zijn  $\tau_{xy}$  en  $\tau_{yx}$  negatief.



Figuur A.5. Cirkel van Mohr.

Men kan in de cirkel van Mohr nog een speciaal punt definiëren, het *richtingencentrum*. Met behulp van dit punt kan men de spanningen op een vlakje met de normaal in een bepaalde richting vinden, zie figuur A.6. Het richtingencentrum (punt P in figuur A.6) vindt men door vanuit twee spanningspunten de richting van de bijbehorende assen uit te zetten.



Figuur A.6. Richtingencentrum.

Het richtingencentrum is het snijpunt van die twee assen. De richting van de hoofdassen vindt men nu door lijnen te trekken naar het meest rechtse en het meest linkse punt van de cirkel. De spanningen op een willekeurig vlakje vindt men door vanuit het richtingencentrum een lijn te trekken in de richting van de normaal op dat vlakje, en die lijn met de cirkel te



snijden. De geldigheid van deze constructie hangt samen met het feit dat de omtrekshoek de helft is van de middelpuntshoek op dezelfde boog. Omdat de middelpuntshoek  $2\gamma$  is, is de omtrekshoek dus  $\gamma$ .

De grafische constructies die hierboven zijn beschreven, zijn in de grondmechanica zeer nuttig om bijvoorbeeld de richting van de meest waarschijnlijke glijvlakken te vinden.

Opgemerkt moge worden dat de beschouwingen in deze appendix gelden voor elke symmetrische tensor van de tweede orde. Ze zijn bijvoorbeeld ook geldig voor de vervormingstensor.

## Appendix B

### ELASTICITEITSTHEORIE

In deze appendix worden de basisvergelijkingen van de elasticiteitstheorie gepresenteerd, tezamen met een aantal elementaire oplossingen. Er worden alleen isotrope materialen beschouwd, dat zijn materialen die in alle richtingen dezelfde eigenschappen hebben.

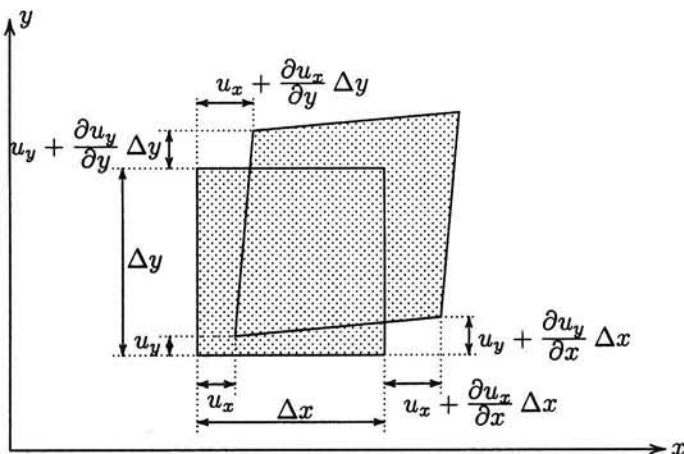
#### B.1 Basisvergelijkingen elasticiteitstheorie

De basisvergelijkingen van de elasticiteitstheorie beschrijven de voorwaarden waaraan de spanningen, vervormingen en verplaatsingen in een lineair elastisch materiaal moeten voldoen.

Noemt men de componenten van de verplaatsingsvector in de drie richtingen van een cartesisch assenstelsel  $u_x$ ,  $u_y$  en  $u_z$ , dan zijn de uitdrukkingen voor de vervormingen, aannemende dat de afgeleiden van de verplaatsingscomponenten klein zijn ten opzichte van 1,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Deze uitdrukkingen worden geïllustreerd in figuur B.1. De rekken  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  en  $\varepsilon_{zz}$  zijn een



Figuur B.1. Vervormingen.

maat voor de lengteveranderingen in de drie coördinaatrichtingen. De rekken  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  en  $\varepsilon_{zx}$  zijn een maat voor de hoekvervormingen. Zo is de grootte  $\varepsilon_{xy}$  de helft van de verkleining van de rechte hoek linksonder in het elementje getekend in figuur B.1.

De relatieve toename van het volume wordt aangeduid als de *volumerek*, en aangegeven met het symbool  $\varepsilon_{\text{vol}}$ ,

$$\varepsilon_{\text{vol}} = \frac{\Delta V}{V}. \quad (\text{B.2})$$

Als de rekken klein zijn is dit gelijk aan de som van de rekken in de drie richtingen,

$$\varepsilon_{\text{vol}} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (\text{B.3})$$

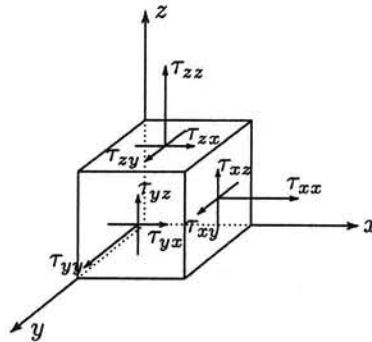
Voor een isotroop lineair elastisch materiaal kunnen de spanningen worden uitgedrukt in de vervormingen met behulp van de wet van Hooke,

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda \varepsilon_{\text{vol}} + 2\mu \varepsilon_{xx}, & \tau_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}, \\ \tau_{yy} &= \lambda \varepsilon_{\text{vol}} + 2\mu \varepsilon_{yy}, & \tau_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz}, \\ \tau_{zz} &= \lambda \varepsilon_{\text{vol}} + 2\mu \varepsilon_{zz}, & \tau_{zx} &= 2\mu \varepsilon_{zx}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Hierin zijn  $\lambda$  en  $\mu$  de elasticiteitsconstanten van Lamé. Deze hangen samen met de elasticiteitsmodulus  $E$  en de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$  volgens

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (\text{B.5})$$

Voor de spanningen in vergelijking (B.4) is de in de elasticiteitstheorie gebruikelijke tekenafspraken gehanteerd, die stelt dat een spanningscomponent positief is indien deze werkt in positieve coördinaatrichting op een vlakje waarvan de uitwendige normaalvector in positieve coördinaatrichting wijst. Trekspanningen zijn dan positief. Voor een elementair blokje zijn



Figuur B.2. Spanningen op elementair blokje.

de spanningen op de drie zichtbare vlakjes getekend in figuur B.2. Opgemerkt moge worden dat in de grondmechanica vaak juist een zodanige tekenafspraken wordt gebruikt dat drukspanningen positief zijn. De spanningen  $\sigma_{ij}$  in de hoofdtekst van dit boek kunnen worden gerelateerd aan de hier beschouwde spanningen  $\tau_{ij}$  met de formule  $\sigma_{ij} = -\tau_{ij}$ .

De spanningen moeten voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen. Als er geen volumekrachten zijn luiden die als volgt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, & \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0, & \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= 0. & \tau_{zx} &= \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Deze vergelijkingen volgen uit beschouwingen van het evenwicht van een elementair blokje in de drie coördinaatrichtingen, en het momentenevenwicht om de drie assen.

De spanningen, vervormingen en verplaatsingen in een isotroop lineair elastisch materiaal moeten aan de hierboven genoemde vergelijkingen voldoen, en tevens aan de randvoorwaarden op het oppervlak van het lichaam. Het vinden van oplossingen die aan al deze voorwaarden voldoen is meestal geen eenvoudige zaak. Er bestaat een groot aantal boeken waarin oplosmethoden worden behandeld. Een bekend boek is dat van S.P. Timoshenko & J.N. Goodier (*Theory of elasticity*, McGraw-Hill, 1970). In de volgende paragrafen zal een aantal bijzondere oplossingen worden beschouwd.

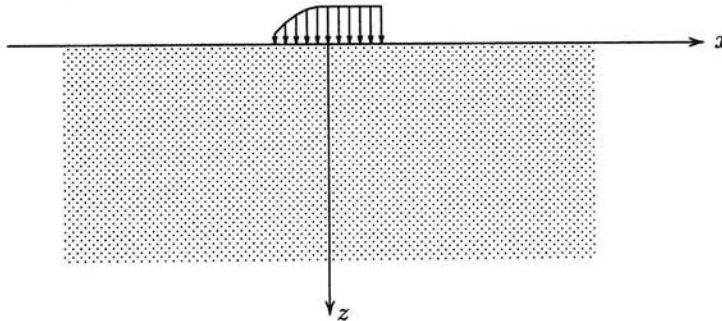
Het is voor het vervolg nog handig om de evenwichtsvergelijkingen uit te drukken in de verplaatsingen. Men vindt, aannemende dat  $\lambda$  en  $\mu$  constanten zijn (dat wil zeggen : aannemende dat het materiaal homogeen is), uit (B.1), (B.4) en (B.6),

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z &= 0.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Men noemt dit de vergelijkingen van Navier. Het zijn drie vergelijkingen in de drie basisvariabelen, de verplaatsingen.

## B.2 Boussinesq-problemen

Van groot belang voor de grondmechanica is de klasse van problemen voor een elastische halfruimte ( $z > 0$ ), begrensd door het platte vlak  $z = 0$ , met op dat vlak een belasting uitsluitend door normaalspanningen, zie figuur B.3. Men noemt dat Boussinesq-problemen,



Figuur B.3. Boussinesq probleem.

naar de Franse onderzoeker die reeds in 1885 een aantal van dit soort oplossingen heeft gevonden.

Men kan problemen van dit type, met gegeven normaalspanningen op de rand, en schuifspanningen nul op de rand, relatief eenvoudig oplossen met behulp van een speciaal gekozen spanningsfunctie  $\Phi$ , waaruit de verplaatsingen kunnen worden afgeleid volgens

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \\ u_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \\ u_z &= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Substitutie in de vergelijkingen (B.7) laat zien dat aan alle drie de evenwichtsvergelijkingen exact wordt voldaan, mits de functie  $\Phi$  voldoet aan de vergelijking van Laplace,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Er is nu nog maar één onbekende functie, de spanningsfunctie  $\Phi$ , die bovendien aan een relatief eenvoudige differentiaalvergelijking moet voldoen. Van deze differentiaalvergelijking bestaan in de wiskunde vele oplossingen.

Dat men op deze wijze zinvolle oplossingen van elasticiteitsproblemen kan vinden blijkt pas goed als ook de spanningen worden uitgedrukt in de functie  $\Phi$ . Men vindt, met behulp van (B.1), (B.4) en (B.9), voor de normaalspanningen,

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xx}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{yy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{zz}}{2\mu} &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Voor de schuifspanningen vindt men de volgende uitdrukkingen

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \frac{\tau_{yz}}{2\mu} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2}, \\ \frac{\tau_{zx}}{2\mu} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

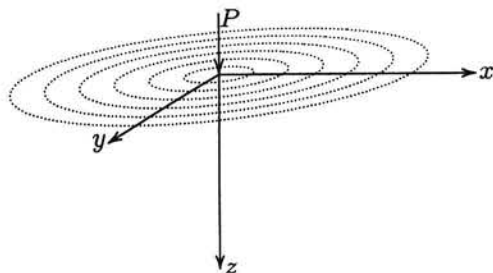
Uit de laatste twee vergelijkingen ziet men dat op het vlak  $z = 0$  de schuifspanningen altijd nul zijn,

$$z = 0 : \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad (\text{B.12})$$

voor elke mogelijke functie  $\Phi$ . Dit betekent dat men de functie  $\Phi$  alleen maar kan gebruiken voor problemen waarvoor het vlak  $z = 0$  vrij van schuifspanningen is. Dat is een wezenlijke beperking. Aan de andere kant blijkt deze beperking wel te leiden tot een vrij eenvoudig wiskundig probleem, namelijk het vinden van een potentiaalfunctie  $\Phi$ , die voldoet aan (B.9). Op de rand  $z = 0$  kan de spanning  $\tau_{zz}$  voorgeschreven zijn, of de verplaatsing  $u_z$ . In de volgende paragrafen zullen enige bijzondere oplossingen worden gepresenteerd.

