

3  
24

OOR DIE VERDIGTINGS- EN VERDUNNINGSVERSKYNSELS  
IN 'N GAS VEROORSAAK DEUR DIE STOOT VAN 'N SUIER  
MET 'N BAIE HOË SNELHEID.

15-16-48.

OVER DE VERDICHTINGS-  
EN VERDUNNINGSVERSCHIJNSELEN IN  
EEN GAS VEROORZAAKT DOOR DE  
STOOT VAN EEN ZUIGER MET ZEER  
HOGE SNELHEID

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR  
IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE  
TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT KRACHTENS  
ARTIKEL 2 VAN HET KONINKLIJK BESLUIT VAN  
16 SEPTEMBER 1927, STAATSBLED Nr 310, OP  
GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS DR IR A. J.  
KLIYVER, HOGLERAAR IN DE AFDELING DER  
SCHEIKUNDIGE TECHNOLOGIE, VOOR EEN COM-  
MISSIE UIT DE SENAAAT TE VERDEDIGEN OP  
WOENSDAG 20 OCTOBER 1948, DES NAMIDDAGS  
TE 2 UUR

DOOR

WILHELM PETRUS ROBBERTSE

GEBOREN TE RUSTENBURG, ZUID-AFRIKA



1948

N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ  
AMSTERDAM

1012 F44

Dit proefschrift is goedgekeurd door de promotoren:

*Prof. Dr J. M. BURGERS*

*Prof. Dr S. C. VAN VEEN*

*Aan my vroukje.*

Die verskyning van hierdie proefskrif was moontlik  
danksy die steun wat ek van die „Nederlandsch Zuid-  
Afrikaansche Vereeniging” te Amsterdam ontvang het.

## INHOUD.

	Bls.
INLEIDING . . . . .	1
HOOFSTUK I. <i>Afleiding van die differensiaalvergelyking wat die beweging van die gas beheers</i> . . . . .	5
§ 1. Die verdigtingsgolf . . . . .	5
§ 2. Die bewegingsvergelyking vir die stromingsgebied . . . . .	7
§ 3. Transformasie van die differensiaalvergelyking. Die rantvoorwaardes	12
HOOFSTUK II. <i>Oplossings van die partiële differensiaalvergelyking deur middel van kwosiente van eenvoudige funksies</i> . . . . .	19
§ 4. Oplossing van die tipe $(1 + gt)^m / (1 + hs)^n$ wat by 'n bepaalde verloop van $\varrho_0$ as funksie van $s$ eksak voldoen aan die differensiaalvergelyking met beide rantvoorwaardes . . . . .	19
§ 5. Poging om 'n oplossing van die tipe $(1 + gt)^m / (1 + hs)^n$ te vind as $\varrho_0$ konstant is ( $k = 5/3$ ) . . . . .	25
§ 6. Funksie van die tipe $(1 + gt)^m / q(s)$ wat aan die rantvoorwaardes almal eksak voldoen en 'n benaderde oplossing van die vergelyking (3.3b) self is, $\varrho_0$ konstant ( $k = 5/3$ ) . . . . .	27
§ 7. Oplossing in die vorm van $(1 + gt)^m / q(s)$ met 'n algemener uitdrukking vir $q$ vir die geval $\varrho_0$ konstant ( $k = 5/3$ ) . . . . .	29
§ 8. Funksie van die tipe $(1 + g_1 t) / q(s)$ wat aan albei die rantvoorwaardes eksak voldoen en van die vergelyking (3.3b) self 'n benaderde oplossing is . . . . .	33
§ 9. Oplossing van die vorm $(1 + g_1 t) / q(s)$ wat aan die vergelyking (3.3b) en aan die eerste, maar nie aan die tweede rantvoorwaarde eksak voldoen nie . . . . .	36
HOOFSTUK III. <i>Oplossings van die partiële differensiaalvergelyking in die vorm van funksies van die tipe <math>u(t)^3 / v(s)^3</math></i> . . . . .	40
§ 10. Funksie van die tipe $u(t)^3 / v(s)^3$ wat aan die differensiaalvergelyking en die eerste rantvoorwaarde eksak voldoen maar nie aan die tweede nie	40
§ 11. Die afwyking van die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf . . . . .	46
§ 12. Die geval $\lambda = 5$ . . . . .	49
§ 13. Die geval $\lambda = 1$ . . . . .	53
§ 14. Die geval $\lambda = \sqrt{7/8}$ . . . . .	56
§ 15. Vergelykende tabel en diagram . . . . .	58
§ 16. Vergelyking van oplossings met $\lambda = 0$ , $\lambda = \sqrt{7/8}$ , $\lambda = 1$ , $\lambda = 5$ en $\lambda = \infty$ met die reeksontwikkeling van prof. J. M. BURGERS op bls. 270 van „Proc. Royal Neth. Acad. of Sciences”, Vol. 50, 1947	60

	Bls.
§ 17. Funksie van die tipe $u(t)^3/v(s)^3$ wat aan al die rantvoorwaardes eksak voldoen, maar van die vergelyking self slegs 'n benaderde oplossing is . . . . .	64
§ 18. Reeksontwikkeling vir $\Phi$ aan die hand van § 17 vir die gevalle $\lambda = 0$ , $\lambda = \sqrt{7/8}$ , $\lambda = 1$ en $\lambda = \infty$ . . . . .	68
 HOOFSTUK IV. <i>Die snelheid van die suier</i> . . . . .	
§ 19. Die eindsnelheid van die suier as $t$ onbegrensd toeneem . . . .	71
§ 20. Die verloop van die snelheid van die suier aan die hand van die verkreeë formules vir $\lambda = 0$ , $\lambda = 1$ en $\lambda = \infty$ . . . . .	78
 HOOFSTUK V. <i>Poging om 'n verbetering van die polinomiale oplossing van § 7 te kry</i> . . . . .	
§ 21. Transformasie van die differensiaalvergelyking. De rantvoorwaardes	85
 SUMMARY . . . . .	
SAMENVATTING . . . . .	99

## INLEIDING.

Hierdie proefskrif het tot onderwerp die samestelling van 'n benaderingsoplossing vir 'n nie-lineêre partiële differensiaalvergelyking met 'n gekompliseerde rantvoorwaarde, wat hom voorgedoen het by 'n probleem betreffende die beweging van 'n gas met 'n baie hoë snelheid.

Die bedoelde probleem is opgewerp deur prof. dr. J. M. BURGERS in 'n artikel oor aerodinamiese probleme wat verband hou met die beweging van interstellêre gaswolke, in „Proceedings Royal Netherlands Academy of Sciences, Amsterdam,” Vol. 50, Nos. 3, 4 en 5 (respektiewelik bladsye 262, 332 en 442), 1947.

In hierdie artikel bespreek prof. BURGERS die beweging van 'n dun wolk (skil) gas wat met 'n baie hoë snelheid in 'n rigting loodreg op sy vlak beweeg en dan stoot teen 'n uitgebreide gasmassa van veel laer digtheid en met 'n vlakke-deursnee loodreg op die rigting van beweging.

Hierdie probleem spruit voort uit sekere astronomiese waarnemings wat ons hier nie aangaan nie.

Prof. BURGERS herlei die probleem dan tot die volgende meganiese analoog:

'n Silindriese buis wat in een rigting, sê na regs, onbepaald uitstrek, is gevul met 'n homogene gas wat vanaf die oorsprong na regs, eweëns onbepaald uitstrek en oral in rus verkeer. Links van die oorsprong bevind 'n suier hom in die buis wat presies daarin pas. Hierdie suier word deur 'n stoot met 'n baie hoë snelheid na regs in beweging gebring. Dit tref die gas by die oorsprong. Die stelsel word dan aan homself oorgelaat en daar word gevra om in besonder die beweging van die suier te ondersoek en te bereken.

Die bewegings vind uitsluitend in één rigting plaas, waarvoor ons die  $x$ -as sal kies. Voorts is die bewegings 'n funksie van die tyd.

Die eenaardige, maar tewens ook merkwaardige van hierdie vraagstuk is geleë in die omstandigheid dat sodra die suier teen die gas stoot 'n verdigtingsgolf in die gas ontstaan, wat hom met 'n baie hoë snelheid na regs in die gas voortplant. Tegelykertyd word die beweging van die suier gerem deur die hoë gasdruk wat ontstaan as gevolg van die verdigting wat optree in die gebied wat deur die golf deurloop is. Die vertraging van die suier het nou tot gevolg dat verdunningsgolwe ontstaan wat eweëns vanaf die suier uitgaan. Ons kan bewys dat hierdie verdunningsgolwe die in-die-eerste-oomblik-verskyne verdigtingsgolf inhaal, waardeur die verdigtingsgolf in sterkte afneem. Daardeur neem die voortplantingsnelheid van hierdie golf af, terwyl tewens nuwe golwe ontstaan deur terugkaatsing van die verdunningsgolwe wat van die suier uitgaan aan die verdigtingsgolf.



'n Voorbeeld van die verskyning van enkele teruggekaatste golwe is gegee deur prof. BURGERS in „Over de eendimensionale voortplanting van drukstoringen in een ideaal gas,” Verslagen Ned. Akad. van Wet., Vol. 52, Nos. 8 en 9 (blss. 479 en 562), 1943. Ons kry dietengevolge in die gebied tussen die suier en die verdigtingsgolf 'n ingewikkelde spel van mekaar-deurkruisende golwe, waarby die omstandigheid dat die bewegingsvergelykings vir die gas nie lineêr is nie, 'n behandeling besonder ingewikkeld maak.

Aangesien die verdunningsgolwe in die gebied tussen die suier en die verdigtingsgolf kontinu op mekaar volg, kan ons by die behandeling van die probleem uitgaan van die differensiaalvergelykings vir die beweging van die gas. Hierdie vergelykings word meesal gegee in die vorm van EULER:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

waarin  $u$  = snelheid van 'n volume-element,  $\rho$  = digtheid (beide beskou as funksies van die tyd  $t$  en van die posisie  $x$  waar die beskoude volume-element hom op tydstip  $t$  bevind) en  $p$  die druk voorstel. Die tweede vergelyking is die kontinuïteitsvergeliking. By hierdie vergelykings behoort nog 'n betrekking tussen die digtheid en die druk. By kontinu-verlopende prosesse, waarby inwendige wrywing en warmtegeleiding verwaarloos kan word, is die toestandsverandering van elke volume-element adiabaties en isentropies. Vir elke volume-element geld dan die betrekking van POISSON:

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k \quad (B)$$

waar  $p_0$  en  $\rho_0$  betrekking het op 'n aanvangstoestand van die element en  $k$  die verhouding is van die soortelike warmtes by konstante druk en by konstante volume. Die toepassing van vergelykings (A) tesame met die vergelyking van POISSON is veral dan eenvoudig wanneer ons kan aanneem dat die aanvangstoestand vir alle volume-elemente dieselfde is, waardeur dan  $p_0$  en  $\rho_0$  konstante word vir die hele veld. Dit is egter juis nie die geval met die probleem wat tans onder behandeling is nie. Sodra naamlik die verdigtingsgolf 'n volume-element passeer, vind in die element 'n nie-isentropiese toestandsverandering plaas, ten gevolge waarvan ons in die vergelykings vir die gebied agter die verdigtingsgolf as „aanvangstoestand” moet neem, die toestand wat optree juis nadat die verdigtingsgolf oor die beskoude element heengegaan het. Aangesien egter die sterkte van die verdigtingsgolf, soos reeds opgemerk, afneem, is hierdie „aanvangstoestand” vir elke volume-element anders.

Dié omstandigheid het tot gevolg dat ons by die beskrywing van die beweging, die geskiedenis van elke afsonderlike volume-element moet kan volg. Soos bekend is hiertoe die vergelykings van EULER minder geskik;

dit is beter om gebruik te maak van die vorm wat LAGRANGE aan die vergelykings gegee het. Op hierdie vorm kom ons in hoofstuk I, wat gewy word aan die herleiding van die bewegingsvergelyking vir die stromingsgebied, terug.

Prof. BURGERS het die bewegingsvergelyking, nadat hy hierop enige transformasies toegepas het, in die vorm van 'n vergelyking vir 'n funksie  $\Phi$ , wat 'n maat is vir die spesifieke uitsetting van 'n volume-element, gebring. Hy het vir hierdie vergelyking met die daarby-behorende gekompliseerde rantvoorwaardes 'n oplossing gekonstrueer deur middel van 'n reeksontwikkeling, wat egter slegs vir die eerste stadia van die beweging bruikbaar is.

In hierdie proefskrif is nou getrag om benaderingsoplossings van die bedoelde differensiaalvergelyking vir  $\Phi$  te vind, wat ons in staat stel om die beweging van die suier oor 'n groot tydsverloop te volg. Hierby is gebruik gemaak van aanwysings van prof. dr. S. C. VAN VEEN wat 'n middel aan die hand gedoen het om die differensiaalvergelyking op te los hetsy deur middel van 'n kwosiënt van eenvoudige polinome, hetsy deur 'n kwosiënt van 'n iets meer gekompliseerde algebraïese funksie en 'n hipergeometriese funksie. Hierdie oplossings voldoen eksak aan die differensiaalvergelyking, dog slegs by benadering aan die gekompliseerde rantvoorwaarde. Ondersoek is van welke aard die oorblywende afwyking is en hoedat dit so gering moontlik gemaak kan word.

Die geval van die oplossing deur middel van 'n kwosiënt van eenvoudige polinome is in hoofdstuk II ondersoek. Die toepassing van die hipergeometriese funksies wat 'n ekstra parameter in die oplossing bring, gee die moontlikheid om 'n beter benadering te kry as wat met die oplossing deur middel van 'n tweeterm moontlik is. Aan die uitwerk van hierdie oplossing, in besonder die numerieke berekening, en die bepaling van die baan van die suier, is in hierdie proefskrif veel aandag bestee; hieraan is hoofstukke III en IV gewy.

Hierbenewens het ons (ook in hoofstukke II en III) getrag om oplossings te konstrueer wat aan albei die rantvoorwaardes eksak voldoen en van die differensiaalvergelyking self 'n benaderde oplossing is. Hierdeur kan ons die verloop van die beweging van die suier langs 'n ander weg benader.

Ten slotte is in hoofstuk V aangegee op welke wyse getrag kan word om 'n korreksie op die polinomiale oplossing van § 7 te konstrueer, deur hieraan 'n onbekende funksie toe te voeg, wat as baie klein beskou word, sodat ons ons kan bepaal by terme lineër in hierdie funksie. 'n Numerieke uitwerking van hierdie vraagstuk kon nog nie tot stand gebring word nie; dit blyk dat ten gevolge van die eienaardige karakter van die lastige rantvoorwaardes tal van moeilike detailprobleme hulle voordoën. Die gegewe uiteensettings mag egter 'n beeld verskaf van die wyse waarop klein afwykings in die gedrag van die verdigtingsgolf hulle elders in die veld sal laat geld.

In die eerste opset van die vergelykings sal die probleem deur ons iets

algemener gestel word as wat deur prof. BURGERS gedoen is: ons sal nie aanneem dat die oorspronklike digtheid van die gas in die buis konstant is nie. Die gas sal dan nie in rus kan verkeer nie, dog ons neem aan dat die snelhede baie klein bly in vergelyking met dié van die suier en van die snelhede wat deur die stoot daarvan teen die gas veroorsaak word. Dit sal blyk dat vir 'n besondere geval van digtheidsverloop 'n eenvoudige eksakte oplossing van die vraagstuk te vinde is wat tewens eksak aan al die rantvoorwaardes voldoen.

## HOOFSTUK I.

### Afleiding van die differensiaalvergelyking wat die beweging van die gas beheers.

#### § 1. Die verdigtingsgolf.

Voordat ons met die eintlike afleiding van die te-bestudere differensiaalvergelyking begin, laat ons hier eers enkele beskouings volg oor die aard van 'n verdigtingsgolf, aangesien dit in die voor-ons-liggende probleem 'n prinsipiële rol speel. Ons bepaal ons oral tot beweging in één afmeting.

#### a. Aard van 'n verdigtingsgolf:

By die algemene eendimensionale stromingsprobleem is dit ons taak om die snelheid  $u$ , die druk  $p$ , en die digtheid  $\rho$  in 'n willekeurige punt te bepaal. In die geval van gasse is die temperatuur  $T$  'n vierde onbekende. D.w.s.  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  en  $T$  moet afsonderlik uitgedruk word in terme van twee veranderlikes, 'n koördinaat, sê  $x$ , en die tyd  $t$ . In die geval van ideale gasse (waarby ons ons in ons beskouing uitsluitlik sal bepaal) het ons vir hierdie doel vier vergelykings tot ons beskikking, nl. die energie-, kontinuiteits-, momentum-, en toestandsvergelykings.

In die behandeling van stromings met baie hoë snelhede kan die wrywing in die algemeen verwaarloos word, behalwe in sekere besondere gebiede, bv. in die bekende „grenslaag” teen die oppervlak van 'n liggaam wat in die stromende stof verkeer. Daar kom ook ander uitsonderings voor by saamdrukke gasse in die vorm van dun lae wat deur die stromende stof strek as 'n soort van inwendige grenslaag; d.w.s. as 'n laag wat twee gebiede van verskillende snelheid, druk en digtheid van mekaar skei. M.a.w. by deurgang deur so'n laag doen 'n sprong hom in die drie genoemde groothede voor. Ons kan dus spreek van 'n oorgangslaag. As die taatheid van die stromende stof baie klein word, dan nader die dikte van die oorgangslaag tot nul, en dit word 'n matematiese diskontinuiteitslaag. 'n Dergelike oorgangslaag kan ons aandui as 'n „druksprong”. Aangesien hierdie oorgangslae of drukspronge hulle in die algemeen deur die stromingsveld heen voorplant, is ook die benaming „verdigtingsgolf” gebruiklik.

By die behandeling van probleme waarby dergelike diskontinuiteitslae voorkom, kan ons meesal volstaan met die bewegingsvergelykings toe te pas op die gebiede aan weerskante van die oorgangslaag waarin dan weer die wrywing verwaarloos kan word, terwyl ons vir die laag self sekere oorgangsvoorwaardes kan aflei wat die verband beskrywe tussen die stromingstoestande aan weerskante daarvan.

Soos reeds opgemerk is by kontinuu-verlopende stromingsprosesse waarby inwendige wrywing en warmtegeleiding verwaarloos kan word, die toe-

standsverandering van elke volume-element adiabaties en isentropies; vir elke volume-element geld die betrekking (B), d.i. die vergelyking van POISSON.

By stromings waarin egter diskontinuiteitslae of drukspronge optree moet rekening gehou word met die inwendige wrywing en warmtegeleiding in so'n laag. Die toestandsverandering is derhalwe nie isentropies nie. Dit bring mee dat as ons die toestande aan weerskante van so 'n diskontinuiteitslaag met mekaar vergelyk, die verband tussen die druk  $p$  en die digtheid  $\rho$ , nie meer beantwoord aan vergelyking (B) nie.

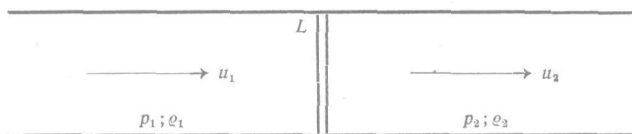


Fig. 1.

b. Betrekkings wat geld by 'n diskontinuiteitslaag of verdigtingsgolf:

Sê dat  $L$  'n stasionêre diskontinuiteitslaag is in 'n stof wat na regs stroom.

Ofskoon in die eintlike oorgangslaag inwendige wrywing en warmtegeleiding nie verwaarloos kan word nie, oefen die materie in die oorgangslaag geen krag na buite uit nie, nog staan dit warmte na buite af, of neem dit op; ewemin gaan materie verlore. Dit het tot gevolg dat ons op die gebiede aan weerskante van die diskontinuiteitslaag die momentum-, energie-, en diskontinuiteitsvergelykings kan toepas.

Die momentum-, energie-, en kontinuïteitsvergelykings word dan respektiewelik:

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (1.3)$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \quad (1.4)$$

Uit hierdie drie vergelykings volg maklik die betrekking

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}. \quad (1.5)$$

Hierdie verband tussen die snelheid, digtheid en druk verskil van dié wat geld vir 'n isentropiese stroming. In die laag  $L$  vind daar dus sekerlik omsetting van meganiese energie in warmte plaas, wat gepaard gaan met 'n toename in entropie.

Ons het ons hier bepaal by 'n stasionêre diskontinuiteitslaag. Dit was onnodig. Dit kom dikwels voor dat so'n laag (in die vervolg 'n *verdigtingsgolf* genoem) hom in 'n stromende stof voortplant. Hierdie geval word tot die vorige herlei deur 'n ander keuse van ons koördinatestelsel.

Voorts wil ons nog enige betrekkinge vir verdigtingsgolwe wat ons sal nodig kry, noem. Hierdie betrekkinge kan in tal van vorms gebring word. Ons noem dié soos herlei deur prof. BURGERS in „Over de eendimensionale voortplanting van drukstoringe in een ideaal gas”, Verslagen Ned. Akad. van Wet., Vol. 52, No. 8 (bls. 477), 1943.

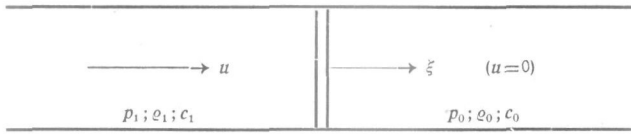


Fig. 2.

Laat 'n verdigtingsgolf hom met 'n snelheid  $\xi$  voortplant in 'n gas in rus, waarin die druk en digtheid in die ongestoorde toestand  $p_0$  en  $\rho_0$  respektiewelik, is en  $c_0$  die geluidssnelheid; sê dat die snelheid, druk en digtheid van die gas net agter die verdigtingsgolf  $u$ ,  $p_1$ , en  $\rho_1$  is. Dan:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \xi &= \beta u + \sqrt{c_0^2 + \beta^2 u^2} && \text{waar } \beta = \frac{1}{4}(k+1) \\ \text{(II)} \quad p_1 &= p_0 + \rho_0 \xi u \\ \text{(III)} \quad \rho_1 &= \rho_0 \xi / (\xi - u) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

As  $u$  veel groter is as  $c_1$ , sodanig dat  $c_0$  en  $p_0$  verwaarloosbaar klein is in vergelyking daarmee, dan word die formules:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \xi &= 2\beta u = \frac{1}{2}(k+1)u \\ \text{(II)} \quad \rho_1 &= \frac{2\beta}{2\beta-1} \rho_0 = \frac{k+1}{k-1} \rho_0 \\ \text{(III)} \quad p_1 &= 2\beta \rho_0 u^2 = \frac{1}{2}(k+1) \rho_0 u^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

As  $u$ , omgekeerd, verwaarloosbaar klein is in vergelyking met  $c_0$ , dan kry ons die geval van die voortplanting van 'n geluidsgolf.

## § 2. Die bewegingsvergelyking vir die stromingsgebied.

In die herleiding van die bewegingsvergelyking volg ons die gang van prof. BURGERS in „Proceedings Royal Netherlands Academy of Sciences, Amsterdam”, Vol. 50, No. 3 (bls. 262), 1947.

Ons het reeds gemeld dat sodra die suier teen die gas in die buis stoot, 'n verdigtingsgolf ontstaan, wat met 'n hoë snelheid na regs voortgeplant word. Die beweging van die suier word al dadelik gerem deur die gasdruk. Verdunningsgolwe ontstaan onmiddelik wat die verdigtingsgolf agterhaal. In die gebied tussen die suier en die verdigtingsgolf kry ons 'n kontinue toestandsverandering. Vir hierdie gebied geld dan die gewone bewegingsvergelykings vir stromende media. Ook die wet van POISSON vir isentropiese toestandsveranderinge geld hier, waarby egter die aanvangstoestand

vir elke element bepaal word deur die sterkte van die verdigtingsgolf toe dit hierdie element passeer het.

As gevolg hiervan sal die aanvangstoestand vir elke element verskillend wees.

Ons gaan uit van LAGRANGE se vorm van die bewegingsvergelyking:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Beskou nou die gas in die buis as opgebou uit opmekaarvolgende skille (lae) waarvan die deursneevlakke loodreg op die as van die buis staan. Die skille onderskei ons dan van mekaar met behulp van 'n parameter  $s$ . Die reël waarvolgens die onderskeiding plaasvind is voorlopig nog willekeurig. Ons sal later 'n bepaalde reël voorskryf wat tot 'n aansienlike vereenvoudiging van die bewegingsvergelyking sal lei.

Vir die skil gas in aanraking met die suier neem ons  $s = 0$  en  $s > 0$  vir alle ander skille.

Laat ons dan die beweging van 'n skil  $s$  aangee deur

$$x = \varphi(s; t) \quad (2.2)$$

waar  $t$  die tyd is en  $x$  die afstand afgelê deur die skil in tyd  $t$ .

Die snelheid van 'n skil word dan aangegee deur

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Die uitsetting van 'n skil  $s$  word bepaald deur  $\partial \varphi / \partial s$  as 'n funksie van  $t$  vir bepaalde  $s$ . Dus, as  $\rho$  die digtheid van die skil  $s$  is, dan is

$$\rho = \theta_1(s) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-1} \quad (2.4)$$

waar  $\theta_1(s)$  'n funksie van  $s$  alleen is.

Volgens die wet van POISSON vir 'n isentropiese toestandsverandering (wat ons aanneem geld vir elke skil) word die druk  $p$  dan gegee deur

$$p = \theta_2(s) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-k} \quad (2.5)$$

waar  $\theta_2(s)$  weer 'n funksie van  $s$  alleen is.

Substitueer nou uit (2.3), (2.4), en (2.5) in (2.1); ons kry:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\theta_1(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \theta_2(s) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-k} \right]. \quad (2.6)$$

Dit is die bewegingsvergelyking vir die gebied begrens deur die front van die suier enersyds en andersyds deur die verdigtingsgolf aan die front van die gebied wat deur die bewegende suier geaffekteer word.

Sê dat die snelheid van die suier  $\bar{V}$  is na tyd  $t$  en dat die massa daarvan per eenheid van frontoppervlakte  $\bar{\rho}$  is.

Dan:

$$x_{\text{front}} = \varphi(0; t) \text{ en } \bar{V} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\text{front}} = \frac{\partial \varphi(0; t)}{\partial t}. \quad (2.7)$$

As agter die suier 'n vakuum is en op die suier geen uitwendige krag behalwe die gasdruk werk nie, word die bewegingsvergelyking van die suier

$$\bar{\rho} \left( \frac{du}{dt} \right) = \bar{\rho} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{s=0} = -p_{s=0}.$$

Substitueer vir  $p_{s=0}$  sy waarde uit (2.5) en ons kry:

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{s=0} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \theta_2(0) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{s=0}^{-k}. \quad (2.8)$$

Vergelyking (2.8) gee 'n rantvoorwaarde vir  $s = 0$ .

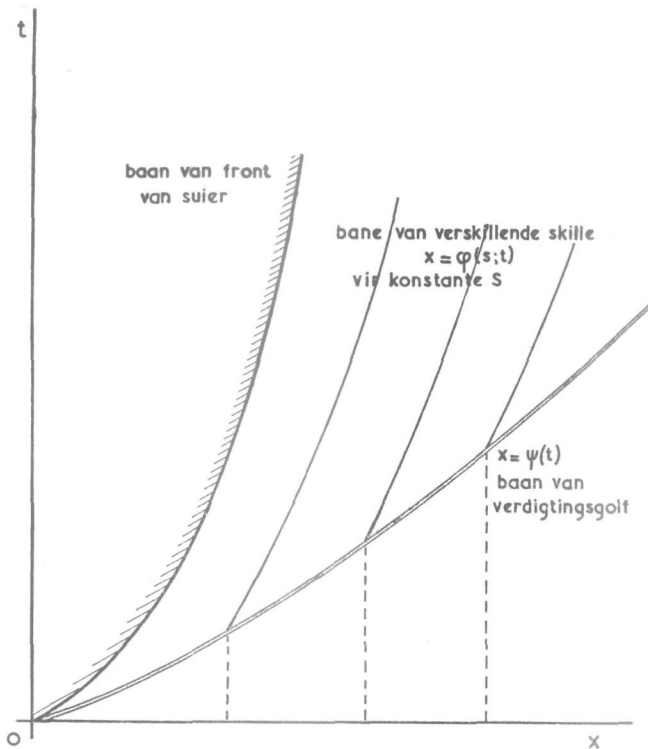


Fig. 3.

'n Tweede rantvoorwaarde staan in verband met die verdigingsgolf. Stel die baan van die front van die verdigingsgolf voor deur  $x = \Psi(t)$  waar  $\Psi$  voorasnog 'n onbekende funksie van  $t$  is. Sê dat die snypunt van die baan van die verdigingsgolf en die van skil  $s$  die punt  $(X, T)$  is. (D.w.s. die verdigingsgolf bereik skil  $s$  na tyd  $T$ ).



Ons het dan

$$\Psi(T) = \varphi(s; T). \quad (2.9)$$

Dit gee  $s$  as 'n funksie van  $T$  langs die baan van die verdigtingsgolf of andersom.

Die voortplantingsnelheid van die verdigtingsgolf na tyd  $T$  word gegee deur

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{t=T} = \frac{d\Psi}{dT}, \quad \text{sê.}$$

Ons het die volgende verband tussen die voortplantingsnelheid  $d\Psi/dT$  van die verdigtingsgolf en die snelheid  $(\partial\varphi/\partial t)_{t=T}$  van die gas onmiddellik agter die golf uit formule (1.6), (I):

$$\frac{d\Psi}{dT} = \beta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} + \left[ c_0^2 + \beta^2 \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Die waardes van  $\theta_1(s)$  en  $\theta_2(s)$  volg dan uit (2.4), (2.5) en (1.6), (II) en (III):

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(s) &= \varrho_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T} = \varrho_0 \frac{d\Psi}{dT} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T} \left\{ \frac{d\Psi}{dT} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} \right\} \\ \theta_2(s) &= p_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T}^k = \left\{ p_0 + \varrho_0 \frac{d\Psi}{dT} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} \right\} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T}^k \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Ons kan  $d\Psi/dT$  in albei uitdrukkings vervang met behulp van (2.10); ons kan die waardes van  $\theta_1(s)$  en  $\theta_2(s)$  so verkry, dan in (2.6) substitueer. Dit gee dan 'n bewegingsvergelyking vir die stromingsgebied wat egter onhanteerbaar is.

Laat ons dus nou aanneem dat die snelheid van die stromende gas agter die verdigtingsgolf so groot is, dat  $c_0$  in vergelyking daarmee verwaarloosbaar klein is. Uit formules (1.7) volg dan:

$$a). \quad \frac{d\Psi}{dT} = 2\beta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} = \frac{1}{2}(k+1) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} b). \quad \theta_1(s) &= \varrho_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T} = \frac{k+1}{k-1} \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T} \\ c). \quad \theta_2(s) &= p_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T}^k = \frac{1}{2}(k+1) \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T}^k \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Laat ons nou die parameter  $s$  so definiëer dat langs die baan van die verdigtingsgolf geld:

$$s = \left(\frac{k-1}{k+1}\right) \Psi(T) = \left(\frac{k-1}{k+1}\right) \varphi(s; T). \quad (2.14)$$

Differensiëer ons nou (2.9) na  $s$  met inagneming dat  $T$  'n funksie is van  $s$ , dan kry ons

$$\frac{d\Psi}{dT} \frac{dT}{ds} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} \cdot \frac{dT}{ds} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T},$$

d. i.  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T} = \left\{ \frac{d\Psi}{dT} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T} \right\} \frac{dT}{ds} = \frac{k-1}{k+1} \frac{d\Psi}{dT} \frac{dT}{ds}$ , uit (2.12).

Uit (2.14) volg:

$$\left(\frac{k-1}{k+1}\right) \left(\frac{d\Psi}{dT} \frac{dT}{ds}\right) = 1.$$

Dus geld langs die baan van die verdigtingsgolf:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{t=T} = 1. \quad (2.15)$$

Met behulp van (2.15) vereenvoudig formules (2.13) aansienlik:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(s) &= \frac{k+1}{k-1} \varrho_0 \\ \theta_2(s) &= \frac{1}{2}(k+1) \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Die druk  $p$  in 'n willekeurige punt van die baan van 'n skil  $s$  kry ons nou uit (2.5):

$$p = \frac{1}{2}(k+1) \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k}.$$

Die bewegingsvergelyking (2.6) word dus nou:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{k-1}{2} \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \right] \quad (2.17a)$$

d. i.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{k-1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \right] - \frac{k-1}{2} \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \quad (2.17)$$

waar  $\varrho'_0 = d\varrho_0/ds$ .

Die bewegingsvergelyking (2.8) vir die front van die suier word nou:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{s=0} = -\frac{1}{\varrho} \frac{k+1}{2} \left\{ \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \right\}_{s=0}. \quad (2.18)$$

En uit (2.17a) volg vir die front van die suier:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{s=0} = -\frac{k-1}{2} \left[ \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \varrho_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \right\} \right]_{s=0}. \quad (2.19)$$

Uit (2.18) en (2.19) volg dus dat die rantvoorwaarde vir  $s = 0$  geskryf kan word as:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial s} \ln \left\{ \rho_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-k} \right\} \right]_{s=0} = \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\rho} (\rho_0)_{s=0} = \text{konstant.} \quad (2.20)$$

Ons het dus nou die bewegingsvergelyking (2.17) vir die stromingsgebied met die rantvoorwaardes (2.15) langs die baan van die verdigtingsgolf en (2.20) vir  $s = 0$ .

§ 3. *Transformasie van die bewegingsvergelyking. Die rantvoorwaardes.*

Dit is gerieflik om 'n nuwe afhanklike veranderlike in te voer, nl.  $\Phi = \partial\varphi/\partial s$  en 'n diagram met  $s$  en  $t$  as koördinate.

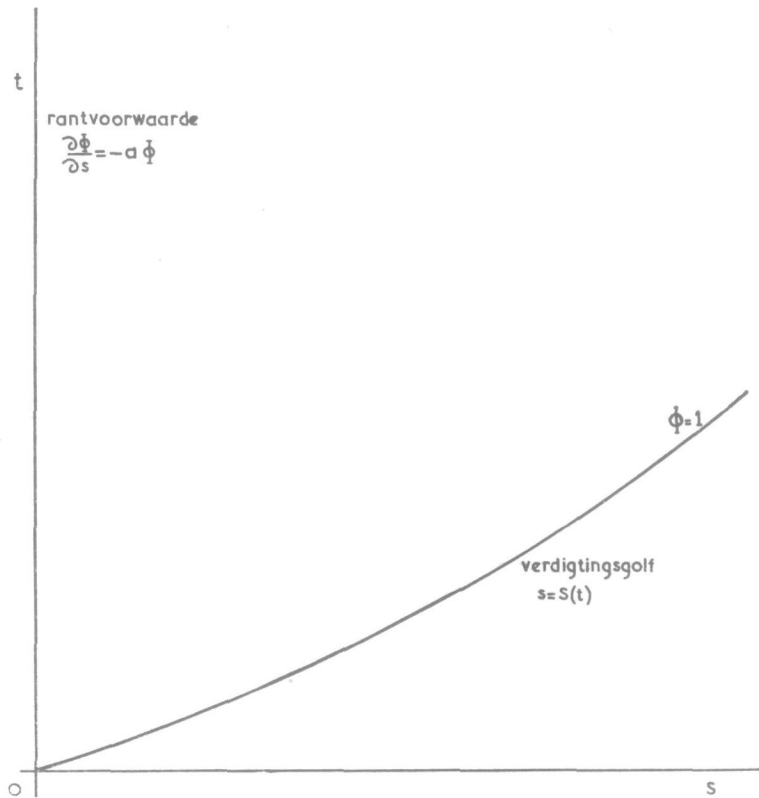


Fig. 4.

Die grense  $s = 0$  en  $t = 0$  word reguit lyne. Die baan van die verdigtingsgolf word gegee deur die verband tussen  $s$  en  $t$  soos verkry uit (2.9), sê:

$$s = S(t). \quad (3.1)$$

Uit (2.14) en (3.1) volg nou

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k-1}{k+1} \frac{d\Psi}{dt}.$$

En dus volg uit (2.12) dat langs die baan van die verdigtingsgolf geld:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=T} = (S')_{t=T}(s\hat{e}) = \frac{k-1}{k+1} \frac{d\Psi}{dT} = \frac{1}{2}(k-1) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}. \quad (3.2)$$

Differensiëer (2.17) na  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) + \frac{k-1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \right] + \\ + \frac{k-1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-k} \right] = 0. \end{aligned}$$

As ons hierin  $\partial\varphi/\partial s$  deur  $\Phi$  vervang, dan word dit met behulp van (3.2):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{2}{k-1} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [S'^2 \Phi^{-k}] + \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right] = 0 \quad (3.3)$$

waarby onthou moet word dat, waar in die laatste twee terme  $(\partial\varphi/\partial t)_{t=T}$  vervang is deur  $\frac{2}{k-1} S'$ , eersgenoemde 'n funksie van  $s$  alleen is, aangesien  $T$ , kragtens (2.9) 'n funksie van  $s$  alleen is. M.a.w.  $S'$  wat deur (3.1) as 'n funksie van  $t$  gedefiniëer is, moet in (3.3) uitgedruk word as 'n funksie van  $s$ .

(3.3) is die sentrale vergelyking van die probleem.

Ons moet nou die rantvoorwaardes opnuut besien.

a. Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Uit (2.20) volg dat

$$\left[ \frac{d}{ds} \ln \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 - k \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} \right]_{s=0} = \frac{k+1}{k-1} \left\{ \frac{\varrho_0}{\varrho} \right\}_{s=0}.$$

Maar

$$\frac{d}{ds} \ln \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=T}^2 = \frac{d}{ds} \ln (S'^2)_{t=T} = \left(\frac{2S''}{S'^2}\right)_{t=T},$$

waar  $S'' = d^2S/dt^2$ . Vir  $s = 0$  is dit 'n konstant. Dus word die rantvoorwaarde vir  $s = 0$  nou

$$\left(\frac{2S''}{S'^2}\right)_{t=T} - k \frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi + \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} = \frac{k+1}{k-1} \frac{\varrho_0}{\varrho},$$

$$\text{d. i.} \quad \left[ \frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi \right]_{s=0} = \frac{1}{k} \left[ \left(\frac{2S''}{S'^2}\right)_{t=T} - \frac{k+1}{k-1} \frac{\varrho_0}{\varrho} + \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} \right]_{s=0} = \left. \begin{aligned} &= \text{konstant} = -a(s\hat{e}). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

In die vervolg sal ons, om die formules oorsigtelik te hou, voortdurend van die hier-ingevoerde parameter  $a$  gebruik maak, sodat dit op tal van plekke in die uitkomst sal verskyn. Uit die wysé waarop hierdie parameter ingevoer is blyk dat sy waarde behalwe van konstante wat in die oplossing sal verskyn, afhanklik is van die verhouding  $\rho_0/\bar{\rho}$ , d.i. van die verhouding van die massa per oppervlakte-eenheid van die front van die suier tot die digtheid van die gas. Ons kan steeds wanneer 'n oplossing volledig verkry is, uit die daarby aangenome waarde vir  $a$  agterna bereken welke waarde aan hierdie verhouding toegeken moet word en daardeur die fisiese omstandighede vaslê waarop die gevinde oplossing betrekking het.

'n Moeilikheid sal hierby slegs dan kan optree as vergelyking (3.4) tot 'n onmoontlike waarde vir  $\rho_0/\bar{\rho}$  sou lei, wat die geval sal wees as  $\rho_0/\bar{\rho}$  hetsy nul, hetsy negatief sou word. Die waarde nul kom voor by 'n besondere geval wat béspreek word in § 4b. In alle ander gevalle is nagegaan en vasgestel dat  $\rho_0/\bar{\rho}$  'n eindige positiewe waarde kry.

Uit vergelyking (3.4) blyk verder dat die parameter  $a$  die dimensies (lengte)<sup>-1</sup> het, en dus 'n rol speel by die bepaling van die skaal van die veld.

b. Die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf:

Die baan van die verdigtingsgolf word nou (soos volg uit (2.15)) bepaal deur

$$\Phi = 1. \quad (3.6)$$

As 'n oplossing van (3.3) gevind is, kan ons die waarde van  $\varphi(s; t)$  bepaal aan die hand van (2.14):

$$\varphi(s; t) = \frac{k+1}{k-1} S - \int_s^S ds \Phi(s; t). \quad (3.7)$$

Vir die integrasie regs is  $S$  'n punt van die baan van die verdigtingsgolf en  $t$  konstant.

Hierdie waarde van  $\varphi(s; t)$  sal ewewel nie sonder meer vergelyking (2.17) bevredig nie, aangesien  $S$  per definisie afhanklik is van  $t$  alleen.

