Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

RATEN IS (NIET) WETEN

Eredivisiewedstrijden voorspellen met een twee-ratingensysteem

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

JASPER LUBBERS

Delft, Nederland
Juni 2020

Samenvatting

In de jaren 90 ontwierp Mark Glickman [1] een model dat wordt gebruikt om schaakspelers mee te raten. In dit model wordt verondersteld dat de sterkte van een speler normaal verdeeld is en dat spelerssterktes onderzekerder worden na verloop van tijd. Op basis van een kansmodel voor wedstrijduitkomsten, wordt de normale sterkteverdeling verbeterd. Dit levert een zogehete posterior verdeling van de spelersterkte op en deze wordt benaderd met een nieuwe normale verdeling. Deze benadering geeft een formule voor de verwachting (de rating) en variantie (de onzekerheid van deze rating) van de nieuwe verdeling. Voordat wedstrijduitkomsten worden geobserveerd krijgen alle spelers eenzelfde rating van 1500 en eenzelfde beginvariantie σ_0^2. Samen met de variantie toename ν^2 per dag, wordt ook σ_0^2 geschat op basis van de geobserveerde data met behulp van het Nelder-Mead algoritme. Dit algoritme maakt niet gebruik van eerste of hogere orde afgeleides, maar slechts van functiewaarden. De parameters worden zo geschat dat de aannemelijkheid van de geobserveerde wedstrijduitkomsten maximaal is op basis van het veronderstelde kansmodel.

Deze aannames hebben we overgenomen om een ratingsysteem voor voetbalteams te maken. Voor ons model willen we niet alleen wedstrijduitkomsten (winst, verlies, gelijkspel) meenemen, maar ook de wedstrijduitslag: de score van het thuisteam en de score van het uitteam. We hebben verondersteld dat de twee scores afkomstig zijn uit een Poissonverdeling. In plaats van één rating toe te kennen aan elk team, krijgt elk team een aanvalsrating en een verdedigingsrating. Net als Glickman bepalen we een normaal benaderde posterior verdeling voor de twee verschillende sterkteparameters, waarmee we formules krijgen om de nieuwe ratingen uit te rekenen op basis van de westrijduitslagen.

We hebben alle wedstrijduitslagen van de Eredivisie van de afgelopen 20 jaar verzameld om ons systeem op toe te passen. De data van de eerste 14 jaar zijn gebruikt om het systeem te optimaliseren. Om dit te realiseren moesten we een grovere benadering maken voor de kans op een wedstrijduitslag, gegeven de ratingen van de spelers. We vonden zeer lage waarden voor σ_0^2 en ν^2, wat een mooie uitkomst was aangezien onze benaderingen goed werken bij lage varianties. De laatste 6 jaar van de dataset zijn gebruikt om de ranglijsten te testen hoe goed ze de wedstrijdenuitkomsten van het opvolgende seizoen kunnen voorspellen.

Het bleek dat de ranglijsten die gegenereerd zijn door ons systeem niet veel verschillen van die van de Eredivisie. Wanneer beide ranglijsten een tegengestelde voorspelling gaven, gaf onze ranglijst niet significant meer betere voorspellingen. De dataset waarvoor we de ranglijsten hebben getest gaf dus geen aanleiding om te veronderstellen dat onze ranglijst beter in staat is wedstrijden correct te voorspellen.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Introductie

Elke nationale voetbalcompetitie hanteert een ranglijst om aan het einde van het seizoen een kampioen aan te wijzen, om te bepalen welke clubs er degraderen en promoveren en wie het volgende seizoen aan de verschillende Europese voetbalcompetities mogen deelnemen. Deze ranglijsten zijn gebaseerd op de behaalde punten in het seizoen. Hoe meer punten een team heeft gehaald (drie punten bij winst, één bij gelijkspel en nul bij verlies), hoe hoger het team op de ranglijst staat.

Als aan het eind van het seizoen alle teams tegen elkaar hebben gespeeld, geeft een dergelijke ranglijst een goed beeld van de krachtsverhoudingen over het hele jaar genomen. Wanneer je de ranglijst bekijkt ergens midden in het seizoen, hoeft dat geen juiste weergave te zijn van de kwaliteiten van de verschillende teams op dat moment. Wanneer een team bijvoorbeeld zijn eerste drie wedstrijden van de competitie wint van zwakke tegenstanders, staat dit team na drie speelronden boven een team dat van drie sterke tegenstanders verloor. Dat het team dat drie keer won hoger op de ranglijst staat op dat moment, wil daarom nog niet zeggen dat het team over meer kwaliteiten beschikt dan het andere team.

Wat je zou willen is een ranglijst die de sterktes van de voetbalteams weergeeft op het moment zelf en niet alleen maar over een heel seizoen genomen. Bij denksporten zoals schaken maakt men gebruik van zulk soort ranglijsten. Naast het feit dat het interessant is om inzicht te krijgen in de kwaliteiten van de spelers binnen een bepaalde sport, worden deze ranglijsten gebruikt om speelschema's van toernooien in te delen. Op deze manier wil men zorgen dat de beste spelers elkaar pas in de eindfase van het toernooi treffen. Daarom krijgt elke deelnemende speler een zogenaamde rating toegewezen. Dit is een getalsmatige aanduiding voor de spelerskwaliteiten.

Op basis van wedstrijduitkomsten worden nieuwe ratingen telkens uitgerekend met een wiskundige formule. Bij winst zal de rating van een speler stijgen en hij zal dalen bij verlies. Zo'n formule berekent deze toename/afname op basis van het ratingsverschil tussen twee spelers. Win je van een tegenstander die een hogere rating heeft dan jij, dan zal je rating meer stijgen dan wanneer je wint van iemand met een lagere rating dan jij. Tegelijkertijd betekent dit dat je rating harder naar beneden gaat als je van een zwakkere tegenstander verliest, dan wanneer je verliest van iemand met een veel hogere rating.

Dit verslag gaat over het ontwikkelen van een ratingsysteem voor voetbalteams uit de Nederlandse Eredivisie.

Om een voetbalwedstrijd te winnen, moet je vaker scoren dan je tegenstander. Voor een voetbalteam is de balans tussen aanval en verdediging dus van belang. Daarom hebben we ervoor gekozen om in ons model niet één, maar twee ratingen aan de teams toe te kennen: een aanvalsrating en een verdedigingsrating.

De wedstrijduitslag (0-0, 1-0, 2-4, etc.) geeft veel meer informatie over het krachtsverschil dan slechts de uitkomst van die wedstrijd (winst, verlies of gelijkspel). We willen een systeem gebruiken dat wedstrijduitslagen meeneemt in het berekenen van de ratingen. De wiskundige ideeën die ten grondslag liggen aan ons model, zijn voor een groot deel gebaseerd op het model van Mark Glickman [1]. Dit model is oorspronkelijk gemaakt om schaakspelers mee te raten. Hierbij wordt gebruik gemaakt van Bayesiaanse statistiek [2] en dit wordt beschreven in hoofdstuk 2.

In hoofdstuk 3 laten we zien hoe we de principes van Glickman hebben verwerkt bij het maken van ons eigen ratingsysteem.

Met het systeem hebben we ranglijsten gemaakt op basis van de Eredivisie-uitslagen van deze eeuw, om ze te kunnen vergelijken met de bestaande ranglijsten van de Eredivisie. Ook hebben we onderzocht hoe goed beide type ranglijsten wedstrijdenuitkomsten kunnen voorspellen. De hypothese is dat ons systeem het beter doet in dat opzicht dan de Eredivisieranglijsten, omdat wij gebruik maken van een statistisch model. De resultaten hiervan staan beschreven in hoofdstuk 4.

Tot slot volgen in hoofdstuk 5 de conclusies van dit project.

Hoofdstuk 2

Model van Glickman

In dit hoofdstuk wordt het model van Mark Glickman [1] beschreven. Het ratingsysteem dat men bij het schaken hanteert is gebaseerd op dit model. Het model beschrijft de sterkte van een speler met een zogehete sterkteparameter die afkomstig zijn uit een normale verdeling. De sterkte van een speler wordt geschat aan de hand van de resultaten die de speler behaalt in wedstrijden. Verder is in het model opgenomen dat de sterktes van spelers veranderen na verloop van tijd, ook als er geen wedstrijden worden gespeeld.

Door gebruik te maken van Bayesiaanse statistiek [2] wordt op basis van de wedstrijduitkomsten een data-update gedaan voor de verdelingen van alle sterkteparameters. Aansluitend wordt er een tijdsupdate gedaan, die de verdelingen aanpast als gevolg van het verstrijken van de tijd. In de volgende paragraven bekijken we hoe dit in zijn werk gaat voor een schaakspeler die een wedstrijd tegen één tegenstander speelt.

2.1 Spelerssterkte

Het model veronderstelt dat de sterkteparameter θ van een speler (wiens sterkte geschat moet worden) normaal verdeeld is met bekende verwachting en variantie:

$$\theta \sim N(\mu, \sigma^2).$$

We noemen μ de rating van een speler en σ^2 geeft de onzekerheid van deze rating aan. Deze normale verdeling wordt beschouwd als een a priori verdeling die verbeterd moet worden aan de hand van behaalde wedstrijdresultaten tegen andere spelers. De posteriori verdeling van θ wordt benaderd met een nieuwe normale verdeling:

$$\theta \sim N(\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma}^2).$$

Het model gaat ervan uit dat alle spelers met dezelfde rating beginnen, voordat de wedstrijddata worden geobserveerd:

$$\theta \sim N(1500, \sigma_0^2).$$

Tot slot wordt verondersteld dat sterktes van spelers kunnen veranderen na verloop van tijd. Hoe langer een periode duurt waarin een speler geen wedstrijden speelt, hoe onzekerder de beschrijving van de sterke wordt. Daarom wordt de parameter ν^2 geïntroduceerd voor de toename in variantie per dag.

De parameters σ_0^2 en ν^2 moeten uit de data worden afgeleid.

2.2 Wedstrijduitkomsten

Voor een wedstrijd tussen twee spelers i en j neemt Glickman in eerste instantie aan dat er twee uitkomsten mogelijk zijn: winst of verlies. Zij s_{ijk} de k-de uitkomst van een wedstrijd tussen speler i en tegenstander j. Hiervoor geldt dat $s_{ijk} = 1$ als speler i wint en $s_{ijk} = 0$ als speler i verliest.

Vervolgens wordt de aannemelijkheid van de sterkteparameters van de spelers bepaald op basis van geobserveerde wedstrijduitkomsten. Als de aannemelijkheidsfunctie $L(\theta|s)$ van de sterkteparameter van een speler bekend is, kan de verbeterde posteriori verdeling van θ bepaald worden met de Regel van Bayes:

$$f(\theta|s) \propto f(\theta)L(\theta|s).$$

Hier is $f(\theta|s)$ de posteriori verdeling van θ, $f(\theta)$ de a priori verdeling en $L(\theta|s)$ de aannemelijkheid van θ.