### B.3 Puntlast

Een klassiek geval, waarvan de oplossing al door Boussinesq werd beschreven, is dat van een puntlast op de halfruimte  $z > 0$ , zie figuur B.4. Als oplossing wordt gesteld



Figuur B.4. Puntlast op halfruimte.

$$\Phi = -\frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)} \ln(z + R), \quad (\text{B.13})$$

waarin

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (\text{B.14})$$

Dat deze functie inderdaad aan de differentiaalvergelijking (B.9) voldoet kan men eenvoudig nagaan door substitutie. Vervolgens moet nog worden nagegaan of aan de randvoorwaarden is voldaan. De schuifspanningen op het oppervlak zijn automatisch nul, maar het is nog de vraag of de normaalspanningen wel overeenkomen met de puntlast. Dat wordt hieronder aangetoond.

Door  $\Phi$  naar  $z$  te differentiëren vindt men achtereenvolgens

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{1}{R}, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{z}{R^3}, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = \frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)} \left( \frac{1}{R^3} - 3 \frac{z^2}{R^5} \right). \quad (\text{B.17})$$

Voor de verticale normaalspanning  $\tau_{zz}$  vindt men nu, met (B.10),

$$\tau_{zz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}. \quad (\text{B.18})$$

Op het oppervlak  $z = 0$  is deze spanning overall nul, behalve in de oorsprong, waar de spanning oneindig groot wordt. Dat de oplossing inderdaad de juiste is, met een resulterende kracht  $P$ , kan men nagaan door de spanning over een horizontaal oppervlak te integreren. Men vindt dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{zz} dx dy = -P. \quad (\text{B.19})$$

Elk horizontaal vlak brengt dus een verticale kracht  $P$  over, zoals vereist. De gestelde oplossing blijkt aan alle voorwaarden te voldoen, zodat het wel de juiste oplossing moet zijn.

Voor de verticale verplaatsing vindt men, met (B.8),

$$u_z = \frac{P}{4\pi\mu R} \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} + \frac{z^2}{R^2} \right). \quad (\text{B.20})$$

De factor  $(\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  kan men ook schrijven als  $2(1 - \nu)$ . Op het oppervlak  $z = 0$  geldt nu, uitgedrukt in  $E$  en  $\nu$ ,

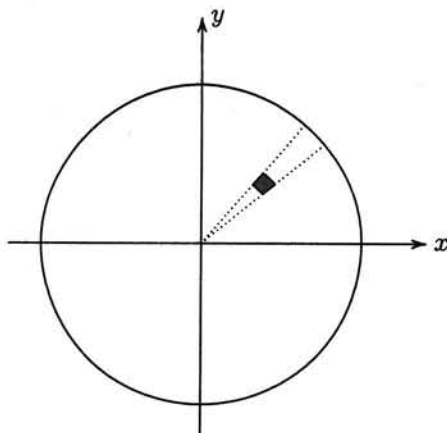
$$z = 0 : \quad u_z = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi ER}. \quad (\text{B.21})$$

In de oorsprong is dit singulier.

De overige spanningen en verplaatsingen kan men uiteraard ook uit de oplossing (B.13) afleiden. Dat wordt aan de lezer overgelaten.

#### B.4 Verdeelde belasting

Op basis van de elementaire oplossing (B.13) kan men vele andere interessante oplossingen vinden. Men zie hiervoor de literatuur. Bij wijze van voorbeeld wordt hier nog de verplaatsing in het midden van een cirkelvormig gebied met gelijkmatig verdeelde belasting afgeleid, zie figuur B.5. Een belasting ter grootte  $p dA$  op een afstand  $r$  van de oorsprong leidt tot



Figuur B.5. Verdeelde belasting op cirkelvormig gebied.

een verplaatsing in de oorsprong van

$$\frac{p dA (1 - \nu^2)}{\pi E r},$$

in overeenstemming met formule (B.21).

De zakking ten gevolge van een gelijkmatig verdeelde belasting over een cirkelvormig gebiedje met straal  $a$  vindt men door integratie over dat gebiedje. Omdat  $da = r dr d\theta$  vindt men, na integratie over  $\theta$  van  $\theta = 0$  tot  $\theta = 2\pi$ , en integratie over  $r$  van  $r = 0$  tot  $r = a$ ,

$$r = 0, z = 0 : \quad u = \frac{2pa(1 - \nu^2)}{E}. \quad (\text{B.22})$$

Dit is een bekende en nuttige formule.

## B.5 Fourier-transformaties

Een klasse van algemene oplossingen kan men vinden met behulp van Fourier-transformaties (zie I.N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, 1951). Daarvan wordt hier een voorbeeld gegeven, voor het geval van een vlakke vervormingstoestand ( $u_y = 0$ ).

Als oplossing wordt gesteld

$$\Phi = \int_0^{\infty} \{f(\alpha) \cos(\alpha x) + g(\alpha) \sin(\alpha x)\} \exp(-\alpha z) d\alpha, \quad (\text{B.23})$$

waarin  $f(\alpha)$  en  $g(\alpha)$  nog nader te bepalen functies zijn.

Dat (B.23) inderdaad een oplossing is volgt direct uit substitutie van de elementaire oplossingen  $\cos(\alpha x) \exp(-\alpha z)$  en  $\sin(\alpha x) \exp(-\alpha z)$  in de differentiaalvergelijking (B.9). Voor  $z \rightarrow \infty$  gaat de oplossing altijd naar nul, wat suggereert dat men deze oplossing zou kunnen gebruiken voor gevallen waarbij de spanningen voor  $z \rightarrow \infty$  naar nul gaan.

Er geldt nu, met (B.10),

$$z = 0 : \frac{\tau_{zz}}{2\mu} = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \int_0^{\infty} \{\alpha^2 f(\alpha) \cos(\alpha x) + \alpha^2 g(\alpha) \sin(\alpha x)\} d\alpha. \quad (\text{B.24})$$

Stel nu dat de randvoorwaarde is

$$z = 0, -\infty < x < \infty : \tau_{zz} = q(x), \quad (\text{B.25})$$

waarin  $q(x)$  een gegeven functie is. Dan moet blijkbaar gelden

$$\int_0^{\infty} \{A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x)\} d\alpha = q(x), \quad (\text{B.26})$$

waarin

$$A(\alpha) = -2(\lambda + \mu) \alpha^2 f(\alpha), \quad (\text{B.27})$$

en

$$B(\alpha) = -2(\lambda + \mu) \alpha^2 g(\alpha). \quad (\text{B.28})$$

Het probleem van de bepaling van de functies  $A(\alpha)$  en  $B(\alpha)$  uit (B.26) is precies het standaardprobleem uit de theorie van de Fourier-transformaties. De oplossing wordt gegeven door het *inversie-theorema*, waarvan de afleiding hier niet zal worden gegeven, men zie hiervoor de literatuur over Fourier-analyse. Het uiteindelijke resultaat is als volgt.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \cos(\alpha t) dt, \quad (\text{B.29})$$

en

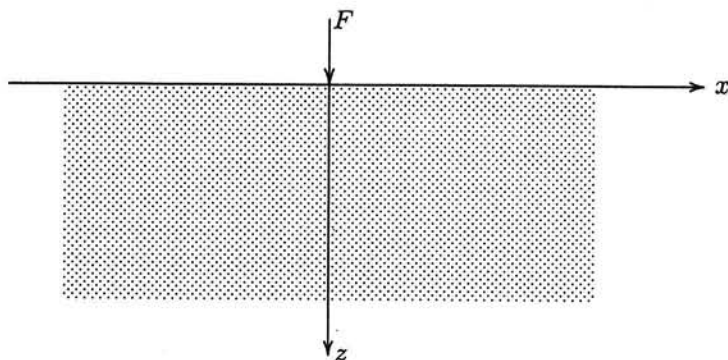
$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \sin(\alpha t) dt. \quad (\text{B.30})$$

Hiermee is het probleem in principe opgelost, voor een willekeurige belasting  $q(x)$  op het oppervlak. Het komt er op neer dat men bij een gegeven belastingsfunctie  $q(x)$  eerst de integralen (B.29) en (B.30) moet oplossen, en daarna de resultaten moet substitueren in de algemene oplossing (B.23). Dat kan wiskundig nog behoorlijk lastig zijn. In de volgende paragraaf wordt het voor het eenvoudigste geval uitgewerkt. In dat geval kunnen alle integralen analytisch worden uitgewerkt.



## B.6 Lijnlast

Bij wijze van voorbeeld wordt het geval beschouwd van een lijnlast op een halfruimte, zie figuur B.6. In dit geval is de belastingsfunctie als volgt.



Figuur B.6. Lijnlast op halfruimte.

$$q(x) = \begin{cases} -F/(2\epsilon) & \text{als } |x| < \epsilon, \\ 0 & \text{als } |x| > \epsilon, \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

waarbij  $\epsilon \rightarrow 0$  moet gaan. Uit (B.29) en (B.30) vindt men nu

$$A(\alpha) = -\frac{F}{\pi\epsilon} \frac{\sin(\alpha\epsilon)}{\alpha},$$

en

$$B(\alpha) = 0.$$

Als  $\epsilon \rightarrow 0$  reduceert dit tot

$$A(\alpha) = -F/\pi, \quad (\text{B.32})$$

en

$$B(\alpha) = 0. \quad (\text{B.33})$$

Met (B.27) en (B.28) geldt dus

$$f(\alpha) = \frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)\alpha^2}, \quad (\text{B.34})$$

en

$$g(\alpha) = 0. \quad (\text{B.35})$$

De oplossing van het probleem is dus

$$\Phi = \frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) \exp(-\alpha z)}{\alpha^2} d\alpha. \quad (\text{B.36})$$

Hoewel deze integraal niet convergeert, door het gedrag van de factor  $\alpha^2$  in de noemer als  $\alpha \rightarrow 0$ , is het resultaat toch goed bruikbaar. Van belang zijn immers vooral afgeleide

grootheden zoals de spanningen, en daarvoor moet men eerst nog differentiëren. Men vindt bijvoorbeeld

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \cos(\alpha x) \exp(-\alpha z) d\alpha,$$

en deze integraal convergeert wel. Het resultaat is

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{z}{x^2 + z^2}. \quad (\text{B.37})$$

Op analoge manier vindt men

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{z}{x^2 + z^2}. \quad (\text{B.38})$$

Door voortgaande differentiatie vindt men

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = \frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}, \quad (\text{B.39})$$

en

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial z} = -\frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}. \quad (\text{B.40})$$

De uitdrukkingen voor de spanningen worden tenslotte, met behulp van (B.10) en (B.11),

$$\tau_{xx} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}, \quad (\text{B.41})$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2F}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}, \quad (\text{B.42})$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2F}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}. \quad (\text{B.43})$$

Men noemt dit de formules van Flamant, naar de Franse onderzoeker die deze oplossing in 1892 gevonden heeft.

