

LANGE GOLVEN IN LEIDINGEN

DEEL I

Vloeistofmechanica college b 73 A

December 1973

LANGE GOLVEN IN LEIDINGEN

DEEL I

Diktaat Vloeistofmechanica College b 73 A

december 1973

LANGE GOLVEN IN LEIDINGEN

INHOUD

DEEL I

Hoofdstuk 1 DE MASSAVERGELIJKINGEN

- 1.1. De continuïteitsvergelijkingen
- 1.2. De versnellingsvergelijking (bewegingsvergelijking).

Hoofdstuk 2 DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR "OPEN" VLOEISTOFLEIDINGEN

- 2.1. De toestandsvergelijkingen.
- 2.2. De golfvergelijkingen voor prismatische "open" vloeistofleidingen (d.w.z. vrije waterspiegel).

Hoofdstuk 3 DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR GESLOTEN LEIDINGEN

- 3.1. De toestandsvergelijkingen.
- 3.2. De golfvergelijkingen voor gesloten leidingen.

Hoofdstuk 4 ENIGE OPLOSSINGSMETHODEN VOOR PROBLEMEN WAARBIJ DE GOLFVERGELIJKINGEN STERK MOGEN WORDEN VEREENVOUDIGD

- 4.1. Inleiding
- 4.2. De z.g. kombergingsbeschouwing
- 4.3. Voorbeelden van berekeningen betreffende een relatief kort bekken.
- 4.4. Een benaderingsmethode voor hoogwatergolven.
- 4.5. Een benaderingsmethode voor z.g. translatiegolven.

DEEL II dit deel zal bestaan uit twee hoofdstukken :

Hoofdstuk 5 INTEGRATIE M.B.V. KARAKTERISTIEKEN

Hoofdstuk 6 DE HARMONISCHE METHODE

Betreffende dit deel zal voorlopig worden gewerkt met twee losse gedeelten, die op kamer 096 verkrijgbaar zijn.

Lijst van symbolen

A = oppervlakte van het doorstromingsprofiel	m^2
B = kombergingsoppervlakte	m^2
C = coëff. van de Chézy	$m^{1/2}/s$
D = inwendige diameter van een ronde buis	m
E = elasticiteitsmodulus van buismateriaal	N/m^2
H = energie-niveau	m
I = hellingshoek van een buis of bodem (I_b)	1
K = kompressiemodulus van het stromende medium	N/m^2
K_3, K_x, K_y , kracht	N
L = lengte van een gedeelte van een leiding (vak of sectie)	m
Q = debiet	m^3/s
R = hydraulische straal	m
V = volume	m^3
b = bergende breedte	m
b_s = stroomvoerende breedte	m
c = voortplantingssnelheid	m/s
f = zijdelings toe- of afgevoerde hoeveelheid per m^1 per s	m^2/s
g = versnelling zwaartekracht	$N/kg = m/s^{-2}$
h = waterstand gemeten \perp bodem	m
l = lengte	m
m, m_1, m_2 = massa	kg
p, p', p'' = druk	N/m^2
pn = piëzometrisch niveau, $pn = z + p/\rho g$	m
s = onafhankelijk variabele plaatscoördinaat in de stroom- richting (as van een buis)	m
t = onafhankelijk variabele tijd	s
u = snelheid (-scomponent in de stroomrichting)	m/s
v = (gem.)snelheid in de s-richting van het stromende medium	m/s
w = dikte van een buiswand	$.$
x, y en z plaatscoördinaten	
α = hoek, coëfficiënt, exponent (aangegeven)	
ρ = dichtheid	kg/m^3

Hoofdstuk 1 DE MASSAVERGELIJKINGEN

1.1. DE CONTINUITEITSVERGELIJKING

1.1.1. Afleiding volgens Euler

1.1.2. Afleiding volgens Lagrange

1.2. DE VERSNELLINGSVERGELIJKING (BEWEGINGSVERGELIJKING)

1.2.1. Afleiding volgens Lagrange

1.2.2. Afleiding volgens Euler

Hoofdstuk 1 DE MASSAVERGELIJKINGEN1.1. DE CONTINUITEITSVERGELIJKING.1.1.1. Afleiding volgens de beschouwingwijze van Euler.