Substitueer die waarde (3.7) van  $\varphi(s; t)$  in (2.17) en voer die nodige differensiasies uit:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{k+1}{k-1} S' - S' (\Phi)_{s=S} - \int_s^S ds \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

waar die aksent weereens differensiasie na  $t$  aandui. Maar  $\Phi_{s=S} = 1$  sodat nou volg

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2}{k-1} \frac{dS}{dt} - \int_s^S ds \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.8)$$

en dus

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{2}{k-1} S'' - S' \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{s=S} - \int_s^S ds \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Substitueer in die laaste term regs vir  $\partial^2\Phi/\partial t^2$  sy waarde uit (3.3); ons kry

$$\begin{aligned} -\int_s^s ds \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{2}{k-1} \int_s^s ds \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{S'^2 \Phi^{-k}\} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right\} \right] = \\ &= \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} [S'^2 \Phi^{-k}]_s^s + \frac{2}{k-1} \left[ \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right]_s^s. \end{aligned}$$

Voer ons die differensiasie in die eerste term aan die regterkant uit, met inagneming dat  $S$  'n punt van die baan van die verdigtingsgolf is en dat hierlangs  $ds/dt = S'$ , dus  $dt/ds = 1/S'$ , dan kry ons vir hierdie term

$$\begin{aligned} \frac{2}{k-1} \left[ 2S' S'' \frac{dt}{ds} \Phi_{s=S}^{-k} - k S'^2 \Phi_{s=S}^{-k-1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_{s=S} \right] - \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} [S'^2 \Phi^{-k}] &= \\ = \frac{4}{k-1} S'' + \frac{2k}{k-1} S' \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} - \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} [S'^2 \Phi^{-k}], \end{aligned}$$

aangesien aan die boonste grens  $\Phi = 1$  en dus ook

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Nou word:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{6}{k-1} S'' + \frac{k+1}{k-1} S' \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} - \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} (S'^2 \Phi^{-k}) + \\ &+ \frac{2}{k-1} \left[ \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right]_s^s = \frac{6}{k-1} S'' + \frac{k+1}{k-1} S' \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} - \\ &- \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} (S'^2 \Phi^{-k}) + \frac{2}{k-1} \left( \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \right) - \frac{2}{k-1} \left( \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right). \end{aligned}$$

As dan die waarde van  $\varphi(s; t)$  soos gegee deur (3.7) vergelyking (2.17) moet bevredig, dan moet die som van die eerste, tweede en vierde terms aan die regterkant nul wees; d.i.

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{6}{k+1} \frac{S''}{S'} + \frac{2}{k+1} \frac{\rho_0'}{\rho_0} S' = 0. \quad (3.9)$$

(3.9) is die voorwaarde waaraan langs die baan van die verdigtingsgolf voldoen moet word.

#### Opsommend:

Die bewegingsvergelyking vir die stromingsgebied is herlei tot

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{2}{k-1} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [S'^2 \Phi^{-k}] + \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right] = 0 \quad (3.3)$$

met die volgende rantvoorwaardes:

(I) langs  $s = 0$  geld

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -a \Phi \quad (3.5)$$

(II) langs die baan  $s = S(t)$ , van die verdigtingsgolf is

$$\Phi = 1 \text{ en } \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{6}{k+1} \frac{S''}{S'} + \frac{2}{k+1} \frac{\rho_0'}{\rho_0} S' = 0. \quad (3.9)$$

$\varphi(s; t)$  word bepaal uit:

$$\varphi(s; t) = \frac{k+1}{k-1} S - \int_s^S ds \Phi(s; t). \quad (3.7)$$

Stel ons  $k = 5/3$  dan word vergelyking (3.3)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-5/3}) + 3 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho_0'}{\rho_0} S'^2 \Phi^{-5/3} \right) = 0 \quad (3.3a)$$

met die rantvoorwaardes:

(I) langs  $s = 0$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -a \Phi \quad (3.5a)$$

(II) langs  $s = S(t)$ :

$$\Phi = 1 \text{ en } \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{9}{4} \frac{S''}{S'} + \frac{3}{4} \frac{\rho_0'}{\rho_0} S' = 0. \quad (3.9a)$$

In die geval is

$$\varphi(s; t) = 4S - \int_s^S ds \Phi(s; t). \quad (3.7a)$$

As ons aanneem dat die gas aanvanklik oral in die buis dieselfde digtheid het, dan kry ons (met  $k = 5/3$ ) eweas prof. BURGERS, die bewegingsvergeljking:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-5/3}) = 0 \quad (3.3b)$$

met die rantvoorwaardes:

(I) langs  $s = 0$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -a \Phi \quad (3.5b)$$

(II) langs  $s = S(t)$ :

$$\Phi = 1 \text{ en } \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{9}{4} \frac{S''}{S'} = 0. \quad (3.9b)$$

$\varphi(s; t)$  word ook nou bepaal soos in (3.7a) (3.7b)

## HOOFSTUK II.

### Oplossings van die partiële differensiaalvergelyking vir $\Phi$ deur middel van kwasiënte van eenvoudige funksies.

Die partiële differensiaalvergelyking vir  $\Phi$  wat ons in die vorige hoofstuk verkry het, is nie-lineêr. Die nie-lineariteit kom op twee plekke tot uitdrukking: eensyds deur die voorkoms van die faktor  $\Phi^{-1}$ , andersyds deurdat die funksie  $S'^2$  op 'n gekompliseerde wyse met een van die rantvoorwaardes saamhang. Reeds is vermeld dat deur prof. BURGERS 'n oplossing van hierdie vergelyking verkry is wat voldoen aan al die rantvoorwaardes van die probleem deur middel van 'n ontwikkeling van  $\Phi$  in magte van  $t$  en  $s$ , wat soos volg begin:

$$\Phi = 1 + a_1 t + a_2 s + b_1 t^2 + b_2 t s + \dots$$

Ons moet egter verwag dat hierdie ontwikkeling slegs 'n beperkte konvergensiegebied besit, aangesien by substitusie van die reeks in die differensiaalvergelyking, dit nodig is om die binomiaalreeks toe te pas ter herleiding van  $\Phi^{-1}$ , welke reeks konvergeer solang  $|\Phi - 1| < 1$ . Die oplossing van prof. BURGERS maak dit derhalwe nie moontlik om die verloop van die beweging, in besonder dié van die suier, oor 'n ruime tydverloop te oorsien nie.

Tog vorm die verloop van die beweging na 'n geruime tyd juis een van die interessante punte van die probleem. Aangesien ons veronderstel het dat agter die suier sig 'n vakuum bevind moet ons verwag dat die snelheid van die suier op die duur deur die vertragende werking van die gasdruk op sy voorkant, tot nul sal afneem en dan van teken sal verander. Dit is derhalwe van belang om na oplossings te soek wat vir groot tydintervalle bruikbaar is, en eventueel 'n asimptotiese karakter sou vertoon, in dié sin dat hulle juis 'n goeie benadering sal gee as  $t$  na oneindig gaan.

Dit het nie geluk om 'n oplossing te konstrueer waarvan bewys kan word dat dit vir groot waardes van  $t$  steeds beter aan die vergelyking en die daarby-behorende rantvoorwaardes voldoen, terwyl dit bowendien (dit is 'n essensiële voorwaarde vir die fisiese probleem) ontwikkel is uit 'n oplossing wat vir  $t \rightarrow 0$  eksak aan alle rantvoorwaardes voldoen nie. Die nie-lineêre karakter van die vergelyking (3.3b) maak dit daarvoor te weinig hanteerbaar. Dit spreek vanself dat geeneen van die gewone metodes van reeksontwikkeling wat by lineêre vergelykings soveel moontlikhede bied in hierdie geval toegepas kan word nie. Hierdeur misluk ook elke poging tot aanwending van een van die by-die-lineêre-vergelyking-gebruikte metodes van opeenvolgende benaderings.



Deur sy vorm lok vergelyking (3.3b) wel tot toepassing van die gedagte om tot 'n skeiding van die veranderlikes  $s$  en  $t$  te kom, deur die gesogte funksie  $\Phi$  voor te stel as 'n produk of kwosient van twee funksies, waarvan die een slegs van  $t$  en die ander sleg van  $s$  afhanklik is. Die metode geluk inderdaad in soverre as wat ons daardeur 'n eksakte oplossing van die partiële differensiaalvergelyking kan vind, waarmee bowendien gemaklik voldoen kan word aan die rantvoorwaarde by die suier (d.i. die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ ). Ons kan egter nie tegelykertyd voldoen aan die rantvoorwaarde langs die baan van die verdigtingsgolf nie. Dit blyk in die oplossing dat ons by die keuse van die funksies van  $t$  en  $s$  wat by dié oplossing gebruik kan word baie beperk is en dat daarin slegs enkele vry te kiesse koëffisiënte voorkom. Juis hierin is 'n teëstelling geleë met die ooreenkomstige resultate by die oplossing van lineêre differensiaalvergelykings volgens die analoge metode: by laasgenoemde tree gewoonlik een of meer parameters op waarvoor ons 'n (aftelbaar) oneindige reeks van waardes kan aanneem, sodat ons oor 'n oneindige reeks van addisioneelte-kombinêre oplossings beskik, waarin dus ook (aftelbaar) oneindig veel nog nader-te-bepale koëffisiënte voorkom.

Ons kan andersyds volgens die produk- of kwosientmetode 'n oplossing saamstel wat eksak aan beide rantvoorwaardes voldoen, dog geen suiwere oplossing van die differensiaalvergelyking self is nie.

Slegs in een besondere spesiale geval geluk dit ons om 'n eksakte oplossing van die differensiaalvergelyking plus rantvoorwaardes te verkry: dit doen sig voor wanneer vir die oorspronklike digtheid van die ongestoorde gas geen konstante waarde geneem word nie, dog 'n waarde wat op 'n heel bepaalde manier van  $s$  afhang (met toenemende waarde van  $s$  word dit steeds kleiner). Dit blyk dat in dié geval die snelheid van die suier asymptoties tot nul afneem en dat die beweging daarvan nie van rigting omkeer nie.

Ons sal ons in wat volg besig hou met oplossings wat verkry is volgens die weg wat in voorgaande aangedui is. Daarby het ons die gedagte aanvaar dat óf aan die tweede rantvoorwaarde óf aan die differensiaalvergelyking self nie eksak voldoen kan word nie. Deur 'n onderlinge vergelyking van oplossings van verskillende tipes kan ons enigermate 'n oordeel vorm oor die graad van benadering wat langs dié weg bereikbaar is.

Ons sal ons in hierdie hoofstuk besighou met funksies  $\Phi$  van die tipe  $f(t)/q(s)$  waarin vir  $f$  die uitdrukking  $(1 + gt)^m$  geneem word ( $g$  en  $m$  konstante). In die volgende hoofstuk sal die vorm van  $f$  nie a priori op hierdie wyse vasgelê word nie; dit sal blyk dat 'n iets algemener vorm moontlik is, waardeur die beskikking oor nog een willekeurig-te-kiesse koëffisiënt verkry word. Met  $f(t)$  in die vorm  $(1 + gt)^m$ , kan ons vir  $q(s)$  'n analoge uitdrukking  $(1 + hs)^n$  neem, soos ons in § 5 sal doen, of wel 'n tweeterm, soos ondersoek sal word in § 7. In § 6 en § 8 sal ons vir  $q$  nie byvoorbeeld so 'n vorm aanneem nie; tog lei die gedagtegang wat ons in albei die gevalle volg tot so 'n vorm. In § 9 lei ons gedagtegang tot 'n iets meer saamgestelde uitdrukking vir  $q$  in die vorm van 'n konstant plus 'n wortelvorm.

§ 4. Oplossing van die tipe  $(1 + gt)^m / (1 + hs)^n$  wat by 'n bepaalde verloop van  $\varrho_0$  as funksie van  $s$  eksak voldoen aan die differensiaalvergeliking met beide rantvoorwaardes.

Ons gaan uit van vergelyking (3.3):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{2}{k-1} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-k}) + \frac{2}{k-1} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\varrho_0}{\varrho_0} S'^2 \Phi^{-k} \right) = 0.$$

Vir  $s = 0$ ,  $t = 0$  is  $\Phi = 1$ . Stel daarom in (3.3):

$$\Phi = (1 + gt)^m / q(s) \quad (4.1)$$

waarby  $q(0) = 1$ . (Ons sal later  $q = (1 + hs)^n$  stel). Vergelyking (3.3) word dus

$$m(m-1)g^2(1+gt)^{m-2}q^{-1} = -\frac{2}{k-1}(1+gt)^{-mk} \left[ \frac{d^2}{ds^2} (S'^2 q^k) + \frac{d}{ds} \left( \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} S'^2 q^k \right) \right]. \quad (4.2)$$

Ons staan hier nou voor twee moontlikhede. Ons kan naamlik,

$$\text{óf} \quad a). \quad m-2 = -mk \text{ d.i. } m = 2/(k+1) \quad (4.3a)$$

stel sodat ons die faktor  $(1 + gt)^{-\frac{2}{k+1}}$  dwarsdeur kan uitdeel; in die resultaat kom dan geen  $t$  meer voor nie,

$$\text{óf} \quad b). \quad m = 1 \quad (4.3b)$$

stel sodat die linkerlid van (4.2) nul word; ons kry dan na skrapping van die faktor  $(1 + gt)^{-mk}$  weer 'n resultaat wat geen  $t$  meer bevat nie. Ons sal eers geval a), behandel, daarna geval b).

a). Die geval  $m = 2/(k+1)$ :

Na uitdeling van die faktor  $(1 + gt)^{-\frac{2}{k+1}}$  kry ons die vergelyking

$$\left( \frac{k-1}{k+1} \right)^2 g^2 q^{-1} = \frac{d^2}{ds^2} (S'^2 q^k) + \frac{d}{ds} \left( \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} S'^2 q^k \right). \quad (4.4)$$

Langs die baan van die verdigtingsgolf is  $\Phi = 1$ ; hierdie baan word dus nou gegee deur

$$q = (1 + gt)^m \quad (4.5)$$

waar  $m$  die waarde (4.3a) het.

Differensiëer na  $t$ :

$$\left( \frac{dq}{ds} \right)_{s=S} \cdot \frac{dS}{dt} = mg(1+gt)^{m-1} *$$

\*) Ons sal die simbool  $S$  deurgaans gebruik soos dit in (3.1) gedefiniëer is d.w.s. om die waarde van die veranderlike  $s$  in 'n punt van die baan van die verdigtingsgolf aan te gee.

dus

$$S' = \frac{2g}{k+1} \cdot \frac{1}{q'} q^{-\frac{k-1}{2}} \quad (**)$$
 (4.6)

en

$$S''/S' = -\frac{2g}{k+1} \left\{ \frac{k-1}{2} q^{-\frac{k+1}{2}} + \frac{q''}{q'^2} q^{-\frac{k-1}{2}} \right\}$$
 (4.7)

Ons vind ook

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=s} = \frac{2g}{k+1} q^{-\frac{k+1}{2}} \text{ (in } q \text{ alleen uitgedruk).}$$
 (4.8)

Dus word die rantvoorwaarde langs die baan van die verdigtingsgolf:

$$\frac{k+1}{2} q^{-\frac{k+1}{2}} = 3 \left\{ \frac{k-1}{2} q^{-\frac{k+1}{2}} + \frac{q''}{q'^2} q^{-\frac{k-1}{2}} \right\} - \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} \frac{1}{q'} q^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Deel dwarsdeur met  $\frac{1}{q'} q^{-\frac{k-1}{2}}$  en vereenvoudig; ons kry

$$\varrho'_0/\varrho_0 = 3 q''/q' + (k-2) q'/q,$$

waaruit deur integrasie volg

$$\varrho_0 = \text{konstant} \times (q'^3 q^{k-2}).$$
 (4.9)

Ons keer terug na vergelyking (4.4). Dié vergelyking word na substitusie van die waarde (4.6) vir  $S'$ :

$$\left( \frac{k-1}{2} \right)^2 q^{-1} = \frac{d^2}{ds^2} (q q'^{-2}) + \frac{d}{ds} \left( \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} q q'^{-2} \right).$$
 (4.10)

Stel in (4.10)  $q = (1 + hs)^n$ ,  $h$  en  $n$  konstante, en gebruik (4.9); dit gee

$$\begin{aligned} \left( \frac{k-1}{2} \right)^2 (1 + hs)^{-n} &= \frac{1}{n^2} [(2-n)(1-n)(1 + hs)^{-n} + \\ &+ (1-n) \{ n(k+1) - 3 \} (1 + hs)^{-n}]. \end{aligned}$$

Deel die faktor  $(1 + hs)^{-n}$  dwarsdeur uit en vereenvoudig; dit gee

$$(k+1)^2 n^2 - 4(k+1)n + 4 = 0, \text{ dus } n = 2/(k+1).$$
 (4.11)

Dus

$$q = (1 + hs)^{\frac{2}{k+1}}$$

en

$$\Phi = (1 + gt)^{\frac{2}{k+1}} (1 + hs)^{-\frac{2}{k+1}}$$
 (4.12)

Uit (4.9) volg nou

$$\varrho_0 = \varrho_{00} (1 + hs)^{-1}, \varrho_{00} \text{ 'n konstant.}$$
 (4.13)

\*\*) In die vervolg sal 'n aksent by 'n  $q$  differensiasie na  $s$  aandui terwyl 'n aksent by 'n  $S$  differensiasie na  $t$  sal aandui.

Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Deur differensiasie kry ons uit (4.1) met gebruikmaking van (4.11):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{2h}{k+1} (1+gt)^{\frac{2}{k+1}} (1+hs)^{-\frac{k+3}{k+1}}.$$

Dus geld vir  $s = 0$ :

$$-\frac{2h}{k+1} (1+gt)^{\frac{2}{k+1}} = -a (1+gt)^{\frac{2}{k+1}},$$

d.i.

$$h = \frac{1}{2} a (k+1).$$

Dus samevattend:

$$\Phi = (1+gt)^{\frac{2}{k+1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (k+1) as \right\}^{-\frac{2}{k+1}} \quad (4.14)$$

en

$$\varrho_0 = \varrho_{00} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (k+1) as \right\}^{-1}. \quad (4.15)$$

Die waarde van die konstant  $g$  kan ons uit die beginsnelheid van die suier bepaal. Ons kom nog daarop terug.

Hiermee het ons dan aan die vergelyking en al die rantvoorwaardes eksak voldoen!

Die verdigtingsgolf:

Die baan van die verdigtingsgolf word gevind deur  $\Phi = 1$  te stel in (4.12); dit gee

$$S = gt/h. \quad (4.16)$$

Uit (4.16) volg dat  $S' = g/h$ , konstant.

Die snelheid van die verdigtingsgolf is dus konstant, want volgens (3.2) is

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{k+1}{k-1} S' = \frac{2g}{a(k-1)}, \text{ 'n konstant.}$$

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Aan die hand van (3.7) kry ons:

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= \frac{k+1}{k-1} S - \int_s^S ds (1+gt)^{\frac{2}{k+1}} (1+hs)^{-\frac{2}{k+1}} = \\ &= \frac{k+1}{k-1} S - \frac{1}{h} \cdot \frac{k+1}{k-1} (1+gt)^{\frac{2}{k+1}} \left[ (1+hs)^{\frac{k-1}{k+1}} \right]_s^S = \\ &= \frac{2}{a(k-1)} [(1+gt)^{\frac{2}{k+1}} (1+hs)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die baan van die suier:

Aan die hand van (2.7) volg die baan van die suier nou deur  $s = 0$  te stel in (4.17); dus

$$\varphi_0 = \frac{2}{a(k-1)} \{ (1 + gt)^{\frac{2}{k+1}} - 1 \}.$$

Vir die snelheid van die suier vind ons

$$\bar{V} = \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{4g}{a(k^2-1)} (1 + gt)^{-\frac{k-1}{k+1}}. \quad (4.18)$$

Veronderstel dat die aanvangsnelheid van die suier  $\bar{V}_0$  is; dan is

$$g = \frac{1}{4} a (k^2 - 1) \bar{V}_0. \quad (4.19)$$

Hiermee het ons  $g$  ook bepaal.

Die snelheid neem dus af as  $t$  toeneem. Dit keer ook nooit om in rigting nie.

Die vertraging van die suier volg ooreenkomstig:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\frac{4g^2}{a(k+1)^2} (1 + gt)^{-\frac{2k}{k+1}}. \quad (4.20)$$

Die vertraging neem dus af as  $t$  toeneem en nader tot nul alleen as  $t \rightarrow \infty$ .

Voorgaande oplossing verval as  $g_0$  nie die waarde soos in (4.13) gegee, het nie.

b). Die geval  $m = 1$ :

Met  $m = 1$  word die uitdrukking (4.1) vir  $\Phi$  nou

$$\Phi = (1 + g_1 t)/q(s) \quad (4.21)$$

waarby ons vir die konstant in die teller nou  $g_1$  i.p.v.  $g$  neem om dit te onderskei van die vorige geval.

Vergelyking (4.2) word nou:

$$\frac{d^2}{ds^2} (S'^2 q^k) + \frac{d}{ds} \left( \frac{g'_0}{g_0} S'^2 q^k \right) = 0. \quad (4.22)$$

Die baan van die verdigtingsgolf word gegee deur

$$q = 1 + g_1 t. \quad (4.23)$$

Deur differensiasie na  $t$  kry ons

$$S' = g_1/q' \quad (4.24)$$

en

$$S''/S' = -g_1 q''/q'^2. \quad (4.25)$$

En ons vind  $(\partial\Phi/\partial t)_{s=S} = g_1/q$  (in  $q$  alleen uitgedruk). (4.26)

Die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf gee dus na uitvoering van die nodige vereenvoudiging:

$$\varrho'_0/\varrho_0 = 3 q''/q' - \frac{1}{2}(k+1) q'/q \quad (4.27)$$

waaruit deur integrasie volg:

$$\varrho_0 = \text{konstant} \times (q'^3 q^{-\frac{k+1}{2}}). \quad (4.28)$$

Ons keer nou terug na vergelyking (4.22). Ons kry uit hierdie vergelyking na substitusie van die waarde (4.24) vir  $S'$ :

$$\frac{d^2}{ds^2} (q^k q'^{-2}) + \frac{d}{ds} \left( \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} q^k q'^{-2} \right) = 0. \quad (4.29)$$

Stel in bostaande vergelyking  $q = (1 + h_1 s)^n$  waar  $h_1$  en  $n$  konstante is en gebruik (4.28); ons kry dan na uitdeling van die faktor

$$(1 + h_1 s)^{n(k-2)}$$

en verdere vereenvoudiging:

$$nk + n - 2 = 0, \text{ d.i. } n = 2/(k+1). \quad (4.30)$$

Dus

$$q = (1 + h_1 s)^{\frac{2}{k+1}} \quad (4.31)$$

en

$$\Phi = (1 + g_1 t) (1 + h_1 s)^{-\frac{2}{k+1}}.$$

Uit (4.28) volg:

$$\varrho_0 = \varrho_{000} (1 + h_1 s)^{-\frac{2(2k-1)}{k+1}}, \varrho_{000} \text{ 'n konstant.} \quad (4.32)$$

Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Uit (4.21) en (3.5):

$$\left( \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_{s=0} = -\frac{2h_1}{k+1} = -a,$$

d.i.

$$h_1 = \frac{1}{2} a (k+1). \quad (4.33)$$

En dus samevattend:

$$\Phi = (1 + g_1 t) \left\{ 1 + \frac{1}{2} a (k+1) s \right\}^{-\frac{2}{k+1}} \quad (4.34)$$

en

$$\varrho_0 = \varrho_{000} \left\{ 1 + \frac{1}{2} a (k+1) s \right\}^{-\frac{2(2k-1)}{k+1}}. \quad (4.35)$$

Hiermee het ons weereens aan die vergelyking en albei die rantvoorwaardes voldoen.

Die verdigtingsgolf:

Vir die vergelyking van die baan van die verdigtingsgolf kry ons uit (4.23) en (4.31):

$$1 + h_1 S = (1 + g_1 t)^{\frac{k+1}{2}}. \quad (4.36)$$

Uit (4.36) volg dat  $S' = \frac{1}{2}(k+1) (g_1/h_1) (1 + g_1 t)^{\frac{k-1}{2}}$ , sodat ons volgens (3.2) vir die snelheid van die verdigtingsgolf kry

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{k+1}{k-1} S' = \frac{g_1(k+1)}{a(k-1)} (1 + g_1 t)^{\frac{k-1}{2}}. \quad (4.37)$$

Dus neem die snelheid van die verdigtingsgolf toe as  $t$  toeneem.

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Ons kry dus uit (3.7):

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= \frac{k+1}{k-1} S - \int_s^S ds (1 + g_1 t) (1 + h_1 s)^{-\frac{2}{k+1}} = \\ &= \frac{k+1}{k-1} S - \frac{1}{h_1} \frac{k+1}{k-1} (1 + g_1 t) \left[ (1 + h_1 s)^{\frac{k-1}{k+1}} \right]_s = \\ &= \frac{2}{a(k-1)} \left[ (1 + g_1 t) (1 + h_1 s)^{\frac{k-1}{k+1}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die baan van die suier:

Stel  $s = 0$  in (4.38) vir die baan van die suier; dit gee

$$\varphi(0; t) = 2g_1 t/a(k-1). \quad (4.39)$$

Vir die snelheid van die suier vind ons

$$\bar{V} = d\varphi_0/dt = 2g_1/a(k-1), \text{ konstant.} \quad (4.40)$$

As dus die aanvangsnelheid van die suier  $\bar{V}_0$  is, dan is

$$g_1 = \frac{1}{2} a(k-1) \bar{V}_0. \quad (4.41)$$

Die uitkoms (4.40) nl. dat die suier met 'n konstante snelheid voortbeweeg is strydig met die meganiese oorwegings. Volgens ons veronderstelling in hoofstuk I is agter die suier 'n vakuum maar voor die suier nie, sodat op sy voorkant wel 'n druk uitgeoefen word wat sy snelheid vertraag.

Hierdie teenstrydigheid hang saam met die waarde van die konstant  $a$  wat ons in (3.4) ingevoer het.

Volgens (3.4) is

$$\frac{1}{k} \left\{ (2S''/S'^2)_{t=T} - \frac{k+1}{k-1} \frac{\varrho_0}{\varrho} + \frac{\varrho'_0}{\varrho_0} \right\}_{s=0} = -a. \quad (4.42)$$

Uit (4.36) volg nou deur differensiasie en met gebruikmaking van (4.31) dat

$$\left. \begin{aligned} (2S''/S'^2)_{t=T, s=0} &= \{a(k-1)(1+g_1 t)^{-(k+1)}\}_{t=T, s=0} = \\ &= \{a(k-1)(1+h_1 s)^{-1}\}_{s=0} \text{ (m. b. v. (4.36))} = \\ &= a(k-1). \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Uit (4.35) volg dat

$$(\varrho'_0/\varrho_0)_{s=0} = \{-a(2k-1)(1+h_1 s)^{-1}\}_{s=0} = -a(2k-1) \quad (4.44)$$

en verder is

$$(\varrho_0/\bar{\varrho})_{s=0} = \varrho_{000}/\bar{\varrho}. \quad (4.45)$$

Die verband (4.42) gee dus

$$\varrho_{000}/\bar{\varrho} = 0 \quad (4.46)$$

sodat  $\bar{\varrho}$  oneindig groot moet wees.

Die oplossing vir die geval a), waar  $m = 2/(k+1)$  gee die volgende waarde vir  $a$  nl.  $a = \frac{2(k+1)}{(k-1)^2} \frac{\varrho_{00}}{\bar{\varrho}}$ . Van die twee oplossings is dus alleen hierdie een bruikbaar.

§ 5. *Poging om 'n oplossing van die tipe  $(1+gt)^m/(1+hs)^n$  te vind as  $\varrho_0$  konstant is ( $k = 5/3$ ).*

Ons bepaal ons by vergelyking (3.3b):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{1}{3}}) = 0$$

met die rantvoorwaardes (3.5b) en (3.9b).

Stel (soos in § 4) in vergelyking (3.3b):

$$\Phi = (1+gt)^m/q(s) \quad (5.1)$$

terwyl weer geld  $q(0) = 1$ . (5.2)

Presies soos in § 4 volg dan dat vir

$$m = 3/4 \text{ (omdat } k = 5/3) \quad (5.3)$$

die  $t$ -faktor dwarsdeur uitdeel; die gereduseerde vergelyking volg uit (4.4) deur weglating van die tweede term aan die regterkant:

$$\frac{d^2}{ds^2} (S'^2 q^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{16} g^2 q^{-1}. \quad (5.4)$$

Die waarde van  $S'$  bly soos in (4.6), nl.

$$S' = \frac{3}{4} (g/q') q^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.5)$$

Substitueer ons hierdie waarde vir  $S'$  in (5.4), dan volg hetsy regstreeks, hetsy uit (4.10), dat die vergelyking oorgaan in

$$\frac{d^2}{ds^2} (qq'^{-2}) = \frac{1}{9} q^{-1}. \quad (5.6)$$



Stel in (5.6)

$$q = (1 + hs)^n. \quad (5.7)$$

Vergelyking (5.6) gaan dus nou oor in

$$(2-n)(1-n)(1+hs)^{-n} = \frac{1}{3}n^2(1+hs)^{-n}.$$

Na uitdeling van die faktor  $(1+hs)^{-n}$  kry ons dus

$$8n^2 - 27n + 18 = 0, \text{ dus } n = \frac{1}{16}(27 \pm 3\sqrt{17}) \quad (5.8)$$

en

$$q = (1 + hs)^{\frac{1}{16}(27 \pm 3\sqrt{17})}. \quad (5.9)$$

Ons kry hier dus twee waardes vir  $q$ ; welke een van die twee ons moet neem is nie duidelik nie. (Albei die eksponente is positief).

Ons kan ook nie die som van die twee waardes, elk vermenigvuldig met 'n willekeurige konstant, neem nie, aangesien vergelyking (5.6) nie lineêr is nie.

Laat ons dus een van die twee waardes neem en ondersoek hoe dit met die rantvoorwaardes gesteld is.

Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Neem

$$q = (1 + hs)^{\frac{1}{16}(27-3\sqrt{17})};$$

dan is

$$\Phi = (1 + gt)^{\frac{1}{2}}(1 + hs)^{-\frac{1}{16}(27-3\sqrt{17})} \quad (5.10)$$

'n oplossing van vergelyking (3.3b).

Toepassing van die rantvoorwaarde (3.5b) vir  $s = 0$  gee

$$-\frac{1}{16}h(27-3\sqrt{17})(1+gt)^{\frac{1}{2}} = -a(1+gt)^{\frac{1}{2}},$$

d.i.

$$h = 16a/3(9 - \sqrt{17}).$$

Hiermee word aan hierdie rantvoorwaarde voldoen.

Die baan van die verdigtingsgolf:

Die voorwaarde  $\Phi = 1$  gee  $(1 + gt)^{\frac{1}{2}} = (1 + hs)^{-\frac{1}{16}(27-3\sqrt{17})}$  wat die vergelyking van die baan van die verdigtingsgolf is.

Uit (5.5) en (5.9) volg dus dat

$$S' = \frac{4g}{(9 - \sqrt{17})h} (1 + hs)^{-\frac{1}{16}(5-\sqrt{17})} \text{ en}$$

$$S''/S' = -\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{9 - \sqrt{17}}\right) g (1 + hs)^{\frac{1}{16}(-9 + \sqrt{17})}$$

terwyl

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{s=S} = \frac{3}{4}g(1+gt)^{-1} = \frac{3}{4}g(1+hs)^{\frac{1}{16}(-9 + \sqrt{17})};$$

dus

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{s=S} + \frac{9}{4} \frac{S''}{S'} &= \frac{3}{4} g [(1+hs)^{k(-9+\sqrt{17})} - 3 \left(\frac{5-\sqrt{17}}{9-\sqrt{17}}\right) (1+hs)^{k(-9+\sqrt{17})}] = \\ &= 0,345 g (1+hs)^{-1,220}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die eksponent aan die regterkant is negatief. Die uitdrukking aan die regterkant nader tot nul, as  $s \rightarrow \infty$ , maar word vir geen eindige positiewe waarde van  $s$  nul nie. M.a.w. daar word nêrens in die eindige aan die tweede rantvoorwaarde voldoen nie. Vir positiewe  $s$  bereik die afwyking, gegee deur die uitdrukking in die regterlid van (5.11), 'n maximumwaarde vir  $s = 0$ . Hierdie maximumafwyking is gelyk aan

$$0,345 g. \quad (5.12)$$

Neem ons die ander eksponent in (5.9) dan kry ons:

$$\Phi = (1+gt)^{\frac{1}{2}} (1+hs)^{-\frac{1}{16}(27+3\sqrt{17})} \quad (5.13)$$

met

$$h = 16 a/3 (9 + \sqrt{17})$$

en

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{s=S} + \frac{9}{4} \frac{S''}{S'} = -1,986 g (1+hs)^{-3,281}$$

wat 'n maximumafwyking gee, vir  $s = 0$ , gelyk aan

$$-1,986 g. \quad (5.14)$$

In hierdie laaste geval word ook by oneindig aan die tweede rantvoorwaarde voldoen.

(Die konstant  $g$  kan uit die aanvangsnelheid van die suier bepaal word).

Die uitdrukkings (5.10) en (5.13) vir  $\Phi$  (wat die differensiaalvergelyking bevredig) is dus nie veel werd nie.

Opgemerkt mag word dat ons uit elk van die twee uitdrukkings vir  $\Phi$  'n uitdrukking vir die snelheid van die suier kan aflei. Volgens albei hierdie uitdrukkings vir die snelheid keer die bewegingsrigting van die suier na 'n bepaalde tydsverloop om. Hierop sal ons egter hier nie verder ingaan nie, daar ons later by die afleiding van beter-buikbare oplossings nog geleentheid sal vind om op dié punt terug te kom.

§ 6. *Funksie van die tipe  $(1+gt)^m/q(s)$  wat aan die rantvoorwaardes almal eksak voldoen en 'n benaderde oplossing van die vergelyking (3.3b) self is,  $q_0$  konstant ( $k = 5/3$ ).*

Stel soos in die vorige paragraaf in (3.3b)

$$\Phi = (1+gt)^{\frac{1}{2}}/q(s). \quad (6.1)$$

As resultaat kry ons dan weer na uitdeling van die  $t$ -faktor vergelyking (5.6).

Uit (4.7) en (4.8) volg

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{s=S} + \frac{9}{4} \frac{S''}{S'} = \frac{3}{16} g \left( q^{-\frac{1}{2}} - 9 \frac{q''}{q'^2} q^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Dus word aan die rantvoorwaarde langs die baan van die verdigtingsgolf voldoen as

$$q'/q = 9 q''/q',$$

waaruit deur integrasie volg

$$q'/q^{\frac{1}{2}} = c_4 \quad (6.2a)$$

en dus

$$q^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{9} c_4 s + c_5 \quad (6.2)$$

waar  $c_4$  en  $c_5$  konstante is.

As  $s = 0$ , dan  $q = 1$ ; dus  $c_5 = 1$ .

Toepassing van die rantvoorwaarde (3.5b) vir  $s = 0$  gee

$$c_4 = -\frac{8}{9} a.$$

Dus:

$$\Phi = (1 + gt)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

en

$$S = \frac{9}{8a} \{(1 + gt)^{\frac{1}{2}} - 1\} \quad (6.4)$$

Hierdie uitdrukking vir  $\Phi$  voldoen aan al die voorwaardes, maar bevredig nie die differensiaalvergelyking (3.3b) nie.

Uit (6.3) volg

$$\partial^2 \Phi / \partial t^2 = -\frac{3}{16} g^2 (1 + gt)^{-\frac{1}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}}.$$

Uit (6.4) kry ons  $S' = \frac{3}{4} (g/a) (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}}$  (in  $s$  uitgedruk); dus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{9}{16 a^2} (1 + \frac{8}{9} as)^{\frac{1}{2}} (1 + gt)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &= -\frac{7}{144} g^2 (1 + gt)^{-\frac{1}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En dus

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{3} g^2 (1 + gt)^{-\frac{1}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}} \neq 0. \quad (6.5)$$

Die fout bereik sy grootste waarde as  $t = 0$ ,  $s = 0$ . As  $t$  en/of  $s$  onbepaald toeneem, neem die fout onbepaald af.

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Uit (3.7a) volg:

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= 4S - \int_s^S ds (1 + gt)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 4S + \frac{9}{a} (1 + gt)^{\frac{1}{2}} [1 + \frac{8}{9} as]^{-\frac{1}{2}} \Big|_s^S = \\ &= \frac{27}{2a} (1 + gt)^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{a} (1 + gt)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{2a}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die baan van die suier:

Stel  $s = 0$  in (6.6) vir die baan van die suier; dit gee

$$\varphi(0; t) = \frac{27}{2a}(1 + gt)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{a}(1 + gt)^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{2a}.$$

Vir die snelheid van die suier kry ons

$$\begin{aligned} \bar{V} &= d\varphi_0/dt \text{ (waar } \varphi_0 = \varphi(0; t) \text{)} = \\ &= \frac{3}{4}(g/a)[4(1 + gt)^{-\frac{1}{2}} - 3(1 + gt)^{-\frac{3}{2}}]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Stel dat die beginsnelheid van die suier gelyk is aan  $\bar{V}_0$ ; dan is

$$g = \frac{4}{9} a \bar{V}_0. \quad (6.7a)$$

Substitueer vir  $g$  hierdie waarde in (6.3); dan

$$\Phi = (1 + \frac{4}{9} a \bar{V}_0 t)^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{8}{9} as)^{-\frac{3}{2}}. \quad (6.8)$$

§ 7. *Oplossing van die vorm  $(1 + gt)^m/q(s)$  met 'n algemener uitdrukking vir  $q$  vir die geval  $q_0$  konstant ( $k = 5/3$ ).*

Eweas in § 5 stel ons in vergelyking (3.3b)

$$\Phi = (1 + gt)^{\frac{3}{2}}/q(s) \quad (7.1)$$

waarby geld

$$q(0) = 1. \quad (7.2)$$

Die differensiaalvergelyking vir  $\Phi$  gaan dan oor in vergelyking (5.6) nl.

$$\frac{d^2}{ds^2}(q q'^{-2}) = \frac{1}{9} q^{-1}. \quad (7.3)$$

Hierdie vergelyking kan herlei word tot 'n lineêre m.b.v. die substitusie

$$q' = dq/ds = 1/r \quad (7.4)$$

waar  $r$  beskou sal word as 'n funksie van  $q$ . Hiërmee gaan (7.3) oor in

$$2q^2 \frac{d^2 r}{dq^2} + 3q \frac{dr}{dq} - \frac{1}{9} r = 0. \quad (7.5)$$

Stel hierin:

$$r = q^\kappa.$$

Ons vind dan:

$$18\kappa^2 + 9\kappa - 1 = 0$$

waaruit:

$$\kappa = \kappa_1 \text{ of } \kappa_2 = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{17}.$$

Daar vergelyking (7.5) lineêr is, kry ons as algemene oplossing:

$$r = Aq^{\kappa_1} + Bq^{\kappa_2} \quad (7.6)$$

waarin  $A$  en  $B$  twee (voorlopig) willekeurige konstante is.

Uit (7.4) volg nou:

$$s = \int_1^q dq r = \frac{A}{\kappa_1 + 1} (q^{\kappa_1 + 1} - 1) + \frac{B}{\kappa_2 + 1} (q^{\kappa_2 + 1} - 1). \quad (7.7)$$

**Opmerking:** Dit sal later blyk dat  $A$  positief is en daar  $\kappa_1 > 0$  terwyl  $\kappa_1 > \kappa_2$  volg dat  $s \rightarrow \infty$  as  $q \rightarrow \infty$ .

Rantvoorwaarde (3.5b) vir  $s = 0$ :

M.b.v. (7.1), (7.4) en (7.8) vind ons

$$\left( \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_{s=0} = -(1/qr)_{s=0} = -1/(A + B).$$

Uit (7.6) volg dat:

$$(r)_{s=0} = A + B \quad (7.8)$$

dus

$$A + B = 1/a. \quad (7.9)$$

Stel ons  $B/A = \mu$ , dan

$$A = 1/a(1 + \mu), \quad B = \mu/a(1 + \mu) \quad (7.10)$$

waar  $\mu$  nog willekeurig is.

