Mitteilungen
der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau
Berlin
HEFT 28 1937

Untersuchungen über die Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes

Von
Dr.-Ing. H. Amtsberg
Berlin

BERLIN 1937
Verlag: Deutsche Verlagswerke Strauß, Vetter & Co.

Sonderdruck aus dem Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft
1937, Band 38

Untersuchungen über die Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes

Von **H. Amtsberg**, Berlin.

Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Berlin genehmigte Dissertation.

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung:
Anlaß und Ziel der Untersuchungen.

II. Rechnerische Ermittlung der Strömung um einen Drehkörper.
A. In idealer Flüssigkeit.
1. Ermittlung der Körperumrisse aus der Überlagerung einer Quell- und Transportströmung.
a) Theoretische Grundlagen.
b) Auswertung.
2. Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs der Oberfläche des Drehkörpers.
a) Theoretische Grundlagen.
b) Auswertung.
B. In zähigkeitsbehafteter Flüssigkeit.
1. Bezeichnungen der Widerstandsanteile.
2. Theoretische Grundlagen für die Berechnung des Reibungswiderstandes eines Drehkörpers nach Millikan.
a) Für laminare Grenzschichtströmung.
b) Für turbulente Grenzschichtströmung.
c) Für turbulente Grenzschichtströmung mit laminarem Anlauf.
3. Durchführung der Rechnung und Rechnungsergebnisse für die Beiwerte des Reibungswiderstandes und die Grenzschichtdicken.

III. Modellversuche.
A. Übersicht über die Modelle.
B. Beschreibung des Meßverfahrens.
1. Messung des Gesamtwiderstandes.
2. Messung der Druckverteilung.
C. Versuchsauswertung.
1. Gesamtwiderstand.
2. Druckverlauf und Druckwiderstand.
D. Erörterung der Versuchsergebnisse.

IV. Vergleich der Ergebnisse von Rechnung und Versuch.

V. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen.

VI. Schrifttum.

I. Einleitung: Anlaß und Ziel der Untersuchungen.

Die heute noch immer bestehende Unklarheit über die größenmäßige Zusammensetzung des Gesamtwiderstandes, den ein Verdrängungskörper bei der gleichförmigen Translationsbewegung in einer Flüssigkeit erfährt, ließ nachstehende Untersuchungen wünschenswert erscheinen. Vor allem ist die Abhängigkeit der Widerstandsanteile, unter denen wir Wellen-, Reibungs-

und zähigkeitsbedingten Druckwiderstand (s. später) verstehen wollen, von der Körperform sowie ihre gegenseitige Beeinflussung wenig geklärt. Wie wichtig die Klärung der Fragen für das Modellversuchswesen ist, erhellt aus der bekannten Tatsache, daß reibungs- und schwerebedingte Widerstandsanteile, die bei Schiffsmodellversuchen stets in engster Verknüpfung auftreten, nach verschiedenen Gesetzen auf die Großausführung zu übertragen sind. Nicht aber allein die Frage der Übertragbarkeit von Modellversuchsergebnissen auf die naturgroßen Verhältnisse ist von Belang, sondern gerade die Bestrebungen zur Lösung des Minimalproblems des Schiffswiderstandes verlangen eine Klärung der Abhängigkeiten der Widerstandsanteile von der Schiffsform. In- und ausländische Forscher haben in den letzten Jahren des öfteren auf die Bedeutung der Kenntnis der richtigen Zusammensetzung des Gesamtwiderstandes hingewiesen.

Über den Wellenwiderstand, der den Hauptanteil des formbedingten Widerstandes darstellt, sind nach den grundlegenden Arbeiten von Michell und Havelock insbesondere von Wigley, Hogner und Weinblum eingehende theoretische und experimentelle Untersuchungen angestellt worden. Die vorliegende Arbeit befaßt sich demgemäß lediglich mit dem Einfluß der Körperform auf die beiden restlichen Widerstandsanteile, den Reibungs- und Druckwiderstand. Daß diese Widerstände in starkem Maße formbedingt sind, darüber besteht heute kein Zweifel mehr. Die Gründe für das Abweichen des Reibungswiderstandes eines Körpers von dem gleich langer Rechteckplatten gleicher Oberfläche sind von Horn [10][1]), [11], Graff [5], Laute [19], Eisner [1a] u. a. klargelegt worden. Der Einfluß der Übergeschwindigkeiten auf den Schiffswiderstand an sich wurde von Kempf [17] untersucht. Ansätze zur Berechnung des Reibungswiderstandes von Körpern in dreidimensionaler Strömung wurden von Müller [24] und Millikan [22] aufgestellt. In neuerer Zeit vervollkommnete Moore [23] die Gleichungen von Millikan, indem er die letzten Erkenntnisse der Grenzschichttheorie berücksichtigte. Es hat auch nicht an Versuchen gefehlt, die Rückführung des Reibungswiderstandes eines Verdrängungskörpers auf den ebener Platten zu umgehen; es sind zu nennen: Telfer [33], Laute [19], Schlichting [31].

Die ersten Untersuchungen an einem praktischen Schiffsmodell zur zahlenmäßigen Erfassung des Formeinflusses auf den Reibungs- und Ablösungs-(Druck)widerstand wurden 1933 von Graff [5] in der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin (im folgenden VWS genannt), durchgeführt. Die bisherigen Ergebnisse sollten auf Veranlassung von Herrn Professor Dr. Ing. Horn durch systematische Versuchsreihen vom Verfasser vervollständigt werden. Dabei standen zwei Fragen im Vordergrund der Untersuchungen:

1. Welchen Einfluß übt die Verschiedenheit des Schärfegrades

$$\varphi = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\text{Völligkeitsgrad des Deplacements}}{\text{Völligkeitsgrad des Hauptspantes}}$$

auf den Reibungswiderstand aus?

2. Welche Abhängigkeit des Reibungswiderstandes besteht von den Verhältnissen Länge zu Breite $= L : B$ und Breite zu Tiefgang $= B : T$ des Schiffes bei konstantem φ?

Um die Verhältnisse möglichst einfach zu gestalten und um außerdem das Problem einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, werden bei 1. achsensymmetrische Drehkörper untersucht. Der Wellenwiderstand wird ausgeschaltet, indem die Körper tief unter der Wasseroberfläche getaucht untersucht werden. Die Berechnung des Reibungswider-

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit hin.

standes soll nach der Theorie von Millikan vorgenommen und ihre Brauchbarkeit durch entsprechende Modellversuche geprüft werden. Die Anwendung der Millikanschen Rechnung setzt die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung längs der Oberfläche eines Drehkörpers voraus. Ein großer Teil der vorliegenden Arbeit wird sich mit der Lösung der Aufgabe befassen, diese Geschwindigkeitsverteilung auf Grund eines analytischen Verfahrens zu berechnen, das besonders für spätere Untersuchungen gegenüber den bisher bekannten Verfahren (v. Kármán [15], Föttinger [2], [3], Weinig [38], Fuhrmann [4], Lerbs [20] u. a. m.) eine wesentliche Erleichterung bedeutet.

Während bei 1. die Abhängigkeit des Reibungswiderstandes von dem Schärfegrad an Drehkörpern im idealisierten Fall untersucht wird, werden unter 2. die Widerstandsänderungen infolge des Überganges zu Schiffsformen mit verschiedenem $B:T$ an tiefgetauchten Doppelmodellen verfolgt. Bei 1. werden Drehkörper mit $\varphi \approx 0{,}55$ und 0,8, bei 2. Schiffsdoppelmodelle untersucht, die durch Verzerrung einer Ausgangsform („Seattle"-Modell von Graff) mit $B:T = 2{,}4$ zu den Verhältnissen $B:T = 3{,}3$ und 4,5 erhalten werden.

II. Rechnerische Ermittlung der Strömung um einen Drehkörper.

A. In idealer Flüssigkeit.

1. Ermittlung der Körperumrisse aus der Überlagerung einer Quell- und Transportströmung.

a) Theoretische Grundlagen.

Das aus der Potentialtheorie bekannte Quell-Senkenverfahren von Rankine [30], das später von Taylor [32] weiter entwickelt wurde, liefert die Möglichkeit, sowohl die ebene Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit um symmetrische, tiefgetauchte Körperformen, als auch die räumliche Strömung um rotationssymmetrische Körper mit großer Annäherung zu ermitteln. Das Verfahren besteht darin, eine Anzahl von Quellen und Senken in einer translatorischen Strömung so anzuordnen, daß die Überlagerung der Quell-Senkenströmung mit der Transportströmung eine Grenzstromfläche gerade von der Form ergibt, die der gewünschten Körperumrandung entspricht. In dem einfachsten Falle erhält man bei der Anordnung einer einzelnen punktförmigen Quelle und Senke (in bestimmtem Abstand auf einer in Strömungsrichtung gelegenen Achse) in einer Transportströmung eine geschlossene Grenzstromfläche von der Gestalt des bekannten Rankineschen Ovoides. Bei der Wahl von Quell- und Senkenstrecken (d. s. Quellen und Senken, deren Ergiebigkeit längs einer Strecke stetig fortlaufend verteilt ist) kann man die verschiedensten Formen der umströmten Umrisse erzeugen. Die Gesamtergiebigkeit der Quellen und Senken muß Null sein, wenn man einen geschlossenen Körper erhalten will.

In einem Punkt P im Raum mit dem Abstand r von einem räumlichen Quellpunkt ist die radial gerichtete Strömungsgeschwindigkeit: $v_r = \frac{Q}{4\,r^2\,\pi}$ und die Stromfunktion: $\psi_Q = \frac{Q}{2}\,(1 - \cos\varphi)$, worin Q die Ergiebigkeit $\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}}\right]$ des Quellpunktes und φ den Winkel bedeuten, den der Radiusvektor r mit der positiven x-Achse einschließt.

In Bild 1 bedeute die Strecke von der Länge L eine Quellsenkenstrecke. Der ausgezogene Kurvenzug gebe den Verlauf der Quell-Senkenstärken $\mu\,(x)$ an, wobei die Stärke festgesetzt ist als die in der Zeiteinheit und Einheit der Quell- oder Senkenstrecke aus- oder eintretende Flüssigkeitsmenge. Die Ergiebigkeit eines Quellstreckenelementes dx an der Stelle x ist: $dq = \mu \cdot dx$. Für einen Teil des Quellsenkensystems von der Länge z. B.

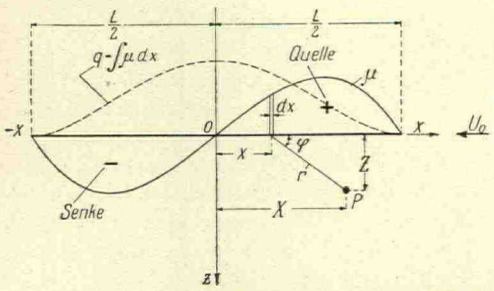


Bild 1. Darstellung der Quell-Senken- und Doppelquellverteilung.

$\left(\frac{L}{2}-x\right)$ ist: $q=\int_{x=x}^{x=\frac{L}{2}}\mu\cdot dx$; die Voraussetzung für einen geschlossenen Körper ist mit $q=\int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=+\frac{L}{2}}\mu\cdot dx=0$ erfüllt. Entsprechend der Gleichung für einen Quellpunkt gilt hier für ein Quellstreckenelement dx mit der Ergiebigkeit dq: $d\,\Psi_Q=\frac{dq}{2}(1-\cos\varphi)$.

Für das ganze Quellsenkensystem ist zu integrieren, und man erhält die Stromfunktion der Quell-Senkenströmung in einem Punkt P:

$$\Psi_Q=-\frac{1}{2}\cdot\int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=+\frac{L}{2}}\cos\varphi\cdot\mu\cdot dx \tag{1}$$

Zur Vereinfachung der Auswertung (s. später) empfiehlt es sich, (1) partiell zu integrieren. Die Bestimmungsgrößen des Punktes P, die bei der Integration über die veränderliche Abszisse x konstant zu halten sind, werden im folgenden mit großen Buchstaben (z. B. X, Z), die bei der Integration mit x veränderlichen Größen mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Mit $\cos\varphi=\frac{X-x}{\sqrt{(X-x)^2+Z^2}}$ ergibt sich:

$$\Psi_Q=-\frac{1}{2}\cdot\int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=+\frac{L}{2}}q\cdot\frac{1}{r^3}\,dx, \tag{2}$$

wobei $r=\sqrt{(X-x)^2+Z^2}$ ist. $q\,(x)$ kann auch, wie sich leicht nachweisen läßt[2]), als Doppelquellbelegung gedeutet werden; mit diesem Begriff wird

---

[2]) Zu beweisen ist: $\int\mu\,(x)\,dx=q\,(x)$, wobei $q\,(x)=$ Doppelquellbelegung.

Es gilt: $\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\mu\,dx=0$. Das Geschwindigkeitspotential für die Doppelquellbelegung lautet [29]:

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\cdot\int q\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\cos\varphi\,dx. \tag{a}$$

Für die Quell-Senkenbelegung gilt:

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\cdot\int\mu\cdot\frac{1}{r}\,dx. \tag{b}$$

Es ist zu beweisen, daß mit $\mu=\frac{dq}{dx}$ in (b) Gleichung (a) erhalten wird. Die partielle Integration liefert:

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\mu\cdot\frac{1}{r}\,dx=\frac{1}{4\pi}\cdot\left|\frac{1}{r}\cdot\int\mu\,dx\right|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}+\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int\mu\,dx\cdot\frac{dr}{r^2}.$$

Das erste Glied ist Null, wenn die Kurve der Ergiebigkeit $q\,(x)$ — wie angenommen — für $x=+\frac{L}{2}$ und $-\frac{L}{2}$ Null wird; also $q\left(\frac{L}{2}\right)=q\left(-\frac{L}{2}\right)=0$, und daher

aus weiter unten (s. S. 11) zu erläuternden Gründen in Zukunft vorwiegend gearbeitet werden.

Die Stromfunktion der aus dem Unendlichen kommenden Transportströmung ist mit U_o = Strömungsgeschwindigkeit:

$$\Psi_T = Z^2 \cdot \pi \cdot U_o. \tag{3}$$

Die Überlagerung der beiden Strömungen ist gegeben durch

$$\Psi = \Psi_Q + \Psi_T. \tag{4}$$

Wird Ψ = const. gesetzt, so bleibt man offenbar auf einer Stromfläche; $\Psi = 0$ stellt die Grenzstromfläche dar, die mit der Oberfläche des Drehkörpers identisch ist.

Bei den vorliegenden Untersuchungen werden nicht die bekannten Verfahren (v. Kármán, Weinig u. a.) angewendet, bei denen für einen gegebenen Drehkörper die entsprechende Quell-Senkenverteilung ermittelt wird; hier wird der umgekehrte Weg eingeschlagen, indem (ähnlich wie bei Fuhrmann) für eine gegebene Quellverteilung die Aufmaße des Drehkörpers aus der Überlagerung von Quell- und Transportströmung, d. h. aus der Gleichsetzung von Ψ_Q und Ψ_T bestimmt werden. Dieser Weg bietet den Vorteil, die Umrisse des Körpers sowie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung um diesen analytisch bestimmen zu können, ein Punkt, der gerade im Hinblick auf die Berechnung des Reibungswiderstandes nach der Theorie von Millikan wesentlich ist.[3]) Wie jedoch vorweg gleich bemerkt werden möge, kann das vorliegende Verfahren auch ohne Schwierigkeit nach der Richtung ausgebaut werden, daß die Aufgabe, für einen gegebenen Drehkörper die zugehörige Doppelquellverteilung und damit auch die Geschwindigkeits- und Druckverteilung zu ermitteln, mit großer Genauigkeit gelöst werden kann (vgl. S. 18).

Zunächst ergibt sich die Frage, welche Form der Doppelquellverteilung $q(x)$ den Rechnungen zugrunde zu legen ist, wenn man Körper erhalten will, deren Spantflächenkurve einigermaßen derjenigen von Schiffen entspricht. Die von Föttinger [3] und Weinig [36] gefundene angenäherte Affinität (für schlanke Körper) der Spantflächenkurve $F(x)$ mit der Doppelquellverteilung $q(x)$ weist in erster Linie den Weg für die Wahl der Quellverteilung. Die nur angenähert gültige Affinität, die sich darin zeigte, daß bei der Annahme einer, der Spantflächenkurve streng affinen Doppelquellverteilung besonders in der Mitte der Körper zu kleine Abmessungen erhalten wurden, führte Weinig zu seinem bekannten Extrapolationsverfahren. Bei den vorliegenden Untersuchungen werden zunächst den Spantflächenkurven affine Doppelquellverteilungen $q(x)$ angenommen; für die Einhal-

---

$$\frac{1}{r\left(\frac{L}{2}\right)} \cdot q\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{r\left(-\frac{L}{2}\right)} \cdot q\left(-\frac{L}{2}\right) = 0$$

Aus geometrischen Betrachtungen gilt $dr = dx \cdot \cos\varphi$. Also ist:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \mu \, dx \cdot \frac{\cos\varphi}{r^2} \, dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} q \cdot \frac{1}{r^2} \cos\varphi \, dx$$

$$\int \mu \, dx = q = \text{Doppelquellbelegung.}$$

[3]) Auch für Wellenwiderstandsuntersuchungen getauchter Drehkörper ist die Kenntnis der Quellverteilung erwünscht; ein Verfahren von Havelock [9] gestattet die Bestimmung des Wellenwiderstandes. In der VWS wurde bereits ein diesbezügliches Versuchsprogramm durchgeführt; die Ergebnisse zeigten gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch; über die aufschlußreichen Ergebnisse des Widerstandes getauchter Drehkörper wird an anderer Stelle berichtet werden.

tung einer gewünschten Breite wenigstens in der Körpermitte wird ein Korrekturfaktor eingeführt.

Zweitens fragen wir nach einer geeigneten mathematischen Darstellungsweise für die Doppelquellverteilung $q(x)$, die es uns gestattet, das Integral in (2) aufzulösen und damit das Problem soweit wie möglich rein rechnerisch, d. h. mit großer Genauigkeit zu lösen. Hierfür besitzt die in den letzten Jahren von Weinblum [36] geförderte Theorie analytischer Wasserlinien und Spantflächenkurven besondere Vorzüge. Weinblum führt die Untersuchungen von Schiffslinien auf eine Diskussion einfacher Polynome zwischen den Grenzen 0 und 1 zurück. Mit den dimensionslosen Koordinaten $\xi = \frac{x}{L/2}$; $\eta = \frac{y}{B/2}$ (L = Länge, B = Breite des Schiffes) entsprechen die darzustellenden Kurvensysteme Gleichungen des Typs:

$$\eta = 1 - a_{m_1} \cdot \xi^{m_1} - a_{m_2} \cdot \xi^{m_2} - a_{m_3} \cdot \xi^{m_3}. \tag{5}$$

Diese sogenannte Grundform enthält zwei formabhängige Parameter z. B. a_{m_1} a_{m_2}, die durch Völligkeit α und Eintrittswert der Kurve t ausgedrückt werden können, und genügt den Randbedingungen $\eta = 0$ für $\xi = 1$ und $\eta = 1$ für $\xi = 0$. Zwischen den Beiwerten der Gleichung und den Formgrößen bestehen lineare Zusammenhänge; es ist:

$$a_{m_1} = \frac{(m_1+1)(m_2+1)}{(m_2-m_1)(m_3-m_1)} \cdot [m_3 - \alpha \cdot (m_3+1)] - \frac{(m_3-t)(m_1+1)}{(m_2-m_1)(m_3-m_1)} \tag{6}$$

$$a_{m_2} = -a_{m_1} \cdot \frac{m_3-m_1}{m_3-m_2} + \frac{m_3-t}{m_3-m_2} \tag{7}$$

und $$a_{m_3} = 1 - a_{m_1} - a_{m_2}. \tag{8}$$

Eine bestimmte Kurve der Grundform wird symbolisch hervorgehoben durch $\langle m_1, m_2, m_3; \alpha; t \rangle$.

Wir wenden diese mathematische Darstellungsweise auf die Doppelquellverteilung an und wählen entsprechend die dimensionslosen Koordinaten

$$\xi = \frac{x}{L/2} \text{ oder } \Xi = \frac{X}{L/2}, \quad \eta(\xi) = \frac{q(x)}{q_{max}}, \quad \zeta = \frac{z}{B/2} \text{ oder } Z = \frac{Z}{B/2} \text{ (Z lies Zeta!)}$$

(L = Länge der Quellbelegung, B = Breite bzw. Durchmesser des Drehkörpers, q_{max} = Quellergiebigkeit für $\xi = 0$). Wird wie in vorliegendem Falle der Eintrittswert der Kurve für die Quellbelegung $t = 0$ gewählt, so ist die Länge des bei der Überlagerung von Quell- und Transportströmung entstehenden Körpers praktisch die gleiche wie die der Quellbelegung. Van der Vliet [34] ermittelte z. B.: die Verlängerung bei einem Körper mit $L : B = 3$ und $\varphi = 0{,}546$ zu nur $3^0/_{00}$ von L, also bei größeren $L : B$ ein bestimmt unwesentlicher Wert.

Führen wir die dimensionslosen Bezeichnungen in (2) bzw. (3) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen die Stromfunktion der Doppelquellen:

$$\Psi_Q = -\frac{1}{2} \cdot q_{max} \cdot \left(\frac{Z}{L/B}\right)^2 \cdot \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \frac{\eta(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\Xi-\xi)^2 + \left(\frac{Z}{L/B}\right)^2}^3} \tag{9}$$

und der Transportströmung

$$\Psi_T = Z^2 \cdot \frac{B^2 \pi}{4} \cdot U_0. \tag{10}$$

Fassen wir in dem Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in (9) die konstanten Größen Ξ und Z zusammen, also

$$(\Xi-\xi)^2+\left(\frac{Z}{L/B}\right)^2=c_0+c_1\,\xi+c_2\,\xi^2=R(\xi),$$

wobei $$c_0=\Xi^2+\left(\frac{Z}{L/B}\right)^2,\quad c_1=-2\cdot\Xi \text{ und } c_2=1$$

sind, so haben wir entsprechend (5) für $\eta\ (\xi)$ Integrale von der Form

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\xi^m}{\sqrt{R(\xi)^3}}\,d\xi \tag{11}$$

zu lösen.

Die Integration dieser irrationalen Funktion wird durch Substitution und Rekursion durchgeführt. Die Lösungen für verschiedene Exponenten m sind folgende, wenn $c_1 > 0$:

$$m=0:\ \int_{-1}^{+1}\frac{d\xi}{\sqrt{R^3}}=\left|\frac{2\cdot(2\,c_2\cdot\xi+c_1)}{k\cdot\sqrt{R}}\right|_{-1}^{+1}, \tag{12}$$

wobei $k=4\,c_0\cdot c_2-c_1{}^2$ ist.

$$m=1:\ \int_{-1}^{+1}\frac{\xi}{\sqrt{R^3}}\,d\xi=-\left|\frac{2\cdot(2\,c_0+c_1\,\xi)}{k\cdot\sqrt{R}}\right|_{-1}^{+1} \tag{13}$$

$$m=2:\ \int_{-1}^{+1}\frac{\xi^2}{\sqrt{R^3}}\,d\xi=-\left|\frac{(4\,c_0\cdot c_2-2\,c_1{}^2)\cdot\xi-2\,c_0\cdot c_1}{c_2\cdot k\sqrt{R}}\right|_{-1}^{+1}+\frac{1}{c_2}\cdot\left|M\right|_{-1}^{+1}, \tag{14}$$

worin $M=\dfrac{1}{\sqrt{c_2}}\cdot\left|\ln\left(2\cdot c_2\cdot\xi+c_1+2\cdot\sqrt{c_2}\cdot\sqrt{R}\right)\right|_{-1}^{+1}$ ist.

$$m>2:\ \int_{-1}^{+1}\frac{\xi^m}{\sqrt{R^3}}\,d\xi=\left|\frac{\xi^{m-1}}{(m-2)\,c_2\cdot\sqrt{R}}\right|_{-1}^{+1}-\frac{(m-1)\cdot c_0}{(m-2)\cdot c_2}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{\xi^{m-2}}{\sqrt{R^3}}\,d\xi$$
$$-\frac{\left(m-\frac{3}{2}\right)c_1}{(m-2)\cdot c_2}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{\xi^{m-1}}{\sqrt{R^3}}\,d\xi. \tag{15}$$

Die Bedingung $c_1 > 0$ bedeutet mit $c_1 = -2\,\Xi$, daß $\Xi < 0$ sein muß. Da bei den vorliegenden Untersuchungen Achsensymmetrie besteht, erübrigt sich die Lösung des Integrals für $\Xi > 0$.

