DR. P. C. SIKKEMA

EXACT EN NIET EXACT IN DE WISKUNDE

UITGEVERIJ WALTMAN – HIPPOLYTUSBUURT 4 – DELFT

EXACT EN NIET EXACT IN DE WISKUNDE

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN GEWOON HOOGLERAAR IN DE ZUIVERE EN TOEGEPASTE WISKUNDE EN DE MECHANICA AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT, OP WOENSDAG 27 NOVEMBER 1963

DOOR

Dr. P. C. SIKKEMA

UITGEVERIJ WALTMAN - HIPPOLYTUSBUURT 4 - DELFT

Mijne Heren Curatoren,
Mijne Heren Hoogleraren,
Dames en Heren Lectoren,
Dames en Heren Leden van de Wetenschappelijke Staf,
Dames en Heren Studenten,
en voorts Gij allen, die door Uw aanwezigheid van Uw belangstelling blijk geeft,

Zeer gewaardeerde Toehoorders,

De wiskunde van heden staat bekend als één der exacte wetenschappen. Dit wil zeggen, dat zij op strikt deductieve wijze is opgebouwd uit een aantal grondbegrippen en op een aantal grondeigenschappen van deze begrippen, die men wel axioma's noemt. Zo kan men de mathematische analyse opbouwen, beginnend met het getal 1 als grondbegrip en enkele grondeigenschappen. Slechts beweringen, die door een exacte redenering uit de grondbegrippen en de axioma's kunnen worden afgeleid, vinden een plaats in het gebouw der wiskunde. Beweringen, waarvoor dit niet mogelijk is, worden met grote beslistheid geweerd. Door deze gang van zaken wordt de wiskunde exact genoemd. Desondanks kent de wiskunde uitspraken, die, in zekere zin, niet exact zijn. Over exact en niet exact in de wiskunde zal ik in dit uur spreken.

Naar onze begrippen heeft het tot het jaar 1821 geduurd voordat de wiskunde een exacte wetenschap werd. In dat jaar nl. schreef de grote Franse mathematicus CAUCHY de leerstof van de colleges in analyse, die hij gedurende een aantal jaren aan de École Polytechnique te Parijs had gegeven, bijeen in zijn Cours d'Analyse Algébrique. In dit werk gebruikte CAUCHY voor het eerst in de mathematische literatuur een naar onze smaak onaanvechtbare definitie van limiet, een begrip van fundamenteel belang in de analyse. Dit begrip is daarom van zo grote betekenis, omdat het te maken heeft met een oneindig, d.w.z. niet eindigend proces. Vrijwel terzelfder tijd als CAUCHY kwamen

BOLZANO en GAUSZ tot dit begrip. Dit betekende het einde van een bijna onbegrensd formalisme, dat vooral in de achttiende eeuw hoogtij vierde en waarvan EULER wel de grootste en ook de belangrijkste beoefenaar was. Deze meester verstond de kunst een enorm formularium af te leiden, waarvan echter een aantal formules later, als gevolg van het werk van CAUCHY, GAUSZ en de Noorse mathematicus ABEL, als onbruikbaar en zelfs als volkomen nonsens werd beschouwd. Een voorbeeld hiervan wordt gegeven door de ontwikkeling van $(1+x)^n$ in een reeks naar opklimmende machten van x. Deze ontwikkeling werd reeds door NEWTON beschouwd. Ze geeft een veelterm in x als n een niet-negatief geheel getal is en men mag in dit geval voor x elke waarde substitueren, die men wil, zonder dat de formule inexact wordt. Is n echter wel een negatief geheel getal, of is n niet geheel, dan bevat de ontwikkeling oneindig veel termen en het is wel bekend, dat nu voor x niet elke waarde mag worden gesubstitueerd. Is b.v. $n = -1$, dan is het in het bijzonder niet geoorloofd voor x de waarde 1 te kiezen: de reeksontwikkeling geeft dan nl. de reeks

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

te zien, waarvan de som niet bestaat. Omdat de ontwikkelde breuk de waarde $^1/_2$ heeft, is volgens EULER de som van de reeks gelijk aan $^1/_2$. Nog vreemder lijkt het resultaat dat men verkrijgt, als men in het geval $n = -1$ voor x de waarde -2 neemt: de breuk is dan gelijk aan -1, terwijl de reeksontwikkeling geeft

$$1+2+4+8+16+\ldots$$

De som hiervan stelt EULER daarom, ondanks het feit, dat de termen positief zijn en onbegrensd aangroeien, gelijk aan -1 en hij verbaasde zich hierover niet. Dergelijke resultaten, verkregen door te werken met divergente reeksen waren voor CAUCHY, ABEL en GAUSZ volstrekt onaanvaardbaar en werden door hen danook uit de analyse en daarmede uit de wiskunde gebannen. Ik kom hierop straks nog terug.