Er bestaan nog vele andere oplossingen van elastische problemen, bijvoorbeeld voor ge-laagde systemen, en voor lichamen van wat ingewikkelder vorm dan een halfvlak of een halfruimte, bijvoorbeeld een vlak met een reeks cirkelvormige gaten (van belang voor de spanningen rondom vliegtuigramen). Die oplossingen zijn al gauw erg ingewikkeld, veel ingewikkelder dan de in dit hoofdstuk behandelde voorbeelden. Veel oplossingen die voor de grondmechanica van belang zijn vindt men in het boek van H.G. Poulos & E.H. Davis (*Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics*, Wiley, 1974).

## Appendix C

# PLASTICITEITSTHEORIE

In deze appendix worden de belangrijkste stellingen uit de plasticiteitstheorie gepresenteerd. Het gaat hier om de zogenaamde grenstheorema's, die de mogelijkheid bieden om van een spanningstoestand of van de belasting van een lichaam te kunnen zeggen of ze boven of onder de bezwijkbelasting ligt.

### C.1 Vloeioppervlak

Het eenvoudigste type materiaal dat plastische vervormingen vertoont is een *perfect plastisch* materiaal, dat is een materiaal dat alleen plastische vervormingen vertoont als voldaan wordt aan de zogenaamde *vloeivoorwaarde*. Deze vloeivoorwaarde wordt uitgedrukt door een zekere *vloei grens*, die voor een perfect plastisch materiaal uitsluitend afhangt van de spanningen (en bijvoorbeeld niet van de vervormingen, of van de tijd). Deze vloeivoorwaarde of vloei grens wordt geschreven als

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (\text{C.1})$$

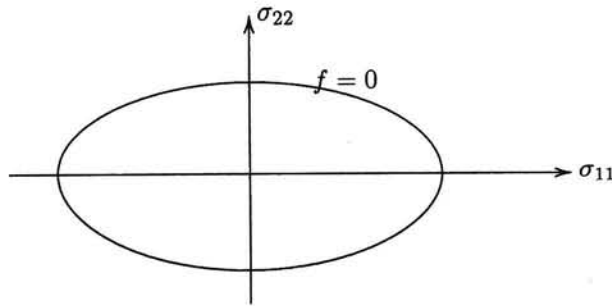
De betekenis van de vloeivoorwaarde is dat het optreden van plastische vervormingen geheel bepaald wordt door de waarde van de vloeifunctie  $f$ . Meestal stelt men dat er alleen plastische vervormingen optreden als  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Spanningstoestanden waarvoor  $f(\sigma_{ij}) > 0$  kunnen helemaal niet voorkomen, en als  $f(\sigma_{ij}) < 0$  zijn er geen plastische vervormingen, maar zulke spanningstoestanden zijn wel bestaanbaar. Er zijn dan alleen elastische vervormingen.

Men kan de vloeivoorwaarde beschouwen als een conditie ten aanzien van de punten  $\sigma_{ij}$  met  $i, j = 1, 2, 3$  in een 9-dimensionale ruimte. De vloeivoorwaarde (C.1) is in een dergelijke ruimte een 8-dimensionale deelruimte. Het is gebruikelijk dit het *vloeioppervlak* te noemen. Als er drie spanningen zijn die de spanningstoestand bepalen (bijvoorbeeld de drie hoofdspanningen, dat is nog niet eens zo gek), kan men de vloeivoorwaarde schrijven als

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (\text{C.2})$$

In de drie-dimensionale ruimte met assen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  is dat een oppervlak. Dat is de reden dat men ook in hoger-dimensionale ruimtes (C.1) het vloeioppervlak noemt. In een tweedimensionale ruimte, als er maar twee spanningen zijn die het vloeien bepalen, reduceert het vloeioppervlak tot een (kromme) lijn.

Aangenomen wordt dat de oorsprong  $\sigma_{ij} = 0$ , dat is de toestand waarbij alle spanningen nul zijn, binnen het vloeioppervlak ligt, en voorts wordt aangenomen dat als een punt  $\sigma_{ij}^e$  binnen het vloeioppervlak ligt, dat dan  $\alpha \sigma_{ij}^e$ , met  $\alpha < 1$ , ook binnen het vloeioppervlak ligt. In de topologie zegt men dan dat het vloeioppervlak *stervormig* is. Later zal ook nog worden aangenomen worden dat het vloeioppervlak *convex* is, zie figuur C.1. Dat is nog een iets strengere eis dan die van stervormigheid. Deze aannames zijn alleszins redelijk, maar zijn voor de afleidingen wel essentieel.



Figuur C.1. Vloeioppervlak.

Ter vereenvoudiging wordt aangenomen dat het materiaal uitsluitend kan vervormen als  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Dit betekent dat eventuele elastische vervormingen worden verwaarloosd. Men noemt zo'n materiaal stijf-plastisch (rigid plastic).

## C.2 Enige geometrische beschouwingen

Alvorens verder te gaan met de mechanica van plastisch vervormende materialen zal eerst een aantal belangrijke geometrische formules worden afgeleid, namelijk die voor een raakvlak aan het vloeioppervlak, en voor een lijn er loodrecht op.

Analoog aan de definitie van een raakvlak aan een oppervlak in een 3-dimensionale ruimte kan men in een 9-dimensionale spanningsruimte een raakvlak aan het oppervlak  $f(\sigma_{ij}) = 0$  in het punt  $\sigma_{ij}^1$  definiëren als

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)_1 (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Hierin stelt  $(\partial f / \partial \sigma_{ij})_1$  de waarde voor van de partiële afgeleide van de functie  $f$  naar de variabele  $\sigma_{ij}$  in het punt  $\sigma_{ij}^1$ . In formule (C.3) is stilzwijgend sommatie over de indices  $i$  en  $j$  verondersteld, op basis van de sommatieconventie van Einstein,

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad (\text{C.4})$$

waarin  $n$  de dimensie van de ruimte is, meestal 3, maar in dit geval 9.

Dat de uitdrukking (C.3) een zinvolle definitie is van het raakvlak kan men als volgt inzien. Op het vloeioppervlak is  $f$  constant (en wel gelijk aan nul, maar dat doet er nu niet toe). Voor een kleine toename van de spanningen, zodanig dat  $\sigma_{ij}^1$  en  $\sigma_{ij}^1 + d\sigma_{ij}$  beide op het vloeioppervlak liggen, waardoor die twee punten dus in het raakvlak liggen, geldt nu dat het verschil in functiewaarden van de functie  $f$  nul is, ofwel

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)_1 d\sigma_{ij} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Vergelijking (C.3) is de generalisatie van (C.5) voor niet-naburige punten, die daarbij ook nog lineair is in  $\sigma_{ij}$ . Het is dus inderdaad logisch om (C.3) het raakvlak te noemen.

Vervolgens wordt beschouwd hoe men een lijn loodrecht op het oppervlak kan men definiëren. Daartoe kan bedacht worden dat de algemene formule voor een vlak door het punt  $\sigma_{ij}^1$  is

$$A_{ij} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1) = 0, \quad (\text{C.6})$$

waarin de getallen  $A_{ij}$  gegeven constanten zijn, die met zijn allen de richting van dat vlak bepalen. Een rechte lijn in dit vlak, door het punt  $\sigma_{ij}^1$ , kan worden geschreven als

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1 = a(\sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1), \quad (\text{C.7})$$

waarin  $a$  een lopende parameter is, en waarin  $\sigma_{ij}^2$  een ander punt van het vlak (C.6) is, dat wil zeggen dat er geldt

$$A_{ij}(\sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Een willekeurige rechte lijn door het punt  $\sigma_{ij}^1$ , al dan niet in het beschouwde vlak, kan worden beschreven door de formule

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1 = a b_{ij}, \quad (\text{C.9})$$

waarin  $b_{ij}$  constanten zijn, en  $a$  een lopende parameter.

In het algemeen zegt men van twee rechte lijnen

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a = a c_{ij}, \quad (\text{C.10})$$

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^b = b d_{ij}, \quad (\text{C.11})$$

dat ze loodrecht op elkaar staan als

$$c_{ij} d_{ij} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Dit is in overeenstemming met de gebruikelijke definitie van orthogonaliteit, namelijk dat het inwendig product nul moet zijn.

Schrijft men (C.7) nu als

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1 = a c_{ij} = a(\sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1), \quad (\text{C.13})$$

dan volgt dat de lijn

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = b A_{ij}, \quad (\text{C.14})$$

loodrecht staat op elke lijn van de verzameling (C.13) omdat  $A_{ij} c_{ij}$  altijd nul is, zoals immers volgt uit (C.8). De conclusie is nu dat de lijn (C.14) loodrecht staat op het vlak (C.6). Het punt  $\sigma_{ij}^0$  hoeft niet op het vloeiooppervlak te liggen, maar het mag wel, en het kam zelfs samenvallen met het punt  $\sigma_{ij}^1$ . De lijn

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1 = b A_{ij}, \quad (\text{C.15})$$

gaat door het punt  $\sigma_{ij}^1$ , en staat loodrecht op het vlak (C.6).

Past men dit nu toe op het raakvlak aan het vloeiooppervlak, zoals gedefiniëerd door vergelijking (C.3), dan volgt dat een lijn gedefiniëerd door

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1 = b \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_1, \quad (\text{C.16})$$

loodrecht staat op dat raakvlak, en dus loodrecht op het vloeiooppervlak, in het punt  $\sigma_{ij}^1$ .

Bij wijze van voorbeeld wordt gesteld dat het vloeiooppervlak, zoals getekend in figuur C.1, een ellips is, met assen  $2a$  en  $a$ ,

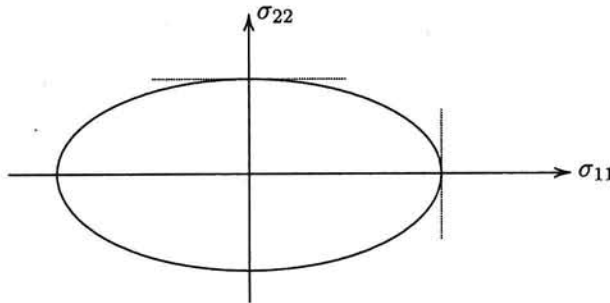
$$f = \frac{\sigma_{11}^2}{4a^2} + \frac{\sigma_{11}^2}{a^2} = 0. \quad (\text{C.17})$$

In dit geval wordt de vergelijking van het raakvlak (in dit tweedimensionale geval is het eigenlijk een raaklijn), overeenkomstig vergelijking (C.3),

$$\sigma_{11}^1(\sigma_{11} - \sigma_{11}^1) + 4\sigma_{22}^1(\sigma_{22} - \sigma_{22}^1) = 0, \quad (\text{C.18})$$

waarbij het superscript <sup>1</sup> aangeeft dat een punt op het vloeiooppervlak bedoeld wordt.

In het meest rechtse punt van het vloeiooppervlak is  $\sigma_{11}^1 = 2a$  en  $\sigma_{22}^1 = 0$ . Vergelijking (C.18) geeft dan voor de raaklijn:  $\sigma_{11} = 2a$ . In het bovenste punt van het vloeiooppervlak is  $\sigma_{11}^1 = 0$  en  $\sigma_{22}^1 = a$ . Dan geeft vergelijking (C.18) voor de raaklijn:  $\sigma_{22} = a$ . Deze twee raaklijnen zijn in stippellijnen getekend in figuur C.2). Inderdaad raken de twee gevonden



Figuur C.2. Voorbeelden van raaklijnen.

lijnen aan het vloeiooppervlak.