In de beschouwingwijze van Euler wordt de massabalans opgesteld voor een ruimtelijk vastgelegd volume. Deze balans is:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{massa in vast volume}) = (\text{instroming} - \text{uitstroming}) \text{ per tijdseenheid.}$$

De in- en uitstromende massa moet dan worden gesommeerd over het totale ruimtelijk oppervlak, dat het volume insluit.

Voor de één-dimensionale waterbeweging, die hier wordt behandeld (lange golven in leidingen) wordt als volume een ruimtelijke "moot" gekozen, die het gehele doorstromingsprofiel omvat en in de stroomrichting een (constante) lengte d_s heeft. In beginsel wordt de bovenzijde van de ruimtelijke moot boven de hoogste waterstand gelegd, zodat wij niet afzonderlijk rekening behoeven te houden met massa, die door de bovenbegrenzing stroomt. Doet men dit niet, dan moet de berging als afzonderlijke uitstroming worden meegenomen en het doorstromingsprofiel A constant worden gehouden.

Opm. Later kan worden nagegaan dat de eerste term van (1-1) dan wordt gesplitst in twee termen, die samen hetzelfde weergeven.

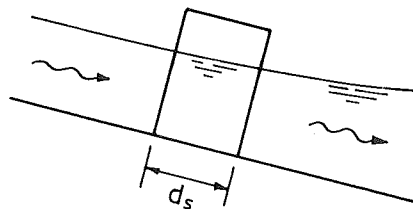


fig. 1.1.

Hoewel de waterbeweging als één-dimensionaal wordt beschouwd, wil men toch ook vaak rekening houden met zijdelingse toe- of afvoer van massa. Bij een rivier wordt deze veroorzaakt door een verschil tussen bergende en stroomvoerende breedte. Het gebied tussen de kribben wordt dan bij het op en neer gaan van de waterstand in de rivier wel gevuld en geledigd, doch overigens blijft de te berekenen waterbeweging beperkt tot het eigenlijke rivierbed.

Door enerzijds de waterbeweging als ééndimensionaal te beschouwen, doch anderzijds wel rekening te houden met zijdelingse berging wordt dus voor veel gevallen een inconsequente maar praktisch goed bruikbare oplossing verkregen.

In beginsel kan men zich natuurlijk ook nog andere vormen van zijdelingse toe- of afvoer denken. Zijdelingse toe- of afvoer wordt daarom in algemene zin nu gedefinieerd als de hoeveelheid, die per tijdseenheid en per strekkende meter (gemeten in de richting van de hoofdstroom) in het doorstromingsprofiel wordt gebracht of daaruit wordt afgevoerd. Dergelijke debieten worden vaak met de letter q aangeduid. In dit geval wordt hiervoor echter de letter f gekozen, omdat anders gemakkelijk verwarring zou kunnen ontstaan met de afvoer per eenheid van breedte van een rivier, die natuurlijk juist als "hoofdstroom" moet worden beschouwd.

De massa, die over de afstand ds zijdelings toestroomt is dan: $\rho \cdot f \cdot ds$. Omdat deze definitie alléén de toestroming betreft zal f een negatieve waarde krijgen, indien er sprake is van zijdelingse afvoer.

Op deze wijze wordt de afleiding algemeen gehouden. Later kan dan voor iedere vorm van zijdelingse toevoer de uitdrukking voor f worden afgeleid, die op dat specifieke geval van toepassing is. De afleiding van de continuïteitsvergelijking verloopt nu als volgt:

Noemen wij de oppervlakte van het doorstromingsprofiel A , dan is de massa binnen de beschouwde moot:

ten tijde t : $\rho \cdot A \cdot ds$

ten tijde $(t + dt)$: $(\rho \cdot A + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} dt) ds$

toename: $\frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} \cdot ds \cdot dt$