Ik sprak reeds van een oneindig proces. Uit wat de Oude Grieken ons hebben nagelaten heeft men kunnen afleiden, dat een dergelijk proces hen grote moeilijkheden verschafte. Alvorens hierop nader in te gaan, wil ik enige aandacht wijden aan de wiskunde, die vóór de Griekse tijd in het Midden-Oosten bedreven werd. Volgens de beroemde Griekse filosoof ARISTOTELES is de wiskunde in Egypte ontstaan, omdat daar de priesters over de nodige vrije tijd beschikten. Waarschijnlijker is echter, dat praktische problemen de oorzaak zijn geweest van de ontwikkeling van meetkunde en rekenkunst. Een inzicht hieromtrent geven ons sommige papyrusrollen, gemaakt van stengels van de Egyptische papyrusplant. Zij tonen in hiëroglyfenschrift allerlei teksten, waaronder er ook van wiskundige aard zijn. De meest bekende is wel de papyrus Rhind, genoemd naar de Engelse egyptologist RHIND en zich thans bevindend in het Britse museum in Londen. De tekst ervan zal vermoedelijk omstreeks 1650 jaren vóór het begin onzer jaartelling geschreven zijn. Hij begint met optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van natuurlijke getallen. Daarna volgt de deling, die, voorzover hij opgaat, een vermenigvuldiging en eigenlijk een optelling is. Gaat de deling niet op, dan gebruikte men breuken, waarbij die met teller gelijk aan 1, zgn. stambreuken, de hoofdrol, spelen. Men kon reeds breuken optellen en aftrekken. Het is duidelijk, dat deze rekenkunst van grote praktische betekenis was, immers met behulp van deze eenvoudige bewerkingen was men in staat geldelijke beloningen en dergelijke te berekenen, wat vooral voor de koninklijke schrijvers van belang was. De meetkunde was slechts een toepassing van de rekenkunde: zij diende in hoofdzaak voor het bepalen van de oppervlakte van stukken land en voor het becijferen van inhouden van opslagplaatsen, wat tot de taak der landmeters behoorde. Ook kon men berekeningen in de astronomie maken. Zolang het ging om het berekenen van oppervlakten van driehoeken, rechthoeken en trapezia blijken de uitkomsten goed te zijn. De oppervlakte van een willekeurige vierhoek werd berekend volgens de foutieve regel: de halve som van twee overliggende zijden, vermenigvuldigd met de halve som der beide andere overliggende zijden geeft de oppervlakte van de vierhoek. Dat deze regel fout is ziet U gemakkelijk, door voor de vierhoek het bijzondere geval van een parallellogram te nemen. Beschouwt U dan nl. dit parallellogram als een stangenparallellogram en klapt U het samen, dan gaat daarbij de oppervlakte naar nul, terwijl zij volgens de Egyptische formule niet zou veranderen.

Interessant is, dat de Egyptenaren voor het berekenen van de oppervlakte van een cirkel het $^8/_9$e deel van de lengte van een middellijn in het kwadraat verhieven. Op deze wijze verkregen zij niet de exacte waarde van de oppervlakte, doch slechts een benadering, die overigens zeer goed was. Nemen wij de eenheid als straal, dan is de oppervlakte van de cirkel gelijk aan π = 3,14159 . . ., terwijl de Egyptenaren vonden 3,16049 . . ., een afwijking van vrijwel 0,6 %. De oppervlakte van een bol was hen onbekend en ze konden er ook geen benadering voor geven.

Een tweede papyrus, die in Moskou wordt bewaard en vermoedelijk omstreeks 1850 jaren v. C. is ontstaan, toont aan, dat men wel bekend was met de exacte formule voor de inhoud van een afgeknotte piramide met een vierkant als grondvlak. Voorwaar geen kleine prestatie, die mogelijk met behulp van de algebra der Babyloniërs tot stand is gekomen.

Wij bereiken nu het tweede gebied in het Midden-Oosten waar de wiskunde tot bloei geraakte, nl. Babylonië. De Babyloniërs maakten gebruik van spijkerschrift om hun bevindingen te noteren; zij deden dit op tabletten van klei. De oudste tabletten dateren uit de tijd van de eerste dynastie van Ur en zijn dus omstreeks 5000 jaar oud, veel ouder dan de papyri uit Egypte. Opvallend is, dat de Babyloniërs het zestigtallig stelsel gebruikten, en, dat zij een veel handiger notatie bezigden dan de Egyptenaren met hun honderdtallig stelsel. Hierdoor was het hen mogelijk veel gemakkelijker te rekenen dan deze laatsten, in het bijzonder waar het de deling van een natuurlijk getal *a* door een natuurlijk getal *b* betreft. Zij berekenden dan eerst de inverse van *b* en vermenigvuldigden de uitkomst met *a*. Ging de deling niet op, dan maakte men gebruik van benaderingen, zoals blijkt uit een der gevonden teksten. Men kende kwadraat- en derdemachtstafels en kon daaruit in de eenvoudigste gevallen een tafel voor de tweedemachts- en de derdemachtswortel uit een getal samenstellen. Maar men kon aanzienlijk méér: moest men de tweedemachtswortel uit een getal trekken, dat niet een kwadraat is, dan voerde men een benadering uit, die als volgt werkte. Wilde men b.v. de wortel trekken uit het getal 2, dan telde men bij een rationale benadering *a* van deze wortel op het getal, dat verkregen wordt door 2 te delen door *a* en daarna de som te halveren. Voor het getal *a* kan men, als men wil, het getal $1^1/_2$ nemen en vindt zo als benadering van de wortel uit 2 het getal $1^5/_{12}$. De Babyloniërs schrijven hiervoor 1;25 omdat zij in het zestigtallig stelsel werken. Was deze benadering voor hun doel nog niet goed genoeg, dan herhaalde men het proces door nu

voor *a* de reeds gevonden benadering $1^5/_{12}$ te nemen. Zoals te lezen staat op een nog niet lang geleden gevonden tablet vond men dan als benadering van de wortel uit 2 het getal 1;24,51,10, dat weer in het zestigtallig stelsel is geschreven. In ons tientallig stelsel schrijven wij daarvoor 1,414216 welke benadering pas in de zesde decimaal onjuist is en wel slechts twee eenheden! Eveneens treft men bij de Babyloniërs voor de wortel uit het getal p^2+q de benadering $p+q/2p$ aan. Hieruit blijkt, dat de Babyloniërs de Egyptenaren op het gebied van de algebra ver vooruit waren en, althans wat de uitkomsten betreft, evenver waren als NEWTON zo'n drieduizend jaren later. Voor de Babyloniërs was zelfs het oplossen van de algemene vierkantsvergelijking geen probleem. Ook twee algebraïsche vergelijkingen in twee onbekenden, waarvan één van de eerste en de andere van de tweede graad was, leverde hen geen moeilijkheden op. Tenslotte blijkt uit de spijkerschriften, dat de Babyloniërs reeds de stelling kenden die thans bekend staat onder de naam stelling van PYTHAGORAS, echter in hoofdzaak, naar het schijnt, in arithmetisch verband. Zij kenden evenmin als de Egyptenaren de exacte waarde van de oppervlakte van een cirkel; als benadering daarvoor gebruikten zij drie maal het kwadraat van de straal, zodat zij op dit punt bij de Egyptenaren achter lagen.