Baan van die verdigtingsgolf:

Langs die baan van die verdigtingsgolf is  $\Phi = 1$ . Hierdie baan word dus verkry deur  $q = (1 + gt)^{\frac{1}{a}}$  te stel in (7.7); dit gee

$$\begin{aligned} S &= \frac{A}{\kappa_1 + 1} \{(1 + gt)^{\frac{1}{a}(\kappa_1 + 1)} - 1\} + \frac{B}{\kappa_2 + 1} \{(1 + gt)^{\frac{1}{a}(\kappa_2 + 1)} - 1\} = \\ &= \frac{1}{a(1 + \mu)} \left[ \frac{1}{\kappa_1 + 1} \{(1 + gt)^{\frac{1}{a}(\kappa_1 + 1)} - 1\} + \frac{\mu}{\kappa_2 + 1} \{(1 + gt)^{\frac{1}{a}(\kappa_2 + 1)} - 1\} \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Uit (3.7a) volg:

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= 4S - \int_q^{S^*} dq (Aq^{\kappa_1 - 1} + Bq^{\kappa_2 - 1}) (1 + gt)^{\frac{1}{a}}, \quad (\text{waar } S^* = (1 + gt)^{\frac{1}{a}}) = \\ &= 4S - (1 + gt)^{\frac{1}{a}} \left[ \frac{A}{\kappa_1} q^{\kappa_1} + \frac{B}{\kappa_2} q^{\kappa_2} \right]_q^{S^*} = \\ &= \frac{1}{a(1 + \mu)} \left[ \frac{3\kappa_1 - 1}{\kappa_1(\kappa_1 + 1)} (1 + gt)^{\frac{1}{a}(\kappa_1 + 1)} + \frac{(3\kappa_2 - 1)\mu}{\kappa_2(\kappa_2 + 1)} (1 + gt)^{\frac{1}{a}(\kappa_2 + 1)} + \right. \\ &\quad \left. + (1 + gt)^{\frac{1}{a}} \left( \frac{1}{\kappa_1} q^{\kappa_1 + 1} + \frac{\mu}{\kappa_2} q^{\kappa_2 + 1} \right) - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1 + 1} + \frac{\mu}{\kappa_2 + 1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Die baan van die suier:

Stel  $s = 0$ ,  $q = 1$  in (7.12) vir die baan van die suier; dit gee

$$\varphi_0 = \frac{1}{a(1+\mu)} \left[ \frac{3x_1-1}{x_1(x_1+1)} (1+gt)^{\frac{3}{2}(x_1+1)} + \frac{(3x_2-1)\mu}{x_2(x_2+1)} (1+gt)^{\frac{3}{2}(x_2+1)} + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\mu}{x_2} \right) (1+gt)^{\frac{3}{2}} - 4 \left( \frac{1}{x_1+1} + \frac{\mu}{x_2+1} \right) \right]. \quad (7.13)$$

Vir die snelheid van die suier kry ons

$$\begin{aligned} \bar{V} = \frac{d\varphi_0}{dt} &= \frac{3g}{4a(1+\mu)} \left[ \frac{3x_1-1}{x_1} (1+gt)^{\frac{3}{2}(x_1-1)} + \frac{\mu(3x_2-1)}{x_2} (1+gt)^{\frac{3}{2}(x_2-1)} + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\mu}{x_2} \right) (1+gt)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{3g}{4a(1+\mu)} \left[ -7,68 (1+gt)^{-0,18} + 4,68\mu (1+gt)^{-0,70} + \right. \\ &\quad \left. + (10,68 - 1,68\mu) (1+gt)^{-0,25} \right]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

In besonder, vir  $t = 0$  kry ons die beginsnelheid van die suier

$$\bar{V}_0 = \frac{3}{4} g/a \text{ en dus } g = \frac{4}{3} a \bar{V}_0. \quad (7.15)$$

Kontrole op die waarde van  $\bar{V}_0$ :

Uit (3.8):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 3 \frac{dS}{dt} - \int_s^S ds \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Dus

$$\bar{V} = \frac{d\varphi_0}{dt} = 3 \frac{dS}{dt} - \int_0^S ds \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Vir  $t = 0$  is ook  $S = 0$ , dus:

$$\bar{V}_0 = 3(dS/dt)_{t=0} = \frac{3}{4} g/a \quad (\text{m.b.v. 7.11}).$$

Rantvoorwaarde (3.9b) vir die baan van die verdigtingsgolf:

Volgens (5.5) is

$$S' = \frac{3}{4} g \frac{1}{q'} q^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} g r q^{-\frac{1}{2}} \quad (7.16)$$

waarby

$$q = (1+gt)^{\frac{1}{2}}.$$

Hiermee word

$$S''/S' = -\frac{3}{4} g \left[ \frac{1}{3} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r} q^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{dq} \right]. \quad (7.17)$$

Daar verder  $(\partial\Phi/\partial t)_{s=S} = \frac{3}{4}gq^{-\frac{1}{2}}$  word na substitusie van formule (7.6) vir  $r$ :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{s=S} + \frac{3}{4}\frac{S''}{S'} &= \frac{3}{16}gq^{-\frac{1}{2}}(q^{-1} + 9\frac{1}{r}\frac{dr}{dq}) = \\ &= \frac{9}{16}gq^{-\frac{1}{2}}\{(3\kappa_1 + \frac{1}{3})q^{\kappa_1} + \mu(3\kappa_2 + \frac{1}{3})q^{\kappa_2}\}/(q^{\kappa_1} + \mu q^{\kappa_2}) = \\ &= \frac{9}{16}gH_0(q) = \frac{1}{4}a\bar{V}_0H_0(q). \end{aligned} \right\} (7.18)$$

Die waarde van  $H_0(q)$  word nul wanneer  $q$  oneindig groot word. Deur die verhouding  $B/A = \mu$  geskik te kies kan ons bowendien  $H_0(q) = 0$  maak vir 'n willekeurige voorgeskrewe waarde van  $q$  bv. vir  $q = 1$ . Na deling van teller en noemer deur  $q^{\kappa_2}$  word

$$H_0(q) = q^{-\frac{1}{2}}(0,614q^\delta - 1,448\mu)/(q^\delta + \mu) \quad (7.19)$$

met

$$\delta = \kappa_1 - \kappa_2 = \sqrt{17}/6 = 0,6872.$$

Neem ons hierin

$$\mu = 0,614/1,448 = 0,424 \quad (7.20)$$

dan is  $H_0(1) = 0$ . Die verloop van  $H_0$  vir  $q > 1$  volg uit tabel I.

TABEL I:

$\mu = 0,424$

$q =$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	1,95	2
$q^{\frac{1}{2}} =$	1	1,064	1,119	1,169	1,216	1,239	1,249	1,258
$H_0(q) =$	0	0,041	0,061	0,069	0,073	0,073	0,073	0,073
$q =$	2,5	3	4	10	15,625	100	125	
$q^{\frac{1}{2}} =$	1,587	1,732	2,000	3,162	3,947	10,000	11,180	5
$H_0(q) =$	0,069	0,0627	0,051	0,021	0,013	0,003		$10^{-3} \times 0,93$

Die maximumafwyking is derhalwe ongeveer  $0,073 \times \frac{1}{4}a\bar{V}_0$ .

As ons vir  $\mu$  die ietwat groter waarde 0,483 neem, kry ons die verloop soos gegee in tabel II.

TABEL II:

$\mu = 0,483$

$q =$	1	1,2	1,21	1,4	1,6	1,8	2,0
$q^{\frac{1}{2}} =$	1	1,064	1,066	1,119	1,169	1,216	1,258
$H_0(q) =$	-0,057	-0,002	0	0,027	0,043	0,051	0,055

$q =$	2,2	2,3	2,4	2,6	2,8	3	4	10	100
$q^{\frac{1}{2}} =$	1,300	1,320	1,339	1,375	1,410	1,442	1,587	2,153	4,642
$H_0(q) =$	0,056	0,057	0,057	0,056	0,055	0,054	0,046	0,020	0,002

In hierdie geval het  $H_0$  'n negatiewe waarde vir  $q = 1$ . Die maximumafwyking is na beide kante prakties ewe groot en wel gelyk aan  $0,057 \times \frac{1}{4} a \bar{V}_0 = 0,78 \times$  die maximumafwyking met  $\mu = 0,424$ .

Diagram van  $H_0 = H_0(q)$ :

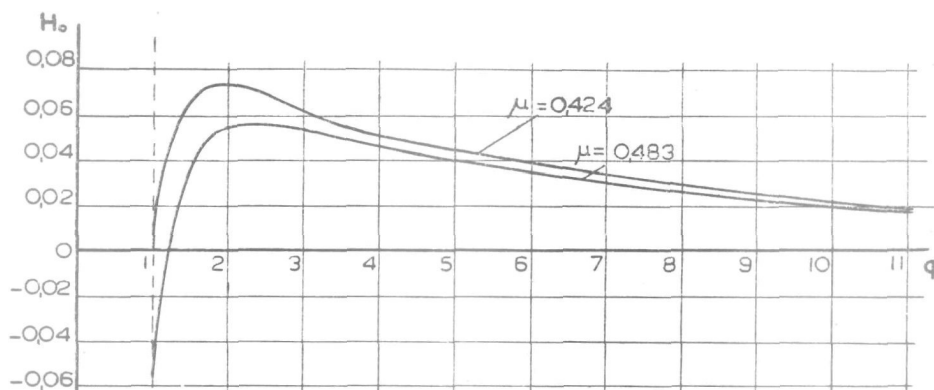


Fig. 5.

Uit formule (7.14) vir  $\bar{V}$  volg dat die bewegingsrigting van die suier naderhand omkeer as  $t$  toeneem.  $\bar{V}$  word negatief wanneer die term

$$-\frac{22,04 g}{4a(1+\mu)}(1+gt)^{-0,18} = -\frac{2,56}{1+\mu} \bar{V}_0 (1 + \frac{1}{9} a \bar{V}_0 t)^{-0,18} \quad (\text{m. b. v. (7.15)})$$

oorweeg. Dit hang ewewel nog van  $\mu$  af.

Hierop kom ons nog later terug.

§ 8. *Funksie van die tipe  $(1 + g_1 t)/q(s)$  wat aan albei die rantvoorwaardes eksak voldoen en van die vergelyking (3.3b) self 'n benaderde oplossing is.*

Ons het in § 6 en § 7 twee oplossings vir  $\Phi$  verkry wat albei die faktor  $(1 + gt)^{\frac{1}{2}}$  bevat, terwyl die van- $s$ -afhanklike faktor so bepaal is, dat óf eksak voldoen word aan beide rantvoorwaardes, dog slegs by benadering aan die differensiaalvergelyking (oplossing van § 6); óf eksak voldoen word aan die differensiaalvergelyking en aan die rantvoorwaarde vir  $s = 0$  terwyl nie eksak voldoen word aan die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf nie (oplossing van § 7).

Ons kan nou twee hiermee-vergelykbare oplossings verkry, waarin die tydsfaktor in  $\Phi$  die vorm  $(1 + g_1 t)$  besit. In § 8 sal ons die daarby-be-



horende funksie van  $s$  so bepaal dat eksak voldoen word aan albei die rantvoorwaardes en slegs by benadering aan die differensiaalvergelyking, terwyl ons in § 9 die funksie van  $s$  so sal kies dat eksak voldoen word aan die differensiaalvergelyking en die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ , dog nie aan die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf nie.

Dit sal naderhand blyk dat sowel die oplossings van § 6 en § 7 as die oplossings van § 8 en § 9 beskou kan word as spesiale gevalle van die meer algemene oplossings wat ons in hoofstuk III sal uitwerk.

Stel in vergelyking (3.3b):

$$\Phi = (1 + g_1 t)/q(s). \quad (8.1)$$

Nou is  $\partial^2 \Phi / \partial t^2 = 0$ ; die vergelyking word dus na uitdeling van die faktor  $(1 + g_1 t)^{-\frac{3}{2}}$ :

$$\frac{d^2}{ds^2} (S'^2 q^{\frac{3}{2}}) = 0. \quad (8.2)$$

Langs die baan van die verdigtingsgolf is  $\Phi = 1$ ; dié baan word dus gegee deur

$$q = 1 + g_1 t. \quad (8.3)$$

Hieruit volg deur differensiasie na  $t$ :

$$S' = g_1 / q' \quad (8.4)$$

en

$$S''/S' = -g_1 q''/q'^2. \quad (8.5)$$

In verband met die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf kry ons dus dat

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{9}{4} \frac{S''}{S'} = \frac{1}{q} - \frac{9}{4} \frac{q''}{q'^2}.$$

Aan hierdie rantvoorwaarde word dus voldoen as

$$q'/q = \frac{9}{4} q''/q' \quad (8.6)$$

waaruit deur integrasie volg, met inagneming dat  $v = 1$  as  $s = 0$ :

$$q = (1 + h_1 s)^{\frac{2}{3}} \quad (8.7)$$

waarin  $h_1$  'n (voorlopig) willekeurige konstant is. Dus:

$$\Phi = (1 + g_1 t)/(1 + h_1 s)^{\frac{2}{3}}. \quad (8.8)$$

Ons moet nog die rantvoorwaarde (3.5b) vir  $s = 0$  besien. Dit gee

$$\left( \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_{s=0} = -a = -\frac{9}{8} h_1,$$

d.i.

$$h_1 = +\frac{8}{9} a. \quad (8.9)$$

Hiermee word

$$\Phi = (1 + g_1 t)/(1 + \frac{8}{9} a s)^{\frac{2}{3}} \quad (8.10)$$

en

$$S = \frac{9}{5a} \{ (1 + g_1 t)^{\frac{2}{3}} - 1 \}, \text{ uit (8.3) en (8.7)}. \quad (8.11)$$

Ons sal nou ondersoek in hoeverre hierdie uitdrukking vir  $\Phi$  die differensiaalvergelyking bevredig.

Uit (8.4) en (8.7) volg:

$$S'^2 = \frac{g_1^2}{a^2} (1 + \frac{5}{9} as)^{-\frac{2}{3}}$$

in terme van  $s$  alleen en

$$S'^2 \Phi^{-\frac{2}{3}} = \frac{g_1^2}{a^2} (1 + g_1 t)^{-\frac{2}{3}} (1 + \frac{5}{9} as)^{\frac{2}{3}}$$

Dus

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{2}{3}}) = \frac{1}{2} \frac{g_1^2}{a^2} (1 + g_1 t)^{-\frac{2}{3}} (1 + \frac{5}{9} as)^{-\frac{2}{3}} \neq 0. \quad (8.12)$$

Aan die differensiaalvergelyking word dus nie in die algemeen voldoen nie. Die fout neem egter onbepaald af as  $t$  en/of  $s$  onbepaald toeneem. Dit het sy grootste waarde as  $s = t = 0$  nl.  $\frac{1}{2} \frac{g_1^2}{a^2}$ .

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Aan die hand van (3.7a) kry ons:

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= 4S - \int_s^S ds (1 + g_1 t) (1 + \frac{5}{9} as)^{-\frac{2}{3}} = \\ &= 4S + \frac{9}{4a} [(1 + \frac{5}{9} as)^{-\frac{1}{3}} (1 + g_1 t)]_s^S = \\ &= \frac{189}{20a} (1 + g_1 t)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{4a} (1 + g_1 t) (1 + \frac{5}{9} as)^{-\frac{1}{3}} - \frac{36}{5a}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die baan van die suier:

Stel vir die baan van die suier  $s = 0$  in (8.13); dit gee

$$\varphi(0; t) = \frac{189}{20a} (1 + g_1 t)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{4a} (1 + g_1 t) - \frac{36}{5a}. \quad (8.14)$$

Vir die snelheid van die suier kry ons

$$\bar{V} = \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{21}{4} \frac{g_1}{a} (1 + g_1 t)^{-\frac{1}{3}} - \frac{9}{4} \frac{g_1}{a}. \quad (8.15)$$

Vir  $t = 0$  kry ons die beginsnelheid van die suier nl.

$$\bar{V}_0 = 3g_1/a, \text{ d. i. } g_1 = \frac{1}{3} a \bar{V}_0. \quad (8.16)$$

Dus:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 \left[ \frac{7}{4} (1 + \frac{1}{3} a \bar{V}_0 t)^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{4} \right]. \quad (8.17)$$

Ons merk op dat die snelheid uiteindelik van teken verander as  $t$  toeneem en nader tot  $-0,75 \bar{V}_0$  as  $t$  nader tot oneindig.

§ 9. *Oplossing van die vorm  $(1 + g_1 t)/q(s)$  wat aan die vergelyking (3.3b) en aan die eerste maar nie aan die tweede rantvoorwaarde eksak voldoen nie.*

Stel soos in die vorige paragraaf in vergelyking (3.3b)

$$\Phi = (1 + g_1 t)/q(s) \quad (9.1)$$

waarby weer

$$q(0) = 1. \quad (9.2)$$

Na uitvoering van die nodige vereenvoudiging verkry ons dan weer vergelyking (8.2).

Die baan van die verdigtingsgolf word weereens gegee deur (8.3) en die waarde van  $S'$  deur (8.4). Substitusie van hierdie waarde vir  $S'$  in (8.2) gee:

$$\frac{d^2}{ds^2} (q^{\frac{3}{2}}/q'^2) = 0 \quad (9.3)$$

waaruit deur integrasie volg dat

$$q^{\frac{3}{2}}/q'^2 = A_1 s + A_2. \quad (9.4)$$

Hieruit kry ons

$$\frac{ds}{\sqrt{A_1 s + A_2}} = \frac{dq}{q^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.5)$$

Integrasie gee:

$$A_1 s + A_2 = 9(A_1 q^{\frac{2}{3}} + B_1)^2. \quad (9.6)$$

Hierby is  $A_1$ ,  $A_2$  en  $B_1$  (voorlopig nog) willekeurige konstante.

**Opmerking:** Dit sal later blyk dat  $A_1 > 0$ , sodat  $s \rightarrow \infty$  as  $q \rightarrow \infty$  en omgekeerd.

$$\text{As } s = 0 \text{ dan } q = 1, \text{ dus } \sqrt{A_2} = 3(A_1 + B_1), \text{ uit (9.6).} \quad (9.7)$$

Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Uit (9.1):

$$\left( \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_{s=0} = - \left( \frac{1}{q} \frac{dq}{ds} \right)_{s=0} = -a.$$

Uit (9.4) kry ons

$$(dq/ds)_{s=0} = 1/\sqrt{A_2}.$$

en dus is

$$\sqrt{A_2} = 1/a. \quad (9.8)$$

Uit (9.7) en (9.8) volg dus dat  $A_1 + B_1 = 1/3a$ . Stel ons  $B_1/A_1 = \mu^*$ , dan is dus

$$A_1 = 1/3a(1 + \mu^*) \quad B_1 = \mu^*/3a(1 + \mu^*) \quad (9.9)$$

waarby  $\mu^*$  nog willekeurig is.

Die baan van die verdigtingsgolf:

Stel in (9.6)  $s = S$  en  $q = 1 + g_1 t$  vir die vergelyking van die baan van die verdigtingsgolf; dit gee

$$\sqrt{A_1 S + A_2} = 3A_1(1 + g_1 t)^{\frac{1}{2}} + 3B_1 \quad (9.10)$$

of

$$S = \frac{3}{a(1 + \mu^*)} \{(1 + g_1 t)^{\frac{1}{2}} + \mu^*\}^2 - \frac{3}{a}(1 + \mu^*). \quad (9.10a)$$

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Aan die hand van (3.7a) kry ons

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= 4S - \int_s^S ds (1 + g_1 t) q^{-1} = \\ &= 4S - (1 + g_1 t) \int_q^{S^*} dq (3A_1 q^{-\frac{3}{2}} + 3B_1 q^{-\frac{1}{2}}) \text{ (waar } S^* = 1 + g_1 t) = \\ &= \frac{1}{a(1 + \mu^*)} \left\{ 13,5(1 + g_1 t)^{\frac{1}{2}} + 25,2\mu^*(1 + g_1 t)^{\frac{1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - (1 + g_1 t)(1,5q^{-\frac{3}{2}} + 1,2\mu^*q^{-\frac{1}{2}}) + 12(1 + 2\mu^*) \right\}. \quad (9.11) \end{aligned}$$

Die baan van die suier:

Stel  $s = 0$ ,  $q = 1$  in (9.11) vir die baan van die suier; dit gee:

$$\varphi(0; t) = \frac{1}{a(1 + \mu^*)} \left\{ 13,5(1 + g_1 t)^{\frac{1}{2}} + 25,2\mu^*(1 + g_1 t)^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - (1,5 + 1,2\mu^*)(1 + g_1 t) + 12(1 + 2\mu^*) \right\}. \quad (9.12)$$

Vir die snelheid van die suier kry ons

$$\bar{V} = \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{g_1}{a(1 + \mu^*)} \{4,5(1 + g_1 t)^{-\frac{1}{2}} + 4,2\mu^*(1 + g_1 t)^{-\frac{1}{2}} - (1,5 + 1,2\mu^*)\}. \quad (9.13)$$

Ons kry in besonder vir  $t = 0$  die beginsnelheid van die suier nl.

$$\bar{V}_0 = 3g_1/a, \text{ d.i. } g_1 = \frac{1}{3} a \bar{V}_0. \quad (9.14)$$

Hiermee is  $g_1$  nou ook bepaal.

Volgens formule (9.13) keer die snelheid naderhand van rigting om. As  $t$  onbepaald toeneem, dan nader die snelheid tot

$$-\frac{1}{10} \left( \frac{5 + 4\mu^*}{1 + \mu^*} \right) \bar{V}_0. \quad (9.15)$$

Hierdie eindwaarde hang ewewel nog van  $\mu^*$  af; ons kom nog weer hierop terug.

Die rantvoorwaarde (3.9b) vir die baan van die verdigtingsgolf:

Uit (9.10a) kry ons deur differensiasie na  $t$

$$S' = \frac{g_1}{a(1 + \mu^*)} \{(1 + g_1 t)^{-\frac{1}{2}} + \mu^*(1 + g_1 t)^{-\frac{1}{2}}\}$$

en

$$S''/S' = -\frac{g_1}{6} \cdot \frac{1}{1+g_1 t} \left( \frac{4+5\mu^*(1+g_1 t)^{-\frac{1}{2}}}{1+\mu^*(1+g_1 t)^{-\frac{1}{2}}} \right) = \quad (9.16)$$

$$= -\frac{g_1}{6} \cdot \frac{1}{q} \left( \frac{4+5\mu^* q^{-\frac{1}{2}}}{1+\mu^* q^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (9.16a)$$

aangesien langs die baan van die verdigtingsgolf  $q = 1 + g_1 t$ .

Daar verder  $(\partial\Phi/\partial t)_{s=S} = g_1/q$  kry ons dus

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{9S''}{4S'} &= -\frac{3g_1}{8} \cdot \frac{1}{6q} \left\{ \frac{4q^{\frac{1}{2}} + 7\mu^*}{q^{\frac{1}{2}} + \mu^*} \right\} = \\ &= -\frac{a\bar{V}_0}{4} \frac{1}{6q} \left( \frac{4q^{\frac{1}{2}} + 7\mu^*}{q^{\frac{1}{2}} + \mu^*} \right) = \frac{a\bar{V}_0}{4} H_{00}(q). \end{aligned} \right\} (9.17)$$

Die waarde van  $H_{00}(q)$  nader tot nul as  $q \rightarrow \infty$ . Deur die verhouding  $B_1/A_1 = \mu^*$  geskik te kies kan ons bowendien nog die waarde van  $H_{00}(q)$  nul maak vir 'n willekeurige voorgeskrewe waarde van  $q$ . Ons sal  $\mu^*$  so kies dat  $H_{00} = 0$  vir  $q = 1$  d.i. sodanig dat die afwyking van die tweede rantvoorwaarde gelyk aan nul is in die oorsprong; hiertoe stel ons

$$\mu^* = -4/7. \quad (9.18)$$

Dan is

$$H_{00}(q) = -\frac{2}{3} q^{-1} (q^{\frac{1}{2}} - 1) / (q^{\frac{1}{2}} - 4/7). \quad (9.19)$$

Die verloop van  $H_{00}(q)$  vir  $q > 1$  word in tabel III gegee.

TABEL III:

$q$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,1
$q^{\frac{1}{2}}$	1	1,064	1,119	1,169	1,216	1,258	1,281
$H_{00}$	0	-0,0374	-0,0565	-0,0666	-0,0717	-0,0741	-0,0746
$q$	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4	
$q^{\frac{1}{2}}$	1,300	1,320	1,339	1,357	1,442	1,587	
$H_{00}$	-0,0748	-0,0747	-0,0745	-0,0736	-0,0709	-0,0629	
$q$	8	10	15,625	100	125		
$q^{\frac{1}{2}}$	2	2,153	2,5	4,462	5		
$H_{00}$	-0,0410	-0,0348	-0,0245	-0,0049	-0,0039		

Diagram van  $H_{00} = H_{00}(q)$ :

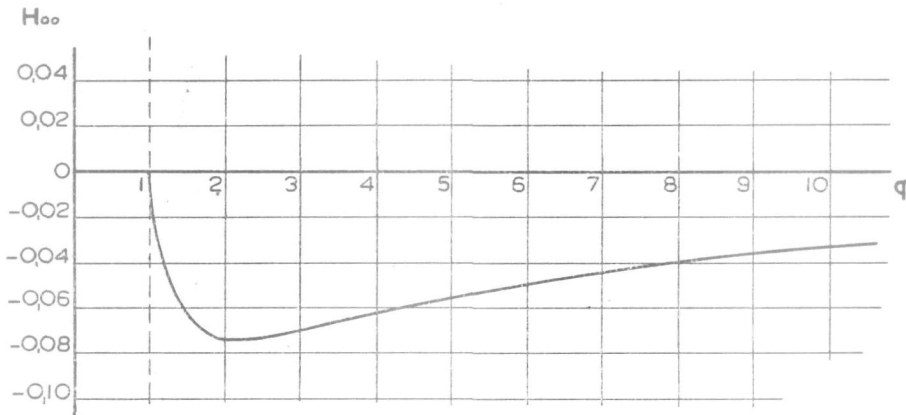


Fig. 6.

Die afwyking neem dus betreklik snel toe as  $q$  vanaf 1 toeneem en bereik sy grootste (absolute) waarde as  $q$  ongeveer gelyk is aan 2,2 nl.  $0,75 \times \frac{1}{2} a \bar{V}_0$ . Daarna neem dit onbepaald af as  $q$  onbepaald toeneem. Die absolute waarde van die afwyking bly steeds groter as die afwyking by die oplossing van § 7. Die verskil is egter nêrens baie groot nie.

Tenslotte merk ons nog op dat met  $\mu^* = -4/7$  die eindsnelheid van die suier, volgens (9.15), gelyk is aan

$$-0,633 \bar{V}_0. \quad (9.20)$$

**Slotopmerking:** Met die uitkomst van § 6 en § 8 neem die parameter  $a$  (wat ons in (3.4) ingevoer het) in albei gevalle die waarde  $\frac{3}{7} \varrho_0 / \bar{q}$  aan. Kies ons in § 7 en § 9 die waardes van  $\mu$  respektiewelik  $\mu^*$  sô dat die oplossings in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen (soos ons wel gedoen het) dan neem  $a$  presies dieselfde waarde aan. Ons kan bewys dat vir alle oplossings wat in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen  $(S''/S'^2)_0 = -4a/9$ .

### HOOFTUK III.

Die metode waarby gesoek word na 'n oplossing met  $\Phi$  in die vorm van 'n breuk, waarvan die teller 'n funksie van  $t$  en die noemer 'n funksie van  $s$  is, laat hom nog veralgemeen as ons nie vir die teller a priori 'n uitdrukking van die vorm  $(1 + gt)^m$  aanneem nie. Die gedagtegang hiertoe te volg is aan die hand gegee deur prof. dr. S. C. VAN VEEN.

Al dadelik wil ons opmerk dat ons ook hier twee weë kan volg. Ons kan 'n eksakte oplossing vir die differensiaalvergelyking (3.3b) vir  $\Phi$  soek, wat tewens ook aan die eerste rantvoorwaarde (dié vir  $s = 0$ ) voldoen en dan nagaan op welke wyse ons die afwykings ten aansien van die tweede rantvoorwaarde (langs die baan van die verdigtingsgolf) so gering moontlik kan maak. Hierdie weg word gevolg in §§ 10 tot 16. Hierby is in § 10 die oplossing van die vergelyking behandel; in § 11 is die afwyking van die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf nader beskou, terwyl vervolgens in §§ 12, 13 en 14 numerieke berekenings vir drie waardes van 'n-in-die-oplossing-optredende parameter  $\lambda$  gegee word. In § 15 is die verskillende gevalle met mekaar vergelyk (waarby ook die oplossings van § 7 en § 9 uit hoofstuk II opgeneem is); vervolgens word in § 16 reeksontwikkelings vir die aanvangstadia van die beweging uit die verskillende oplossings afgelei.

Die ander weg is die, waarby 'n uitdrukking vir  $\Phi$  gesoek word, wat aan albei die rantvoorwaardes eksak voldoen, dog van die differensiaalvergelyking slegs 'n benaderde oplossing is. Dit blyk dat hierdie metode veel minder rekenwerk vereis; dit is uitgewerk in § 17, terwyl reeksontwikkelings vir die aanvangstadia gegee is in § 18.

Aan die slot van § 18 word die resultate wat ons langs beide weë verkry het, met mekaar vergelyk.

§ 10. Ons gaan uit van vergelyking (3.3b):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{2}{3}}) = 0.$$

Ooreenkomstig die aanwysing gegee deur prof. VAN VEEN stel ons

$$\Phi = u(t)^3/v(s)^3 \quad (10.1)$$

waarby geld:

$$u(0) = v(0) = 1. \quad (10.2)$$

Substitusie van dié waarde vir  $\Phi$  in (3.3b) gee:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{2}{3}}) = \frac{1}{v^3} \frac{d^2}{dt^2} (u^3) + \frac{3}{u^5} \frac{d^2}{ds^2} (S'^2 v^5).$$

Hieruit volg:

$$\frac{1}{3} u^5 \frac{d^2(u^3)}{dt^2} = -v^3 \frac{d^2}{ds^2} (S'^2 v^5) = \text{konstant} = -D \text{ (sê)},$$

aangesien die eerste term 'n funksie van  $t$  alleen en die tweede 'n funksie van  $s$  alleen is.

Ons het nou twee gewone differensiaalvergelykings:

$$d^2(u^3)/dt^2 = 3 D u^{-5} \quad (10.3)$$

en

$$d^2(S'^2 v^5)/ds^2 = D v^{-3}. \quad (10.4)$$

Vergelyking (10.3) is onmiddellik integreerbaar nadat dwarsdeur met  $2du^3/dt$  vermenigvuldig is:

$$2 \frac{du^3}{dt} \frac{d^2 u^3}{dt^2} = -\frac{6D}{u^5} \frac{du^3}{dt} = -\frac{18D}{u^3} \frac{du}{dt}.$$

Integrasie gee:

$$\left(\frac{du^3}{dt}\right)^2 = \frac{9D}{u^2} + E = \frac{E(u^2 + \lambda^2)}{u^2},$$

waarby

$$9D = E\lambda^2. \quad (10.5)$$

Dus:

$$3u^2 \frac{du}{dt} = \frac{du^3}{dt} = \frac{\sqrt{E} \sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u}, \quad (10.6)$$

d.i.

$$\sqrt{E} dt = 3u^3 du / \sqrt{u^2 + \lambda^2} = \{3u \sqrt{u^2 + \lambda^2} - 3\lambda^2 u / \sqrt{u^2 + \lambda^2}\} du. \quad (10.7)$$

Deur integrasie:

$$\sqrt{E} t = (u^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}} - 3\lambda^2 (u^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - (1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}} + 3\lambda^2 (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (10.8)$$

waarby  $u$  variëer van 1 na  $+\infty$ .

Ook is

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = \frac{1}{3} \sqrt{E} \sqrt{1 + \lambda^2} \quad (\text{uit 10.6 en 10.2}). \quad (10.9)$$

Hier kom dus 'n nuwe parameter  $\lambda$  voor. Ons beskik dus oor een parameter meer as in die oplossings van § 7 en § 9; dit bied groter geleentheid tot aanpassing van 'n (moontlike) oplossing by die rantvoorwaardes.

Opgemerkt mag word dat wanneer  $\lambda$  baie groot word, uit (10.7) volg:

$$\sqrt{E} t = \frac{3}{4} \frac{u^4}{\lambda} + \text{konstant}.$$

Stel ons  $\frac{3}{4} \lambda \sqrt{E} = g$ , dan volg met passende keuse van die konstante:

$$u^3 = (1 + gt)^{\frac{4}{3}},$$

en dus

$$\Phi = (1 + gt)^{\frac{4}{3}} / v(s)^3. \quad (10.10a)$$



Hieruit blyk dat ons op die formules van § 7 terugval deur  $\lambda$  onbegrensd te laat toeneem.

Laat ons daarenteen  $\lambda \rightarrow 0$ , dan volg uit (10.5) dat  $D = 0$  en uit (10.8) dat  $\sqrt{E}t = u^3 - 1$ . Stel ons nou  $\sqrt{E} = g_1$ , dan kry ons dus

$$u^3 = 1 + g_1 t,$$

en

$$\Phi = (1 + g_1 t)/v(s)^3. \quad (10.10b)$$

In hierdie geval val ons dus op die formules en oplossing van § 9 terug.

Langs die baan van die verdigtingsgolf is  $\Phi = 1$ ; hierdie baan word dus gegee deur:

$$v(s) = u(t). \quad (10.11)$$

Hieruit volg:

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s=S} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt},$$

dus:

$$\left. \begin{aligned} S' &= \frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{ds}{dv} = \\ &= \frac{\sqrt{E}}{3} \frac{\sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u^3} \frac{ds}{dv}, \text{ uit (10.6)} \end{aligned} \right\} \quad (10.12a)$$

$$= \frac{\sqrt{E}}{3} \frac{\sqrt{v^2 + \lambda^2}}{v^3} y, \text{ m.b.v. (10.11)} \quad (10.12)$$

met

$$ds/dv = y. \quad (10.13)$$

Die differensiaalvergelyking (10.4) vir  $v$  word

$$\frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{E(v^2 + \lambda^2)}{9v} y^2 \right\} = \frac{E\lambda^2}{9} \frac{1}{v^3},$$

of:

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dv} \left\{ \frac{1}{y} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2 + \lambda^2}{v^2} y^2 \right) \right\} = \frac{\lambda^2}{v^3}.$$

Dit gee na uitvoering van die differensiasies en vereenvoudiging:

$$v^2(v^2 + \lambda^2) \frac{d^2 y}{dv^2} + \frac{3}{2} v(v^2 - \lambda^2) \frac{dy}{dv} + \frac{1}{2} \lambda^2 y = 0. \quad (10.14)$$

Stel

$$v = \lambda/\sqrt{w}; \quad w = \lambda^2/v^2 \quad (10.15)$$

waarin  $v$  variëer van 1 tot  $+\infty$  en dus  $w$  van  $\lambda^2$  tot 0. Nou is

$$\frac{d}{dv} = -\frac{2\lambda^2}{v^3} \frac{d}{dw}; \quad \frac{d^2}{dv^2} = \frac{4\lambda^4}{v^6} \frac{d^2}{dw^2} + \frac{6\lambda^2}{v^4} \frac{d}{dw}; \quad (10.16)$$

substitusie in (10.14) gee:

$$w(w+1) \frac{d^2 y}{dw^2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} w\right) \frac{dy}{dw} + \frac{1}{8} y = 0.$$

Met  $w = \bar{w} - 1$  (sodat  $\bar{w}$  verander van 1 tot  $1 + \lambda^2$ ) word dit:

$$\bar{w}(1-\bar{w}) \frac{d^2 y}{d\bar{w}^2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{4} \bar{w}\right) \frac{dy}{d\bar{w}} - \frac{1}{8} y = 0. \quad (10.17)$$

(10.17) is 'n hipergeometriese differensiaalvergelyking met algemene oplossing:

$$y = C_1 \bar{w}^{-\alpha} F(a, a-\gamma+1; a-\beta+1; 1/\bar{w}) + C_2 \bar{w}^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1; \beta-a+1; 1/\bar{w}) \quad (10.18)$$

$$= C_1 \bar{w}^{-\alpha} F_1(\bar{w}) + C_2 \bar{w}^{-\beta} F_2(\bar{w}), \quad (\text{sê}) \quad (10.18a)$$

of 
$$= C_1 y_1(\bar{w}) + C_2 y_2(\bar{w}), \quad (\text{sê}) \quad (10.18b)$$

waarin  $\bar{w} = w + 1 = 1 + \lambda^2/v^2$ ;  $v = \lambda/\sqrt{\bar{w}-1}$ ;

$$\gamma = 3/2; \quad a = \frac{1}{8}(5 + \sqrt{17}); \quad \beta = \frac{1}{8}(5 - \sqrt{17})$$

en  $C_1$  en  $C_2$  twee (voorlopig) willekeurige konstante is.

Uit (10.13) volg:

$$s = \int_1^v dv (C_1 y_1 + C_2 y_2) = \quad (10.19)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda C_1 \int_w^{1+\lambda^2} dw \{F_1(w+1)/(w+1)^\alpha w^3\} + \text{ens.} = \quad (10.19a)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda C_1 \int_w^{1+\lambda^2} d\bar{w} \{F_1(w)/\bar{w}^\alpha (\bar{w}-1)^3\} + \text{ens.} \quad (10.19b)$$

waar „ens.” gebruik word om die onnodige herhaling van soortgelyke uitdrukkings te vermy. In (10.19a) staan dit vir 'n uitdrukking soos die een wat dit voorafgaan, alleen word  $C_1$  deur  $C_2$  vervang,  $F_1(w)$  deur  $F_2(w)$  en  $\bar{w}^\alpha$  deur  $\bar{w}^\beta$ . In wat volg sal ons nog meermale van die notasie gebruik maak.

Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Uit die uitdrukking (10.1) vir  $\Phi$  volg

$$\left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)_{s=0} = - \left(\frac{3}{v} \frac{dv}{ds}\right)_{s=0} = - \left(\frac{3}{y v}\right)_{s=0} = -a,$$

dus

$$y_0 = 3/a. \quad (10.20)$$

En dus:

$$\begin{aligned} 3/a = y_0 &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)_{s=0, v=1} = \\ &= C_1 (1+\lambda^2)^{-\alpha} F\{a, a-\gamma+1; a-\beta+1; 1/(1+\lambda^2)\} + \text{ens.} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Die baan van die verdigtingsgolf:

Stel in (10.19a)  $v = u$ ,  $w = \lambda^2/u^2$ ; dit gee

$$S = \frac{1}{2} C_1 \lambda \int_{\lambda^2/u^2}^{\lambda^2} dw \{F_1(w+1)/w^{\frac{3}{2}}(w+1)^\alpha\} + \text{ens.} \quad (10.22)$$

waarby  $u$  (van die onderste grens) 'n funksie van  $t$  alleen is.