Um nunmehr aus der Gleichsetzung von $-\Psi_Q$ und Ψ_T die Grenzstromfläche — gleichbedeutend mit dem Umriß des Drehkörpers — ermitteln zu können, muß noch die Größe von q_{max} in (9) festgelegt werden. Nach dem Satz von Föttinger-Weinig, wonach die Doppelquellverteilung in erster Annäherung der Spantflächenverteilung affin ist, also: $q\ (x) = U_o \cdot F\ (x)$, ergibt sich:

$$q_{max} = U_o \cdot \text{Hauptspantfläche} = U_o \cdot \frac{B^2\cdot\pi}{4}.$$

Wäre der Satz von der Affinität streng gültig, so müßte mit diesem Wert für q_{max} in (9) für den Punkt P ($\Xi = 0$, $Z = 1$) Gleichheit zwischen $-\Psi_Q$ und Ψ_T bestehen; P wäre dann ein Punkt der Körperoberfläche. Dies trifft jedoch

mit praktisch genügender Genauigkeit nur in den seltensten Fällen zu, und zwar für Körper mit großem Verhältnis $L : B$. Man ist geneigt, anzunehmen, daß die Übereinstimmung bei Körpern geringerer Völligkeit der Spantflächenkurve φ größer ist als bei völligeren. Daß dieses nicht eintrifft, wird später gezeigt werden. Ist die besprochene Gleichheit von $-\Psi_Q$ und Ψ_T nicht erfüllt, so empfiehlt es sich, in (9) einen Korrekturfaktor $\varkappa$ einzuführen, so daß das Verhältnis $L : B$ des Drehkörpers, der sich aus der Überlagerung von Quell- und Transportströmung ergibt, das gleiche, wie das vorher für die Doppelquellverteilung angenommene wird. Wir nennen $\varkappa$ die Breitenkorrektur; sie ist je nach der Quellverteilung $\eta\ (\xi)$ und dem Verhältnis $L : B$ verschieden und muß jeweils durch den Ansatz für $\Xi = 0$ und $Z = 1$ mit $q_{max} = \frac{B^2 \cdot \pi}{4} \cdot U_o$ bestimmt werden.

Nach (4) ergibt sich mit $\Psi = 0$ die Gleichung der K o n t u r des Drehkörpers:

$$\frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{1}{(L/B)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\eta\,(\xi)}{\sqrt{R^3}}\, d\xi = 1. \tag{16}$$

Die Lösung der Gleichung gelingt nicht explizit, es muß interpoliert werden; die Genauigkeit ist dabei jedoch praktisch genügend. Die linke Seite von (16) bezeichnen wir der Kürze halber mit ①; zeichnen wir in einem Diagramm die Kurven ① in Abhängigkeit von Z für verschiedene Parameter Ξ auf, so schneiden diese die Gerade 1 in Punkten Z_o, die Punkte der Oberfläche des Rotationskörpers darstellen. Damit sind die Abmessungen der aus der Potentialtheorie sich ergebenden Drehkörper festgelegt.

Will man ein Bild über den Strömungsverlauf um diesen Körper herum erhalten, so kann man ohne besondere Mühe aus dem gleichen Diagramm den Verlauf der Relativstromflächen ermitteln. Wir denken uns die Abstände der Stromflächen von der Nullstromfläche im Unendlichen $Z_n = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4 usw. Man bleibt offenbar auf einer Stromfläche wenn $\Psi_n = \Psi_Q + \Psi_T = \text{const.}$ erfüllt ist. Mit $\Psi_n = Z_n^2 \cdot \frac{B^2 \cdot \pi}{4} \cdot U_o$ ergibt sich entsprechend (16)

$$\frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{1}{(L/B)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\eta\,(\xi)}{\sqrt{R^3}}\, d\xi = 1 - \left(\frac{Z_n}{Z}\right)^2 \tag{17}$$

oder ① = ②, wenn $1 - \left(\frac{Z_n}{Z}\right)^2 =$ ② geschrieben wird. Die Schnittpunkte der in obigem Diagramm gezeichneten Kurven ① mit den kubischen Hyperbeln ② sind dann Aufmaße der Stromflächen für verschiedene Ξ. Ein Beispiel für das Interpolationsdiagramm ist später in Bild 2 gegeben.

Dieses Interpolationsverfahren ist an sich bekannt und besonders von F u h r m a n n [4] ausführlich — allerdings in anderer Form — behandelt worden. Dem hier in dimensionsloser Form durchgeführten Rechnungsverfahren ist der Vorzug zu geben; man beachte, daß mit einer einmaligen — wenn auch mühsamen und mit großer Genauigkeit durchzuführenden — Auswertung der Integrale von der Form $\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^m}{\sqrt{R^3}}\, d\xi$ die Hauptaufgabe auch für andere Untersuchungen gelöst ist. Werden die Intregralwerte bis zu möglichst hohen Potenzen m tabellarisch für verschiedene Z- und Ξ-Werte (zunächst für ein bestimmtes $L : B$) zusammengefaßt, so kann man für alle

möglichen Doppelquellenverteilungen $\eta\ (\xi)$, (die durch Polynome bis zu den berechneten Potenzen m gegeben sind), die sich aus der Überlagerung von Quell- und Transportströmung ergebenden Körperumrisse leicht ermitteln. Die vorerst nur für das bestimmte Verhältnis $L:B$ z. B. $L:B=8$ berechneten Intregralwerte der Tabelle können aber auch für andere Verhältnisse $L:B$ benutzt werden, ohne daß man eine neue Rechnung hierfür anstellen müßte, wie folgende Überlegungen zeigen.

Das Verhältnis $L:B$ kommt in (16) einmal im Quadrat vor dem Integral vor, stört also hier nicht den Integralwert an sich; zweitens allerdings ist auch $R\ (\xi)$ von $L:B$ abhängig. Es war $R = c_0 + c_1\,\xi + c_2\,\xi^2$, wobei $c_0 = \Xi^2 + \left(\frac{Z}{L/B}\right)^2$, $c_1 = -2\cdot\Xi$ und $c_2 = 1$ sind. $L:B$ steht in $R\ (\xi)$ lediglich in der Verbindung $\left(\frac{Z}{L/B}\right)^2$. Wurden die Integralwerte z. B. für $L:B=8$ berechnet, so ist offenbar, daß bei z. B. $L:B=10$ der gleiche Integralwert für einen $Z_{L:B=10}$-Wert gilt, der $Z_{L:B=10} = 1{,}25\cdot Z_{L:B=8}$ ist; denn

$$c_0 = \Xi^2 + \left(\frac{Z_8}{8}\right)^2 = \Xi^2 + \left(\frac{1{,}25\cdot Z_8}{10}\right)^2,$$

d. h. R behält den gleichen Wert bei einem $Z_{10} = 1{,}25\ Z_8$. Entsprechend gilt für z. B. $L:B=6$: die für $L:B=8$ berechneten Integralwerte sind bei $L:B=6$ die gleichen, wenn $Z_6 = 0{,}75\cdot Z_8$ ist. — Mit $L:B$ ändert sich auch der Wert $\frac{1}{(L:B)^2}$ vor dem Integral sowie die Breitenkorrektur $\varkappa$. Ist die linke Seite von (16) für z. B. $L:B=8$ bereits berechnet, so brauchen deren Werte für z. B. $L:B=10$ nur mit $\frac{\varkappa_{L:B=10}}{\varkappa_{L:B=8}}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^2$ umgerechnet zu werden. Diese umgerechneten Werte über $Z_{10} = 1{,}25\ Z_8$ aufgetragen und verbunden schneiden die Gerade 1 in den Aufpunkten Z_0 des Umrisses des Drehkörpers mit einem Verhältnis $L:B=10$.

Die Bedeutung der tabellarischen Aufstellung der Integrale von der Form $\int_{-1}^{+1}\frac{\xi^m}{\sqrt{R^3}}\,d\xi$ wird besonders klar, wenn man die später zu behandelnde Geschwindigkeits- und Druckverteilung um den Verdrängungskörper ins Auge faßt. Es gelingt, eine Gleichung für die Geschwindigkeit anzuschreiben, in der die gleiche Integralform erscheint; mithin ist mit der Kenntnis der tabellarisch zusammengestellten Integralwerte auch für die Berechnung von Geschwindigkeit und Druck im Strömungsfeld die Hauptaufgabe gelöst.

b) Auswertung.

Der Aufgabe entsprechend sollen Drehkörper mit den extremen Schärfegraden $\varphi \approx 0{,}55$ und 0,8 bei einem Verhältnis $L:B=8$ untersucht werden. Für die kleineren Schärfegrade sind in besonderem Maße Grundformen mit niederen Exponenten geeignet. Es wurde für die Doppelquellverteilung eine Gleichung von der Form $\langle 2,\ 4,\ 6;\ a=0{,}533;\ t=0\rangle$ angenommen, die durch die Wahl der Völligkeit $a=0{,}533$ den Vorzug besitzt, daß der eine Parameter $a_0 = 0$ wird und die Gleichung die einfache Form

$$\eta = 1 - 2\,\xi^2 + \xi^4 \tag{18}$$

annimmt. Diese Gleichung ist identisch mit der von van der Vliet [34][4]) untersuchten Gleichung der einfachen Quellen

$$\sigma = a\,\xi\,(1-\xi^2), \tag{18a}$$

[4]) Nach Fertigstellung der Berechnungen gelangte Verfasser in den Besitz der Arbeit von van der Vliet. Die hierin auf anderem Wege erzielten Ergebnisse decken sich gut mit denen vom Verfasser.

Tabelle I

Zusammenstellung der Integralwerte von

$$R = R(\xi) = c_0 + c_1\,\xi + c_2\,\xi^2;\quad c_0 = \Xi^2 + \left(\frac{Z}{L/}\right.$$

Z	Ξ	$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^4 d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{R^3}}$
0,10	0,95	+ 12 608,8	— 11 959,5	+ 11 349,4	— 10 774,1	+ 10 231,6	— 9 719,26
	0,98	+ 11 827,1	— 11 548,6	+ 11 281,8	— 11 024,0	+ 10 775,2	— 10 534,36
0,20	0,9	+ 3 152,09	— 2 827.71	+ 2 541,83	— 2 287.69	+ 2 061,71	— 1 860,04
	0,95	+ 3 030,95	— 2 862,03	+ 2 707,02	— 2 562,84	+ 2 428,78	— 2 303,51
	0,98	+ 2 599,38	— 2 516,67	+ 2 440,39	— 2 368,32	+ 2 300,34	— 2 235,67
0,30	0,8	+ 1 409,89	— 1 123,55	+ 900,312	— 723,801	+ 584,139	— 472,84
	0,9	+ 1 376,81	— 1 230,29	+ 1 103,697	— 992,289	+ 894,276	— 807,39
	0,95	+ 1 279,87	— 1 200,39	+ 1 129,599	— 1 064,768	+ 1 005,503	— 950,76
	0,98	+ 1 045,62	— 1 001,69	+ 962,790	— 926,768	+ 893.573	— 862,48
0,40	0,8	+ 787,902	— 626,027	+ 501,787	— 404,140	+ 327,385	— 266,33
	0,9	+ 757,632	— 673,451	+ 602,410	— 540.567	+ 486,825	— 439,52
	0,95	+ 682,711	— 634,946	+ 593,782	— 556,657	+ 523,327	— 492,88
0,50	0,5	+ 509,801	— 253,582	+ 130,788	— 68,7291	+ 37,4246	— 20,83
	0,7	+ 506,446	— 351,837	+ 248,704	— 177,4046	+ 128,1291	— 93,34
	0,8	+ 500,193	— 395.937	+ 317,356	— 255,9781	+ 208,0992	— 170,08
	0,9	+ 472,949	— 417,700	+ 372,281	— 333,1751	+ 299,6442	— 270,33
	0,95	+ 415,791	— 383.020	+ 355,729	— 331,4653	+ 310,0813	— 290,75
0,60	0,5	+ 353.367	— 175,371	+ 91,3273	— 48,6444	+ 27,1090	— 15,48
	0,6	+ 352,316	— 209,556	+ 128,7822	— 80,4026	+ 51,5156	— 33,53
	0,7	+ 350,075	— 242,406	+ 171,7721	— 123,0824	+ 89,6031	— 65,89
	0,8	+ 344,082	— 271,139	+ 217,2537	— 175,4269	+ 143,0756	— 117,43
	0,9	+ 319.862	— 280,401	+ 248,8596	— 221,9903	+ 199,2769	— 179,55
0,70	0,5	+ 259,048	— 128,219	+ 67,4533	— 36,4114	+ 20,7625	— 12.14
	0,6	+ 258,012	— 152,989	+ 94,5520	— 59,5169	+ 38,6645	— 25,56
	0,7	+ 255,827	— 176,467	+ 125,3456	— 90,1989	+ 66,1733	— 49,16
	0,8	+ 250.120	— 196,070	+ 157,0023	— 126.8599	+ 103.7623	— 85,48
0,80	0,0	+ 199,007	— 0	+ 4,00638	— 0	+ 0,934944	— 0
	0,4	+ 198,385	— 78,4226	+ 34,8378	— 16,0732	+ 8,36783	— 4,47
	0,5	+ 197,836	— 97,6223	+ 51,8995	— 28.3816	+ 16,54938	— 9,96
	0,6	+ 196,819	— 116,2901	+ 72,2851	— 45,8601	+ 30,19643	— 20,2
	0,7	+ 194,696	— 133,7120	+ 95,1946	— 68,7717	+ 50,82923	— 38,0
	0,8	+ 189,289	— 147,5140	+ 118,0119	— 95,3785	+ 78,20873	— 64,6
0,90	0,2	+ 156,910	— 30,9738	+ 9,84942	— 3,05584	+ 1,78373	— 0,7
	0,3	+ 156,729	— 46,3747	+ 17,42931	— 6,80918	+ 3,51146	— 1,7
	0,4	+ 156,417	— 61,6409	+ 27,89807	— 13,11845	+ 7,06835	— 3,8
	0,5	+ 155,876	— 76,6517	+ 41,19188	— 22,80813	+ 13,58921	— 8,2
	0,6	+ 154,879	— 91,1443	+ 56,98654	— 36,42798	+ 24,30242	— 16,5
	0,7	+ 152,821	— 104,4409	+ 74,51765	— 54,02549	+ 40,21349	— 30,3
1,00	0,0	+ 127,012	— 0	+ 3,56838	— 0	+ 0,908644	—
	0,2	+ 126,888	— 24,9715	+ 8,44354	— 2,69421	+ 1,67453	— 0,7
	0,3	+ 126,709	— 37,3722	+ 14,50070	— 5,79637	+ 3,13583	— 1,5
	0,4	+ 126,401	— 49,6403	+ 22,89651	— 10,95984	+ 6,09958	— 3,4
	0,5	+ 125,868	— 61,6581	+ 33,49890	— 18,76842	+ 11,41562	— 7,0
	0,6	+ 124,892	— 73,1723	+ 46,01805	— 29,62491	+ 20,01372	— 13,7
	0,7	+ 122,905	— 83,5429	+ 59,73049	— 43,44149	+ 32,55256	— 24,7
1,10	0,2	+ 104,677	— 20,5314	+ 7,37073	— 2,40761	+ 1,58246	— 0,6
	0,3	+ 104,500	— 30,7132	+ 12,31975	— 5,03489	+ 2,84698	— 1,4
1,25	0,0	+ 71,0204	— 0	+ 3,01077	— 0	+ 0,860945	—

Tabelle I

rm $\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^m}{\sqrt{R^3}}\, d\xi$ in Abhängigkeit von Z und Ξ

$= -2 \cdot \Xi$; $c_2 = 1$. $L/B = 8$

$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^6\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^7\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^8\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^9\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{10}\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{11}\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{12}\, d\xi}{\sqrt{R^3}}$
) 235,36	— 8 777,90	+ 8345,41	— 7936,23	+ 7549,08	— 7182,55	+ 6835,53
) 301,22	—10 075,21	+ 9856,12	— 9643,48	+ 9437,14	— 9236,71	+ 9042,05
680,04	— 1 518,97	+ 1374,83	— 1245,55	+ 1129,61	— 1025,42	+ 931,81
186,48	— 2 076,79	+ 1974,02	— 1877,48	+ 1786,83	— 1701,51	+ 1621,25
174,23	— 2 115,54	+ 2059,55	— 2005,93	+ 1954,61	— 1905,35	+ 1858,11
384,150	— 313,033	+ 256,040	— 210,084	+ 173,073	— 143,064	+ 118,783
730,416	— 661,843	+ 600,801	— 546,209	+ 497,430	— 453,657	+ 414,422
900,277	— 853,399	+ 809,938	— 769,423	+ 731,716	— 696,455	+ 663,536
833,480	— 806,137	+ 780,449	— 756,121	+ 733,155	— 711,329	+ 690,649
217,828	— 178,890	+ 147,697	— 122,452	+ 102,087	— 85,4739	+ 71,9866
397,970	— 361,130	+ 328,539	— 299,479	+ 273,632	— 250,4732	+ 229,7828
465,194	— 439,707	+ 416,339	— 394,711	+ 374,770	— 356,2324	+ 339,0657
12,2229	— 7,36102	+ 4,79551	— 3,19038	+ 2,35130	— 1,72836	+ 1,42313
68,8702	— 51,2731	+ 38,7214	— 29,5225	+ 22,8807	— 17,90842	+ 14,27946
139,9978	— 115,8134	+ 96,4615	— 80,7387	+ 68,0456	— 57,62545	+ 49,14701
244,8365	— 222,3297	+ 202,5576	— 184,9768	+ 169,4231	— 155,5056	+ 143,1223
273,4073	— 257,5713	+ 243,2143	— 230,0101	+ 217,9514	— 206,7976	+ 196,5540
9,41976	— 5,87401	+ 3,99488	— 2,75162	+ 2,10521	— 1,58642	+ 1,33815
22,5005	— 15,35308	+ 10,87470	— 7,82820	+ 5,89307	— 4,48800	+ 3,59291
49,2310	— 37,15281	+ 28,51854	— 22,11142	+ 17,46711	— 13,92989	+ 11,33623
97,2287	— 80,96373	+ 67,97445	— 57,37747	+ 48,82454	— 41,75736	+ 36,00145
162,5682	— 147,63712	+ 134,61954	— 123,07224	+ 112,91746	— 103,83940	+ 95,80093
7,63941	— 4,90798	+ 3,45984	— 2,44811	+ 1,92769	— 1,47887	+ 1,27002
17,50446	— 12,19247	+ 8,85304	— 6,51920	+ 5,03354	— 3,91469	+ 3,20348
37,11992	— 28,36338	+ 22,09724	— 17,38741	+ 13,96577	— 11,31419	+ 9,36544
71,15006	— 59,59313	+ 50,38980	— 42,84808	+ 36,76902	— 31,71186	+ 27,59444
0,485832	— 0	+ 0,326011	— 0	+ 0,245092	— 0	+ 0,196312
2,84044	— 1,77254	+ 1,36559	— 0,959201	+ 0,848709	— 0,639008	+ 0,613704
6,41627	— 4,22809	+ 3,07189	— 2,22010	+ 1,78862	— 1,390625	+ 1,211245
14,13558	— 10,02774	+ 7,44239	— 5,58586	+ 4,40521	— 3,483705	+ 2,901460
29,06896	— 22,46221	+ 17,73571	— 14,13588	+ 11,51947	— 9,456068	+ 7,939661
54,05348	— 45,50302	+ 38,71915	— 33,13308	+ 28,64121	— 24,87764	+ 21,81865
0,738730	— 0,359029	+ 0,454783	— 0,231605	+ 0,329931	— 0,171101	+ 0,259504
1,26860	— 0,751664	+ 0,699453	— 0,453477	+ 0,480418	— 0,324107	+ 0,367622
2,55931	— 1,632315	+ 1,290831	— 0,916640	+ 0,822180	— 0,621339	+ 0,600786
5,52459	— 3,719761	+ 2,772831	— 2,038071	+ 1,673114	— 1,314210	+ 1,158122
11,73576	— 8,461360	+ 6,402477	— 4,882861	+ 3,920246	— 3,141965	+ 2,654890
23,41157	— 18,27296	+ 14,60270	— 11,76891	+ 9,712104	— 8,060885	+ 6,850271
0,478429	— 0	+ 0,322038	— 0	+ 0,242409	— 0	+ 0,194289
0,722191	— 0,351136	+ 0,449269	— 0,228245	+ 0,326873	— 0,169036	+ 0,257381
1,20378	— 0,720797	+ 0,682181	— 0,443052	+ 0,472887	— 0,318678	+ 0,363026
2,33664	— 1,516722	+ 1,226240	— 0,878089	+ 0,796984	— 0,603901	+ 0,587619
4,84425	— 3,321888	+ 2,531606	— 1,886280	+ 1,573236	— 1,245693	+ 1,108761
9,94445	— 7,272567	+ 5,597940	— 4,327213	+ 3,527793	— 2,858428	+ 2,444909
19,26380	— 15,17001	+ 12,25481	— 9,971860	+ 8,320208	— 6,969869	+ 5,984468
0,706267	— 0,343207	+ 0,443494	— 0,224681	+ 0,323581	— 0,166808	+ 0,255078
1,149100	— 0,693133	+ 0,665659	— 0,432628	+ 0,465087	— 0,312962	+ 0,358125

worin $\sigma = \frac{d\eta}{d\xi}$ bedeutet. Integriert erhält man

$$\eta = a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4 \right) + C;$$

mit $C = 1$ und $a = -4$ aus den Randbedingungen ergibt sich obige Gleichung (18) für die Doppelquellenverteilung $\eta\ (\xi)$.

Für die größeren Schärfegrade ergab zunächst eine Durchrechnung mit einer Doppelquellenverteilung entsprechend der Grundform $\langle 6,\ 8,\ 10;\ a = 0{,}78;\ t = 0 \rangle$ einen Drehkörper mit $\varphi = \frac{\delta}{\beta} = 0{,}768$. Die gewählte Völligkeit der Quellverteilungskurve $a = 0{,}78$ war demnach zu niedrig; als Grundform der Quellverteilungskurve wurde schließlich $\langle 8,\ 10,\ 12;\ a = 0{,}82;\ t = 0 \rangle$ angenommen. Die Gleichung der Doppelquellverteilung ist also

$$\eta = 1 - a_8 \xi^8 - a_{10} \xi^{10} - a_{12} \xi^{12}, \tag{19}$$

worin nach (6) — (8) $a_8 = 3{,}0825$; $a_{10} = -0{,}165$ und $a_{12} = -1{,}9175$ sind.

Die erste und Hauptaufgabe bestand in der Auswertung der Integrale von der Form

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^m}{\sqrt{R^3}}\, d\xi$$

bis zu Potenzen $m = 12$ für ein Verhältnis $L : B = 8$. Die Berechnungen wurden für $\Xi = 0;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}98$ und für mehrere — mindestens drei — jeweils bei den einzelnen Ξ-Werten zu erwartende Werte $Z = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3 \ldots\ldots 1{,}0;\ 1{,}1$ und $1{,}25$ durchgeführt. Da oftmals bei der Differenzbildung großer Zahlenwerte sehr kleine Absolutwerte erhalten wurden, mußte die Rechengenauigkeit sehr groß sein; es wurde eine Rechenmaschine verwendet. Nach Berechnung der jeweiligen c_0-, c_1-, c_2-, k- und $\sqrt{R}$-Werte für die obere und untere Grenze wurde die Ermittlung der Integralwerte bis zur 12. Potenz nach den Formeln (12) bis (15) durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle I wiedergegeben.

Zur Ermittlung der Körperumrisse aus der Überlagerung von Quell- und Transportströmung müssen zunächst die Breitenkorrekturen $\varkappa$ für die Einhaltung des gewünschten Verhältnisses $L : B$ ermittelt werden. Als Beispiel für den Rechnungsgang wird im folgenden für die Doppelquellverteilung $\eta = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$ die Rechnung durchgeführt. Es ist mit $L : B = 8$ nach (16)

$$\varkappa = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\eta\,(\xi)}{\sqrt{R^3}}\, d\xi}$$

Für $\Xi = 0$ und $Z = 1$ wird nach Tabelle I:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{R^3}} = 127{,}012; \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2}{\sqrt{R^3}}\, d\xi = 3{,}56838; \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^4}{\sqrt{R^3}}\, d\xi = 0{,}90864.$$

Mithin

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\eta\,(\xi)}{\sqrt{R^3}}\, d\xi = 120{,}784$$

und

$$\varkappa = 1{,}05975.$$

Die Affinität der Spantflächenkurve mit der Doppelquellenverteilung ist also bei diesem scharfen Körper jedenfalls im Hauptspant nicht gewahrt. Die Abweichung, bezogen auf die Fläche, beträgt rd. 6%, bezogen auf den

Durchmesser bzw. die Breite des Körpers jedoch nur rd. 3%. Die Breitenkorrekturen $\varkappa$ wurden auch für $L : B = 6$ und 10 sowie für den völligen Drehkörper entsprechend einer Doppelquellenverteilung

$$\eta = 1 - a_8 \xi^8 - a_{10} \xi^{10} - a_{12} \xi^{12}$$

ermittelt; die Werte sind in Tab. II zusammengestellt. Die Nummer des später bei den Versuchen verwendeten Modells ist in Klammern angegeben.

Tabelle II.

Breitenkorrekturen $\varkappa$ für Körpermitte.