In gedachten maken wij nu een sprong van ruim duizend jaren tot in de zesde eeuw vóór de aanvang onzer jaartelling. Op dat moment was de bloeitijd van de wiskunde bij zowel de Babyloniërs als de Egyptenaren al lang voorbij. Wat ervan overbleef stond ter beschikking van de volgende groep van cultuurdragers: de Grieken. Uit het werk van de belangrijkste der Griekse wiskundigen blijkt, dat zij kennis gedragen moeten hebben van dat hunner voorgangers in Babylon en in Egypte. Zij zetten echter niet alleen het werk van dezen voort, zij gaven er een geheel nieuw karakter aan. Zij volstonden niet meer met het berekenen van zekere grootheden, doch vroegen zich o.m. af, waarom de basishoeken van een gelijkbenige driehoek aan elkaar gelijk zijn en waarom een middellijn een cirkel in twee gelijke delen verdeelt. Het is duidelijk, dat een antwoord op zulke fundamentele vragen slechts gegeven kan worden door een bewijs te geven en het is juist het nieuwe element van het vragen naar een bewijs, dat de Grieken in de wiskunde brachten. Daardoor brachten zij de gehele wiskunde op een aanzienlijk hoger niveau en verbeterden zij de graad van exactheid in aanzienlijke mate. De eerste, die de zojuist genoemde vragen moet hebben beantwoord, was THALES, die omstreeks het jaar 585 v. C. leefde. Na hem kwam de mystieke figuur van PYTHAGORAS, wiens naam de traditie tot in onze dagen gegeven heeft aan een bekende stelling over een rechthoekige driehoek, welke stelling de Babyloniërs al kenden voor bijzondere rechthoekige driehoeken, zoals wij reeds opmerkten. Het is mogelijk, dat PYTHAGORAS deze stelling voor een algemene rechthoekige driehoek bewezen heeft. De school van PYTHAGORAS, de Pythagoreërs genoemd, kan men beschouwen als een soort wetenschappelijk genootschap; zij bedreef de wiskunde niet meer om haar toepassingen, doch om haars zelfs wil. Men kende vier onderdelen der wiskunde, mathemata geheten, nl. getallenleer of arithmetica, muziekleer of harmonica, meetkunde of geometria en sterrenkunde of astrologia. Door PYTHAGORAS'idee van de suprematie van het getal, welk idee gestaafd werd door de toonladder in de muziek, verder uit te werken en te verdiepen, hebben zij het in deze vier leervakken ver gebracht. Dat zij daarbij niet altijd even succesvol waren, zien wij aan hun opvatting, als zou de muziek zich laten toepassen op sterrekunde. Zij beschikten nl. over de afstanden tot een aantal der hemellichamen en vonden, dat tussen die afstanden verhoudingen bestaan overeenkomende met die der muzikale intervallen. Zij concludeerden daaruit, dat die hemellichamen vanwege hun afmetingen en hun snelheid een samenklank moesten veroorzaken welke zij harmonie der sferen noemden.

Eén feit bleek niet in overeenstemming te zijn met hun leer als zouden alle verhoudingen meetbaar zijn en dat feit deed zich nog wel voor bij een rechthoekige driehoek, die in hun wiskunde een zo grote plaats innam. Zij vonden nl. dat de lengte van de schuine zijde van een gelijkbenige rechthoekige driehoek, waarvan de rechthoekszijden gelijk zijn aan 1, niet meetbaar is, d.w.z. niet is voor te stellen door een breuk. Hoe schokkend deze ontdekking voor hen ook geweest mag zijn, ze vonden een uitweg door nieuwe getallen, de zgn. onmeetbare of irrationale getallen te definieren. EXDOXUS, die omstreeks het jaar 370 v. C. leefde, heeft hierbij een grote rol gespeeld.

Een ander probleem, waarvoor de Grieken zich gesteld zagen, was het niet met elkaar in overeenstemming zijn van de grootte

van de oppervlakte van een cirkel met straal 1, zoals die door de Babyloniërs en door de Egyptenaren was gegeven, nl. resp. 3 en $(^{16}/_{9})^2$. Zij konden slechts tot een beslissing komen door middel van een bewijs. Ook bij de oplossing van dit probleem speelde EUDOXUS een belangrijke rol. Hij ging uit van de mogelijkheid dat een grootheid onbegrensd vaak te verdelen is en kwam aldus tot de volgende fundamentele uitspraak: als men van een grootheid een deel wegneemt, dat niet kleiner is dan de helft, van het overblijvende deel weer een deel wegneemt, dat niet kleiner is dan de helft en zo doorgaat, er tenslotte een grootheid wordt verkregen, die kleiner is dan een willekeurig voorgeschreven grootheid van dezelfde soort. Op deze uitspraak is de beroemde exhaustie- of uitputtingsmethode gegrondvest. Deze methode werd toegepast door in en om de cirkel een regelmatige veelhoek te beschrijven, waarvan men het aantal zijden onbeperkt laat aangroeien. Op deze wijze geraakt het tussen de in- en omgeschreven veelhoeken gelegen deel van het vlak uitgeput. Zo kon men in eerste instantie een benadering geven voor de oppervlakte van de cirkel, en in tweede instantie deze ook bepalen, althans theoretisch. Door het aantal zijden van de regelmatige veelhoeken gelijk te nemen aan 96 vond later ARCHIMEDES, dat ons getal π kleiner is dan $3^{10}/_{70}$ en groter is dan $3^{10}/_{71}$. Deze afschatting laat slechts een speelruimte toe van 0,002.