### C.3 Convex vloeiooppervlak

Na dit intermezzo over enige geometrische begrippen wordt nu teruggekeerd naar de mechanica. Zoals reeds gesteld wordt het al dan niet optreden van plastische vervormingen bepaald door de ligging van het spanningspunt  $\sigma_{ij}$  ten opzichte van het vloeiooppervlak,  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , in een 9-dimensionale ruimte. Er wordt nu aangenomen dat het vloeiooppervlak convex is. Als criterium daarvoor kan men stellen dat

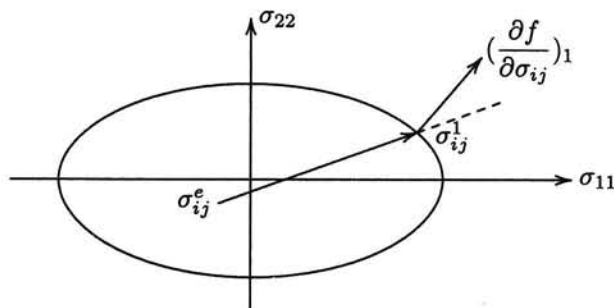
$$(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^e) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_1 > 0, \quad (\text{C.19})$$

waarin  $\sigma_{ij}^1$  een punt van het vloeiooppervlak is, en  $\sigma_{ij}^e$  een willekeurig punt daarbinnen. Dit betekent dat  $f(\sigma_{ij}^1) = 0$  en  $f(\sigma_{ij}^e) < 0$ . Vergelijking (C.19) stelt dat het inwendig product van de vector van  $\sigma_{ij}^e$  naar  $\sigma_{ij}^1$ , en de vector  $(\partial f / \partial \sigma_{ij})_1$ , die loodrecht op het vloeiooppervlak staat, positief is. Dit betekent dat de hoek tussen die vectoren kleiner is dan  $\pi/2$ , en dat correspondeert met de stelling dat het vloeiooppervlak convex is, zie figuur C.3. Alleen als het vloeiooppervlak concave gedeelten heeft is het mogelijk dat een vector van een punt binnen het vloeiooppervlak naar een punt op dat vlak zelf een hoek met de uitwendig gerichte normaal op het vloeiooppervlak maakt die groter is dan  $\pi/2$ . Voor de latere bewijsvoering willen we die mogelijkheid uitsluiten.

### C.4 Plastische vervormingen

Er wordt nu gesteld dat de plastische vervormingen worden beschreven met behulp van een veld van *vervormingssnelheden*  $\dot{\epsilon}_{ij}$ . Er geldt dan

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 & : \dot{\epsilon}_{ij} = 0, \\ f(\sigma_{ij}) = 0 & : \dot{\epsilon}_{ij} \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$



Figuur C.3. Convex vloeiooppervlak.

Dit betekent dat plastische vervormingen optreden als immer doorgaande vervormingen, met een zekere vervormingssnelheid. Als de tijd voortschrijdt worden de vervormingen op den duur onbegrensd groot.

De plastische vervormingssnelheden  $\dot{\epsilon}_{ij}$  kan men ook uitzetten in een 9-dimensionale ruimte, en men kan dat zo doen dat de assen samenvallen met die van de spanningsruimte. De vectoren  $\sigma_{ij}$  en  $\dot{\epsilon}_{ij}$  kunnen dan in dezelfde ruimte worden getekend.

### C.5 Plastische potentiaal

Er wordt nu verder gesteld dat men de plastische vervormingen kan afleiden van een functie  $g$ , de *plastische potentiaal*, die ook alleen van de spanningen afhangt, dat wil zeggen  $g = g(\sigma_{ij})$ , zodanig dat het verband tussen de plastische potentiaal en de plastische vervormingssnelheden kan worden geschreven als

$$f(\sigma_{ij}) < 0 \quad : \quad \dot{\epsilon}_{ij} = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad : \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (\text{C.22})$$

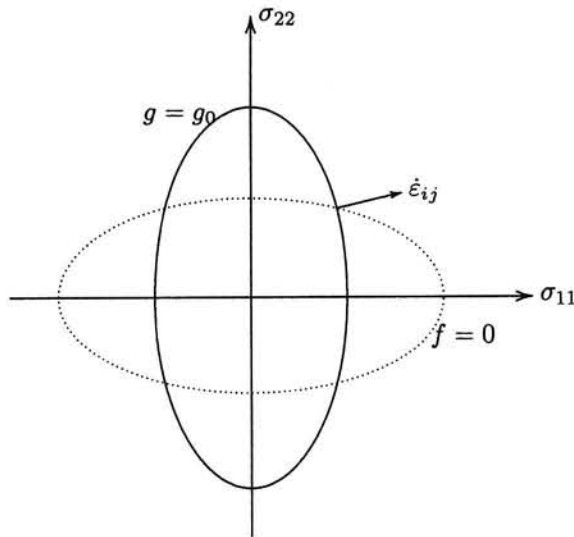
Hierin is  $\lambda$  een nog onbepaalde constante. De essentiële aanname hierbij is dat er zo'n functie  $g(\sigma_{ij})$ , waarvan men de vervormingssnelheden met (C.22) kan afleiden, bestaat.

Op grond van de beschouwingen hierboven zal het duidelijk zijn dat de vervormingssnelheid  $\dot{\epsilon}_{ij}$  in de 9-dimensionale ruimte loodrecht staat op het vlak van de plastische potentiaal  $g$ , zie figuur C.4. In deze figuur is de vloeivoorwaarde gestippeld getekend. De plastische potentiaal door een bepaald punt van het vloeiooppervlak is vol getekend. De vector van de vervormingssnelheden staat, per definitie, loodrecht op dat oppervlak. Door elk punt van het vloeiooppervlak kan men een vlak tekenen waarvoor  $g$  constant is, met steeds andere waarden van de constante  $g_i$ . Hoe die vlakken van de plastische potentiaal er precies uit zien is op dit moment nog onbepaald. Misschien zijn ze convex (of stervormig), misschien ook niet.

### C.6 Drucker's postulaat

Door verschillende onderzoekers, met name Prager en Drucker, is gevonden dat voor vele metalen de plastische potentiaal  $g$  met goede benadering gelijk gesteld kan worden aan de vloeifunctie  $f$ . Dat wordt het postulaat van Drucker genoemd,

$$\text{Drucker} \quad : \quad f = g. \quad (\text{C.23})$$



Figuur C.4. Plastische potentiaal.

Er is wel gedacht dat er een theoretische grondslag zou bestaan voor het identiek zijn van de functies  $f$  en  $g$ , bijvoorbeeld op grond van een of ander thermodynamisch principe, maar later is men gaan beseffen dat er geen fysische noodzaak voor is, anders dan dat het voor sommige materialen volgt uit proeven. En het komt natuurlijk wel makkelijk uit: het aantal variabelen in de theorie wordt met één verminderd. Er zijn echter ook materialen waarvoor het postulaat van Drucker niet geldt. Men kan bewijzen dat voor grond, een materiaal waarvan het bezwijken meestal wordt gekarakteriseerd door een cohesie  $c$  en een wrijvingshoek  $\phi$ , Drucker's postulaat alleen geldig is als  $\phi = 0$ , en niet geldig is als  $\phi > 0$ . In de plasticiteitstheorie heeft het postulaat van Drucker zijn betekenis en zijn belang juist verloren toen men zich ging realiseren dat er materialen bestaan met inwendige wrijving, zoals zand, waarvoor het onmogelijk geldig kan zijn.

In het vervolg van dit hoofdstuk wordt voorlopig toch uitgegaan van de geldigheid van het postulaat van Drucker, waardoor  $f = g$ , omdat voor materialen waarvoor dat geldt de theorie nu eenmaal verder is ontwikkeld. Voorbeelden van zulke materialen zonder inwendige wrijving zijn metalen, en klei onder snelle belasting (zonder drainage). Wrijvingsmaterialen worden voorlopig uitgesloten.

Uitgaande van de gelijkheid van de plastische potentiaal  $g$  en de vloeifunctie  $f$  wordt vergelijking (C.22)

$$f(\sigma_{ij}) < 0 \quad : \quad \dot{\epsilon}_{ij} = 0, \quad (\text{C.24})$$

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad : \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (\text{C.25})$$

Er geldt nu dat de vector van de plastische vervormingen loodrecht staat op het vloeiooppervlak.

In de volgende paragrafen zullen, op basis van alle gestelde aannames, de grenstheorema's worden afgeleid. Daartoe is eerst nog een formulering van het principe van virtuele arbeid nodig.



### C.7 Virtuele arbeid

Beschouwd wordt een lichaam dat in evenwicht verkeert. Als het lichaam een volume  $V$  inneemt dan zijn de evenwichtsvoorwaarden dat overal in  $V$  voldaan wordt aan de vergelijkingen

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0, \quad (\text{C.26})$$

en

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (\text{C.27})$$

Hierin is  $F_j$  een gegeven volumekracht, en geeft de komma partiële differentiatie aan naar de variabelen aangeduid door de er op volgende indices,

$$a_{,i} = \frac{\partial a}{\partial x_i}. \quad (\text{C.28})$$

Gesteld wordt dat de randvoorwaarden zijn dat op een deel van de rand ( $S_1$ ) de spanningen zijn voorgeschreven, en dat op het resterende deel van de rand ( $S_2$ ) de verplaatsingen zijn voorgeschreven. De randvoorwaarden zijn dan

$$\text{op } S_1 : \quad \sigma_{ij}n_i = t_j, \quad (\text{C.29})$$

$$\text{op } S_2 : \quad u_i = f_i. \quad (\text{C.30})$$

Hierin is  $t_j$  gegeven op  $S_1$  en  $f_i$  op  $S_2$ .

Een veld van spanningen dat voldoet aan (C.26), (C.27) en (C.29) noemt men *statisch toelaatbaar* of een *evenwichtssysteem*.

Een veld van verplaatsingen dat aan zekere regulariteitscondities voldoet (die inhouden dat het materiaal tenminste bij gedeelten zijn samenhang behoudt, en dat er geen gapingen of overlappingsen ontstaan, maar die de mogelijkheid van locale verschuivingen toelaten), en dat voldoet aan (C.30), noemt men een *kinematisch toelaatbaar* veld, of een *mechanisme*. Bij zo'n veld horen vervormingen  $\varepsilon_{ij}$  gedefiniëerd volgens

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (\text{C.31})$$

Beschouw nu een willekeurig statisch toelaatbaar spanningsveld en een willekeurig kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld, die overigens verder geen enkele relatie met elkaar behoeven te hebben. Er geldt algemeen dat

$$\int_V \sigma_{ij,i} u_j dV = \int_V [(\sigma_{ij} u_j)_{,i} - \sigma_{ij} u_{j,i}] dV.$$

Met behulp van het divergentietheorema van Gauss, en met behulp van (C.27) vindt men

$$\int_V \sigma_{ij,i} u_j dV = \int_S \sigma_{ij} u_j n_i dS - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) dV.$$

Hieruit vindt men, met (C.31), (C.29), (C.30) en (C.27),

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_1} t_i u_i dS + \int_{S_2} \sigma_{ij} n_i f_j dS + \int_V F_i u_i dV. \quad (\text{C.32})$$

Vergelijking (C.32) is geldig voor elke combinatie van een willekeurig statisch toelaatbaar spanningsveld met een willekeurig kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld. Deze twee

velden behoeven met elkaar geen enkele relatie te hebben. Er is met name geen gebruik gemaakt van enige relatie tussen spanningen en vervormingen.