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Aan die hand van (3.7a) kry ons:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(s; t) &= 4S - u^3 \int_s^S ds [v(s)]^{-3} = \\ &= 4S - u^3 \int_v^u dv y v^{-3} = 4S - \frac{1}{2} \frac{u^3}{\lambda^2} \int_{\lambda^2/u^2}^w dw y. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Die baan van die suier:

Die baan van die suier volg deur in (10.23) in die boonste grens  $w = \lambda^2$  ( $s = 0$ ,  $v = 1$ ) te stel:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= 4S - \frac{u^3}{2\lambda^2} \int_{\lambda^2/u^2}^{\lambda^2} dw y = \\ &= 2C_1 \lambda \int_{\lambda^2/u^2}^{\lambda^2} dw \left( \frac{1}{w^{\frac{3}{2}}} - \frac{u^3}{4\lambda^3} \right) \frac{F_1(w+1)}{(w+1)^\alpha} + \text{ens.} \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Vir die snelheid van die suier kry ons

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} \frac{du}{dt} = \\ &= \frac{du}{dt} \left[ 3C_1 \frac{F_1(1 + \lambda^2/u^2)}{(1 + \lambda^2/u^2)^\alpha} + \text{ens.} - \frac{3}{2} C_1 \frac{u^2}{\lambda^2} \int_{\lambda^2/u^2}^{\lambda^2} dw \frac{F_1(w+1)}{(w+1)^\alpha} - \text{ens.} \right]. \end{aligned} \quad (10.25)$$

In besonder vir  $t = 0$ ,  $v = 1$ ,  $u = 1$ ,  $w = \lambda^2$  kry ons die beginsnelheid van die suier:

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 &= \left( \frac{du}{dt} \right)_0 [3C_1 (1 + \lambda^2)^{-\alpha} F_1(1 + \lambda^2) + \text{ens.}] = \\ &= \sqrt{E} \sqrt{1 + \lambda^2} [C_1 (1 + \lambda^2)^{-\alpha} F_1(1 + \lambda^2) + \text{ens.}], \text{ (m.b.v. (10.9))} = \\ &= \sqrt{E} \sqrt{1 + \lambda^2} y_0. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Kontrole op die beginsnelheid van die suier:

Uit (3.7b) volg

$$\varphi_0 = 4S - \int_0^S ds \Phi,$$

en dus

$$\bar{V} = \frac{d\varphi_0}{dt} = 3S' - \int_0^S ds \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \text{ uit (3.8).}$$

Vir  $t = 0$  is ook  $S = 0$  en dus

$$\bar{V}_0 = (3S')_{t=0} = \sqrt{E} \sqrt{1 + \lambda^2} y_0 = \frac{3}{a} \sqrt{E} \sqrt{1 + \lambda^2}, \text{ m.b.v. (10.20). (10.26a)}$$

Die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf (in die vervolg die tweede rantvoorwaarde genoem):

Uit (10.12a):

$$S' = \frac{1}{3} \sqrt{E} u^{-3} \sqrt{u^2 + \lambda^2} \quad (10.27)$$

en dus

$$S'' = \frac{1}{3} \sqrt{E} \left\{ \frac{dy}{du} \frac{\sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u^3} + \frac{y}{u^2 \sqrt{u^2 + \lambda^2}} - \frac{3y \sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u^4} \right\} \frac{du}{dt};$$

dit gee

$$\frac{S''}{S'} = \left\{ \frac{1}{y} \frac{dy}{du} + \frac{u}{u^2 + \lambda^2} - \frac{3}{u} \right\} \frac{du}{dt};$$

ook

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} = \frac{3u^2}{v^3} \frac{du}{dt} = \frac{3}{u} \frac{du}{dt}.$$

Dus:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{9S''}{4S'} = \frac{9}{4u} \frac{du}{dt} \left\{ \frac{u}{y} \frac{dy}{du} + \frac{u^2}{u^2 + \lambda^2} - \frac{5}{3} \right\} \quad (10.28)$$

waarby

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{E}}{3} \frac{\sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u^3} = \frac{a\bar{V}_0}{9} \frac{\sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u^3 \sqrt{1 + \lambda^2}}, \text{ m.b.v. (10.26a). (10.29)}$$

Langs die baan van die verdigtingsgolf is  $u = v$ ; dus volg met behulp van (10.16):

$$\frac{u}{y} \frac{dy}{du} = -\frac{2\lambda^2}{u^2} \frac{1}{y} \frac{dy}{d\bar{w}},$$

en:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \bar{w}^{-a} F(a, a-\gamma+1; a-\beta+1; 1/\bar{w}) + \text{ens.} = \\ &= C_1 \left\{ \frac{1}{\bar{w}^a} + \frac{a(a-\gamma+1)}{1(a-\beta+1)} \frac{1}{\bar{w}^{a+1}} + \frac{a(a+1)(a-\gamma+1)(a-\gamma+2)}{1.2(a-\beta+1)(a-\beta+2)} \frac{1}{\bar{w}^{a+2}} + \dots \right\} + \text{ens.} \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\bar{w}} &= -C_1 a \bar{w}^{-a-1} F(a+1; a-\gamma+1; a-\beta+1; 1/\bar{w}) + \text{ens.} = \\ &= -C_1 a \bar{w}^{-a-1} \bar{F}_1(\bar{w}) - C_2 \beta \bar{w}^{-\beta-1} \bar{F}_2(\bar{w}), \text{ (sê) } = \quad (10.30) \end{aligned}$$

$$= -\bar{w}^{-1} [C_1 a \bar{y}_1(\bar{w}) + C_2 \beta \bar{y}_2(\bar{w})], \text{ sê. (10.30a)}$$

Dus:

$$\frac{u}{y} \frac{dy}{du} + \frac{u^2}{u^2 + \lambda^2} - \frac{5}{3} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{u^2 + \lambda^2} \left[ \frac{2 C_1 \alpha \bar{y}_1(\bar{w}) + 2 C_2 \beta \bar{y}_2(\bar{w})}{C_1 y_1 + C_2 y_2} - \frac{5}{3} - \frac{2 u^2}{3 \lambda^2} \right]. \quad (10.31)$$

Hiermee word:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=s} + \frac{9 S''}{4 S'} = \frac{a \bar{V}_0}{4} \left[ \frac{1}{u^4} \frac{\lambda^2}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \cdot \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{2 C_1 \alpha \bar{y}_1 (1 + \lambda^2/u^2) + 2 C_2 \beta \bar{y}_2 (1 + \lambda^2/u^2)}{C_1 y_1 (1 + \lambda^2/u^2) + C_2 y_2 (1 + \lambda^2/u^2)} - \frac{5}{3} - \frac{2 u^2}{3 \lambda^2} \right\} \right] = \quad (10.32)$$

$$= \frac{1}{4} a \bar{V}_0 H(u), \quad s\bar{e}.$$

Aan die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf word dus nie in die algemeen voldoen nie. Die uitdrukking (10.32) gee die afwyking. Die konstante  $C_1$ ,  $C_2$  en die parameter  $\lambda$  moet egter nog bepaal word. Hierby moet rekening gehou word met die betrekking (10.21) tussen die konstante  $C_1$  en  $C_2$ . Dit lê voor die hand om die konstante so te probeer bepaal dat die maximumafwyking van die tweede rantvoorwaarde so klein moontlik is.

Ons sal die uitdrukking vir  $H(u)$  in die volgende paragraaf nader ondersoek.

§ 11. *Die afwyking van die rantvoorwaarde vir die baan van die verdigtingsgolf.*

Die afwyking word gegee deur die uitdrukking (10.32), nl.  $\frac{1}{4} a \bar{V}_0 H(u)$ , waar

$$H(u) = \frac{1}{u^4} \frac{\lambda^2}{\sqrt{(1 + \lambda^2)(u^2 + \lambda^2)}} \left\{ \frac{2 \alpha C_1 \bar{y}_1 + 2 \beta C_2 \bar{y}_2}{C_1 y_1 + C_2 y_2} - \frac{5}{3} - \frac{2 u^2}{3 \lambda^2} \right\}; \quad (11.1)$$

hierby is:

$$\left. \begin{aligned} y_1(\bar{w}) &= \frac{1}{w^\alpha} F_1(\bar{w}) = \frac{1}{w^\alpha} F\left(\alpha; \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \frac{1}{w}\right) \\ y_2(\bar{w}) &= \frac{1}{w^\beta} F_2(\bar{w}) = \frac{1}{w^\beta} F\left(\beta; \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; \frac{1}{w}\right) \\ \bar{y}_1(\bar{w}) &= \frac{1}{w^\alpha} \bar{F}_1(\bar{w}) = \frac{1}{w^\alpha} F\left(\alpha + 1; \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \frac{1}{w}\right) \\ \bar{y}_2(\bar{w}) &= \frac{1}{w^\beta} \bar{F}_2(\bar{w}) = \frac{1}{w^\beta} F\left(\beta + 1; \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; \frac{1}{w}\right) \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

met

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{8}(5 + \sqrt{17}) = 1,14039 \\ \beta &= \frac{1}{8}(5 - \sqrt{17}) = 0,10961 \\ \gamma &= 3/2 \\ \bar{w} &= 1 + \lambda^2/u^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Die gedrag van  $H(u)$  as  $u \rightarrow \infty$ ,  $w \rightarrow 1$ :

As  $\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0 > 0$ , dan is

$$F(\alpha_0; \beta_0; \gamma_0; 1) = \frac{\Gamma(\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0) \Gamma(\gamma_0)}{\Gamma(\gamma_0 - \alpha_0) \Gamma(\gamma_0 - \beta_0)}. \quad (11.4)$$

(WHITTAKER and WATSON: A Course of Modern Analysis, Cambridge 1946, Chap. XIV, p. 281, § 14. 11).

Vir  $F_1$  is

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha = 1,14039 \\ \beta_0 &= \alpha - \gamma + 1 = 0,64039 \\ \gamma_0 &= \alpha - \beta + 1 = 2,03078, \end{aligned}$$

dus

$$\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0 = 0,25 > 0.$$

Dus

$$F_1(\bar{w})_{u=\infty} = F_1(1) = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta) \Gamma(\alpha - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(\gamma - \beta)}. \quad (11.5)$$

Vir  $\bar{F}_1$  is  $\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0 = -0,75 < 0$ . Ons kan dus nie formule (11.4) toepas nie. Vir dié geval maak ons gebruik van

$$F(\alpha_0; \beta_0; \gamma_0; x) \rightarrow \frac{\Gamma(\gamma_0) \Gamma(\alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0)}{\Gamma(\alpha_0) \Gamma(\beta_0)} (1-x)^{\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0} \text{ as } x \rightarrow 1-0. \quad (11.6)$$

(WHITTAKER and WATSON: A Course of Modern Analysis, Cambridge 1946, Chap. XIV, p. 299, ex. 18).

Nou:

$$x = 1/\bar{w} = u^2/(u^2 + \lambda^2) \rightarrow 1-0 \text{ as } u \rightarrow \infty. \quad (11.7)$$

Ons kan dus skryf:

$$\bar{F}_1(\bar{w})_{u=\infty} \cong \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha - \gamma + 1)} \left(1 - \frac{1}{\bar{w}}\right)^{\gamma - \alpha - \beta - 1}. \quad (11.8)$$

Nou is:

$$(1 - 1/\bar{w}) = \lambda^2/(\lambda^2 + u^2) \rightarrow \lambda^2/u^2 \text{ as } u \rightarrow \infty;$$

dus

$$\left. \begin{aligned} (\bar{F}_1)_{u=\infty} &\cong \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha - \gamma + 1)} \left(\frac{u^2}{\lambda^2}\right)^{\alpha + \beta - \gamma + 1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha - \gamma + 1)} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Ooreenkomstig kan ons aantoon dat:

$$F_2(1) = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta) \Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \quad (11.10)$$

en

$$(\bar{F}_2)_{u=\infty} \cong \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma) \Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1)} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (11.11)$$

Verder: omdat  $\alpha > 0$  en  $\beta > 0$ , volg dat

$$1/\bar{w}^\alpha, 1/\bar{w}^\beta \rightarrow 1 \text{ as } u \rightarrow \infty, \bar{w} \rightarrow 1.$$

Dus:

$$y_1, y_2 \rightarrow F_1, F_2 \cong \text{konstant as } u \rightarrow \infty$$

en

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2 \rightarrow \bar{F}_1, \bar{F}_2 \sim u^{\frac{3}{2}} \text{ as } u \rightarrow \infty.$$

Hiermee kry ons dus

$$\left(\frac{2C_1\alpha\bar{y}_1 + 2C_2\beta\bar{y}_2}{C_1y_1 + C_2y_2}\right)_{u=\infty} \cong \text{konstant} \times u^{\frac{3}{2}}.$$

As  $u \rightarrow \infty$  is die oorheersende term in die tweede faktor van die uitdrukking vir  $H(u)$  dus  $\sim u^2/\lambda^2$ . Dus

$$H(u) \rightarrow -\frac{1}{3\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{1}{u^3} \quad (11.12)$$

wat onafhanklik is van  $C_1$  en  $C_2$ .

Die konstante  $C_1$  en  $C_2$ :

Ons sal die konstante  $C_1$  en  $C_2$  so bepaal dat die afwyking in die oorsprong, d.i. vir  $u = 1$ , nul is.

Hier toe moet ons  $H(1) = 0$  stel; dit gee

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha C_1 \bar{y}_1 (1 + \lambda^2) + 2C_2 \beta \bar{y}_2 (1 + \lambda^2) - \\ - \frac{1}{3} (5 + 2/\lambda^2) \{C_1 y_1 (1 + \lambda^2) + C_2 y_2 (1 + \lambda^2)\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

Uit (10.21) volg:

$$y_1 (1 + \lambda^2) C_1 + y_2 (1 + \lambda^2) C_2 = 3/a. \quad (11.14)$$

Hiermee word (11.13):

$$2\alpha \bar{y}_1 (1 + \lambda^2) C_1 + 2\beta \bar{y}_2 (1 + \lambda^2) C_2 = (5 + 2/\lambda^2)/a. \quad (11.15)$$

As  $\lambda$  bekend is, kan die waardes van  $C_1$  en  $C_2$  uit (11.14) en (11.15) bereken word.

By die bepaling van  $\lambda$  sal die oorweging van 'n minimumafwyking van die tweede rantvoorwaarde deurslaggewend wees.

Ons het reeds aangetoon in § 10 dat ons terugval op die oplossings van hoofstuk II as  $\lambda \rightarrow 0$  en  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Ons sal die verloop van  $H(u)$  vir drie waardes van  $\lambda$  ondersoek nl.

$$\lambda = 5, \lambda = 1 \text{ en } \lambda = \sqrt{7/8}.$$

Ons sal later aantoon hoedat ons aan die waarde  $\sqrt{7/8}$  vir  $\lambda$  kom.

§ 12. Die geval  $\lambda = 5$ .

Eerstens moet die waardes van die konstante  $C_1$  en  $C_2$  uit vergelykings (11.14) en (11.15) bepaal word. Hiertoe moet ons die waardes van die reekse  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\bar{F}_1$  en  $\bar{F}_2$  vir  $u = 1$  ken. Vir die bepaling van die verloop van  $H(u)$  sal ons origens die waardes van die reekse vir  $u = 1,1; = 1,2; = 1,3$ ; ens. moet bepaal.

Sommering van die reekse:

Uit (11.2) en (11.3):

$$\left. \begin{aligned} F_1(\bar{w}) &= F(1,14039; 0,64039; 2,03078; 1/\bar{w}) \\ F_2(\bar{w}) &= F(0,10961; -0,39039; -0,03078; 1/\bar{w}) \\ \bar{F}_1(\bar{w}) &= F(2,14039; 0,64039; 2,03078; 1/\bar{w}) \\ \bar{F}_2(\bar{w}) &= F(1,10961; -0,39039; -0,03078; 1/\bar{w}) \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Die koeffisiënte van opeenvolgende magte van  $1/\bar{w}$  ( $= x$ ) in die ontwikkeling van bostaande reekse word vir sover as wat ons dit nodig het in tabel IV gegee.

TABEL IV:

Magte van $x = 1/\bar{w}$	Koeffisiënte			
	$F_1$	$F_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$
$x$	0,35961	1,39041	0,67495	14,07552
$x^2$	0,20829	0,48519	0,57361	9,33804
$x^3$	0,14283	0,27888	0,51858	7,91162
$x^4$	0,10698	0,19055	0,48224	7,14396
$x^5$	0,08463	0,14243	0,45569	6,63913
$x^6$	0,06948	0,11251	0,43506	6,27118
$x^7$	0,05860	0,09229	0,41834	5,98565
$x^8$	0,05045	0,07778	0,40439	5,75457
$x^9$		0,06692	0,39247	5,56182
$x^{10}$		0,0585	0,38212	5,39734
$x^{11}$		0,0518	0,37300	5,25449
$x^{12}$			0,365	5,12865
$x^{13}$			0,358	5,01651
$x^{14}$				4,9156
$x^{15}$				4,8241
$x^{16}$				4,7404



$[\lambda=5]$

Sodra  $u \geq 5$ , dan is  $1/\bar{w} \geq \frac{1}{2}$ ; die reekse konvergeer dan langsam, veral  $\bar{F}_2$ . Vir die gevalle maak ons van die volgende transformasieformule gebruik:

$$F(\alpha_0; \beta_0; \gamma_0; x) = \frac{\Gamma(\gamma_0) \Gamma(\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0)}{\Gamma(\gamma_0 - \alpha_0) \Gamma(\gamma_0 - \beta_0)} F(\alpha_0; \beta_0; \alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0 + 1; 1-x) + \frac{\Gamma(\gamma_0) \Gamma(\alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0)}{\Gamma(\alpha_0) \Gamma(\beta_0)} (1-x)^{\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0} F(\gamma_0 - \alpha_0; \gamma_0 - \beta_0; \gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0 + 1; 1-x). \quad (12.2)$$

(WHITTAKER and WATSON: A Course of Modern Analysis, Cambridge 1946, Chap. XIV, p. 291).

Hierdie formule is veral van groot nut as die waarde van  $1/\bar{w}$  baie na aan 1 lê.

Uit (12.1) en (12.2) kry ons dan:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 3,844 F_{1a} - 3,781 (1-x)^{0,25} F_{1b} \\ \bar{F}_1 &= 0,5618 \bar{F}_{1a} + 0,8287 (1-x)^{-0,75} \bar{F}_{1b} \\ F_2 &= 6,168 F_{2a} - 4,993 (1-x)^{0,25} F_{2b} \\ \bar{F}_2 &= 9,377 \bar{F}_{2a} + 11,39 (1-x)^{-0,75} \bar{F}_{2b} \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

waarby met  $\bar{x} = 1 - x = 1 - 1/\bar{w}$

$$\left. \begin{aligned} F_{1a} &= F(1,14039; 0,64039; 0,75; \bar{x}) \\ F_{1b} &= F(0,89039; 1,39039; 1,25; \bar{x}) \\ \bar{F}_{1a} &= F(2,14039; 0,64039; 1,75; \bar{x}) \\ \bar{F}_{1b} &= F(-0,10961; 1,39039; 0,25; \bar{x}) \\ F_{2a} &= F(0,10961; -0,39039; 0,75; \bar{x}) \\ F_{2b} &= F(-0,14039; 0,35961; 1,25; \bar{x}) \\ \bar{F}_{2a} &= F(1,10961; -0,39039; 1,75; \bar{x}) \\ \bar{F}_{2b} &= F(-1,14039; 0,35961; 0,25; \bar{x}) \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Die koëffisiënte van opeenvolgende magte van  $\bar{x}$  in die ontwikkeling van hierdie reekse word in tabel V gegee.

Hier dien opgemerk te word dat  $1/\bar{w} = \frac{1}{2}$  as  $\lambda = 5$ ,  $u = 5$ . Dit is presies dieselfde waarde vir  $1/\bar{w}$  as wat ons kry vir  $\lambda = 1$ ,  $u = 1$ . Ons kan dus die somme van die reekse vir  $\lambda = 5$ ,  $u \geq 5$  gebruik ook vir die geval  $\lambda = 1$ ,  $u \geq 1$ . Want die som van enige reeks vir  $\lambda = 5$ ,  $u = u_5 \geq 5$  gee die som vir die geval  $\lambda = 1$ ,  $u = u_1$  waar

$$1 + 25/u_5^2 = 1 + 1/u_1^2$$

d.i.

$$u_1 = \frac{1}{5} u_5. \quad (12.5)$$

Die waardes van die reekse vir dié waardes van  $u$  wat ons nodig het, word in tabel VI gegee; die waardes van die reekse  $F_{1a}$ ,  $F_{1b}$ , ens. sal ons nie hier tabuleer nie, maar wel onder die geval  $\lambda = 1$ .

TABEL V:

[ $\lambda = 5$ ]

Magte van $\bar{x}$	Koeffisiënte			
	$F_{1a}$	$F_{1b}$	$\bar{F}_{1a}$	$\bar{F}_{1b}$
$\bar{x}$	0,97372	0,99039	0,78325	- 0,60960
$\bar{x}^2$	0,97680	0,99452	0,73361	- 0,51898
$\bar{x}^3$	0,98175	0,99957	0,71289	- 0,49278
$\bar{x}^4$	0,98650	1,00429	0,70212	- 0,48105
$\bar{x}^5$	0,9908	1,00851	0,69586	- 0,4747
$\bar{x}^6$	0,9946	1,01232	0,69199	- 0,4709
$\bar{x}^7$	0,9981	1,01576	0,68951	- 0,4685
$\bar{x}^8$	1,0013	1,01889	0,6879	- 0,4670
$\bar{x}^9$	1,0042	1,02175	0,6869	- 0,466
$\bar{x}^{10}$		1,02440	0,6863	- 0,465
$\bar{x}^{11}$			0,686	

Magte van $\bar{x}$	Koeffisiënte			
	$F_{2a}$	$F_{2b}$	$\bar{F}_{2a}$	$\bar{F}_{2b}$
$\bar{x}$	- 0,05706	- 0,04039	- 0,24753	- 1,64039
$\bar{x}^2$	- 0,01103	- 0,01049	- 0,05788	0,12524
$\bar{x}^3$	- 0,00454	- 0,00472	- 0,02575	0,03764
$\bar{x}^4$	- 0,00246	- 0,00267	- 0,01454	0,01809
$\bar{x}^5$	- 0,00153	- 0,00171	- 0,0093	0,01061
$\bar{x}^6$		- 0,00119	- 0,0065	0,00697
$\bar{x}^7$		- 0,00087		

TABEL VI:

$u$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2
$\bar{w}$	26	21,6612	18,3611	15,7929	13,1755	12,1111	7,25
$1/\bar{w}$	0,03846	0,04617	0,05446	0,06332	0,07270	0,08257	0,13793
$F_1$	1,01414	1,01705	1,02022	1,02365	1,02729	1,03119	1,0540
$F_2$	1,05422	1,06526	1,07221	1,09006	1,10378	1,11828	1,2018
$\bar{F}_1$	1,02684	1,03243	1,03854	1,04518	1,05231	1,06326	1,1056
$\bar{F}_2$	1,55562	1,67057	1,79561	1,93083	2,07587	2,23063	3,1427

$u$	5	7	8	9	10	11	15	20
$\bar{w}$	2	1,5102	1,3907	1,3087	1,25	1,2066	1,1111	1,0625
$1/\bar{w}$	0,5	0,6622	0,7191	0,7642	0,8	0,8288	0,9	0,9412
$\bar{x}$	0,5	0,3378	0,2809	0,2358	0,2	0,1712	0,1	0,0588
$F_1$	1,2608	1,4159	1,4898	1,5600	1,6251	1,6787	1,8621	2,1013
$F_2$	1,8706	2,2902	2,4774	2,6023	2,7818	2,9168	3,3361	3,6938
$\bar{F}_1$	1,6031	2,1017	2,3899	2,7005	3,0321	3,3819	4,9597	7,2650
$\bar{F}_2$	12,2034	20,390	24,913	29,686	34,679	39,830	62,766	95,433

[ $\lambda=5$ ]Die waardes van  $C_1$  en  $C_2$ :

Uit vergelykings (11.14) en (11.15) en tabel VI volg nou:

$$2\alpha(26)^{-\alpha}(1,02684)C_1 + 2\beta(26)^{-\beta}(1,55562)C_2 = 5,08/a$$

$$\text{en } (26)^{-\alpha}(1,01414)C_1 + (26)^{-\beta}(1,05422)C_2 = 3/a;$$

$$\text{d.i. } 0,05701C_1 + 0,23861C_2 = 5,08/a$$

$$\text{en } 0,02469C_1 + 0,73763C_2 = 3/a.$$

$$\text{Dit gee: } aC_1 = 83,8310 \text{ en } aC_2 = 1,2616. \quad (12.6)$$

Hiermee word

$$H(u) = \frac{25}{u^4 \sqrt{26(u^2 + 25)}} \left\{ \frac{2\alpha a C_1 \bar{y}_1 + 2\beta a C_2 \bar{y}_2}{a C_1 y_1 + a C_2 y_2} - \frac{5}{3} - \frac{2u^2}{75} \right\} =$$

$$= \frac{25}{u^4 \sqrt{26(u^2 + 25)}} \left\{ \frac{191,200 \bar{y}_1 + 0,27658 \bar{y}_2}{83,8310 y_1 + 1,26164 y_2} - \left( \frac{5}{3} + \frac{2u^2}{75} \right) \right\}. \quad (12.7)$$

$$\text{Stel nou } M_5 = 25/u^4 \sqrt{26(u^2 + 25)}$$

$$L_5 = 191,200 \bar{y}_1 + 0,27658 \bar{y}_2$$

$$N_5 = 83,8310 y_1 + 1,2616 y_2$$

$$E_5 = 5/3 + 2u^2/75.$$

Tabel VII gee die waardes van dié groothede en van  $H(u)$  vir  $u = 1,1$ ; 1,2; ens.

TABEL VII:

$u$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	5
$L_5$	6,2482	7,5484	8,9841	10,5544	12,2965	20,776	142,16
$N_5$	3,5182	4,0836	4,0748	5,3779	6,1025	10,570	50,129
$L_5/N_5$	1,7760	1,8485	1,9096	1,9625	2,0150	1,966	2,836
$-E_5$	-1,7000	-1,7051	-1,7118	-1,7189	-1,7267	-1,773	-2,333
$L_5/N_5 - E_5$	0,0760	0,1434	0,1979	0,2436	0,2883	0,193	0,503
$M_5$	0,6451	0,4598	0,3323	0,2458	0,1855	0,0569	$10^{-2} \times 0,11$
$H(u)$	0,0497	0,0659	0,0657	0,0588	0,0535	0,0109	$10^{-3} \times 0,56$

$u$	7	8	9	10	11	15	20
$L_5$	256,52	320,87	388,00	458,85	532,7	858,1	1323,00
$N_5$	76,938	88,77	99,40	109,05	117,20	142,59	169,02
$L_5/N_5$	3,334	3,609	3,903	4,208	4,546	6,018	7,83
$-E_5$	-2,973	-3,373	-3,827	-4,333	-4,894	-7,667	-12,33
$L_5/N_5 - E_5$	0,361	0,236	0,076	-0,125	-0,348	-1,768	-4,50
$M_5$	$10^{-3} \times 0,237$	$10^{-3} \times 0,127$	$10^{-4} \times 0,726$	$10^{-4} \times 0,439$	$10^{-4} \times 0,277$	$10^{-5} \times 0,624$	$10^{-5} \times 0,149$
$H(u)$	$10^{-4} \times 0,85$	$10^{-4} \times 0,30$	$10^{-5} \times 0,5$	$10^{-5} \times 0,55$	$10^{-5} \times 0,964$	$10^{-4} \times 0,110$	$10^{-5} \times 0,068$

Diagram van  $H = H(u)$  vir  $\lambda = 5$ :

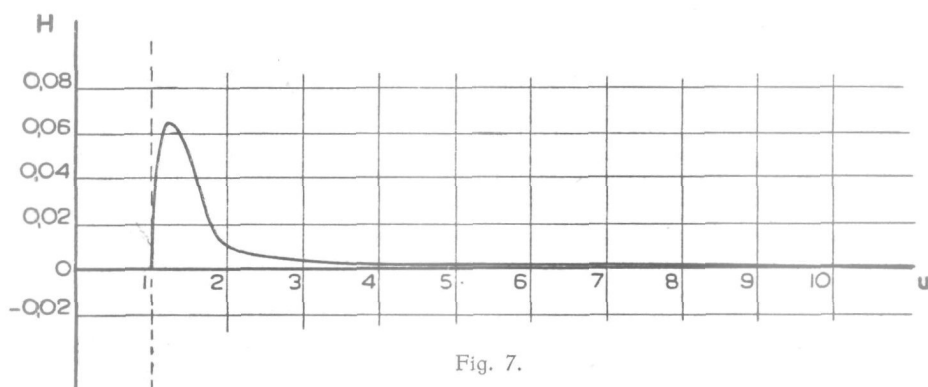


Fig. 7.

Die waarde van  $H$  verander dus van teken vir 'n waarde van  $u$  wat lê tussen 9 en 10. Vir alle waardes van  $u$  kleiner as hierdie waarde, is  $H$  positief.

§ 13. Die geval  $\lambda = 1$ .

Vir die bepaling van die somme van die reekse  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\bar{F}_1$  en  $\bar{F}_2$  maak ons gebruik van formules (12.3), behalwe vir die geval  $\lambda = 1$ ,  $u = 1$ . Vir die geval is  $1/\bar{w} = 0,5$ ; die waardes van die reekse kan dus geriefliker deur regstreekse sommering bepaal word. Tabel VIII gee die waardes van die reekse vir  $u = 1; = 1,1; \text{ ens.}$

TABEL VIII:

$u$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$\bar{w}$	2	1,8264	1,6944	1,5917	1,5102	1,4444	1,3906
$1/\bar{w}$	0,5	0,5475	0,5902	0,6283	0,6622	0,6923	0,7191
$\bar{x}$	0,5	0,4525	0,4098	0,3718	0,3378	0,3077	0,2809
$F_{1a}$		1,8307	1,6894	1,5775	1,4978	1,4335	1,3809
$F_{1b}$		1,8215	1,6898	1,5876	1,5064	1,4410	1,3875
$F_1$	1,2608	1,2999	1,3390	1,3778	1,4159	1,4532	1,4898
$\bar{F}_{1a}$		1,6241	1,5266	1,4504	1,3896	1,3403	1,2998
$\bar{F}_{1b}$		0,5357	0,6063	0,6618	0,7064	0,7407	0,7727
$\bar{F}_1$	1,6031	1,7171	1,8386	1,9667	2,1017	2,2388	2,3899
$F_{2a}$		0,9714	0,9744	0,9770	0,9792	0,9812	0,9830
$F_{2b}$		0,9790	0,9813	0,9832	0,9849	0,9864	0,9877
$F_2$	1,8706	1,9823	2,0896	2,1923	2,2902	2,3842	2,4774
$\bar{F}_{2a}$		0,8728	0,8865	0,8983	0,9085	0,9175	0,9252
$\bar{F}_{2b}$		0,2879	0,3520	0,4099	0,4618	0,5084	0,5501
$\bar{F}_2$	12,2034	14,129	16,139	18,229	20,390	22,620	24,913

[ $\lambda = 1$ ]

$u$	1,8	2	2,2	2,5	3	4	5	15
$\bar{w}$	1,3087	1,250	1,2066	1,1600	1,1111	1,0625	1,0400	1,0044
$1/\bar{w}$	0,7627	0,800	0,8288	0,8621	0,9	0,9412	0,9615	0,9956
$\bar{x}$	0,2373	0,200	0,1712	0,1379	0,1	0,0588	0,0385	0,00442
$F_{1a}$	1,3008	1,2437	1,1989	1,1561	1,0982	1,0609	1,0389	1,0043
$F_{1b}$	1,3060	1,2479	1,2049	1,1586	1,1101	1,0619	1,0396	1,0044
$F_1$	1,5600	1,6251	1,6787	1,7752	1,8621	2,1013	2,2533	2,8815
$\bar{F}_{1a}$	1,2377	1,1929	1,1599	1,1241	1,0864	1,0487	1,0312	1,0035
$\bar{F}_{1b}$	0,8189	0,8524	0,8774	0,9046	0,9333	0,9622	0,9757	0,9973
$\bar{F}_1$	2,7005	3,0321	3,3819	3,9438	4,9560	7,2650	9,8872	48,741
$F_{2a}$	0,9803	0,9882	0,9899	0,9919	0,9942	0,9966	0,9978	0,9997
$F_{2b}$	0,9898	0,9915	0,9928	0,9942	0,9958	0,9976	0,9984	0,9998
$F_2$	2,6023	2,7818	2,9168	3,0931	3,3361	3,6938	3,9466	4,8785
$\bar{F}_{2a}$	0,9381	0,9480	0,9558	0,9647	0,9746	0,9852	0,9904	0,9989
$\bar{F}_{2b}$	0,6207	0,6772	0,7217	0,7762	0,8373	0,9039	0,9371	0,9927
$\bar{F}_2$	29,686	34,679	39,830	47,224	62,766	95,433	132,18	668,47

Die waardes van  $C_1$  en  $C_2$ :

Uit vergelykings (11.14) en (11.15) volg met behulp van die waardes van die betrokke reekse vir  $u = 1$ :

$$2\alpha 2^{-\alpha} (1,6031) C_1 + 2\beta 2^{-\beta} (12,2034) C_2 = 7/a$$

$$\text{en} \quad 2^{-\alpha} (1,2608) C_1 + 2^{-\beta} (1,8706) C_2 = 3/a; \quad (13.1)$$

$$\text{d.i.} \quad 1,6586 C_1 + 2,4795 C_2 = 7/a$$

$$\text{en} \quad 0,5720 C_1 + 1,7338 C_2 = 3/a.$$

$$\text{Dit gee:} \quad aC_1 = 3,2233 \text{ en } aC_2 = 0,6670. \quad (13.2)$$

Hiermee word

$$\begin{aligned}
 H(u) &= \frac{1}{u^4 \sqrt{2(1+u^2)}} \left[ \frac{2\alpha a C_1 \bar{y}_1 + 2\beta a C_2 \bar{y}_2}{a C_1 y_1 + a C_2 y_2} - \frac{5}{3} - \frac{2u^2}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{u^4 \sqrt{2(1+u^2)}} \left[ \frac{7,3516 \bar{y}_1 + 0,1462 \bar{y}_2}{3,2233 y_1 + 0,6670 y_2} - \left( \frac{5}{3} + \frac{2u^2}{3} \right) \right]. \quad (13.3)
 \end{aligned}$$

Stel nou

$$\begin{aligned}
 M_1 &= u^4 \sqrt{2(1+u^2)} \\
 L_1 &= 7,3516 \bar{y}_1 + 0,1462 \bar{y}_2 \\
 N_1 &= 3,2233 y_1 + 0,6670 y_2 \\
 E_1 &= 5/3 + 2u^{2/3}.
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

Tabel IX gee die verloop van hierdie groothede en van  $H(u)$  as  $u$  vanaf 1 toeneem:

TABEL IX:

$u$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8
$L_1$	8,2849	9,6352	11,043	12,505	13,998	15,576	18,823
$N_1$	3,3457	3,6808	4,004	4,312	4,607	4,890	5,385
$L_1/N_1$	2,4763	2,6177	2,758	2,900	3,038	3,186	3,495
$-E_1$	-2,4733	-2,6267	-2,793	-2,973	-3,167	-3,373	-3,828
$L_1/N_1 - E_1$	0,0030	-0,009	-0,035	-0,073	-0,129	-0,187	-0,333
$M_1$	3,078	4,581	6,625	9,347	12,91	17,49	30,57
$H(u)$	$10^{-4} \times 0,97$	-0,002	-0,0053	-0,0078	-0,0100	-0,0106	-0,0109

$u$	2	2,2	2,5	3	4	5	15
$L_1$	22,232	25,774	31,272	41,407	63,704	88,777	444,2
$N_1$	5,872	6,274	6,961	7,632	8,768	9,566	13,16
$L_1/N_1$	3,786	4,108	4,493	5,426	7,265	9,279	33,75
$-E_1$	-4,333	-4,893	-5,833	-7,667	-12,333	-18,333	-151,67
$L_1/N_1 - E_1$	-0,548	-0,785	-1,340	-2,241	-5,068	-9,054	-117,92
$M_1$	50,60	80,06	148,7	362,2	1492,7	4506,9	$10^5 \times 10,691$
$H(u)$	-0,0108	-0,0098	-0,0090	-0,0054	-0,0034	-0,0020	$-10^{-3} \times 0,1103$

Diagram van  $H = H(u)$  vir  $\lambda = 1$ :

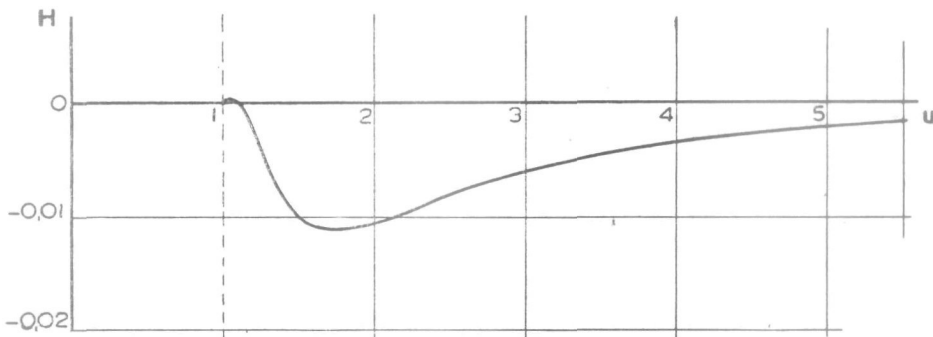


Fig. 8.

$[\lambda=1]$

Die waarde van  $H$  is vir 'n klein tydinterval onmiddellik na die aanvang van die beweging, positief. Dit verander van teken vir 'n waarde van  $u$  tussen 1,1 en 1,2. Die maximumafwyking word bereik ongeveer as  $u = 2$  en is by benadering gelyk aan  $0,011 \times \frac{1}{4} a \bar{V}_0$ . As  $u$  onbepaald toeneem, neem die afwyking onbepaald af.

§ 14. Die geval  $\lambda = \sqrt{7/8}$ .

Uit die tabelle en diagramme van die vorige twee paragrawe blyk dat die afwykingskromme die  $u$ -as, benewens in die punt  $u = 1$ , in 'n tweede punt regs van genoemde punt, sny. Soos blyk uit die opmerking na (10.10a), nl. dat ons terugval op die formules van § 7 as  $\lambda \rightarrow \infty$  en die bybehorende tabel en diagram van § 7, beweeg die tweede snypunt na  $+\infty$  langs die  $u$ -as as  $\lambda \rightarrow \infty$ .

As  $\lambda$  afneem, skuif die punt nader na die snypunt  $u = 1$ . Vir  $\lambda = 1$ , lê die snypunt tussen  $u = 1,1$  en  $u = 1,2$ . Die vraag doen hom voor of daar 'n waarde van  $\lambda$  bestaan waarvoor hierdie snypunkte saamval in  $u = 1$ ? Die afwykingskromme sal die  $u$ -as dan in die punt  $u = 1$  raak.

Aan die hand van (10.28) en (10.32) kan ons skryf:

$$H = \frac{a \bar{V}_0}{4} \frac{\sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u^4 \sqrt{1 + \lambda^2}} \left\{ \frac{u}{y} \frac{dy}{du} + \frac{u^2}{u^2 + \lambda^2} - \frac{5}{3} \right\}. \quad (14.1)$$

Gebruikmakende van die feit dat  $u = v$  langs die baan van die verdigtingsgolf en van (10.15) en (10.16) kan ons  $H$  soos volg skryf:

$$H = \frac{a \bar{V}_0}{2 \sqrt{1 + \lambda^2}} \frac{1}{v^2 \sqrt{v^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{y} \Delta(\bar{w}) \quad (14.2)$$

waar

$$\Delta(\bar{w}) = \bar{w} (1 - \bar{w}) y'(\bar{w}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8} \bar{w}\right) y(\bar{w}). \quad (14.3)$$

Ons sal ondersoek of daar 'n waarde  $\bar{w}_1$  van  $\bar{w}$  bestaan waarvoor geld

$$\Delta(\bar{w}_1) = 0 \quad \text{en} \quad \Delta'(\bar{w}_1) = 0?$$

Veronderstel dat dit die geval is. Ons kry dan:

$$\bar{w}_1 (1 - \bar{w}_1) y'(\bar{w}_1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8} \bar{w}_1\right) y_1(\bar{w}_1) = 0 \quad (14.4)$$

en deur differensiasie:

$$\bar{w}_1 (1 - \bar{w}_1) y''(\bar{w}_1) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \bar{w}_1\right) y'(\bar{w}_1) - \frac{5}{8} y(\bar{w}_1) = 0. \quad (14.5)$$

Vergelyking (10.17) geld vir alle waardes van  $\bar{w}$  en dus ook vir  $\bar{w}_1$ . Ons het dus ook

$$\bar{w}_1 (1 - \bar{w}_1) y''(\bar{w}_1) + \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{4} \bar{w}_1\right) y'(\bar{w}_1) - \frac{1}{8} y(\bar{w}_1) = 0. \quad (14.6)$$

Deur aftrekking volg uit (14.5) en (14.6):

$$14 \bar{w}_1 y'(\bar{w}_1) + 17 y(\bar{w}_1) = 0,$$

of:

$$\bar{w}_1 (1 - \bar{w}_1) y'(\bar{w}_1) + \frac{1}{4} (1 - \bar{w}_1) y(\bar{w}_1) = 0. \quad (14.7)$$

Deur aftrekking kry ons vervolgens uit (14.4) en (14.7):

$$(5 - \frac{8}{3} \bar{w}_1) y(\bar{w}_1) = 0$$

d.i.

$$\bar{w}_1 = 15/8. \quad (14.8)$$

Vir hierdie waarde van  $\bar{w}$  is beide  $\Delta(w) = 0$  en  $\Delta'(w) = 0$ . Ons het nog geen beperking op die waarde van  $\bar{w}_1$  gelê nie.

Sê dat as  $\bar{w} = \bar{w}_1$ , dan is  $v = v'$  en  $u = u'$  op die baan van die verdigtingsgolf; (14.8) gee dus

$$\lambda^2 = \frac{7}{8} v'^2 \quad \text{of} \quad \lambda^2 = \frac{7}{8} u'^2. \quad (14.9)$$

Hierby kan  $v'$  en  $u'$  enige waardes  $> 1$  aanneem.

Stel ons dus  $H(u') = 0$  en  $\lambda = u' \sqrt[7]{7/8}$  en bepaal ons die konstante  $C_1$  en  $C_2$  hieruit met behulp van die betrekking (10.21), dan sal die afwykingskromme  $H = H(u)$  die  $u$ -as in die punt  $u = u'$  raak.