Deze werkwijze van de uitputtingsmethode werpt een uitermate belangrijke vraag op, nl. hoe vindt men de exacte waarde van de oppervlakte van een cirkel of van de inhoud van een bol. Het was niet onbekend, dat deze waarden, evenals vele andere, gevonden zijn door ARCHIMEDES, de grootste wiskundige der Oudheid, die leefde van 287 tot 212 v. C. en wel door middel van wat steeds „de Methode" werd genoemd. Pas in 1906 is men van inhoud van deze Methode op de hoogte gekomen als gevolg van een bijzonder gelukkige vondst van de Deense filoloog HEIBERG in het toenmalige Constantinopel. De Methode nu, blijkt in principe als volgt te werken: Als ARCHIMEDES de oppervlakte of de inhoud van een lichaam wil berekenen, verdeelt hij het in een groot aantal dunne plaatjes door middel van evenwijdige vlakken, waarna hij deze plaatjes aan het uiteinde gehangen denkt van één der armen van een weegschaal. Vervolgens brengt hij de weegschaal in evenwicht, door aan het uiteinde van de andere arm een lichaam te hangen, waarvan hij de oppervlakte of de inhoud kent. Op deze wijze is het hem gelukt onder meer de inhoud van een bol te berekenen. Daarmede stelde hij zich echter niet tevreden: naar zijn mathematisch gevoel was de formule voor de inhoud van een bol nog niet *bewezen* en, naar onze smaak, terecht! Daarom leverde hij achteraf het bewijs door middel van de uitputtingsmethode. De werkwijze van ARCHIMEDES is volkomen exact in de tegenwoordige betekenis van het woord; zij is in wezen wat wij bepaald integreren noemen. Hierdoor komt hem de eer toe zeer dicht bij het integraalbegrip te zijn geweest, dat meer dan tweeduizend jaren later door RIEMANN werd gedefinieerd. Men kan evenwel niet zeggen, dat ARCHIMEDES het integraalbegrip als zodanig gekend heeft omdat de door hem gevonden formules telkens opnieuw van de grond af aan werden afgeleid, wat niet nodig geweest zou zijn als hij het integraalbegrip had gekend, daar vele formules uit één enkele integraal hadden kunnen volgen. Desondanks is zijn wijze van werken van zo fundamentele en exacte aard, dat hij met hoofd en schouders uitsteekt boven iedere wiskundige, die vóór hem leefde en eveneens boven iedere wiskundige, die ten tijde van hem of in de eerste tweeduizend jaren na hem werkte. Volgens de overlevering maakte een Romeinse soldaat tijdens het beleg van Syracuse in het jaar 212 v. C. een eind aan het leven van deze grote mathematicus. Deze soldaat was, aldus BERTRAND RUSSELL in zijn boek „Geschiedenis der Westerse Filosofie", het symbool voor de ondergang van het zelfstandige denken, die Rome in geheel de Helleense wereld veroorzaakte.

Een punt, dat uit de werkwijze van ARCHIMEDES zeer duidelijk naar voren komt, is het optreden van oneindig kleine grootheden. Het probleem van het al of niet acceptabel zijn van zulke grootheden was al aanzienlijk eerder aan de orde geweest. Wij zagen al, hoe EUDOXUS de uitputtingsmethode gebruikte, die berustte op de aanname, dat het mogelijk is een grootheid steeds verder te verdelen. Deze aanname voerde later tot het zgn. continuïteitsaxioma, dat bij de opbouw van de projectieve meetkunde een belangrijke rol speelt. Er is aan deze aanname een filosofische strijd vooraf gegaan tussen twee groeperingen, waarvan de éne beweerde, dat een grootheid steeds verder te verdelen is, terwijl de andere de mening toegedaan was, dat elke grootheid opgebouwd is uit een zeer groot aantal kleine ondeelbare

delen (de atomistiek). Zij gaven ZENO aanleiding tot het uitspreken van vier paradoxen. Een ervan, de „Achilles" genoemd, stelt, dat Achilles een schildpad wil inhalen, die een voorsprong heeft van 10 schreden en die één schrede aflegt tegen Achilles er tien in dezelfde richting. Als nu Achilles de voorsprong doorlopen heeft, is de schildpad niet meer ter plaatse, doch één schrede verder. Heeft Achilles déze voorsprong doorlopen, dan is de schildpad weer niet ingehaald, want hij is in die tijd $^1/_{10}$ schrede verder gekomen. Aldus verkrijgt ZENO de som

$$10+1+{}^1/_{10}+\ldots+{}^1/_{10^n},$$

waarbij n de rij 0,1,2,3, . . . doorloopt en hij acht dit tenslotte een onbereikbare grootheid. Wij moeten aannemen, dat ZENO geweten heeft, dat ook de tijd voor het doorlopen van de voorsprong telkens kleiner wordt, zodat zijn probleem zich blijkt te keren tegen het tevoorschijn komen van een oneindig voortlopend proces. Wij zien, dat het probleem van een oneindig proces voor de Grieken geen geringe afmetingen bezat en dat het door EUDOXUS werd doorzien. Daarbij moeten wij nog vermelden, dat ANAXAGORAS twee eeuwen eerder reeds verkondigde, dat er zich onder de kleine grootheden geen kleinste en er onder de grote zich geen grootste bevindt.

Tenslotte moeten we uit de Griekse tijd de mathematicus EUCLIDES noemen, die ongeveer honderd jaren voor ARCHIMEDES leefde. Zijn grote verdienste, zowel op het gebied der meetkunde als op dat der getallenleer en der algebra, is, dat hij niet alleen al het werk dat vóór hem was gedaan samenbundelde, doch vooral, dat hij dit deed op axiomatische grondslag. Vermoedelijk heeft hij als basis van zijn gehele werk, de Elementen genaamd, vijf axioma's van algemene aard alsmede vijf meetkundige postulaten genomen. Zijn monumentaal werk beïnvloedde op beslissende wijze de opbouw van de wiskunde, welke opbouw tot op heden, ruwweg gesproken, dezelfde is gebleven. Een uitzondering op de wijze van redeneren treedt in hoofdzaak alleen op in de zeventiende en de achttiende eeuw. Toch moet U niet menen, dat de basis van de Elementen ook naar ónze begrippen geheel feilloos is; de mate waarin de opbouw van de wiskunde exact genoemd wordt kan variëren met de tijd en doet dit ook. Zo luidt één van de postulaten van EUCLIDES: het is mogelijk een eindige rechte lijn onbepaald in die lijn te verlengen. De bedoeling, die EUCLIDES met dit postulaat heeft is, dat een rechte lijn oneindig lang is.