Quellverteilung	$L:B$	$\varkappa$
⟨8, 10, 12; 0,82; 0⟩ (Mod. R. 1257)	6	—
	8	1,01240
	10	1,00797
⟨2, 4, 6; 0,533; 0⟩ (Mod. R. 1242)	6	1,09323
	8	1,05975
	10	1,04205

Man erkennt, daß die Breitenkorrekturen für die Einhaltung der Breite in der Mitte des Körpers mit abnehmendem Verhältnis $L : B$ wachsen und bei den völligeren (φ groß) kleiner sind als bei den schärferen Körpern.

Die Umrisse des Drehkörpers sind nunmehr nach Gl. (16) zu bestimmen. Als Beispiel für die Berechnung eines Punktes der Kontur ist im folgenden der Rechnungsgang für die Doppelquellverteilung

$$\eta = 1 - a_8 \xi^8 - a_{10} \xi^{10} - a_{12} \xi^{12}$$

gegeben. Es sei $L : B = 8$ und $\Xi = 0{,}8$, d. h. Spant 18; mit a_8, a_{10} und a_{12} wie vorher angegeben und $\varkappa = 1{,}0124$ gilt folgende Tabellenrechnung:

Tabelle III.

Beispiel für die Berechnung eines Aufpunktes Z_o des Drehkörpers.

	Wert	$Z = 0{,}5$	$Z = 0{,}6$	$Z = 0{,}7$	$Z = 0{,}8$
1	$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{R^3}}$	500,193	344,082	250,120	189,289
2	$a_{10} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{10}}{\sqrt{R^3}} d\xi$	— 11,226	— 8,056	— 6,067	— 4,726
3	$a_{12} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{12}}{\sqrt{R^3}} d\xi$	— 94,239	— 69,033	— 52,912	— 41,837
4	Zeile 1—Zeile 2 und 3	605,658	421,171	309,099	235,852
5	$a_8 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^8}{\sqrt{R^3}} d\xi$	297,343	209,531	155,327	119,352
6	Zeile 4—Zeile 5	308,315	211,640	153,772	116,500
7	Zeile 6 $\times \frac{\varkappa}{2} \cdot \left(\frac{1}{L/B}\right)^2 = ①$	2,440	1,673	1,217	0,9215

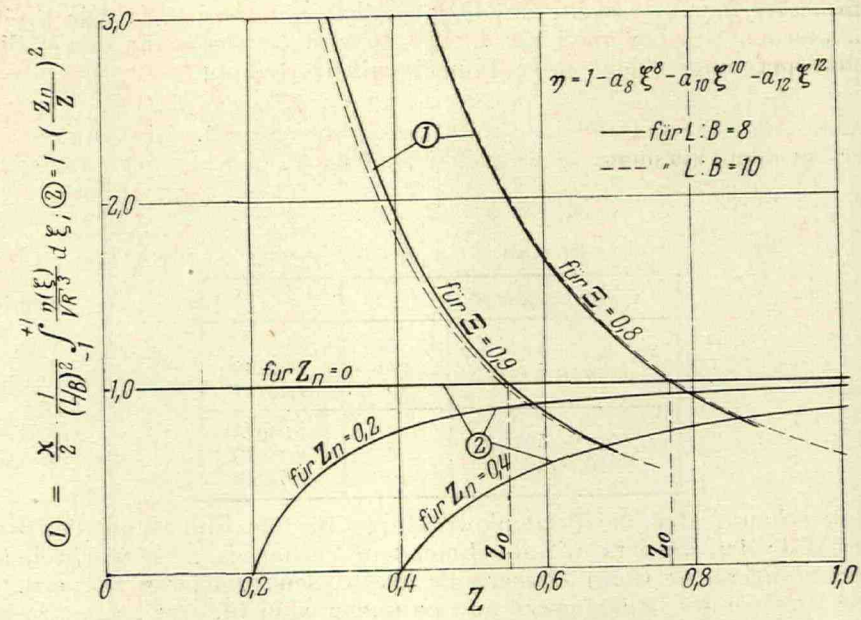


Bild 2. Interpolationsdiagramm zur Ermittlung der Aufmaße (Z) der Stromflächen; Aufmaß der Grenzstromfläche = Aufmaß (Z_o) des Drehkörpers.

Die Werte der Zeile 7, über Z aufgetragen, schneiden die Gerade 1 in $Z_o = 0{,}769$ = Aufpunkt der Kontur bei $\Xi = 0{,}8$. In Bild 2 sind als Beispiel die Kurven ① für $\Xi = 0{,}8$ und 0,9 in Abhängigkeit von Z für $L : B = 8$ und die Doppelquellverteilung ⟨8, 10, 12; 0,82; 0⟩ aufgetragen. Die Schnittpunkte mit der Geraden 1 sind $Z_0 = 0{,}769$ bzw. 0,55 für $\Xi = 0{,}8$ bzw. 0,9. Für einen Körper mit $L : B = 10$ sind bei Zugrundelegung derselben Gleichung für die Doppelquellverteilung die Werte der Zeile 7 in Tabelle III mit

$$\frac{\varkappa_{L:B=10}}{\varkappa_{L:B=8}} \cdot 0{,}64 = 0{,}637$$

zu multiplizieren. Die Z_{10}-Werte entsprechen dabei (s. S. 11) einem Wert $1{,}25 \cdot Z_8$. Die entsprechenden Kurven für diesen Körper sind in Bild 2 gestrichelt eingetragen und schneiden die Gerade 1 in $Z_o = 0{,}774$ bzw. 0,541. Außerdem sind die kubischen Hyperbeln ② [s. (17)] für die Abstände der Relativstromflächen im Unendlichen $Z_n = 0{,}2$ und 0,4 eingetragen, deren Schnittpunkte mit den Kurven ① Aufpunkte der Relativstromflächen an den entsprechenden Stellen sind. Die so ermittelten Aufmaße der unter III experimentell untersuchten Modelle R. 1242 und R. 1257 mit $L : B = 8$ sind in Tabelle IV — aus Symmetriegründen nur für den halben Körper — zusammengestellt.

In der Spalte 5 sind die Aufmaße Z_0' des Körpers angegeben, dessen Spantflächenkurve $\Phi = \eta(\xi)$ ist. Es kann hieraus ersehen werden, welche Abweichungen bzgl. der Affinität von Spantflächenkurve und Doppelquellverteilung bestehen.

In Bild 3 und 4 sind die Ergebnisse der Tabelle IV für das Vorschiff dargestellt. Für Modell R. 1242 ergibt sich, daß die Körperaufmaße Z_0 größer sind als diejenigen Z_0', die sich bei einer der Spantflächenverteilung affinen Doppelquellverteilung ergeben. In der Mitte des Körpers, also $\Xi = 0$, ist infolge der eingeführten Breitenkorrektur $\varkappa$ Übereinstimmung erzielt worden. Die Völligkeit φ der Spantflächenkurve des Mod. R. 1242 beträgt $\varphi = 0{,}546$ gegenüber der Völligkeit der Quellverteilung $\alpha = 0{,}533$, ist also ebenfalls größer geworden. Für Mod. R. 1257 liegen die Verhältnisse anders; hier sind die Aufmaße Z_0 lediglich für Werte $\Xi > 0{,}87$ größer als die Z_0'-

$\eta = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$ = Doppelquellverteilung (Mod. R 1242)
Z_0 = Körperaufmaße, wenn η = Doppelquellverteilung
Φ = Spantflächen, wenn Z_0 = Körperaufmaße
Z_0' = Körperaufmaße, wenn η = Spantflächenkurve

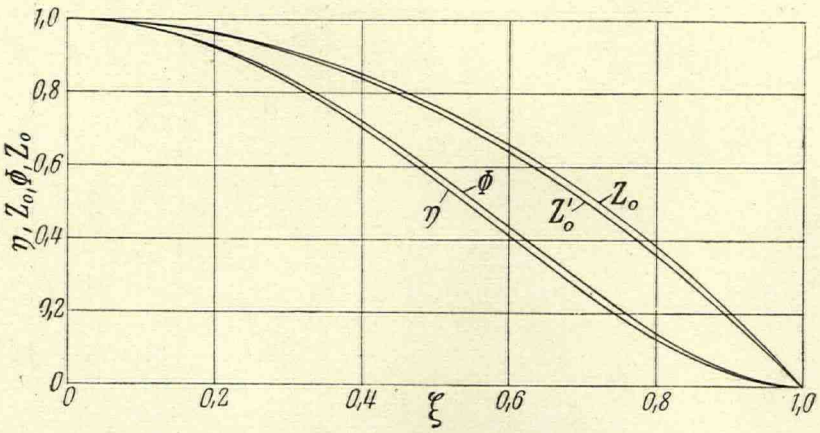


Bild 3. Aufmaße (Z_0) und Spantflächenkurve (Φ) eines Drehkörpers bei der erzeugenden Doppelquellverteilung $\eta = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$.

Tabelle IV.

Aufmaße der aus der Überlagerung von Quell- und Transportströmung ermittelten Drehkörper (Mod. R. 1242 und R. 1257).

$L : B = 8$.

Ξ	η	Z_0	$\Phi = \frac{Fx}{F_\otimes}$	Z_0'
1	2	3	4	5
Modell R. 1242 Doppelquellverteilung $\eta = \langle 2, 4, 6;\ 0{,}533;\ 0 \rangle$.				
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,2	0,9216	0,9630	0,9274	0,9600
0,3	0,8281	0,9160	0,8391	0,9100
0,4	0,7056	0,8505	0,7234	0,8400
0,5	0,5625	0,7660	0,5868	0,7500
0,6	0,4096	0,6600	0,4356	0,6400
0,7	0,2601	0,5340	0,2852	0,5100
0,8	0,1296	0,3830	0,1467	0,3600
0,9	0,0361	0,2078	0,0432	0,1900
0,95	0,0095	0,1080	0,0117	0,0975
0,98	0,0016	0,0470	0,0022	0,0396
1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Modell R. 1257 Doppelquellverteilung $\eta = \langle 8, 10, 12;\ 0{,}82;\ 0 \rangle$.				
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,2	1,0	0,9986	0,9972	1,0
0,3	1,0	0,9960	0,9920	1,0
0,4	0,997	0,9902	0,9805	0,9985
0,5	0,988	0,9770	0,9545	0,9940
0,6	0,955	0,9477	0,8981	0,9775
0,7	0,851	0,8868	0,7864	0,9226
0,8	0,633	0,7690	0,5914	0,7957
0,9	0,275	0,5492	0,3016	0,5245
0,95	0,090	0,3690	0,1362	0,3000
0,98	0,017	0,2120	0,0449	0,1304
1,0	0,0	0,0	0,0	0,0

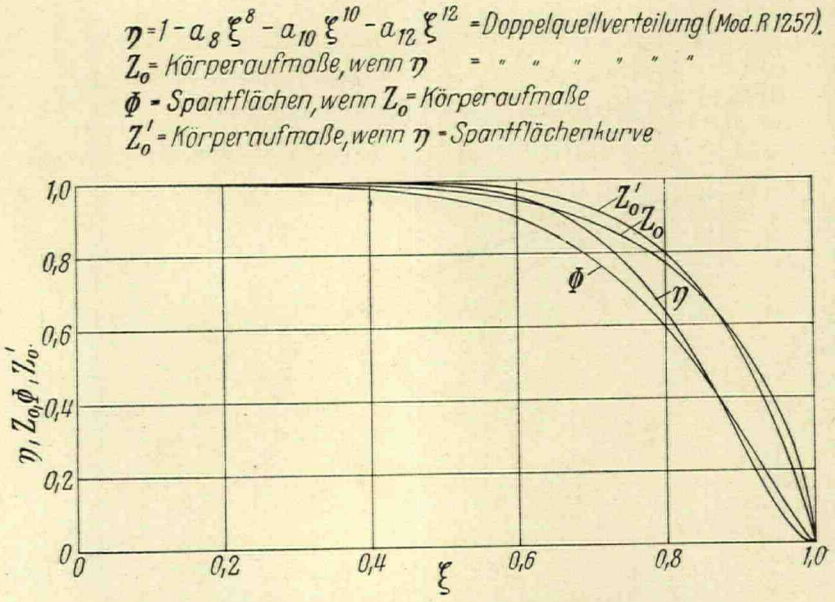


Bild 4. Aufmaße (Z_0) und Spantflächenkurve (Φ) eines Drehkörpers bei der erzeugenden Doppelquellverteilung $\eta = 1 - a_8\,\xi^8 - a_{10}\,\xi^{10} - a_{12}\,\xi^{12}$.

Werte. Für $\Xi < 0{,}87$ sind sie zum Teil sogar erheblich kleiner. Der Schärfegrad des Modells R. 1257 ist $\varphi = 0{,}80$ also gegenüber der Völligkeit der Quellverteilung $a = 0{,}82$ kleiner geworden. Erinnern wir uns der notwendigen Breitenkorrekturen $\varkappa$ (s. Tab. II), die für das schlankere Mod. R. 1242 größer als für das völlige R. 1257 waren, so sehen wir jetzt, daß die Abweichung der Spantflächenkurven von der Doppelquellverteilung, über die ganze Länge betrachtet, doch bei dem völligeren Mod. R. 1257 erheblich größer als bei R. 1242 ist. Aus einer Gegenüberstellung der Verteilung der einfachen Quellen und Senken (Bild 5), die durch die Differentialkurve $\frac{d\eta}{d\xi} = \sigma\,(\xi)$ gegeben ist, wird klar, daß die Breitenkorrekturen $\varkappa$ für den völligeren Körper infolge der im Bereich des Mittelschiffes kleinen Quell- und Senken-Stärken σ klein sind.

In Bild 6 sind lediglich die Aufmaße der Drehkörper, die sich für die beiden Doppelquellverteilungen ergeben, noch einmal für verschiedene Verhältnisse $L : B$ zusammengestellt; die Abweichungen sind gering.

Es ist hier nicht der Ort, weitere Untersuchungen über die Gesetzmäßigkeiten der Abweichungen von der Affinität anzustellen. Es sei jedoch auf die praktische Bedeutung hingewiesen, die eine Vervollständigung der Untersuchungen hat. Werden, wie beabsichtigt, für die von Weinblum [36] untersuchten Polynome in ähnlicher Weise wie dort die Spantflächenkurven derjenigen Körper zusammengestellt, die sich aus der Überlagerung der Quellströmung (unter Zugrundelegung eines Polynoms als Doppelquellverteilung) mit der Transportströmung ergeben, so ist man in der Lage,

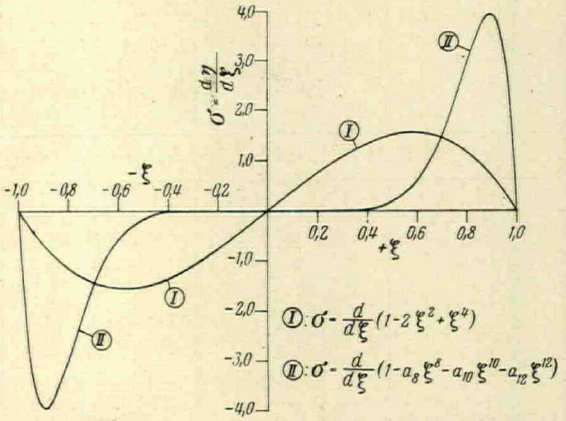


Bild 5. Vergleich der erzeugenden Quell-Senkenverteilungen (σ) für einen scharfen I ($\varphi = 0{,}546$) und einen völligen II ($\varphi = 0{,}80$) Drehkörper.

angenähert die Doppelquellverteilung für Spantflächenkurven eines tatsächlichen Schiffes durch Vergleich zu finden. Die bisher gemachten Einschränkungen hinsichtlich der Symmetrie von Vor- und Hinterschiff und des Eintrittswertes t der Quellverteilungskurve sind nicht zwingend. Zum Hauptspant unsymmetrische Formen können ohne weiteres durch Zusatzfunktionen dargestellt werden; Eintrittswerte $t \neq 0$ erfordern außer der gemachten Breitenkorrektur $\varkappa$ noch eine Längenkorrektur.

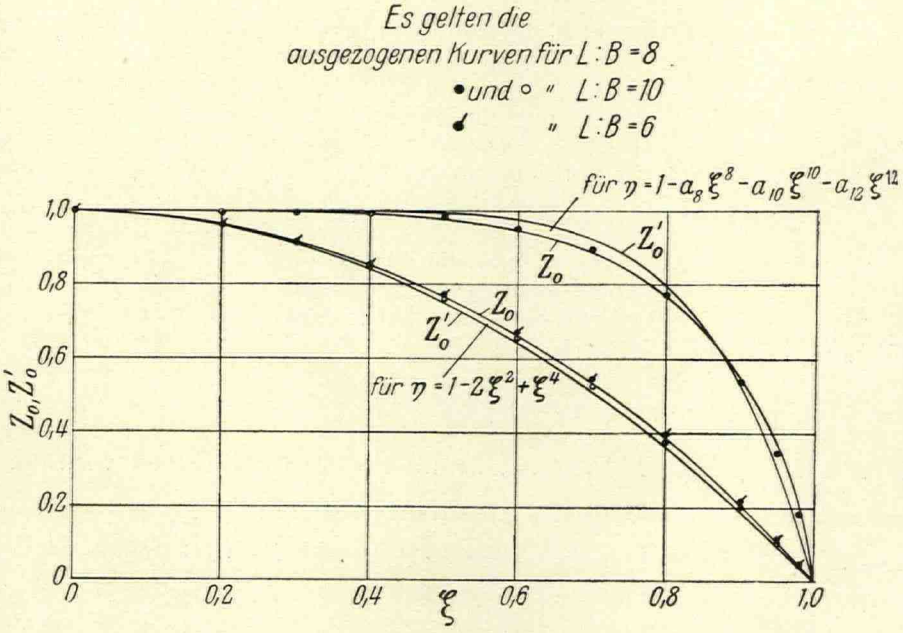


Bild 6. Änderung der Körperaufmaße bei Änderung des Verhältnisses $L : B$.

2. Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs der Oberfläche des Drehkörpers.

a) Theoretische Grundlagen.

Für die Berechnung des Reibungswiderstandes nach Millikan [22] ist die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung längs des Meridians des Drehkörpers erforderlich.

Die Grenzstromfläche, die mit der Oberfläche des Drehkörpers identisch ist, war durch $\Psi = \Psi_Q + \Psi_T = 0$ gegeben. Die Geschwindigkeitskomponente U_x in x-Richtung ist bestimmt durch:

$$U_x = \frac{1}{2\pi \cdot z} \cdot \frac{d\Psi}{dz}. \tag{20}$$

Mit den Gleichungen (1) und (3) für Ψ_Q und Ψ_T und $\cos\varphi = \frac{X-x}{\sqrt{(X-x)^2+Z^2}}$ wird:

$$U_x = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\mu(x) \cdot (X-x)}{\sqrt{(X-x)^2+Z^2}^3}\, dx + U_o. \tag{21}$$

Führen wir wieder die dimensionslosen Bezeichnungen $\xi = \frac{x}{L/2}$ bzw. $\Xi = \frac{X}{L/2}$; $\zeta = \frac{z}{B/2}$ bzw. $Z = \frac{Z}{B/2}$ und $\eta(\xi) = \frac{q_x}{q_{max}}$ ein, so ist mit $\mu = \frac{dq}{dx} = q_{max} \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}$ $= \frac{2 \cdot q_{max}}{L} \cdot \eta'(\xi)$, $q_{max} = \varkappa \frac{B^2\pi}{4} \cdot U_o$ und $(\Xi - \xi)^2 + \left(\frac{Z}{L/B}\right)^2 = R(\xi)$:

$$\frac{U_x}{U_o} = \frac{\varkappa}{4} \cdot \frac{1}{(L/B)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'(\xi) \cdot (\Xi - \xi)}{\sqrt{R^3}} d\xi + 1. \tag{22}$$

Man erkennt, daß die Integrale von der gleichen Form $\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^m}{\sqrt{R^3}} d\xi$ sind wie in (9), nur daß hier die Potenzen von ξ wegen der Ableitung $\eta'(\xi)$ um 1 niedriger sind; diese Potenzen sind aber schon in der Rekursionsformel (15) aufgetreten, und die entsprechenden Integralwerte in Tabelle I aufgeführt, so daß keine neue Rechenarbeit mehr nötig ist. Für die Aufpunkte Z_o muß interpoliert werden; der Schnittpunkt der in Abhängigkeit von Z aufgetragenen $\frac{U_x}{U_o}$-Kurven mit dem Wert des Aufpunktes des Meridians Z_o gibt die dort herrschende Geschwindigkeitskomponente in der x-Richtung an. Die Tangentialgeschwindigkeit U ist entsprechend der Skizze in Bild 7:

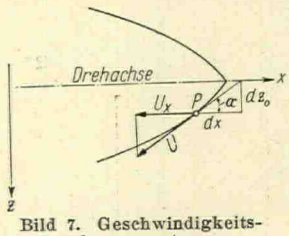


Bild 7. Geschwindigkeitskomponenten.

$$\frac{U}{U_o} = \frac{U_x}{U_o} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz_o}{dx}\right)^2}. \tag{23}$$

Die Werte $\frac{dz_o}{dx}$ werden zeichnerisch ermittelt. Der Druckverlauf wird durch den Ansatz der Bernouillischen Gleichung bestimmt: $p + \frac{1}{2}\varrho \cdot U^2 = \text{const.} = p_o + \frac{1}{2}\varrho \cdot U_o^2$, wobei p_o der Druck der ungestörten Strömung ist. Mit $p - p_o = \Delta p$ und $\frac{1}{2}\varrho \cdot U_o^2 = q =$ Staudruck wird

$$\frac{\Delta p}{q} = 1 - \left(\frac{U}{U_o}\right)^2. \tag{24}$$

b) Auswertung.

Nach diesen Gleichungen (22)—(24) wurde der Geschwindigkeits- und Druckverlauf der Potentialströmung um die Drehkörper berechnet. Für die Doppelquellverteilung $\eta = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$, also

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'(\xi) = -4 \cdot (\xi - \xi^3)$$

ergibt sich:

$$\frac{U_x}{U_o} = -\frac{\varkappa}{(L/B)^2} \cdot \left[\Xi \cdot \left(\int_{-1}^{+1} \frac{\xi}{\sqrt{R^3}} d\xi - \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^3}{\sqrt{R^3}} d\xi\right) - \left(\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2}{\sqrt{R^3}} d\xi - \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^4}{\sqrt{R^3}} d\xi\right)\right] + 1. \tag{25}$$

Entsprechend gilt für

$$\eta = 1 - a_8 \xi^8 - a_{10} \xi^{10} - a_{12} \xi^{12},$$

also

$$\eta'(\xi) = -4 \cdot (2\, a_8 \xi^7 + 2{,}5\, a_{10} \xi^9 + 3\, a_{12} \xi^{11}):$$

$$\frac{U_x}{U_o} = -\frac{\varkappa}{(L/B)^2} \cdot \left[\Xi \cdot \left(2\, a_8 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^7}{\sqrt{R^3}} d\xi + 2{,}5\, a_{10} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^9}{\sqrt{R^3}} d\xi + 3\, a_{12} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{11}}{\sqrt{R^3}} d\xi\right)\right.$$

$$\left. - \left(2\, a_8 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^8}{\sqrt{R^3}} d\xi + 2{,}5\, a_{10} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{10}}{\sqrt{R^3}} d\xi + 3\, a_{12} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{12}}{\sqrt{R^3}} d\xi\right)\right] + 1. \tag{26}$$

Für die Auswertung gilt die gleiche Einschränkung $\Xi < 0$, die schon auf S. 9 gemacht wurde; das Ergebnis der Rechnung ist aber aus Symmetriegründen für Vor- und Hinterschiff gültig. Soll der Geschwindigkeitsverlauf für Verhältnisse $(L:B)'$ bestimmt werden, so gelten hier die gleichen Überlegungen, wie sie schon auf S. 11 bei der Bestimmung der Umrisse der Drehkörper gemacht wurden. Eine einfache Umrechnung der für ein bestimmtes $L:B$ berechneten Werte in der eckigen Klammer mit $\frac{\varkappa_{(L:B)'}}{\varkappa_{(L:B)}} \cdot \left(\frac{(L:B)}{(L:B)'}\right)^2$ und eine Auftragung über entsprechenden Z-Werten gibt die Geschwindigkeitsgröße für den Körper mit $(L:B)'$ an.

In Tabelle V sind die Rechnungsergebnisse für Mod. R. 1242 und R. 1257 mit $L:B = 8$ zusammengestellt. In Bild 8 sind die Druckdifferenzen $\frac{\Delta p}{q}$ über der halben Länge der beiden Drehkörper aufgetragen; außerdem sind die Ergebnisse der auf gleiche Weise durchgeführten Rechnungen für Mod. R. 1242 mit $L:B = 6$ und 10 und Mod. R. 1257 mit $L:B = 10$ eingetragen. Die Darstellung gibt ein anschauliches Bild über den Verlauf der Über- und Unterdrücke.

Tabelle V.

Theoretischer Geschwindigkeits- und Druckverlauf für Mod. R. 1242 und R. 1257.

$L:B = 8$.