Om een aannemelijkheidsfunctie te construeren voor alle sterkteparameters, maakt Glickman gebruik van een herschaalde versie van het Bradley-Terry model:

$$P(s_{ijk} = 1|\theta_i, \theta_j) = \frac{10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}}}{1 + 10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}}},$$

$$P(s_{ijk} = 0|\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}}}.$$

Vervolgens wordt de uitkomst van een gelijkspel gemodelleerd. Hiervoor wordt aangenomen dat een winst gevolgd door een verlies (of andersom), dezelfde bijdrage aan de aannemelijkheidsfunctie moet leveren als twee gelijke spelen. De bijdrage van één gelijkspel is daarom:

$$\sqrt{P(s_{ijk} = 1)P(s_{ijk} = 0)} = \frac{\sqrt{10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}}}}{1 + 10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}}}.$$

Daarom wordt in het model opgenomen dat $s_{ijk} = \frac{1}{2}$ bij gelijkspel en wordt de volgende aannemelijkheidsfunctie geconstrueerd:

$$L(\theta_i, \theta_j|s_{ijk} = s) = \frac{(10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}})^s}{1 + 10^{\frac{\theta_i - \theta_j}{400}}}, \tag{2.1}$$

met $s = 0, \frac{1}{2}, 1$.

2.3 Ratingen updaten

Direct na het observeren van een wedstrijduitkomst tussen twee spelers (met sterkteparameters θ en θ_2), wordt een verbeterde verdeling voor de sterteparameters bepaald. Omdat de marginale aannemelijkheid van de sterkteparameter van één speler $L(\theta|s)$ niet bekend is, benaderen we de marginale posteriori verdeling van θ als de integraal van de gezamelijke posteriori verdeling van θ en θ_2 (de sterkteparameter van de tegenstander), geïntegreerd over de a priori verdeling van de tegenstander's sterkteparameter (met normale dichtheden $\varphi(\cdot)$):

$$f(\theta|s) \approx \int f(\theta, \theta_2|s)\varphi(\theta_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}\theta_2. \tag{2.2}$$

Vervolgens wordt gebruikt dat deze gezamelijke posteriori verdeling schaalt met het product van de a priori verdeling van θ en de aannemelijkheid van beide sterkteparameters:

$$f(\theta, \theta_2|s) \propto \varphi(\theta|\mu, \sigma^2)L(\theta, \theta_2|s). \tag{2.3}$$

Uit formule 2.1 en 2.3 volgt nu dat:

$$f(\theta|s) \propto \varphi(\theta|\mu,\sigma^2)\int \frac{(10^{\frac{\theta-\theta_2}{400}})^s}{1+10^{\frac{\theta-\theta_2}{400}}}\varphi(\theta_2|\mu_2,\sigma_2^2)\mathrm{d}\theta_2. \tag{2.4}$$

Merk op dat we hiermee een uitdrukking hebben bepaald voor de marginale aannemelijkheid van θ.

$$L(\theta|s) \approx \int \frac{(10^{\frac{\theta-\theta_2}{400}})^s}{1+10^{\frac{\theta-\theta_2}{400}}}\varphi(\theta_2|\mu_2,\sigma_2^2)\mathrm{d}\theta_2. \tag{2.5}$$

De posteriori verdeling $f(\theta|s)$ wordt benaderd met een normale verdeling waarvan de verwachting $\widetilde{\mu}$ en variantie $\widetilde{\sigma}^2$ gegeven zijn door:

$$\widetilde{\mu} = \mu + \frac{q}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\delta^2}}g(\sigma_2^2)(s - E(s|\mu,\mu_2,\sigma_2^2)), \tag{2.6}$$

$$\widetilde{\sigma}^2 = (\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\delta^2})^{-1}, \tag{2.7}$$

waarbij

$$q = \ln(10)/400, \tag{2.8}$$

$$g(\sigma_2^2) = \frac{1}{\sqrt{1+3q^2\sigma_2^2/\pi^2}}. \tag{2.9}$$

$$E(s|\mu,\mu_2,\sigma_2^2) = \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_2^2)(\mu-\mu_2)/400}}, \tag{2.10}$$

$$\delta^2 = (q^2 g(\sigma_2^2)^2 E(s|\mu,\mu_2,\sigma_2^2)(1-E(s|\mu,\mu_2,\sigma_2^2)))^{-1}. \tag{2.11}$$

De afleidingen van deze formules zijn beschreven in bijlage A.

Nadat de rating van een speler en de bijbehorende variantie zijn geupdate met bovenstaande formules, wordt bekeken hoeveel tijd t er tussen de geobserveerde wedstrijd en de eerstvolgende wedstrijd van de speler zit. Voordat de rating van de speler wordt geupdate op basis van de eerstvolgende wedstrijd, laten we de variantie toenemen met $\nu^2 t$. Dit zorgt ervoor dat spelerssterktes blijven variëren, ook na het observeren van een groot aantal wedstrijden.

2.4 Parameters schatten

Bij het updaten van de sterkteverdelingen is het noodzakelijk om de waarden van σ_0^2 en ν^2 te kennen. Deze parameters worden bepaald aan de hand van de geobserveerde data.

De kans op de geobserveerde wedstrijduitkomsten s_{ij} is het product van de volgende binomiale kansen:

$$P(s_{ij}) = p_{ij}^{s_{ij}}(1-p_{ij})^{1-s_{ij}},$$

waarbij

$$p_{ij} = \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_i^2+\sigma_j^2)(\mu_i-\mu_j)/400}}$$

een benadering is voor de kans dat speler i wint van speler j.

In plaats van het maximaliseren van de functie $\prod P(s_{ij})$, minimaliseren we de functie $d(\sigma_0^2,\nu^2) = -\sum \ln P(s_{ij})$, die we de totale discrepantie noemen.

Omdat we in eerste instantie alle spelers op dezelfde sterkte inschatten ($\mu = 1500$), zullen de discrepanties in het begin groot zijn. Hoe meer wedstrijden er worden geobserveerd, hoe beter de sterktes van de spelers worden geschat. Het bekijken van de discrepanties wordt pas zinvol als het algoritme is toegepast voor een groot aantal wedstrijden.

Als de verbeterde spelerssterktes zijn bepaald, worden de discrepanties voor alle wedstrijden berekend en gesommeerd. De totale discrepantie is nu een functie van σ_0^2 en ν^2. We zoeken de parameters waarvoor de totale discrepentie minimaal is.

Omdat de totale discrepantie een te ingewikkelde functie van σ_0^2 en ν^2 is om het minimum te vinden met behulp van differentiëren, wordt hiervoor de Nelder-Mead-algoritme [3] toegepast. Deze methode maakt slechts gebruik van de functiewaarden om het minimum te vinden. Het algoritme staat beschreven in bijlage C.

Hoofdstuk 3

Ratingsysteem voor voetbalteams

Het doel is nu om een systeem te hanteren waarme we wedstrijduitslagen kunnen voorspellen. Om het verwachte aantal doelpunten dat een team scoort en het verwachte aantal doelpunten dat een team tegen krijgt te bepalen, maken we onderscheid tussen offensieve en defensieve kwaliteiten van voetbalteams.

3.1 Aanvals-en verdedigingssterkte

Het aantal doelpunten dat wordt gescoord door een voetbalteam hangt af van zowel de eigen aanvallende kwaliteiten, als de verdedigende kwaliteiten van de tegenstander. Tegelijkertijd geeft het aantal tegendoelpunten de verdedigingssterkte van het team aan, maar ook de aanvalssterkte van de tegenstander.
Daarom kennen we aan een team twee parameters toe: een aanvalsparameter α en een verdedigingsparameter β. Net als in het model van Glickman [1] veronderstellen we dat de parameters van een team afkomstig zijn uit een normale verdeling met bekende verwachting en variantie:

$$\alpha \sim N(\mu, \sigma^2),$$

$$\beta \sim N(\theta, \delta^2).$$

We noemen μ de aanvalsrating van een team en θ de verdedigingsrating. Logischerwijs zeggen we dat σ^2 de aanvalsvariantie is en δ^2 de verdedigingsvariantie.

We nemen opnieuw aan dat de ratingen van de teams onzekerder worden naarmate de tijd verstrijkt. We kiezen de parameter ν^2 voor de variantietoename per dag.

Verder nemen we aan dat alle teams gelijke ratingen hebben voordat de wedstrijduitslagen worden geobserveerd:

$$\alpha \sim N(100, \sigma_0^2),$$

$$\beta \sim N(100 + \lambda, \sigma_0^2).$$

Zowel α als β beginnen dus met dezelfde startvariantie σ_0^2. We nemen in ons model aan dat varianties niet groter kunnen worden dan de vooraf bepaalde startvariantie. De parameter λ is hier voor het verschil tussen de aanvals- en verdedigingsrating.

3.2 Wedstrijduitslagen

Zij $X - Y$ de uitslag van een wedstrijd tussen twee teams. De eerste aanname is dat de score van het thuisteam en de score van het uitteam onafhankelijk van elkaar zijn:

$$P(X = m, Y = n) = P(X = m)P(Y = n).$$

We veronderstellen dat beide scores een poissonverdeling hebben, waarvan de parameter afhangt van de aanvalssterkte van het ene team en de verdedigingssterkte van de tegenstander:

$$X \sim Poiss(e^{\alpha-\beta_2}),$$
$$Y \sim Poiss(e^{\alpha_2-\beta}).$$

Bij een geobserveerde uitslag $X - Y = m - n$ van een wedstrijd tussen team 1 (sterkteparameters α en β) en team 2 (sterkteparameters α_2 en β_2), kunnen we nu de volgende twee aannemelijkheids-functies opstellen:

$$L(\alpha, \beta_2|X = m) = \frac{(e^{\alpha-\beta_2})^m}{m!} e^{-(e^{\alpha-\beta_2})} = \frac{e^{(m\alpha - m\beta_2 - e^{\alpha-\beta_2})}}{m!}, \tag{3.1}$$

$$L(\alpha_2, \beta|Y = n) = \frac{(e^{\alpha_2-\beta})^n}{n!} e^{-(e^{\alpha_2-\beta})} = \frac{e^{(n\alpha_2 - m\beta - e^{\alpha_2-\beta})}}{n!}. \tag{3.2}$$

3.3 Ratingen updaten

We nemen aan dat er één wedstrijd geobserveerd is en willen nu de posteriori verdeling van α en β bepalen. Beide bepalingen gaan vrijwel analoog. Daarom beschouwen we de posteriori verdeling van α, de aanvalsparameter van het team wiens sterkte we willen updaten. Het team heeft m doelpunten gescoord tegen een team met verdedigingsparameter β_2. We beginnen met dezelfde benadering als bij het model van Glickman [1]:

$$f(\alpha|m) \approx \int f(\alpha|\beta_2, m)\varphi(\beta_2|\theta_2, \delta_2^2)\mathrm{d}\beta_2, \tag{3.3}$$

waarbij $\varphi(\cdot)$ wederom de normale dichtheid is en $f(\alpha|m)$ de posterior verdeling van α.

Door gebruik te maken van $f(\alpha|\beta_2, m) \propto f(\alpha)L(\alpha, \beta_2|m)$ krijgen we:

$$f(\alpha|m) \propto \varphi(\alpha|\mu, \sigma^2) \int L(\alpha, \beta_2|m)\varphi(\beta_2|\theta_2, \delta_2^2)\mathrm{d}\beta_2. \tag{3.4}$$

Door de normale kansdichtheden uit te schrijven en gebruik te maken van de uitdrukking voor de aannemelijkheid van α en β_2 in formule 3.1 verkrijgen we de volgende integraal:

$$f(\alpha|m) \propto \frac{e^{-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{m!2\pi\sigma\delta_2} \int e^{(m\alpha - m\beta_2 - e^{\alpha-\beta_2} - \frac{(\beta_2-\theta_2)^2}{2\delta_2^2})}\mathrm{d}\beta_2. \tag{3.5}$$

Deze integraal kan benaderd worden met de methode van Laplace. Een omschrijving van deze methode is te lezen in het artikel van Olver [4].