Dit betekent echter niet hetzelfde: immers een grote cirkel getrokken tussen twee punten op een bol kan onbepaald worden verlengd op die cirkel, maar deze grote cirkel is niet oneindig lang. In zijn beroemd geworden habilitatievoordracht: „Über die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen" onderscheidde RIEMANN in 1854 scherp tussen deze twee begrippen. Hij toonde aan, dat als men van een rechte lijn niet aanneemt, dat hij oneindig lang is, doch slechts zijn onbegrensdheid, men eveneens een meetkunde verkrijgt, die echter een andere is dan die welke EUCLIDES beschouwde. Een dergelijke meetkunde noemt men een niet-Euclidische meetkunde, in dit geval een elliptische niet-Euclidische meetkunde. Zo zien wij een nieuwe ontwikkelingslijn in de meetkunde optreden. De axioma's en postulaten worden niet langer als vanzelfsprekend beschouwd, doch worden zelf een object van onderzoek. Aldus ontstaat de axiomatica, waarin men een verzameling van postulaten bestudeert. Deze verzameling dient in de eerste plaats consistent te zijn, d.w.z. het mag niet mogelijk zijn daaruit een tegenspraak af te leiden. Het is duidelijk, dat het nodig zal zijn hiervoor een criterium aan te geven. Als een zodanig criterium kent men de mogelijkheid van de constructie van een model, dat voldoet aan de eisen gesteld in de postulaten. Verder verlangt men van de postulaten, dat zij onafhankelijk zijn, d.w.z. dat geen ervan een logisch gevolg is van de overigen. Het is juist deze eis, die een uiterst belangrijke rol speelde bij de ontdekking van het bestaan van niet-Euclidische meetkunden. In de derde plaats dient de verzameling wat men noemt vruchtbaar te zijn, hetgeen wil zeggen, dat men in staat moet zijn met behulp van de postulaten een stelling te bewijzen. Het zal U niet verbazen, dat de axiomatica nauw samenhangt met de symbolische logica en met de filosofie der wiskunde, een samenhang waarop ik hier echter niet wil ingaan.

Wij begeven ons nu naar de zeventiende eeuw. Wellicht onder invloed van de economische en sociale vooruitgang, die in die eeuw plaats vond treedt een nieuwe bloei op in natuurkunde, biologie, astronomie, techniek en, niet in de laatste plaats, in de wiskunde. In onze omgeving merken wij in het bijzonder CHRISTIAAN HUYGENS op. In 1673 gaf hij in Parijs zijn beroemd geworden werk „Horologium oscillatorium" uit, waarin hij met

sterk gevoel voor exactheid o.m. meetkundige kwesties aansnijdt. Later laat hij een verhandeling verschijnen over de golftheorie van het licht, waarin met behulp van de Griekse meetkunde de wetten van de terugkaatsing en de breking worden afgeleid. In het Europa buiten de Zeven Provinciën treden twee groten vrijwel gelijktijdig op, nl. NEWTON in Engeland en LEIBNIZ in Duitsland. Hun reusachtige verdienste bestaat hierin, dat zij de differentiaal- en integraalrekening uitvonden en ontwikkelden als gevolg van het bezig zijn met het bestuderen van verschijnselen in de natuur. De grootte van de aantrekkingskracht, die de éne massa op een andere uitoefent, was daarbij een van de belangrijkste problemen. Zoals zo dikwijls het geval is, trachtten de waarnemers der natuur de verschijnselen met behulp van de wiskunde te beschrijven. Men is dan in eerste instantie geneigd niet te letten op exactheid, doch op het effectief zijn van de gevolgde methode. Zolang men resultaten verkrijgt, die in fysische zin juist blijken te zijn, behoeft men zich, althans voorlopig, geen zorgen te maken: de ondersteuning, die de natuur aan een redenering geeft, is dan, voor het moment, voldoende. Pas achteraf staat men voor de noodzaak de gebezigde begrippen en formuleringen exact te maken. NEWTON en LEIBNIZ waren er zich wel degelijk van bewust dat zij op het gebied van de exactheid tekort schoten. NEWTON had een bijzonder grote afkeer van controversen en stelde zich danook niet teweer tegen de kritiek van zijn tijdgenoten op dit punt. LEIBNIZ daarentegen, die zich gedurende een groot deel van zijn leven op het pad der diplomatie bewoog, voerde onder meer als verdediging aan, dat men ervoor diende te waken, de vruchten van een uitvinding te verliezen als gevolg van buitensporige bezwaren.

In de achttiende eeuw poogden vooral EULER en LAGRANGE de basis van de differentiaal- en integraalrekening te verbeteren, evenwel zonder succes. Volgens hen, was het daarmee zo gesteld, dat op de een of andere manier de fouten elkaar ophieven, waardoor de uitkomsten wel goed waren. Pas CAUCHY, waarvan ik U reeds sprak, slaagde er in het begin van de negentiende eeuw in een goede definitie van afgeleide en van bepaalde integraal te geven, daarbij uitgaande van het limietbegrip. Het op volkomen exacte basis opgezette werk van CAUCHY, ABEL en GAUSZ was dermate indrukwekkend, dat daarna geheel de wiskunde gaandeweg een exacte opbouw verkreeg.

Een van de vele verdiensten van NEWTON is, dat hij een methode ontwikkelde om van een algebraïsche of transcendente vergelijking $f(x) = 0$ een wortel, waarvan de exacte grootte niet bepaald kon worden, te benaderen en wel zo, dat men zoveel decimalen kan berekenen als men verkiest. Wij zagen reeds, dat de Babyloniërs dit probleem in een zeer eenvoudig geval, nl. het bepalen van de tweedemachtswortel uit een getal, al de baas konden. De methode van NEWTON wordt wel de raaklijnmethode genoemd, omdat zij de grafiek van de functie $f(x)$ getekend denkt, in een punt van de grafiek de raaklijn construeert, deze raaklijn snijdt met de x-as en tenslotte het punt van de grafiek bepaalt, waarvan de projectie op de x-as juist in dit snijpunt valt. Daarna trekt men in het aldus gevonden punt van de grafiek opnieuw de raaklijn. Door dit voorschrift een aantal malen te herhalen, komt men in het algemeen steeds dichter bij de gezochte wortel. Eén der voorwaarden opdat men zijn doel bereikt, nl. een telkens betere benadering is, dat men niet al te ver van de gezochte wortel begint met de eerste maal de raaklijn te tekenen. Het aldus aangegeven proces laat zich op eenvoudige wijze ook analytisch beschrijven. Bij elke stap, die men doet tijdens het proces, verkrijgt men een benaderde waarde voor de exacte grootheid, die de wortel is. Deze benaderde waarde, die op *exacte* wijze is gevonden, is in het algemeen echter *niet exact* gelijk aan de gezochte oplossing: zij vertoont daarvan nog een afwijking. Het spreekt vanzelf, dat men gaarne van de grootte van deze afwijking een indruk wil krijgen. Bij het zojuist beschreven proces blijkt dit een vrij eenvoudige zaak te zijn.