Stel ons  $u' = 1$  en daarmee  $\lambda = \sqrt[7]{7/8}$ , dan kom die raakpunt  $P$  in die oorsprong 0 te lê. Die verloop van  $H(u)$  vir hierdie geval, word in tabel X gegee. In die berekenings het ons gebruik gemaak van die somme van die reekse vir die geval  $\lambda = 1$ , behalwe in die een geval  $\lambda = \sqrt[7]{7/8}$ ,  $u = 1$ .

Die waarde van  $1/\bar{w}$  vir  $\lambda = 1$ ,  $u = u_1 > 1$  is presies gelyk aan die waarde van  $1/\bar{w}$  vir  $\lambda = \sqrt[7]{7/8}$ ,  $u = u_0 = u_1 \sqrt[7]{7/8}$ , want

$$\begin{aligned} 1/\bar{w} &= 1 + 1/u_1^2 = 1 + \frac{7}{8} u_0^2, \quad \text{gee} \\ u_0 &= u_1 \sqrt[7]{7/8}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Vir  $\lambda = \sqrt[7]{7/8}$ ,  $u = 1$  is  $1/\bar{w} = 8/15 = 0,5333$ . Vir die somme van die reekse kry ons:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1,28793; & \bar{F}_1 &= 1,68110; \\ F_2 &= 1,94809; & \bar{F}_2 &= 13,52285. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Die waardes van  $C_1$  en  $C_2$ :

Uit (11.14) en (11.15) kry ons:

$$\begin{aligned} 1,87255 C_1 + 2,76715 C_2 &= 7,28572/a \\ \text{en} \quad 0,62900 C_1 + 1,81838 C_2 &= 3/a. \end{aligned} \quad (14.12)$$

$$\text{Dit gee} \quad aC_1 = 2,97197 \quad \text{en} \quad aC_2 = 0,62178. \quad (14.13)$$

Hiermee word

$$H(u) = \frac{0,875}{u^4 \sqrt{(1+\lambda^2)(u^2+\lambda^2)}} \left[ \frac{6,7784 \bar{y}_1 + 0,13631 \bar{y}_2}{2,97197 y_1 + 0,62178 y_2} - \left( \frac{5}{3} + \frac{16 u^2}{21} \right) \right].$$

Stel nou:

$$\begin{aligned} M_0 &= 0,875/u^4 \sqrt{1,875(u^2+0,875)} \\ L_0 &= 6,7784 \bar{y}_1 + 0,13631 \bar{y}_2 \\ N_0 &= 2,9720 y_1 + 0,62178 y_2 \\ E_0 &= 5/3 + 16 u^2/21. \end{aligned}$$



( $\lambda = \sqrt{7/8}$ )

Tabel X gee die verloop van hierdie groothede en van  $H$  as  $u$  variëer vanaf 1 na  $\infty$ .

TABEL X:

$u$	1	1,02896	1,3096	1,4031	1,4967	1,6837	1,8708
$L_0$		7,6586	11,560	12,939	14,398	17,398	20,547
$N_0$		3,0975	3,991	4,264	4,526	4,983	5,433
$L_0/N_0$		2,4726	2,897	3,035	3,181	3,492	3,782
$-E_0$		-2,4733	-2,973	-3,166	-3,373	-3,827	-4,257
$L_0/N_0 - E_0$		-0,0007	-0,076	-0,131	-0,192	-0,335	-0,475
$M_0$		0,4100	0,1350	0,0959	0,0722	0,0413	0,0267
$H$	0	$-10^{-3} \times 0,29$	-0,0104	-0,0125	-0,0139	-0,0138	-0,0127

$u$	2,0579	2,3385	2,8063	4,6770	15
$L_0$	23,823	29,903	38,270	82,042	738,19
$N_0$	5,804	6,347	6,958	8,847	11,675
$L_0/N_0$	4,105	4,712	5,421	9,273	39,71
$-E_0$	-4,893	-5,833	-7,667	-18,333	-173,09
$L_0/N_0 - E_0$	-0,788	-1,121	-2,246	-9,060	-133,38
$M_0$	0,0158	0,00848	0,00354	$10^{-3} \times 0,280$	$10^{-6} \times 0,958$
$H$	-0,0125	-0,00951	-0,00795	-0,0025	$-10^{-3} \times 0,128$

Diagram van  $H = H(u)$  vir  $\lambda = \sqrt{7/8}$ :

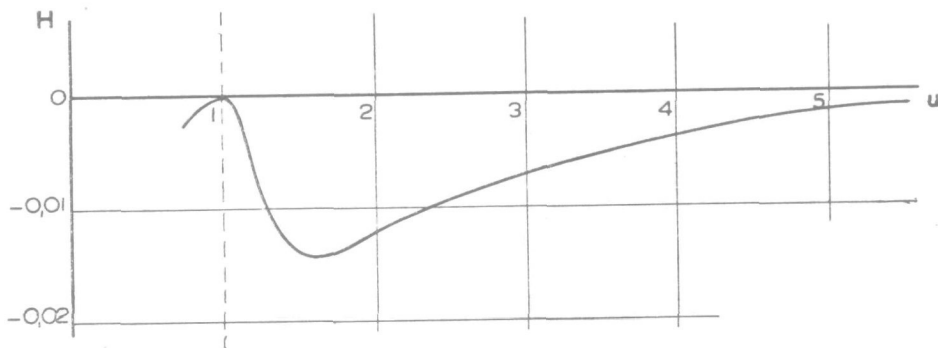


Fig. 9.

Die maximumafwyking in hierdie geval is dus ongeveer gelyk aan  $\frac{1}{4} a \bar{V}_0 \times 0,014$  en word bereik as  $u$  ongeveer gelyk is aan 1,5. As  $u$  onbepaald toeneem, neem die afwyking onbepaald af.

§ 15. *Vergelykende tabel XI en diagram.*

Die afwyking streef in alle gevalle na nul as  $u$  onbegrensd toeneem. Gedurende die eerste stadia van die beweging is die afwykings vir die

TABEL XI:

$u$	1	1,3	1,5	2	2,5	5	15
$H_{\lambda=0}$	0	-0,075	-0,06	-0,041	-0,024	$10^{-2} \times 0,39$	$-10^{-3} \times 0,17$
$H_{\lambda=\sqrt{7/8}}$	0	-0,0104	-0,0139	-0,0125		$< -10^{-2} \times 0,2$	$-10^{-3} \times 0,0128$
$H_{\lambda=1}$	0	-0,0053	-0,0100	-0,0108	-0,009	$-10^{-2} \times 0,2$	$-10^{-3} \times 0,1103$
$H_{\lambda=5}$	0	0,0657	0,0535	0,0109		$10^{-2} \times 0,056$	$-10^{-3} \times 0,0110$
$H_{\lambda=\infty}$	0	0,07	0,05	0,02	0,013	$10^{-2} \times 0,093$	$10^{-3} \times 0,0123$

Diagram:

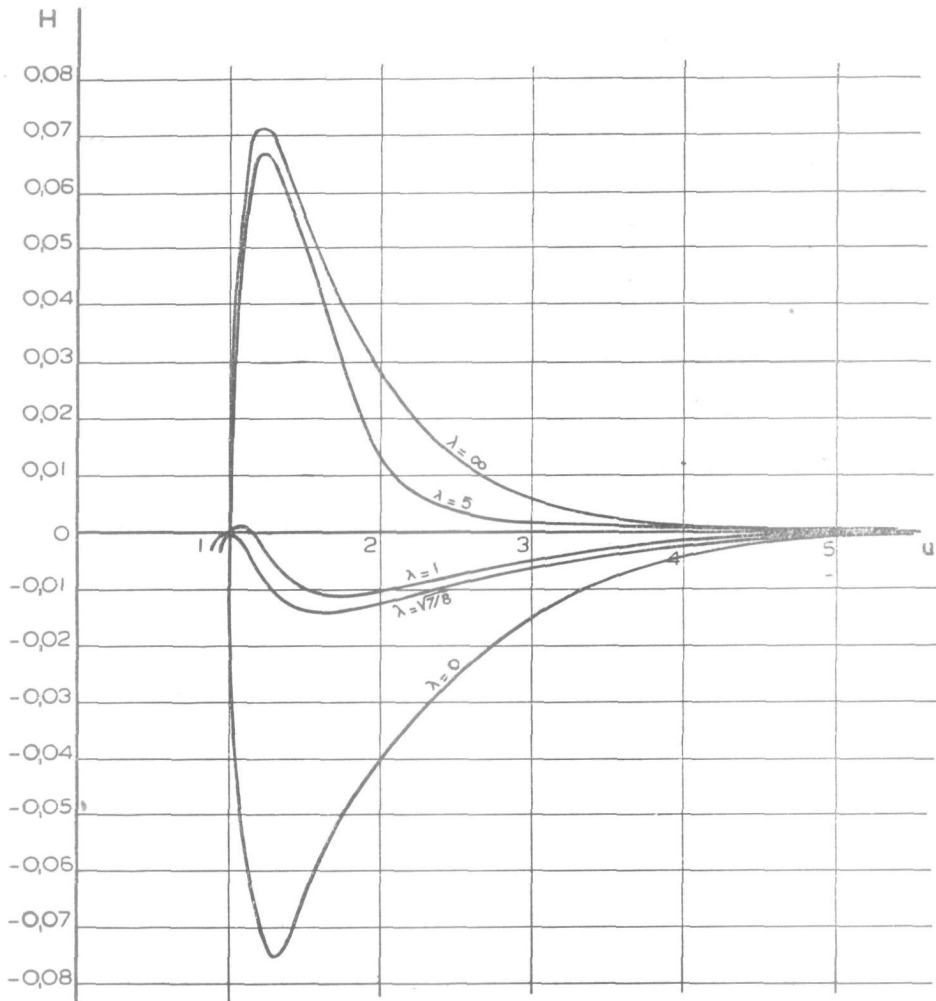


Fig. 10.

gevallen  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 5$  en  $\lambda = \infty$  die grootste. Die afwykings vir die eersgenoemde geval bly deurgaans die grootste (in absolute waarde). Die afwykings vir laasgenoemde twee gevallen neem betreklik snel af en is reeds kleiner as die afwykings vir die gevallen  $\lambda = \sqrt{7/8}$  en  $\lambda = 1$  as  $u = 5$ .

Die afwyking vir  $\lambda = 1$  is steeds kleiner as dié vir  $\lambda = \sqrt{7/8}$ , uitgesonderd 'n klein tydinterval onmiddellik na die aanvang van die beweging.

Voorts is dit duidelik dat vir een of ander waarde van  $\lambda$  tussen 1 en 5, sê  $\lambda = \lambda_0$ , die afwyking na beide kante (positiewe en negatiewe kante) ewe groot sal wees. Vir dié waarde van  $\lambda$  sal die afwyking aanvanklik positief wees en (absoluut) groter as die afwykings vir  $\lambda = \sqrt{7/8}$  en  $\lambda = 1$  dog (absoluut) kleiner as die afwykings vir die ander gevallen. As  $u$  toeneem sal hierdie afwyking negatief word maar (absoluut) groter bly as die afwykings vir alle  $\lambda > \lambda_0$  dog (absoluut) kleiner as die afwykings vir alle  $\lambda < \lambda_0$ .

Ook uit die resultate van hoofstuk IV (sien die slot van § 19) kry ons die indruk dat 'n waarde van  $\lambda$  ongeveer gelyk aan 1,75 die beste benadering gee.

§ 16. *Vergelyking van oplossings met  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \sqrt{7/8}$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 5$  en  $\lambda = \infty$  met die reeksontwikkeling van prof. J. M. BURGERS op bls. 270 van „Proceedings Royal Neth. Acad. of Sciences”, Vol. 50, bls. 270, 1947.*

Uit (10.1):

$$\Phi = \dot{u}(t)^3/v(s)^3. \quad (16.1)$$

Ons sal nou agtereenvolgens  $u$  en  $v$  ontwikkel in magte van  $s$  en  $t$ , respektiewelik.

Stel

$$\sqrt{E(1+\lambda^2)}t = \tau, \text{ dus } \sqrt{E(1+\lambda^2)}dt = d\tau. \quad (16.2)$$

Dit gee:

$$\{u(\tau)\}^3 = u(0)^3 + \frac{\tau}{1!} \left( \frac{du^3}{d\tau} \right)_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!} \left\{ \frac{d^2(u^3)}{d\tau^2} \right\}_{\tau=0} + \frac{\tau^3}{3!} \left\{ \frac{d^3(u^3)}{d\tau^3} \right\}_{\tau=0} + \dots \quad (16.3)$$

Uit (10.7):

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{E(1+\lambda^2)}} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{\sqrt{u^2+\lambda^2}}{u^3}, \quad (16.4)$$

dus

$$(du/d\tau)_{\tau=0} = \frac{1}{3} \text{ vir alle } \lambda,$$

d.i.

$$(du^3/d\tau)_{\tau=0} = 1 \text{ vir alle } \lambda. \quad (16.5)$$

Uit (10.3):

$$d^2(u^3)/d\tau^2 = 3Du^{-5}$$

d.i.

$$d^2(u^3)/d\tau^2 = -\frac{1}{3} \lambda^2/(1+\lambda^2)u^{-5}, \text{ m. b. v. (10.5);}$$

dus

$$\left\{ \frac{d^2(u^3)}{d\tau^2} \right\}_{\tau=0} = -\frac{1}{3} \lambda^2 / (1 + \lambda^2) \quad (16.6)$$

$$\left. \begin{aligned} &= 0 \text{ as } \lambda = 0 \\ &= -\frac{7}{45} \text{ as } \lambda = \sqrt{7/8} \\ &= -\frac{1}{6} \text{ as } \lambda = 1 \\ &= -\frac{25}{8} \text{ as } \lambda = 5 \\ &= -\frac{1}{3} \text{ as } \lambda = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

Verder:

$$\frac{d^3(u^3)}{d\tau^3} = -\frac{\lambda^2}{3(1+\lambda^2)} \frac{d}{d\tau}(u^{-5}), \text{ uit (10.3),}$$

$$= \frac{5\lambda^2}{9(1+\lambda^2)} u^{-8} \frac{du^3}{d\tau};$$

dus

$$\left\{ \frac{d^3(u^3)}{d\tau^3} \right\}_{\tau=0} = \frac{5}{9} \lambda^2 / (1 + \lambda^2) \quad (16.9)$$

$$\left. \begin{aligned} &= 0 \text{ as } \lambda = 0 \\ &= \frac{7}{27} \text{ as } \lambda = \sqrt{7/8} \\ &= \frac{5}{18} \text{ as } \lambda = 1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{25}{4} \text{ as } \lambda = 5 \\ &= \frac{5}{9} \text{ as } \lambda = \infty \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

Ens.

Ons kry dus met:

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 0: & \quad u(\tau)^3 = 1 + \tau \\ \lambda = \sqrt{7/8}: & \quad u(\tau)^3 = 1 + \tau - \frac{7}{90} \tau^2 + \frac{7}{162} \tau^3 - \dots \\ \lambda = 1: & \quad u(\tau)^3 = 1 + \tau - \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{5}{108} \tau^3 \dots \\ \lambda = 5: & \quad u(\tau)^3 = 1 + \tau - \frac{25}{156} \tau^2 + \frac{1}{1404} \tau^3 \dots \\ \lambda = \infty & \quad u(\tau)^3 = 1 + \tau - \frac{1}{6} \tau^2 + \frac{5}{54} \tau^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Vervolgens die reeks vir  $v(s)^{-3}$ :

Met  $as = \sigma$  kan ons skryf:

$$v(\sigma)^{-3} = v(0)^{-3} + \frac{\sigma}{1!} \left( \frac{dv^{-3}}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} + \frac{\sigma^2}{2!} \left( \frac{d^2(v^{-3})}{d\sigma^2} \right)_{\sigma=0} + \dots \quad (16.12)$$

Nou:

$$\frac{dv^{-3}}{d\sigma} = \frac{1}{a} \frac{dv^{-3}}{ds} = -\frac{3}{a} v^{-4} y^{-1} \text{ met } y = ds/dv; \quad (16.13)$$

d.i.

$$\left( \frac{dv^{-3}}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} = -1, \text{ m. b. v. (10.20) vir alle } \lambda. \quad (16.14)$$

Uit (16.13)

$$\frac{d^2(v^{-3})}{d\sigma^2} = \frac{3}{a^2} \left[ 4v^{-5}y^{-2} + v^{-4}y^{-2} \frac{dy}{ds} \right].$$

Maar

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{ds} = -\frac{2\lambda^2}{v^3 y} \frac{dy}{dw}, \text{ m. b. v. (10.15).}$$

Dus

$$\frac{d^2 v^{-3}}{d\sigma^2} = \frac{3}{a^2} \left[ \frac{4}{v^5 y^2} - \frac{2\lambda^2}{y^3 v^7} \frac{dy}{dw} \right]. \quad (16.15)$$

Dit gee:

$$\left( \frac{d^2 v^{-3}}{d\sigma^2} \right)_{\sigma=0} = \frac{4}{3} - \frac{2}{9} a \lambda^2 \left( \frac{dy}{dw} \right)_{\sigma=0, w=\lambda^2}.$$

Maar die afwykingsfunksie  $H(u)$  is gelyk aan nul as  $u = v = 1$ , d.i. in die oorsprong. Dus volg uit (14.3) met  $\bar{w} = w + 1$  dat

$$\{ \Delta(w+1) \}_{\sigma=0, w=\lambda^2} \equiv - \left[ w(w+1) \frac{dy}{dw} - \left( \frac{1}{3} + \frac{5w}{6} \right) y \right]_{\sigma=0, w=\lambda^2},$$

dit gee

$$\left( \frac{dy}{dw} \right)_{\sigma=0, w=\lambda^2} = -\frac{2+5\lambda^2}{6\lambda^2(1+\lambda^2)} \cdot \frac{3}{a}.$$

Dus:

$$\left( \frac{d^2 v^{-3}}{d\sigma^2} \right)_{\sigma=0, w=\lambda^2} = \frac{4}{3} + \frac{2+5\lambda^2}{9(1+\lambda^2)} \quad (16.16)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{14}{9} \text{ as } \lambda = 0 \\ &= \frac{77}{45} \text{ as } \lambda = \sqrt{7/8} \\ &= \frac{31}{18} \text{ as } \lambda = 1 \\ &= \frac{1317}{702} \text{ as } \lambda = 5 \\ &= \frac{17}{9} \text{ as } \lambda = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

Uit (16.15):

$$\frac{d^3(v^{-3})}{d\sigma^3} = \frac{3}{a^3} \left[ -\frac{20}{v^6 y^3} + \frac{30\lambda^2}{v^8 y^4} \left( \frac{dy}{dw} \right) - \frac{12\lambda^4}{v^{10} y^5} \left( \frac{dy}{dw} \right)^2 + \frac{4\lambda^4}{v^{10} y^4} \frac{d^2 y}{dw^2} \right]. \quad (16.18)$$

Uit (10.17):

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 y}{dw^2} \right)_{\sigma=0, w=\lambda^2} &= -\frac{1}{w(w+1)} \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{9w}{4} \right) \frac{dy}{dw} + \frac{y}{8} \right]_{\sigma=0, w=\lambda^2} = \\ &= \frac{3}{4a} \left[ \frac{1+5\lambda^2+7\lambda^4}{\lambda^4(1+\lambda^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Dus

$$\left\{ \frac{d^3(v^{-3})}{d\sigma^3} \right\}_{\sigma=0, w=\lambda^2} = -\frac{20}{9} - \frac{5}{9} \left( \frac{2+5\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) - \frac{1}{27} \left( \frac{2+5\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^2 + \frac{1}{9} \left\{ \frac{1+5\lambda^2+7\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2} \right\} \quad (16.20)$$

$$\left. \begin{aligned} &= -\frac{9}{2} \frac{1}{7} \text{ as } \lambda = 0 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{7}{5} \text{ as } \lambda = \sqrt{7/8} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{5}{7} \text{ as } \lambda = 1 \\ &= -\frac{1}{3} \frac{8}{5} \frac{3}{1} \text{ as } \lambda = 5 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{3}{7} \frac{9}{7} \text{ as } \lambda = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

Dus kry ons met

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 0: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{7}{9} \sigma^2 - 0,5617 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = \sqrt{7/8}: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{7}{9} \sigma^2 - 0,6941 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = 1: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{3}{8} \sigma^2 - 0,7099 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = 5: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{1}{4} \frac{1}{0} \frac{1}{2} \sigma^2 - 0,8466 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = \infty: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{1}{8} \sigma^2 - 0,8580 \sigma^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16.22)$$

Die reeksontwikkeling vir  $\Phi$  word dus agtereenvolgens met

$$\lambda = 0: \Phi = 1 + \tau - \sigma - \tau \sigma + 0,7778 \sigma^2 + 0,7778 \tau \sigma^2 - 0,5617 \sigma^3 + \dots \quad (16.23)$$

$$\lambda = \sqrt{7/8}: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,0778 \tau^2 - \tau \sigma + 0,8555 \sigma^2 + 0,0432 \tau^3 + \\ + 0,0778 \tau^2 \sigma + 0,8555 \tau \sigma^2 - 0,6941 \sigma^3 + \dots \quad (16.24)$$

$$\lambda = 1: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,0833 \tau^2 - \tau \sigma + 0,8611 \sigma^2 + 0,0463 \tau^3 + \\ + 0,0833 \tau^2 \sigma + 0,8611 \tau \sigma^2 - 0,7099 \sigma^3 + \dots \quad (16.25)$$

$$\lambda = 5: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,1603 \tau^2 - \tau \sigma + 0,9394 \sigma^2 + 0,0890 \tau^3 + \\ + 0,1603 \tau^2 \sigma + 0,9394 \tau \sigma^2 - 0,8466 \sigma^3 + \dots \quad (16.26)$$

$$\lambda = \infty: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,1667 \tau^2 - \tau \sigma + 0,9444 \sigma^2 + 0,0924 \tau^3 + \\ + 0,1667 \tau^2 \sigma + 0,9444 \tau \sigma^2 - 0,8580 \sigma^3 + \dots \quad (16.27)$$

**Opmerking:** Die reekse vir  $\Phi$  as  $\lambda = \infty$  en  $\lambda = 0$  kan ewegood regstreeks uit die resultate van § 7 en § 9 respektiewelik afgelei word.

Prof. BURGERS gee op bls. 270, „Proceedings Royal Neth. Acad. of Sciences”, Vol. 50 (1947), die volgende (juiste) reeksontwikkeling vir  $\Phi$ :

$$\Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,0778 \tau^2 - \tau \sigma + 0,8555 \sigma^2 + 0,0368 \tau^3 + 0,0778 \tau^2 \sigma + \\ + 0,8517 \tau \sigma^2 - 0,6898 \sigma^3 - \dots \quad (16.28)$$

(Prof. BURGERS gee die koëffisiënte van die tweedegraadsterme in breukvorm.)

Ons merk op dat die reeks met  $\lambda = \sqrt[7]{7/8}$  [d.i. (16.24)] tot en met die tweedegraadsterme presies ooreenstem met die reeks (16.28); bowendien is die verskil in die koëffisiënte van die derdegraadsterme agtereenvolgens

$$0,0064; \quad 0; \quad 0,0038; \quad 0,0043.$$

Die reekse met  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 5$  en  $\lambda = \infty$  kom tot en met die eerste-gradsterme presies ooreen met die reeks (16.28).

Die koëffisiënte van die tweede- en derdegraadsterme van die reeks met  $\lambda = 1$  [d.i. (16.25)] verskil agtereenvolgens met 0,0055; 0; 0,0056; 0,0095; 0,0055; 0,0094 en 0,0201 van die koëffisiënte van die ooreenkomstige terme van die reeks (16.28).

Die afwykings van die koëffisiënte van die tweede- en derdegraadsterme van die reekse met  $\lambda = 5$  en  $\lambda = \infty$  is groter as dié in die vorige twee gevalle. Van hierdie twee, hoewel hulle onderling nie veel verskil nie, toon die koëffisiënte van laasgenoemde reeks die iets grotere afwykings 0,0889; 0; 0,0889; 0,0556; 0,0889; 0,0927 en 0,1682.

Die koëffisiënte van die reeks (16.23) met  $\lambda = 0$  toon die grootste afwykings. Die veranderlike  $\tau$  kom uitsluitlik in die eerste mag voor; die  $\tau$ -reeks vir  $u$  as  $\lambda = 0$  [vergelyk (16.11)] bestaan dan ook net uit twee terme. Die eenaardige van hierdie geval is dat soos in die volgende hoofstuk sal blyk waar die snelheid van die suier ondersoek word, die uitdrukking vir  $\Phi$  met  $\lambda = 0$  blykbaar tog 'n beter benadering gee as die geval met  $\lambda = \infty$ , hoewel die koëffisiënte van die reeks vir laasgenoemde geval kleiner afwykings toon as die reeks vir  $\lambda = 0$ .

Ons konkludeer dus dat die aanvangstadia van die beweging die suiwerste weergegee word deur die reeks met  $\lambda = \sqrt[7]{7/8}$ . Die reeks met  $\lambda = 1$  gee egter ook 'n heel goeie benadering vir hierdie stadia.

§ 17. *Funksie van die tipe  $u(t)^3/v(s)^3$  wat aan al die rantvoorwaardes eksak voldoen, maar van die vergelyking self slegs 'n benaderde oplossing is.*

Volkome analoog met § 6 en § 8 kan ons aan die hand van § 10 'n uitdrukking vir  $\Phi$  vind van bogegewe tipe wat aan albei die rantvoorwaardes eksak voldoen, maar die differensiaalvergelyking (3.3b) self nie bevredig nie. Die fout neem egter onbepaald af as  $u$  en/of  $v$  onbepaald toeneem.

Stel soos in § 10:

$$\Phi = u(t)^3/v(s)^3 \quad (17.1)$$

waarby geld:

$$v(0) = u(0) = 1. \quad (17.2)$$

Substitusie van dié waarde vir  $\Phi$  in (3.3b) gee weer

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-3}) = \frac{1}{v^3} \frac{d^2(u^3)}{dt^2} + \frac{3}{u^5} \frac{d^2}{ds^2} (S'^2 v^5). \quad (17.3)$$

Die uitdrukking regs gelyk aan nul gestel gee weer die differensiaalvergelykings (10.3) en (10.4).

Uit (10.3) kry ons soos tevore

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{E} \sqrt{u^2 + \lambda^2}}{3 u^3} \quad (17.4)$$

en

$$\sqrt{E} t = (u^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \lambda^2 (u^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - (1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}} + 3 \lambda^2 (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (17.5)$$

waarby  $u$  weer variëer van 1 tot  $+\infty$ .

Die baan van die verdigtingsgolf word weer gegee deur

$$v = u. \quad (17.6)$$

Met

$$dv/ds = y \quad (17.7)$$

volg soos tevore uit (10.4) die differensiaalvergelyking (10.14):

$$v^2 (v^2 + \lambda^2) \frac{d^2 y}{dv^2} + \frac{3}{2} v (v^2 - \lambda^2) \frac{dy}{dv} + \frac{1}{2} \lambda^2 y = 0. \quad (17.8)$$

In plaas daarvan om soos in § 10 hierdie vergelyking op te los vir  $y$  en dan vas te stel in hoeverre die gevinde resultate aan die tweede rantvoorwaarde voldoen, kan ons omgekeerd tewerk gaan. Ons kan nl. met behulp van die uitdrukking (17.1) vir  $\Phi$  en die resultate (17.4), (17.5) en (17.6) die waarde van die uitdrukking wat langs die baan van die verdigtingsgolf nul moet wees, bepaal. Stel ons dan die uitkoms gelyk aan nul en los ons dan op vir  $v$ , dan het ons 'n formule vir  $\Phi$  gevind, wat aan albei die rantvoorwaardes eksak voldoen. Ondersoek moet dan word in hoeverre die gevinde uitdrukking vir  $\Phi$  die vergelyking (3.3b) bevredig.

Gebruikmakende van (17.1), (17.4), (17.5) en (17.6) vind ons eweas in (10.28):

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{s=S} + \frac{9 S''}{4 S'} = \frac{9}{4u} \frac{du}{dt} \left[ \frac{u}{y} \frac{dy}{du} + \frac{u^2}{u^2 + \lambda^2} - \frac{5}{3} \right]. \quad (17.9)$$

Kragtens die betrekking (17.6) wat langs die baan  $s = S(t)$  van die verdigtingsgolf geld, kan ons in die uitdrukking regs  $u$  deur  $v$  vervang. Die resultaat gelyk aan nul gestel gee:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dv} + \frac{v}{v^2 + \lambda^2} - \frac{5}{3v} = 0. \quad (17.10)$$

Integrasie gee:

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln (v^2 + \lambda^2) - \frac{5}{3} \ln v = \text{konstant},$$

d.i.

$$y = G v^{\frac{5}{3}} / \sqrt{v^2 + \lambda^2}, \quad (17.11)$$

waar  $G$  'n (voorlopig) willekeurige konstant is.

Uit (17.7) volg nou verder:

$$s = G \int_1^v dv (v^{\frac{5}{3}} / \sqrt{v^2 + \lambda^2}). \quad (17.12)$$



Hier dien opgemerk te word dat presies soos in (10.10a) en (10.10b) volg dat ons op die resultate van hoofstuk II en in die geval wel dié van § 6 en § 8 respektiewelik, terugval as ons  $\lambda$  onbegrensd laat toeneem of  $\lambda$  laat nader tot nul.

Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$ :

Eweas in (10.20) volg dat:

$$y_0 = 3/a \quad (17.13)$$

en dus uit (17.11):

$$G = 3 \sqrt{1 + \lambda^2}/a. \quad (17.14)$$

Hiermee het ons dan aan albei die rantvoorwaardes voldoen.

Die baan van die verdigtingsgolf:

Ons vind die vergelyking van die baan van die verdigtingsgolf deur in (17.12) in die boonste grens  $v$  deur  $u$  te vervang: dit gee

$$S = \frac{3}{a} \sqrt{1 + \lambda^2} \int_1^u dv (v^3/\sqrt{v^2 + \lambda^2}). \quad (17.15)$$

Die waarde van  $\varphi(s; t)$ :

Uit (3.7a):

$$\begin{aligned} \varphi(s; t) &= 4S - u(t)^3 \int_s^S ds v^{-3} = 4S - u(t)^3 \int_v^u dv y/v^3 = \\ &= 4S - \frac{3}{a} \sqrt{1 + \lambda^2} u(t)^3 \int_v^u dv/v^3 \sqrt{v^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Die baan van die suier:

Stel, vir die baan van die suier, in die onderste grens in (17.16)  $v = 1$  ( $s = 0$ ); dit gee

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 4S - \frac{3}{a} \sqrt{1 + \lambda^2} u^3 \int_1^u dv/v^3 \sqrt{v^2 + \lambda^2} = \\ &= \frac{3}{a} \sqrt{1 + \lambda^2} \int_1^u dv \left( \frac{4v^3 - u^3}{v^3 \sqrt{v^2 + \lambda^2}} \right). \end{aligned} \quad (17.17)$$

Ons kry vir die snelheid van suier

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} \frac{du}{dt} = \\ &= \frac{9}{a} \sqrt{1 + \lambda^2} \left[ \frac{u^3}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} - u^2 \int_1^u \frac{dv}{v^3 \sqrt{v^2 + \lambda^2}} \right] \frac{du}{dt}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

In besonder, vir  $t = 0$ ,  $v = 1$ ,  $u = 1$ , kry ons die beginsnelheid van die suier nl.

$$V_0 = \frac{9}{a} \left( \frac{du}{dt} \right)_{t=0} = \frac{3}{a} \sqrt{E} \sqrt{1 + \lambda^2}, \text{ m. b. v. (17.4)}. \quad (17.19)$$

Dit is dieselfde uitkoms as wat ons in § 10 gekry het.

Die fout in die oplossing:

As ons die uitdrukking (17.1) vir  $\Phi$  in vergelyking (3.3b) substitueer, dan kry ons, met gebruikmaking van (17.10) en (17.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{dt^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (S'^2 \Phi^{-\frac{1}{3}}) &= \frac{1}{v^3} \frac{d^2(u^3)}{dt^2} + \frac{3}{u^5} \frac{d^2}{ds^2} (S'^2 v^5) = \\ &= -\frac{3D}{u^5 v^3} + \frac{E}{3} \frac{1}{u^5} \frac{1}{y} \frac{d}{dv} \left\{ \frac{7y}{3v^2} (v^2 + \lambda^2) \right\} \text{ (m.b.v. (10.3), (17.7) en (17.10))} = \\ &= -\frac{3D}{u^5 v^5} + \frac{E}{3} \frac{1}{u^5} \frac{7}{9v^3} (2v^2 - \lambda^2) = a^2 \bar{V}_0^2 \frac{2}{243v^3} \frac{1}{u^5} \left( \frac{7v^2 - 8\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right) \text{ (m.b.v. (10.5))} = \\ &= a^2 \bar{V}_0^2 H^*, \quad (\text{sê}). \end{aligned} \quad (17.20)$$

Ons merk onmiddellik op dat die fout nul is, as  $v^2 = \frac{8}{7} \lambda^2$ . D.w.s. deur  $\lambda$  geskik te kies, kan ons die fout nul maak in 'n willekeurige punt.

Die fout neem onbepaald af as  $v$  en/of  $u$  onbegrensd toeneem.

As  $\lambda$  onbegrensd toeneem dan nader die fout tot

$$-\frac{1}{2} \frac{6}{4} a^2 \bar{V}_0^2 v^{-3} u^{-5}. \quad (17.21)$$

Met behulp van betrekkings (6.7a) en (10.10a) volg dat hierdie resultaat presies dieselfde is as die resultaat (6.5). Die fout bereik vir die geval sy grootste (absolute) waarde as  $u = 1$ ,  $v = 1$  ( $t = 0$ ,  $s = 0$ ) nl.

$$0,0658 a^2 \bar{V}_0^2 \quad (\lambda = \infty). \quad (17.21a)$$

Laat ons  $\lambda$  nader tot nul, dan word die fout

$$\frac{1}{2} \frac{4}{3} a^2 \bar{V}_0^2 v^{-1} u^{-5}. \quad (17.22)$$

Met behulp van betrekkings (8.16) en (10.10b) volg dat hierdie resultaat presies gelyk is aan die resultaat (8.12). Ook in die geval bereik die fout sy grootste (absolute) waarde as  $u = 1$ ,  $v = 1$  ( $t = 0$ ,  $s = 0$ ) nl.

$$0,0576 a^2 \bar{V}_0^2 \quad (\lambda = 0). \quad (17.22a)$$

Neem ons  $\lambda = \sqrt{7/8}$  dan is die fout nul as  $v = 1$  d.i. in die oorsprong. Met dié waarde vir  $\lambda$  kry ons

$$H^* = \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{2}{45} \frac{1}{u^5} \left( \frac{v^2 - 1}{v^3} \right). \quad (17.23)$$

$H^*$  bereik vir dié geval sy grootste waarde (vir  $u \geq 1$ ,  $v \geq 1$ ) as  $u = 1$ ,  $v = \sqrt{3}$ . Hierdie maximumwaarde is gelyk aan 0,0217. Die totale maximumfout is vir die geval dus gelyk aan

$$0,0217 a^2 \bar{V}_0^2 \quad (\lambda = \sqrt{7/8}). \quad (17.23a)$$

Met  $\lambda = 1$  is die fout nul as  $v = \sqrt{8/7}$ . Ons kry nou

$$H^* = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{u^5} \left( \frac{7v^2 - 8}{v^3} \right). \quad (17.24)$$

$H^*$  is nou negatief vir  $1 < v < \sqrt{8/7}$ ; dit bereik sy grootste absolute waarde (vir  $u \geq 1, v \geq 1$ ) as  $u = 1, v = \sqrt{24/7}$  nl. 0,0104. Die totale maximum-fout is vir die geval dus gelyk aan

$$0,0104 a^2 \bar{V}_0^2 \quad (\lambda = 1) \quad (17.24a)$$

Tabel XII gee die waardes van maximum- $|H^*|$  vir enkele waardes van  $\lambda$ .

TABEL XII:

$\lambda$	0	$\sqrt{7/8}$	1	$\infty$
Max. $ H^* $	0,0576	0,0217	0,0104	0,0658

§ 18. Reeksontwikkelings vir  $\Phi$  aan die hand van die resultate van § 17 vir die gevalle  $\lambda = 0, \lambda = \sqrt{7/8}, \lambda = 1$  en  $\lambda = \infty$ .

Met  $\sqrt{E(1 + \lambda^2)} t = \tau$  soos in (16.2) kry ons vir  $u(\tau)^3$  presies dieselfde reekse as in (16.11). (18.1)

Met

$a s = \sigma$  kry ons:

$$(dv^{-3}/d\sigma)_{\tau=0} = -1 \text{ vir alle } \lambda, \quad (18.2)$$

$$(d^2 v^{-3}/d\sigma^2)_{\tau=0} = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} (2 + 5\lambda^2)/(1 + \lambda^2) \quad (18.3)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{1^4}{9} \text{ as } \lambda = 0 \\ &= \frac{7^7}{4^5} \text{ as } \lambda = \sqrt{7/8} \\ &= \frac{3^1}{1^8} \text{ as } \lambda = 1 \\ &= \frac{1^7}{9} \text{ as } \lambda = \infty \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

$$(d^3 v^{-3}/d\sigma^3)_{\tau=0} = -\frac{4^2 \cdot 5}{8^1} + \frac{5^3}{2^7} / (1 + \lambda^2) \quad (18.5)$$

$$\left. \begin{aligned} &= -\frac{2^6 \cdot 6}{8^1} \text{ as } \lambda = 0 \\ &= -\frac{1^7 \cdot 0^1}{4^0 \cdot 5^1} \text{ as } \lambda = \sqrt{7/8} \\ &= -\frac{6^9 \cdot 1}{1^6 \cdot 2} \text{ as } \lambda = 1 \\ &= -\frac{4^2 \cdot 5}{8^1} \text{ as } \lambda = \infty \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Dus kry ons met:

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 0: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{7}{9} \sigma^2 - 0,5474 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = \sqrt{7/8}: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{7}{9} \sigma^2 - 0,7000 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = 1: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{3^1}{3^8} \sigma^2 - 0,7109 \sigma^3 + \dots \\ \lambda = \infty: & \quad v(\sigma)^{-3} = 1 - \sigma + \frac{1^7}{8} \sigma^2 - 0,8745 \sigma^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

Die reeksontwikkeling vir  $\Phi$  word dus agtereenvolgens met

$$\lambda = 0: \Phi = 1 + \tau - \sigma - \tau\sigma + 0,7778 \sigma^2 + 0,7778 \tau\sigma^2 - 0,5474 \sigma^3 + \dots \quad (18.8)$$

$$\lambda = \sqrt{7/8}: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,0778 \tau^2 - \tau\sigma + 0,8555 \sigma^2 + 0,0432 \tau^3 + \\ + 0,0778 \tau^2\sigma + 0,8555 \tau\sigma^2 - 0,7000 \sigma^3 + \dots \quad (18.9)$$

$$\lambda = 1: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,08333 \tau^2 - \tau\sigma + 0,8611 \sigma^2 + 0,0463 \tau^3 + \\ + 0,0833 \tau^2\sigma + 0,8611 \tau\sigma^2 - 0,7109 \sigma^3 + \dots \quad (18.10)$$

$$\lambda = \infty: \Phi = 1 + \tau - \sigma - 0,1667 \tau^2 - \tau\sigma + 0,9444 \sigma^2 - 0,0924 \tau^3 + \\ + 0,1667 \tau^2\sigma - 0,9444 \tau\sigma^2 - 0,8745 \sigma^3 + \dots \quad (18.11)$$

**Opmerking:**

Die reekse (18.8) en (18.11) vir  $\Phi$  as  $\lambda = 0$  en  $\lambda = \infty$  kan ewegood regstreeks uit die resultate van § 8 en § 6 respektiewelik, afgelei word.

Stel ons nl. in (8.10)  $\frac{1}{3} a \bar{V}_0 t = \tau$  en  $as = \sigma$  (vergeelyk 8.16) dan kry ons:

$$\Phi = (1 + \tau)(1 + \frac{5}{3} \sigma)^{-\frac{2}{3}}. \quad (18.12)$$

As ons hierdie uitdrukking vir  $\Phi$  in 'n magreeks ontwikkel dan kry ons presies die reeks (18.8).

Met presies dieselfde substitusies as hierbo vir  $t$  en  $s$  kry ons uit (6.8):

$$\Phi = (1 + \frac{4}{3} \tau)^{\frac{2}{3}} (1 + \frac{8}{3} \sigma)^{-\frac{2}{3}}. \quad (18.13)$$

Hierdie uitdrukking vir  $\Phi$  ontwikkel in 'n magreeks, gee presies die reeks (16.27).