Theorem 1 *(Laplace benadering) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee keer differtieerbaar, zodanig dat f een uniek globaal maximum aanneemt in $x_0 \in \mathbb{R}$ en laat $M > 0$. Als $M \to \infty$ geldt er dat*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Mf(x)}\mathrm{d}x \approx \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(x_0)|}}e^{Mf(x_0)}.$$

De benadering werkt voor onze integraal als we $M = \frac{1}{\delta_2^2}$ en $g(\beta_2) := Mf(\beta_2) = m\alpha - m\beta_2 - e^{\alpha-\beta_2} - \frac{(\beta_2-\theta_2)^2}{2\delta_2^2}$ nemen, omdat $M \to \infty$ als $\delta_2 \to 0$.

We zoeken nu het maximum van g door te differntiëren:

$$g(\beta_2) = m\alpha - m\beta_2 - e^{\alpha-\beta_2} - \frac{(\beta_2-\theta_2)^2}{2\delta_2^2},$$

$$g'(\beta_2) = -m + e^{\alpha-\beta_2} - \frac{\beta_2-\theta_2}{\delta_2^2},$$

$$g'(\widetilde{\beta_2}) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\beta_2} = \theta_2 - m\delta_2^2 + W(\delta_2^2 e^{\alpha+m\delta_2^2-\theta_2}).$$

Voor de zogehete Lambert-W-functie $W(\cdot)$ geldt dat de oplossing is van de vergelijking $ye^y = x$, met $x, y \in \mathbb{R}$ en $x \geq -\frac{1}{e}$ [5].

De functie g neemt dus zijn maximum aan in $\beta_2 = \widetilde{\beta_2}$ en de tweede afgeleide in dat punt wordt gegeven door:

$$g''(\widetilde{\beta_2}) = -e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}} - \frac{1}{\delta_2^2}.$$

De Laplace benadering geeft nu een uitdrukking voor de posteriori verdeling van de aanvalsparameter α:

$$f(\alpha|m) \propto \frac{e^{m\alpha - m\widetilde{\beta_2}(\alpha) - e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\widetilde{\beta_2}(\alpha)-\theta_2)^2}{2\delta_2^2})}}{m!\sqrt{2\pi\sigma^2\delta_2^2(e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2})}}, \tag{3.6}$$

met

$$\widetilde{\beta_2}(\alpha) = \theta_2 - m\delta_2^2 + W(\delta_2^2 e^{\alpha+m\delta_2^2-\theta_2}). \tag{3.7}$$

Op de dezelfde manier verkrijgen we de posteriori verdeling van de verdedigingsparameter β:

$$f(\beta|n) \propto \frac{e^{n\widetilde{\alpha_2}(\beta) - n\beta - e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta} - \frac{(\beta-\theta)^2}{2\delta^2} - \frac{(\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})}}{n!\sqrt{2\pi\delta^2\sigma_2^2(e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta} + \frac{1}{\sigma_2^2})}}, \tag{3.8}$$

met

$$\widetilde{\alpha_2}(\beta) = \mu_2 + n\sigma_2^2 - W(\sigma_2^2 e^{-\beta+m\sigma_2^2+\mu_2}). \tag{3.9}$$

Ook nu willen we deze verdelingen benaderen met een normale verdeling. Beschouw een willekeurige normale kansdichtheid met verwachting μ en variantie σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Er geldt dat:

$$\ln f(x) = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}[\ln f(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu - x}{\sigma^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2[\ln f(x)]}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Als we van onze normaal benaderde verdeling $f(\alpha|m)$ de modus willen bepalen, moeten we de eerste afgeleide van $\ln f(\alpha|m)$ aan nul gelijkstellen. Deze modus wordt de nieuwe rating. De nieuwe variantie vinden we door de negatieve omgekeerde te nemen van de tweede afgeleide in het punt

$\alpha = \mu$. Dit doen we omdat de variantie van een normale verdeling constant is en μ de meest aannemelijke schatting voor α is.

De nieuwe rating is dus het nulpunt van de functie $h_1(\alpha) = \frac{\mathrm{d}[\ln f(\alpha|m)]}{\mathrm{d}\alpha}$. Om de nieuwe rating te bepalen maken we gebruik van één iteratie van de Newton-Raphson-methode [6] met $\alpha = \mu$ als startwaarde:

$$\mu_{nieuw} = \mu - \frac{h_1(\mu)}{h_1'(\mu)}. \tag{3.10}$$

De nieuwe variantie wordt berekend met:

$$\sigma^2_{nieuw} = -\frac{1}{h_1'(\mu)}. \tag{3.11}$$

De nieuwe verdedigingsrating en bijhorende variantie berekenen we met dezelfde formules, maar dan met $h_2(\beta) = \frac{\mathrm{d}[\ln f(\beta|n)]}{\mathrm{d}\beta}$:

$$\theta_{nieuw} = \theta - \frac{h_2(\theta)}{h_2'(\theta)}, \tag{3.12}$$

$$\delta^2_{nieuw} = -\frac{1}{h_2'(\theta)}. \tag{3.13}$$

De Newton-Raphson-methode staat in elk basisboek over numerieke wiskunde beschreven.

De functies $h_1(\alpha)$, $h_1'(\alpha)$, $h_2(\beta)$ en $h_2'(\beta)$ zijn uitgeschreven in bijlage B.

Wanneer we de gevonden posterior verdeling verder benaderen, krijgen we formules die sterk op de ratingformules van Glickman lijken. Ook deze benaderingen staan in bijlage B.
De formules voor de aanvalsrating zijn:

$$\mu_{nieuw} = \mu + \sigma^2_{nieuw} \cdot (m - E(\mu, \theta_2)), \tag{3.14}$$

$$\sigma^2_{nieuw} = \frac{1}{E(\mu, \theta_2) + \frac{1}{\sigma^2}}, \tag{3.15}$$

$$E(\mu, \theta_2) = e^{\mu - \theta_2} \tag{3.16}$$

en voor de verdedigingsrating krijgen we:

$$\theta_{nieuw} = \theta + \delta^2_{nieuw} \cdot (E(\mu_2, \theta) - n), \tag{3.17}$$

$$\delta^2_{nieuw} = \frac{1}{E(\mu_2, \theta) + \frac{1}{\delta^2}}, \tag{3.18}$$

$$E(\mu_2, \theta) = e^{\mu_2 - \theta}. \tag{3.19}$$

Hierbij is $m - n$ de daadwerkelijke uitslag van de geobserveerde wedstrijd en $E(\mu, \theta_2) - E(\mu_2, \theta)$ de verwachte uitslag op basis van de ratingsverschillen. Omdat $E(\alpha, \beta) = e^{\alpha - \beta}$ zowel de verwachting als de variantie van de poissonverdeelde scores X en Y is, zien we dat de vereenvoudigde formules hetzelfde zijn als die in het model van Glickman.

Een toe- of afname van de rating van een speler wordt bepaald door het verschil tussen de verwachte score en de daadwerkelijke score, vermenigvuldigd met de nieuwe variantie van de rating. Deze nieuwe variantie is net als bij Glickman gelijk aan

De formules 3.14 t/m 3.19 geven een goed beeld van het wat het systeem doet. Echter zullen we de formules 3.10 t/m 3.13 gebruiken in de implementatie van de methode, omdat deze nauwkeuriger zijn.

De ratingen van de teams worden telkens direct na het observeren van een wedstrijduitslag berekend. Tot aan de eerstevolgende wedstrijd laten we de varianties met $\nu^2 t$ toenemen. Hierbij is ν^2 de variantietoename per dag en t het aantal dagen tussen de twee wedstrijden.

3.4 Parameters schatten

De parameters die moeten worden geschat zijn σ_0^2 (de initiële variantie van de ratingen) ν^2 (de variantietoename per dag) en λ (het verschil tussen de aanvals- en verdedigingsrating).

We bepalen λ door na het updaten van alle wedstrijden, per team het verschil tussen hun aanvals- en verdedigingsrating te berekenen. Voor λ kiezen we het gemiddelde van deze waarden. De reden hiervoor is dat de parameter λ er alleen toe doet voordat de rating worden geupdatet en na verloop van tijd het gemiddelde verschil tussen de aanvals-en verdedigingsrating nauwelijks meer verandert.

De parameters σ_0^2 en ν^2 worden net als bij het model van Glickman [1] bepaald op basis van de wedstrijduitslagen, met behulp van het Nelder-Mead algoritme [3].

Allereerst bepalen we de kansen op een thuisscore $X = m$ en een uitscore $Y = n$, gegeven de ratingen en varianties van twee teams:

$$P(X = m|\mu, \sigma^2, \theta_2, \delta_2^2) = \int\int P(X = m|\alpha, \beta_2)\varphi(\alpha|\mu, \sigma^2)\varphi(\beta|\theta_2, \delta_2^2)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta_2,$$

$$P(Y = n|\mu_2, \sigma_2^2, \theta, \delta^2) = \int\int P(Y = n|\alpha_2, \beta)\varphi(\alpha_2|\mu_2, \sigma_2^2)\varphi(\beta|\theta, \delta^2)\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\beta.$$

Door de integraal anders op te schrijven, zien we de benaderde posteriori verdelingen voor α en β terugkomen:

$$P(X = m|\mu, \sigma^2, \theta_2, \delta_2^2) = \int \varphi(\alpha|\mu, \sigma^2) \int P(X = m|\alpha, \beta_2)\varphi(\beta_2|\theta_2, \delta_2^2)\mathrm{d}\beta_2\mathrm{d}\alpha,$$

$$P(Y = n|\mu_2, \sigma_2^2, \theta, \delta^2) = \int \varphi(\beta|\theta, \delta^2) \int P(Y = n|\alpha_2, \beta)\varphi(\alpha_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\beta.$$

Uit de onafhankelijkheid van X en Y volgt nu dat de kans op één geobserveerde wedstrijduitslag gegeven wordt door

$$P(X = m, Y = n|\mu, \sigma^2, \theta, \delta^2, \mu_2, \sigma_2^2, \theta_2, \delta_2^2) = \int f(\alpha|m)\mathrm{d}\alpha \int f(\beta|n)\mathrm{d}\beta. \tag{3.20}$$

We laten de benadering voor $\int f(\alpha|m)\mathrm{d}\alpha$ zien. De benadering voor $\int f(\beta|n)\mathrm{d}\beta$ gaat analoog.

De marginale posterior verdeling van a is gegeven door $f(\alpha|m) = \frac{e^{m\alpha - m\widetilde{\beta_2}(\alpha) - e^{\alpha - \widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\widetilde{\beta_2}(\alpha)-\theta_2)^2}{2\delta_2^2})}}{m!\sqrt{2\pi\sigma^2\delta_2^2(e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2})}}$.

Omdat $\delta_2^2 \to 0$, nemen we aan dat:

1. $e^{\alpha - \widetilde{\beta_2}(\alpha)} << \frac{1}{\delta_2^2}$,
2. $\widetilde{\beta_2}(\alpha) \approx \theta_2$.