Het probleem, een benaderde uitdrukking te geven voor een oplossing van een of andere vergelijking treedt in tal van gebieden van de wiskunde op. Hier wil ik volstaan met te noemen de vraag naar een oplossing van een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde, die voldoet aan een zekere beginvoorwaarde. Onder zekere beperkingen is er precies één oplossing van deze vergelijking, die aan de gestelde beginvoorwaarde voldoet. De Franse mathematicus PICARD heeft tegen het einde van de vorige eeuw van deze bewering een bewijs gegeven, dat constructief is, d.w.z. dat men daarmee een benaderde uitdrukking voor de oplossing kan construeren. Als men de constructie van oplossingen in de diverse gebieden van de wiskunde met elkaar vergelijkt, valt het op, dat men telkens in een of andere verzameling te maken heeft met een vergelijking, waarvan men binnen die verzameling een oplossing verlangt en, dat men die oplossing bereikt als limiet van een oneindig voortlopende rij van elementen in die verzameling, welke rij in een bepaalde zin convergeert. Deze rij van elementen is niet zomaar een convergente rij: zij heeft een zeer speciale eigenschap nl. elk volgend element ervan ontstaat uit het onmiddellijk daaraan voorafgaand element door toepassing van telkens hetzelfde voorschrift. Men spreekt daarom van successieve approximatie. De vraag, die zich nu naar voren dringt, is, of men niet al deze klaarblijkelijk analoge gevallen, waarin successieve approximatie wordt toegepast, in één algemene stelling kan vangen. Het zal U duidelijk zijn, dat dan in een dergelijke stelling sprake moet kunnen zijn van onderling geheel verschillende verzamelingen van objecten, zoals getallen op de getallenrechte, van veelhoeken in een plat vlak, van functies gedefinieerd op een zeker interval, enz. Nu heeft men in het begin van deze eeuw reeds de behoefte gevoeld aan abstractie, d.w.z. aan het definiëren van zekere algemene begrippen, die niet direct aan concrete situaties doen denken, doch waarbij het wel degelijk mogelijk is, ze te concretiseren en die dan ook in dikwijls bekende stellingen resulteren. Een begrip, dat aldus een grote en uitermate belangrijke rol bleek te kunnen spelen was dat van „verzameling" of „ruimte", gevormd door elementen, die ook wel punten genoemd worden. Men ging werken met meer dan één ruimte en beschouwde afbeeldingen van de ene ruimte in een tweede, waarbij de tweede ruimte met de eerste mag samenvallen of daarvan een deel mag zijn. Zo kwam de functionaalanalyse in haar eerste stadium van ontwikkeling te verkeren. Als gevolg van fundamenteel werk van FREDHOLM (1903) en HILBERT (1906) ontwikkelde F. RIESZ in 1918 een theorie van integraalvergelijkingen van een type dat reeds door FREDHOLM was beschouwd, in abstracte vorm. Daarop verscheen in 1922 een artikel van de Poolse mathematicus S. BANACH in het tijdschrift Fundamenta Mathematicae, dat met recht deze naam draagt, omdat daarin tot op de dag van heden bijzonder veel fundamenteel werk op wiskundig gebied wordt gepubliceerd. In het genoemde artikel spreekt BANACH over transformaties in abstracte verzamelingen en hun toepassingen op integraalvergelijkingen. Daarmede was de grondslag gelegd voor wat men nu de theorie der Banachruimten pleegt te noemen. Deze theorie is door BANACH zelf, en met hem door de Poolse school, zeer ver ontwikkeld in de tweede helft der twintiger en in het begin der dertiger jaren. Tal van hoogst belangrijke resultaten van deze onderzoekingen zijn door BANACH neergelegd in zijn baanbrekend boek „Théorie des opérations linéaires", dat in 1932 verscheen. Dit boek wordt door sommigen beschouwd als het belangrijkste, dat tussen de twee wereldoorlogen op het gebied der mathematische analyse is verschenen. Zeker is, dat de functionaalanalyse daarmee een onbetwistbare plaats in de voorste rijen der mathesis is gaan innemen. Het grote belang van de functionaalanalyse voor de praktijk is niet zozeer generalisatie, als wel de abstracte vorm waarin zijn problemen zijn gegoten en waarin zij worden beschouwd. Daardoor is het mogelijk gelijktijdig opgaven te beschouwen in schijnbaar ver uit elkaar gelegen gebieden der analyse. Bij deze bestudering werkt de functionaalanalyse niet alleen unificerend, zij geeft ons tevens grenzen aan, binnen welke wij mogen verwachten een oplossing van de gestelde problemen te vinden.

Van de toepassingen der functionaalanalyse wil ik binnen het kader van deze rede slechts twee noemen. Kort voor het einde van de vorige eeuw publiceerde HEAVISIDE in de Proceedings of the Royal Society, London, een tweetal artikelen over operatoren in de mathematische fysica. Hij introduceerde daarin een symbolische rekenwijze, die een wiskundige ondergrond volledig miste, doch desondanks zeer bruikbaar bleek te zijn. In 1926 bouwde DIRAC hierop voort, door de beruchte δ-functie in te voeren. De quantumdynamica en de elektrotechniek voeren er wel bij. Evenals ten tijde van NEWTON en LEIBNIZ bleek er een hanteerbaar apparaat te zijn geschapen, dat niet het adjectief „wiskundig" mocht dragen. Vanzelfsprekend namen de mathematici de handschoen op. Het gelukte LAURENT SCHWARTZ in 1950 met hulpmiddelen, ontleend aan de functionaalanalyse zijn theorie der distributies op te bouwen, waarmede een exacte grondslag voor de δ-functie en andere zgn. gegeneraliseerde functies werd verkregen. De δ-functie was van berucht overgegaan in beroemd. Sindsdien zijn door verschillende auteurs belangrijke werken geschreven op het gebied der gegeneraliseerde

functies, met toepassingen op o.m. differentiaalvergelijkingen. Ik noem hier slechts GELFAND en SCHILOW, A. FRIEDMAN, VEKUA, MARINESCU, HÖRMANDER EN GARSOUX.