Ons merk op dat die reekse (18.9), (18.10) en (18.11) tot en met die  $\tau\sigma^2$ -terms presies ooreenstem met die reekse (16.24), (16.5) en (16.27) respektiewelik. Die verskille tussen die koëffisiënte van die  $\sigma^3$ -terme van hierdie reekse en die  $\sigma^3$ -term van die reeks (16.28) is agtereenvolgens 0,0102; 0,0211 en 0,1847. [Hierdie verskille is groter as die onderlinge verskille van die koëffisiënte van die  $\sigma^3$ -terme van die reekse (16.24), (16.25) en (16.28). Laasgenoemde verskille is 0,0043; 0,0201; 0,1682 respektiewelik vir  $\lambda = \sqrt{7/8}$ ,  $\lambda = 1$  en  $\lambda = 5$ .]

Die koëffisiënte van die reeks (18.8) vir  $\lambda = 0$  toon in hierdie geval, eweas in die geval van § 16, die grootste afwykings. Die veranderlike  $\tau$  kom ook hier uitsluitlik in die eerste graad in die reeks voor. Dié reeks stem ook tot en met die  $\tau\sigma^2$ -term presies ooreen met die reeks (16.23). Die koëffisiënt van die  $\sigma^3$ -term toon 'n groter afwyking van die koëffisiënt van die  $\sigma^3$ -term van die reeks (16.28) as die koëffisiënt van die  $\sigma^3$ -term van die reeks (16.23).

Ons voel dus geneigd om te konkludeer dat die reekse van § 16 beter benaderings vir  $\Phi$  gee as die ooreenkomstige reekse van § 18. So 'n gevolgtrekking is egter nie volkome geregverdig nie, aangesien die terme van die graad hoër as die derde nie ondersoek is nie.

Verder: aan die end van § 16 het ons o.a. opgemerk dat hoewel die koëffisiënte van die reeks (16.23) ( $\lambda = 0$ ) groter afwykings toon as die koëffisiënte van die reeks (16.27) ( $\lambda = \infty$ ), tog gee die uitdrukking vir  $\Phi$  met  $\lambda = 0$  in daardie geval 'n beter benadering as die uitdrukking met  $\lambda = \infty$  op grond van ons bevindings in die eersvolgende hoofstuk d.i. hoofstuk IV. Presies dieselfde opmerking geld t.o.v. die formules van § 17 vir  $\Phi$  vir  $\lambda = 0$  en  $\lambda = \infty$  hoewel die reeksentwikkelings vir hierdie gevalle vir sover dit deur ons ondersoek is, die bevinding weerspreek.

Ten slotte: Op grond van die konklusies getrek in § 15 i.v.m. die afwyking van die tweede rantvoorwaarde van die oplossings van paragrawe 7, 9 en 10, asmede op grond van die konklusies van paragrawe 16

en 18 i.v.m. die reeksontwikkelings vir  $\Phi$  en asmede op grond van die resultate van § 17 waar die fout in die uitdrukking van paragrawe 6, 8 en 16 vir  $\Phi$  bespreek is, kom ons tot die volgende algemene slotsom nl. dat die beste benaderings wat ons vir  $\Phi$  dusver gevind het vir en die aanvangstadias en die verdere verloop van die beweging gegee word deur die uitdrukking  $\Phi = u^3/v^3$  met

óf (a) die bybehorende waardes (10.8) en (10.19) (met  $\lambda = \sqrt{7/8}$  of  $\lambda = 1$  of  $\lambda = 1,75$ ) vir  $u$  en  $v$  respektiewelik

óf (b) die bybehorende waardes (17.5) en (17.12) (met  $\lambda = \sqrt{7/8}$  of  $\lambda = 1$  of  $\lambda = 1,75$ ) vir  $u$  en  $v$  respektiewelik.

Opgemerks val te word in dié verband dat hoe geringer die verskil is in die waardes wat ons vir  $\Phi$  kry uit  $\Phi = u^3/v^3$  met die bybehorende waardes (10.8) en (10.19) vir  $u$  en  $v$  respektiewelik enersyds, en andersyds met die bybehorende waardes (17.5) en (17.12), in albei gevalle vir dieselfde waarde van  $\lambda$ , hoe noukeuriger is die benadering. Want in die eerste geval word aan die eerste rantvoorwaarde en die differensiaalvergelyking voldoen, maar nie aan die tweede rantvoorwaarde nie en in die tweede geval word aan albei die rantvoorwaardes maar nie aan die vergelyking voldoen nie.

#### Opmerking:

In die slotopmerking van die vorige hoofstuk d.i. hoofstuk II, het ons gemeld dat met die uitkomst van § 6 en § 8 die parameter  $a$  die waarde  $\frac{3.6}{7} \rho_0/\bar{\rho}$  aanneem, terwyl as ons in § 7 en § 9 die waardes van  $\mu$  respektiewelik  $\mu^*$  só kies dat die oplossings van dié paragrawe in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen, dan neem  $a$  presies dieselfde waarde aan.

Presies ooreenkomstige opmerkings geld t.o.v. § 17 en § 10 van hierdie hoofstuk. Met die uitkomst van § 17 neem  $a$  weer die waarde  $\frac{3.6}{7} \rho_0/\bar{\rho}$  aan. Kies ons in § 10 die waardes van die konstante  $C_1$  en  $C_2$  só dat die oplossing van dié paragraaf in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen (soos ons gedoen het) dan neem  $a$  weereens die waarde  $\frac{3.6}{7} \rho_0/\bar{\rho}$  aan.

Alle benaderings en formules soos deur ons gevind in hoofstukke II en III het dus betrekking op een en dieselfde fisiese toestand, d.w.s. op een en dieselfde verhouding van die digtheid van die gas in die buis tot die digtheid van die suier per eenheid van frontoppervlakte.

In die volgende hoofstuk sal ons die snelheid van die suier nader ondersoek. Langs hierdie weg kan ons eweëns 'n indruk kry van die graad van noukeurigheid wat ons bereik het met die gevindte uitdrukkinge en formules vir  $\Phi$ .

## HOOFSTUK IV.

### Die snelheid van die suier.

In hoofstukke II en III het ons altesaam ses uitdrukkings vir die snelheid van die suier gevind nl. (6.7), (7.14), (8.17) en (9.13) in hoofstuk II en (10.25) en (17.18) in hoofstuk III. Opgemerkt mag word dat die uitdrukkings van hoofstuk II spesiale gevalle is van dié van hoofstuk III. Soos opgemerk na (10.10a) en (10.10b) in § 10 val ons op die resultate en formules van § 7 en § 9 terug as ons in § 10 die parameter  $\lambda$  tot  $\infty$  en tot nul respektiewelik laat nader, sodat die formules (7.14) en (9.13) uit (10.25) verkry word deur  $\lambda$  onbegrensd te laat toeneem en tot nul te laat nader, respektiewelik.

'n Ooreenkomstige opmerking het ons gemaak na (17.12) in § 17 i.v.m. die resultate van § 6 en § 8 enersyds en § 17 andersyds. Die formules (6.7) en (8.17) word dan ook uit die formule (17.18) verkry deur  $\lambda$  respektiewelik tot oneindig en tot nul te laat nader.

Die essensiële verskil in die resultate lê daarin, soos opgemerk in die slot van die vorige hoofstuk, dat die uitdrukkings van § 6, § 8 en § 17 vir  $\Phi$  aan albei die rantvoorwaardes voldoen, maar nie aan die differensiaalvergelyking self nie. Daarenteen voldoen die uitdrukkings van § 7, § 9, § 10 vir  $\Phi$  aan die differensiaalvergelyking self en die eerste rantvoorwaarde, maar nie aan die tweede rantvoorwaarde nie.

Deur nou die resultate van die twee gevalle te vergelyk, in dié geval aan die hand van die snelheid van die suier, kan ons 'n indruk kry van die graad van benadering wat ons met ons resultate bereik het.

Ons sal die formule vir die snelheid van die suier soos verkry in (10.25) aandui met  $\bar{V}_\lambda$ , terwyl ons die twee spesiale gevalle hiervan nl. die gevalle  $\lambda = \infty$  en  $\lambda = 0$  soos verkry in (7.14) en (9.13) respektiewelik, sal aandui met  $\bar{V}_\infty$  en  $\bar{V}_{00}$ . (Laasgenoemde moet onderskei word van  $\bar{V}_0$  wat die beginsnelheid van die suier aandui.) Die formule (17.18) sal ons aandui met  $\bar{V}_\lambda^*$  en die twee spesiale gevalle hiervan met  $\bar{V}_\infty^*$  en  $\bar{V}_{00}^*$  vir  $\lambda = \infty$  en  $\lambda = 0$  soos verkry in (6.7) en (8.17), respektiewelik.

#### § 19. Die eindsnelheid van die suier as $t$ onbegrensd toeneem.

Ons sal nou eers die eindwaarde van die snelheid van die suier ondersoek as  $t \rightarrow \infty$  vir verskillende waardes van  $\lambda$ .

A). Uit (7.14) kry ons vir  $\lambda = \infty$ :

$$\bar{V}_\infty = \frac{3g}{4a(1+\mu)} \left\{ \frac{3x_1-1}{x_1} (1+gt)^{\frac{1}{2}(3x_1-1)} + \frac{\mu(3x_2-1)}{x_2} (1+gt)^{\frac{1}{2}(3x_2-1)} + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\mu}{x_2} \right) (1+gt)^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (19.1)$$

waarby

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{12} = 0,09359; \quad x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{12} = -0,59359,$$

en

$$g = \frac{4}{9} a \bar{V}_0, \text{ uit (7.15).}$$

Ons sal aan  $\mu$  die waarde (7.20), d.i.  $\mu = 0,42440$ , gee, sodat die oplossing (7.1) — (7.7) in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen en die afwyking van hierdie rantvoorwaarde verder volgens tabel I, figuur 5, verloop. Hiermee word

$$\bar{V}_\infty = \bar{V}_0 [-1,7983 (1 + gt)^{-0,17981} + 0,4653 (1 + gt)^{-0,69519} + 2,3330 (1 + gt)^{-0,25}]. \quad (19.2)$$

As  $t$  onbepaald toeneem oorweeg die eerste term op die duur, sodat  $\bar{V}_\infty$  naderhand van teken verander.

$$\text{As } t \rightarrow \infty \text{ dan } \bar{V}_\infty \rightarrow 0. \quad (19.2a)$$

Uit (6.7) en (6.7a) (eweëns vir  $\lambda = \infty$ ) kry ons

$$\bar{V}_\infty^* = \bar{V}_0 [4(1 + gt)^{-\frac{1}{3}} - 3(1 + gt)^{-\frac{1}{3}}] \text{ waar } g = \frac{4}{9} a \bar{V}_0. \quad (19.3)$$

Laat ons  $t$  in (19.3) onbepaald toeneem, dan oorweeg die tweede term op die duur, sodat ook  $\bar{V}_\infty^*$  naderhand van teken verander.

$$\text{As } t \rightarrow \infty \text{ dan } \bar{V}_\infty^* \rightarrow 0. \quad (19.3a)$$

Dus: vir  $\lambda = \infty$  keer die snelheid in albei gevalle van teken om en nader uiteindelik tot nul as  $t \rightarrow \infty$ .

**B).** Uit (9.13) kry ons vir  $\lambda = 0$ :

$$\bar{V}_{00} = \frac{g_1}{a(1 + \mu^*)} \{4,5(1 + g_1 t)^{-\frac{2}{3}} + 4,2\mu^*(1 + g_1 t)^{-\frac{2}{3}} - (1,5 + 1,2\mu^*)\} \quad (19.4)$$

waar  $g_1 = \frac{1}{3} a \bar{V}_0$ . Hierin sal ons aan  $\mu^*$  die waarde (9.18) gee d.i.  $\mu^* = -4/7$ , sodat die oplossing van § 9 in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen en die afwyking origins volgens tabel III, figuur 6, verloop. Dit gee

$$\bar{V}_{00} = \bar{V}_0 \{3,5(1 + g_1 t)^{-\frac{2}{3}} - 1,8667(1 + g_1 t)^{-\frac{2}{3}} - 0,6333\}. \quad (19.5)$$

As  $t$  hierin onbepaald toeneem sal die eerste twee terms afneem sodat die laaste (konstante) term op die duur sal oorweeg. Ook in dié geval sal die snelheid dus naderhand van teken verander.

$$\text{As } t \rightarrow \infty, \text{ dan } \bar{V}_{00} \rightarrow -0,6333 \bar{V}_0. \quad (19.5a)$$

Uit (8.17) (eweëns vir  $\lambda = 0$ ) kry ons

$$\bar{V}_{00}^* = \bar{V}_0 \{1,75(1 + g_1 t)^{-\frac{1}{3}} - 0,75\} \text{ waar } g_1 = \frac{1}{3} a \bar{V}_0. \quad (19.6)$$

Laat ons in (19.6)  $t$  toeneem dan keer die teken van  $\bar{V}_{00}^*$  op die duur om.

$$\text{As } t \rightarrow \infty \text{ dan } \bar{V}_{00}^* \rightarrow -0,75 \bar{V}_0. \quad (19.6a)$$

Dus: vir albei die gevalle  $\lambda = 0$  keer die snelheid van teken om. In die een geval is die eindsnelheid  $-0,6333 \bar{V}_0$  en in die ander geval  $-0,75 \bar{V}_0$ .

Hier dien opgemerk te word dat in (19.4) die eindsnelheid eintlik 'n funksie is van  $\mu^*$ . Nader  $t$  tot oneindig dan nader die snelheid tot die waarde (9.15) nl.  $-\frac{1}{10} \left( \frac{5+4\mu^*}{1+\mu^*} \right) \bar{V}_0$ . Ons het in (19.5)  $\mu^*$  so gekies dat in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen word deur die oplossing van § 9. Ons kon vir  $\mu^*$  ook enige ander waarde gekies het. (Kies ons vir  $\mu^*$  die waarde  $-1$  dan is die eindsnelheid oneindig groot; die hele formule (19.4) verloor dan egter sy betekenis.) Vir  $-\frac{5}{4} < \mu^* < -1$  is die eindsnelheid positief, vir alle ander waardes negatief, behalwe vir  $\mu^* = -\frac{5}{4}$  waarvoor dit nul is. Aangewese is egter om  $\mu^*$  so te kies as wat ons gedoen het.

C). Ons sal vervolgens die uitdrukking (10.25) ondersoek:

$$\begin{aligned} \bar{V}_\lambda &= \frac{du}{dt} \left[ 3 C_1 \left\{ \frac{F_1(1+\lambda^2/u^2)}{(1+\lambda^2/u^2)^a} - \frac{u^2}{2\lambda^2} \int_{\lambda^2/u^2}^{\lambda^2} dw \frac{F_1(w+1)}{(w+1)^a} \right\} + \text{ens.} \right] = \\ &= \frac{a \bar{V}_0}{3 \sqrt{1+\lambda^2}} \frac{\sqrt{u^2+\lambda^2}}{3u^3} \left[ 3 C_1 \left\{ \frac{F_1(1+\lambda^2/u^2)}{(1+\lambda^2/u^2)^a} - \frac{u^2}{2\lambda^2} \int_{\lambda^2/u^2}^{\lambda^2} dw \frac{F_1(w+1)}{(w+1)^a} \right\} + \text{ens.} \right] \quad (19.7) \end{aligned}$$

met behulp van (10.7) en (10.26a); hierby is  $\alpha = 1,140388$  en  $\beta = 0,109612$ .

Die verband tussen  $u$  en  $t$  word gegee deur (10.8), nl.

$$a \bar{V}_0 t = 3 \sqrt{1+\lambda^2} \left\{ (u^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}} - 3\lambda^2(u^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} - (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}} + 3\lambda^2(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (19.8)$$

gebruikmakende van (10.26a). Dus  $t \rightarrow \infty$  as  $u \rightarrow \infty$  en omgekeerd.

As nou  $t \rightarrow \infty$  en dus ook  $u \rightarrow \infty$ , dan

$$\frac{F_1(1+\lambda^2/u^2)}{(1+\lambda^2/u^2)^a} \rightarrow F_1(1) \quad \text{en} \quad \frac{F_2(1+\lambda^2/u^2)}{(1+\lambda^2/u^2)^\beta} \rightarrow F_2(1). \quad (19.9)$$

Dus as  $u \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) dan

$$\bar{V}_\lambda / \bar{V}_0 \rightarrow - \frac{a}{6\lambda^2 \sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^{\lambda^2} dw \left\{ C_1 \frac{F_1(w+1)}{(w+1)^\alpha} + C_2 \frac{F_2(w+1)}{(w+1)^\beta} \right\}. \quad (19.10)$$

Nou:

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda^2} dw \frac{F_1(w+1)}{(w+1)^\alpha} &= \int_0^{\lambda^2} dw \left\{ \frac{1}{(w+1)^\alpha} + \frac{\alpha(\alpha-\gamma+1)}{1(\alpha-\beta+1)} \frac{1}{(w+1)^{\alpha+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)}{1 \cdot 2 \cdot (\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta+2)} \frac{1}{(w+1)^{\alpha+2}} + \dots \right\} = \\ &= - \left[ \frac{\bar{F}_1(w+1)}{(\alpha-1)(w+1)^{\alpha-1}} \right]_0^{\lambda^2} = - \left[ \frac{\bar{F}_1(w+1)}{0,14039(w+1)^{0,14039}} \right]_0^{\lambda^2} \quad (19.11) \end{aligned}$$

waarby

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(w+1) &= F\{\alpha-1; \alpha-\gamma+1; \alpha-\beta+1; 1/(w+1)\} = \\ &= F\{0,14039; 0,64039; 2,030776; 1/(w+1)\}. \quad (19.12) \end{aligned}$$



Ooreenkomstig volg dat

$$\int_0^{\lambda^2} dw \frac{F_2(w+1)}{(w+1)^\beta} = - \left[ \frac{\bar{F}_2(w+1)}{(\beta-1)(w+1)^{\beta-1}} \right]_0^{\lambda^2} =$$

$$= \left[ \frac{(w+1)^{0,89039} \bar{F}_2(w+1)}{0,89039} \right]_0^{\lambda^2} \quad (19.13)$$

waarby

$$\bar{F}_2(w+1) = F\{\beta-1; \beta-\gamma+1; \beta-a+1; 1/(w+1)\} =$$

$$= F\{-0,89039; -0,39039; -0,030776; 1/(w+1)\}. \quad (19.14)$$

Dus volg dat

$$(\bar{V}_\lambda/\bar{V}_0)_{t=\infty} = - \frac{a}{6\lambda^2 \sqrt{1+\lambda^2}} \left[ - \frac{C_1}{0,14039} \{(1+\lambda^2)^{-0,14039} \bar{F}_1(1+\lambda^2) - \bar{F}_1(1)\} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2}{0,89039} \{(1+\lambda^2)^{0,89039} \bar{F}_2(1+\lambda^2) - \bar{F}_2(1)\} \right] \quad (19.15)$$

Die waarde van die uitdrukking aan die regterkant moet nou bepaal word vir verskillende waardes van  $\lambda$ . Hierby sal ons die waardes van die konstante  $C_1$  en  $C_2$  so bepaal dat volgens die resultate van § 11 in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen word. D.i.  $C_1$  en  $C_2$  word bepaal uit vergelykings (11.14) en (11.15) nl.

$$(1+\lambda^2)^{-\alpha} F_1(1+\lambda^2) \cdot a C_1 + (1+\lambda^2)^{-\beta} F_2(1+\lambda^2) \cdot a C_2 = 3 \quad (19.16)$$

en

$$2a(1+\lambda^2)^{-\alpha} \bar{F}_1(1+\lambda^2) \cdot a C_1 + 2\beta(1+\lambda^2)^{-\beta} \bar{F}_2(1+\lambda^2) \cdot a C_2 = 5 + 2/\lambda^2. \quad (19.17)$$

Ons sal die waarde van die uitdrukking in die regterlid van (19.15) bereken vir  $\lambda = \sqrt{7/8}$ ; 1; 2; 3; 5 en  $\sqrt{99}$ . Vir hierdie doel het ons die waardes van die reekse  $\bar{F}_1(1+\lambda^2)$  en  $\bar{F}_2(1+\lambda^2)$  nodig vir genoemde waardes van  $\lambda$ , asmede die waardes van  $\bar{F}_1(1+\lambda^2)$ ,  $\bar{F}_2(1+\lambda^2)$ ,  $F_1(1+\lambda^2)$  en  $F_2(1+\lambda^2)$  vir dieselfde waardes van  $\lambda$ . Die waardes van laasgenoemde reekse het ons nodig vir die bepaling van die waardes van die konstante  $C_1$  en  $C_2$ .

Die koëffisiënte van opeenvolgende magte van die veranderlike in die ontwikkeling van laasgenoemde 4 reekse word gegee in tabel IV in hoofstuk III.

Die koëffisiënte van opeenvolgende magte van die veranderlike, sê  $x$ , in die ontwikkeling van  $\bar{F}_1$  en  $\bar{F}_2$  word in tabel XIII gegee.

TABEL XIII:

Magte van $x$	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$	$x^8$	$x^9$
$\bar{F}_1$	0,04427	0,01366	0,00638	0,00362	0,00231	0,00159	0,00070		
$\bar{F}_2$	-11,29426	-0,38932	-0,11770	-0,05456	-0,03086	-0,01961	-0,0135	-0,0098	-0,0074

Die waardes van  $\bar{F}_1(1 + \lambda^2)$  en  $\bar{F}_2(1 + \lambda^2)$ , tesame met die waardes van die reekse  $F_1(1 + \lambda^2)$ ,  $F_2(1 + \lambda^2)$ ,  $\bar{F}_1(1 + \lambda^2)$ ,  $\bar{F}_2(1 + \lambda^2)$  vir die waardes van  $\lambda$  wat ons nodig het, word in tabel XIV gegee. Die waardes van  $C_1$  en  $C_2$  soos bepaal uit (19.16) en (19.17) word eweëns in die tabel gegee.

TABEL XIV:

$\lambda$ $1/(1+\lambda^2)$	$\sqrt{7/8}$ 0,5333	1 0,5	2 0,2	3 0,1	5 0,03846	$\sqrt{99}$ 0,01
$\bar{F}_1$	1,02891	1,02668	1,00945	1,00457	1,00172	1,00044
$\bar{F}_2$	-5,15951	-4,76401	-1,27546	-0,13344	0,56501	0,88702
$F_1$	1,68110	1,6031	1,16304	1,07382	1,02684	1,00681
$F_2$	13,52285	12,2034	4,26595	2,24284	1,55562	1,14170
$F_1$	1,28793	1,2608	1,08159	1,03819	1,01414	1,00342
$F_2$	1,94809	1,8706	1,30006	1,14419	1,05422	1,01395
$aC_1$	2,97197	3,2233	11,173	27,133	83,831	398,77
$aC_2$	0,62178	0,6670	0,98362	1,15063	1,2616	1,477

Voorts kry ons, gebruikmakende van formule (11.4):

$$\bar{F}_1(1) = 1,0794 \text{ en } \bar{F}_2(1) = -10,983. \quad (19.18)$$

Substitusie van die betrokke waardes van die reekse en die veranderlikes in (19.15) en uitvoering van die nodige berekenings lewer die reeks van waardes gegee in tabel XV vir die eindsnelheid van die suier. Die eindwaardes vir die gevalle  $\lambda = \infty$  en  $\lambda = 0$  word deur (19.2) en (19.5) respektiewelik, gegee.

TABEL XV:

 $t = \infty$ 

$\lambda$	0	$\sqrt{7/8}$	1	2	3	5	$\sqrt{99}$	$\infty$
$(\bar{V}_\lambda/V_0)_{t=\infty}$	-0,63333	-0,5945	-0,5899	-0,522	-0,474	-0,349	-0,270	0

Vervolgens ondersoek ons formule (17.18):

$$\bar{V}_\lambda^*/\bar{V}_0 = \frac{1}{u^{4/3}} - \frac{\sqrt{u^2 + \lambda^2}}{u} \int_1^u \frac{dv}{v^{4/3} \sqrt{v^2 + \lambda^2}} \quad (19.19)$$

waarby die verband tussen  $u$  en  $t$  ook deur (19.8) gegee word.

Dus, as  $u \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) dan

$$\bar{V}_\lambda^*/\bar{V}_0 \rightarrow - \int_1^\infty \frac{dv}{v^{4/3} \sqrt{v^2 + \lambda^2}} = -\lambda^{-1/3} \int_{1/\lambda}^\infty \frac{dv_1}{v_1^{4/3} \sqrt{v_1^2 + 1}}. \quad (19.20)$$

Die laaste stap volg deur  $v$  deur  $\lambda v_1$  te vervang en die integrasiegrense dienooreenkomstig te wysig.

Ons wil nou die uitdrukking (19.20) ondersoek vir dieselfde waardes van  $\lambda$  as wat ons in die vorige geval gedoen het.

Vir die bepaling van die integraal sal ons die integrand ontbind in 'n reeks van magte van  $v_1^2$  of  $1/v_1^2$  na gelang  $v_1 < 1$  of  $v_1 > 1$ . In die omgewing van 1 konvergeer die reekse besonder traag, sodat ons die integrasie-interval in drie dele sal splits nl. 0 tot 0,8; 0,8 tot 2 en dan 2 tot  $\infty$ . In die interval 0,8 tot 2 sal ons die waarde van die integraal bepaal deur toepassing van die reël van SIMPSON.

Ons kry nou:

$$\int_{1/\lambda}^{0,8} dv_1 \left\{ v_1^{-\frac{4}{3}} (v_1^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right\} = \left[ -3v_1^{-\frac{1}{3}} - 0,3v_1^{\frac{5}{3}} + 0,10217v_1^{\frac{11}{3}} - 0,055147v_1^{\frac{17}{3}} + \right. \\ \left. + 0,035666v_1^{\frac{23}{3}} - 0,025458v_1^{\frac{29}{3}} + 0,01934v_1^{\frac{35}{3}} - \right. \\ \left. - 0,01533v_1^{\frac{41}{3}} + 0,0125v_1^{\frac{47}{3}} - 0,0105v_1^{\frac{53}{3}} + \dots \right]_{1/\lambda}^{0,8} \quad (19.21)$$

as  $v_1 < 1$ ,  $\lambda > 1,25$ ; en

$$\int_2^u dv_1 \left[ v_1^{-\frac{4}{3}} (v_1^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right] = \left[ -0,75v_1^{-\frac{4}{3}} + 0,15v_1^{-\frac{10}{3}} - 0,07031v_1^{-\frac{16}{3}} + \right. \\ \left. + 0,04261v_1^{-\frac{22}{3}} - 0,02929v_1^{-\frac{28}{3}} + 0,0217v_1^{-\frac{34}{3}} - \dots \right]_2^u \quad (19.22)$$

as  $v_1 > 1$ .

Vir die bepaling van die waarde van die integraal in die interval 0,8 tot 2 maak ons gebruik van die tabel XVI van waardes van die integrand. „Id” staan vir „integrand”.

TABEL XVI:

$v_1$	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86
$Id$	1,05146	1,02915	1,00750	0,98649	0,96610	0,94630	0,92707
$v_1$	0,87	0,88	0,89	0,90	0,95	1,0	1,1
$Id$	0,90838	0,89022	0,87257	0,85540	0,77632	0,70711	0,592398
$v_1$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$Id$	0,502031	0,429734	0,371122	0,32305	0,283214	0,24986	0,221796
$v_1$	1,9	2,0	1,03453	$\sqrt{8/7} = 1,06905$			
$Id$	0,197915	0,177477	0,66425	0,62494			

Stel nou gerieflikheidshalwe

$$I_{u_1}^u = \int_{u_1}^u dv_1 \left\{ v_1^{-\frac{4}{3}} (v_1^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (19.23)$$

Uit (19.22) kry ons dan na uitvoering van enige berekenings

$$I_2^\infty = 0,2834. \quad (19.24)$$

Met  $u_1 = 1/\lambda$  kry ons dan m.b.v. óf (19.21) óf tabel XVI óf m.b.v. albei, tabel XVII van waardes vir  $I_{1/\lambda}^2$ . M.b.v. (19.24) volg dan die waardes van  $I_{1/\lambda}^\infty$  wat ook in die tabel gegee word.

TABEL XVII:

$\lambda$	$\sqrt{7/8}$	1	2	3	5	$\sqrt{99}$
$I_{1/\lambda}^2$	0,3160	0,3604	0,9987	1,5018	2,269	4,4048
$I_{1/\lambda}^\infty$	0,6003	0,6447	1,2830	1,7861	2,553	4,6891

Tabel XVII tesame met (19.24) stel ons in staat om tabel XVIII van die eindwaardes van  $\bar{V}_\lambda^*$  saam te stel. Die eindwaarde vir  $\lambda = 0$  volg regstreeks uit die eerste een van die twee uitdrukkings (19.20) of ook (19.6). Volledigheidshalwe voeg ons ook die eindwaardes van  $\bar{V}_\lambda$  by. Dit stel ons in staat om die eindwaardes te vergelyk.

TABEL XVIII:

$\lambda$	0	$\sqrt{7/8}$	1	2	3	5	$\sqrt{99}$	$\infty$
$\bar{V}_\lambda^*/\bar{V}_0$	-0,75	-0,6562	-0,6447	-0,509	-0,413	-0,300	-0,1809	0
$\bar{V}_\lambda/\bar{V}_0$	-0,6333	-0,5945	-0,5899	-0,523	-0,474	-0,387	-0,270	0

Diagram van die eindwaarde van die snelheid as funksie van  $\lambda$ :

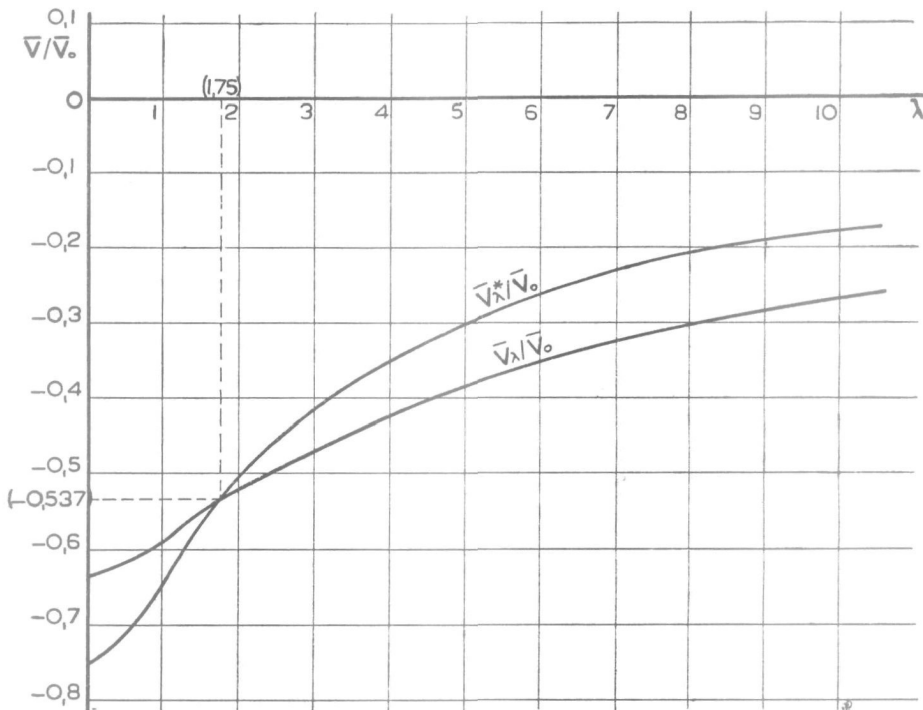


Fig. 11.

Die twee krommes stel die eindwaarde van die snelheid van die suier as funksie van  $\lambda$  voor vir die twee gevalle waarin die uitdrukking vir  $\Phi$  waarvan die formules vir die snelheid afgelei is (I) aan albei die rantvoorwaardes voldoen maar nie aan die vergelyking nie (voorgestel deur  $\bar{V}_\lambda/\bar{V}_0$ ) en (II) aan die eerste rantvoorwaarde en die vergelyking voldoen maar nie aan die tweede rantvoorwaarde nie (voorgestel deur  $\bar{V}_\lambda/\bar{V}_0$ ). Vir  $\lambda = 0$  is die eindwaardes  $-0,75 \bar{V}_0$  en  $-0,6333 \bar{V}_0$  respektiewelik vir die twee gevalle. As  $\lambda$  toeneem, neem die eindsnelheid in albei gevalle af en nader tot nul as  $\lambda \rightarrow \infty$ . Die twee krommes sny mekaar waar  $\lambda$  ongeveer gelyk is aan 1,75. Vir hierdie waarde van die  $\lambda$  is die eindwaardes gelyk en ongeveer gelyk aan  $-0,537 \bar{V}_0$ . Vir  $\lambda = 1$  is die eindwaardes  $-0,6447 \bar{V}_0$  en  $-0,5899 \bar{V}_0$ . Ons sal in die volgende paragraaf die verloop van die snelheid vir die gevalle  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  en  $\lambda = \infty$  nader ondersoek as  $t$  toeneem van 0 tot  $\infty$ . Ons wil alleen nog opmerk dat die eindwaarde 0 strydig is met die meganiese oorwegings.

§ 20. In dié paragraaf sal ons die verloop van die snelheid van die suier aan de hand van die verkreeë formules ondersoek vir die gevalle  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ , en  $\lambda = \infty$ . Die geval  $\lambda = 1$  word eerste ondersoek aan die hand van formules (19.7) en (19.19).

Uit (19.7) kry ons met  $\lambda = 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{V}_1/\bar{V}_0 = & \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^3} \left[ 3,2233 \left\{ \frac{F_1(1+1/u^2)}{(1+1/u^2)^\alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - u^2 \left( \frac{\bar{F}_1(1+1/u^2)}{2(\alpha-1)(1+1/u^2)^{\alpha-1}} - \frac{\bar{F}_1(2)}{2(\alpha-1)2^{\alpha-1}} \right) \right\} + \right. \\ & \left. + 0,6670 \left\{ \frac{F_2(1+1/u^2)}{(1+1/u^2)^\beta} - u^2 \left( \frac{2^{1-\beta} \bar{F}_2(2)}{2(1-\beta)} - \frac{(1+1/u^2)^{1-\beta} \bar{F}_2(1+1/u^2)}{2(1-\beta)} \right) \right\} \right] \quad (20.1) \end{aligned}$$

met behulp van (19.11) en (19.13); die waardes van  $C_1$  en  $C_2$  is geneem uit tabel XIV vir  $\lambda = 1$ . Hierby is verder  $\alpha-1 = 0,14039$ ,  $1-\beta = 0,89039$  terwyl  $\bar{F}_1(w+1)$  en  $\bar{F}_2(w+1)$  die waardes (19.12) en (19.14) respektiewelik, het.

Ter berekening van die waarde van die uitdrukking (20.1) vir verskillende waardes van  $u$  moet ons dus die waardes van die reekse  $F_1(1+1/u^2)$ ,  $F_2(1+1/u^2)$ ,  $\bar{F}_1(1+1/u^2)$  en  $\bar{F}_2(1+1/u^2)$  vir dié waardes van  $u$  ken. Die kleinste van hierdie waardes is  $u = 1$  ( $t = 0$ ) en die grootste is  $u = \infty$  ( $t = \infty$ ).

As  $u \rightarrow \infty$  dan  $(1+1/u^2) \rightarrow 1$ ; ons sal dus wat die eerste twee funksies betref, vir die bepaling van hulle somme gebruik maak van formules (12.3) waarby

$$x = 1/(1+w) = u^2/(u^2+1). \quad (20.2)$$

Vir die bepaling van die waardes van die reekse  $\bar{F}_1$  en  $\bar{F}_2$  sal ons die transformasieformule (12.2) moet toepas. Dit gee

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= 1,0794 \bar{F}_{1a} + 0,42459 (1-x)^{1,25} \bar{F}_{1b} \\ \bar{F}_2 &= -10,983 \bar{F}_{2a} - 3,5565 (1-x)^{1,25} \bar{F}_{2b} \end{aligned} \right\} \quad (20.3)$$

waarby  $x$  weer die waarde (20.2) het. Met  $\bar{x} = 1 - x$  is verder

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{1a} &= F(0,140388; 0,640388; -0,25; \bar{x}) \\ \bar{F}_{1b} &= F(1,890388; 1,390388; 2,25; \bar{x}) \\ \bar{F}_{2a} &= F(-0,890388; -0,390388; -0,25; \bar{x}) \\ \bar{F}_{2b} &= F(0,859612; 0,359612; 2,25; \bar{x}) \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

Die koeffisiënte van opeenvolgende magte van  $\bar{x}$  in die ontwikkeling van hierdie reekse word vir sover ons dit nodig het in tabel XIX gegee.

TABEL XIX:

Magte van $\bar{x}$	Koeffisiënte			
	$\bar{F}_{1a}$	$\bar{F}_{1b}$	$\bar{F}_{2a}$	$\bar{F}_{2b}$
$\bar{x}$	-0,359611	1,168166	-1,390387	0,13739
$\bar{x}^2$	-0,44848	1,241697	-0,061938	0,05344
$\bar{x}^3$	-0,48279	1,28454	-0,021071	0,02828
$\bar{x}^4$	-0,50175	1,31333	-0,01055	0,01746
$\bar{x}^5$	-0,51414	1,33441	-0,00631	
$\bar{x}^6$	-0,52305	1,35074	-0,00419	
$\bar{x}^7$	-0,52987	1,36391		
$\bar{x}^8$	-0,5353	1,37485		
$\bar{x}^9$	-0,539	1,3842		
$\bar{x}^{10}$	-0,543			
$\bar{x}^{11}$	-0,547			
$\bar{x}^{12}$	-0,551			

Die somme van die reekse vir dié waardes van  $u$  wat ons nodig het, word in tabel XX gegee. Die waardes van  $F_1$  en  $F_2$  is oorgeneem uit tabel VIII; enkele waardes wat hier gegee word kom nie in tabel VIII voor nie; hulle moes dus vir die tabel selfstandig bepaal word. Die waardes van  $\bar{F}_1$  en  $\bar{F}_2$  vir  $u = 1,2$  en  $u = 1,4$  is verkry deur regstreekse sommering, nie deur toepassing van die formules (20.3) nie. Die waardes van  $\bar{F}_1$  en  $\bar{F}_2$  vir  $u = 1$  is bepaal én deur regstreekse sommering én m.b.v. formules (20.3); dit gee dieselfde waardes.

TABEL XX:

$u$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9
$x = 1/(1+w)$	0,5			0,71901	0,76415	0,78308
$\bar{x}$	0,5			0,28099	0,23585	0,216920
$\bar{F}_{1a}$	0,58376			0,84853	0,88187	0,89454
$\bar{F}_{1b}$	2,22145			1,46301	1,36675	1,32867
$\bar{F}_{2a}$	0,28575			0,60400	0,66832	0,69525
$\bar{F}_{2b}$	1,08726			1,04357	1,03580	1,03265
$\bar{F}_1$	1,02688	1,03289	1,03831	1,0429	1,0473	1,0491
$\bar{F}_2$	-4,76401	-5,83624	-6,70086	-7,3927	-7,9455	-8,1796
$F_1$	1,2608	1,3390	1,4159	1,4898	1,5600	1,5935
$F_2$	1,8706	2,0896	2,2902	2,4774	2,6023	2,7122

$u$	2	3	4	6	8	10	20
$x = 1/(1+w)$	0,8	0,9	0,94118	0,97297	0,98462	0,99010	0,99751
$\bar{x}$	0,2	0,1	0,05882	0,02703	0,01538	0,0099	0,00160
$\bar{F}_{1a}$	0,90532	0,95902	0,9771	0,98994	0,99436	0,9964	0,9951
$\bar{F}_{1b}$	1,29620	1,13065	1,0734	1,03252	1,01820	1,0117	1,0029
$\bar{F}_{2a}$	0,71925	0,86032	0,9180	0,96237	0,97860	0,9863	0,9965
$\bar{F}_{2b}$	1,02988	1,01430	1,0083	1,00375	1,00212	1,0014	1,0003
$\bar{F}_1$	1,0508	1,0622	1,0678	1,0733	1,0757	1,0768	1,0786
$\bar{F}_2$	-8,3894	-9,6520	-10,187	-10,609	-10,768	-10,844	-10,947
$F_1$	1,6251	1,8621	2,1013	2,3733	2,5459	2,6773	3,0075
$F_2$	2,7818	3,3361	3,6938	4,1360	4,3981	4,5898	5,0515

$u$	30	50	100	500	$\infty$
$x = 1/(1+w)$	0,99889	0,99960	0,99990	1	1
$\bar{x}$	0,00111	0,00040	0,00010	0	0
$\bar{F}_{1a}$	0,9996	0,9999	1	1	1
$\bar{F}_{1b}$	1,0013	1,0005	1,0001	1	1
$\bar{F}_{2a}$	0,9985	0,9994	0,9999	1	1
$\bar{F}_{2b}$	1,0002	1,0001	1,0000	1	1
$\bar{F}_1$	1,0791	1,0793	1,0794	1,0794	1,0794
$\bar{F}_2$	-10,966	-10,978	-10,983	-10,983	-10,983
$F_1$	3,1576	3,3109	3,4661	3,5435	3,8442
$F_2$	5,2559	5,4618	5,6685	5,7707	6,1678

Die waardes van  $\bar{F}_1(1)$  en  $\bar{F}_2(1)$  word in (19.18) gegee.