Ξ	$\frac{U_x}{U_0}$	$\frac{U}{U_0}$	$\frac{\Delta p}{q}$
Modell R. 1242.[5])			
0,0	1,0440	1,044	— 0,090
0,2	1,0393	1,041	— 0,083
0,3	1,0335	1,036	— 0,072
0,4	1,0244	1,028	— 0,057
0,5	1,0124	1,019	— 0,039
0,6	0,9965	1,008	— 0,017
0,7	0,9757	0,990	+ 0,020
0,8	0,9472	0,966	+ 0,067
0,9	0,9041	0,928	+ 0,139
0,95	0,8686	0,894	+ 0,201
0,98	0,8241	0,848	+ 0,281
1,0	0,0	0,0	+ 1,0
Modell R. 1257.			
0,0	1,0121	1,012	— 0,024
0,2	1,0148	1,015	— 0,030
0,3	1,0189	1,019	— 0,038
0,4	1,0261	1,026	— 0,053
0,5	1,0372	1,037	— 0,076
0,6	1,0504	1,052	— 0,106
0,7	1,0582	1,064	— 0,133
0,8	1,0400	1,061	— 0,125
0,9	0,9378	0,998	+ 0,003
0,95	0,7907	0,901	+ 0,187
0,98	0,5900	0,775	+ 0,400
1,0	0,0	0,0	+ 1,0

[5]) Siehe Fußnote 4 auf Seite 11.

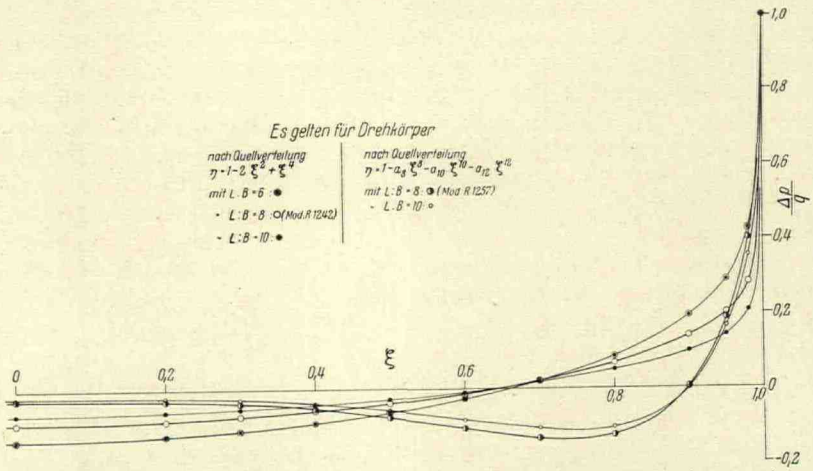


Bild 8. Theoretischer Druckverlauf längs der Oberfläche eines scharfen ($\varphi = 0{,}546$) und eines völligen ($\varphi = 0{,}80$) Drehkörpers mit verschiedenem Verhältnis $L : B$.

B. In zähigkeitsbehafteter Flüssigkeit.

1. Bezeichnungen der Widerstandsanteile.

Bei den bisherigen Betrachtungen war eine ideale Flüssigkeit vorausgesetzt; in dieser wird der Bewegung eines tiefgetauchten Körpers kein Widerstand entgegengesetzt. Bewegt sich der Körper aber in der zähigkeitsbehafteten Flüssigkeit, so treten infolge der inneren Reibung Widerstände auf, die zunächst durch eindeutige Begriffsbestimmungen festgelegt werden sollen.

Die heute noch vielfach übliche Zweiteilung des Gesamtwiderstandes eines an der Wasseroberfläche bewegten Schiffes in Reibungs- und Form- (oder Rest-) Widerstand, wobei der letztere sich aus Wellen- und Wirbelwiderstand zusammensetzt und als schwerebedingt angenommen wird, ist unscharf. Wie schon eingangs erwähnt, ist in den letzten Jahren häufig [1a], [5], [10], [11], [19] klargelegt worden, daß auch der Reibungswiderstand in starkem Maße formbedingt und der sogenannte Wirbelwiderstand ein zähigkeitsbedingter Widerstandsanteil ist. Mithin entfällt grundsätzlich die Berechtigung, Wellen- und Wirbelwiderstand unter der Bezeichnung Formwiderstand als schwerebedingte Widerstandsanteile zusammenzufassen[6]). Über die Bezeichnung der Widerstandsanteile hat Eisner [1a] besonders klare Ausführungen gemacht. Während die Bezeichnungen Reibungswiderstand und Wellenwiderstand eindeutige Aussagen über die Ursache des Widerstandes machen, ist dies bei den üblichen Bezeichnungen Ablösungs- oder Wirbelwiderstand nicht der Fall. Der hiermit gemeinte Widerstand ist ein Druckwiderstand, dessen Ursache hauptsächlich in der Grenzschichtablösung zu suchen ist. Infolge der Reibung der Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche des Körpers werden diese abgebremst und können gegen einen zu großen Druckanstieg am hinteren Staupunkt nicht mehr vordringen [6]; die Strömung reißt ab. Schon infolge der Verdickung der Grenzschicht ändern sich etwas die Strömungsverhältnisse und die Potentialdruckverteilung; insbesondere aber wird hinter der Ablösungsstelle der Potentialdruck nicht wieder erreicht, so daß eine Druckresultante, d. h. ein Druckwiderstand entsteht. Bei der gleichförmigen Bewegung eines sehr völligen Körpers bleibt in der Flüssig-

[6]) Es gibt jedoch Fälle bei Modellversuchen, in denen zu dem Wellenwiderstand der sogenannte Ablösungs- (Druck-) Widerstand zugeschlagen werden und ohne Fehler im Verhältnis der Massen auf die Großausführung umgerechnet werden kann, nämlich dann, wenn die Ablösungsstelle festliegt und der Druckwiderstand von der Reynoldsschen Zahl $\Re = \frac{U_0 \cdot L}{\nu}$ unabhängig ist (s. [11], S. 31).

keit ein Impulszuwachs zurück, der neben dem Reibungswiderstand also auch einem wesentlichen Druckwiderstand gleichwertig ist. Bei sehr schlanken Körpern, also ganz allmählichem Druckwiederanstieg, tritt eine eigentliche Grenzschichtablösung nicht ein, und doch bleibt hinter dem Körper ein mit Wirbeln durchsetztes Kielwasser zurück, das eine Folge der hinten am Körper glatt abfließenden, rotorbehafteten Grenzschicht ist. Hier ist der Impulszuwachs in der Flüssigkeit in der Hauptsache dem Reibungswiderstand gleichwertig. Obige Bezeichnungen Ablösungswiderstand und Wirbelwiderstand sind also unscharf, da die sich bildenden Wirbel sowohl eine Folge der Grenzschichtablösung, d. h. des Druckwiderstandes, als auch eine Folge des glatt abfließenden rotorbehafteten Grenzschichtwassers, also des Reibungswiderstandes, sein können.

Wir wollen die unscharfen Bezeichnungen vermeiden und unterscheiden bei den folgenden Betrachtungen tiefgetauchter Körper zwei Anteile des Gesamtwiderstandes: Reibungswiderstand $= W_r$ und Druckwiderstand $= W_d$. Der Reibungswiderstand ist eindeutig festgelegt als eine Kraft entgegen der Fahrtrichtung, die alle tangential auf die Körperoberfläche wirkenden Schubspannungen umfaßt, der Druckwiderstand als die Resultante in Fahrtrichtung aller normal an der Körperoberfläche wirksamen Druckspannungen; beide Widerstände sind zähigkeitsbedingt. — Bei der Bewegung eines Verdrängungskörpers an der Wasseroberfläche tritt ein schwerebedingter Druckwiderstand — der infolge der Auswirkung der Druckunterschiede an der Wasseroberfläche (Wellen) entsteht — hinzu, den wir Wellenwiderstand $= W_w$ nennen.

2. Theoretische Grundlagen für die Berechnung des Reibungswiderstandes eines Drehkörpers nach Millikan.

Ausgehend von den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung für die stationäre Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit leitet Millikan in der von Prandtl [26] für die ebene Strömung angegebenen Weise die sogenannte Grenzschichtgleichung für den rotationssymmetrischen Fall ab. Er erhält folgende Gleichungen, in denen wir einige Bestimmungsgrößen entsprechend den bisher gewählten Bezeichnungen ändern:

$$\left.\begin{aligned} &u\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{ds}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &\frac{\partial (zu)}{\partial s}+\frac{\partial (zv)}{\partial y}=0\\ &p=p(s);\quad y\ll C_r. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Hierin sind (vgl. Bild 9):

s = Abstand längs der Oberfläche vom vorderen Staupunkt
y = senkrechter Abstand von der Oberfläche
z = Abstand eines Punktes $P\ (s, y)$ von der Achse
u, v = s-, y-Komponenten der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht
ϱ = Dichte der Flüssigkeit
p = Druck
ν = kinematische Zähigkeit
C_r = Krümmungsradius des Meridians.

Im folgenden bedeuten:

δ = Dicke der Grenzschicht
U = Geschwindigkeit der Potentialströmung
z_o = Aufmaß des Meridians
τ_o = Schubspannung an der Wand.

Es wird vorausgesetzt, daß für $y \geqq \delta$ die Geschwindigkeit gleich der Potentialgeschwindigkeit U sei, d. h. die Grenzschichtdicke δ im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers klein sei. Nach Einführung von:

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{ds} = - U \cdot \frac{dU}{ds} = - U \cdot U'$$

(Bernouillische Gleichung) erhält Millikan bei Vernachlässigung der Differentiale höherer Ordnung durch Integration der Grenzschichtgleichung nach y von 0 bis δ die für den ebenen Fall sogenannte Kármánsche Integralbedingung [14] hier für den rotationssymmetrischen Fall (auch Impulssatz der Grenzschichttheorie genannt);

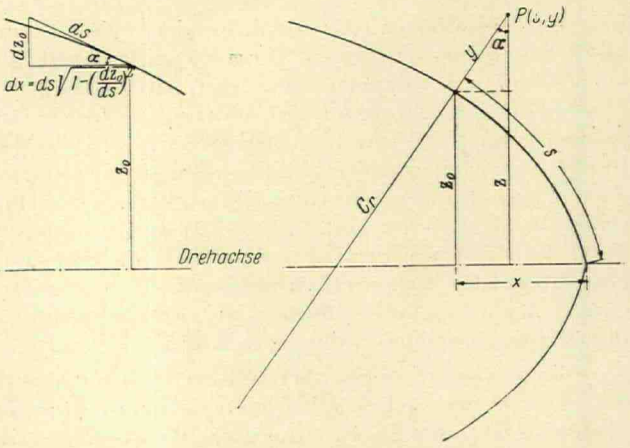


Bild 9. Übersicht über die Bezeichnungen für die Berechnung des Reibungswiderstandes eines Drehkörpers nach Millikan.

$$\frac{\partial}{\partial s} \cdot \int_0^\delta z \cdot u^2 \, dy - U \cdot \frac{\partial}{\partial s} \cdot \int_0^\delta z \cdot u \cdot dy = U \cdot U' \cdot \int_0^\delta z \cdot dy - \nu \cdot z_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 . \tag{28}$$

Für laminare Strömung kann $\nu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{\tau_0}{\varrho}$ gesetzt werden.

Mit $z = z_0 + y \cdot \cos \alpha$, wobei $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{dz_0}{ds} \right)^2}$ (s. Bild 9), und der vereinfachenden Voraussetzung $C_r \gg \delta \ll z_0$ wird:

$$\frac{\partial}{\partial s} \cdot \int_0^\delta u^2 \, dy - U \cdot \frac{\partial}{\partial s} \cdot \int_0^\delta u \cdot dy + \frac{\partial z_0}{z_0 \cdot \partial s} \cdot \left[\int_0^\delta u^2 \, dy - U \cdot \int_0^\delta u \, dy \right] = U \cdot U' \cdot \delta - \frac{\tau_0}{\varrho} . \tag{29}$$

Das letzte Glied auf der linken Seite zeigt den Unterschied gegenüber dem ebenen Problem, wo $z_0 \to \infty$. Der Punkt $z_0 = 0$ ist ein singulärer Punkt der Gleichung, der für jeden Fall gesondert untersucht werden muß.

Die Integralbedingung (29) wird von Millikan in der gleichen Weise, wie es v. Kármán für die zweidimensionale Strömung vorgeschlagen hat, zur Berechnung der Grenzschichtströmung angewandt. Durch die Annahme eines Geschwindigkeitsprofiles in der Grenzschicht $u\,(y)$ und eines entsprechenden Gesetzes der Schubspannung $\tau_0\,(u)$ wird (29) auf eine einfache Differentialgleichung für die unbekannte Grenzschichtdicke $\delta\,(s)$ zurückgeführt. An sich ist die aufgestellte Gleichung (29) nur für laminare Strömung gültig. Millikan benutzt sie jedoch — wie schon Prandtl [27] und v. Kármán — auch zur Berechnung der turbulenten Grenzschichtströmung, indem er die entsprechenden, durch Versuche gefundenen Gesetze $u\,(y)$ und $\tau_0\,(u)$ für die turbulente Strömung einsetzt.

a) Für laminare Grenzschichtströmung.

Für die laminare Strömung setzt Millikan nach Pohlhausen [25]:

$$\frac{u}{U} = 2 \cdot \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 . \tag{30}$$

Die Schubspannung ist dann:

$$\frac{\tau_o}{\varrho} = \nu \left(\frac{du}{dy}\right)_o = 2\,\nu \frac{U}{\delta}. \tag{31}$$

In dimensionsloser Form dargestellt, erhält er mit:

L = Länge des Drehkörpers in der Achse
x = Abstand vom vorderen Staupunkt auf der Drehachse

$dx = ds \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{dz_o}{ds}\right)^2}$ (s. Bild 9)

U_o = Geschwindigkeit der ungestörten Transportströmung

$\Re = \frac{U_o \cdot L}{\nu}$ = Reynoldssche Zahl der Strömung

$\Re_\delta = \frac{U \cdot \delta}{\nu}$ = Reynoldssche Zahl der Grenzschichtströmung = $\Re_\delta(x)$:

$$\frac{\delta_{lam.}}{L} = \frac{\sqrt{30}}{\Re^{1/2}} \cdot M\left(\frac{x}{L}\right); \quad \Re_{\delta_{lam.}} = \sqrt{30} \cdot \Re^{1/2} \frac{U}{U_o} \cdot M\left(\frac{x}{L}\right), \tag{32}$$

wobei

$$M\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{\left(\frac{U}{U_o}\right)^{9/2} \cdot \frac{z_o}{L}} \cdot \sqrt{\int_o^{x/L} \frac{\left(\frac{U}{U_o}\right)^8 \cdot \left(\frac{z_o}{L}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{dz_o}{ds}\right)^2}}\, d\left(\frac{x}{L}\right)}. \tag{33}$$ [7]

Nach Definition ist:

$$W_r = 2\,\pi \cdot \int_o^x z_o \cdot \tau_o \cdot dx$$

$$= 4\,\pi\,\nu\,\varrho \cdot \int_o^x \frac{z_o \cdot U}{\delta}\, dx.$$

Der Widerstandsbeiwert, bezogen auf die Oberfläche des Körpers O, wird:

$$\zeta_{r_{lam.}} = \frac{W_r}{\varrho/2 \cdot U_o^2 \cdot O} = \frac{4{,}59 \cdot L^2}{\Re^{1/2} \cdot O} \cdot \int_o^{x/L} \frac{\frac{U}{U_o} \cdot \frac{z_o}{L}}{M}\, d\left(\frac{x}{L}\right). \tag{34}$$

b) Für turbulente Grenzschichtströmung.

Für die turbulente Grenzschicht nimmt Millikan das 1/7-Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung normal zur Oberfläche an:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}. \tag{35}$$

Heute wissen wir, daß für den ganzen Bereich von Reynoldsschen Zahlen für turbulente Strömung das logarithmische Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung anzusetzen ist. Moore [23] hat neuerdings die Millikansche Rechnung durch Einführung des v. Kármánschen logarithmischen Gesetzes [16] erweitert. Für den Bereich von Reynoldsschen Zahlen der von uns untersuchten Modelle dürfte das 1/7-Potenzgesetz angenähert zutreffend sein, so daß wir den Millikanschen Ansatz auch für unsere Untersuchungen über-

[7] In der Millikanschen Arbeit [22] ist in der Gleichung (15) für $M\left(\frac{a}{L}\right)$ das Wurzelzeichen vor dem Integral versehentlich vergessen worden.

nehmen. Das der Geschwindigkeitsverteilung (35) entsprechende Schubspannungsgesetz an der Wand wählt Millikan nach v. Kármán [14]:

$$\frac{\tau_o}{\varrho} = 0{,}0225 \cdot U^2 \left(\frac{\nu}{U \cdot \delta}\right)^{1/4}. \tag{36}$$

Den Wert 0,0225 errechnete v. Kármán aus Rohrversuchsergebnissen, indem er das Geschwindigkeitsprofil in Rohrmitte ausrundete. Bei Einsetzen der Gesetze (35) und (36) in die Impulsgleichung für die ebene Platte berechnete v. Kármán den Widerstandsbeiwert der Platte zu $\zeta_r = 0{,}072 \cdot \Re^{-1/5}$. Prandtl setzt in Gl. (36) statt 0,0225 den Wert 0,0233 (ohne „Mittenkorrektur", wie auch v. Kármán später 1932 [16]) und erhält $\zeta_r = 0{,}074 \cdot \Re^{-1/5}$. Wir benutzen für die vorliegenden Rechnungen die Millikanschen, von v. Kármán übernommenen Werte.

Unter der Annahme, daß die Grenzschicht vom vorderen Staupunkt bis zu einem, noch näher zu bestimmenden kritischen Punkt $\frac{x_c}{L}$ zunächst laminaren Charakter habe, in diesem Punkt aber plötzlich in eine turbulente Grenzschicht umschlage, erhält Millikan:

$$\frac{\delta_{turb.}}{L} = \frac{0{,}370}{\Re^{1/5}} \cdot N\left(\frac{x}{L}, \frac{x_c}{L}\right); \quad \Re_{\delta_{turb.}} = 0{,}370 \cdot \Re^{1/5} \cdot \frac{U}{U_o} \cdot N\left(\frac{x}{L}, \frac{x_c}{L}\right), \tag{37}$$

wobei:

$$N\left(\frac{x}{L}, \frac{x_c}{L}\right) = \frac{1}{\left(\frac{U}{U_o}\right)^{23/7} \cdot \frac{z_o}{L}} \cdot \left[\int_{x_c/L}^{x/L} \frac{\left(\frac{U}{U_o}\right)^{27/7} \cdot \left(\frac{z_o}{L}\right)^{5/4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dz_o}{ds}\right)^2}} d\left(\frac{x}{L}\right) + 3{,}46 \cdot \Re^{1/4} \cdot \left(\frac{\delta_{c\,turb.}}{L}\right)^{5/4} \cdot \left(\frac{U_c}{U_o}\right)^{115/28} \cdot \left(\frac{z_{o_c}}{L}\right)^{5/4}\right]^{4/5}. \tag{38}$$

Entsprechend der Definition für den Reibungswiderstand und (36) erhält man für den Widerstandsbeiwert auf die Oberfläche bezogen bei turbulenter Grenzschicht:

$$\zeta_{r_{turb.}} = \frac{0{,}3625}{\Re^{1/5}} \cdot \frac{L^2}{O} \cdot \int_{x_c/L}^{1} \frac{\left(\frac{U}{U_o}\right)^{7/4} \cdot \frac{z_o}{L}}{N^{1/4}} d\left(\frac{x}{L}\right). \tag{39}$$

c) für turbulente Grenzschichtströmung mit laminarem Anlauf.

Der Gesamtwiderstandsbeiwert ist

$$\zeta_{r_{Ges.}} = \zeta_{r_{lam.}} + \zeta_{r_{turb.}}, \tag{40}$$

wenn in (34) die Integration in den Grenzen 0 und $\frac{x_c}{L}$ durchgeführt wird.

3. Durchführung der Rechnung und Rechnungsergebnisse für die Reibungswiderstandsbeiwerte und Grenzschichtdicken.

Für die Durchführung der Berechnung des Reibungswiderstandes nach der Theorie von Millikan sind zunächst Annahmen über die Stelle des Umschlages der laminaren Grenzschichtströmung zur turbulenten erforderlich. Da bei den unter III. beschriebenen Modellversuchen sämtliche Modelle mit künstlicher Turbulenzerzeugung geschleppt worden sind, liegt die Umschlagstelle auch für die Vergleichsrechnung fest. Die Stolperdrähte waren auf 1/20 L von vorne, also $\frac{x_c}{L} = 0{,}05$, angebracht. Zur weiteren Vereinfachung der Berechnung von (38) wurde angenommen, daß an der Umschlagstelle

eine solche Grenzschichtdicke und entsprechende Schubspannung vorhanden sei, als ob die Grenzschichtströmung von Anfang an turbulent gewesen wäre. Diese Annahme bedeutet, daß das 2. Glied in der eckigen Klammer fortfällt, also N allein von $\frac{x}{L}$ abhängig ist. Der Fehler, den wir durch diese Annahme machen, ist vernachlässigbar klein, wie eine Proberechnung gezeigt hat.

Mit diesen vereinfachenden Voraussetzungen ist die Berechnung des Reibungswiderstandes des Drehkörpers verhältnismäßig einfach in Tabellenform durchzuführen. Die vorkommenden Verhältnisse $\frac{z_0}{L}$ und $\frac{U}{U_0}$ sind für den nach der Potentialtheorie unter II. A. ermittelten Drehkörper gegebene Funktionen von $\frac{x}{L}$. Der Wert $\frac{dz_0}{ds}$ wird aus der Zeichnung ermittelt.

Z u e r s t wurde der Reibungswiderstandsbeiwert des Körpers berechnet, als ob über die ganze Länge eine t u r b u l e n t e Grenzschichtströmung bestehe ($\zeta_{r_{turb.\,total}}$). Die Integrale in (38) und (39) werden mit Hilfe eines Planimeters ausgewertet. In Bild 10 sind die Werte $\frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{7/4} \cdot \frac{z_0}{L}}{N^{1/4}}$ über $\frac{x}{L}$ für Modell R. 1242 und R. 1257 aufgetragen; die Kurven stellen die Längenverteilung des Reibungswiderstandes dar.

Als z w e i t e s wurde der Reibungswiderstandsbeiwert für l a m i n a r e Grenzschichtströmung von $\frac{x}{L} = 0$ bis $\frac{x_c}{L} = 0{,}05$ (Stolperdraht) nach (34) berechnet ($\zeta_{r_{lam.\,bis}\,\frac{x_c}{L}=0{,}05}$). Der Beiwert des Reibungswiderstandes für die kombinierte Grenzschichtströmung (laminare Strömung bis zum Stolperdraht und von dort ab turbulente) ergibt sich schließlich mit (40), wobei

$$\zeta_{r_{turb.}} = \zeta_{r_{turb.\,total}} - \zeta_{r_{turb.\,bis}\,\frac{x_c}{L}=0{,}05}$$

ist. Die Ergebnisse der Berechnungen sind für $\Re = 6 \cdot 10^6$ in Tabelle VI zusammengestellt. Auf eine Rechnung für Mod. R. 1257 mit $L : B = 10$ wurde

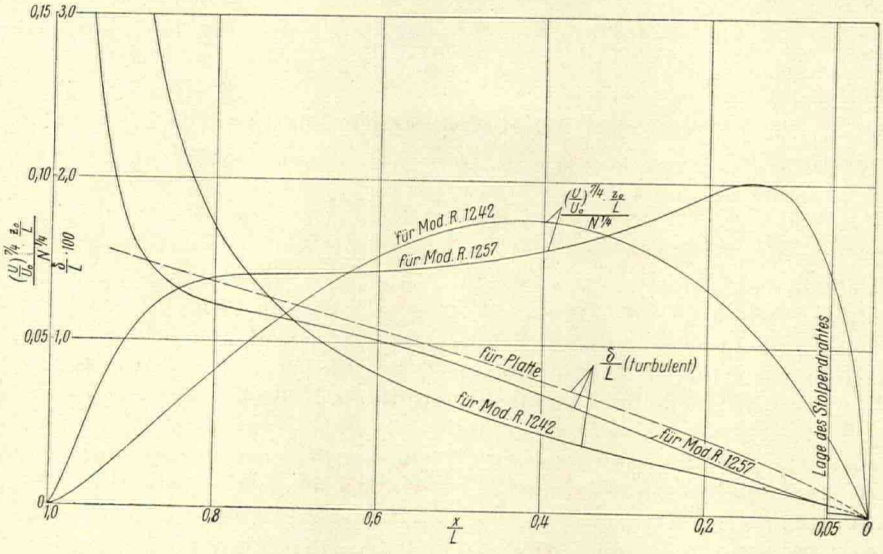


Bild 10. Rechnerisch ermittelte Längenverteilung des Reibungswiderstandes $\left(\frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{7/4} \cdot \frac{z_0}{L}}{N^{1/4}}\right)$ und der Grenzschichtdicken $\left(\frac{\delta}{L}\right)$.

verzichtet, da die Modellversuche mit Mod. R. 1257 gezeigt hatten, daß bei diesen völligen Drehkörpern ($\varphi = 0{,}8$) beträchtliche Druckwiderstände auftreten, d. h. also die Millikanschen Ansätze wenigstens im Hinterschiff nicht mehr gültig sind. In Spalte 6 und 7 sind die Abweichungen der Beiwerte für die Körper von dem Plattenbeiwert angegeben, der sich nach der Gleichung

$$\zeta_{r\,Platte} = 0{,}072 \cdot \Re^{-1/5} \text{ mit } \Re = 6 \cdot 10^6 \text{ zu } 3{,}177 \cdot 10^{-3}$$

ergibt. Von einer Erörterung der Rechnungsergebnisse wird an dieser Stelle abgesehen; sie wird erst in IV. nach den bei den Modellversuchen gewonnenen Erkenntnissen gegeben.