En dus volgt er nu dat $\int f(\alpha|m)\mathrm{d}\alpha \approx \frac{1}{m\sigma\sqrt{(2\pi)}} \int e^{m\alpha - m\theta_2 - e^{\alpha-\theta_2} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\alpha$.
Als we net als in 3.3 nu de Laplace benadering toepassen krijgen de volgende uitdrukking:

$$\int f(\alpha|m)\mathrm{d}\alpha \approx \frac{e^{m\alpha_0 - m\theta_2 - e^{\alpha_0-\theta_2} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{\sigma^2}}}{m\sigma\sqrt{e^{\alpha_0-\theta_2} + \frac{1}{\sigma^2}}}, \tag{3.21}$$

waarbij

$$\alpha_0 = \mu + m\sigma^2 - W(\sigma^2 e^{m\sigma^2+\mu-\theta_2}), \tag{3.22}$$

en voor de marginale posterior verdeling van β vinden we:

$$\int f(\beta|n)\mathrm{d}\beta \approx \frac{e^{n\mu_2 - n\beta_0 - e^{\mu_2-\beta_0} - \frac{(\beta-\theta)^2}{\delta^2}}}{n\delta\sqrt{e^{\mu_2-\beta_0} + \frac{1}{\delta^2}}}, \tag{3.23}$$

waarbij

$$\beta_0 = \theta - n\delta^2 + W(\delta^2 e^{n\delta^2 + \mu_2 - \theta}). \tag{3.24}$$

In plaats van het maximaliseren van $\prod \int f(\alpha|m)\mathrm{d}\alpha \int f(\beta|n)\mathrm{d}\beta$, kiezen we ervoor om de functie $d(\sigma_0^2, \nu^2) = -\sum \ln \int f(\alpha|m)\mathrm{d}\alpha - \sum \ln \int f(\beta|n)\mathrm{d}\beta$ te minimaliseren. Deze functie noemen we net als in het Glickmanmodel de totale discrepantie.

Gegeven een paar (σ_0^2, ν^2) kunnen we de totale discrepantie van alle wedstrijden berekenen. Door gebruik te maken van het Nelder-Mead-algoritme bepalen we het paar (σ_0^2, ν^2) waarvoor de som van de discrepanties minimaal is. Een uitleg van het algoritme is te vinden in bijlage C.

Hoofdstuk 4

Eredivisie-uitslagen

4.1 Wedstrijddata

Voor het maken van de ranglijsten hebben we alle wedstrijden vanaf augustus in het jaar 2000 genomen. Deze dataset van 6045 wedstrijden is afkomstig van de website www.eredivisiestats.nl [7] en bestaat uit vijf kolommen:

- Naam van thuisteam.
- Naam van uitteam.
- Thuisscore.
- Uitscore.
- Datum.

In de periode 2000-2020 speelden er 29 verschillende teams in de Eredivisie. Elk team krijgt van ons een uniek nummer toegekend, zodat de ratingen van een team eenvoudig zijn op te vragen uit een aparte lijst. Naast ratingen en varianties bevat deze lijst ook voor elk team de datum van de meest recente wedstrijd. Met de functie 'daysdif' in Matlab wordt bepaald hoeveel dagen t er tussen twee wedstrijden van één team zaten, zodat we de variantie voor het updaten laten toenemen met $\nu^2 t$. De ratingen en varianties worden geupdatet met de formules die beschreven staan in 3.3. De Matlab-code is te vinden in bijlage E.1.

4.2 Optimale parameters

De eerste 1224 wedstrijden uit de dataset (jaren 2000-2004) zijn gebruikt om de ratingen van de teams te updaten. De daaropvolgende 3060 wedstrijden (jaren 2004-2014) zijn gebruikt om de parameters σ_0^2 en ν^2 te schatten, zoals beschreven in 3.4. De Matlab-code voor het Nelder-Mead-algoritme is terug te vinden in bijlage E.2.

Bij het uitvoeren van het optimaliseringsalgoritme met de discrepantie-formule uit 3.4, bleek dat Matlab bij het berekenen van de discrepanties na een aantal iteraties 'NaN' (not a number) terug gaf. Dit probleem bleef zich herhalen bij elke vooraf gekozen beginsimplex.

We besloten om een eenvoudigere formule voor het berekenen van de discrepanties te nemen. Volgens ons model is de kans op een wedstrijduitlsag $m - n$ gegeven door:

$$P(X = m, Y = n|\alpha, \beta, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{m!n!} \cdot e^{m(\alpha-\beta_2)+n(\alpha_2-\beta)-e^{\alpha-\beta_2}-e^{\alpha_2-\beta}}. \tag{4.1}$$

In plaats van het oorspronkelijke idee om deze kans te integreren over de a priori verdelingen van α en β, vullen we simpelweg de verschillende ratingen in. De formule voor de discrepantie wordt dan:

$$d = \ln m! + \ln n! - m\mu + m\theta_2 - n\alpha_2 + n\theta + e^{\alpha-\beta_2} + e^{\alpha_2-\beta}. \tag{4.2}$$

Met de zojuist genoemde formule vond Matlab de volgende optimale waarden voor σ_0^2 en ν^2:

$$\sigma_0^2 = 0.0933873,$$
$$\nu^2 = 0.0000172517.$$

Omdat de benaderingen in ons model werken voor kleine varianties, zijn dit redelijke waarden om te gebruiken bij het maken van de ranglijsten.

4.3 Ranglijsten

Het afgelopen Eredivisieseizoen stopte voortijdig na 26 speelronden. De tussenstand na 26 wedstrijden is als eindstand aangehouden door de KNVB. De ranglijst die door ons ratingsysteem is bepaald (de algemene rating van een team is de som van de aanvalsrating en de verdedigingsrating) zou een betere afspiegeling moeten zijn dan de onvolledige Eredivisieranglijst [7]:

Onze ranglijst:	Eredivisieranglijst:
1. Ajax	1. Ajax
2. PSV	2. AZ
3. AZ	3. Feyenoord
4. Feyenoord	4. PSV
5. Vitesse	5. Willem II
6. FC Utrecht	6. FC Utrecht
7. FC Groningen	7. Vitesse
8. Heracles Almelo	8. Heracles Almelo
9. SC Heerenveen	9. FC Groningen
10. Willem II	10. SC Heerenveen
11. FC Twente	11. Sparta Rotterdam
12. PEC Zwolle	12. FC Emmen
13. ADO Den Haag	13. VVV-Venlo
14. Sparta Rotterdam	14. FC Twente
15. FC Emmen	15. PEC Zwolle
16. VVV-Venlo	16. Fortuna Sittard
17. Fortuna Sittard	17. ADO Den Haag
18. RKC Waalwijk	18. RKC Waalwijk

Als we onze ranglijst voor waarheid aan zouden nemen, kunnen we zeggen dat Ajax op basis van het onafgemaakte seizoen terecht is aangewezen als beste team en deelnemer aan de Champions League. PSV zou zich op basis van onze ranglijst plaatsen voor de Champions League voorrondes, maar speelt volgend seizoen in de lager aangeschreven Europea League op basis van hun vierde plaats op de Eredivisieranglijst. Willem II heeft op basis van de Eredivisiestand toegang gekregen tot de Europa League voorrondes, ten koste van FC Utrecht, ondanks dat Utrecht een wedstrijd minder heeft gespeeld en met drie punten meer boven Willem II zou eindigen. Onze ranglijst schat de kwaliteiten van FC Utrecht een stuk hoger in dan die van Willem II, wat de keuze nog onrechtvaardiger lijkt te maken.

In tegenstelling tot ons ratingsysteem, geeft de KNVB-ranglijst pas een goed beeld van de kwaliteiten van teams, aan het eind van het seizoen. Als we onze ranglijsten met die van de KNVB willen vergelijken, moeten ook onze ranglijsten bepaald worden na 34 gespeelde wedstrijden.

We gaan bekijken hoe goed beide ranglijsten (die van de KNVB en die van ons eigen systeem) de wedstrijden van het opvolende seizoen kunnen voorspellen. Hierbij beschouwen we alleen de wedstrijden waarbij een team als winnaar uit de bus is gekomen. We zeggen dat een wedstrijd juist is voorspeld als de winnaar van de wedstrijd hoger op de ranglijst staat dan de verliezer. Is dit niet het geval, dan spreken we dus van een onjuiste voorspelling.

Omdat de KNVB-ranglijst geen informatie geeft over de kwaliteiten van de teams die datzelfde jaar naar de Eredivisie zijn gepromoveerd, laten we de wedstrijden van promovendi buiten beschouwing. Op deze manier kunnen we een eerlijke vergelijking maken tussen de twee verschillende type ranglijsten.

Met behulp van het geoptimaliseerde systeem worden ranglijsten gemaakt voor de seizoenen 2013-2014 t/m 2019-2020. Omdat de parameters van ons model zijn geschat op basis van de wedstrijden uit 2004-2014, testen we de ranglijsten van de seizoen 2014-2015 t/m 2019-2020.

We zijn met name geïnteresseerd in de wedstrijden waarvoor de twee verschillende ranglijsten een verschillende voorspelling geven. Voor die gevallen bekijken we welke ranglijst voor elk seizoen de meeste juiste voorspellingen opleverde. Onze hypothese is dat wanneer beide ranglijsten het 'oneens' met elkaar zijn, onze ranglijst meer wedstrijd juist voorspelt dan de KNVB-ranglijst.

4.4 Hypothese toetsen

We noemen N het aantal wedstrijden waarvoor de twee verschillende ranglijsten ook een verschillende voorspelling geven en X het aantal juiste voorspellingen gegeven door onze ranglijst. Het aantal juiste voorspellingen X is afkomstig uit een binomiale verdeling:

$$X \sim Bin(N, p).$$

We stellen de volgende hypothesen op:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}, \tag{4.3}$$

$$H_1 : p > \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

Met behulp van Matlab (zie bijlage E.3) bepalen we voor zes seizoenen hoeveel juiste voorspellingen onze ranglijst gaf in de gevallen dat de voorspelling anders was dan die van de Eredivisieranglijst. De resultaten staan in de volgende tabel:

seizoen	X	N
2014/2015	10	20
2015/2016	9	20
2016/2017	16	32
2017/2018	7	12
2018/2019	11	19
2019/2020	2	6
totaal	55	109

Voor de seizoenen 2014-2015 t/m 2019-2020 gaf onze ranglijst dus precies één juiste voorspelling meer dan die van de Eredivisie. Deze uitkomst is niet significant; de overschrijdingskans is gelijk aan $P(x \geq 55|H_0) = 0,5$. We spreken van een significante uitkomst wanneer de overschrijdingskans kleiner 0,05 is. Daarom is er geen aanleiding tot het verwerpen van de nulhypothese.

Hoofdstuk 5

Conclusie

Het doel was om een ratingsysteem te ontwikkelen voor voetbalteams uit de Eredivisie, waarbij niet alleen gekeken wordt naar de drie verschillende wedstrijduitkomsten (winst, verlies, gelijkspel), maar ook naar de uitslag en de kwaliteiten van de tegenstander. Een ranglijst die gebaseerd is op een dergelijk systeem, zou een betere afspiegeling van de teamsterktes moeten opleveren dan een ranglijst gebaseerd op slechts de drie mogelijke wedstrijduitkomsten, zoals de Eredivisieranglijst dat is.

Wanneer we de ranglijsten met elkaar vergelijken, zijn er geen grote verschillen. Teams die hoog op onze ranglijst staan, zullen ook hoog op de Eredivsieranglijst eindigen en voor de lagere team geldt hetzelfde verhaal. Wat dat betreft kunnen we zeggen dat ons ratingsysteem een realistische weergave is van de kwaliteiten van de Eredivisieteams.