Dit moet gelijk zijn aan het verschil van de in- resp. uitgestroomde massa. Duiden wij de over het doorstromingsprofiel gemiddelde snelheid met v aan, dan is:

links ingestroomd: $\rho \cdot v \cdot A \cdot dt$

rechts uitgestroomd: $(\rho \cdot v \cdot A + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial s} ds) dt$

zijdelingse toevoer: $\rho \cdot f \cdot ds \cdot dt$

meer uit- dan ingestroomd: $\frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial s} \cdot ds \cdot dt - \rho \cdot f \cdot ds \cdot dt,$

zodat de continuïteitsvoorwaarde (massabalans) wordt:

$$\frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial s} - \rho \cdot f \right), \text{ of}$$

(1-1)

$$\frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial s} - \rho \cdot f = 0,$$

waarin $\rho \cdot f$ = zijdelingse toevoer van massa per strekkende meter en per tijdseenheid.

Opmerking: Indien er geen zijdelingse toevoer of afvoer is wordt $f = 0$. Bij zijdelingse afvoer moet f een negatieve waarde krijgen.

In het volgende hoofdstuk zal bij het afleiden van de "toestandsvergelijkingen" voor open leidingen een voorbeeld worden gegeven van het bepalen van f .

Omdat in vgl. (1-1) nog niet is aangegeven dat $\frac{\partial A}{\partial s} = 0$ geldt deze vgl. ook nog voor niet-prismatische leidingen.

1.1.2. Afleiding volgens de beschouwingwijze van Lagrange.

Volgens de beschouwingwijze van Lagrange wordt een bepaalde massa vloeistof beschouwd, die in de tijd wordt "gevolgd". Hierbij wordt dus een bewegende "moot" vloeistof gevolgd, waarvan de lengte ds niet meer constant behoeft te zijn.

Zonder zijdelingse toe- of afvoer is de continuïteitsvoorwaarde dan:

$$d(\rho \cdot A \cdot ds) = 0$$

Met zijdelingse toe- of afvoer wordt dit:

$d(\rho \cdot A \cdot ds)$ = zijdelingse toevoer over de lengte ds in het tijdsinterval dt .

De zijdelingse toevoer kan weer worden uitgedrukt in f . Hieruit volgt:

$$d(\rho \cdot A \cdot ds) = \rho \cdot f \cdot ds \cdot dt, \text{ of:}$$

$$(1-2) \quad \frac{d(\rho \cdot A \cdot ds)}{dt} = \rho \cdot f \cdot ds.$$

Met behulp van de regel voor het differentiëren van producten gaat het eerste lid van deze vergelijking over in:

$$\frac{d(\rho \cdot A \cdot ds)}{dt} = ds \cdot \frac{d(\rho \cdot A)}{dt} + \rho \cdot A \cdot \frac{d(ds)}{dt}$$

Wat is $\frac{d(ds)}{dt}$?

Dit is niets anders dan de verandering van de lengte ds per tijdseenheid. Omdat de watersnelheden aan de linker resp. rechterbegrenzing van de beschouwde massa verschillend zijn verandert ds inderdaad.

Links is de snelheid v ; rechts $v + \frac{\partial v}{\partial s} ds$.

Per seconde schuift de linkerbegrenzing van de beschouwde massa dus een afstand v op, terwijl de rechterbegrenzing zich over een afstand $(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds)$ verplaatst. Hieruit volgt dus:

$$(1-3) \quad \frac{d(ds)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} ds$$

Hiermede wordt dus:

$$\frac{d(\rho \cdot A \cdot ds)}{dt} = ds \cdot \frac{d(\rho \cdot A)}{dt} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \cdot ds,$$

zodat de continuïteitsvergelijking wordt:

$$\frac{d(\rho \cdot A)}{dt} + \rho \cdot A \frac{\partial v}{\partial s} = \rho \cdot f$$

Omdat ρ en A een functie van s en t kunnen zijn kan de eerste term worden uitgeschreven als:

$$\frac{d(\rho \cdot A)}{dt} = \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t}$$

Omdat de massa in de tijd wordt gevolgd moet in deze formule $\frac{ds}{dt} = v$ worden gesteld, waarmede de continuïteitsvergelijking overgaat in:

$$(1-4) \quad v \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial s} + \rho \cdot A \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = \rho \cdot f$$

Door samenvoeging van de eerste twee termen van deze vergelijking ontstaat dan weer vergelijking (1-1).