Tabelle VI.

Ergebnisse der Berechnung der Reibungswiderstandsbeiwerte nach Millikan für $\Re = 6 \cdot 10^6$.

1	2	3	4	5	6	7
Modell	φ	L/B	$\zeta_{r\,turb.\,total}$	$\zeta_{r\,Ges.}$	Abweichung gegen $\zeta_{r\,Platte}$	
					von 4	von 5
R. 1242	0,546	6	$3{,}468 \cdot 10^{-3}$	$3{,}441 \cdot 10^{-3}$	+ 9,2 %	+ 8,3 %
R. 1242	0,546	8	$3{,}411 \cdot 10^{-3}$	$3{,}372 \cdot 10^{-3}$	+ 7,4 %	+ 6,1 %
R. 1242	0,546	10	$3{,}375 \cdot 10^{-3}$	$3{,}359 \cdot 10^{-3}$	+ 6,2 %	+ 5,7 %
R. 1257	0,80	8	$3{,}380 \cdot 10^{-3}$	$3{,}332 \cdot 10^{-3}$	+ 6,4 %	+ 4,9 %

Der Verlauf der theoretischen Grenzschichtdicken für die Drehkörper Mod. R. 1242 und R. 1257 ist für $\Re = 6 \cdot 10^6$ nach (32) und (37) berechnet und in Bild 10 dargestellt. Zum Vergleich ist der Verlauf der Grenzschichtdicken für die glatte Platte nach der Gleichung $\frac{\delta_x}{L} = 0{,}37 \cdot \frac{x}{L} \cdot \Re_x^{-1/5}$, die der Gl. $\zeta_r = 0{,}072 \cdot \Re^{-1/5}$ entspricht, gestrichelt eingetragen, wobei $\Re_x = \frac{U_0 \cdot x}{\nu}$. Für die scharfen Körper mit $L : B = 6$, 8 und 10 ergab sich, daß die relativen Grenzschichtdicken $\frac{\delta}{L}$ bei Annahme gleicher Körperlänge praktisch gleich sind.

III. Modellversuche.

Die Modellversuche wurden in der großen Schlepprinne der VWS vom Verfasser durchgeführt.

A. Übersicht über die Modelle.

In Tab. VII sind die Hauptabmessungen der zum Hauptspant symmetrischen Drehkörper (R.), deren Umrisse auf Grund der in II. A. angenommenen Doppelquellverteilungen dimensionslos ermittelt wurden, sowie die der Doppelmodelle (D.) zusammengestellt. Als Grundform für die D.-Modelle wurde ein schnelles Frachtschiff mittlerer Völligkeit gewählt, das schon von Laute [19], Voigt [35] und Graff [5] in der VWS untersucht wurde. Die Spanten dieser Grundform wurden für größere Verhältnisse Breite zu Tiefgang ($B : T$) derart verzerrt, daß die Spantflächen die gleichen blieben.

Die Modelle, die von Graff untersucht wurden, sind mit aufgeführt, soweit sie sich zu einem Vergleich mit den Modellen vom Verf. eignen. Dabei ist zu beachten, daß das Graff-Modell R. 1131 zum Hauptspant unsymmetrisch ist und eine Form besitzt, die der Grundform des Modells D. 1130 entspricht.

Tabelle VII.

Übersicht über die Modelle.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Modell Nr.	L in m	B in m	T in m	$L:B$	$B:T$	V in m³	O in m²	α	β	δ	φ	Bemerkungen
R. 1242	4,00	0,500	—	8,00	—	0.429	4,262	0,682	0,785	0,429	0,546	achsensymmetr. Drehkörper
R. 1286	4,00	0,500	—	8,00	—	0,524	4,935	0,785	0,785	0,524	0,667	Rotations-ellipsoid
R. 1257	4,00	0,500	—	8,00	—	0,628	5,460	0,869	0,785	0,628	0,800	achsensymmetr. Drehkörper
R. 1257a	4,00	0,500	—	8,00	—	0,528	4,861	0,775	0,785	0,528	0,673	unsymmetrischer Drehkörper
R. 1257b	4,00	0,500	—	8,00	—	0,528	4,861	0,775	0,785	0,528	0,673	unsymmetrischer Drehkörper
R. 1131	4,006	0,544	—	7,36	—	0,704	5,725	0,786	0,785	0,592	0,754	unsymmetr. Drehkörper (Graff)
D. 1130	4,006	0,531	0,223	7,54	2,4	0,704	6,290	0,826	0,986	0,743	0,754	Schiffsdoppelmodell (Graff)
D. 1240	4,00	0,626	0,189	6,40	3,3	0,704	6,399	0,826	0,986	0,743	0,754	Schiffsdoppelmodell
D. 1241	4,00	0,730	0,162	5,49	4,5	0,704	6,661	0,826	0,986	0,743	0,754	Schiffsdoppelmodell
R. 1257a besteht aus: R. 1242 vorne, R. 1257 hinten. R. 1257b besteht aus: R. 1257 vorne, R. 1242 hinten.												

Ferner fanden noch drei Modelle von Drehkörpern (Mod. R. 1286 und R. 1257a und b) in der Tabelle Aufnahme, die nach Abschluß des Versuchsprogramms zu anderen Untersuchungen verwendet wurden, deren Ergebnisse aber auch in diesem Zusammenhang von Bedeutung sind. Mod. R. 1286 stellt ein Rotationsellipsoid dar, und R. 1257a und b sind eine Verbindung der Modelle R. 1242 und R. 1257; bei R. 1257a gleicht das Vorschiff Modell R. 1242 und das Hinterschiff Mod. R. 1257, und bei R. 1257b ist es umgekehrt. Die in Spalte 8 angegebenen Oberflächen sind nicht die absolut benetzten Oberflächen, sondern die Ersatzflächen (s. Gutsche [8], S. 42), d. h. in Strömungsrichtung liegende Flächenkomponenten; also statt $0' = 2\pi \cdot \int_{s=o}^{s=s} r\,ds$, wobei s = Länge des Meridians ist, wird $0 = 2\pi \cdot \int_{x=o}^{x=L} r\,dx$ gesetzt.

Die Modelle sind sämtlich aus Paraffin mit entsprechenden Einbauten für die Aufhängung an der Meßeinrichtung hergestellt. Die Drehkörper konnten leider mangels einer entsprechenden Einrichtung nicht gedreht werden, wie es wohl zur Erzielung einer guten Modellgenauigkeit wünschenswert gewesen wäre, sondern mußten auf Grund von Fräslinien wie die üblichen Schiffsmodelle von Hand bearbeitet werden. Ein Lackanstrich gab den Modellen eine glatte Oberfläche.

B. Beschreibung des Meßverfahrens.

Die Einrichtungen der VWS, wie Schlepprinne, Schleppwagen, Widerstandsdynamometer, Geschwindigkeitsmessung aus Weg und Zeit u. a. mehr sind aus früheren Veröffentlichungen [11] bekannt.

1. Messung des Gesamtwiderstandes.

Die Modelle wurden sämtlich in einer Tauchtiefe von 1,50 m bis Mitte Körper geschleppt. Für andere Zwecke durchgeführte Versuche in geringeren Tauchtiefen bestätigten die Annahme, daß — wie auch schon von

Graff festgestellt wurde — in dieser Tiefe keine Beeinflussung der Widerstandsmessungen bei den untersuchten Modellgeschwindigkeiten U_0 = rd. 0,5 bis 2,2 m/sec, d. h. Reynoldsschen Zahlen von $\Re$ = rd. $2 \cdot 10^6$ bis $8 \cdot 10^6$ durch die freie Wasseroberfläche eintritt. Der mögliche Einfluß der Rinnenwandungen wird in D. behandelt.

Zu den Widerstandsmessungen wurde die von Graff des näheren beschriebene Hebeltiefschleppvorrichtung (s. [5] Bild 2) benutzt unter Beachtung der dort angegebenen Maßnahmen zur einwandfreien Widerstandsmessung. Die Schwimmkörper wurden vor dem Einbau unter dem Schleppwagen freischwimmend ausgetrimmt und dann zusätzlich belastet, um einen Untertrieb zu erhalten; diese Maßnahme war zweckmäßig, da im umgekehrten Fall, also bei Auftrieb, leicht eine Drehung um die Aufhängepunkte A und B eintrat und ein Verkanten in den Lagern, d. h. zusätzliche Reibung möglich war. Auf sauberen Einbau des Modells (gute Lagerschmierung, genaues Ausrichten des Modells usw.) wurde großer Wert gelegt. Die Meßfahrten wurden stets erst begonnen, wenn die Apparatur bei Belastung einer Waagschale des Modelldynamometers mit 5 g einen Ausschlag zeigte. Häufige Eichungen der Gewichtskomponente der Hebel bei Auslenkungen von der Nullstellung und Nachprüfung der Nullstellung, langsames Anfahren und Bremsen des Schleppwagens waren bei der erforderlichen Genauigkeit der Messungen Vorbedingung. Die Wassertemperatur wurde täglich dreimal in der Tauchtiefe der Modelle gemessen.

Sämtliche Modelle erhielten auf 1/20 L von vorne einen Stolperdraht von 1,0 mm ⌀, um einerseits Umschlag der laminaren zur turbulenten Grenzschichtströmung zu erzwingen und andererseits, um den Umschlagpunkt genau festgelegt zu haben, was mit Rücksicht auf die theoretischen Untersuchungen (s. S. 26) wichtig war. Bei Modell R. 1257 wurde außerdem die Wirkungsweise verschiedener Arten von künstlicher Turbulenzerzeugung: Stolperdrähte von 0,2, 0,5, 0,8 und 1,0 mm ⌀ auf 1/20 L von vorne sowie verschieden breite Aufrauhungsstreifen auf 150 mm von vorne, untersucht. Die Aufrauhung wurde mit einem Hobeleisen der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt von 35 mm Breite, das in Abständen von 0,8 mm 0,5 mm tief ausgezahnt war, von Hand in das Modell geschnitten. Die Breiten der untersuchten Aufrauhungsstreifen im Modell betrugen 35, 70 und 105 mm.

2. Messung der Druckverteilung.

Zur Ermittlung des Druckwiderstandes waren Druckmessungen längs der Oberfläche der Verdrängungskörper erforderlich. Die Messungen wurden lediglich an dem völligen Modell R. 1257 durchgeführt, da hier erwartungsgemäß am ehesten Ablösung eintrat. Um festzustellen, ob der Druckwiderstand infolge Ablösung kennzahlabhängig ist und ob sich die Ablösungsstelle verschiebt, wurden die Meßgeschwindigkeiten U_0 = 0,6, 1,4 und 2,2 m/sec gewählt. Jede Meßfahrt wurde zur Kontrolle mindestens einmal wiederholt. Durch die Symmetrie von Vor- und Hinterschiff war eine weitere Kontrolle durch Vor- und Rückwärtsfahrt gegeben. Der Stolperdraht wurde dabei an seiner Stelle $\left(\frac{x}{L} = 0{,}05 \text{ von vorne}\right)$ belassen.

Wegen besonderer Einbauschwierigkeiten der Druckmeßstellen, die sich bei den Graffschen Versuchen ergeben hatten (s. [5] S. 204), wurde ein neues Verfahren entwickelt. Voraussetzung für eine einwandfreie Druckmessung ist: glattes Abschließen der Meßstelle mit der Körperoberfläche, normal zur Oberfläche stehende und saubere Bohrung und richtiges Verhältnis von Durchmesser zu Tiefe der Meßöffnung. Bild 11 zeigt die Anordnung der Druckmeßstellen. Eine Zweiteilung des Einbauvorganges in 1. Eingießen des kurzen Messingrohres von 4 mm l. W. mit aufgeschobenem Gummischlauch gleichen Innendurchmessers, 2. Eingießen des Druckmeßstückes

mit der eigentlichen Meßöffnung von 1,5 mm l. W. umging die früher aufgetretenen Schwierigkeiten beim Einbau, wobei durchgehende Röhrchen von 1,5 mm l. W. mit aufgeschobenem Schlauch eingegossen wurden. Diese dünnen Röhrchen mit dem verhältnismäßig schweren Schlauch konnten von außen nur unzulänglich während des Gießvorganges gehalten werden, so daß sie meist schief zur Modelloberfläche standen und nachgearbeitet werden mußten. Bei der neuen Anordnung konnte sowohl bei dem ersten Eingießvorgang des Messingrohres wegen seines 4 mm-Innendurchmessers als auch beim zweiten das leichte Druckmeßstück durch besondere Halterungen gut gehalten werden. Die Lochtiefe des Druckmeßstückes betrug 9 mm; die Bohrung war an der Meßöffnung selbst leicht abgerundet. Die Halterung für den Einbau des Druckmeßstückes war so ausgebildet, daß sie gleichzeitig ein Ausrichten der Bohrung normal zur Körperoberfläche gestattete; die mit der Modelloberfläche glatt abschließende Fläche des Druckmeßstückes hatte nur einen Durchmesser von 3 mm. Die für den Eingießvorgang des Druckmeßstückes nötige Abdichtung des Messingrohres mittels Ton wurde nachträglich mit Wasser ausgespült.

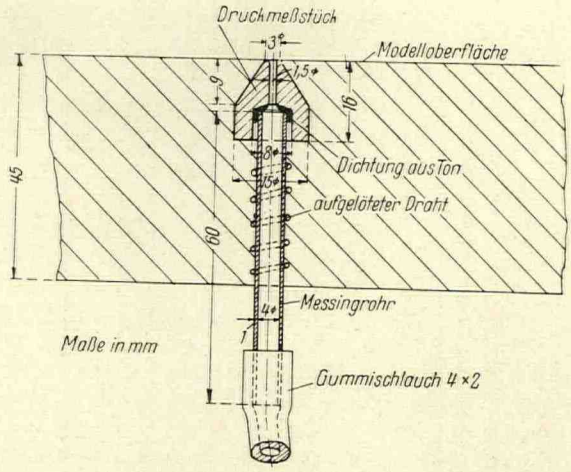


Bild 11. Anordnung einer Druckmeßstelle im Paraffinmodell.

Die Druckmeßstellen waren auf einem Meridianschnitt des Modelles an seiner Unterseite an 36 Stellen angeordnet; die Abstände voneinander betrugen an den Modellenden 5 cm und 10 cm, im Mittelteil des Modells etwa 20 cm (s. Bild 19). Die Schläuche wurden im Inneren des Körpers von vorn und hinten gebündelt bis zum Handloch geführt und hier an 36 Kupferröhrchen von 3 mm l. W. angeschlossen. Die Kupferröhrchen waren in 2 hintereinander angeordnete elliptische Profilstangen (30×20 mm) eingezogen und rd. 0,5 m über den Wasserspiegel geführt. Durch die Hochführung der Meßleitungen sämtlicher Meßstellen über den Wasserspiegel war nur ein einmaliger Einbau des 1,50 m tiefgetauchten Modelles unter dem Schleppwagen notwendig.

Als Druckmeßgerät dienten zwei Mikromanometer, die von Dr. Gutsche in der VWS entwickelt und gebaut worden waren. Die Wirkungsweise dieser mit 7 Meßsäulen ausgestatteten Mikromanometer sowie konstruktive Einzelheiten werden demnächst von Gutsche veröffentlicht werden. Die charakteristischen Merkmale dieser Druckmeßgeräte sind: Messung der Wasserdrücke durch geneigte Alkoholsäulen, die in (nach dem K.P.G.-Verfahren mit $\pm$ $^1/_{100}$ mm Genauigkeit hergestellten) Glasrohren von 1,83 mm l. W. spielen; als Trennflüssigkeit zwischen Alkohol und Wasser dient Quecksilber. Durch die Neigung der Meßsäulen sind 2, 5, 10, 20 und 50-fache Vergrößerungen der Ablesungen des Wasserdruckes möglich. Die Einstellgeschwindigkeit der Meßsäulen auf den konstanten Endwert des Wasserdrucks ist sehr groß, was für den Schleppwagenbetrieb von ausschlaggebender Bedeutung ist; infolge der kleinen Rohrdurchmesser der Meßsäulen sind nämlich der Wassertransport, d. h. die Fließgeschwindigkeit und damit der Widerstand in den z. T. sehr langen Meßleitungen vom Manometer bis zur Druckmeßöffnung gering. Das Mikromanometer besitzt außerdem eine Regelvorrichtung für gleichen Stand der in Augenhöhe angesaugten

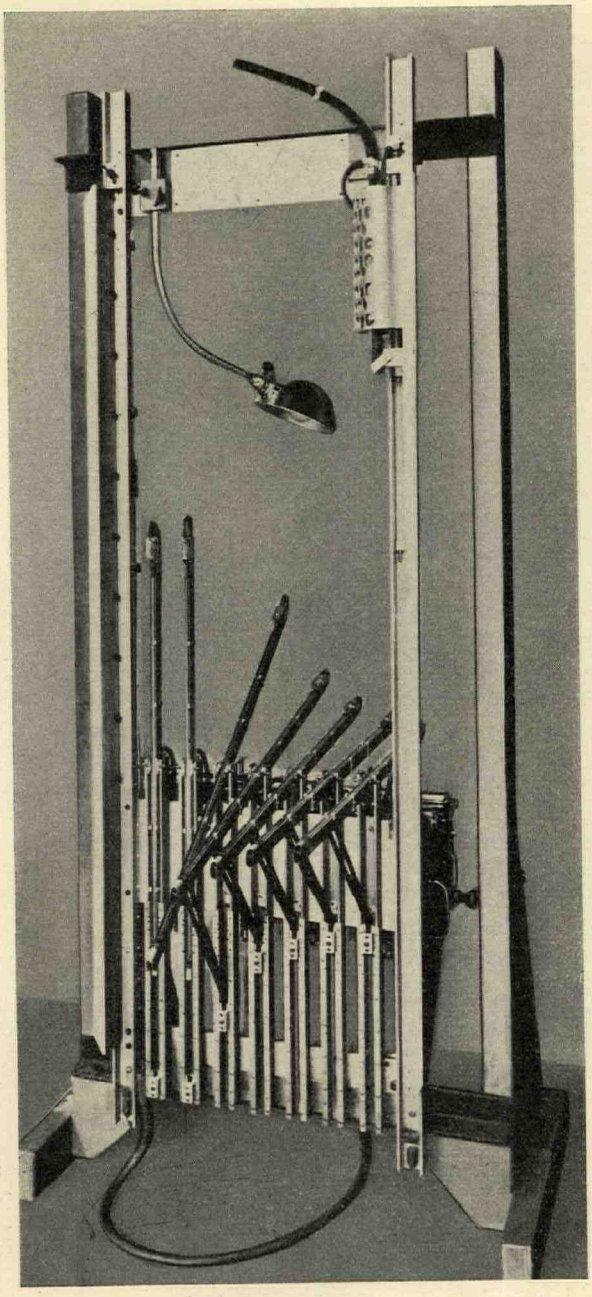


Bild 12. Ansicht des Druckmeßgerätes (Mikromanometer von Gutsche).

Meßsäulen (Änderung des Unterdruckes über den Meßsäulen). Die Meßleitungen können gleichzeitig geschlossen werden. Bild 12 zeigt eine Ansicht des Druckmeßgerätes mit verschieden eingestellten Neigungen der Manometerrohre (von links nach rechts Vergrößerungen: 1. und 2. Rohr 1fach, 3. Rohr 2fach, 4. Rohr 5fach, 5. Rohr 10fach, 6. Rohr 20fach und 7. Rohr 50fach). Als Bezugsgröße für die Drücke an den Meßöffnungen wurden die statischen Drücke eines Basisrohres [7] (vereinfachtes Prandtlsches Staurohr ohne Stauöffnung) verwendet, das vorn seitlich am Schleppwagen angebracht war. Laute [19] und Graff [5] haben bei ihren Messungen die Vorzüge eines solchen Rohres gegenüber einem Topf auf dem Schleppwagen als Festpunkt des näheren erörtert; das bei den Versuchen vom Verf. verwendete Basisrohr der VWS ist gegenüber dem früheren bedeutend vervollkommnet. Durch zahlreiche Eichungen ist die Basisrohranzeige genügend festgelegt.

Die Aufstellung von zwei Gutscheschen Mikromanometern mit je sieben Meßsäulen, von denen je eine an das Basisrohr angeschlossen wurde, gestattete also ein gleichzeitiges Messen der Drücke an $2 \times 6 = 12$ Meßstellen des Modells. Nach längerem Durchsaugen der Meßleitung und gleichzeitigem Kneten der zum Manometer führenden Schläuche, was eine mögliche Luftansammlung in der Meßleitung beseitigen sollte, und nach dem Ansaugen der Meßsäulen in gewünschte Höhe wurde die Nullstellung in Ruhe abgelesen. Vor dem Anfahren des Schleppwagens wurden die Meßleitungen geschlossen und erst zur eigentlichen Druckmessung bei Fahrt wieder geöffnet, nachdem eine konstante Fahrgeschwindigkeit erreicht war. Durch die oben angedeutete Regelvorrichtung konnte die Meßsäule des Basisrohres während der Fahrt auf Null zurückgestellt werden. Die an den übrigen Meßsäulen gegen die Nullstellung abgelesene Differenz gab dann — nach Einführung der ent-

sprechenden Manometerrohrbeiwerte — unmittelbar die an der Meßstelle herrschende Druckdifferenz zwischen den Drücken bei Fahrt und Ruhe. Da am Ende der Meßfahrt die Meßleitungen gleichzeitig geschlossen werden konnten, hatte man genügend Zeit, die einzelnen Säulen genau abzulesen.

C. Versuchsauswertung.

1. Gesamtwiderstand.

Die bei den Versuchsfahrten zum Auswiegen des Modellwiderstandes aufgelegten Grob- und Feingewichte geben bei Berücksichtigung der Gewichtskomponente der Hebel (vorausgesetzt, daß eine Abweichung gegen die Nullstellung eingetreten war) und nach Abzug des Eigenwiderstandes des vorderen und hinteren Hebels der Tiefschleppvorrichtung den Gesamtwiderstand (also Reibungs- und Druckwiderstand) des Verdrängungskörpers. Die Widerstände der Hebel W_H in g sind in Bild 13 in Abhängigkeit von der

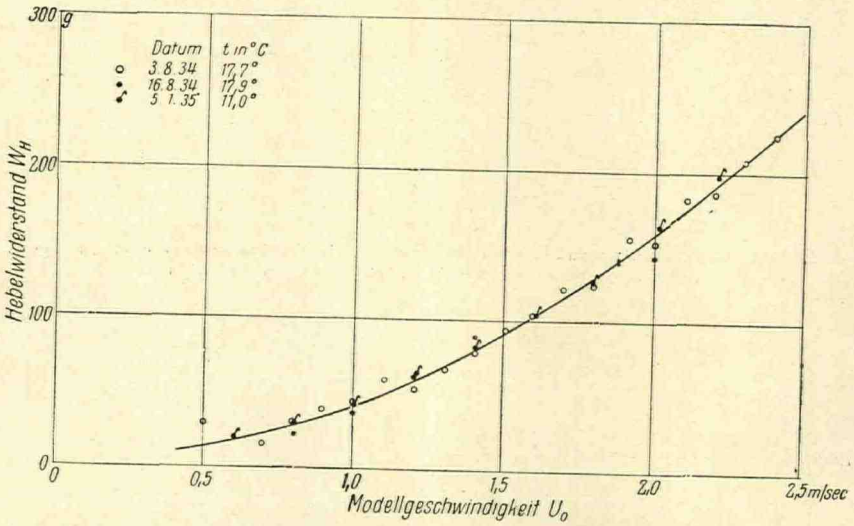


Bild 13. Kurve des Eigenwiderstandes der Hebel der verwendeten Versuchseinrichtung für Versuche mit tiefgetauchten Modellen.

Wagengeschwindigkeit U_o dargestellt. Bei der Eichung waren der vordere und hintere Hebel durch einen waagerecht liegenden, 0,1 mm starken Stahldraht verbunden. Der Hebelwiderstand beträgt maximal 5—6% des Modellwiderstandes.