Wat we niet in het systeem hebben meegenomen is het zogenaamde 'thuisvoordeel' dat teams hebben wanneer ze een wedstrijd in hun eigen stadion spelen. Bij een volgende aanpassing zou dit mee kunnen worden genomen. De verwachting is dat de sterkte van de teams dan nog beter worden ingeschat. Een ander aspect wat niet is opgenomen in ons model, is dat teams tegen bepaalde tegenstanders extra goed of juist extra slecht presteren. Verder is de aanname dat de thuisscore en uitscore bij een wedstrijd onafhankelijk van elkaar zijn erg bepalend voor ons model, maar wellicht is deze aanname niet realistisch.

Aanpassingen aan het model zouden het 'voorspellende vermogen' van onze ranglijst kunnen verbeteren. Bij voetbal blijft het echter moeilijk om wedstijden te voorspellen voor een komend seizoen, omdat tussen de twee seizoen de samenstelling van de teams vaak erg veranderen. Ons model neemt wel mee dat de onzekerheid van de teamsterktes toenemen tijdens de periode tussen twee seizoen in, maar voegt weinig toe als het aankomt op de manier van wedstrijden voorspellen zoals wij het hebben getest.

Het grootste voordeel van ons ratingsysteem ten opzichte van de Eredivisieranglijst blijft dat we de teams gedurende een seizoen beter kunnen rangschikken op sterkte en niet alleen pas na afloop van het seizoen. In dat kader is ons oorspronkelijke doel bereikt.

Bibliografie

[1] Glickman, M.E. (1999). Parameter estimation in large dynamic paired comparison experiments. *Journal of the Royal Statistical Society.* Applied Statistics. Series C Volume 48, Issue 3, pp 377-394. Boston, USA

[2] Glickman, M.E. and van Dijk, D.A. (2007). Basic Bayesian Methods. *Methods in Molecular Biology*, Volume 404: Topics in Biostatistics, Issue 6, pp 319-338, Humana Press Inc. Totowa, New Jersey, USA

[3] Nelder, J.A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, Volume 7, Issue 4, pp 308-313, Oxford, UK

[4] Olver, F.W.J. (1968). Error bounds for the laplace approximation for definite integrals. *Journal of Approximation Theory.* Volume 1, Issue 3, pp 293-313.

[5] Corless, R.M., Gonnett, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. & Knuth, D.E. (1996).On the Lambert W function. *Advances in computational mathematics.* Volume 5, pp 329-359.

[6] Vuik, C., Vermolen, F.J., Gijzen, M.B.van & Vuik, M.J. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations.* Delft: Academic Press.

[7] http://www.eredivisiestats.nl/wedstrijden.php, geraadpleegd op 6 mei 2020.

[8] Grimmett, G. & Welsh, D. (2014). *Probability, an introduction.* Oxford, UK: Oxford University Press

Bijlage A

Afleiding ratingformules Glickman

Het volgende is gebaseerd op het artikel van Mark Glickman [1].

We benaderen de marginale aannemelijkheid $L(\theta|s)$ met een logistische verdelingsfunctie.
Er geldt:

$$L(\theta|s) \approx \int \frac{(10^{\frac{\theta-\theta_2}{400}})^s}{1+10^{\frac{\theta-\theta_2}{400}}} \varphi(\theta_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}\theta_2.$$

We laten de uitwerking zien voor $s = 0$.

We beschouwen $F(\theta_2) = \frac{1}{1+10^{(\theta-\theta_2)/400}}$ als de logistische verdelingsfunctie van een willekeurige stochastische variabele X.

De verwachting en variantie van een logistisch verdeelde stochast zijn bekend in de literatuur [8]. Hier geldt dat $\mathbb{E}(X) = \theta$ en $\eta^2 := \mathrm{Var}(X) = \frac{\pi^2}{3q^2}$, met $q = \frac{ln(10)}{400}$.

Nu benaderen we $F(\theta_2)$ met een normale verdelingsfunctie met dezelfde verwachting en variantie:

$$F(\theta_2) \approx \int_{-\infty}^{\theta_2} \varphi(y|\theta, \eta^2)\mathrm{d}y.$$

Hiermee kunnen we de marginale aannemelijkheid schrijven als:

$$\begin{aligned} L(\theta|s=0) &\approx \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\theta_2} \varphi(y|\theta, \eta^2)\varphi(\theta_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \varphi(\theta_2|\theta - x, \eta^2)\varphi(\theta_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta_2|\theta - x, \eta^2)\varphi(\theta_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

De tweede gelijkheid volgt uit substitutie van $x = y - \theta_2$. We schrijven de θ_2-integraal uit:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta_2|\theta - x, \eta^2)\varphi(\theta_2|\mu_2, \sigma_2^2)\mathrm{d}\theta_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\theta_2-(\theta-x))^2}{2\eta^2}}}{\eta\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{(\theta_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\eta\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\theta_2-(\theta-x))^2}{2\eta^2} - \frac{(\theta_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\eta\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(\theta_2-(\theta-x))^2}{\eta^2} + \frac{(\theta_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2})}\mathrm{d}\theta_2. \end{aligned}$$

De exponent van de e-macht kan als volgt geschreven worden:

$$-\frac{1}{2}(\frac{(\theta_2 - (\theta - x))^2}{\eta^2} + \frac{(\theta_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}) = -\frac{\eta^2+\sigma_2^2}{2\eta^2\sigma_2^2}(\theta_2 - \frac{\sigma_2^2(\theta-x)+\eta^2\mu_2}{\eta^2+\sigma_2^2})^2 - \frac{(x-\theta-\mu_2)^2}{2(\eta^2+\sigma_2^2)}.$$

Voor de marginale aannemelijkheid volgt nu dat:

$$L(\theta|s=0) \approx \frac{1}{2\pi\eta\sigma_2} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\theta-\mu_2)^2}{2(\eta^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2+\sigma_2^2}{2\eta^2\sigma_2^2}(\theta_2 - \frac{\sigma_2^2(\theta-x)+\eta^2\mu_2}{\eta^2+\sigma_2^2})^2} \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}x.$$

De θ_2-integraal is nu een Gaussische integraal van de vorm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Voor onze integraal geldt dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2+\sigma_2^2}{2\eta^2\sigma_2^2}(\theta_2 - \frac{\sigma_2^2(\theta-x)+\eta^2\mu_2}{\eta^2+\sigma_2^2})^2} \mathrm{d}\theta_2 = \eta\sigma_2\sqrt{\frac{2\pi}{\eta^2+\sigma_2^2}}.$$

Hieruit volgt, samen met de substitutie $t = x - \theta$, dat de marginale aannemelijkheid als een normale verdelingsfunctie kan worden geschreven:

$$L(\theta|s=0) \approx \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\sigma_2^2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\theta} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2(\eta^2+\sigma_2^2)}} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\theta} \varphi(t|\mu_2, \eta^2+\sigma_2^2)\mathrm{d}t.$$

Tot slot schrijven we de marginale aannemelijkheid als een logistische verdelingsfunctie met verwachting μ_2 en variantie $\eta^2 + \sigma_2^2$:

$$L(\theta|s=0) \approx \frac{1}{1+10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}},$$

waarbij

$$g(\sigma_2^2) = \frac{1}{\sqrt{1+3q^2\sigma_2^2/\pi^2}}.$$

Voor $s = 1$ krijgen we nu dat:

$$L(\theta|s=1) \approx 1 - \frac{1}{1+10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}} = \frac{10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}}{1+10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}}.$$

En daarom schrijven we nu voor $s = 0, \frac{1}{2}, 1$, de benaderde marginale aannemelijkheid van θ als:

$$L(\theta|s) = \frac{(10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400})^s}{1+10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}}.$$

De benaderde posterior verdeling van θ is nu gegeven door:

$$f(\theta|s) = L(\theta|s)\varphi(\theta|\mu,\sigma^2) = \frac{(10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400})^s}{1+10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}} \cdot \frac{e^{\frac{-(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Deze posterior verdeling wordt benaderd door een normale verdeling met verwachting $\widetilde{\mu}$ en $\widetilde{\sigma}^2$.

We stellen de eerste log-afgeleide van $L(\theta|s)$ gelijk aan nul om een uitdrukking voor de modus $\widehat{\theta}$ van de posterior verdeling te kunnen verkrijgen:

$$\ln f(\theta|s) = qg(\sigma_2^2)s(\theta-\mu_2) - \ln(1+10^{g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}) - \frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma\sqrt{2\pi}),$$

en:

$$j(\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\theta|s) = qg(\sigma_2^2)(s - \frac{1}{1+10^{-g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}}) - \frac{\theta-\mu}{\sigma^2}.$$

Voor de modus $\widehat{\theta}$ geldt dat $j(\widehat{\theta}) = 0$. We bepalen het nulpunt van de functie j door één iteratie van de Newton-Raphson-methode [6] uit te voeren met $\theta = \mu$ als startwaarde.

Allereerst de afgeleide van j:

$$j'(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(\theta|s) = -\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\sigma^2},$$

waarbij

$$\delta^2 = (q^2 g(\sigma_2^2)^2 E(s|\theta, \mu_2, \sigma_2^2)(1 - E(s|\theta, \mu_2, \sigma_2^2)))^{-1},$$

en

$$E(s|\theta, \mu_2, \sigma_2^2) = \frac{1}{1 + 10^{-g(\sigma_2^2)(\theta-\mu_2)/400}}.$$

De benaderde variantie van $f(\theta|s)$ is de negatieve omgekeerde van $j'(\mu)$:

$$\widetilde{\sigma}^2 = -\frac{1}{j'(\mu)} = \frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\sigma^2}}.$$

De benaderde verwachting van $f(\theta|s)$, oftewel de nieuwe rating van de speler, wordt nu:

$$\widetilde{\mu} = \mu - \frac{j(\mu)}{j'(\mu)} = \mu + \frac{q}{\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\sigma^2}} g(\sigma_2^2)(s - E(s|\mu, \mu_2, \sigma_2^2)).$$

Bijlage B

Log-afgeleides posterior verdelingenen en benaderingen

De marginale posterior verdeling van α is gegeven door:

$$f(\alpha|m) = \frac{e^{m\alpha - m\widetilde{\beta_2}(\alpha) - e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\widetilde{\beta_2}(\alpha)-\theta_2)^2}{2\delta_2^2})}}{m!\sqrt{2\pi\sigma^2\delta_2^2(e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2})}}.$$