Vergelijking (C.32) moet ook gelden voor de combinatie van het statisch toelaatbare spanningsveld  $\sigma_{ij}$  met het kinematisch toelaatbare verplaatsingsveld  $u_i + \dot{u}_i dt$ . Omdat dat laatste veld ook aan de randvoorwaarde (C.30) moet voldoen wil het kinematisch toelaatbaar zijn, moet er gelden dat

$$\text{op } S_2 : \quad \dot{u}_i = 0 \quad (\text{C.33})$$

De kleine verandering van het verplaatsingsveld  $\dot{u}_i dt$  noemt men een virtuele verplaatsing. Analoog aan (C.32) moet er ook gelden dat

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + dt \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \int_{S_1} t_i u_i dS + dt \int_{S_1} t_i \dot{u}_i dS + \\ &\int_{S_2} \sigma_{ij} n_i f_j dS + \int_V F_i u_i dV + dt \int_V F_i \dot{u}_i dV. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Trekt men hiervan (C.32) af, dan vindt men, na deling door  $dt$ ,

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_1} t_i \dot{u}_i dS + \int_V F_i \dot{u}_i dV. \quad (\text{C.35})$$

Dit noemt men het *theorema van de virtuele arbeid*. Nog steeds is er geen sprake van enig verband tussen het spanningsveld en het verplaatsingsveld.

De integraal in het linkerlid is de (virtuele) arbeid die de spanningen zouden verrichten bij de gegeven toename van de rekken. De termen in het rechterlid kan men zien als de (virtuele) arbeid verricht door de volumekrachten en de oppervlaktebelasting tijdens de virtuele verplaatsing. Die virtuele arbeid is dus blijkbaar gelijk aan de arbeid verricht door de spanningen op de toename van de rekken.

## C.8 Ondergrenstheorema

Het *ondergrenstheorema* stelt dat men een ondergrens voor de bezwijkbelasting kan vinden door evenwichtssystemen te beschouwen. Het kan bewezen worden uit de stelling van de virtuele arbeid op de volgende manier. Beschouw een lichaam bestaand uit een materiaal dat voldoet aan de relaties beschreven in de vorige paragrafen, dat wil zeggen een perfect plastisch materiaal met een convex vloeioppervlak, dat voldoet aan het postulaat van Drucker. Stel dat het lichaam wordt belast door een belasting  $t_i$  op het deel  $S_1$  van het oppervlak, en door een volumebelasting  $F_i$ . Er wordt aangenomen dat er bezwijken optreedt bij een zekere combinatie van belastingen, namelijk  $t_i^c$  en  $F_i^c$ . In het vervolg worden nu alleen nog belastingcombinaties beschouwd die evenredig zijn aan die bezwijkbelasting, dat wil zeggen

$$t_i = \alpha t_i^c \quad F_i = \alpha F_i^c, \quad (\text{C.36})$$

waarin  $\alpha$  een constante is.

Gesteld wordt dat de spanningen bij bezwijken  $\sigma_{ij}^c$  zijn, en dat de daarbij optredende snelheden  $\dot{u}_i^c$  zijn. Er geldt nu, op grond van het theorema van de virtuele arbeid,

$$\int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c dV = \int_{S_1} t_i^c \dot{u}_i^c dS + \int_V F_i^c \dot{u}_i^c dV. \quad (\text{C.37})$$

Stel nu dat men bij een belasting  $t_i^e = \alpha t_i^c$  en  $F_i^e = \alpha F_i^c$  een statisch toelaatbaar spanningsveld  $\sigma_{ij}^e$  gevonden heeft, dat nergens de vloeivoorwaarde overschrijdt. Dan geldt dat deze belasting altijd kleiner is dan de bezwijkbelasting, dat wil zeggen

$$\alpha < 1. \quad (\text{C.38})$$

Het bewijs hiervan gaat als volgt (uit het ongerijmde). Stel dat het gestelde niet waar is, ofwel stel dat  $\alpha > 1$ . Er geldt, volgens het theorema van de virtuele arbeid,

$$\int_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^c dV = \int_{S_1} t_i^e \dot{u}_i^c dS + \int_V F_i^e \dot{u}_i^c dV,$$

of, met  $t_i^e = \alpha t_i^c$  en  $F_i^e = \alpha F_i^c$ ,

$$\int_V \frac{1}{\alpha} \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^c dV = \int_{S_1} t_i^c \dot{u}_i^c dS + \int_V F_i^c \dot{u}_i^c dV. \quad (\text{C.39})$$

Uit (C.37) en (C.39) volgt dat

$$\int_V (\sigma_{ij}^c - \frac{1}{\alpha} \sigma_{ij}^e) \dot{\epsilon}_{ij}^c dV = 0. \quad (\text{C.40})$$

Op grond van het postulaat van Drucker, waarvan de geldigheid is aangenomen, geldt er voor de reksnelheden bij bezwijken,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_c. \quad (\text{C.41})$$

Substitutie hiervan in (C.40) geeft

$$\lambda \int_V (\sigma_{ij}^c - \frac{1}{\alpha} \sigma_{ij}^e) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_c dV = 0. \quad (\text{C.42})$$

Als  $\alpha > 1$ , en  $\sigma_{ij}^e$  ligt binnen het vloeiooppervlak (wat was aangenomen), dan ligt  $\sigma_{ij}^e/\alpha$  er zeker binnen. Op grond van (C.19), dat wil zeggen op grond van de convexiteit van het vloeiooppervlak, geldt dan

$$(\sigma_{ij}^c - \frac{1}{\alpha} \sigma_{ij}^e) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_c > 0. \quad (\text{C.43})$$

De integraal hiervan kan nooit nul zijn, zoals vergelijking (C.42) stelt. Dat betekent dat de aanname  $\alpha > 1$  fout moet zijn. En dus is  $\alpha < 1$ , hetgeen bewezen moest worden.

De hier bewezen stelling betekent dat een statisch toelaatbaar spanningsveld dat nergens de vloeivoorwaarde overschrijdt een ondergrens vormt voor de bezwijkbelasting. De werkelijke bezwijkbelasting is groter dan die welke men berekent bij een evenwichtssysteem dat nergens de vloeivoorwaarde overschrijdt. De berekening is aan de veilige kant.

## C.9 Bovengrenstheorema

Men kan de bezwijkbelasting ook benaderen van de bovenkant. Daarvoor geldt het *bovengrenstheorema*, dat als volgt kan worden afgeleid. Beschouwd wordt een lichaam bestaande uit een perfect plastisch materiaal waarvoor het postulaat van Drucker geldig is. De bezwijkbelasting wordt weer aangegeven met  $t_i^c$  (op  $S_1$ ) en  $F_i^c$  (in  $V$ ). De hierbij behorende spanningen zijn  $\sigma_{ij}^c$ . Deze spanningen liggen op het vloeiooppervlak, of voor een deel er binnen.

Stel nu dat men een kinematisch toelaatbaar veld van snelheden  $\dot{u}_i^k$  kent, met de bijbehorende reksnelheden  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ . Uitgaande van de vloeiregel

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

kan men overal waar  $\dot{\epsilon}_{ij}^k \neq 0$  de daarbij behorende spanning  $\sigma_{ij}^k$  berekenen. Omdat het vloeiooppervlak convex is volgt immers uit de verhouding van de reksnelheden, en de orthogonaliteit van de reksnelheden en het vloeiooppervlak, eenduidig welke spanningen daarbij horen. Men kan dan de volgende integraal berekenen,

$$D = \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV. \quad (\text{C.44})$$

Dit is de energie die gedissipeerd zou worden bij optreden van het aangenomen kinematische veld. Er kan nu een belasting evenredig aan de bezwijkbelasting worden berekend,  $t_i^k = \beta t_i^c$  en  $F_i^k = \beta F_i^c$ , zodanig dat

$$\int_{S_1} t_i^k \dot{u}_i^k dS + \int_V F_i^k \dot{u}_i^k dV = D = \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV. \quad (\text{C.45})$$

Hoewel deze formule van dezelfde vorm is als het theorema van de virtuele arbeid, is het geen gevolg daarvan. Het spanningsveld  $\sigma_{ij}^k$  is immers in het algemeen geen evenwichtsveld, en ook behoeft er niet voldaan te zijn aan de randvoorwaarden voor de spanningen. Formule (C.45) is niets meer dan een procedure om het veld van fictieve belastingen  $t_i^k$  en  $F_i^k$  te berekenen.

De stelling is nu dat de belasting  $t_i^k$  en  $F_i^k$  groter is dan de bezwijkbelasting, of, met andere woorden, dat

$$\beta > 1. \quad (\text{C.46})$$

Men kan dat als volgt bewijzen, weer door aan te tonen dat het omgekeerde tot een tegenspraak leidt. Stel dus dat de stelling niet waar is, dat wil zeggen, neem aan dat

$$\beta = t_i^k / t_i^c = F_i^k / F_i^c < 1.$$

Uit (C.45) volgt dat

$$\int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV = \beta \int_{S_1} t_i^c \dot{u}_i^c dS + \beta \int_V F_i^c \dot{u}_i^c dV. \quad (\text{C.47})$$

Op grond van het theorema van de virtuele arbeid moet er gelden dat

$$\beta \int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c dV = \beta \int_{S_1} t_i^c \dot{u}_i^c dS + \beta \int_V F_i^c \dot{u}_i^c dV. \quad (\text{C.48})$$

Uit (C.47) en (C.48) volgt dat

$$\int_V (\sigma_{ij}^k - \beta \sigma_{ij}^c) \dot{\epsilon}_{ij}^k dV = 0. \quad (\text{C.49})$$

Overal waar  $\dot{\epsilon}_{ij}^k \neq 0$ , en er dus bijdragen tot de integraal zijn, ligt  $\sigma_{ij}^k$  op het vloeiooppervlak. De spanning  $\beta \sigma_{ij}^c$  ligt er gegarandeerd binnen, omdat verondersteld is dat  $\beta < 1$ . Dan volgt uit (C.19) dat

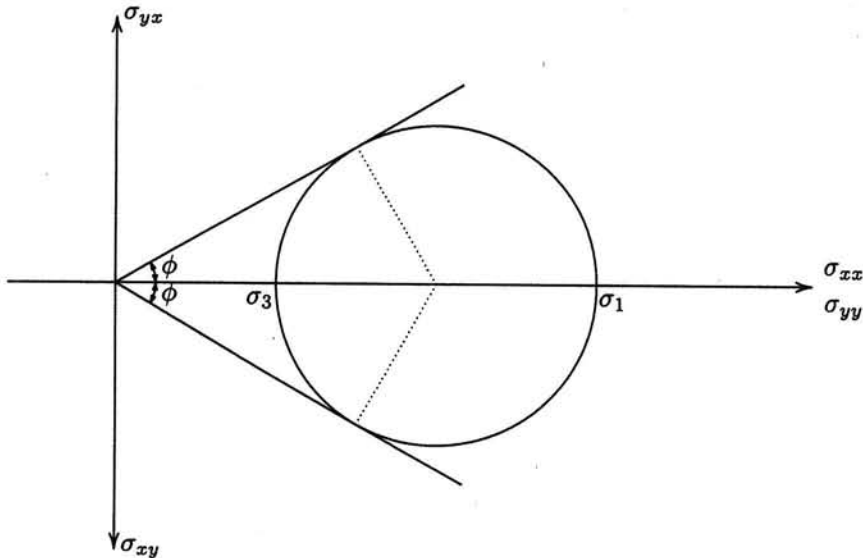
$$\dot{\epsilon}_{ij}^k \neq 0 : \quad (\sigma_{ij}^k - \beta \sigma_{ij}^c) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_k > 0.$$

De integraal hiervan kan nooit nul opleveren. Er is een tegenspraak bereikt, die betekent dat het uitgangspunt  $\beta < 1$  foutief moet zijn. Dat wil zeggen  $\beta > 1$ , hetgeen bewezen moest worden.