Die Ergebnisse der Widerstandsmessungen sind in den Bildern 14 bis 18 niedergelegt. Als Abszisse wurde die Reynoldssche Zahl $\Re = \frac{U_o \cdot L}{\nu}$ mit U_o = Modellgeschwindigkeit [m/sec], L = Modellänge [m] und ν = kinematische Zähigkeit [$m^2\,sec^{-1}$], und als Ordinate der Beiwert des Gesamtwiderstandes $\zeta_g = \frac{W}{\varrho/_2 \cdot U_o^2 \cdot O}$ mit W = Gesamtwiderstand des Modells [kg], ϱ = Dichte [$kg\,sec^2\,m^{-4}$] und O = Oberfläche [m^2] (Flächenkomponente s. S. 29) gewählt. Zum Vergleich sind die Reibungswiderstandsbeiwerte ζ_r der glatten Platte in turbulenter Strömung eingetragen, deren Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl durch die Gleichung von Schlichting [28] (Göttingen, 1931) $\zeta_r = 0{,}455\ (\log \Re)^{-2{,}58}$ gut wiedergegeben ist. Die Reibungswiderstandsbeiwerte für den Übergangsbereich (mit laminarer Anlaufzone) sind nach dem von Prandtl [27] eingeführten Abzug von $1700 \cdot \Re^{-1}$ gestrichelt eingetragen. Weitere Angaben, wie Versuchstag, Wassertemperatur t in Tauchtiefe von 1,5 m usw. sind auf den Bildern vermerkt.

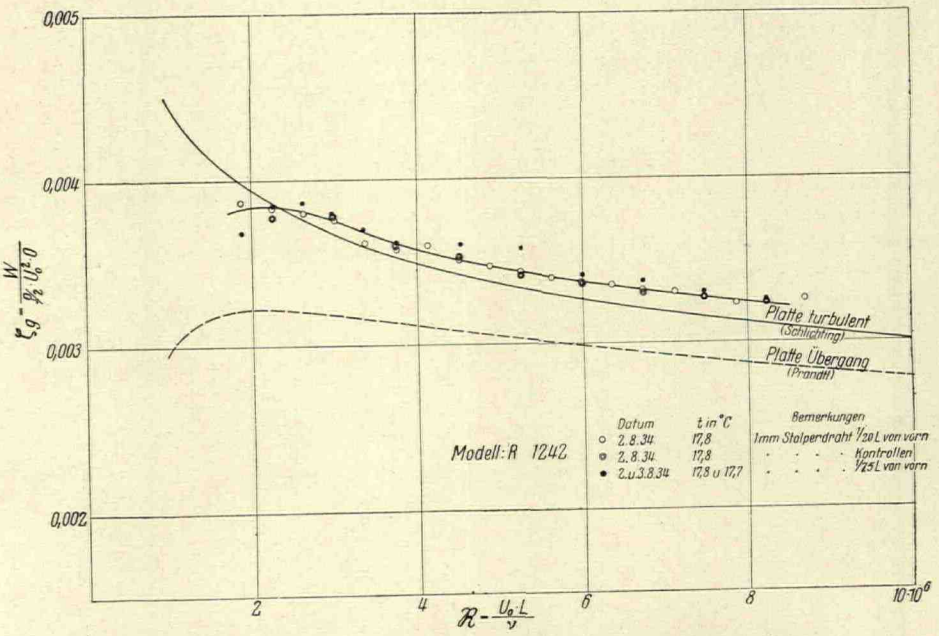


Bild 14. Gemessene Gesamtwiderstandsbeiwerte ζ_g in Abhängigkeit von $\mathfrak{R}$ für das rotationssymmetrische Modell R. 1242 in 1,50 m Tauchtiefe.

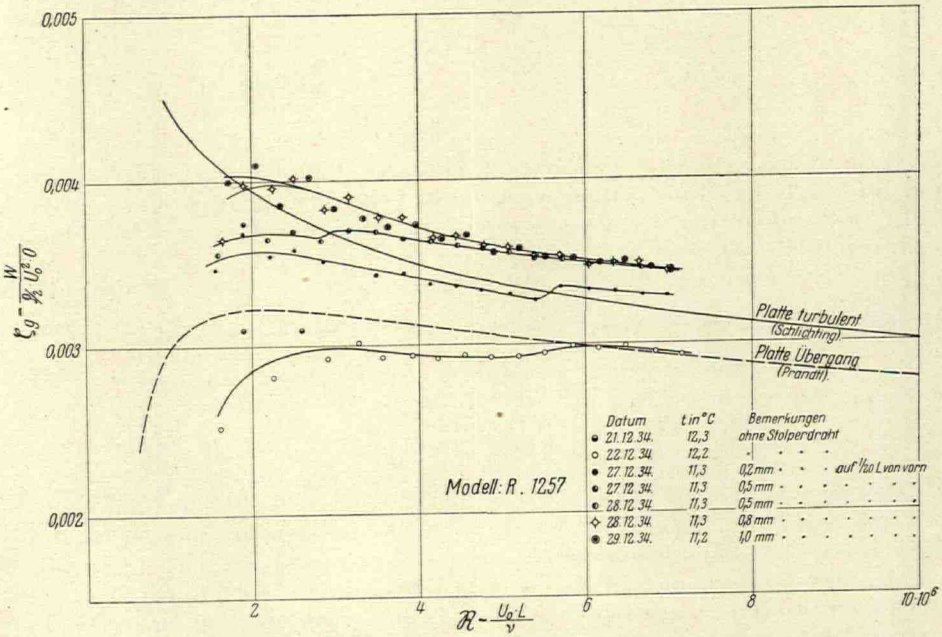


Bild 15. Gemessene Gesamtwiderstandsbeiwerte ζ_g in Abhängigkeit von $\mathfrak{R}$ für das rotationssymmetrische Modell R. 1257 in 1,50 m Tauchtiefe bei Anordnung verschieden starker Stolperdrähte.

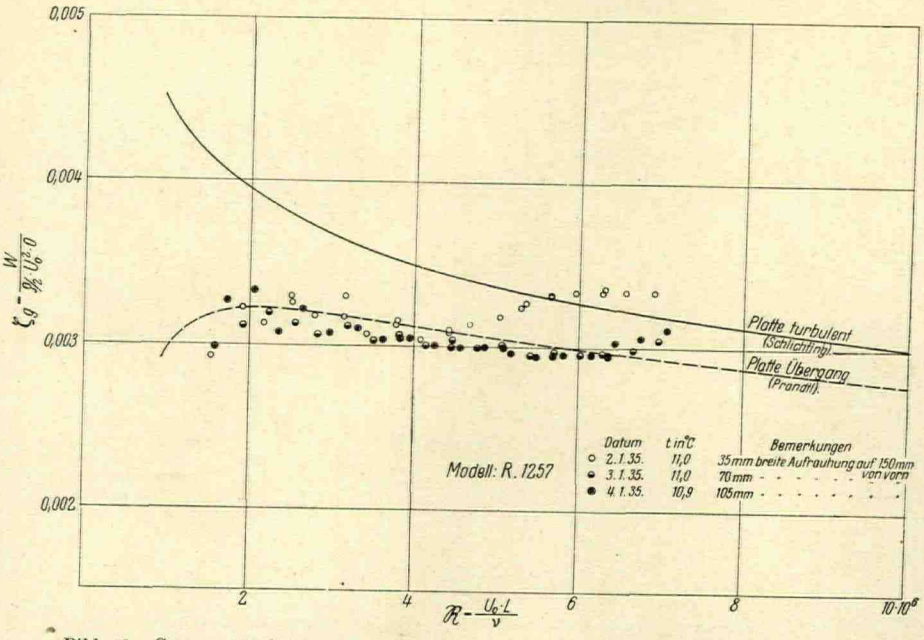


Bild 16. Gemessene Gesamtwiderstandsbeiwerte ζ_g in Abhängigkeit von $\mathfrak{R}$ für das rotationssymmetrische Modell R. 1257 in 1,50 m Tauchtiefe bei Anordnung verschieden breiter Aufrauhungsstreifen.

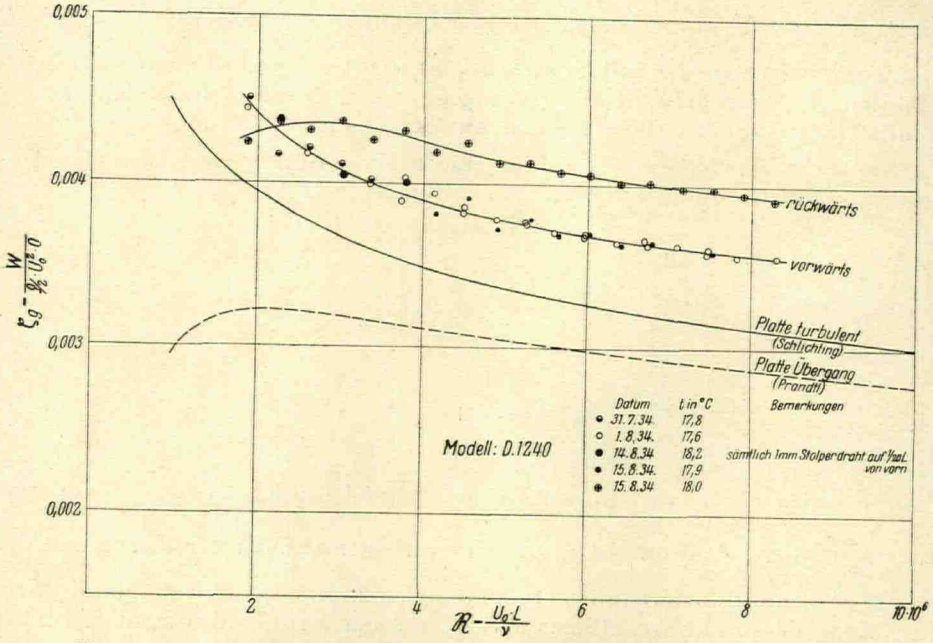


Bild 17. Gemessene Gesamtwiderstandsbeiwerte ζ_g in Abhängigkeit von $\mathfrak{R}$ für das Schiffsdoppelmodell D. 1240 in 1,50 m Tauchtiefe.

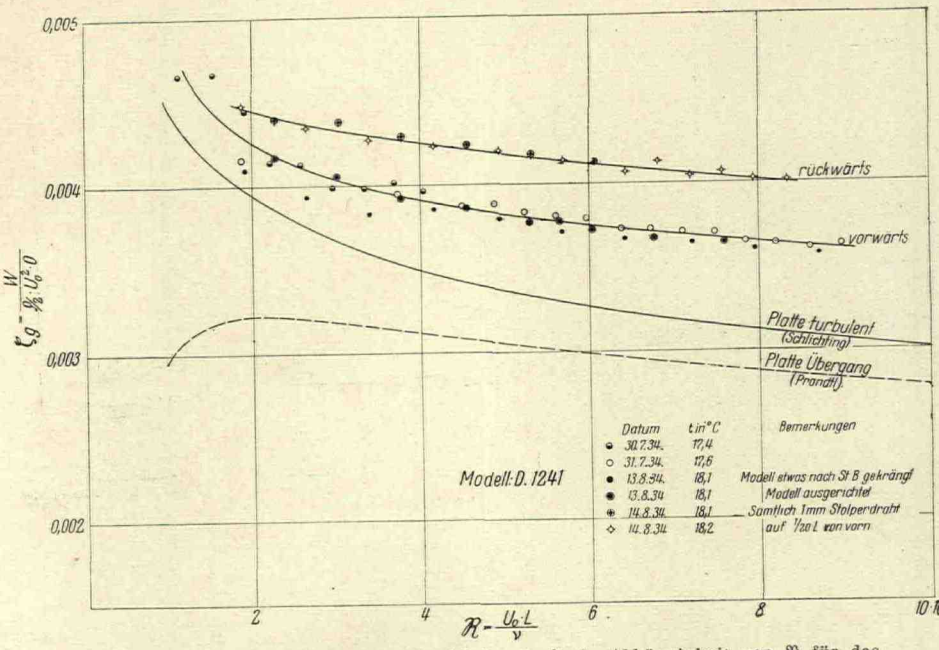


Bild 18. Gemessene Gesamtwiderstandsbeiwerte ζ_g in Abhängigkeit von $\mathcal{R}$ für das Schiffsdoppelmodell D. 1241 in 1,50 m Tauchtiefe.

2. Druckverlauf und Druckwiderstand.

Die an den einzelnen Meßsäulen des Gutscheschen Mikromanometers (s. II, 2b) abgelesenen Höhenunterschiede gegenüber dem Basisrohr ergeben unter Berücksichtigung der Vergrößerung und der Eichwerte unmittelbar die am Ort der Messung vorhandenen Druckunterschiede Δp zwischen Fahrt des Modells und Ruhelage. Das Verhältnis $\frac{\Delta p}{q}$, wobei $q = \varrho/_2 U_o^2 =$ Staudruck ist, ist in den Bildern 19 bis 20 für die verschiedenen Geschwindigkeiten U_o dargestellt. Die ausgezogene Kurve kennzeichnet den in Abschnitt II berechneten theoretischen Druckverlauf.

Der Druckwiderstand ist durch die resultierende Druckkomponente in Fahrtrichtung gegeben. Nach Bild 21 ist:

$$dW_d = 2\, z_o \cdot \pi \cdot \Delta p \cdot ds \cdot \cos\alpha; \quad \text{mit } ds \cdot \cos\alpha = dz_o$$

wird:

$$W_d = 2\,\pi \cdot \int_o^{z_o} z_o \cdot \Delta p\, dz_o$$

oder

$$W_d = \pi \cdot \int_o^{z_o^2} \Delta p\, d(z_o^2).$$

Führen wir noch die dimensionslose Bezeichnung $\zeta_o = \frac{z_o}{z_{o\,max}}$ ein und tragen $\frac{\Delta p}{q}$ über ζ_o^2 auf, so ist der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Abszisse ζ_o^2 multipliziert mit $\pi \cdot q \cdot z_o{}^2{}_{max}$ gleich dem Druckwiderstand (siehe Bild 22). Die so durchgeführte Auswertung der Druckmessungen ergab die in Tabelle VIII aufgeführten Mittelwerte für Vorwärts- und Rückwärtsfahrt. In der letzten Zeile ist der Prozentsatz des Druckwiderstandes vom Gesamtwiderstand angegeben.

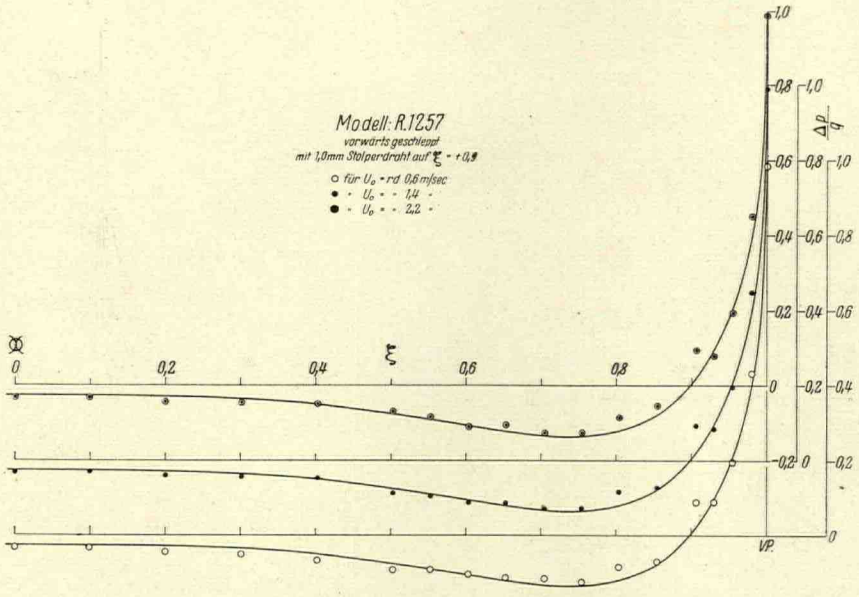


Bild 19. Vergleich der gemessenen Druckunterschiede $\frac{\Delta p}{q}$ (Punkte) mit dem theoretischen Druckverlauf (ausgezogene Kurve) im Vorschiff.

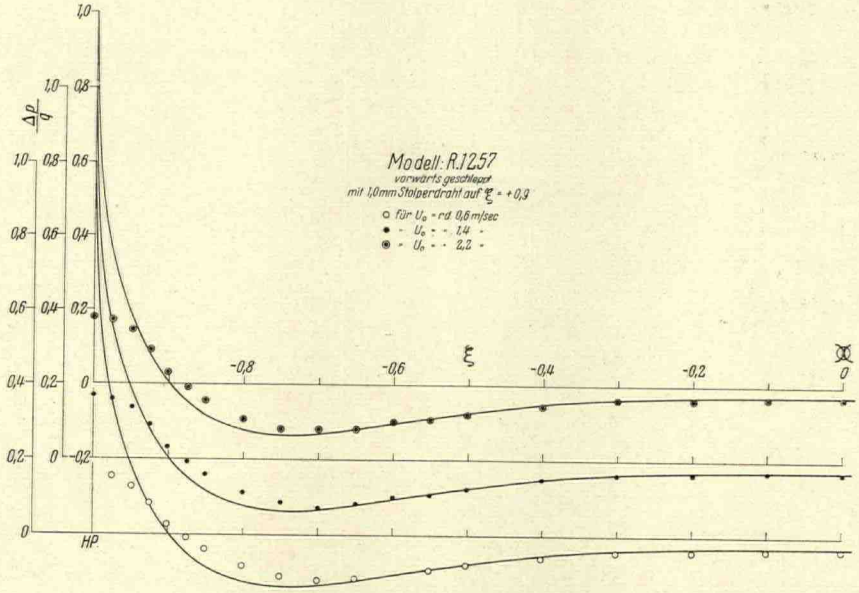


Bild 19a. Vergleich der gemessenen Druckunterschiede $\frac{\Delta p}{q}$ (Punkte) mit dem theoretischen Druckverlauf (ausgezogene Kurve) im Hinterschiff.

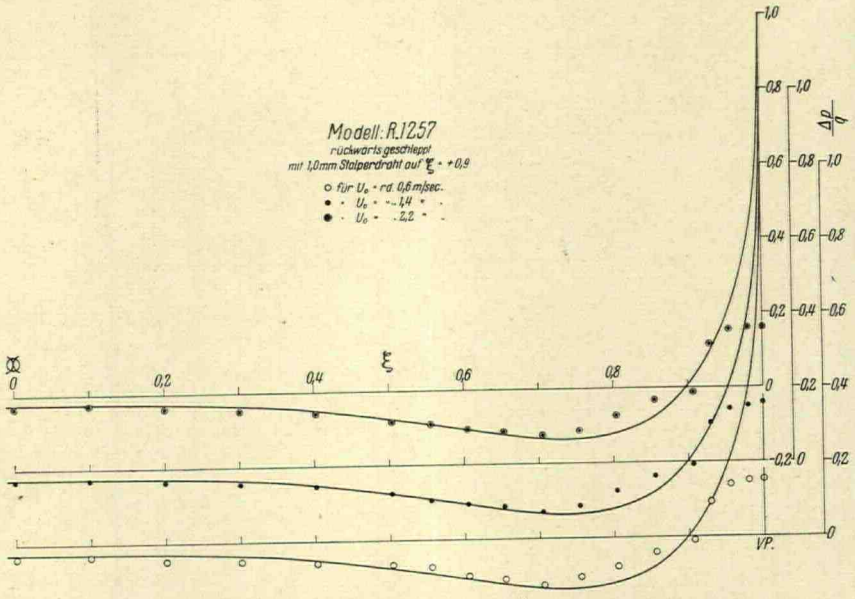


Bild 20. Vergleich der gemessenen Druckunterschiede $\frac{\Delta p}{q}$ (Punkte) mit dem theoretischen Druckverlauf (ausgezogene Kurve) im Vorschiff bei vorausgeschlepptem Hinterschiff.

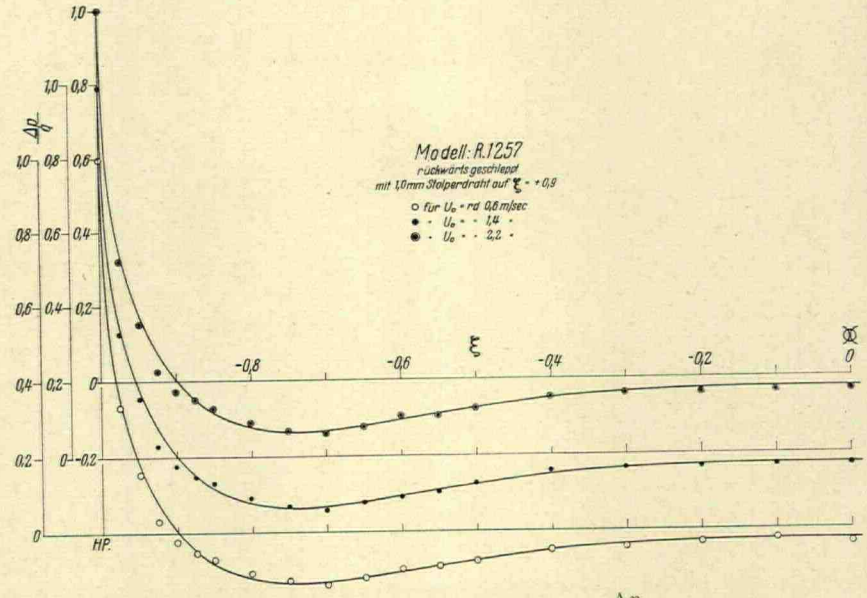


Bild 20a. Vergleich der gemessenen Druckunterschiede $\frac{\Delta p}{q}$ (Punkte) mit dem theoretischen Druckverlauf (ausgezogene Kurve) im vorausgeschleppten Hinterschiff.

Tabelle VIII.

Aus Druckmessungen errechneter Druckwiderstand.

1	2	3	4
U_o in m/sec	0,6	1,4	2,2
$W_{d\ mittel}$ in kg	0,042	0,203	0,434
$W_{Ges.}$ in kg	0,40	2,00	4,65
W_d in % von $W_{Ges.}$.	10,5	10,0	9,5

Bei der Auswertung stellte sich heraus, daß das Verfahren zur Bestimmung des Druckwiderstandes für den achsensymmetrischen Fall sehr empfindlich ist; die Meßstellen wurden am Modell nochmals sorgfältig aufgemessen und die aufgemessenen Werte $z_o\ (x)$ für die Berechnung verwendet. Nach Meinung des Verfassers ist eine genaue Bestimmung des Druckwiderstandes wenn auch nicht unmöglich, so doch überaus schwierig. Die Anzahl der Meßöffnungen im Vor- und Hinterschiff, deren Abstand z_o von der Achse genau bekannt sein muß, ist erheblich zu vergrößern. Bei den vorliegenden Messungen reichte die Zahl der Meßstellen nicht aus, um einwandfrei den Druckwiderstand zu bestimmen. Das Mittel von 10% ist jedoch durch die Mehrzahl der Auswertungen einigermaßen sichergestellt.

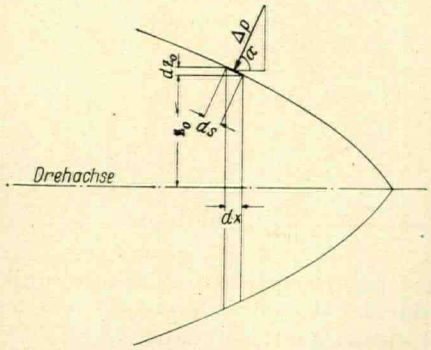
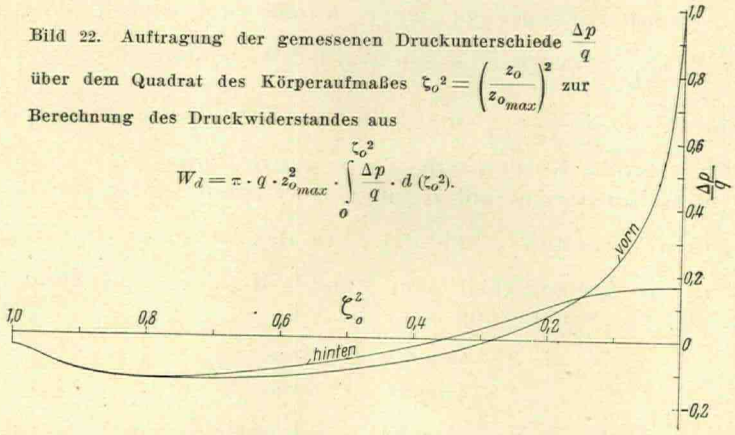


Bild 21. Bezeichnungen für die Berechnung des Druckwiderstandes.

Bild 22. Auftragung der gemessenen Druckunterschiede $\frac{\Delta p}{q}$ über dem Quadrat des Körperaufmaßes $\zeta_o^2 = \left(\frac{z_o}{z_{o_{max}}}\right)^2$ zur Berechnung des Druckwiderstandes aus

$$W_d = \pi \cdot q \cdot z_{o_{max}}^2 \cdot \int_0^{\zeta_o^2} \frac{\Delta p}{q} \cdot d\,(\zeta_o^2).$$



D. Erörterung der Versuchsergebnisse.

Die bei den Modellversuchen gemessenen Gesamtwiderstandsbeiwerte wurden zum Vergleich in Bild 23 zusammen als Mittelkurven in Abhängigkeit von $\mathfrak{R}$ aufgetragen. Die Ergebnisse können ohne besondere Verbesserungen für Meßungenauigkeiten verglichen werden. Zur richtigen Beurteilung der Versuchsergebnisse muß jedoch die Größenordnung besonderer Einflüsse, wie Tankeinfluß, Eigenwiderstand des Stolperdrahtes u. a. m., festgestellt werden.