De nieuwe aanvalsrating wordt berekend met de formule $\mu_{nieuw} = \mu - \frac{h_1(\mu)}{h_1'(\mu)}$, waarbij $h_1(\alpha)$ en $h_1'(\alpha)$ als volgt zijn afgeleid:

$$\ln f(\alpha|m) = m\alpha - m\widetilde{\beta_2}(\alpha) - e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\widetilde{\beta_2}(\alpha)-\theta_2)^2}{2\delta_2^2} - \ln(m!\sqrt{2\pi\sigma^2\delta_2^2}) - \frac{1}{2}\ln(e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2}),$$

$$h_1(\alpha) := \frac{\mathrm{d}\ln f(\alpha|m)}{\mathrm{d}\alpha} = (m - e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)}}{e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2}})(1 - \frac{\mathrm{d}\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)) - \frac{\alpha-\mu}{\sigma^2} - \frac{\widetilde{\beta_2}(\alpha)-\theta_2}{\delta_2^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha),$$

$$\begin{aligned} h_1'(\alpha) := \frac{\mathrm{d}^2\ln f(\alpha|m)}{\mathrm{d}\alpha^2} &= (-e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)}}{\delta_2^2(e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2})^2})\cdot(1 - \frac{\mathrm{d}\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha))^2 \\ &- (m - e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)}}{e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} + \frac{1}{\delta_2^2}})\cdot\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha) - \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta_2^2}\cdot(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha))^2 - \frac{\widetilde{\beta_2}(\alpha)-\theta_2}{\delta_2^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha), \end{aligned}$$

waarbij geldt dat:

$$\widetilde{\beta_2}(\alpha) = \theta_2 - m\delta_2^2 + W(\delta_2^2 e^{\alpha+m\delta_2^2-\theta_2}),$$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha) = (1 + \frac{e^{W(\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2})}}{\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2}})^{-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\beta_2}}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha) = \frac{e^{W(\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2})}}{\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\sigma_2^2}}\cdot(1 + \frac{e^{W(\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2})}}{\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2}})^{-2}\cdot\frac{e^{W(\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2})}}{\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2} + e^{W(\delta_2^2 e^{\alpha-\theta_2+m\delta_2^2})}}.$$

Hetzelfde doen we voor de marginale posterior verdeling van β:

$$f(\beta|n) = \frac{e^{n\widetilde{\alpha_2}(\beta)-n\beta-e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}-\frac{(\beta-\theta)^2}{2\delta^2}-\frac{(\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})}}{n!\sqrt{2\pi\delta^2\sigma_2^2(e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}+\frac{1}{\sigma_2^2})}}.$$

De formule voor de nieuwe verdedigingsrating is $\theta_{nieuw} = \theta - \frac{h_2(\theta)}{h_2'(\theta)}$, waarbij $h_2(\beta)$ en $h_2'(\beta)$ als volgt worden afgeleid:

$$\ln f(\beta|n) = n\widetilde{\alpha_2}(\beta)-n\beta-e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)}-\frac{(\beta-\theta)^2}{2\delta^2}-\frac{(\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}-\ln(n!\sqrt{2\pi\delta^2\sigma_2^2})-\frac{1}{2}\ln(e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}+\frac{1}{\sigma_2^2}),$$

$$h_2(\beta) := \frac{\mathrm{d}\ln f(\beta|n)}{\mathrm{d}\beta} = (n-e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}}{e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}+\frac{1}{\sigma_2^2}})(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta}(\beta)-1)-\frac{\beta-\theta}{\delta^2}-\frac{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\mu_2}{\sigma_2^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta}(\beta),$$

$$\begin{aligned}h_2'(\beta) := \frac{\mathrm{d}^2\ln f(\beta|n)}{\mathrm{d}\beta^2} &= (-e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}}{\sigma_2^2(e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)}+\frac{1}{\sigma_2^2})^2})\cdot(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta}(\beta)-1)^2\\ &+(n-e^{\widetilde{\beta_2}(\beta)-\beta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}}{e^{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\beta}+\frac{1}{\sigma_2^2}})\cdot\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta^2}(\beta)-\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\cdot(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta}(\beta))^2-\frac{\widetilde{\alpha_2}(\beta)-\theta_2}{\sigma_2^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta^2}(\beta)\end{aligned}$$

waarbij geldt dat:

$$\widetilde{\alpha_2}(\beta) = \mu_2+n\sigma_2^2-W(\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}),$$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta}(\beta) = (1+\frac{e^{W(\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2})}}{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}})^{-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\alpha_2}}{\mathrm{d}\beta^2}(\beta) = -\frac{e^{W(\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2})}}{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}}\cdot(1+\frac{e^{W(\sigma_2^2e^{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}})}}{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}})^{-2}\cdot\frac{e^{W(\sigma_2^2e^{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}})}}{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}+e^{W(\sigma_2^2e^{\sigma_2^2e^{-\beta+\mu_2+n\sigma_2^2}})}}.$$

We leiden nu de vereenvoudigde formule voor de nieuwe aanvalsrating af. De afleiding voor de verdedigingsrating gaat analoog.

Omdat $\delta_2^2 \to 0$, nemen we aan dat:

1. $e^{\alpha-\widetilde{\beta_2}(\alpha)} << \frac{1}{\delta_2^2}$,
2. $\widetilde{\beta_2}(\alpha) \approx \theta_2$.

Onder deze aannames wordt de uitdrukking voor de marginale posterior verdeling nu:

$$f(\alpha|m) = \frac{e^{m\alpha-m\theta_2-e^{\alpha-\theta_2}-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{m!\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Net als eerder leiden we de functies $h_1(\alpha)$ en $h_1'(\alpha)$ af:

$$\ln f(\alpha|m) = m\alpha - m\theta_2 - e^{\alpha-\theta_2} - \frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln(m!\sigma\sqrt{2\pi}),$$

$$h_1(\alpha) = m - e^{\alpha-\theta_2} - \frac{\alpha-\mu}{\sigma^2},$$

$$h_1'(\alpha) = -e^{\alpha-\theta_2} - \frac{1}{\sigma^2}.$$

De formule voor de nieuwe variantie wordt daarom:

$$\sigma^2_{nieuw} = -\frac{1}{h_1(\mu)} = \frac{1}{e^{\mu-\theta_2} + \frac{1}{\sigma^2}}.$$

De formule voor de nieuwe rating wordt:

$$\mu_{nieuw} = \mu - \frac{h_1(\mu)}{h_1'(\mu)} = \mu + \sigma_{nieuw} \cdot (m - e^{\mu-\theta_2}).$$

Op vergelijkbare wijze vinden we:

$$\theta_{nieuw} = \theta - \frac{h_2(\theta)}{h_2'(\theta)} = \theta + \delta^2_{nieuw} \cdot (e^{\mu_2-\theta} - n),$$

$$\delta^2_{nieuw} = -\frac{1}{h_2'(\theta)} = \frac{1}{e^{\mu_2-\theta} + \frac{1}{\delta^2}}.$$

Bijlage C

Nelder-Mead algoritme

Het volgende komt uit het artikel van Nelder & Mead [3].

We kiezen een simplex van drie punten P_0, P_1, P_2 in het (σ_0^2, ν^2)-vlak en bepalen hun bijbehorende functiewaarden y_0, y_1, y_2. Vervolgens kiezen we de index h zo dat $y_h =$max(y_0, y_1, y_2) en de index l zo dat $y_l =$min(y_0, y_1, y_2). Verder definieren we $\overline{P}$ als het zwaartepunt van de punten met index $i \neq h$.

In elke iteratie van het algoritme wordt P_h vervangen door een nieuw punt. Hierbij wordt gebruik gemaakt van drie bewerking: reflectie, contractie en expansie. De reflectie P^* van P_h wordt gegeven door $P^* = 2\overline{P} - P_h$. Als geldt dat $y_l < y^* < y_h$, dan wordt P_h vervangen P^* en gaan we verder met de nieuwe simplex. Als $y^* < y_l$ passen we expansie toe op P^* door $P^{**} = 2P^* - \overline{P}$. We vervangen P_h nu door P^{**} als $y^{**} < y_l$. Als dit niet het geval is vervangen we P_h door P^*.

In het geval dat na reflectie van P naar P^* blijkt dat $y^* > y_i$ voor alle $i \neq h$, dan kiezen we voor de nieuwe P_h uit de oude P_h of $P*$, afhankelijk welk punt de laagste functiewaarde heeft. Vervolgens passen we contractie toe door $P^{**} = \frac{1}{2}P_h + \frac{1}{2}\overline{P}$. Wanneer $y^{**} < y_h$, vervangen we P_h door P^{**}. Is dit niet het geval, dan worden alle $P_i' s$ vervangen door $\frac{P_i + P_l}{2}$.

Het algoritme stopt wanneer de standaardfout van de functiewaarden, gegeven door $\sqrt{\frac{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+(y_3-\overline{y})^2}{3}}$, kleiner is dan een voorafbepaalde waarde.

Bijlage D

Ranglijsten

Hieronder staan de ranglijsten van de seizoenen 2013-2014 t/m 2018-2019. Omdat de ranglijsten zijn getest op wedstrijden van het opvolgende seizoen, zijn alle gedegradeerde teams buiten beschouwing gelaten in deze ranglijsten.

D.1 2013/2014

Onze ranglijst:

1. Ajax
2. FC Twente
3. Feyenoord
4. PSV
5. AZ
6. Vitesse
7. SC Heerenveen
8. FC Groningen
9. FC Utrecht
10. SC Cambuur
11. PEC Zwolle
12. Heracles Almelo
13. NAC Breda
14. ADO Den Haag
15. Go Ahead Eagles

Eredivisieranglijst:

1. Ajax
2. Feyenoord
3. FC Twente
4. PSV
5. SC Heerenveen
6. Vitesse
7. FC Groningen
8. AZ
9. ADO Den Haag
10. FC Utrecht
11. PEC Zwolle
12. SC Cambuur
13. Go Ahead Eagles
14. Heracles Almelo
15. NAC Breda

D.2 2014/2015

Onze ranglijst:

1. Ajax
2. PSV
3. Feyenoord
4. FC Twente
5. Vitesse
6. AZ
7. SC Heerenveen
8. PEC Zwolle
9. FC Utrecht
10. FC Groningen
11. SC Cambuur
12. ADO Den Haag
13. Heracles Almelo
14. Willem II
15. Excelsior

Eredivisieranglijst:

1. PSV
2. Ajax
3. AZ
4. Feyenoord
5. Vitesse
6. PEC Zwolle
7. SC Heerenveen
8. FC Twente
9. FC Groningen
10. Willem II
11. FC Utrecht
12. SC Cambuur
13. ADO Den Haag
14. Heracles Almelo
15. Excelsior

D.3 2015/2016

Onze ranglijst:

1. Ajax
2. PSV
3. Feyenoord
4. Vitesse
5. AZ
6. FC Twente
7. FC Utrecht
8. PEC Zwolle
9. SC Heerenveen
10. FC Groningen
11. ADO Den Haag
12. Heracles Almelo
13. NEC
14. Roda JC
15. Willem II
16. Excelsior

Eredivisieranglijst:

1. PSV
2. Ajax
3. Feyenoord
4. AZ
5. FC Utrecht
6. Heracles Almelo
7. FC Groningen
8. PEC Zwolle
9. Vitesse
10. NEC
11. ADO Den Haag
12. FC Twente
13. SC Heerenveen
14. Roda JC
15. Excelsior
16. Willem II

D.4 2016/2017

Onze ranglijst:

1. Ajax
2. PSV
3. Feyenoord
4. Vitesse
5. FC Utrecht
6. AZ
7. FC Twente
8. FC Groningen
9. SC Heerenveen
10. Heracles Almelo
11. PEC Zwolle
12. ADO Den Haag
13. Willem II
14. Excelsior
15. Sparta Rotterdam
16. Roda JC

Eredivisieranglijst:

1. Feyenoord
2. Ajax
3. PSV
4. FC Utrecht
5. Vitesse
6. AZ
7. FC Twente
8. FC Groningen
9. SC Heerenveen
10. Heracles Almelo
11. ADO Den Haag
12. Excelsior
13. Willem II
14. PEC Zwolle
15. Sparta Rotterdam
16. Roda JC