Voor het bespreken van de tweede toepassing van de functionaalanalyse neem ik U mee terug naar het probleem van NEWTON, een wortel te benaderen van een algebraïsche of transcendente vergelijking $f(x) = 0$. Als de grafiek van de functie $f(x)$ de x-as niet raakt, doch snijdt, kan men een omgeving van het snijpunt aangeven, zodanig ,dat als men begint met een punt op de kromme aan te nemen, waarvan de projectie binnen die omgeving valt en in dat punt trekt men de raaklijn aan de grafiek, men bij het uitvoeren van het proces van NEWTON een oneindig voortlopende rij verkrijgt van punten op de x-as, die alle tot de genoemde omgeving behoren. Deze rij bezit precies één limietpunt en dit is het snijpunt van de grafiek met de x-as. Analytisch uitgedrukt: dit limietpunt heeft een abscis gelijk aan die wortel van de vergelijking $f(x) = 0$, waarvan het beeldpunt tot die omgeving behoort. Men kan dit aantonen met behulp van een stelling die door BANACH is bewezen en diens contractiestelling wordt genoemd. Deze stelling, die, evenals andere contractiestellingen, ons door de functionaalanalyse ter beschikking wordt gesteld, is van groot nut in de approximatietheorie, omdat de methode, die zij geeft voor het vinden van een rij van benaderingen van een oplossing niet alleen constructief is, doch ook de eigenschap heeft dat elke stap op dezelfde wijze is opgebouwd als zijn voorganger, wat bijzonder prettig is bij gebruik van een rekenautomaat. Haar nut wordt nog verhoogd door het feit, dat zij ons in staat stelt van ieder der benaderingen, die dus niet samenvallen met de exacte waarde van de oplossing, na te gaan hoe groot de afwijking van de exacte oplossing ten hoogste is, m.a.w., het nuttig effect van de stelling wordt nog verhoogd, doordat zij een foutafschatting mogelijk maakt.

Het spreekt vanzelf, dat bij een benadering in een praktisch probleem een foutafschatting zeer gewichtig is. Het komt zelden voor, dat een benadering van een uitkomst deze uitkomst zelf exact weergeeft. Dit kan nl. slechts het geval zijn, wanneer de afwijking, dus de „fout", óf gelijk is aan nul, óf in een bepaalde zin bijna gelijk is aan nul. In dit verband wil ik een beroemd geworden geval noemen. Daartoe wenden wij ons tot de getallen-theorie. Stel, dat U wilt uitrekenen op hoeveel verschillende manieren U het getal 4 kunt schrijven als som van positieve gehele getallen. U vindt dan, dat

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1,$$

zodat het aantal van dergelijke schrijfwijzen, partities genoemd, gelijk is aan 5. Men schrijft $p(4) = 5$. Zo kunt U ook vinden, dat $p(22) = 1002$. Hoewel aldus blijkt, dat het aantal partities van een positief geheel getal n, dus $p(n)$, snel met n toeneemt, rijst de vraag, of men voor grote waarden van n een formule kan geven voor $p(n)$ met zo mogelijk een afschatting voor de afwijking, die zij van de exacte waarde van $p(n)$ geeft. Een dergelijke formule is in 1917 gepubliceerd door HARDY en RAMANUJAN. Zij gaven een asymptotische formule met een restterm, die een exponentiële aangroeiing vertoont. Zij hoopten toen, dat voor niet al te grote waarden van n de formule een redelijke benadering voor $p(n)$ zou geven. Tezelfder tijd leefde in Engeland een majoor, MAC MAHON geheten, die graag en veel rekende en die voor HARDY een tabel maakte van het aantal partities van n, voor elk der waarden van n, beginnend met 1 en eindigend met 200. Hij berekende, dat $p(200)$ gelijk is aan 3.972.999.029.388. Toen HARDY en RAMANUJAN deze uitkomst in handen kregen, gingen zij hun asymptotische formule onderzoeken. Zij verwachtten wel een goede benadering, doch toen zij het resultaat zagen, konden zij hun ogen niet geloven. Acht termen van hun asymptotische formule gaven precies het getal van 13 cijfers, dat MAC MAHON voor hen had berekend en de fout bleek niet groter dan 0,004 te zijn. Hun formule was dus niet alleen asymptotisch, doch voor $n = 200$ zelfs exact.

De asymptotische formule van HARDY en RAMANUJAN, waarvan ik U zojuist sprak, is in feite een divergente reeks en zij zou daarom een eeuw tevoren volkomen buiten beschouwing zijn gelaten om de eenvoudige reden, dat niet een som aan die reeks kon worden toegekend. Ik sprak hierover reeds in het begin van mijn rede. Toch zag men wel degelijk in, dat zulk een handelwijze vreemd aandeed. Zo schrijft ABEL in een brief aan HOLMBOE, gedateerd 16 januari 1826, onder meer: „De divergente reeksen zijn in het algemeen een uitvinding des duivels en men moet zich schamen als men ze gebruikt om er enig bewijs mee te leveren. Door ze te gebruiken kan men alles bewijzen wat men

wil en zij zijn het, die zoveel ongelukken hebben veroorzaakt en die aanleiding hebben gegeven tot zoveel paradoxen. Kan men zich iets afgrijselijkers voorstellen, dan te beweren, dat