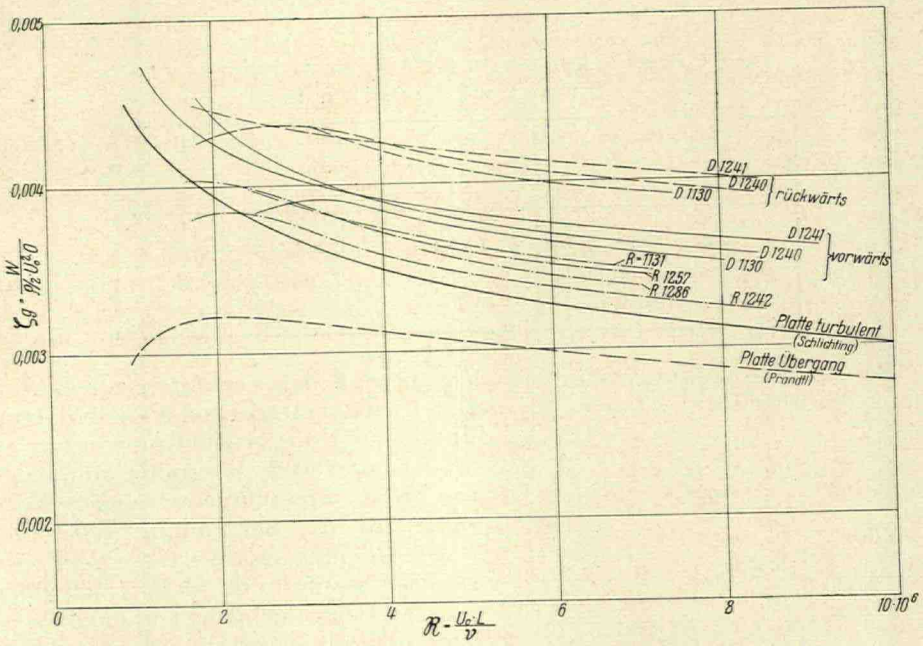


Bild 23. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse für tiefgetauchte Modelle.

Wie schon eingangs erwähnt, wurde eine Beeinflussung des Gesamtwiderstandes durch die freie Wasseroberfläche (Wellenwiderstand) bei der gewählten Tauchtiefe von 1,5 m nicht beobachtet (vgl. auch Graff [5] S. 208). Der Einfluß der in der Breite und Tiefe beschränkten Schlepprinne auf den Gesamtwiderstand zeigt sich in einer Vergrößerung des Widerstandes infolge erhöhter Übergeschwindigkeiten. Nach Weinblum [37], dessen Ausführungen sich in der Hauptsache auf die Untersuchungen von Lamb [18] und Lock [21] stützen, ist die Erhöhung des Widerstandes getauchter Rotationskörper in guter Annäherung durch die Gleichung $W = W_o \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_o}\right)^2$ gegeben, worin W_o der Widerstand in unbeschränktem Wasser und $\frac{u_1}{U_o} = \tau \cdot \lambda_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{l}{a}$ sind. Es bedeuten $2a$ = „ideeller" Kanaldurchmesser, $2b$ = größte Körperbreite, $2l$ = ganze Länge, τ einen Faktor, der von der Querschnittsform und λ_1 einen Koeffizienten, der von der Körperform und dem Verhältnis $\frac{l}{b}$ abhängt. Für das Rotationsellipsoid gibt Lock die λ_1-Werte in Abhängigkeit von $\frac{l}{b}$ an. Für anders geformte Rotationskörper genügt die Annäherung:

$$\frac{\lambda_{1\,(Körper)}}{\lambda_{1\,(Ellipsoid)}} = \frac{\varphi\,(Körper)}{\varphi\,(Ellipsoid)}.$$

τ kann für die Schlepprinne der VWS mit guter Genauigkeit zu 0,8 angenommen werden. Bei einer Tauchtiefe der Modelle von 1,5 m ergibt sich ein mittlerer „ideeller" Kanaldurchmesser $2a \approx 7$ m. Die mit diesen Werten ermittelten Widerstandsvermehrungen sind für die untersuchten Modelle in Tabelle IX Spalte 2 angegeben. Obige Gleichung für $\frac{u_1}{U_o}$ gilt nur für Rotationskörper; sie wurde aber auch für die Schiffsdoppelmodelle verwendet. Durch Einsetzen der größten Breite dieser Modelle in die Gleichung liegen die Werte für die Widerstandsvermehrung wohl etwas zu hoch. Zum rich-

tigen Vergleich der Versuchsergebnisse sind die Mehrwiderstände infolge der Tankbegrenzung von den gemessenen Gesamtwiderständen abzusetzen.

Von besonderer Bedeutung ist der Einfluß des Stolperdrahtes sowohl in seiner Wirkung auf die Grenzschichtströmung als auch hinsichtlich seines Eigenwiderstandes. Die Versuche mit Mod. R. 1257 (Bild 15/16), bei denen Stolperdrähte von verschiedenem Durchmesser und Aufrauhungen, wie auf S. 30 angegeben, untersucht wurden, lassen die erstrebte Wirkung als Turbulenzerzeuger gut erkennen. Während sich bei den Drähten von 0,8 und 1,0 mm ⌀ angenähert die gleichen Widerstandsbeiwerte einstellten, sinken sie mit abnehmender Drahtstärke beträchtlich ab, und zwar um Beträge, die unbedingt größer sind, als dem Eigenwiderstand des Drahtes entsprechen kann. Die Erzeugung der Turbulenz in der Grenzschicht ist also bei den dünnen Drähten nicht voll gelungen. Hinter dem Draht ist wahrscheinlich eine Rückbildung zur laminaren Grenzschichtströmung eingetreten; bedenkt man, daß die laminare Anlaufzone sehr groß ist (überschlägliche Berechnungen für Mod. R. 1242 ohne Draht ergaben laminare Grenzschichtströmung bis $\frac{x}{L} \approx 0{,}24$)[8]), so scheint obige Folgerung nicht ausgeschlossen.

Die Versuche über die Wirkung von Aufrauhungen haben für verschiedene Breiten der Aufrauhungsstreifen kein wesentlich unterschiedliches Ergebnis gezeitigt. Der in Bild 16 bei $\Re = 5 \cdot 10^6$ allein bei einer Versuchsreihe zu erkennende Widerstandsanstieg ist dadurch zu erklären, daß bei dem ersten Anbringen der Aufrauhung mit dem Hobeleisen an dem Modell ein Grat stehen geblieben ist, der wie ein dünner Stolperdraht gewirkt hat. Bei dem Einziehen des zweiten, unmittelbar dahinter liegenden Aufrauhungsstreifens ist der Grat wieder entfernt worden, so daß die Beiwerte bei den weiteren Versuchsreihen wieder niedriger liegen. Es kann bei diesen Aufrauhungen nicht von einer Rauhigkeitserhebung wie bei dem Stolperdraht oder z. B. bei aufgeklebtem Sand gesprochen werden, die offenbar einen Störkörper in der Grenzschichtströmung darstellen, sondern durch das Hobeleisen wird lediglich eine Vertiefung in das Modell geschnitten, die keinerlei Wirkung auf die Grenzschichtströmung gezeigt hat. Die Stolperdrahtuntersuchungen haben erwiesen, daß ein Draht von 1,0 mm ⌀ auf 1/20 L von vorne zur Turbulenzerzeugung bei Mod. R. 1257 genügt. Die übrigen Modelle wurden mit Stolperdrähten von gleichem Durchmesser versehen.

Es bleibt nun zu klären, mit welchem Mehrwiderstand für den Körper die Erzeugung der turbulenten Grenzschichtströmung erreicht wurde. Die Berechnung des Eigenwiderstandes des Stolperdrahtes kann nur überschläglich mit Annahmen vorgenommen werden, die z. T. recht willkürlich sind, da bis heute noch keine Ergebnisse von Versuchen mit Drähten vorliegen, die sich nicht in gleichmäßiger Strömung, sondern in einer Grenzschichtströmung befinden. Wir bestimmen hier den Eigenwiderstand des Drahtes nach der Gleichung:

$$W_{Draht} = \zeta_{Draht} \cdot l \cdot d \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot u^2.$$

Hierin ist ζ_{Draht} aus Versuchen in gleichmäßiger Strömung mangels entsprechender Ergebnisse für Drähte an der Wand nach Eisner [1] anzunehmen; es bedeuten l = Länge und d = Durchmesser des Drahtes; u^2 ist das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Anströmung und kann aus der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht bestimmt werden. An der Stelle des Drahtes — also $\frac{x}{L} = 0{,}05$ — ist die Grenzschichtdicke δ, in der der Draht eingebettet ist, durch die Rechnung nach Millikan bekannt. Gleich-

[8]) Zur Berechnung der Umschlagstelle nach (32) wurde die kritische Reynoldszahl der Grenzschichtströmung $\Re_{\delta\,kritisch} = \left(\frac{U \cdot \delta}{\nu}\right)_{kritisch}$ = rd. 3900 angenommen.

falls ist die hier herrschende Geschwindigkeit der Außenströmung U etwa durch $\frac{U}{U_o}$ nach der Potentialtheorie gegeben. Die Geschwindigkeitsverteilung $\frac{u}{U}$ in der laminaren Grenzschicht wird nach Pohlhausen [25] zu $\frac{u}{U} = 2\,\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$ angenommen (vgl. S. 24 und Bild 24).

Die für $\Re = 6 \cdot 10^6$ unter Berücksichtigung der bei den Versuchen gemessenen Wassertemperatur und $\zeta_{Draht} = 1{,}0$ (nach Eisner bei $\Re_{Draht} = \frac{u \cdot d}{\nu}$) errechneten Eigenwiderstände der Stolperdrähte (Komponenten in Längsrichtung der Körper) sind in Tab. IX Spalte 3 in Prozent vom Gesamtwiderstand der Körper angegeben.

Tabelle IX.

Zusammenstellung der notwendigen Verbesserungen für die am Modell gemessenen Gesamtwiderstände.

1	2	3	4	5
Modell Nr.	Einfluß der Tankabmessungen %	Eigenwiderstand des Stolperdrahtes %	Einfluß der Halterungsstangen %	Gesamteinfluß %
R. 1242	— 0,7	— 0,9	+ 0,7	— 0,9
R. 1286	— 0,8	— 1,4	+ 0,6	— 1,6
R. 1257	— 1,0	— 1,9	+ 0,6	— 2,3
R. 1257a	— 0,8	— 0,7	+ 0,6	— 0,9
R. 1257b	— 0,8	— 1,9	+ 0,6	— 2,1
R. 1131	— 1,1	— 1,2	+ 0,5	— 1,8
D. 1130 vorwärts .	— 1,0	— 1,6	+ 0,5	— 2,1
D. 1240 vorwärts .	— 1,4	— 1,5	+ 0,5	— 2,4
D. 1241 vorwärts .	— 2,0	— 1,3	+ 0,5	— 2,8
D. 1130 rückwärts .	— 1,0	— 1,4	+ 0,5	— 1,9
D. 1240 rückwärts .	— 1,4	— 1,3	+ 0,5	— 2,2
D. 1241 rückwärts .	— 2,0	— 1,2	+ 0,5	— 2,7

Neben diesen, den Gesamtwiderstand der Modelle vermehrenden Einflüssen (Tankabmessungen und Eigenwiderstand des Stolperdrahtes) treten noch Einflüsse auf, durch deren Wirkung der Gesamtwiderstand zu klein gemessen wird; dies ist im besonderen der Einfluß der Halterungsstangen. Während sich die Rückwirkung der Stangen auf den Körper in den Stau- und Übergeschwindigkeitsgebieten angenähert ausgleicht, wird in dem Mitstromgebiet hinter den Stangen ein Teil der Oberfläche des Körpers von der Bildung des Reibungswiderstandes ausgeschaltet. Für die Abschätzung dieses Einflusses genügt, wenn man die Verringerung des Gesamtwiderstandes der Verkleinerung der Gesamtoberfläche verhältnisgleich setzt. Rechnet man mit zwei Streifen von 0,03 m Breite und 0,5 m Länge, so beträgt die abzügliche Oberfläche 0,03 m².

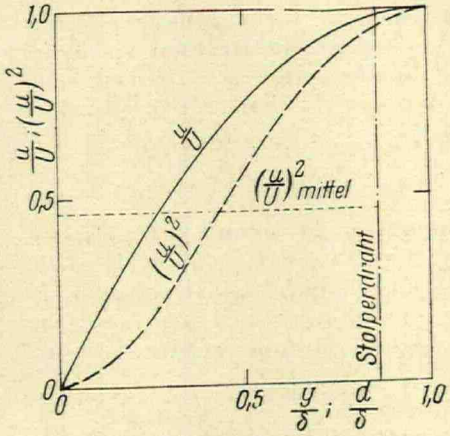


Bild 24. Quadratisches Mittel der Geschwindigkeiten in der laminaren Grenzschicht (nach Pohlhausen $\frac{u}{U} = 2\,\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$) für einen Stolperdrahtdurchmesser (d).

In Tab. IX sind die Einflüsse zusammengestellt, und zwar mit den für die

Verbesserung des gemessenen Gesamtwiderstandes der Modelle maßgebenden Vorzeichen. Bei den zum Teil unsicheren Annahmen zur Berechnung des Eigenwiderstandes des Stolperdrahtes und des Einflusses der Halterungsstangen können die nach Spalte 5 verbesserten Gesamtwiderstände nicht als sichere Absolutwerte angesehen werden. Da das gleiche Rechenverfahren zur Bestimmung der besonderen Einflüsse auf alle Modelle angewandt wurde, ist wohl ein Vergleich der verbesserten Widerstandswerte für die verschiedenen Modelle gerechtfertigt.

In Tab. X sind für $\Re = 6 \cdot 10^6$ die bei den Modellversuchen gemessenen ζ_g-Werte mit und ohne Verbesserung und die prozentualen Abweichungen der Körperwiderstände von dem Plattenwiderstand (nach Schlichting) gegenübergestellt. In Bild 23 sind die unverbesserten Versuchsergebnisse aufgetragen.

Tabelle X.

Übersicht über die Versuchsergebnisse bei $\Re = 6 \cdot 10^6$.

1	2	3	4	5	6	7	8
Modell Nr.	φ	$L:B$	$B:T$	ζ_g	$\zeta_{g\ verbessert}$	Abweichungen unverbessert %	Abweichungen verbessert %
Platte	—	—	—	0,00327	0,00327	0	0
R. 1242	0,546	8,0	—	0,00337	0,00334	3,1	2,1
R. 1286	0,667	8,0	—	0,00344	0,00339	5,2	3,7
R. 1257	0,800	8,0	—	0,00351	0,00343	7,3	4,9
R. 1257a	0,673	8,0	—	0,00350	0,00347	7,0	6,1
R. 1257b	0,673	8,0	—	0,00342	0,00335	4,6	2,4
R. 1131	0,754	7,36	—	0,00354	0,00348	8,3	6,4
D. 1130 vorwärts	0,754	7,54	2,4	0,00364	0,00356	11,3	8,9
D. 1240 vorwärts	0,754	6,40	3,3	0,00368	0,00359	12,5	9,8
D. 1241 vorwärts	0,754	5,49	4,5	0,00375	0,00365	14,7	11,6
D. 1130 rückwärts	0,754	7,54	2,4	0,00399	0,00391	22,0	19,6
D. 1240 rückwärts	0,754	6,40	3,3	0,00406	0,00397	24,2	21,4
D. 1241 rückwärts	0,754	5,49	4,5	0,00412	0,00401	26,0	22,6

Der Vorschlag von Horn [12], [13], nach dem der Einfluß der Schiffsform auf den Reibungswiderstand näherungsweise aus der beim Versuch gemessenen Modellabsenkung bestimmt werden soll, wurde versehentlich bei den Versuchen mit den D.-Modellen nicht befolgt. Nur bei später zu anderem Zweck durchgeführten Versuchen mit den Drehkörpern Mod. R. 1242 und R. 1257 an der Oberfläche wurde der Trimm gemessen. Leider war bei der hierfür vorgesehenen Versuchseinrichtung nicht die für die Rechnung notwendige Meßgenauigkeit vorhanden. Die Modellabsenkungen betrugen bei den Geschwindigkeiten entsprechend $\Re = 6 \cdot 10^6$ $\Delta z =$ rd. 8 mm und rd. 12 mm für R. 1242 und R. 1257. Die mittleren Übergeschwindigkeiten U_m errechneten sich nach der Gleichung $U_m = \sqrt{U_o^2 + 2g \cdot \Delta z}$ zu $U_m = 1{,}023 \cdot U_o$ und $1{,}037 \cdot U_o$. Die Widerstandserhöhungen betragen somit rd. 4,6% und 7,4%, Werte, die sich in der Größenordnung den in der Tab. X angegebenen anpassen.

Die Ergebnisse der Versuche mit tiefgetauchten Modellen zeigen deutlich die Formabhängigkeit des Gesamtwiderstandes. Der Formeinfluß setzt sich aus Reibungswiderstands- und Druckwiderstandsanteilen zusammen. Betrachten wir zunächst die Ergebnisse für die Drehkörper, so erkennen wir, daß eine Formabhängigkeit des Gesamtwiderstandes sowohl von φ als auch von $L : B$ besteht. Die Ergebnisse der drei achsensymmetrischen Modelle R. 1242, R. 1286 und R. 1257 mit gleichem $L : B = 8$ zeigen mit wachsendem φ eine stetige Zunahme der Abweichungen des Körperwiderstandes von dem Plattenwiderstand. Die Kurve, sowie auch die verbesserten ζ_g-Werte für das

von Graff untersuchte Mod. R. 1131 liegen trotz eines kleineren Schärfegrades φ über den Werten für Mod. R. 1257. Die Ursache hierfür ist einerseits in dem kleineren Verhältnis $L : B$ und andererseits in der Unsymmetrie von Vor- und Hinterschiff, die eine Widerstandsvermehrung bedeuten, zu suchen. Welche Bedeutung das Verhältnis $L : B$ auf die Formabhängigkeit des Widerstandes hat, und in welchem Maße der Druckwiderstand an dem mit φ wachsenden Formeinfluß beteiligt ist, wird später noch näher erläutert werden.

Die ζ_g-Werte der vorwärts geschleppten Doppelmodelle D. 1130, D. 1240 und D. 1241 liegen noch über den Werten der rotationssymmetrischen R.-Modelle. Die Abhängigkeit des Formeinflusses von dem Verhältnis $B : T$ ist aus den Auftragungen deutlich zu erkennen. Die Spantflächenkurven der drei verzerrten D.-Modelle sind die gleichen wie für das Modell R. 1131; trotz größeren Verhältnisse $L : B$ bei Mod. D. 1130 sind die ζ_g-Werte größer; hier macht sich die ungleichmäßige Geschwindigkeits- und Druckverteilung über den Spantumfang und der Einfluß der starken Krümmungen an der Kimm widerstandsvermehrend bemerkbar. Die beobachtete Abhängigkeit des Widerstandes von $B : T$ wurde auch von W i g l e y [39] festgestellt. Wigley berechnete für Überwassermodelle den Wellenwiderstand und den Reibungswiderstand (nach Froude); bei der Auftragung des Verhältnisses $\frac{\zeta_{Form} - \zeta_{we}}{\zeta_{Form}}$ über $B : T$ ergab sich bei $B : T = 2$ ein Kleinstwert und bei $B : T = 1$ und 3 ein Größtwert. Wigley führt diese Erscheinung auf die Vergrößerung des Reibungswiderstandes durch die Übergeschwindigkeiten am Körper im Vergleich zur Platte zurück. Nach Meinung des Verf. ist die auch bei vorliegenden Versuchen mit Doppelmodellen beobachtete Vergrößerung der Widerstandsbeiwerte mit größer werdendem $B : T$ in der Hauptsache auf die unsymmetrische Geschwindigkeits- und Druckverteilung über einen Spantumfang zurückzuführen. Das Verhältnis $B : T = 2$ bedeutet einen quadratischen Querschnitt, dessen Ecken mit entsprechendem Kimmradius abgerundet sind; die Geschwindigkeits- und Druckverteilung ist hier an allen vier Seiten gleich, so daß bei diesem Verhältnis wohl ein Kleinstwert des Widerstandes zu erwarten ist. Bei größerem oder auch kleinerem $B : T$ als 2 herrschen an den kürzeren Seiten höhere Übergeschwindigkeiten, d. h. größere Unterdrücke, die sich mit den niederen Unterdrücken an den längeren Seiten des Querschnittes auszugleichen suchen. Es tritt also eine Ablenkung der längsgerichteten Strömung und damit ein Umströmen der Kimm ein, was mit einer Erhöhung des Reibungswiderstandes und zu einem großen Teil auch des Druckwiderstandes verbunden sein wird; die in der dünnen Grenzschicht an der Kimm stark beschleunigten Wasserteilchen treffen bei der Umströmung auf einen Druckanstieg und neigen zur Ablösung (vgl. Strömungsrichtungsmessungen von Laute [19]).

Während die vorwärts geschleppten D.-Modelle eine Abweichung des Körperwiderstandes von dem Plattenwiderstand von 9 bis 12% (verbesserte Werte) zeigten, erhöhen sich die Abweichungen bei den gleichen, rückwärts geschleppten Modellen auf 20 bis 23%, ein Zeichen, daß der Druckwiderstand maßgeblich an der Erhöhung des Gesamtwiderstandes beteiligt ist. Im übrigen ergibt sich die gleiche Abhängigkeit von $B : T$ wie bei den vorwärts geschleppten Modellen.

Der Verlauf der Kurven für sämtliche Modelle (Bild 23) zeigt, daß der Formeinfluß auf den Gesamtwiderstand im wesentlichen von $\mathfrak{R}$ unabhängig ist. Die Schlußfolgerung, die schon Graff gezogen hat, daß die Abweichungen des Körperwiderstandes von dem Plattenwiderstand prozentual für das große Schiff angenähert dieselben bleiben, wird durch vorliegende Versuchsergebnisse bestätigt. Wie weit bei Schleppen der Körper an der Oberfläche, insbesondere bei höheren Geschwindigkeiten, die Wellenbildung Reibungs- und

Druckwiderstand und vielleicht auch deren Formabhängigkeit ändert, kann durch vorliegende Untersuchungen nicht beantwortet werden.

Zur Beurteilung der Druckmessungen und des daraus bestimmten Druckwiderstandes muß einiges über die Versuchsgenauigkeit und besondere Einflüsse gesagt werden. Ein möglicher Ablesefehler an den Manometern beeinträchtigt das Meßergebnis bei den zumeist verwendeten 10- bis 20fachen Vergrößerungen, die durch entsprechende Neigung der Rohre des Gutscheschen Mikromanometers erreicht wurden, nur ganz unwesentlich. Fehler infolge ungleichen lichten Durchmessers der Manometerrohre sind bei der mit $\pm$ $^1/_{100}$ mm garantierten Genauigkeit unbedeutend. Fehler infolge der Beschaffenheit der Meßöffnungen können nicht abgeschätzt werden; es wurde aber auf die Herstellung und den Einbau der Meßstellen größte Sorgfalt verwendet, so daß die Fehler als gering angenommen werden können. Der Einfluß der Tankabmessungen auf die Angabe des Meßgerätes äußert sich in einer Druckverminderung, die je nach der Lage der Meßstelle verschieden ist und in Körpermitte etwa 1% beträgt. Auf den Druckwiderstand ist dieser Einfluß Null, da sich bei der vorhandenen Achsensymmetrie die Druckkomponenten in Längsrichtung aufheben. Die Druckmeßöffnungen waren an der Unterseite des Modells angeordnet, so daß eine Beeinflussung der Messung durch die Halterungsstangen nicht zu erwarten ist. Der Einfluß des Stolperdrahtes ist aus den Auftragungen in Bild 19 und 20 zu ersehen. Bei dem vorwärts geschleppten Modell zeigt die unmittelbar vor dem Draht liegende Meßöffnung einen recht beträchtlichen Stau an, während für das rückwärts geschleppte Modell, bei dem jetzt die Meßstelle kurz hinter dem Draht liegt, eine Druckabsenkung zu erkennen ist. Für die Berechnung des Druckwiderstandes wurde die Störung im Druckverlauf durch eine Mittelkurve ausgeglichen. Die Anzeige des seitlich voraus am Schleppwagen befestigten Basisrohres ist durch den Körperstau nicht merklich beeinflußt, wie eine Rechnung für ein Rotationsellipsoid gezeigt hat.