Stel nou in (20.1):

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= F_1(1 + 1/u^2)/(1 + 1/u^2)^\alpha; & K_2 &= F_2(1 + 1/u^2)/(1 + 1/u^2)^\beta; \\ K_3 &= \bar{F}_1(1 + 1/u^2)/2(\alpha-1)(1 + 1/u^2)^{\alpha-1} = \frac{(1 + 1/u^2)}{2(\alpha-1)} \cdot \frac{\bar{F}(1 + 1/u^2)}{(1 + 1/u^2)^\alpha}; \\ K_4 &= \bar{F}_2(1 + 1/u^2)/2(1-\beta)(1 + 1/u^2)^{\beta-1} = \frac{(1 + 1/u^2)}{2(1-\beta)} \cdot \frac{\bar{F}_2(1 + 1/u^2)}{(1 + 1/u^2)^\beta} \end{aligned} \right\} (20.4)$$

Tabel XXI gee die verloop van hierdie groothede en van  $\bar{V}_1/\bar{V}_0$  as  $u$  toeneem van 1 na  $+\infty$ .

TABEL XXI:

$u$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9
$K_1$		0,73384	0,88484	1,0229	1,1479	1,2057
$K_2$		1,9722	2,1890	2,3895	2,5267	2,6405
$K_3$		3,4162	3,4901	3,5463	3,5918	3,6103
$K_4$		-5,2414	-5,4317	-5,5681	-5,6693	-5,7105
$\bar{V}_1/\bar{V}_0$	1	0,6289	0,3848	0,2131	0,0821	0,0318

$u$	2	3	4	6	8	10
$K_1$	1,2600	1,6513	1,9610	2,3003	2,5013	2,6471
$K_2$	2,7146	3,2978	3,6693	4,1236	4,3896	4,5848
$K_3$	3,6271	3,7276	3,7708	3,8080	3,8230	3,8297
$K_4$	-5,7466	-5,9532	-6,0378	-6,1046	-6,1294	-6,1437
$\bar{V}_1/\bar{V}_0$	-0,0139	-0,286	-0,397	-0,493	-0,534	-0,551

$u$	20	30	50	100	500	$\infty$
$K_1$	2,9990	3,1526	3,3094	3,4657	3,5435	—
$K_2$	5,0501	5,2552	5,4615	5,6684	5,7707	—
$K_3$	3,8401	3,8426	3,8438	3,8443	3,8443	3,8443
$K_4$	-6,1610	-6,1640	-6,1669	-6,1675	-6,1675	-6,1675
$\bar{V}_1/\bar{V}_0$	-0,580	-0,585	-0,5880	-0,5897	-0,5899	-0,5899

Uit tabel XXI blyk dat die snelheid van teken verander vir 'n waarde van  $u$  tussen 1,9 en 2. As  $u \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) dan  $\bar{V}_1/\bar{V}_0 \rightarrow -0,5899$ .

Vervolgens ondersoek ons die formule (19.19) ook vir  $\lambda = 1$  d.i.

$$\bar{V}_1^*/\bar{V}_c = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u} \int_1^u \frac{dv}{v^{\frac{3}{2}} \sqrt{v^2 + 1}}. \quad (20.5)$$

Die waarde van die integraal regs bepaal ons met behulp van tabel XVI deur toepassing van die reël van SIMPSON of/en met behulp van (19.22).

Stel nou  $I = \int_1^u dv/v^{\frac{3}{2}} \sqrt{v^2 + 1}$ ; tabel XXII gee die verloop van  $I$  en van  $\bar{V}_1^*$  as  $u$  toeneem van 1 na  $\infty$ .



TABEL XXII:

$u$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9
$I$	0	0,11929	0,20569	0,27058	0,32073	0,34169
$\bar{V}_1^* / \bar{V}_0$	1	0,6289	0,3857	0,2153	0,0898	0,0388
$u$	2	3	4	6	8	10
$I$	0,36043	0,47503	0,52802	0,57629	0,59797	0,60996
$\bar{V}_1^* / \bar{V}_0$	-0,0061	-0,2696	-0,3868	-0,4925	-0,5401	-0,5666
$u$	20	30	50	100	500	$\infty$
$I$	0,63089	0,63666	0,64063	0,643086	0,64451	0,64470
$\bar{V}_1^* / \bar{V}_0$	-0,6133	-0,6263	-0,6354	-0,6409	-0,6442	-0,6447

Ook in hierdie geval blyk dit dat die snelheid van teken verander vir 'n waarde van  $u$  tussen 1,9 en 2. As  $u \rightarrow \infty$  dan  $\bar{V}_1^* / \bar{V}_0 \rightarrow -0,6447$ .

(Ons sal benede 'n vergelykende tabel en diagram vir die verskillende uitdrukkings vir die snelheid laat volg.)

Die verband tussen  $u$  en  $t$  word vir albei gevalle d.i. (20.1) en (20.5) gegee deur (19.8) met  $\lambda = 1$  d.i. deur

$$a \bar{V}_0 t = 3 \sqrt{2} [(u^2 + 1)^{3/2} - 3(u^2 + 1)^{1/2} + \sqrt{2}]. \quad (20.6)$$

Tabel XXIII gee 'n reeks van ooreenstemmende waardes van  $u$  en  $t$ . Die parameter  $a$  neem die waarde  $\frac{3g}{7} \rho_0 / \bar{\rho}$  aan, soos opgemerk aan die slot van hoofstuk III. Ons neem meer waardes van  $u$  in die tabel op as wat ons in voorgaande tabelle XXI en XXII nodig gekry het, dog ons doen dit om ons in staat te stel om die gevalle  $\lambda = 0$  en  $\lambda = \infty$  met die voriges te vergelyk.

TABEL XXIII:

$u$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2	2,5
$a \bar{V}_0 t$	0	2,2885	5,7083	10,484	16,833	20,670	24,975	54,72
$u$	2,8	3	3,3	3,5	4	6	8	10
$a \bar{V}_0 t$	79,668	99,914	138,058	164,30	250,875	883,35	2124,7	4178,3
$u$	15	20	30	50	100	500	$\infty$	
$a \bar{V}_0 t$	16229	33819,8	114354	$10^2 \times 5301$	$10^3 \times 4241$	$10^5 \times 5303$	$\infty$	

Verder het ons:  
uit (19.2):

$$\bar{V}_\infty / \bar{V}_0 = -1,7983 (1 + gt)^{-0,17981} + 0,4653 (1 + gt)^{-0,69519} + 2,3330 (1 + gt)^{-0,25} \quad (20.7)$$

uit (19.3):

$$\bar{V}_{\infty}^*/\bar{V}_0 = 4(1+g_1t)^{-\frac{1}{3}} - 3(1+g_1t)^{-\frac{2}{3}} \quad (20.8)$$

uit (19.5):

$$\bar{V}_{00}/\bar{V}_0 = 3,5(1+g_1t)^{-\frac{2}{3}} - 1,8667(1+g_1t)^{-\frac{1}{3}} - 0,6333 \quad (20.9)$$

uit (19.6):

$$\bar{V}_{00}^*/\bar{V}_0 = 1,75(1+g_1t)^{-\frac{1}{3}} - 0,75. \quad (20.10)$$

In hierdie formules is  $g = \frac{4}{3} a\bar{V}_0$  en  $g_1 = \frac{1}{3} a\bar{V}_0$ .

Tabel XXIV gee die verloop van  $\bar{V}_{\infty}$ ,  $\bar{V}_{\infty}^*$ ,  $\bar{V}_{00}$  en  $\bar{V}_{00}^*$  soos bereken uit bostaande formules. Volledigheidshalwe en met die oog daarop dat ons die resultate kan vergelyk voeg ons die gevalle  $\bar{V}_1$  en  $\bar{V}_1^*$  by.

TABEL XXIV:

$a\bar{V}_0t$	0	2,2885	5,7083	10,484	16,833	20,670	24,975	54,720
$\bar{V}_{\infty}/\bar{V}_0$	1	0,6573	0,4615	0,3353	0,2480	0,2252	0,1845	0,0834
$\bar{V}_{\infty}^*/\bar{V}_0$	1	0,6477	0,4378	0,3134	0,2035	0,1660	0,1338	0,0250
$\bar{V}_{00}/\bar{V}_0$	1	0,6013	0,3186	0,1182	-0,0265	-0,0840	-0,1337	-0,3047
$\bar{V}_{00}^*/\bar{V}_0$	1	0,6102	0,3398	0,1471	0,0059	-0,0512	-0,1012	-0,2799
$\bar{V}_1/\bar{V}_0$	1	0,6289	0,3848	0,2131	0,0821	0,0318	-0,0139	
$\bar{V}_1^*/\bar{V}_0$	1	0,6289	0,3857	0,2153	0,0898	0,0388	-0,0061	
$a\bar{V}_0t$	79,668	99,914	138,058	164,30	250,88	883,35	2124,7	
$\bar{V}_{\infty}/\bar{V}_0$	0,0461	0,0260	0,0023	-0,0106	-0,0354	-0,0830	-0,0998	
$\bar{V}_{\infty}^*/\bar{V}_0$	-0,0145	-0,0344	-0,0579	-0,0699	-0,0925	-0,1279	-0,1333	
$\bar{V}_{00}/\bar{V}_0$	-0,3674	-0,3999	-0,4400	-0,4589	-0,4979	-0,5707	-0,5972	
$\bar{V}_{00}^*/\bar{V}_0$	-0,3492	-0,3864	-0,4339	-0,4570	-0,5066	-0,6103	-0,6617	
$\bar{V}_1/\bar{V}_0$		-0,2855			-0,397	-0,493	-0,534	
$\bar{V}_1^*/\bar{V}_0$		-0,2696			-0,3868	-0,4925	-0,5410	
$a\bar{V}_0t$	4178,3	16229	33819,8	114354	$10^2 \times 5301$	$10^3 \times 4241$	$10^5 \times 5303$	$\infty$
$\bar{V}_{\infty}/\bar{V}_0$	-0,1068	-0,1100	-0,1077	-0,1006	-0,0885	-0,0708	-0,0374	0
$\bar{V}_{\infty}^*/\bar{V}_0$	-0,1317	-0,1193	-0,1089	-0,0918	-0,0714	-0,0486	-0,0182	0
$\bar{V}_{00}/\bar{V}_0$	-0,6097	-0,6235	-0,6271	-0,6305	-0,6323	-0,6330	-0,6333	-0,6333
$\bar{V}_{00}^*/\bar{V}_0$	-0,6799	-0,7121	-0,7223	-0,7339	-0,7419	-0,7468	-0,7496	-0,75
$\bar{V}_1/\bar{V}_0$	-0,551		-0,580	-0,585	-0,5880	-0,5897	-0,5899	-0,5899
$\bar{V}_1^*/\bar{V}_0$	-0,5667		-0,6133	-0,6233	-0,6354	-0,6409	-0,6442	-0,6447

Diagram van die verloop van die snelheid as  $t$  (en dus ook  $u$ ) toeneem van 0 tot  $\infty$  vir  $\lambda = 0, 1$  en  $\infty$ :

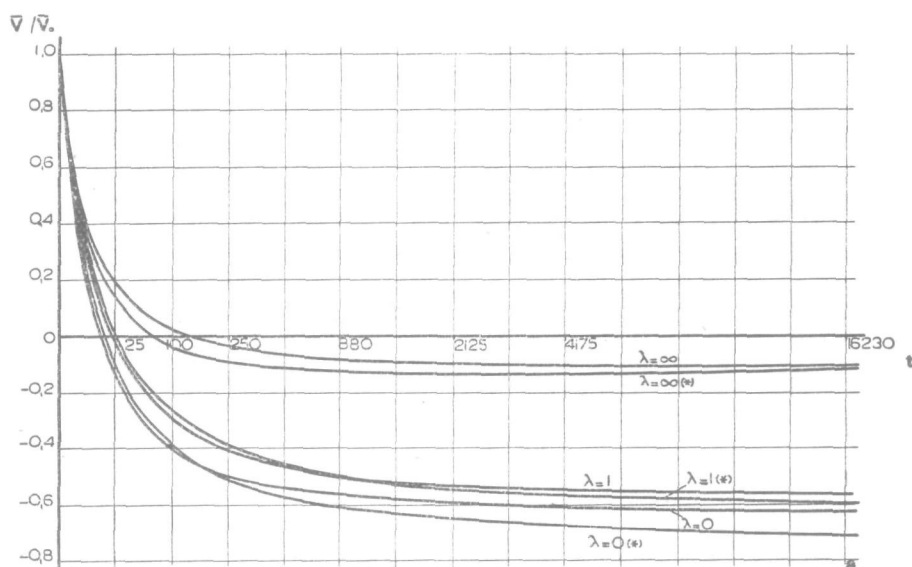


Fig. 12.

Volgens die tabelle vir al ses die formules keer die snelheid naderhand van teken om.  $\bar{V}_{00}$  en  $\bar{V}_{00}^*$  verander van teken vir waardes van  $u$  tussen 1,6 en 1,8 ( $a\bar{V}_0 t$  tussen 10,5 en 16,8) en 1,8 en 1,9 ( $a\bar{V}_0 t$  tussen 16,8 en 20,7) respektiewelik.  $\bar{V}_\infty$  en  $\bar{V}_\infty^*$  verander van teken vir waardes van  $u$  tussen 3,3 en 3,5 ( $a\bar{V}_0 t$  tussen 138 en 164) en 2,5 en 2,8 ( $a\bar{V}_0 t$  tussen 55 en 80) respektiewelik.  $\bar{V}_1$  en  $\bar{V}_1^*$  verander van teken vir twee waardes van  $u$  wat in albei gevalle tussen 1,9 en 2 ( $a\bar{V}_0 t$  tussen 20,7 en 25) lê.

Die verskil tussen die waardes van  $\bar{V}_\lambda$  en  $\bar{V}_\lambda^*$  vir dieselfde waarde van  $t$  is aanvanklik vir al drie die gevalle gering. Die verskil tussen  $\bar{V}_1$  en  $\bar{V}_1^*$  bly deurgaans die kleinste van die drie gevalle; dié twee ontloop mekaar ook nêrens baie ver nie. Die beste benaderings vir die snelheid word dus beslis gegee deur  $\bar{V}_1$  en  $\bar{V}_1^*$  of wellich deur  $\bar{V}_{1,75}$  en  $\bar{V}_{1,75}^*$ .

$\bar{V}_\infty$  en  $\bar{V}_\infty^*$  nader albei tot nul as  $t \rightarrow \infty$ . Dit is strydig met die meganiese oorwegings. Nadat die suier se bewegingsrigting omgekeer het, ondervind dit geen vertragende krag meer nie. Vóór die suier is nou 'n vakuum, maar nie daaragter nie. Dit sal dus sekerlik 'n eindige eindsnelheid, ongelyk aan nul, hê. Die eindwaardes van  $\bar{V}_{00}$  en  $\bar{V}_{00}^*$  is  $-0,633 \bar{V}_0$  en  $-0,75 \bar{V}_0^*$  respektiewelik; die verskil is by benadering  $0,12 \bar{V}_0$ . Ten spyte van hierdie verskil gee die formules vir  $\bar{V}_{00}$  en  $\bar{V}_{00}^*$  dus tog beter benaderings as dié vir  $\bar{V}_\infty$  en  $\bar{V}_\infty^*$ .

## HOOFSTUK V.

Poging om 'n verbetering van die polinomiale oplossing van § 7 te kry.

In hoofstukke II en III het ons verskillende benaderingsoplossings vir die differensiaalvergelyking onder bespreking gevind. Hierdie oplossings moet beskou word as eerste benaderings. Die vraag doen hom nou voor of dit nie moontlik is om, uitgaande van een van die eerste benaderings, 'n beter benadering te vind nie. Dit sou kon gebeur deur aan die eerste benadering 'n funksie toe te voeg wat beskou moet word as 'n klein korreksie. Getrag moet dan word om een of ander differensiaalvergelyking vir die korreksie af te lei. Wanneer dan ook die rantvoorwaardes vir die korreksie bekend is behoort dit moontlik te wees om 'n passende oplossing vir die differensiaalvergelyking vir die korreksie te vind. Langs dié weg kan ons dan tot die verbeterde oplossing kom.

In wat volg in hierdie hoofstuk is getrag om hierdie gedagte uit te werk. Hierby is uitgegaan van die benaderingsoplossing van § 7. Volgens die bekende metodes is dit moontlik om 'n lineêre differensiaalvergelyking te vind vir die korreksie. Daarby het dit egter geblyk dat die ingewikkelde vorm van ons sogenaamde tweede rantvoorwaarde ook weer tot 'n ingewikkelde voorwaarde voer vir die te-berekenes korreksie. Dit maak die konstruksie van 'n oplossing vir die differensiaalvergelyking baie moeilik, miskien selfs onmoontlik. Bowendien bring die omstandigheid dat elkeen van die benaderingsoplossings wat in die vorige hoofstukke gevind is (dus ook die een van § 7) nog steeds 'n fout van eindige grootte het, 'n onsekerheid mee omtrent die toelaatbaarheid van die verwaarloosings wat gemaak moes word om tot 'n lineêre vergelyking vir die korreksie te kom. Soos in dergelike gevalle meer voorkom blyk dan die te-volge weg nie ondubbelsinnig bepaal te wees nie dog hier en daar die moontlikheid van 'n keuse oop te laat sonder dat onmiddellik beoordeel kan word welke keuse die mees geskikte sal wees. As gevolg van die omstandigheid het dit nie moontlik geblyk om 'n bevredigende oplossing uit te werk nie. Nogtans lyk dit geskik en die moeite werd om aan te gee welke herleidings by die toepassing van die gedagte vereis word, daar hulle enige lig werp op die karakter van die differensiaalvergelyking en die voortplanting van golf-sisteme.

§ 21. *Transformasie van die differensiaalvergelyking. Die rantvoorwaardes.*

In § 7 het ons die volgende benaderingsoplossing gevind nl.

$$\Phi = (1 + gt)^3/q(s) \quad (21.1)$$

waarby die verband tussen  $q$  en  $s$  gegee word deur (7.7) en  $q(0) = 1$ ; die waarde van  $g$  word deur (7.15) gegee.

Getrag sal nou word om 'n verbetering van hierdie oplossing te vind. In ons poging sal ons uitgaan van die parsieële differensiaalvergelyking vir  $t$  as funksie van  $\Phi$  en  $s$  soos gegee deur prof. BURGERS in „Proceedings Royal Neth. Acad. of Sciences,” Vol. 50, bls. 269 (1947), noot 3, nl.

$$t_{\Phi\Phi} (t_s^2 - \Phi^{8/3}/5\theta) - 2t_{\Phi s} t_\Phi t_s + t_{ss} t_\Phi^2 = \\ = -\frac{8}{3} t_\Phi t_s^2 / \Phi - 2(\theta'/\theta) t_\Phi^2 t_s - \frac{8}{5} (\theta''/\theta) \Phi t_\Phi^3 \quad (21.2)$$

waarby  $\theta$  geskryf is vir  $S'^2$  wat 'n funksie is van  $s$  alleen en  $t_\Phi = \partial t / \partial \Phi$ ,  $t_{\Phi\Phi} = \partial^2 t / \partial \Phi^2$ , ens. Die rantvoorwaardes wat nou betrekking het op vaste reguit lyne in 'n  $\Phi, s$ -diagram, word:

$$\text{I). langs } \Phi = 1 : t_\Phi = 4t_s^2/9t_{ss} \quad (21.3)$$

$$\text{II). langs } s = 0 : t_s = a\Phi t_\Phi. \quad (21.4)$$

Die oplossing (21.1) kan ons ook skrywe as

$$1 + gt = \Phi^{\frac{1}{2}} Q \quad (21.5)$$

waarby  $Q = q^{\frac{1}{2}}$  en dus  $Q(0) = 1$ . Getrag sal nou word om 'n verbetering te vind deur in (21.2) te stel:

$$1 + gt = \Phi^{\frac{1}{2}} Q(1 + T) \quad (21.6)$$

waarin  $T$  'n funksie is van  $\Phi$  en  $Q$ . Veronderstel word verder dat  $T \ll 1$  sodat kwadrate en hoër magte van  $T$  verwaarloos kan word. Eweso word veronderstel dat

$$\left. \begin{aligned} T_\Phi &= \partial T / \partial \Phi \ll \Phi^{-1}, \\ T_Q &= \partial T / \partial Q \ll Q^{-1}, \\ \text{ens. vir hoër afgeleides} \end{aligned} \right\}$$

Die uitwerking van die berekenings leer dat hierdie veronderstelling alleen gebaseer kan word op die aanname van 'n numerieke klein faktor in  $T$  ('n faktor  $c \ll 1$ ). Die ongelykhede word derhalwe niks beter as  $\Phi$  en  $Q$  onbepaald toeneem nie.

By die uitwerk van die herleidings wat berus op vergelyking (21.2) blyk dit beter om te stel

$$\Phi^{4/3} QT = \tau(\Phi; Q) \quad (21.7)$$

sodat (21.6) nou word

$$1 + gt = \Phi^{4/3} Q + \tau(\Phi; Q). \quad (21.8)$$

Die grootheid  $\tau$  is dus van die orde  $\Phi^{4/3} Qc$ ; d.i.

$$\tau \sim \Phi^{4/3} Qc \quad (21.9)$$

waarin  $c$  die klein veronderstelde numerieke faktor voorstel.

Langs die baan van die verdigtingsgolf is  $\Phi = 1$ ; dus volg vir die baan uit (21.8):

$$1 + gt = Q + \tau(1; Q) = Q + \bar{\tau}(Q), \text{ sê.} \quad (21.10)$$

Dus is, kragtens (21.9)  $\bar{\tau} \sim Qc$  en dus

$$\bar{\tau}_Q \equiv \bar{\tau}' \sim c. \quad (21.11)$$

Alle verwaarlosings wat ons by die herleiding maak berus op die veronderstelde kleinheid van die faktor  $c$ . Die waarde van hierdie faktor word bepaal deur die tweede rantvoorwaarde en berus op die omstandigheid dat die in (21.40) optredende grootheid

$$\frac{1}{3} + Y_\eta/Y \quad (21.12)$$

as klein beskou kan word ( $\leq 0,153$ ). Hierop kom ons nog later terug. Ons stel

$$dQ/ds = 1/Y \quad (21.13)$$

waarby  $Y$  as funksie van  $Q$  opgevat sal word, sodat  $Y' = dY/dQ$ , ens. Uit (21.10) kry ons dan deur differensiasie na  $t$  en omwisseling van enige terme:

$$(ds/dt)_{\Phi=1} = S' = gY/(1 + \bar{\tau}'). \quad (21.14)$$

Aan die hand van (21.11) sal ons nou aanneem dat  $\bar{\tau}' \ll 1$ , sodat kwadrate en hoër magte van  $\bar{\tau}'$  en die afgeleides daarvan, asook produkte met  $\bar{\tau}_\Phi$ , ens. verwaarloos mag word. Met dié veronderstelling kry ons uit (21.14):

$$S' = gY(1 - \bar{\tau}') \text{ en } \theta = S'^2 = g^2 Y^2 (1 - 2\bar{\tau}'). \quad (21.15)$$

Hieruit volg verder deur differensiasie en deling:

$$\theta'/\theta = 2(Y'/Y^2 - \bar{\tau}''/Y) \quad (21.16a)$$

en

$$\theta''/\theta = 2\{Y''/Y^3 - 3\bar{\tau}'''(Y'/Y^3) - \bar{\tau}''''/Y^2\}. \quad (21.16b)$$

Voorts kry ons uit (21.8):

$$\left. \begin{aligned} gt_s &= (\Phi^{\frac{1}{3}} + \tau_Q)/Y \\ gt_{ss} &= -(\Phi^{\frac{1}{3}} + \tau_Q) Y'/Y^3 + \tau_{QQ}/Y^2 \\ gt_\Phi &= \frac{4}{3} \Phi^{\frac{1}{3}} Q + \tau_\Phi \\ gt_{\Phi\Phi} &= \frac{4}{9} \Phi^{-\frac{2}{3}} Q + \tau_{\Phi\Phi} \\ gt_{\Phi s} &= (\frac{4}{3} \Phi^{\frac{1}{3}} + \tau_{\Phi s})/Y. \end{aligned} \right\} \quad (21.17)$$

Substitusie van voorgaande waardes vir  $t$ ,  $\theta$  en hulle afgeleides in vergelyking (21.2) gee na deling deur  $g^3$ :

$$\begin{aligned}
& \Phi^2 Q Y^{-3} \left\{ \frac{1}{4} \frac{2}{5} Q^2 Y'' + \frac{1}{3} Q Y' + \frac{1}{4} \frac{6}{5} Y \right\} + \\
& + \frac{4}{5} \Phi^3 Y^{-2} \left[ \tau_{\Phi\Phi} \Phi^2 - \frac{1}{3} \tau_{\Phi Q} \Phi Q + \frac{2}{9} \tau_{QQ} Q^2 + \tau_{\Phi} \left( 8 \Phi Q^2 \frac{Y''}{Y} + 10 \Phi Q \frac{Y'}{Y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \tau_Q \left( \frac{2}{3} Q^2 \frac{Y'}{Y} + \frac{5}{9} Q \right) \right] = \\
& = \frac{1}{4} \frac{2}{5} \Phi^2 Y^{-2} \left[ Q^3 \bar{\tau}''' + \left( 3 Q \frac{Y'}{Y} + \frac{5}{2} \right) Q^2 \bar{\tau}'' + \frac{1}{16} Q \bar{\tau}' \right]. \quad (21.18)
\end{aligned}$$

Hierdie differensiaalvergelyking val nou duidelikerwys uiteen in twee afsonderlike vergelykings nl. (a). 'n vergelyking onafhanklik van  $\tau$  en (b). 'n vergelyking lineêr in  $\tau$ .

a). Die vergelyking onafhanklik van  $\tau$ :

Stel die koeffisiënt van  $\Phi^2 Q Y^{-3}$  gelyk aan nul; dit gee

$$Q^2 Y'' + \frac{1}{8} Q Y' + \frac{1}{8} Y = 0. \quad (21.19)$$

Hierdie vergelyking is niks anders as vergelyking (7.5) met oplossing (7.6) nie.

Die oplossing van (21.19) is:

$$Y = A Q^{\varepsilon_1} + B Q^{\varepsilon_2} \quad (21.20)$$

waar

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_1, \varepsilon_2 &= \frac{1}{16} (-7 \pm \sqrt{17}) = -0,180; -0,695; \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= -0,875; \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0,516; \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0,125; \end{aligned} \right\} \quad (21.21)$$

en  $A$  en  $B$  twee (voorlopige) willekeurige konstante is wat so gekies moet word dat reeds so goed as moontlik aan die tweede rantvoorwaarde voldoen word.

b). Die vergelyking lineêr in  $\tau$ :

Met die terme onafhanklik van  $\tau$  gelyk aan nul gestel en gebruikmakende van (21.19), bly uit (21.18) die volgende vergelyking oor:

$$\begin{aligned}
& \tau_{\Phi\Phi} \Phi^2 - \frac{1}{3} \tau_{\Phi Q} \Phi Q + \frac{2}{9} \tau_{QQ} Q^2 - \tau_{\Phi} \left( 5 \Phi Q \frac{Y'}{Y} + \Phi \right) + \\
& + \tau_Q \left( \frac{2}{3} Q^2 \frac{Y'}{Y} + \frac{5}{9} Q \right) = \\
& = \frac{3}{9} \Phi^3 \left\{ Q^3 \bar{\tau}''' + \left( 3 Q \frac{Y'}{Y} + \frac{5}{2} \right) Q^2 \bar{\tau}'' + \frac{1}{16} Q \bar{\tau}' \right\}. \quad (21.22)
\end{aligned}$$

Stel ons nou hierin

$$\Phi = e^{\xi}, \quad Q = e^{\eta} \quad (21.23)$$

dan gaan die vergelyking na enige berekenings en vereenvoudigings oor in

$$\tau_{\xi\xi} - \frac{1}{3} \tau_{\xi\eta} + \frac{2}{9} \tau_{\eta\eta} - f_1 \tau_{\xi} + f_2 \tau_{\eta} = \frac{3}{9} e^{4\xi/3} \psi(\eta) \quad (21.24)$$

waarin  $f_1 = 5 Y_{\eta}/Y + 2$ ;  $f_2 = \frac{2}{3} Y_{\eta}/Y + \frac{1}{3}$  en

$$\psi(\eta) = \bar{\tau}_{\eta\eta\eta} + (3 Y_{\eta}/Y - \frac{1}{2}) \bar{\tau}_{\eta\eta} - (3 Y_{\eta}/Y + \frac{7}{18}) \bar{\tau}_{\eta}. \quad (21.25)$$

Hierby is  $Y = A e^{\varepsilon_1 \eta} + B e^{\varepsilon_2 \eta}$  en dus

$$Y_{\eta} = A \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 \eta} + B \varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 \eta}. \quad (21.26)$$

Met behulp van die benadering  $Y_{\eta}/Y \cong -\frac{1}{3}$  wat ons later in (21.42) sal invoer, vereenvoudig die uitdrukking vir  $\psi(\eta)$  tot:

$$\psi(\eta) \cong \bar{\tau}_{\eta\eta\eta} - \frac{3}{2} \bar{\tau}_{\eta\eta} + \frac{9}{18} \bar{\tau}_{\eta}. \quad (21.27)$$

Stel ons tans

$$\tau = e^{\xi} Y^{-\frac{2}{3}} \sigma(\xi; \eta) \quad (21.28)$$

dan kry ons uit (21.24) die volgende differensiaalvergelyking vir  $\sigma$ :

$$\sigma_{\xi\xi} - \frac{1}{3} \sigma_{\xi\eta} + \frac{2}{9} \sigma_{\eta\eta} - \chi \sigma = \frac{3}{9} e^{\xi/3} Y^{3/2} \psi(\eta) \quad (21.29)$$

met

$$\chi = 1 + 5(Y_{\eta}/Y) + \frac{5}{3}(Y_{\eta}^2/Y^2) + \frac{1}{3}(Y_{\eta\eta}/Y). \quad (21.30)$$

Stel nou nog

$$x = a\xi + \eta \text{ en } y = \beta\xi - \eta \quad (21.31)$$

$$\text{met } a = (5 + \sqrt{5})/3 = 2,41 \text{ en } \beta = (5 - \sqrt{5})/3 = 0,92$$

(die simbole  $x$ ,  $y$ ,  $a$  en  $\beta$  het niks te maak met dieselfde simbole van die vorige hoofstukke nie) dan gaan vergelyking (21.29) oor in

$$\sigma_{xy} + \frac{9}{20} \chi \sigma = -\frac{8}{9} e^{\xi/3} Y^{-\frac{2}{3}} \psi(\eta). \quad (21.32)$$

Hierin is die grootheid  $\chi$  nou 'n bekende funksie van die koördinate  $x$  en  $y$ . Bowendien blyk dit dat die waarde daarvan begrens is en lê tussen 0,075 en 0,263. Ons sou  $\chi$  vir 'n eerste benadering miskien nog deur 'n konstant kon vervang.

Die vergelyking (21.32) is van die hiperboliese tipe;  $x = \text{konstant}$  en  $y = \text{konstant}$  gee die voortplantingsrigtings. Die lyne moet so deurloop word dat  $t$  (volgens die eerste benadering) toeneem. Die vergelyking (21.32) behoort opgelos te kan word deur toepassing van die metode van RIEMANN. Hierdie metode gee  $\sigma$  in 'n willekeurige punt, sê  $P$  (sien fig. 13), deur middel van integrale langs die rante van die gebied waarop die rantvoorwaardes vir  $\sigma$  betrekking het ( $OA$  en  $OB$  d.i.  $\eta = 0$  en  $\xi = 0$  respektiewelik), plus 'n oppervlakte-integraal waarin die regterlid van (21.32) optree. Die funksie  $\psi(\eta)$  wat in die regterlid voorkom hang nog af van



die rantvoorwaarde langs die baan van die verdigtingsgolf d.i. langs  $OB$  en sal dus pas dan gevind kan word as die waardes van  $\sigma$  (of  $\tau$ ) en sy

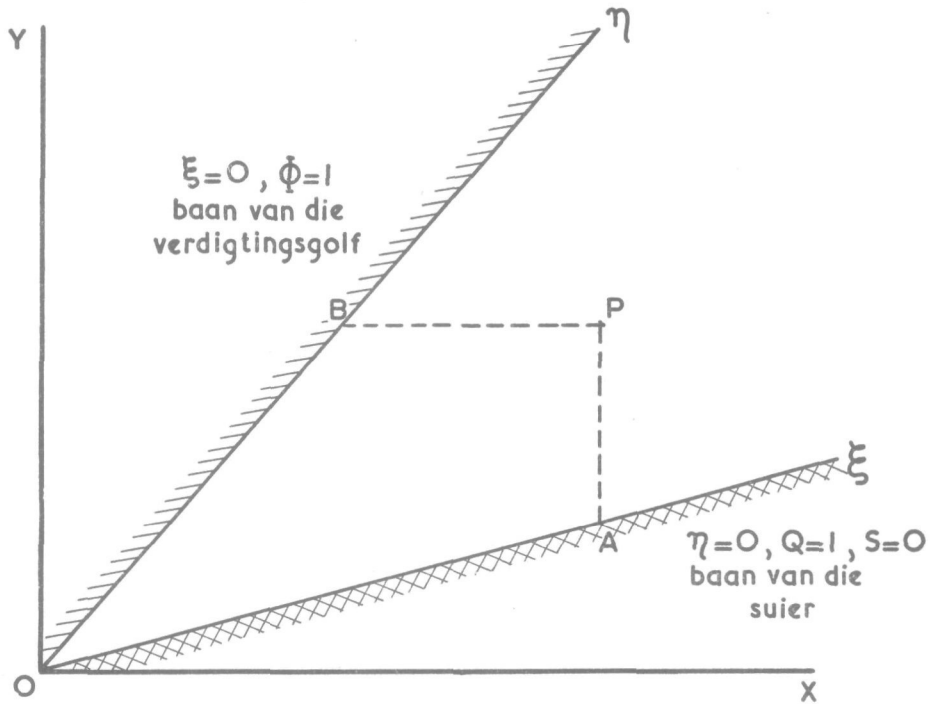


Fig. 13.

afgeleides langs dié rant uit hierdie rantvoorwaarde volledig opgelos is. Ons sal die rantvoorwaardes nou onder oënskou neem.

- a). Die rantvoorwaarde vir  $s = 0$  ( $Q = 1$ ;  $\eta = 0$ ):  
(Die baan van die suier.)

Volgens (21.3) moet langs  $s = 0$  geld

$$t_s = a \Phi t_\phi. \quad (21.33)$$

Deur die substitusies (21.8) en (21.23) agtereenvolgens, gaan hierdie voorwaarde oor in

$$\Phi \left\{ 1 - \frac{4}{3} (A + B) a \right\} = (A + B) a \tau_\xi - \tau_\eta \quad \text{vir } \eta = 0,$$

waarby gebruik gemaak is van die feit dat

$$Y_{s=0} = A + B. \quad (21.34)$$

Wil ons nou die eerste benadering eksak aan hierdie rantvoorwaarde laat voldoen, dan moet ons neem

$$A + B = 3/4a.$$

Daar bly dan oor vir  $\eta = 0$ :

$$\tau_{\xi} = \frac{4}{3} \tau_{\eta}. \quad (21.35)$$

Voer ons verder die transformasie (21.28) uit dan gaan (21.35) oor in

$$\sigma + \sigma_{\xi} = -2(Y_{\eta}/Y)\sigma + \frac{4}{3}\sigma_{\eta} \text{ weer vir } \eta = 0. \quad (21.36)$$

Uit (21.26) volg dat

$$(Y_{\eta})_{\eta=0} = A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 = -0,475A$$

as ons  $B/A = 0,424$  (in ooreenstemming met (7.20)) stel. Met behulp hiervan en (21.34) volg dat (21.36) geskryf kan word as

$$\sigma_{\xi} - \frac{4}{3}\sigma_{\eta} + 0,333\sigma = 0 \text{ vir } \eta = 0 \text{ (} s=0\text{)}. \quad (21.37)$$

Met die substitusies (21.31) gaan (21.37) ten laaste oor in die vorm

$$1,08\sigma_x - 0,41\sigma_y + 0,33\sigma = 0. \quad (21.38)$$

b). Die rantvoorwaarde vir  $\Phi = 1$  ( $\xi = 0$ ).

(Die baan van die verdigtingsgolf.)

Volgens (21.3) moet langs  $\Phi = 1$  geld:

$$t_{\Phi} = \frac{4}{3} t_s^2 / t_{ss}.$$

Deur die substitusie (21.8) gaan dié voorwaarde, gebruikmakende van (21.17), oor in

$$\{-(1 + \bar{r}') Y' / Y^3 + \bar{r}'' / Y^2\} (\frac{4}{3} Q + \bar{r}_{\Phi}) = \frac{4}{3} (1 + 2\bar{r}') / Y^2 \quad (21.39)$$

waarby  $\bar{r}' = d\bar{r}/dQ = (d\bar{r}/dQ)_{\Phi=1}$ , ens.

Met invoering van die substitusie (21.23) gaan (21.39) op sy beurt oor in

$$\bar{r}_{\eta\eta} - (\frac{5}{3} + Y_{\eta}/Y) \bar{r}_{\eta} - \frac{3}{4} (Y_{\eta}/Y) \bar{r}_{\Phi} = Q (\frac{1}{3} + Y_{\eta}/Y). \quad (21.40)$$

Nou is aan die hand van (21.20)

$$\frac{1}{3} + \frac{Y_{\eta}}{Y} = \frac{(\varepsilon_1 + \frac{1}{3}) A \vartheta_1 + (\varepsilon_2 + \frac{1}{3}) A \vartheta_2}{A \vartheta_1 + B \vartheta_2} = \frac{0,153 A \vartheta_1 - 0,362 B \vartheta_2}{A \vartheta_1 + B \vartheta_2} \quad (21.41)$$

waarby  $\vartheta_1 = e^{\varepsilon_1 \eta} = Q^{\varepsilon_1}$  en  $\vartheta_2 = e^{\varepsilon_2 \eta} = Q^{\varepsilon_2}$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = -0,180; -0,695$ ).

Hieruit volg maklik regstreeks dat die uitdrukking  $(\frac{1}{3} + Y_{\eta}/Y)$  die maximumwaarde 0,153 bereik vir  $Q = \infty$  (d.i.  $\eta = \infty$ ), onafhanklik van  $A$  en  $B$ , sodat ons kan skryf

$$1/3 + Y_{\eta}/Y \leq 0,153. \quad (21.42)$$

Vir die eerste benadering d.i. (21.1) (dus sonder  $\tau$ ) kry ons, gebruik-

makende van (21.23), (7.15) en (21.41):

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{s=S} + \frac{9 S''}{4 S'} = \frac{a \bar{V}_0}{Q} \left(\frac{1}{3} + \frac{Y_\eta}{Y}\right) = \frac{a \bar{V}_0}{Q} \left(\frac{0,153 A \vartheta_1 - 0,362 B \vartheta_2}{A \vartheta_1 + B \vartheta_2}\right).$$

In (7.18) het ons gestel:

$$\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{(3\kappa_1 + \frac{1}{3}) A q^{\kappa_1} + (3\kappa_2 + \frac{1}{4}) B q^{\kappa_2}}{A q^{\kappa_1} + B q^{\kappa_2}} \right\} = H_0$$

waarby  $q = Q^{\frac{2}{3}}$  en  $\kappa_1, \kappa_2 = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{12} \sqrt{17}$  sodat

$$\frac{1}{3} + Y_\eta/Y = \frac{1}{4} Q H_0. \quad (21.43)$$

Hieruit volg op welke wyse die tans-as-klein-beskoude grootheid  $1/3 + Y_\eta/Y$  (welke die waarde van die klein faktor  $c$  wat in (21.9) en (21.11) ingevoer is bepaal) saamhang met die vroeër-beskoude klein afwyking  $H$  in die tweede rantvoorwaarde. Die optrede van die faktor  $Q$  in (21.43) bring mee dat terwyl  $H$  in die oneindige verdwyn dit met die grootheid  $1/3 + Y_\eta/Y$  nie die geval is nie: dit bly eindig. Hierin is 'n moeilikheid geleë ten aansien van die toepassing van die korreksie-metode wat in die begin van die hoofstuk geskets is.