D.5 2017/2018

Onze ranglijst:

1. Ajax
2. PSV
3. Feyenoord
4. AZ
5. Vitesse
6. FC Utrecht
7. FC Groningen
8. SC Heerenveen
9. Heracles Almelo
10. ADO Den Haag
11. PEC Zwolle
12. Willem II
13. NAC Breda
14. Excelsior
15. VVV-Venlo

Eredivisieranglijst:

1. PSV
2. Ajax
3. AZ
4. Feyenoord
5. FC Utrecht
6. Vitesse
7. ADO Den Haag
8. SC Heerenveen
9. PEC Zwolle
10. Heracles Almelo
11. Excelsior
12. FC Groningen
13. Willem II
14. NAC Breda
15. VVV-Venlo

D.6 2018/2019

Onze ranglijst:

1. Ajax
2. PSV
3. Feyenoord
4. AZ
5. Vitesse
6. FC Utrecht
7. FC Groningen
8. ADO Den Haag
9. SC Heerenveen
10. Heracles Almelo
11. PEC Zwolle
12. Willem II
13. VVV-Venlo
14. FC Emmen
15. Fortuna Sittard

Eredivisieranglijst:

1. Ajax
2. PSV
3. Feyenoord
4. AZ
5. Vitesse
6. FC Utrecht
7. Heracles Almelo
8. FC Groningen
9. ADO Den Haag
10. Willem II
11. SC Heerenveen
12. VVV-Venlo
13. PEC Zwolle
14. FC Emmen
15. Fortuna Sittard

Bijlage E

Matlab codes

E.1 Ratingen updaten

```
R = table2array(RANGLIJST); %ratingen en varianties opgeslagen in matrix
S = table2array(RANGLIJST1); %datum van eerste wedstrijd per team
T = table2array(wedstrijden2000); %wedstrijduitslagen eredivisie 2000-2020
U = table2array(wedstrijden1); %speeldata eredivisie 2000-2020

%geschatte parameters:
sigma0 = exp(-2.3710);
nu = exp(-10.9676);
a_v = 0.3503;

%opleggen van startratingen en startvarianties:
for j = 1:29
    R(1,j) = 100;
    R(2,j) = sigma0;
    R(3,j) = 100 + a_v;
    R(4,j) = sigma0;
end

for i = 1:5814 %aantal te observeren wedstrijden

    %ratingen:
    mu = R(1,T(i,1));
    theta = R(3,T(i,1));
    mu2 = R(1,T(i,2));
    theta2 = R(3,T(i,2));

    %varianties toe laten nemen:
    Sigma = R(2,T(i,1)) + nu*daysdif(S(T(i,1)),U(i));
    Delta = R(4,T(i,1)) + nu*daysdif(S(T(i,1)),U(i));
    Sigma2 = R(2,T(i,2)) + nu*daysdif(S(T(i,2)),U(i));
    Delta2 = R(4,T(i,2)) + nu*daysdif(S(T(i,2)),U(i));

    %wedstrijduitslag
    m = T(i,3);
    n = T(i,4);

    %begrenzen van de varianties:
    sigma = min(Sigma,sigma0);
    delta = min(Delta,sigma0);
    sigma2 = min(Sigma2,sigma0);
```

```
    delta2 = min(Delta2,sigma0);

    %berekenen nieuwe ratingen en varianties:
    mu_new = mu - G(mu,mu,sigma,theta2,delta2,m)/GG(mu,sigma,theta2,delta2,m);
    sigma_new = -1/GG(mu,sigma,theta2,delta2,m);
    theta_new = theta - H(theta,theta,delta,mu2,sigma2,n)
                    /HH(theta,delta,mu2,sigma2,n);
    delta_new = -1/HH(theta,delta,mu2,sigma2,n);
    mu2_new = mu2 - G(mu2,mu2,sigma2,theta,delta,n)/GG(mu2,sigma2,theta,delta,n);
    sigma2_new = -1/GG(mu2,sigma2,theta,delta,n);
    theta2_new = theta2 - H(theta2,theta2,delta2,mu,sigma,m)
                      /HH(theta2,delta2,mu,sigma,m);
    delta2_new = -1/HH(theta2,delta2,mu,sigma,m);

    %opslaan van de nieuwe ratingen en varianties:
    R(1,T(i,1)) = mu_new;
    R(2,T(i,1)) = sigma_new;
    R(3,T(i,1)) = theta_new;
    R(4,T(i,1)) = delta_new;
    R(1,T(i,2)) = mu2_new;
    R(2,T(i,2)) = sigma2_new;
    R(3,T(i,2)) = theta2_new;
    R(4,T(i,2)) = delta2_new;

    %updaten meest recente speeldatum:
    S(T(i,1)) = U(i);
    S(T(i,2)) = U(i);
end

%som van aanvals- en verdedigingsrating:
B = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
for i = 1:29
    B(i) = R(1,i) + R(3,i);
end

C = {'ADO Den Haag','Ajax','AZ','FC Emmen','FC Groningen','FC Twente','FC Utrecht',
'Feyenoord','Fortuna Sittard','SC Heerenveen','Heracles Almelo','PEC Zwolle','PSV',
'RKC Waalwijk','Sparta Rotterdam','Vitesse','VVV-Venlo','Willem II','De Graafschap',
'NEC','NAC Breda','Excelsior','Roda JC','Go Ahead Eagles','SC Cambuur',
'FC Dordrecht','RBC Roosendaal','FC Volendam','FC Den Bosch'};
[Rating,index] = sortrows(B,'descend');

E = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
for i = 1:29
    E(i) = C(index(i));
end

Ranglijst = table(Rating,'Rownames',E)


%eerste afgeleide van ln{f(alpha|m)}:
function g = G(x,a,b,c,d,e)
    p = c-d*e+lambertw(d*exp(x+d*e-c));
    pp = (1+exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c)))^(-1);
    g = (e - exp(x-p) - 0.5*exp(x-p)/(exp(x-p)+1/d))*(1-pp) - (x-a)/b - pp*(p-c)/d;
end

%tweede afgeleide van ln{f(alpha|m)}:
```

```
function gg = GG(x,b,c,d,e)
    p = c-d*e+lambertw(d*exp(x+d*e-c));
    pp = (1+exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c)))^(-1);
    ppp = exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c))*pp^2
    *exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c)+exp(lambertw(d*exp(d+e*d-c))));
    gg = (exp(x-p)*(pp-1) + 0.5*(pp-1)*exp(x-p)/d/(exp(x-p)+1/d)^2)*(1-pp)
         - (e - exp(x-p) - 0.5*exp(x-p)/(exp(x-p)+1/d))*ppp
         - 1/b - (pp^2/d + ppp*(p-c)/d);
end

%eerste afgeleide van ln{f(beta|n)}:
function h = H(x,a,b,c,d,e)
    q = c+d*e-lambertw(d*exp(d*e-x+c));
    qq = (1+exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))/(d*exp(d*e-x+c)))^(-1);
    h = (e - exp(q-x) - 0.5*exp(q-x)/(exp(q-x)+1/d))*(qq-1)-(x-a)/b-qq*(q-c)/d;
end

%tweede afgeleide van ln{f(beta|n)}:
function hh = HH(x,b,c,d,e)
    q = c+d*e-lambertw(d*exp(d*e-x+c));
    qq = (1+exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))/(d*exp(d*e-x+c)))^(-1);
    qqq = -exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))*qq^2*exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))
    /(d*exp(d*e-x+c)+exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c))));
    hh = (-exp(q-x)*(qq-1) - 0.5*exp(q-x)*(qq-1)/d/(exp(q-x)+1/d)^2)*(qq-1)
+ (e-exp(q-x)-0.5*exp(q-x)/(exp(q-x)+1/d))*qqq
         -1/b -(qqq*(q-c)/d + qq^2/d);
end
```