De hier bewezen stelling betekent dat een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld altijd leidt tot een bovengrens voor de bezwijkbelasting. De werkelijke bezwijkbelasting is kleiner dan die welke men berekent uit een kinematisch toelaatbaar veld (een *mechanisme*). De berekening is aan de onveilige kant.

### C.10 Wrijvingsmaterialen

In het geval van een wrijvingsmateriaal, zoals de meeste grondsoorten, en met name zand, is het criterium van Mohr-Coulomb een goede benadering van de vloeivoorwaarde. Voor het geval dat  $c = 0$  is dit getekend in figuur C.5. Er wordt, ter vereenvoudiging, afgezien



Figuur C.5. Mohr-Coulomb criterium.

van de invloed van de spanningen werkend op het  $x, y$ -vlak op de vloeivoorwaarde. Dat betekent dat alleen de spanningen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , en  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  van belang zijn voor het al dan niet optreden van plastische vervormingen. De spanningen zijn effectieve spanningen. De vloeivoorwaarde is nu dat de straal van de cirkel van Mohr gelijk is aan  $\sin \phi$  maal de afstand van het middelpunt van de cirkel tot de oorsprong. Dat kan men in formule-vorm als volgt uitdrukken

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi, \quad (\text{C.50})$$

of, als de hoofdspansingen worden uitgedrukt in de componenten in een (willekeurig) assenstelsel  $x, y$ ,

$$f = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{yx}^2 - \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \sin^2 \phi = 0. \quad (\text{C.51})$$

Het feit dat deze vloeivoorwaarde afhangt van de isotrope spanning impliceert dat Drucker's postulaat automatisch zal leiden tot een daarbij behorende vervorming, dat is een volumeverandering. Men kan dat formeel inzien door met behulp van Drucker's postulaat de plastische reksnelheden te berekenen. Men vindt hiervoor

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \right) = \lambda \left\{ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) - \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \sin^2 \phi \right\}, \quad (\text{C.52})$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} \right) = \lambda \left\{ \left( \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \right) - \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \sin^2 \phi \right\}, \quad (\text{C.53})$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \right) = \lambda \sigma_{xy}. \quad (\text{C.54})$$

Deze reksnelheden kan men eveneens grafisch voorstellen met behulp van een cirkel van Mohr. Geeft men de straal van die cirkel aan met  $\frac{1}{2}\dot{\gamma}$ , dan geldt er

$$\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy}}{2}\right)^2 + \dot{\epsilon}_{xy}^2. \quad (\text{C.55})$$

Men vindt hiervoor

$$\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^2 = \lambda^2 \left\{ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2 \right\}, \quad (\text{C.56})$$

en dus, omdat deze spanningen op het vloeiooppervlak liggen,

$$\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^2 = \lambda^2 \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 \sin^2 \phi. \quad (\text{C.57})$$

Hieruit volgt

$$\frac{\dot{\gamma}}{2} = \lambda \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \sin \phi. \quad (\text{C.58})$$

Anderzijds vindt men voor de volumereksnelheid

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} = -2\lambda \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \sin^2 \phi. \quad (\text{C.59})$$

Uit (C.58) en (C.59) volgt dat

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = -\dot{\gamma} \sin \phi. \quad (\text{C.60})$$

De plastische schuifvervorming  $\gamma$  gaat dus gepaard met een simultane volumerek  $\epsilon_{\text{vol}}$ , die  $\sin \phi$  maal zo groot is. Het minteken geeft aan dat dit een volumevergroting is. De hoekvervormingen bij bezwijken zouden gepaard moeten gaan met een steeds doorgaande volumevergroting. Proeven op zand wijzen uit dat zo'n doorgaande volumerek in het algemeen niet optreedt. Het is ook moeilijk voor te stellen dat het volume van een bezwijkend zandlichaam maar steeds groter zou worden. De conclusie kan niet anders zijn dan dat Drucker's postulaat voor materialen met inwendige wrijving niet geldig is. De plasticiteitstheorie voor dergelijke materialen is aanzienlijk gecompliceerder. Daarop wordt hier niet verder ingegaan.

## Antwoorden van Opgaven

- 1.1 Ja.
- 1.2 Buitentalud.
- 1.3 Klein.
- 1.4 Voorbelasting door ijs.
- 1.5 Aan de lage kant.
- 1.6 Aan de hoge kant.
- 3.1 De massa is 3000 kg. Het volumegewicht is  $15 \text{ kN/m}^3$ .
- 3.2  $n = 0.42$ ,  $e = 0.73$ .
- 3.3  $0.846 \text{ m}^3$ ,  $\gamma = 1923 \text{ kg/m}^3$ .
- 3.4 Zakking is 0.83 m.
- 3.5 Geen invloed.
- 3.6  $n = 0.42$ .
- 3.7  $\rho_k = 2636 \text{ kg/m}^3$ .
- 4.1 De totaalspanning verandert niet, de effectieve spanning neemt toe met 5 kPa.
- 4.2 In het ruimteschip heerst waarschijnlijk een (kunstmatige) luchtdruk. De effectieve spanning is dan gelijk aan die luchtdruk. Op de maan is er geen atmosferische druk, en is dus de effectieve spanning in het pak vacuüm-koffie nul.
- 4.3 Ja, mits het zwaar genoeg is om te zinken.
- 4.4 Nee, het gaat om de effectieve spanningen.
- 4.5 Nee.
- 5.1 Na de drooglegging, op 2 meter diepte :  $\sigma = 36 \text{ kPa}$ ,  $p = 0$ ,  $\sigma' = 36 \text{ kPa}$ .  
Op 10 meter diepte :  $\sigma = 180 \text{ kPa}$ ,  $p = 80 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 100 \text{ kPa}$ .
- 5.2  $\sigma = 125 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 125 \text{ kPa}$ .
- 5.3  $\sigma = 125 \text{ kPa}$ ,  $p = 50 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 75 \text{ kPa}$ .
- 5.4 Waterstand 10 m :  $\sigma = 125 \text{ kPa}$ ,  $p = 100 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 25 \text{ kPa}$ .  
Waterstand 150 m :  $\sigma' = 25 \text{ kPa}$ .
- 5.5  $\sigma' = 86.6 \text{ kPa}$ .
- 5.6  $\sigma' = 62 \text{ kPa}$ .
- 5.7  $\Delta\sigma' = 32 \text{ kPa}$ .
- 6.1  $1 \text{ m/d} = 1.16 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ . Normaal is bijvoorbeeld  $1 \text{ m/d}$ .
- 6.2  $1 \text{ gpd/sqft} = 0.5 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ . Normaal is bijvoorbeeld  $20 \text{ gpd/sqft}$ .
- 6.3  $k = 3.33 \text{ m/d}$ .
- 7.1  $k = 1.48 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ .
- 7.2  $Q = 0.0628 \text{ cm}^3/\text{s}$ .
- 7.3 Om lekkage langs de bovenkant van het monster te voorkomen.
- 7.4  $k = 0.5 \text{ m/d}$ .
- 8.1  $\sigma = 152 \text{ kPa}$ ,  $p = 100 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 52 \text{ kPa}$ .
- 8.2  $\sigma = 144 \text{ kPa}$ ,  $p = 90 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 54 \text{ kPa}$ .
- 8.3  $\sigma = 184 \text{ kPa}$ ,  $p = 90 \text{ kPa}$ ,  $\sigma' = 94 \text{ kPa}$ .
- 8.4 5 m.
- 9.1 0.10 kN.
- 9.2 0.12 kN.
- 9.3 6.25 m.
- 9.4 1.40 m.

- 10.1  $Q = 0.4 kHB$ .  
10.2  $i = 0.17$ .  
10.3 Ja, als de kleilaag aan de bovenstroomse kant plaatselijk zou ontbreken.  
11.1 Niet.  
11.2 0.50 m.  
11.3  $h \rightarrow -\infty$ .  
11.4 Niet voor eeuwig zonder toevoer.  
12.1 Kleiner.  
12.2 Meer dan 2 cm.  
12.3 Dilatantie. Ja.  
12.4 Tot het middel.  
13.1 3300 kPa.  
13.2 Zeer gering,  $\nu \approx 0.5$ .  
14.1  $C_{10} = 53$ .  
14.2 25 mm, 24 kPa.  
14.3 2.5 cm.  
14.4  $E = 50 \text{ à } 100 \text{ MPa}$ .  
14.5  $C_{10} = 4$ . Klopt net.  
16.1 379 s.  
16.2 Vier maal zo groot.  
16.3 650 d.  
16.4 0.04 mm.  
16.5 0.004.  
16.6 Ook stoppen als  $JJ > 100$ .  
17.1 Kleiner dan 20000 s.  
17.2 Tijdstap 4 maal zo klein.  
17.3 Rekening 8 maal zo groot.  
18.1  $c_v = 1.25 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ .  
18.2  $m_v = 1.15 \text{ m}^2/\text{MN}$ ,  $k = 1.44 \times 10^{-9} \text{ m/s}$ .  
19.1 Eerste kleilaag : 65 kPa, tweede kleilaag : 141 kPa, belasting : 34 kPa.  
19.2 27 cm, 33 cm, 39 cm.  
19.3 70 dagen.  
20.1  $\phi \geq 28^\circ$ .  
20.2 30 kPa.  
20.3  $\sigma_{xx} = 2 p$ ,  $\sigma_{xy} = p$ .  
20.4  $\sigma_{nn} = 1.500 p$ ,  $\sigma_{nt} = 0.867 p$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .  
21.1  $c = 0.12 \text{ kPa}$ ,  $\phi = 29.6^\circ$ .  
21.2  $F = 340 \text{ N}$ .  
21.3 Ja.  
22.1 18.25 kPa.  
22.2  $\phi = 10.3^\circ$ .  
23.1  $\phi = 29^\circ$ .  
23.2  $F = 153 \text{ N}$ .  
24.1  $c = 5 \text{ kPa}$ ,  $\phi = 30^\circ$ ,  $A \times B = 0.2$ .  
24.2  $p = 40 \text{ kPa}$ .  
24.3 Relatief dicht.  
24.4  $p = 40 \text{ kPa}$ .  
25.1  $s_u = 85 \text{ kPa}$ .