$$0 = 1-2^n+3^n-4^n+\ldots,$$

als n een positief geheel getal is? Tenslotte zijn op een treffende wijze mij de schellen van de ogen gevallen, want met uitzondering van de eenvoudigste gevallen zoals meetkundige reeksen, vindt men in de wiskunde vrijwel geen enkele oneindig voortlopende reeks, waarvan de som op een exacte manier bepaald is; dit betekent, dat het meest essentiële deel van de wiskunde zonder fundament is. Het is waar, dat voor het allergrootste deel de resultaten juist zijn, maar het is een heel vreemde zaak." Tot zover ABEL. CAUCHY liet zich op een soortgelijke wijze uit. De astronomen hadden minder scrupules. Zij rekenden gaarne met reeksen, die wij thans divergent noemen. Voor hen was het simpele feit doorslaggevend, dat de uitkomsten die zij ermee verkregen, in overeenstemming waren met de waarnemingen. Pas in 1886 verschenen onafhankelijk van elkaar twee publikaties, volkomen exact van opzet, over divergente reeksen, nl. één van STIELTJES en één van POINCARÉ. STIELTJES noemde de beschouwde reeksen semi-convergent, POINCARÉ sprak van asymptotische reeksen. Sindsdien hebben tal van auteurs methoden bedacht om divergente reeksen te sommeren; men heeft oplossingen van differentiaalvergelijkingen voorgesteld door asymptotische reeksen, etc.; alles volledig exact. Zo blijken de divergente reeksen een belangrijke plaats in de wiskunde in te nemen en de astronomen kunnen met een gerust hart voortgaan met hun berekeningen.

Een wiskundige heeft echter niet altijd het oog gericht op praktische toepassingen van een theorie die hij bezig is te ontwikkelen. Onmiskenbaar dragen zijn gedachten een spelelement in zich. Hiervan wil ik tot slot een fraai voorbeeld geven. Wij gaan daarvoor terug naar 1859, toen RIEMANN in een verhandeling over priemgetallen de naar hem genoemde zetafunctie introduceerde. Deze functie is zeer bekend geworden als gevolg van een vermoeden, dat RIEMANN uitsprak, nl. dat van elk complex nulpunt het reële deel gelijk is aan $^1/_2$. Hij voegde er onmiddellijk aan toe: „Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indes die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei

Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchungen entbehrlich schien". Zoals deze zetafunctie aan de pogingen van RIEMANN om zijn vermoeden te bewijzen, weerstand heeft geboden, zo heeft zij dit met evenveel succes gedaan ten aanzien van alle pogingen, die sindsdien zijn ondernomen, tot op de huidige dag toe, hoe weinig vluchtig die dikwijls ook geweest zijn. Echter, men slaagde er evenmin in, het vermoeden te weerleggen, zodat allengs de overtuiging ging post vatten, dat RIEMANN gelijk had. Nu komt het spel: men ging eenvoudig uit van de veronderstelling dat de juistheid van het vermoeden reeds aangetoond was en men trachtte via deze veronderstelling theorema's te bewijzen en aldus tot resultaten te komen in verwante gebieden, waarvan op andere wijze al bekend was, of ze juist zijn of niet. Men bewees zo een hele reeks van stellingen, de éne al fraaier dan de andere, zodat een geheel bouwwerk verrees. Ik laat de beantwoording van de vraag, of dit bouwwerk behoort tot het gebouwencomplex, dat wiskunde heet, gaarne aan U over. Wat gebeurt er als het fundament ervan ondeugdelijk blijkt te zijn en daar begint het heden ten dage enigszins op te lijken?

Zeer gewaardeerde Toehoorders,

Bij de aanvaarding van mijn ambt zij het mij vergund aan Hare Majesteit de Koningin mijn eerbiedige dank te betuigen voor het feit, dat zij mij tot gewoon hoogleraar aan deze Technische Rijkshogeschool heeft willen benoemen.

Mijne Heren Curatoren,

Door mij te hebben voorgedragen voor benoeming tot hoogleraar hebt gij te kennen gegeven, dat Gij vertrouwen in mij hebt gesteld. Ik ben U hiervoor zeer erkentelijk en ik geef U de verzekering, dat ik mijn taak naar beste weten zal uitvoeren.

Mijne Heren Hoogleraren,

Met velen van U heb ik gedurende de laatste paar jaren reeds kennis mogen maken. Nu ik thans een plaats in Uw midden mag innemen, spreek ik de hoop uit, dat de verkregen contacten verder uitgebreid zullen worden.

Mijne Heren Hoogleraren in de Afdeling der Algemene Wetenschappen,

Voor U ben ik geen onbekende meer. Ik verheug mij erop thans nog nauwer dan voorheen met U te kunnen samenwerken, in het volledige vertrouwen, dat ik van Uw steun verzekerd ben. In het bijzonder richt ik mij gaarne tot U beiden,

Hooggeleerde Timman en Hooggeleerde Loonstra,

teneinde U vanaf deze plaats dank te zeggen voor al het goede, dat U in de afgelopen jaren voor mij hebt gedaan en voor de vriendschap, die ik van U mocht ontvangen.

Mijne Heren Lectoren, mijne Heren Leden van de Wetenschappelijke Staf,

Dat de goede samenwerking, die tussen U en mij bestaat, zal worden bestendigd, hoop ik van harte.

Terugdenkend aan de tijd, waarin ik zelf colleges volgde, richt ik mij thans tot twee hoogleraren, aan wie ik, ten aanzien van mijn wiskundige vorming, veel te danken heb.

Hooggeleerde Van der Corput,

Uw colleges, in het bijzonder die over speciale onderwerpen uit de theorie der complexe functies, steeds met grote helderheid en veel enthousiasme gegeven, zullen voor mij een lichtend voorbeeld blijven.

Hooggeleerde Ridder,

Reeds onmiddellijk maakte U het een aankomend student in de wiskunde duidelijk, dat er slechts één weg tot de wiskunde voert, nl. die via de exactheid. Dat deze weg niet moeilijk te bewandelen bleek, was voor een groot deel te danken aan de boeiende wijze, waarop U college gaf én aan Uw nimmer aflatende hulpvaardigheid.

Dames en Heren Studenten,

Uit mijn rede zal U duidelijk geworden zijn, dat alles wat niet op exacte wijze is gefundeerd en geformuleerd, geen deel uitmaakt van de wiskunde. Ik wil daarom U, studenten in de wiskunde, op het hart binden U eraan te gewennen Uw redeneringen exact te maken. Dit kost in het begin soms moeite, doch eenmaal gewend, geeft het U voldoening en U zult dan ontdekken, dat de uitspraak van LUTHER: „Die Mathematik macht traurige Leute'' op U zeker niet van toepassing is.

Ik heb gezegd.