Soos volg uit (21.41) word die uitdrukking (21.43) nul vir  $\eta = 0$  ( $s = 0$ ) as

$$B/A (= \mu) = 0,153/0,362 = 0,424$$

wat klop met (7.20).

Die uitdrukking in die regterlid van (21.40) word oneindig groot as  $Q \rightarrow \infty$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ).

As ons die grootheid  $1/3 + Y_\eta/Y$  as 'n klein grootheid behandel, kan ons vergelyking (21.40) ook skryf as

$$\bar{\tau}_{\eta\eta} - \frac{4}{3} \bar{\tau}_\eta + \frac{1}{4} \bar{\tau}_\xi \cong Q \left(\frac{1}{3} + Y_\eta/Y\right) \quad (21.44)$$

of

$$\bar{\tau}_{\eta\eta} - \frac{4}{3} \bar{\tau}_\eta + \frac{1}{4} \bar{\tau}_\xi \cong \frac{1}{2} Q^2 H_0. \quad (21.44a)$$

Voer ons verder die transformasie (21.28) uit dan gaan hierdie vergelyking met inagneming dat uit  $Y_\eta/Y \cong 1/3$  volg  $Y_{\eta\eta}/Y \cong 1/9$ , oor in

$$\sigma_{\eta\eta} - \frac{1}{3} \sigma_\eta + \frac{1}{4} \sigma_\xi - \frac{1}{6} \sigma = \frac{1}{4} Q^2 Y^{\frac{3}{2}} H_0. \quad (21.45)$$

Die uitdrukking in die regterlid word oneindig groot as  $Q \rightarrow \infty$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ).

As ons in (21.44)  $\bar{\tau} e^{-\eta} = \bar{T}$  stel, kragtens (21.7), met  $\Phi = 1$  vir die baan van die verdigtingsgolf, dan gaan dié vergelyking oor in

$$\bar{T}_{\eta\eta} + \frac{2}{3} \bar{T}_\eta - \frac{1}{3} \bar{T} + \frac{1}{4} \bar{T}_\xi \cong 1/3 + Y_\eta/Y. \quad (21.41)$$

Hieruit blyk dat die orde van die grootte van  $T$  beheers word deur  $1/3 + Y_\eta/Y$ , wat in ooreenstemming is met wat opgemerk is by vergelyking (21.6).

Die rantvoorwaardes bied in hulle getransformeerde vorms egter geen moontlikheid om tot 'n passende oplossing van die vergelyking (21.32) te kom nie. Die eerste rantvoorwaarde d.i. (21.38) bevat afgeleides in beide asrigtings. Die tweede rantvoorwaarde d.i. (21.40) bevat behalwe die eerste en tweede afgeleides na  $\eta$  ook nog 'n afgeleide na  $\xi$ . Dit is dus nie moontlik om die rantwaardes selfstandig te bereken nie. Hierdeur word die toepassing van die integrasiemetode van RIEMANN, selfs al sou ons ter vereenvoudiging in (21.32) die bekende funksie  $\chi$  deur 'n konstante waarde vervang, vrywel hopeloos. Al sou 'n mens in prinsipe moet verwag dat 'n oplossingsmetode vir die geheel lineêr-gemaakte probleem gevind kan word, moes ons as gevolg van die genoemde moeilikhede afsien van ons poging.

## SUMMARY.

In this thesis "On the compression and expansion phenomena in a gas caused by a collision of a piston moving with a velocity far surpassing that of sound" the following problem is considered:

A cylindrical tube of infinite length is filled with a homogeneous gas at rest everywhere, extending indefinitely from the origin to the right. To the left of the origin a piston fitting precisely is placed in the tube; at the back of it there is a vacuum. This piston is brought into motion with a very high velocity by a push to the right. It strikes the gas at the origin. The system is then left alone and it is required to investigate the motion of the gas and that of the piston in particular.

This problem was first considered by prof. J. M. BURGERS in an article in "Proceedings Royal Netherlands Academy of Sciences" Amsterdam, Vol. 50, pp. 262, 332 and 442 (1947). In this article prof. BURGERS discussed the case of motion of a thin cloud (sheet) of gas moving with a velocity far surpassing that of sound and colliding with an extensive mass of interstellar gas of much smaller density. In order to make this problem amenable to mathematical treatment, it has been reduced to the above mentioned mechanical analogue.

The motions take place in the direction of the axis of the tube only; this direction is taken as the axis of  $x$ . Apart from this the motions are a function of the time.

By the collision of the piston with the gas a compression wave is produced in the gas, which wave is propagated in the gas to the right with a velocity in comparison with which the velocity of sound is negligibly small. In the region traversed by the compression wave a high pressure is generated; this pressure causes a retardation of the motion of the piston in consequence of which expansion waves occur in the gas originating from the piston. These expansion waves overtake the compression wave as a result of which the strength of the compression wave diminishes and its velocity decreases. As it is assumed that in the region in front of the compression wave the gas is at rest or else that the velocities there are negligibly small in comparison with that of the gas immediately at the back of the shock wave, the initial state of motion of every layer is different. The velocity of the gas immediately at the back of the compression wave is equal to  $2/(k+1)$  times the velocity of the compression wave at the moment it passes the element,  $k$  being the ratio of the specific heats of the gas at constant pressure and constant volume. This fact seriously complicates the treatment of the problem.

In § 1 some relations valid for shock waves are mentioned. The relations given in (1.7) are used in the deduction of the equation of motion for the

gas,  $\xi$  being the velocity of propagation of the shock wave,  $u$ ,  $p_1$  and  $\rho_1$  the velocity, pressure and density, respectively, immediately at the back of the shock wave;  $\rho_0$  refers to the original state of the gas.

In § 2 and § 3 the equation of motion for the gas is deduced. The expansion waves in the region between the cylinder and the compression wave follow one another continuously so that the usual equations could be applied to describe the motion of the gas. We used the Lagrangian form of the equation of motion, viz.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

as this form is most suitable to the purpose of tracing the motion of each separate particle in its course. In the deduction of the equation of motion we considered a problem slightly more general than prof. BURGERS did: we did not immediately assume a constant density for the original state of the gas; although in this case the gas would have been in motion, yet the velocities were assumed to be negligibly small compared with that of the piston or with the velocities set up by the piston. Afterwards we restricted our attention to the case of a constant density.

The motion of a layer of gas is described by

$$x = \varphi(s; t) \quad (2)$$

where  $s$  is a parameter distinguishing the various layers of the gas and  $x$  is the path travelled by any layer. For the layer immediately adjoining the piston we take  $s = 0$  and  $s > 0$  for all other layers. The way in which the values of  $s$  are assigned to the consecutive layers is still arbitrary.

The expansion of a layer is determined by  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  as a function of the time for constant  $s$ . For the density we have therefore

$$\rho = \theta_1(s) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-1} \quad (3)$$

and for the pressure

$$p = \theta_2(s) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-k} \quad (4)$$

it being assumed that the expansion of every layer follows POISSON'S law.

The velocity of the layer  $s$  is given by

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5)$$

Substitution of these values for the density, pressure and velocity in (1) leads to the equation of motion (2.6) on page 8.

The equation of motion for the piston is given by (2.8),  $\bar{\rho}$  being the mass per unit of frontal surface of the piston. This equation gives a boundary condition for  $s = 0$ .

A second boundary condition refers to the path of the shock wave.

The path of the shock wave is represented by

$$x = \Psi(t), \quad (6)$$

$\Psi$  as yet being an unknown function. If  $(X, T)$  is the point of intersection of a particular path  $\varphi(s; t)$  with the path of the shock wave, we have

$$\Psi(T) = \varphi(s; T). \quad (7)$$

If then the velocity of the shock wave is represented by  $\frac{d\Psi}{dT}$ , relation (2.10)

holds for the velocities and the values of  $\theta_1(s)$  and  $\theta_2(s)$  are given in (2.11). If we assume the velocity of sound in the original state of the gas to be negligibly small as compared with the velocity of the gas immediately at the back of the shock wave, these relations, viz. (2.10) and (2.11), reduce to (2.12) and (2.13), respectively.

If now the parameter  $s$  is defined in such a way that relation (2.14) holds along the path of the shock wave, then condition (2.15) i.e.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 1 \quad (8)$$

must be satisfied along this path. Using (8) the expressions for  $\theta_1(s)$  and  $\theta_2(s)$  are considerably simplified and take the forms (2.16).

The equations of motion for the gas and the piston now take the forms (2.17) and (2.18) respectively.

An alternative equation of motion for the piston is obtained by putting  $s = 0$  in (2.17); this gives (2.19). From (2.18) and (2.19) the boundary condition (2.20) for  $s = 0$  is deduced.

In § 3 the equation of motion and the boundary conditions are transformed by introducing a new dependent variable  $\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$  and a diagram having  $s$  and  $t$  as coordinates. The equation of motion now takes the form (3.3), while the boundary condition for  $s = 0$  takes the form (3.4).

The path of the shock wave is now represented by the equation

$$s = S(t) \quad (9)$$

derived from (2.9) by solving for  $s$  in terms of  $t$ . Condition (8) for the path of the shock wave now becomes

$$\Phi = 1 \quad (10)$$

When a solution of (3.3) has been found, then in consequence of (2.14) the value of the function  $\varphi(s; t)$  can be found from (3.7). If expression (3.7) for  $\varphi(s; t)$  is substituted in (2.17), the additional condition (3.9) which must be satisfied along the path of the shock wave, is obtained.

Summarizing: the equation of motion for the gas is reduced to (3.3) (see page 15), while the boundary conditions are given by (3.5) (for  $s = 0$ ) and (3.9) (for the path  $s = S(t)$  of the shock wave).

Putting  $k = 5/3$  the equation of motion assumes the form (3.3a) (see p. 16), while the boundary conditions assume the forms (3.5a) and (3.9a).

If  $\varrho_0$  is taken to be a constant, i.e. if the gas in its original state is assumed to be at rest everywhere, the equation of motion reduces to (3.3b) (see page 16) with the boundary conditions (3.5b) and (3.9b). This equation is the same as the one obtained by prof. BURGERS.

It is to be observed that the differential equation for  $\Phi$  is non-linear. The non-linearity comes to expression in two ways: firstly by the appearance of the factor  $\Phi^{-5/3}$  and secondly by the fact that the function  $S'^2$  is interlinked with the second boundary condition in a rather complicated manner.

In Chapter II it has been attempted to find solutions of the type  $\Phi = (1 + gt)^m/q(s)$ ,  $g$  and  $m$  being constants. We succeeded in obtaining two solutions of equation (3.3) of this type which satisfy both boundary conditions (3.5) and (3.9) exactly. In one case  $\varrho_0$  assumed the value  $\varrho_{00}(1 + hs)^{-1}$ ,  $\varrho_{00}$  and  $h$  being constants, and in the other case  $\bar{q}$  became infinite. These cases were treated in § 4.

In § 5 and henceforth we paid attention exclusively to equation (3.3b) with the boundary conditions (3.5b) and (3.9b).

Prof. BURGERS obtained a solution for this equation in the form of a power series, starting as follows:

$$\Phi = 1 + a_1 t + a_2 s + b_1 t^2 + b_2 ts + \dots \quad (10)$$

(Prof. BURGERS gives the terms up to the third power only.)

The range of convergence of this series could not be investigated. It is to be expected, however, that the range of convergence will be very small, for when this series is substituted in the differential equation, we have to apply the binomial theorem to reduce  $\Phi^{-5/3}$ , which series is convergent only as long as  $|\Phi - 1| < 1$ . Hence this solution will be valid only for the initial stages of the motion. We therefore aimed at finding a solution which will enable us to obtain a picture of the motion for a considerable period of time. We did not achieve our aim fully as we could not find a solution of the equation which satisfies both boundary conditions exactly. However, we obtained a number of solutions which may serve as first approximations. In § 6 and § 8 two expressions for  $\Phi$  of the afore mentioned type were obtained, each of which is an approximate solution of the differential equation and satisfies both boundary conditions. In both cases the error decreases indefinitely if  $s$  or/and  $t$  tend(s) to infinity.

In § 7 and § 9 expressions for  $\Phi$  of the same type were found which satisfy the first boundary condition and the differential equation, but not the second boundary condition. The errors again in both cases tend to zero if  $s$  and/or  $t$  tend(s) to infinity. Moreover the error can be made to vanish in an arbitrarily chosen point of the path of the shock wave by assigning a suitable value to one constant at our disposal.

In all four cases expressions for the velocity of the piston were deduced; according to all four these expressions the motion ultimately changes its



direction, i.e. after a certain period of time the piston comes to rest for one moment and then starts to move backwards.

In Chapter III the method of Chapter II is generalised. For  $\Phi$  we assumed the expression  $u(t)^3/v(s)^3$ , not a priori putting  $u(t)^3 = (1 + gt)^m$ . When this expression for  $\Phi$  is substituted in the differential equation, equations (10.3) and (10.4) for  $u$  and  $v$  respectively, are obtained. The equation (10.3) when integrated gives the relation (10.8) between  $u$  and  $t$ . It is to be observed that a new parameter,  $\lambda$ , is introduced here. We therefore have one constant more at our disposal than in the solutions of the previous chapter. Equation (10.4) leads to the relation (10.18) between  $y$  and  $\bar{w}$  where  $y = ds/dv$  and  $\bar{w} = 1 - \lambda^2/v^2$ . The solution thus obtained cannot be made to satisfy the boundary condition along the path of the shock wave. The boundary condition for  $s = 0$  renders no difficulty.

The deviation from the condition for the path of the shock wave tends to zero anyway if  $u \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ). We furthermore have two constants at our disposal, which must be so chosen that the solution is adapted in the best possible way to the second boundary condition. In § 11 to § 16 solutions for various values of the parameter  $\lambda$  have been numerically evaluated.

In § 17 we obtained an expression for  $\Phi$  in the form  $u(t)^3/v(s)^3$ , which satisfies both boundary conditions and is an approximate solution of the differential equation. In this case also the error tends to zero if  $u$  or/and  $v$  tend(s) to infinity.

In both cases formulae for the velocity of the piston were deduced. According to each of these formulae the motion ultimately changes its direction.

The solutions of Chapter II are all special cases of those of Chapter III. By a proper choice of the constants the solutions of § 7 and § 9 are obtained from the solution of § 10 by making the parameter  $\lambda$  tend to infinity and to zero, respectively. In the same way the solutions of § 6 and § 8 are obtained from the solution of § 17.

In Chapter IV the motion of the piston was more closely investigated, use being made of the formulae for the velocity derived in the preceding chapters. The formulae derived from the solutions of § 10 and § 17 yield the same limiting velocity when  $t \rightarrow \infty$  if  $\lambda = 1.75$ , approximately. In virtue of this fact it may be concluded that the best approximation for  $\Phi$  is given by either of the solutions of § 10 and § 17 with  $\lambda = 1.75$ .

In Chapter V an attempt was made to find a better approximation for  $\Phi$  starting with the first approximation obtained in § 7 and using the differential equation for  $t$  as a function of  $s$  and  $\Phi$ , as given by prof. BURGERS in his publication already mentioned in this summary, page 269, note 3. Although this attempt was frustrated by the intricate forms which the boundary conditions for the corrective term assumed, the formulae derived may shed some light upon the propagation of disturbances from the boundary lines towards the interior of the field.

## SAMENVATTING.

In dit proefschrift „Over de verdichtings- en verdunningsverschijnselen in een gas, veroorzaakt door de stoot van een zuiger met een zeer hoge snelheid” wordt het volgende probleem beschouwd:

Een cilindrische buis van oneindige lengte is gevuld met een homogeen gas, dat overal in rust verkeert en zich vanaf de oorsprong naar rechts onbepaald uitstrekt. Links van de oorsprong wordt een zuiger geplaatst, welke precies in de buis past; achter de zuiger bevindt zich een vacuum. Deze zuiger wordt nu door een stoot met zeer grote snelheid naar rechts in beweging gebracht. Hij treft het gas bij de oorsprong. Het stelsel wordt dan aan zichzelf overgelaten en thans wordt gevraagd om de beweging van het gas en die van de zuiger in het bijzonder te onderzoeken.

Dit probleem is het eerst door Prof. J. M. BURGERS beschouwd in een artikel in “Proceedings Royal Netherlands Academy of Sciences”, Amsterdam, Vol. 50, pag. 262, 332 en 442 (1947). In dit artikel bespreekt Prof. BURGERS de beweging van een dunne wolk (een schil) gas, die zich met een snelheid veel groter dan die van het geluid, beweegt en vervolgens stoot tegen een uitgebreide interstellare gasmassa van veel lagere dichtheid.

Om ons in staat te stellen dit probleem mathematisch te behandelen, is het herleid tot bovengenoemd mechanisch analogon.

De bewegingen vinden alleen plaats in de richting van de as van de cylinder; deze richting wordt genomen als de  $x$ -as. Overigens zijn de bewegingen een functie van de tijd.

Door de botsing van de zuiger tegen het gas ontstaat een verdichtingsgolf in het gas, welke golf zich voortplant naar rechts met een snelheid, in vergelijking waarmee de snelheid van het geluid verwaarloosd kan worden.

In het gebied dat door de verdichtingsgolf doorlopen is, ontstaat een hoge druk. Deze druk vertraagt de beweging van de zuiger, ten gevolge waarvan verdunningsgolven in het gas ontstaan, welke van de zuiger uitgaan en zich eveneens naar rechts voortplanten. Deze verdunningsgolven achterhalen de verdichtingsgolf; hierdoor neemt de verdichtingsgolf in sterkte af, terwijl ook haar snelheid vermindert.

Aangezien wij aannemen dat het gas in het gebied vóór de verdichtingsgolf in rust is, of anders dat de snelheid daar zo klein is dat deze verwaarloosd kan worden in vergelijking met die van het gas onmiddellijk achter de verdichtingsgolf, is de aanvangstoestand voor iedere laag van het gas een andere. De snelheid van het gas onmiddellijk achter de verdichtingsgolf is bij benadering gelijk aan  $2/(k + 1)$  maal de snelheid van de verdichtingsgolf waarmee deze het element passeert, waarbij  $k$  de verhouding voorstelt van de soortelijke warmte van het gas bij constante druk

tot die bij constant volume. De omstandigheid dat iedere laag met een andere toestand begint maakt een behandeling van het probleem bijzonder ingewikkeld.

In § 1 worden enige betrekkingen voor verdichtingsgolven afgeleid. De betrekkingen vermeld in (1.7) worden gebruikt bij de afleiding van de bewegingsvergelijking voor het gas; hierbij is  $\xi$  de voortplantingssnelheid van de verdichtingsgolf,  $u$ ,  $p_1$  en  $\rho_1$  respectievelijk de snelheid, druk en dichtheid onmiddellijk achter de verdichtingsgolf;  $\rho_0$  heeft betrekking op de oorspronkelijke toestand van het gas.

In § 2 en § 3 wordt de bewegingsvergelijking voor het stromingsgebied afgeleid. De verdunningsgolven in het gebied tussen de zuiger en de verdichtingsgolf volgen elkaar continu op, zodat de gewone vergelijkingen gebruikt kunnen worden om de beweging van het gas te beschrijven. Wij hebben de vorm van LAGRANGE voor deze bewegingsvergelijking gebruikt nl.

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

aangezien deze vorm de meest geschikte is om de beweging van een deeltje of van een laag in zijn baan te volgen. Bij de afleiding van de bewegingsvergelijking hebben wij het probleem enigszins meer algemeen gesteld dan Prof. BURGERS heeft gedaan: wij hebben niet onmiddellijk aangenomen dat de dichtheid van het gas in de oorspronkelijke toestand overal dezelfde is; het gas zou dan weliswaar in beweging zijn geweest, doch wij hebben aangenomen dat de snelheden dezer beweging in vergelijking met die van de zuiger of die welke door de zuiger worden veroorzaakt zo klein zijn, dat ze verwaarloosd kunnen worden. Wij hebben ons eerst later beperkt tot het geval van een constante dichtheid.

Wij beschrijven de beweging van een schil gas door

$$x = \varphi (s; t) \quad (2)$$

waarbij  $s$  een parameter is, waardoor de verschillende lagen of schillen onderscheiden worden en  $x$  de afstand afgelegd door de schil  $s$ .

Voor de laag onmiddellijk grenzend aan de zuiger, nemen wij  $s = 0$ ; voor alle andere lagen is  $s > 0$ . De regel volgens welke de waarden van  $s$  worden toegekend is nog willekeurig.

De uitzetting van een bepaalde schil  $s$  wordt bepaald door  $(\partial\varphi/\partial s)$  als functie van de tijd voor constante  $s$ . Voor de dichtheid hebben wij dien-tengevolge

$$\rho = \theta_1 (s) \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^{-1} \quad (3)$$

en voor de druk

$$p = \theta_2 (s) \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^{-k} \quad (4)$$

waarbij aangenomen wordt dat voor de uitzetting van elke schil de wet van POISSON geldt.

( De snelheid van de schil  $s$  wordt uitgedrukt door

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (5)$$

Substitutie van deze waarden voor de dichtheid, de druk en de snelheid in (1), leidt tot de vergelijking (2.6) blz. 8, voor het stromingsgebied.

De bewegingsvergelijking voor de zuiger wordt gegeven in (2.8), waarbij  $\bar{\rho}$  de massa per eenheid van de frontoppervlakte van de zuiger is. Deze vergelijking levert de randvoorwaarde voor  $s = 0$ .

Een tweede randvoorwaarde staat in verband met de baan van de verdichtingsgolf. De baan van de verdichtingsgolf wordt voorgesteld door

$$x = \psi(t) \quad (6)$$

waarbij  $\psi$  vooralsnog een onbekende functie is. Indien  $(X, T)$  het snijpunt van de baan van de schil  $s$  en de baan van de verdichtingsgolf voorstelt, dan geldt:

$$\psi(T) = \varphi(s; t) \quad (7)$$

Stellen wij de snelheid van de verdichtingsgolf voor door  $\partial \psi / \partial t$ , dan geldt hiervoor de betrekking (2.10); en de waarden van  $\theta_1(s)$  en  $\theta_2(s)$  worden gegeven in (2.11).

Indien wij aannemen dat de snelheid van het geluid in de oorspronkelijke toestand van het gas zo klein is, dat ze verwaarloosd mag worden in vergelijking met de snelheid van het gas onmiddellijk achter de verdichtingsgolf, dan worden deze betrekkingen, nl. (2.10) en (2.11), teruggebracht tot (2.12) en (2.13).

Wanneer wij nu de parameter  $s$  zo definiëren dat langs de baan van de verdichtingsgolf de betrekking (2.14) geldt, dan moet langs deze baan aan de voorwaarde (2.15) voldaan worden, d.w.z. dat hier:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 1. \quad (8)$$

Met behulp van (8) vereenvoudigen zich de uitdrukkingen voor  $\theta_1(s)$  en  $\theta_2(s)$  aanzienlijk en nemen zij de vormen (2.16) aan.

De bewegingsvergelijkingen voor het gas en de zuiger krijgen dan respectievelijk de vormen (2.17) en (2.18).

Een andere vorm voor de bewegingsvergelijking van de zuiger wordt verkregen door in (2.17)  $s = 0$  te stellen; dit geeft (2.19). Uit (2.18) en (2.19) leiden wij de randvoorwaarde (2.20) voor  $s = 0$  af.

In § 3 worden de bewegingsvergelijking en de randvoorwaarden getransformeerd door de invoering van de nieuwe afhankelijke veranderlijke  $\Phi = \partial \varphi / \partial s$ , terwijl een diagram met  $s$  en  $t$  als coördinaten wordt ingevoerd (zie fig. 4, blz. 12).

De bewegingsvergelijking voor het stromingsgebied neemt nu de vorm (3.3) aan, terwijl de randvoorwaarde van  $s = 0$  de vorm (3.4) aanneemt.

De baan van de verdichtingsgolf wordt dan voorgesteld door

$$s = S(t) \quad (9)$$

welke in principe wordt verkregen uit (2.9) door hieruit  $s$  als functie van  $t$  op te lossen. De voorwaarde (8) voor de baan van de verdichtingsgolf wordt nu:

$$\Phi = 1. \quad (10)$$

Als een oplossing van (3.3) gevonden is, kan de waarde van  $\varphi(s; t)$  aan de hand van (2.14) thans uit (3.7) bepaald worden.

Indien de formule (3.7) voor  $\varphi(s; t)$  in (2.17) wordt gesubstitueerd, verkrijgen wij de voorwaarde (3.9) waaraan voldaan moet worden langs de baan van de verdichtingsgolf.

Hiermede is dus de bewegingsvergelijking voor het gas herleid tot (3.3) (zie blz. 15), terwijl de randvoorwaarden gegeven worden door (3.5) voor  $s = 0$ , en (3.9) voor de baan  $s = S(t)$  van de verdichtingsgolf.

Stellen wij  $k = 5/3$  dan neemt de bewegingsvergelijking de vorm (3.3a) (zie blz. 16) aan, terwijl de randvoorwaarden de vormen (3.5a) en (3.9a) krijgen.

Nemen wij  $\varrho_0$  constant, d.i. indien wij aannemen dat het gas in zijn oorspronkelijke toestand overal in rust verkeert, dan wordt de bewegingsvergelijking teruggebracht tot (3.3b) (zie blz. 16) met de randvoorwaarden (3.5b) en (3.9b). Deze vergelijking is dezelfde als die, welke verkregen werd door Prof. BURGERS.

Er dient opgemerkt te worden dat de differentiaalvergelijking voor  $\Phi$  niet lineair is. De niet-lineariteit komt op twee plaatsen tot uitdrukking: enerzijds door het voorkomen van de factor  $\Phi^{-5/3}$  en anderzijds doordat de functie  $S'^2$  op een gecompliceerde manier met de tweede randvoorwaarde samenhangt.

In hoofdstuk II hebben wij getracht om oplossingen te vinden van het type  $(l + gt)^m/q(s)$ , waar  $g$  en  $m$  constanten zijn. Wij zijn er in geslaagd twee oplossingen van vergelijking (3.3) van dit type te vinden, welke exact aan beide randvoorwaarden (3.5) en (3.9) voldoen. In het ene geval moet  $\varrho_0$  de waarde  $\varrho_{00} (1 + hs)^{-1}$  aannemen ( $\varrho_{00}$  en  $h$  constanten); in het andere geval blijkt  $\bar{\varrho}$  een oneindige grote waarde te moeten bezitten. Deze gevallen worden behandeld in § 4.

In § 5 en verder hebben wij ons bepaald tot de vergelijking (3.3b) met de randvoorwaarden (3.5b) en (3.9b).

Prof. BURGERS heeft een oplossing voor deze vergelijking verkregen in de vorm van een machtreeks, welke als volgt begint:

$$\Phi = 1 + a_1 t + a_2 s + b_1 t^2 + b_2 ts + \quad (10)$$

(Prof. BURGERS geeft de termen tot en met die van de derde graad.) Het convergentiegebied van deze reeks kon niet worden onderzocht. Verwacht mag echter worden, dat het convergentiegebied zeer klein zal zijn, aange-

zien bij substitutie van deze reeks in de differentiaal-vergelijking de binominaalstelling moet worden toegepast ter herleiding van  $\Phi^{-5/3}$ , welke reeks alleen convergent is, zolang  $|\Phi-1| < 1$ . Deze oplossing zal dus alleen gelden voor de aanvangsstadia van de beweging. Wij hebben daarom getracht een oplossing te vinden die ons in staat zou stellen het verloop van de beweging gedurende geruime tijd te overzien. Wij zijn er niet ten volle in geslaagd, daar wij geen oplossing van de vergelijking konden vinden die aan beide randvoorwaarden voldoet.

Wij hebben toch een aantal oplossingen gevonden, die kunnen dienen als benaderingen. In § 6 en § 8 hebben wij twee uitdrukkingen van bovengenoemd type gevonden die aan beide randvoorwaarden exact voldoen en van de vergelijking zelf benaderde oplossingen voorstellen. In beide gevallen neemt de fout onbepaald af wanneer  $s$  en/of  $t$  onbepaald toenemen.

In § 7 en § 9 hebben wij twee uitdrukkingen van hetzelfde type voor  $\Phi$  gevonden, welke aan de eerste randvoorwaarde en aan de differentiaalvergelijking exact voldoen, doch niet aan de tweede randvoorwaarde. De afwijkingen van laatstgenoemde randvoorwaarde nemen in beide gevallen onbepaald af, wanneer  $s$  en/of  $t$  onbepaald toenemen. De afwijking kan bovendien tot nul gemaakt worden in een willekeurig punt van de baan van de verdichtingsgolf door een geschikte waarde toe te kennen aan een constante die nog tot onze beschikking staat.

In alle vier de gevallen hebben wij formules voor de snelheid van de zuiger afgeleid; volgens alle vier deze formules keert de bewegingsrichting van de zuiger naderhand om, d.w.z. na een zekere tijdsduur komt de zuiger voor een ogenblik tot rust en begint zich dan in tegenovergestelde richting te bewegen.

In hoofdstuk III hebben wij de methode van hoofdstuk II uitgebreid. Wij hebben daar voor  $\Phi$  de uitdrukking  $u(t^3)/v(s)^3$  aangenomen, waarbij de waarde van  $u(t)^3$  niet a priori in de vorm  $(1+gt)^m$  is vastgelegd. Substitutie van deze uitdrukking voor  $\Phi$  in de differentiaalvergelijking geeft respectievelijk de vergelijkingen (10.3) en (10.4) voor  $u$  en  $v$ . Vergelijking (10.3) levert na integratie het verband 10.8 tussen  $u$  en  $t$ . Er dient hier opgemerkt te worden dat wij thans een nieuwe parameter  $\lambda$  invoeren. Wij hebben dus nu één constante meer tot onze beschikking dan in het geval van de oplossingen in hoofdstuk II.

Vergelijking (10.4) leidt tot de betrekking (10.18) tussen  $y$  en  $\bar{w}$  waarbij  $y = ds/dv$  en  $\bar{w} = 1 - \lambda^2/v^2$ . De zo verkregen oplossing kunnen wij gemakkelijk aan de eerste randvoorwaarde laten voldoen. Met de tweede is het evenwel anders gesteld; wij kunnen de oplossing niet aan deze laten voldoen. De afwijking van deze voorwaarde neemt echter ook thans onbepaald af, wanneer  $u \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Bovendien beschikken wij thans nog over twee constanten, die zo gekozen moeten worden dat de afwijking zo gering mogelijk zij.

In § 11 tot § 16 zijn oplossingen voor verschillende waarden van de parameter  $\lambda$  numeriek uitgewerkt.

In § 17 hebben wij een uitdrukking voor  $\Phi$  van het type  $u(t)^3/v(s)^3$  gevonden die aan beide randvoorwaarden exact voldoet, doch van de vergelijking zelf slechts een benaderde oplossing vormt. Ook in dit geval nadert de fout tot nul als  $u \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

Ook voor deze gevallen hebben wij formules voor de snelheid afgeleid, volgens welke de snelheid na een zeker tijdsverloop eveneens van teken blijkt te veranderen.

De oplossingen van hoofdstuk II zijn speciale gevallen van die van hoofdstuk III. Bij een geschikte keuze van de constanten kunnen wij de oplossingen van § 7 en § 9 verkrijgen uit de oplossing van § 10 door de parameter  $\lambda$  respectievelijk tot oneindig en tot nul te laten naderen. Op analoge manier worden de oplossingen van § 6 en § 8 verkregen uit die van § 17.

In hoofdstuk IV hebben wij de snelheid van de zuiger nader onderzocht aan de hand van de formules welke wij in de voorgaande hoofdstukken daarvoor hebben afgeleid.

De formules die wij uit § 10 en § 17 hebben verkregen, geven dezelfde eindsnelheid voor de zuiger wanneer wij aan  $\lambda$  de waarde 1,75 (ongeveer) geven. Uit dit feit mogen wij de gevolgtrekking maken dat de beste benadering voor  $\Phi$  gegeven wordt door de beide oplossingen van § 10 en § 17 met  $\lambda = 1,75$ .

In hoofdstuk V hebben wij getracht om een verbetering te verkrijgen van de polynomiale oplossing van § 7, daarbij gebruikmakend van de differentiaalvergelijking voor  $t$  als functie van  $\Phi$  en  $s$ , zoals gegeven wordt door Prof. BURGERS in zijn reeds genoemde publicatie, blz. 269, noot 3.

Alhoewel deze poging niet geslaagd is door de ingewikkelde vormen welke de randvoorwaarden voor de correctie-term aannemen, mogen de formules zoals wij die verkregen, toch enig licht werpen op de voortplanting van storingen vanuit de randen naar het inwendige van het veld.

## STELLINGS

### I.

Die oplossing van § 4(b), hoofstuk II, bls. 22 e.v. van hierdie proefskrif (die geval  $m = 1$ ) hou 'n generalisasie in van die geval waar die gas in die buis aanvanklik 'n homogene digtheid het en oral in rus verkeer. Word die suier in die geval met 'n konstante snelheid voortgedryf, dan sal die verdigtingsgolf aan die front van die gebied wat deur die suier geaffekteer word 'n konstante snelheid hê, terwyl die gas tussen die suier en die verdigtingsgolf ook met 'n konstante snelheid sal voortbeweeg.

### II.

(a). Van vergelyking (3.3a) op bls. 16 van hierdie proefskrif kan 'n oplossing van die tipe  $\Phi = (1 + gt)^m/q(s)$  gevind word met  $\varrho_0 = \varrho_{00} q^n$  sodanig dat die oplossing in die oorsprong aan die tweede rantvoorwaarde voldoen en die afwyking origens tot nul nader as  $s \rightarrow \infty$  ( $g$ ,  $m$  en  $\varrho_{00}$  is bepaalde konstante;  $n$  kan enige willekeurige positiewe of negatiewe waarde hê.

(b). Ook vir die geval  $\varrho_0 = \varrho_{00} \left(\frac{dq}{ds}\right)^n$  kan so'n oplossing gekonstrueer word.

(c). Die gevalle wat in § 4 en §§ 6 tot 9 behandel is, is almal te beskou as spesiale gevalle van (a). Die gevalle wat in § 4 behandel is kan langs twee weë uit (a) verkry word.

### III.

Die probleem wat deur prof. J. M. BURGERS in „Proc. Royal Neth. Acad. of Sc.", Vol. 50, no. 4, (blss. 333 e.v., afdeling 5) behandel is as 'n variant van die probleem wat in hierdie proefskrif ondersoek is, werp weinig of geen lig op laasgenoemde ondersoek nie. Die oplossing van prof. BURGERS lei tot 'n onwaarskynlike eindsnelheid vir die suier. In essense verskil die probleem wat hier deur prof. BURGERS behandel word nie veel van die een wat deur hom behandel is in „Over de eendimensionale voortplanting van drukstoringen in een ideaal gas" in „Verslagen Ned. Akad. van Wet.", Vol. 52, nos. 8 en 9 (1943), nie.

### IV.

Die logaritmiëse oplossings van die hipergeometriëse differensiaal-vergelyking kan in 'n gerieflike vorm verkry word met behulp van 'n metode wat deur prof. dr N. G. DE BRUIJN uiteengesit word in die „Philosophical



Magazine", serie 7, vol. 39, bls. 134 e.v. Hierdie oplossings gee aanleiding tot die volgende skryfwyse vir  $K$  en  $K'$ , die periodisiteitsmoduli van die elliptiese funksies van JACOBI:

$$K = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m + 1)} \right\}^2 x^m$$

$$K' = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dm} \left[ \left\{ \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m + 1)} \right\}^2 x^m \right].$$

#### V.

Die locus van die top van 'n driehoek met vaste basis waarvoor daar 'n lineêre betrekking bestaan tussen die cotangense van die drie hoeke (dus  $p \cot \alpha + q \cot \beta + r \cot \gamma = s$ ) is 'n sirkel en omgekeerd d.w.s. by vaste hoekpunte  $A$  en  $B$  word die ligging van die hoekpunt  $C$  op 'n sirkel, uitgedruk deur 'n lineêre betrekking in die cotangense van die hoeke.

Dit is die enigste goniometriese verhouding wat die genoemde eienskap besit.

#### VI.

Die meetkunde-onderwys in die Suid-Afrikaanse middelbare skole laat wat inhoud en metode betref, veel te wense oor.

#### VII.

Die Nederlandse universiteite kan gerus meer aandag gee aan die Toegepaste Wiskunde.

#### VIII.

Met die oog daarop om lande waar die metrieke-stelsel van mate en gewigte nie in gebruik is nie, maar waar dit tog aanbeveling verdien dat dit ingevoer sal word (bv. Suid-Afrika), te help en miskien ook te dwing om dit in te voer, is dit van belang dat die lande van die Europese kontinent geen dubbele normalisasie sal uitvoer nie, maar dat hulle hulle uitsluitlik by die metrieke stelsel sal bepaal.

#### IX.

Die huidige tekort aan opgeleide tegnisi in Suid-Afrika (geskoolde tegnisi) is nie te wyte aan 'n tekort aan leer- en arbeidskragte nie, maar aan:

- (a) die feit dat gedurende Wêreld-oorlog II alle tegniese beroepe vir alle vakleerlinge van owerheidsweë gesluit was met die oog op 'n reservering van dié beroepe vir oudgediende soldate
- (b) die beleid van „geslote geleedere” van die vak-unies in die verskillende beroepe
- (c) die gebrek aan insig en belangstelling by die meeste Suid-Afrikaners (Afrikaans- sowel as Engelssprekend)

(d) die feit dat die kapitaal in die Suid-Afrikaanse industrieë hoofsaaklik in buitelandse hande is

(e) die gebrekkige opleidingsfasiliteite wat voorheen bestaan het.

Hierdie toestande hou 'n veronregting van die Suid-Afrikaansgebore landseuns in. Die bestaande onreelmatighede i.v.m. punte (b), (c) en (d) staan deur maatreëls van owerheidsweë uit die weg geruim te word.

#### X.

Van die totale aantal leerlinge wat jaarliks tot die Transvaalse middelbare skole toegelaat word, behaal volgens statistieke van die laaste tien jaar, slegs 6 % die Eindsertifikaat van die Middelbare Skool.

Met die oog op hierdie feit, en met die oog op punt (c) van stelling IX, is die stigting van die Junior Hoërskool, waarvan die doel is om aan die leerlinge tot die peil van standerd 8 (ongeveer gelykstaande aan die derde klas van die middelbare skool in Nederland) voor-beroepsopleiding en 'n algemene kulturele ontwikkeling te gee, 'n noodsaaklike en verdienstelike aanvulling van die middelbare onderwys van Transvaal.

#### XI.

Die sprong van die middelbare na die universitêre onderwys in Suid-Afrika is so groot, dat dit ernstige oorweging verdien om die middelbare onderwys met een jaar te verleng of andersins die opleiding vir die Baccalaureusgraad aan die universiteite 'n vierjarige i.p.v. 'n driejarige kursus te maak.

#### XII.

Die fundamentele oorsake van die grootskaalse gronderosie in Suid-Afrika is ekonomies en nie klimatologies van aard nie.

#### XIII.

Die statistiese gegewens i.v.m. die stygende bedryfskoste van die Witwatersrandse goudmyne soos van tyd tot tyd gepubliseer word deur die Transvaalse Kamer van Mynwese in die brosjure „Die Mynwese” is misleidend en onbetroubaar.

#### XIV.

Deur die Suid-Afrikaanse naturel te ver-europees bewys die blanke die naturel 'n groot ondiens. Hierdie proses dien op 'n oordeelkundige wyse teëgegaan te word. Die naturel moet opgevoed word tot 'n volwaardige mens ooreenkomstig sy eie behoeftes en tradisies.

### VERBETERINGS.

- bls. 6 reël 10 v.b. lees diskontinüiteits- i.p.v. diskontinüiteits-.
- bls. 6 reël 18 v.b. lees kontinuüiteitsvergelyking i.p.v. diskontinüiteits-  
vergelyking.
- bls. 19 reël 5 v.b. laaste term in hake lees  $\frac{\varrho_0'}{\varrho_0} S'^2 \Phi^{-k}$ .
- bls. 41 regterkant van vergelyking (10.3) lees  $-3Du^{-5}$ .
- bls. 42 reël 7 v.o. noemer van term in hake ( ) aan linkerkant moet wees  
 $v$  i.p.v.  $v^2$ .
- bls. 45 van formule (10.27) is aan die regterkant 'n faktor  $y$  weggelaat.