- 25.2  $s_u = 53$  kPa.  
25.3  $s_u = 69$  kPa.  
28.1  $\sigma_{zz} = p/(1 + z/a)^2$ .  
28.2  $u_z = pa/E$ .  
28.3  $c \approx E/a$ .  
29.1  $\sigma_{zz} = 1.23$  kPa.  
29.2  $\sigma_{zz} = 3.75$  kPa, in A :  $\sigma_{zz} = 0$ , op 8000 m diepte :  $\sigma_{zz} = 0$ .  
29.3 3.40 kPa, 1.72 kPa, 2.32 kPa.  
29.4 Onderschat.  
29.5 Ja, maar alleen voor een vaste waarde van  $\nu$ .  
30.1 Nee.  
30.2  $\sigma_{rr} = (2P/\pi r) \cos \theta$ ,  $\sigma_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ .  
31.2 0.213 m.  
31.3 0.070 m.  
33.1  $\phi = 30^\circ$  :  $K_a = 0.333$ ,  $K_p = 3.000$ , enz.  
33.2  $h = 2c/\gamma\sqrt{K_a}$ .  
33.3 Cambridge K-nul meter.  
33.4 96 kN.  
33.5 67 kN/m.  
33.6 315 kN/m.  
34.1 Nee.  
34.2  $K_p = 1/K_a$ .  
34.3 45.3 kN/m.  
34.4 11.4 % kleiner.  
34.5 408 kN/m.  
35.1 Klopt.  
35.2 Klopt.  
35.3 Helling van talud te steil om stabiel te zijn.  
35.4 57.6 kN/m.  
35.5 71.8 kN/m.  
35.6 192 kN.  
36.1 Klopt.  
36.2 Klopt.  
36.3 1.90 m.  
36.4 11.507 m.  
37.1 Klopt.  
37.2 12.67 m.  
37.3 10.20 m.  
37.4  $d/h = 0.650$ .  
38.1 8.02 m.  
38.2 8.22 m.  
38.4  $F = T \times a$ .  
43.1 Klopt.  
43.2 Ja.  
43.3 9700 MN.  
43.4 700 kN.  
44.1 Ja,  $\sigma_{xx}$  in het gebied linksonder.  
44.2  $h_c \geq 2c/\gamma$ .  
44.3 Ja.

44.4 20 m of meer.

46.1 Nee.

46.2 Ja.

46.3 Invoeren horizontale kracht in momentenevenwicht.

47.1 Nee,  $q_c$  is ook een totaalspanning.

47.2  $q_c \approx 8$  MPa.

48.1 Ja. Ja.

48.2 Nee. Ja.

48.3 3.56 toeren per seconde,  $v = 134$  m/s.

48.4  $v = 3$  m/s.

49.1 -632 kN.

49.2 Ja.

## Literatuur

- R.F. Craig, *Soil Mechanics*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1978.  
*Construeren met grond*, CUR-publicatie no. 162, 1992.
- G. Gudehus, *Bodenmechanik*, Enke, Stuttgart, 1981.
- M.E. Harr, *Foundations of Theoretical Soil Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- T.K. Huizinga, *Grondmechanica*, Waltman, Delft, 1969.
- A.S. Keverling Buisman, *Grondmechanica*, Waltman, Delft, 1941.
- T.W. Lambe and R.V. Whitman, *Soil Mechanics*, Wiley, New York, 1969.
- G.W.E. Milligan and G.T. Houlsby, *BASIC Soil Mechanics*, Butterworths, London, 1984.
- C.R. Scott, *Soil Mechanics and Foundations*, Applied Science Publishers, London, 1978.
- R.F. Scott, *Principles of Soil Mechanics*, Addison-Wesley, Reading MA, 1963.
- G.N. Smith, *Elements of Soil Mechanics*, Granada, London, 1978.
- U. Smolczyk (ed.), *Grundbau Taschenbuch*, Wilhelm Ernst, Berlin, 1980, 1982, 1986.
- I.N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- K. Terzaghi, *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York, 1940.
- K. Terzaghi and R.B. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, Wiley, New York, 1948.
- S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1951.
- C. van der Veen, E. Horvat en C.H. van Kooperen, *Grondmechanica met beginselen van de Funderingstechniek*, Waltman, Delft, 1981.
- A.F. van Weele, *Moderne Funderingstechnieken*, Waltman, Delft, 1981.

# Index

- actieve gronddruk, 172, 178  
anker, 206  
ankerkracht, 191  
Archimedes, 23, 49  
Atterberg, 11
- Begemann, 249  
behoud van massa, 42  
Bishop, 242  
blow count, 247  
Blum, 198  
boekenrijmechanisme, 120  
Boussinesq, 149, 269  
bovengrens, 209, 210, 215, 232, 284  
Brinch Hansen, 224  
bronbemaling, 45, 59
- Cam clay, 78  
CAMKO-meter, 175  
capillaire stijghoogte, 26  
Casagrande, 11  
celproef, 124  
centrifuge, 254  
cirkel van Mohr, 108, 109, 170, 264  
cirkelvormig gebied, 151  
cirkelvormige plaat, 151  
cirkelvormig gebied, 272  
classificatie, 8, 13  
cohesie, 108  
compatibiliteitsvergelijkingen, 148  
compressie, 63, 71  
compressiemodulus, 72, 130  
consistentiegrenzen, 11  
consolidatie, 81, 84  
consolidatiecoëfficiënt, 84  
consolidatiegraad, 89  
continuïteit, 42  
continuboring, 249  
contractantie, 68  
conusweerstand, 245  
Coulomb, 107, 178  
CPT, 244  
cyclische belastingen, 69
- damwand, 190  
Darcy, 31, 34
- De Josselin de Jong, 120, 221, 231  
debiet, 56  
Den Haan, 105  
deviatorrek, 71  
deviatorspanning, 71  
dichtheid, 16  
diffusievergelijking, 84  
dilatantie, 5, 67, 131  
direct shear, 119  
distorsie, 63, 71  
doorlatendheid, 38  
doorlatendheidscoëfficiënt, 35  
doorlatendheidsproef, 38  
draagvermogen paal, 257  
drijfzand, 5, 44, 68  
Drucker, 280  
dwarscontractie, 72  
dwarscontractiecoëfficiënt, 167, 268
- effectieve spanning, 21  
elasticiteit, 145, 166, 267  
elasticiteitsmodulus, 72, 268  
elektrische conus, 245  
elementenmethode, 145  
evenwicht, 26  
evenwichtssysteem, 210, 282  
evenwichtsvergelijkingen, 146, 268
- falling head test, 40  
Fellenius, 241  
filtersnelheid, 34  
Flamant, 157, 275  
Fourier-transformatie, 273  
freatisch vlak, 25, 32  
fundering op staal, 224
- Gelaagde grond, 204  
glijdingsmodulus, 72  
glijvlakberekeningen, 240  
gradiënt, 36, 43  
grenstheorema's, 210, 221  
grenstoestand, 209  
grind, 8  
grondwaterbalans, 42  
grondwaterstand, 25
- halfruimte, 149, 157, 269

- herbelasten, 66  
 hoekvervorming, 70  
 hoofdrichting, 108, 263  
 hoofdspinning, 264  
 Hooke, 147, 268  
 horizontale gronddruk, 164, 183  
 hydrostatica, 31
- in situ onderzoek, 244  
 ingraving, 230  
 intrinsieke doorlatendheid, 34  
 isotrope spanning, 64, 71
- Jaky, 175
- Keverling Buisman, 104  
 kinematisch toelaatbaar, 210, 282  
 kleef, 245, 258  
 klei, 8  
 kleimineralen, 10  
 Kobe, 69  
 Koppejan, 105, 258  
 korrelgrootte, 8  
 korrelspanning, 21  
 korrelverdeling, 9  
 Kozeny, 39  
 kritiek verhang, 44  
 kritieke dichtheid, 69  
 kruip, 5, 103  
 kwarts, 10  
 kwel, 43
- laagdikte-effect, 91  
 Lamé constanten, 268  
 Laplace, 43, 270  
 lijnlast, 157, 274  
 liquefaction, 68  
 logaritmische samendrukkingswet, 76  
 lutum, 8
- mantelwrijving, 245  
 mechanisme, 210, 282  
 modelonderzoek, 251  
 Mohr, 108  
 Mohr-Coulomb, 111, 170  
 monsterneming, 248
- Navier, 269  
 negatieve kleef, 258  
 neutrale gronddruk, 175  
 Newmark, 153
- omhullende, 116  
 ondergrens, 209, 210, 212, 230, 283  
 onderwaterbeton, 50  
 oneindig talud, 234, 235  
 ongedraineerde proef, 134  
 ongedraineerde schuifsterkte, 135  
 ontlasten, 66  
 opdrijven, 49  
 overconsolidatie, 66, 113
- paalfundering, 257  
 Pascal, 20  
 passieve gronddruk, 172, 174, 180  
 Pastor, 231  
 peilbuis, 32  
 pijpleiding, 51  
 piping, 57  
 plasticiteit, 209, 276  
 plasticiteitsgrens, 12  
 plasticiteitsindex, 12  
 plastische potentiaal, 280  
 poolcoördinaten, 217  
 poriëngetal, 15  
 porositeit, 14  
 potentiaal, 54  
 Prandtl, 217, 218  
 puls boring, 248  
 puntlast, 149, 271
- Rankine, 170  
 rek, 70, 268  
 relatieve dichtheid, 15  
 richting van de belasting, 227  
 richtingencentrum, 110, 116, 265
- samendrukbaarheid, 82  
 samendrukbaarheid water, 82, 130  
 samendrukkingsconstante, 76  
 samendrukkingsindex, 78  
 samendrukkingsproef, 75  
 schaalmodel, 251  
 schuifproef, 119  
 schuifsterkte, 107  
 secundaire samendrukkingsindex, 104  
 seculair effect, 103  
 silt, 8  
 simple shear, 121  
 Skempton, 132  
 sondering, 244, 257  
 spanning, 268

- spanningsfunctie, 270  
spanningsleer, 262  
spanningspad, 140  
specifiek debiet, 33  
SPT, 247  
stabieliteit, 234  
statisch toelaatbaar, 210, 282  
Stevin, 20  
stijghoogte, 35  
Stokes, 10  
strokenfundering, 212, 224  
stroming in talud, 237, 238  
stromingsdruk, 36, 45  
stroömfunctie, 55
- talud, 230, 234  
terreinonderzoek, 244  
Terzaghi, 23, 76, 86  
totaalspanning, 21, 22  
transformatieformules, 262  
triaxiaalproef, 114, 142  
tunnel, 51
- uitrolgrens, 12  
uniformiteitscoefficient, 9
- valconus, 12  
veen, 8  
verhang, 43  
verplaatsing, 70, 267  
verticale spanningen, 25  
vervorming, 70, 267  
verweking, 68  
verzadigingsgraad, 15  
vierkantennet, 54  
vinproef, 247  
virtuele arbeid, 282  
viscositeit, 34  
vloeiigrens, 11  
vloeioppervlak, 276  
vloeistof, 166  
volumegewicht, 17  
volumerek, 64, 268  
volumestroomdichtheid, 33  
voorbelaasting, 67  
vormfactoren, 227
- watergehalte, 11, 17  
waterspanning, 19, 21, 127  
waterspanningsmeter, 128, 245
- wrijvingscoëfficiënt, 63  
wrijvingshoek, 108  
wrijvingsmateriaal, 221, 286
- zand, 8  
zettingsberekeningen, 161

**Andere uitgaven van Delft University Press op het gebied van de toegepaste mechanica en civiele techniek**

**Bouwfysica I (inleiding)**

vakgroep Bouwfysica

1997 / 128 p. / ISBN 90-407-1150-X / NLG 20,00

De bedoeling van dit boek is inzicht te verschaffen in de grondregels, die bij het ontwerpen van ruimteomsluitende constructies bepalend zijn voor het te verwachten leefklimaat en het daarbij kunnen hanteren van de elementaire basisbegrippen op het gebied van warmte, vocht, ventilatie, akoestiek en licht. Naast het gebruik als collegedictaat bij het bouwfysica-onderwijs aan de Technische Universiteit Delft is deze handleiding ook zeer geschikt voor gebruik op Technische Hogescholen.