Aus den Auftragungen der gemessenen Drücke in den Bildern 19 bis 20a ist etwa bis auf $^3/_4$ der Länge des Modells von vorne eine befriedigende Übereinstimmung mit dem theoretischen Druckverlauf festzustellen. In Körpermitte liegen die gemessenen Unterdrücke etwas über den rechnerisch ermittelten Werten, wie es infolge des Tankeinflusses zu erwarten war. Die geringen Unterschiede im Druckverlauf bei den Versuchen mit voraus geschlepptem Hinterschiff erklären sich aus kleinen Abweichungen des Körperumrisses von dem vorher berechneten. Die Ungenauigkeiten in den Aufmaßen sind bei der Herstellung des Modells sowie bei dem Einbau der Druckmeßstellen entstanden. Für die Auswertung der Druckverteilung hinsichtlich des Druckwiderstandes wurden, wie schon erwähnt, die Meßstellen neu aufgemessen. Es stellte sich dabei heraus, daß im Hinterschiff das Modell etwas dicker als beabsichtigt und im Vorschiff bei $\xi \approx 0{,}8$ eine kleine Einbeulung vorhanden war; die gemessenen Druckabweichungen von dem theoretischen Druckverlauf sind mit den Abweichungen der Modellaufmaße im Einklang.

In dem Bereich des starken Druckanstiegs, der sich nach der Potentialtheorie wieder bis zum Staudruck erhebt, ist deutlich eine Verkümmerung des Druckwiederanstiegs zu erkennen. Die Flüssigkeitsteilchen, die durch Reibungswirkung an der Körperoberfläche an kinetischer Energie verloren haben, können gegen den Druckanstieg nicht mehr vordringen, die Strömung reißt ab. Die gemessenen Drücke erreichen im hinteren Staupunkt nur etwa 0,17 des Staudruckes q. Bemerkenswert ist die in Übereinstimmung mit Graff gemessene Verminderung der Unterdrücke an der hinteren Schulter. Graff schreibt diese Erscheinung einem Druckabfall $\frac{dp}{dy}$ normal zur Körperoberfläche in der an dieser Stelle endlich dicken Grenzschicht zu und erhält

nach einer Näherungsrechnung etwa die Hälfte des bei dem Versuch gemessenen Druckunterschiedes zwischen Reibungs- und Potentialströmung. Neben dieser Wirkung ist nach Meinung des Verf. die am Körperende abgerissene Strömung wesentlich an der Verringerung der Unterdrücke an der hinteren Schulter beteiligt. Durch die Ablösung der Strömung wird die Stromlinienkrümmung im Hinterschiff vollkommen geändert; die gesunde Strömung folgt nicht mehr der Begrenzung des nach der Potentialtheorie berechneten Stromlinienkörpers; auch in einem Gebiet vor der abgerissenen Strömung wird infolge der geänderten Grenzbedingungen (schwächere Krümmung) eine Änderung der gerechneten Druckverteilung zu geringeren Unterdrücken eintreten. Während die Verminderung der Unterdrücke an der hinteren Schulter gegenüber der Potentialdruckverteilung einen Vorschub bedeutet, bedingen die niederen positiven Drücke am Körperende einen Widerstand. Letzterer ist erheblich größer als die Widerstandsverminderung an der hinteren Schulter, da die verringerten Schubkomponenten am Körperende auf eine größere Fläche wirksam sind (vgl. Bild 22). Nähere Erörterungen über die Größe des aus den Druckmessungen berechneten Druckwiderstandes werden in folgendem Abschnitt gemacht. Zu bemerken ist noch, daß eine wesentliche Abhängigkeit der Druckverteilung von der Geschwindigkeit nicht vorhanden ist.

IV. Vergleich der Ergebnisse von Rechnung und Versuch.

Ein Vergleich zwischen den rechnerisch (Tab. VI) und den durch Versuch (Tab. X) bestimmten prozentualen Abweichungen der Widerstandsbeiwerte für die rotationssymmetrischen Modelle R. 1242 und R. 1257 von den Plattenbeiwerten zeigt zunächst keine Übereinstimmung. Es ist hierbei jedoch zu bedenken, daß die gerechneten Widerstandsbeiwerte auf Plattenwerte bezogen wurden, die sich nach der alten Kármánschen Gleichung $\zeta_r = 0{,}072 \cdot \Re^{-1/5}$ ergeben, während bei den Versuchsergebnissen die Abweichungen von den Werten nach der neuen Schlichtingschen Plattenformel $\zeta_r = 0{,}455 \cdot (\log \Re)^{-2{,}58}$ bestimmt wurden. Betrachten wir aber statt der prozentualen Abweichungen die Absolutwerte der Körperwiderstandsbeiwerte, so können wir wenigstens bei Mod. R. 1242 gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch feststellen. Es ergaben sich für $\Re = 6 \cdot 10^6$ nach der Rechnung $\zeta_{r_{Ges.}} = 0{,}003372$ und nach Versuch $\zeta_{Ges.\ verb.} = 0{,}00334$; der Unterschied von rd. 1% ist bei den für die Verbesserung der gemessenen Widerstandsbeiwerte gemachten Annahmen und bei den für die Rechnungen getroffenen Vereinfachungen klein. Die Übereinstimmung der Ergebnisse von Rechnung und Versuch deutet an, daß bei dem scharfen Mod. R. 1242 kein Druckwiderstand vorhanden ist, sondern der Gesamtwiderstand allein Reibungswiderstand ist[9]). Druckmessungen zur Bestätigung dieses Ergebnisses wurden nicht durchgeführt.

Vergleicht man die in Tab. VI für den scharfen Körper nach Millikan berechneten Widerstandsbeiwerte bei Änderung des Verhältnisses $L : B$, so erkennt man eine mit abnehmendem $L : B$ verbundene Zunahme des Formeinflusses auf den Reibungswiderstand. Dieses Ergebnis ist durch die bei kleinerem $L : B$ eintretenden größeren Unterdrücke, d. h. größeren Übergeschwindigkeiten in Körpermitte (s. Bild 8) erklärt; der Geschwindigkeitsabfall $\frac{du}{dy}$ in der Grenzschicht, die für die verschiedenen $L : B$ als gleich dick ermittelt wurde (s. S. 28), wird also steiler, die Schubspannungen und der Reibungswiderstand werden größer.

[9]) Infolge der endlich dicken Grenzschicht am Körperende wird auch bei dem schlanken Modell der Druck nicht wieder bis zum Staudruck ansteigen. Da die Verkümmerung des Druckwiederanstieges sich aber nur über ein kurzes Ende des Körpers erstreckt (vgl. Bild 8), wird der damit entstehende Druckwiderstand sehr klein sein und voraussichtlich dem Ausfall an Reibungswiderstand entsprechen.

Ein Vergleich der Rechnungs- und Versuchsergebnisse für das völlige Modell R. 1257 zeigt keine Übereinstimmung; es ergab sich nach der Rechnung $\zeta_{r_{Ges.}} = 0{,}00332$ und nach dem Versuch $\zeta_{Ges.\ verb.} = 0{,}00343$. Zieht man noch den aus den Druckmessungen ermittelten Druckwiderstand von 10% in Betracht, so bleibt für den Reibungswiderstand als Anteil des Gesamtwiderstandes nur ein Wert, der sogar unter dem Plattenwert und rd. 7% unter dem gerechneten Reibungswiderstandsbeiwert liegt. Bei der Rechnung war allerdings nicht berücksichtigt, daß Ablösung der Strömung am Körperende eintritt.

Betrachten wir zunächst das Ergebnis der Rechnung für Mod. R. 1257, das unter der Annahme einer bis zum Körperende anliegenden Strömung erhalten wurde, so stellen wir fest, daß der Reibungswiderstandsbeiwert kleiner als der für das scharfe Modell R. 1242 ist. Eine Erklärung für dieses, vielleicht unerwartete Ergebnis kann aus der Potentialdruckverteilung gegeben werden. Aus Bild 8 geht hervor, daß bei Mod. R. 1257 nach Erreichen eines größten Unterdruckes bei $\xi =$ rd. 0,75 ein Druckanstieg bis zur Körpermitte vorhanden ist; die Folge ist eine Verdickung der Grenzschicht gegenüber derjenigen bei Mod. R. 1242 (s. Bild 10). Dieser Verdickung entsprechend werden die Schubspannungen kleiner, die gerade in den Bereich der Mitte des Körpers auf eine verhältnismäßig große Fläche wirksam sind. Die Längenverteilung der Reibungskräfte in Bild 10 zeigt deutlich den Unterschied zwischen beiden Modellen.

Wenn Ablösung der Strömung eintritt, verliert das Millikansche Berechnungsverfahren des Reibungswiderstandes für Drehkörper seine Gültigkeit, wie die Versuche mit Mod. R. 1257 gezeigt haben; zum mindesten dürfte nur bis zur Ablösungsstelle gerechnet werden. Ist die Strömung abgerissen, so ändert sich das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht grundlegend; am Körperende sind die Geschwindigkeiten an der Körperoberfläche selbst sogar vorwärts gerichtet. Für die in Bild 10 dargestellte, rechnerisch ermittelte Längenverteilung des Reibungswiderstandes für den Drehkörper ohne Ablösung bedeutet dieses, daß die Kurve von der Ablösungsstelle an schnell auf Null abfällt. Der hiermit verbundene Ausfall an Reibungskräften hinter der Ablösungsstelle kann ohne weiteres den oben mit 7% angegebenen Unterschied der Reibungswiderstandsbeiwerte zwischen Rechnung und Versuch ausmachen. Diese Überlegungen zeigen, daß der infolge des unsicheren Auswertungsverfahrens — wie schon a. O. erörtert — nur als Mittelwert angegebene Druckwiderstand von 10% des Gesamtwiderstandes nicht allzusehr von dem wirklichen abweichen wird.

Die Ergebnisse der Versuche mit den Doppelmodellen, die vorwärts und rückwärts geschleppt wurden, bestätigen, daß an der Vergrößerung des Formeinflusses auf den Gesamtwiderstand der Druckwiderstand maßgeblich beteiligt ist. Eine noch eindrucksvollere Bestätigung des für Mod. R. 1257 ermittelten Druckwiderstandes stellen die Ergebnisse der Versuche mit Modell R. 1257a und 1257b dar. Für Mod. R. 1257a, das aus Mod. R. 1242 als Vorschiff und Mod. R. 1257 als Hinterschiff zusammengesetzt ist, müßte sich etwa der gleiche Gesamtwiderstandsbeiwert ergeben wie bei Mod. R. 1257, wenn der Druckwiderstand den Hauptanteil an der Widerstandserhöhung gegenüber der Platte bildet. In der Tat ergab sich für Mod. R. 1257a ein $\zeta_{Ges.\ verb.} = 0{,}00347$ gegenüber für Mod. R. 1257 $\zeta_{Ges.\ verb.} = 0{,}00343$. Der etwas höhere $\zeta_{Ges.}$-Wert erklärt sich aus der Unsymmetrie von Vor- und Hinterschiff, sowie vielleicht auch aus dem höheren Formeinfluß auf den Reibungswiderstand für das als Vorschiff dienende Mod. R. 1242. Für Mod. R. 1257b gilt die gleiche Überlegung, nur daß hier der $\zeta_{Ges.}$-Wert dem des Mod. R. 1242 entsprechen muß, da bei dem als Hinterschiff dienenden

Mod. R. 1242 kein wesentlicher Druckwiderstand auftritt. Die gemessenen Werte sind:

$$\zeta_{Ges.\ verb.} = 0{,}00335 \text{ gegenüber Mod. R. } 1242$$

$$\zeta_{Ges.\ verb.} = 0{,}00334.$$

Die Ausführungen zeigen, daß die Berechnung des Reibungswiderstandes nach Millikan für schlanke Drehkörper brauchbare Absolutwerte bei $\Re = 6 \cdot 10^6$ liefert. Berechnungen des Reibungswiderstandes für Mod. R. 1242 bei Reynoldsschen Zahlen von $4 \cdot 10^6$ bis $7 \cdot 10^6$ ergaben die gleiche Übereinstimmung von Rechnung und Versuch. Für größere Reynoldssche Zahlen als die, die bei den Versuchen erreicht wurden, gilt das $^1/_7$-Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht nicht mehr, und die von Millikan gemachten Ansätze sind durch die von Moore [23] zu ersetzen. Wie weit die Ergebnisse nach letzterem Rechnungsverfahren mit der Wirklichkeit übereinstimmen, kann durch vorliegende Untersuchungen nicht gesagt werden.

Für völlige Körper, bei denen Ablösung der Strömung eintritt, gibt die Rechnung nach Millikan die Widerstandsverhältnisse nur bis zur Ablösungsstelle richtig wieder.

Der Vergleich der rechnerisch und durch Versuch ermittelten Druckverteilung für Mod. R. 1257 wurde schon unter III. D. vorgenommen.

V. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen.

Vorliegende Arbeit, die sich die Klärung der Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes zum Ziel gesetzt hatte, gliedert sich in zwei Teile:

I. Rechnerische Ermittlung der Strömung um einen Drehkörper,
II. Modellversuche mit tiefgetauchten Körpern.

Zu I. Nach Erörterung der theoretischen Grundlagen wird 1. ein allgemein gültiges analytisches Verfahren zur Ermittlung der Umrisse von Drehkörpern und der Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs deren Oberfläche in idealer Flüssigkeit entwickelt. Es gelingt unter Zugrundelegung einer analytischen Doppelquellverteilung und dimensionsloser Darstellungsweise Gleichungen für die Körperumrisse und die Geschwindigkeit aufzustellen, in denen Integralwerte von der stets gleichen Form $\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^m}{\sqrt{R(\xi)^3}}\, d\xi$ erscheinen. Eine einmalige Auswertung der Integralwerte bis zu möglichst hohen Potenzen m, wie sie in vorliegender Arbeit geschehen ist (siehe Tab. I), gestattet, für alle möglichen Doppelquellverteilungen — die durch Polynome bis zu den berechneten Potenzen m gegeben sind — die aus der Überlagerung von Quell- und Transportströmung entstehenden Körperformen sowie deren Geschwindigkeits- oder Druckverteilung ohne besondere Mühe zu ermitteln. Entgegen den bisher bekannten, zum Teil zeitraubenden Verfahren können die gestellten Aufgaben mit großer Genauigkeit in kurzer Zeit gelöst werden.

2. Mit Hilfe des neuen Verfahrens werden die Aufmaße und Geschwindigkeitsverteilungen für achsensymmetrische Drehkörper mit den Schärfegraden $\varphi = 0{,}546$ und 0,80 bei den Streckungsverhältnissen $L : B = 6, 8, 10$ ermittelt.

3. Nach einer Erörterung der in zähigkeitsbehafteter Flüssigkeit auftretenden Widerstandsanteile und der theoretischen Grundlagen für die Berechnung des Reibungswiderstandes nach Millikan [22] werden für die nach dem unter 1. angegebenen Verfahren ermittelten Drehkörper die Reibungswiderstandsbeiwerte errechnet.

Zu II.

1. Die Abmessungen der untersuchten Modelle werden angegeben. Zu den unter I. ermittelten Drehkörpermodellen treten noch Schiffsdoppelmodelle, die durch geometrische Verzerrung einer Ausgangsform zu Modellen mit verschiedenem $B : T$ erhalten werden.

2. Die Meßeinrichtungen und die Durchführung der Versuche werden beschrieben.

3. Nach überschläglicher Berechnung besonderer Einflüsse auf die Widerstands- und Druckmessungen werden die Versuchsergebnisse einer eingehenden Erörterung unterzogen. Eine besondere Versuchsreihe über die Wirkung verschiedenartiger Turbulenzerzeuger (Stolperdrähte verschiedenen Durchmessers und verschieden breite Aufrauhungsstreifen) hat ergeben, daß Drähte von 1,0 mm ⌀ auf $^1/_{20}\,L$ von vorne genügen, während die Aufrauhungen, die mit einem von der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt vorgeschlagenen Hobeleisen in das Modell geschnitten wurden, keinerlei Wirkung zeigten. Die Ergebnisse der Versuche mit den tiefgetauchten Drehkörpern ($L : B = 8$) zeigten je nach dem Schärfegrad $\varphi = 0{,}546$, 0,667 und 0,80 Abweichungen des Gesamtwiderstandsbeiwertes von den Plattenbeiwerten (Schlichting) von 2,1, 3,7 und 4,9%. Bei den vorwärts geschleppten Doppelmodellen ergaben sich entsprechend der Verhältnisse $B : T = 2{,}4$, 3,3 und 4,5 Abweichungen von den Plattenwerten von 8,9, 9,8 und 11,6%, die bei den gleichen, rückwärts geschleppten Modellen sogar auf 19,6, 21,4 und 22,6% anstiegen. Es wird festgestellt, daß der Druckwiderstand maßgeblich an der Erhöhung des Gesamtwiderstandes beteiligt ist. Die an dem völligen Drehkörper ($\varphi = 0{,}8$) durchgeführten Druckmessungen zeigten bis auf $^3/_4$ der Länge des Modells von vorne gute Übereinstimmung mit der gerechneten Druckverteilung. Das Auswertverfahren zur Bestimmung des Druckwiderstandes stellte sich als sehr empfindlich heraus, so daß für den Druckwiderstand nur ein Mittelwert von 10% des Gesamtwiderstandes angegeben werden kann. Eine bedeutend größere Anzahl von Druckmeßstellen im Vor- und Hinterschiff ist zur einwandfreien Bestimmung des Druckwiderstandes erwünscht.

4. Die Ergebnisse von Rechnung und Versuch werden verglichen. Für das scharfe Drehkörpermodell ($\varphi = 0{,}546$) wird der nach Millikan errechnete Reibungswiderstand durch den Versuch bestätigt; der Druckwiderstand ist hier voraussichtlich vernachlässigbar klein. Für das völlige Drehkörpermodell ($\varphi = 0{,}8$) ist die Anwendung der Millikanschen Rechnung nicht mehr statthaft, da am Körperende Ablösung der Strömung eintritt. Das Millikansche Rechnungsverfahren gibt die Widerstandsverhältnisse nur bis zur Ablösungsstelle richtig wieder. Versuche mit einem besonderen Modell bestätigten den infolge des unsicheren Auswertverfahrens als Mittelwert angegebenen Druckwiderstand von 10% bei dem völligen Drehkörpermodell.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die gestellte Aufgabe durch vorliegende Untersuchungen wenn auch nicht endgültig gelöst, so doch dahingehend geklärt wurde, daß in den meisten Fällen für die großen Abweichungen der Körperwiderstandsbeiwerte von den Plattenbeiwerten nicht der Reibungswiderstand, sondern der Druckwiderstand verantwortlich gemacht werden muß. Für weitere Untersuchungen ergibt sich damit die Formulierung der Aufgabe: Formabhängigkeit des Druckwiderstandes.

★

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, insbesondere Herrn Direktor und Professor Seifert, dem Leiter der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, sowie Herrn Oberregierungs- und -baurat Dr.-Ing. Weitbrecht, dem Leiter der Schiffbau-Abteilung, dafür zu danken, daß mir zur Durchführung der Versuche die Einrichtungen

der Anstalt zur Verfügung standen, sowie ein großer Teil der erforderlichen Mittel bereitgestellt wurden. Herrn Professor Dr. Ing. Horn, auf dessen Veranlassung mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft die Arbeit entstanden ist, und Herrn Professor Dr.-Ing. Weinblum bin ich für viele Anregungen und Hinweise zu besonderem Dank verpflichtet. Herr Dr.-Ing. Gutsche und die übrigen Mitarbeiter der Versuchsanstalt standen mir stets mit Rat und Tat zur Seite und trugen so wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei.

VI. Schrifttum.

1. F. Eisner: „Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern", Mitt. d. Preuß. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, 1929, H. 4, Verlag Jul. Springer.
1a. F. Eisner: „Reibungswiderstand", Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, 1932, Selbstverl. d. Ges. d. Freunde und Förderer der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt, Hamburg.
2. H. Föttinger: „Fortschritte der Strömungslehre im Maschinenbau und Schiffbau", Jb. schiffbautechn. Ges., Bd. 25, 1924, S. 308.
3. H. Föttinger: „Die Entwicklung der Vektorintegratoren zur maschinellen Lösung von Potential- und Wirbelproblemen", Z. techn. Physik, 1928, S. 26.
4. G. Fuhrmann: „Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen", Jb. d. Motorluftschiff-Studiengesellschaft, 1911—1912, S. 65.
5. Graff: „Untersuchungen über den Ablösungswiderstand völliger Schiffsformen", Jb. schiffbautechn. Ges., Bd. 35, 1934, S. 193.
6. E. Gruschwitz: „Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg", Ing.-Arch., Bd. II, 1931, S. 321.
7. F. Gutsche: „Das Zylinderstaurohr", Schiffbau, 1931, S. 13.
8. F. Gutsche: „Versuche über die Profileigenschaften der Blattschnitte von Schiffsschrauben und ihr Einfluß auf deren Entwurf und Auswertung", Mitt. d. Preuß. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, 1933, H. 10, Eigenverlag.
9. T. H. Havelock: „The wave resistance of a spheroid", Proc. Roy. Soc., Lond., A 131, 1931.
10. F. Horn: „Theorie des Schiffes", Hdb. d. Physik u. techn. Mech., Bd. V, 1929, Verl. Joh. A. Barth, Leipzig.
11. F. Horn: „Schiffsschleppversuche", Hdb. d. Experimentalphysik, IV, 3. Teil, Akad. Verlagsges. m. b. H., Leipzig.
12. F. Horn: Erörterung z. Vortr. Kempf, Jb. schiffbautechn. Ges., Bd. 28, 1927, S. 186.
13. F. Horn: Erörterung z. Gruppe I: „Reibungswiderstand", Hydromech. Probl. d. Schiffsantriebs, 1932, Hamburg.
14. Th. v. Kármán: „Über laminare und turbulente Reibung", Z. angew. Math. Mech., Bd. 1, 1921, S. 233.
15. Th. v. Kármán: „Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern", Abhandl. a. d. Aerodyn. Inst. a. d. Techn. Hochschule, Aachen, 1927, H. 6, Verl. Jul. Springer, Berlin.
16. Th. v. Kármán: „Theorie des Reibungswiderstandes", Hydromech. Probl. d. Schiffsantriebes, Hamburg, 1932.
17. G. Kempf: „Neue Betriebserfahrungen und Entwicklung der Schiffbauversuchstechnik", Werft Reed. Hafen, 1930, S. 438.
18. H. Lamb: „On the effect of the walls of an experimental tank on the resistance of a model", Aeron. Res. Com., Rep. and Mem., 1010.
19. W. Laute: „Untersuchungen über Druck- und Strömungsverlauf an einem Schiffsmodell", Jb. schiffbautechn. Ges., Bd. 34, 1933, S. 403.
20. H. Lerbs: „Die Verteilung der Verdrängungsströmung neben der Schiffswand", Werft Reed. Hafen, 1928, S. 263.
21. C. N. H. Lock: „Wind tunnel interference on streamline bodies", Aeron. Res. Com., 1931, Rep. and Mem. 1451.
22. C. B. Millikan: „The boundary layer and skin friction for a figure of revolution", Trans. Amer. Soc. mech. Engr., 1932, S. 29.
23. N. B. Moore: „Application of Karmans logarithmic law to prediction of airship hull drag", J. aeron. Sci., Bd. 2, 1935, N. 1, S. 32/34.
24. H. Müller: „Der Reibungswiderstand umströmter Körper", Werft Reed. Hafen, 1932, S. 54.
25. K. Pohlhausen: „Zur Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht", Z. angew. Math. Mech., 1921, S. 252.
26. L. Prandtl: „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung", Verhdlg. d. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg 1904, Leipzig 1905.
27. L. Prandtl: Ergebnisse der AVA Göttingen. I, 1921, S. 136.
28. L. Prandtl: „Abriß der Strömungslehre", Verlag Fr. Vieweg u. Sohn A. G., Braunschweig, 1931, S. 139.
29. L. Prandtl — O. Tietjens: „Hydro- und Aeromechanik", Bd. I, 1929, Verl. Jul. Springer, Berlin, S. 138.
30. W. J. M. Rankine: „On plane water lines in two dimensions", Philos. Trans., 1864, S. 369.

31. O. Schlichting: „Die Berücksichtigung des Reibungswiderstandes bei der Bestimmung des Schiffswiderstandes", Jb. schiffbautechn. Ges., Bd. 34, 1933, S. 305.
32. D. W. Taylor: „On ship-shaped stream forms", Trans. Instn. Naval Archit., 1894.
33. Telfer: „Ship resistance similarity", Trans. Instn. Naval Archit., 1927.
34. A. van d. Vliet: „Continuous flow round streamline bodies with potential of velocity", Prag, 1929.
35. H. Voigt: „Systematische Schraubenuntersuchungen am Schiffsmodell", Schiffbau, 1934, S. 38 u. a..
36. G. Weinblum: „Exakte Wasserlinien und Spantflächenkurven", Schiffbau, 1934, S. 120 u. a.
37. G. Weinblum: „Einfluß der endlichen Querschnittsabmessungen einer Schlepprinne auf den Modellwiderstand", Schiffbau, 1934, S. 83/85.
38. F. Weinig: „Über schnell konvergierende graphische Lösungen von Strömungsproblemen durch Integralgleichungen", Z. techn. Physik, 1928, S. 39.
39. W. C. S. Wigley: „Ship wave resistance", Progress since 1930, Trans. Instn. Naval Archit., 1935, S. 223.

DRUCK VON
A. SEYDEL & CIE. AKTIENGESELLSCHAFT
BERLIN SW 61