E.2 Parameters schatten

```
R = table2array(RANGLIJST); %ratingen en varianties opgeslagen in matrix
S = table2array(RANGLIJST1); %datum van eerste wedstrijd per team
T = table2array(wedstrijden2000); %wedstrijduitslagen eredivisie 2000-2020
U = table2array(wedstrijden1); %speeldata eredivisie 2000-2020

%beginsimplex voor de Nelder-Mead methode:
V = [-2.4,-2.3,-2.2;-11,-10.8,-10.9;totaldisc(-2.4,-11,R,S,T,U),
    totaldisc(-2.3,-10.8,R,S,T,U),totaldisc(-2.2,-10.9,R,S,T,U)];

%stopwaarde:
stop = 10^(-5);

%Nelder-Mead algoritme:
while sqrt(((V(3,1)-(V(3,1)+V(3,2)+V(3,3))/3)^2+(V(3,2)
      -(V(3,1)+V(3,2)+V(3,3))/3)^2+(V(3,3)
      -(V(3,1)+V(3,2)+V(3,3))/3)^2)/3)>stop
   W1 = [V(3,1),V(3,2),V(3,3)];
   W2 = sort(W1);
   for i = 1:3
       if V(3,i) == W2(3)
           for j = 1:3
               if V(3,j) == W2(1)
                   a1 = V(1,1) + V(1,2) + V(1,3) - 2*V(1,i);
                   b1 = V(2,1) + V(2,2) + V(2,3) - 2*V(2,i);
                   c1 = totaldisc(a1,b1,R,S,T,U);
                   if c1 < W2(1)
                       a2 = 2*a1 - 0.5*(V(1,1) + V(1,2) + V(1,3) - V(1,i));
                       b2 = 2*b1 - 0.5*(V(2,1) + V(2,2) + V(2,3) - V(2,i));
```

```
                    c2 = totaldisc(a2,b2,R,S,T,U);
                    if c2 < W2(1)
                        V(1,i) = a2;
                        V(2,i) = b2;
                        V(3,i) = c2;
                    else
                        V(1,i) = a1;
                        V(2,i) = b1;
                        V(3,i) = c1;
                    end
                elseif c1 > W2(2)
                    if c1 < W2(3)
                        V(1,i) = a1;
                        V(2,i) = b1;
                        a2 = 0.5*V(1,i) + 0.25*(V(1,1) + V(1,2) + V(1,3)
                            - V(1,i));
                        b2 = 0.5*V(2,i) + 0.25*(V(2,1) + V(2,2) + V(2,3)
                            - V(2,i));
                        c2 = totaldisc(a2,b2,R,S,T,U);
                    else
                        a2 = 0.5*V(1,i) + 0.25*(V(1,1) + V(1,2) + V(1,3)
                            - V(1,i));
                        b2 = 0.5*V(2,i) + 0.25*(V(2,1) + V(2,2) + V(2,3)
                            - V(2,i));
                        c2 = totaldisc(a2,b2,R,S,T,U);
                    end
                    if c2 > W2(3)
                        V(1,1) = 0.5*(V(1,1) + V(1,j));
                        V(1,2) = 0.5*(V(1,2) + V(1,j));
                        V(1,3) = 0.5*(V(1,3) + V(1,j));
                        V(2,1) = 0.5*(V(2,1) + V(2,j));
                        V(2,2) = 0.5*(V(2,2) + V(2,j));
                        V(2,3) = 0.5*(V(2,3) + V(2,j));
                        V(3,1) = totaldisc(V(1,1),V(2,1),R,S,T,U);
                        V(3,2) = totaldisc(V(1,2),V(2,2),R,S,T,U);
                        V(3,3) = totaldisc(V(1,3),V(2,3),R,S,T,U);
                    else
                        V(1,i) = a2;
                        V(2,i) = b2;
                        V(3,i) = c2;
                    end
                else
                    V(1,i) = a1;
                    V(2,i) = b1;
                    V(3,i) = c1;
                end
            end
        end
    end
  end
  V
  continue
end

PARAMETERS = V

%functie die de totale discrepentie van berekent:
function z = totaldisc(x,y,R,S,T,U)
```

```
%te schatten parameters:
sigma0 = exp(x);
nu = exp(y);

%verschil in verdedigings- en aanvalsrating:
a_v = 0.3503;

%startratingen en startvarianties:
for i = 1:29
    R(1,i) = 100;
    R(2,i) = sigma0;
    R(3,i) = 100 + a_v;
    R(4,i) = sigma0;
end

%update teamsterktes eerste vier jaar:
for i = 1:1224
    mu = R(1,T(i,1));
    theta = R(3,T(i,1));
    mu2 = R(1,T(i,2));
    theta2 = R(3,T(i,2));

    Sigma = R(2,T(i,1)) + nu*daysdif(S(T(i,1)),U(i));
    Delta = R(4,T(i,1)) + nu*daysdif(S(T(i,1)),U(i));
    Sigma2 = R(2,T(i,2)) + nu*daysdif(S(T(i,2)),U(i));
    Delta2 = R(4,T(i,2)) + nu*daysdif(S(T(i,2)),U(i));

    m = T(i,3);
    n = T(i,4);

    sigma = min(Sigma,sigma0);
    delta = min(Delta,sigma0);
    sigma2 = min(Sigma2,sigma0);
    delta2 = min(Delta2,sigma0);

    mu_new = mu - G(mu,mu,sigma,theta2,delta2,m)/GG(mu,sigma,theta2,delta2,m);
    sigma_new = -1/GG(mu,sigma,theta2,delta2,m);
    theta_new = theta - H(theta,theta,delta,mu2,sigma2,n)/HH(theta,delta,
                                                              mu2,sigma2,n);
    delta_new = -1/HH(theta,delta,mu2,sigma2,n);
    mu2_new = mu2 - G(mu2,mu2,sigma2,theta,delta,n)/GG(mu2,sigma2,theta,delta,n);
    sigma2_new = -1/GG(mu2,sigma2,theta,delta,n);
    theta2_new = theta2 - H(theta2,theta2,delta2,mu,sigma,m)/HH(theta2,
                                                             delta2,mu,sigma,m);
    delta2_new = -1/HH(theta2,delta2,mu,sigma,m);

    R(1,T(i,1)) = mu_new;
    R(2,T(i,1)) = sigma_new;
    R(3,T(i,1)) = theta_new;
    R(4,T(i,1)) = delta_new;
    R(1,T(i,2)) = mu2_new;
    R(2,T(i,2)) = sigma2_new;
    R(3,T(i,2)) = theta2_new;
    R(4,T(i,2)) = delta2_new;

    S(T(i,1)) = U(i);
    S(T(i,2)) = U(i);
end
```

```
    %uitrekenen totale discrepantie volgende tien jaar:
    d = 0;
    for i = 1225:4284
        mu = R(1,T(i,1));
        theta = R(3,T(i,1));
        mu2 = R(1,T(i,2));
        theta2 = R(3,T(i,2));

        Sigma = R(2,T(i,1)) + nu*daysdif(S(T(i,1)),U(i));
        Delta = R(4,T(i,1)) + nu*daysdif(S(T(i,1)),U(i));
        Sigma2 = R(2,T(i,2)) + nu*daysdif(S(T(i,2)),U(i));
        Delta2 = R(4,T(i,2)) + nu*daysdif(S(T(i,2)),U(i));

        m = T(i,3);
        n = T(i,4);

        sigma = min(Sigma,sigma0);
        delta = min(Delta,sigma0);
        sigma2 = min(Sigma2,sigma0);
        delta2 = min(Delta2,sigma0);

        %discrepantie-formule:
        Q = -m*mu + m*theta2 + exp(mu-theta2) + log(factorial(m)) - n*mu2 +
            n*theta + exp(mu2-theta) + log(factorial(n));

        %discrepanties sommeren:
        d = d + Q;

        mu_new = mu - G(mu,mu,sigma,theta2,delta2,m)/GG(mu,sigma,theta2,delta2,m);
        sigma_new = -1/GG(mu,sigma,theta2,delta2,m);
        theta_new = theta - H(theta,theta,delta,mu2,sigma2,n)/HH(theta,delta,
                                                                mu2,sigma2,n);
        delta_new = -1/HH(theta,delta,mu2,sigma2,n);
        mu2_new = mu2 - G(mu2,mu2,sigma2,theta,delta,n)/GG(mu2,sigma2,theta,delta,n);
        sigma2_new = -1/GG(mu2,sigma2,theta,delta,n);
        theta2_new = theta2 - H(theta2,theta2,delta2,mu,sigma,m)/HH(theta2,
                                                            delta2,mu,sigma,m);
        delta2_new = -1/HH(theta2,delta2,mu,sigma,m);

        R(1,T(i,1)) = mu_new;
        R(2,T(i,1)) = sigma_new;
        R(3,T(i,1)) = theta_new;
        R(4,T(i,1)) = delta_new;
        R(1,T(i,2)) = mu2_new;
        R(2,T(i,2)) = sigma2_new;
        R(3,T(i,2)) = theta2_new;
        R(4,T(i,2)) = delta2_new;

        S(T(i,1)) = U(i);
        S(T(i,2)) = U(i);
    end
    z = d;
end

%eerste afgeleide van log{f(alpha|m)}:
function g = G(x,a,b,c,d,e)
    p = c-d*e+lambertw(d*exp(x+d*e-c));
```

```
    pp = (1+exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c)))^(-1);
    g = (e - exp(x-p) - 0.5*exp(x-p)/(exp(x-p)+1/d))*(1-pp) - (x-a)/b - pp*(p-c)/d;
end

%tweede afgeleide van log{f(alpha|m)}:
function gg = GG(x,b,c,d,e)
    p = c-d*e+lambertw(d*exp(x+d*e-c));
    pp = (1+exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c)))^(-1);
    ppp = exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c))*pp^2
    *exp(lambertw(d*exp(x+e*d-c)))/(d*exp(x+e*d-c)+exp(lambertw(d*exp(d+e*d-c))));
    gg = (exp(x-p)*(pp-1) + 0.5*(pp-1)*exp(x-p)/d/(exp(x-p)+1/d)^2)*(1-pp)
         - (e - exp(x-p) - 0.5*exp(x-p)/(exp(x-p)+1/d))*ppp
         - 1/b - (pp^2/d + ppp*(p-c)/d);
end

%eerste afgeleide van log{f(beta|n)}:
function h = H(x,a,b,c,d,e)
    q = c+d*e-lambertw(d*exp(d*e-x+c));
    qq = (1+exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))/(d*exp(d*e-x+c)))^(-1);
    h = (e - exp(q-x) - 0.5*exp(q-x)/(exp(q-x)+1/d))*(qq-1)-(x-a)/b-qq*(q-c)/d;
end

%tweede afgeleide van log{f(beta|n)}:
function hh = HH(x,b,c,d,e)
    q = c+d*e-lambertw(d*exp(d*e-x+c));
    qq = (1+exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))/(d*exp(d*e-x+c)))^(-1);
    qqq = -exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))*qq^2*exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c)))
    /(d*exp(d*e-x+c)+exp(lambertw(d*exp(d*e-x+c))));
    hh = (-exp(q-x)*(qq-1) - 0.5*exp(q-x)*(qq-1)/d/(exp(q-x)+1/d)^2)*(qq-1)
+ (e-exp(q-x)-0.5*exp(q-x)/(exp(q-x)+1/d))*qqq
         -1/b -(qqq*(q-c)/d + qq^2/d);
end
```

E.3 Ranglijsten testen

```
T = table2array(wedstrijden2000);

E1314 = [10;18;11;0;12;16;9;17;1;14;5;8;15;1;1;13;1;1;1;1;4;1;1;6;7;1;1;1;1];
L1314 = [13;29;25;20;22;28;21;27;2;23;16;17;26;11;9;24;8;4;5;12;15;6;14;10;
18;19;1;7;3];

E1415 = [6;17;16;1;11;9;8;15;1;12;5;13;18;1;1;14;1;10;1;1;1;4;1;1;7;1;1;1;1];
L1415 = [17;29;24;19;20;26;21;27;3;23;16;22;28;13;8;25;7;12;5;14;11;10;15;9;
18;1;2;6;4];

E1516 = [8;17;15;1;12;7;14;16;1;6;13;11;18;1;1;10;1;3;1;9;1;4;5;1;1;1;1;1;1];
L1516 = [19;29;25;18;20;24;23;27;3;21;17;22;28;15;7;26;6;12;8;16;13;11;14;10;
9;1;2;5;4];

E1617 = [8;17;13;1;11;12;15;18;1;10;9;5;16;1;4;14;1;6;1;1;1;7;2;1;1;1;1;1;1];
L1617 = [17;29;24;19;22;23;25;27;3;21;20;18;28;16;11;26;7;14;8;15;12;13;10;
5;9;1;2;6;4];

E1718 = [12;17;16;1;7;1;14;15;1;11;9;10;18;1;1;13;4;6;1;1;5;8;1;1;1;1;1;1;1];
L1718 = [19;29;26;20;23;18;24;27;3;22;21;17;28;13;7;25;10;16;8;12;15;14;11;
5;9;1;2;6;4];

E1819 = [10;18;15;5;11;1;13;16;4;8;12;6;17;1;1;14;7;9;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];
L1819 = [22;29;26;11;23;19;24;27;9;21;20;18;28;16;8;25;15;17;6;14;7;13;12;
4;10;1;2;5;3];

t = 0;
M1 = zeros(1,306);
M2 = zeros(1,306);


RL1 = E1819; %KNVB-ranglijst
RL2 = L1819; %eigen ranglijst

y1 = 5815; %eerste wedstrijd volgende seizoen
y2 = 6045; %laatste wedstrijd volgende seizoen

for i = y1:y2
    j = i - y1 + 1;
    if RL1(T(i,1)) == 1
        t = t + 0;
    else
        if RL1(T(i,2)) == 1
            t = t + 0;
        else
            if T(i,3) > T(i,4)
                t = t + 1;
                if RL1(T(i,1)) > RL1(T(i,2))
                    M1(j) = 1;
                else
                    M1(j) = 0;
                end
                if RL2(T(i,1)) > RL2(T(i,2))
                    M2(j) = 1;
                else
                    M2(j) = 0;
                end
```

```
            elseif T(i,3) < T(i,4)
                t = t + 1;
                if RL1(T(i,1)) < RL1(T(i,2))
                    M1(j) = 1;
                else
                    M1(j) = 0;
                end
                if RL2(T(i,1)) < RL2(T(i,2))
                    M2(j) = 1;
                else
                    M2(j) = 0;
                end
            else
                t = t + 0;
            end
        end
    end
end

N = 0;
X = 0;

for i = 1:306
    if M1(i) == M2(i)
        N = N + 0
    else
        N = N + 1;
        X = X + M2(i);
    end
end

X
N
```