**Introduction to bed, bank and shore protection**

**Engineering the interface of soil and water**  
ir. G.J. Schiereck

1999/ ca. 300 p. / ISBN 90-407-1683-8 / in voorber.

The interface of land and water has always played an important role in human activities. Settlements are often located at coasts, riverbanks or deltas. Harbours, waterways, dikes, dunes and beaches, structures for water-control and water-resources management etc. are examples of hydraulic engineering on a macro-scale. In this book, the interface is studied on a micro-scale. The occurring phenomena are important in all branches of hydraulic engineering.

In a natural situation the interface moves freely with the forces of erosion and sedimentation. Actually, nothing is wrong with erosion, until some interest is threatened. Erosion is somewhat like weed: as long as it is in nobodies way, no action is needed or even wanted. There should always be a balance between the efforts of protection against erosion and the damage that would occur otherwise.

Moreover, it should be realised that once a location is protected along a coast or riverbank that is eroded on a large scale, the protected part can induce extra erosion and in the end the whole coast or bank has to be protected. So, look before you leap, should be the motto.

In many cases however, a protection is necessary: bottom protection behind outlet structures or around objects, revetments in rivers and canals, dike protection, coastal defence works etc.

Contents: Introduction • Flow - Loads • Flow-Stability • Flow - Erosion • Porous Flow - General • Porous Flow - Filters • Waves - Loads • Waves - Erosion and stability • Ships • Protections • Construction and maintenance • Design • Appendix A: Materials • Appendix B: Environmental aspects • Appendix C: Cases.

**Mechanica van constructies**

**Elasto-statica van slanke structuren**

prof.ir. A.L. Bouma

1993 / 395 p. / ISBN 90-407-1278-6 / NLG 52,50

Als gevolg van steeds verdergaande eisen die aan constructies worden gesteld en het streven naar economie vindt een voortschrijdende ontwikkeling plaats die leidt tot nieuwe constructievormen en schaalvergroting. Dit alles wordt mogelijk gemaakt door het beschikbaar komen van nieuwe en steeds hoogwaardiger materialen.

Waar vroeger bij een rivierkruising een vakwerkbrug op pijlers werd ontworpen, later de rivier met een boog werd overspannen, ziet men thans de strakke lijn van ranke kokerliggers van staal of beton.

Bij hoge gebouwen is er een ontwikkeling van

massieve steenmassa's via ijle skeletten van staal of beton naar buis- of kokervormige torens. Vaak zijn hierin interessante structuren verborgen, waarmee combinaties van draagwerken worden verregen.

Daarnaast zijn er ontwikkelingen op geheel nieuwe gebieden, zoals de offshore-techniek, waar platforms worden gebouwd in diep water en waar het toenemend gebruik van kabels en tuien in het oog springt ('tension-structures').

De slanke elementen en daarvan afgeleide constructies die in dit boek worden behandeld, worden in lengterichting als continu beschouwd, zo nodig in gedeelten, wat bij het onderzoek naar het elasto-statisch gedrag bij belasting een analytische aanpak mogelijk maakt. Discrete systemen, die bestaan uit een groot aantal identieke subsystemen kunnen vaak met voldoende nauwkeurigheid als een continu systeem worden behandeld.

Het boek is dan ook in de eerste plaats bedoeld voor studenten, maar daarnaast ook voor ingenieurs/ontwerpers, die in hun (bouw)praktijk met mechanica problemen te maken hebben en die kennis willen nemen van een methodische analyse van het gedrag van sterk uiteenlopende constructies.

**Mechanica**

**Toepassingen in de bouw en waterbouw**

ir. F. Vink

1998 / 251 p. / ISBN 90-407-1704-4 / NLG 69,00

Dit boek over mechanica en constructieer is naast leerboek op mts-niveau vooral ook een oriëntatie- en naslagwerk. Het is geschikt voor het eerste semester van het hoger beroepsonderwijs in Bouwkunde, Architectuur, Civiele Techniek, Stedenbouwkunde en Tuin- en Landschapsinrichting.

In de eerste negentien hoofdstukken worden de theoretische grondslagen gelegd, terwijl in de elf volgende hoofdstukken de praktische toepassingen aan bod komen.

I De belangrijkste historische constructievormen

Architraafbouw • Boogbouw • Verdere ontwikkelingen

II Statica en sterkteleer

Kracht, spanning, massa, gewicht, soortelijk gewicht, wrijving • Momenten, momentenstelling • Evenwichtsvoorwaarden • Opleggingen •

Dwarskracht en dwarskrachtenlijn • Buigend moment en momentenlijn • Normalkrachten •

Sterkte en spanningen • Elasticiteit • Lineaire uitzetting • Buigend moment, buigspanning •

Weerstandsmoment • Traagheidsmoment •

Dwarskracht en schuifspanning • Knik •

Bouwfysica

III Constructieer, theorie en praktijk

Hout • Staal • Staal • Gewapend beton • Voorgespannen beton • Grond • Funderingen •

Vloeren, liggers • Wanden, kolommen, stabiliteit, muuropeningen • Daken • Constructieve

vormgeving • Opdrachten (algemene herhaling) •

Tabellen

**Mechanica**

**Uitwerkingen van de vraagstukken**

ir. F. Vink

1999 / 64 p. / ISBN 90-407-1826-1 / NLG 16,00

**Principles of river engineering**

**The non-tidal alluvial river**

P.Ph. Jansen (ed.)

1994 / XVI+509 p. (A4) / ISBN 90-407-1280-8 / NLG 80,00

This book is intended both for the practising river engineer who, with its help, will be able to tackle problems giving all aspects the correct weights - without overlooking any of these as-

pects - and for the post-graduate student.

The book is divided in five parts. The first part presents a general introduction to river engineering. The next three parts deal with the basic subjects of river hydraulics, river surveys and river models. The final part deals with their applications. It should be stressed that most benefit will be obtained by studying the book as a whole, not just turning a particular section. Extensive use has been made of research work published by experts in many countries.

**Stabiliteit voor ontwerpers**

prof.ir. D. Dicke

1995 / 207 p. / ISBN 90-407-1279-4 / NLG 31,00

Op een bouwwerk werken uitwendige krachten zoals zwaartekracht, wind, gronddruk, waterdruk. Maar ook opgelegde vervormingen door temperatuur, zettingen, krimp en kruip. De draagconstructie van het bouwwerk moet dit alles opvangen en ervoor zorgen dat het bouwwerk gedurende z'n levensduur voldoende veilig, stijf en stabiel is.

Het aantonen dat een constructie stabiel is, is met de invoering van de computer eenvoudiger geworden, want met een handbereik een exacte analyse maken van een constructie die gevoelig is voor instabiliteit is vaak een zeer tijdrovende, zo niet onmogelijke zaak. In het ontwerpproces, waar vaak snel beslissingen moeten worden genomen over de vormgeving van een constructie, is het belangrijk om ten eerste inzicht te hebben in de vraag of we te maken hebben met een reëel stabiliteitsprobleem, ten tweede om de mate van stabiliteit te kunnen vaststellen en ten derde tot een voldoende kwantitatieve benadering van vervormingen en inwendige krachten te komen om globale afmetingen van de constructie te kunnen vaststellen. Blijkt de mate van stabiliteit gering dan kan men de constructievorm wijzigen of de constructie stijver maken. Dit proces mag niet teveel tijd vergen maar moet wel betrouwbaar zijn. In dit boek wordt voor lijnvormige constructies een methodiek ontwikkeld die inzicht geeft in de problematiek en snel tot betrouwbare kwantitatieve informatie leidt. Als vormgeving en dimensionering zijn vastgelegd kan eventueel met de computer een meer exacte analyse worden uitgevoerd. Dat wordt niet in dit boek behandeld.

De indeling van dit boek in grote lijnen is als volgt: Randvoorwaarden van staven • Verend ingeklemde staven • Geschoorde staven • Rotatiestabiliteit • Imperfecties • Praktijkvoorbeelden.

**Toegepaste mechanica**

prof.dr.ir. A. Verruijt

D1 I 1993 / 204 p. / ISBN 90-407-1275-1 / NLG 34,00

D1 II / 1993 / 224 p. / ISBN 90-407-1276-X / NLG 34,00

Deze boeken zijn in eerste instantie bedoeld voor eerstejaars, respectievelijk tweedejaars studenten civiele techniek, als handleiding bij de colleges toegepaste mechanica. Ook voor studenten van andere studierichtingen van een Technische Universiteit of van een Technische Hogeschool kunnen deze boeken goed bruikbaar zijn.

Er is gestreefd naar een zo helder mogelijke formulering van de principes van de toegepaste mechanica, met veel aandacht voor een volledige maar toch zo eenvoudig mogelijke bewijsvoering. Terwille van een goede voorbereiding voor verder studie en toepassingen, bijvoorbeeld met numerieke methoden, is veel aandacht besteed aan een zorgvuldige definitie van de gebruikte grootheden, aan het maken van consequente tekenspraken, en aan een systematische opbouw van de leerstof.





## Grondmechanica

Bij grondmechanica komen vragen aan de orde als: hoeveel zakt een ophoging of een weglichaam, biedt een kerende constructie voldoende zekerheid, hoe groot is de belasting van de grond op een constructie (een tunnel of een sluiswand bijvoorbeeld) of hoe groot is de belasting die men op een paalfundering kan toelaten.

De grondmechanica heeft zich tot een apart vakgebied ontwikkeld door een aantal specifieke eigenschappen van de grond, zoals de niet-lineaire spannings-rek-relatie, veelal de aanwezigheid van grondwater, en de onbekendheid met reeds aanwezige beginspanningen die verband houden met de geologische geschiedenis.

Inhoud: 1. Inleiding • 2. Classificatie • 3. Korrels, water, lucht • 4. Spanningen in de grond • 5. Spanningen in een laag • 6. Darcy • 7. Doorlatendheid • 8. Grondwaterstroming • 9. Opdrijven • 10. Vierkantennet • 11. Bronbemaling • 12. Spanning-rek-relaties • 13. Tangent-moduli • 14. Eindimensionale samendrukking • 15. Consolidatie • 16. Analytische oplossing • 17. Numerieke oplossing • 18. Bepaling consolidatiecoëfficiënt • 19. Seculair effect • 20. Schuifsterkte • 21. Triaxiaalproef • 22. Schuifproef • 23. Celproef • 24. Waterspanningen • 25. Ongedraineerd gedrag van grond • 26. Spanningspaden • 27. Elastische berekeningen • 28. Boussinesq • 29. Newmark • 30. Flamant • 31. Zettingsberekeningen • 32. Horizontale gronddruk • 33. Rankine • 34. Coulomb • 35. Tabellen voor horizontale gronddruk • 36. Damwanden • 37. Blum • 38. Damwand in gelaagde grond • 39. Grenstoestanden • 40. Strokenfundering • 41. Prandtl • 42. Wrijvingsmaterialen en grenstheorema's • 43. Brinch Hansen • 44. Verticale ingraving in cohesief materiaal • 45. Stabiliteit van oneindig talud • 46. Glijvlakberekeningen • 47. Terreinonderzoek • 48. Modelonderzoek • 49. Paalfunderingen • Appendix A. Spanningsleer • Appendix B. Elasticiteitstheorie • Appendix C. Plasticiteitstheorie • Antwoorden van opgaven • Literatuur • Index

Uitgegeven in opdracht van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft door Delft University Press

ISBN 90-407-1857-1