Opmerking: In de beschouwingswijze van Lagrange wordt als symbool voor de totale differentiaal vaak de hoofdletter D gebruikt in plaats van de letter d . Dit gebeurt dan alléén om aan te geven, dat zij met de massa meebewegen, zodat $\frac{ds}{dt} = v$ moet worden gesteld. De letter D betekent dus hetzelfde als de letter d , doch impliceert alleen de voorwaarde $\frac{Ds}{Dt} = v$.

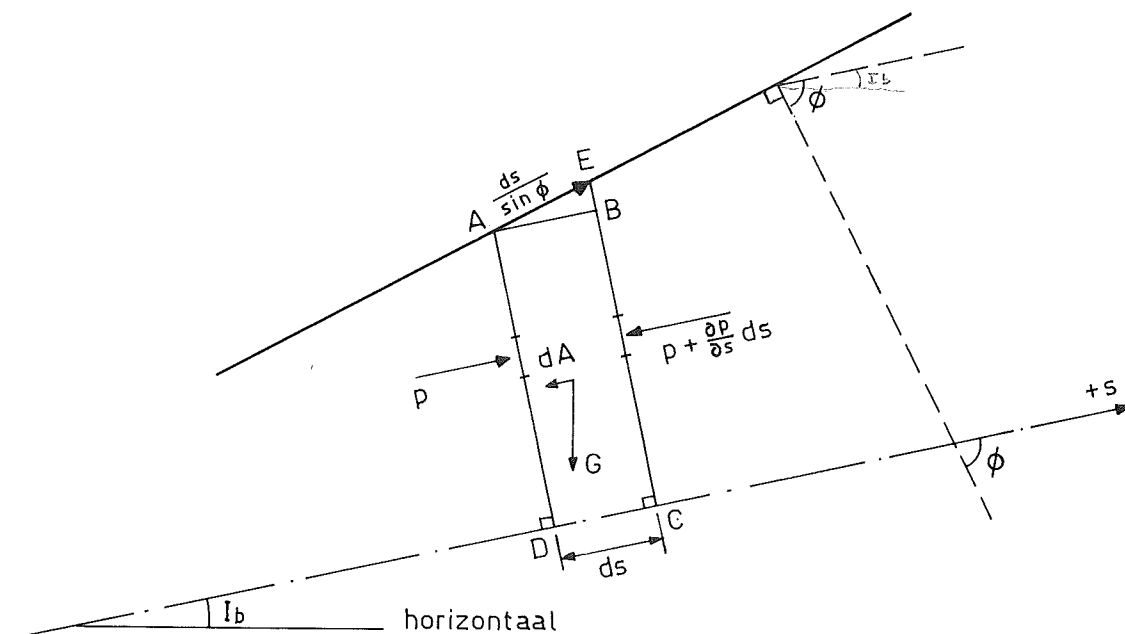
1.2. DE VERSNELLINGSVERGELIJKING (BEWEGINGSVERGELIJKING)1.2.1. Afleiding volgens de beschouwingwijze van Lagrange

fig. 1.2.

De impulswet wordt toegepast in de richting van de hoofdstroom (s-richting!). Voor een buisleiding is dit de as van de buis. Voor een open leiding de bodem.

Volgens de beschouwingwijze van Lagrange wordt een bepaalde massa vloeistof beschouwd, die in de tijd wordt gevolgd. Wij nemen daarom een "moot", die het gehele doorstromingsprofiel (\perp s-as) omvat en in de s-richting een lengte ds heeft (zie fig. 1.2.).

De krachten

Om de uitwendig aangrijpende normaalkrachten te bepalen, wordt de moot verdeeld in het prismatische gedeelte ABCD en het daarbuiten gelegen gedeelte ABE (zie fig. 1.2.).

De resulterende normaalkracht op het prismatische gedeelte is dan:

$$K_1 = \iint_A - \frac{\partial p}{\partial s} ds \cdot dA = - ds \iint_A \frac{\partial p}{\partial s} \cdot dA$$

Opmerking: De lengte ds is niet constant in de tijd. Omdat hier partieel over het dwarsprofiel wordt geïntegreerd mag ds toch buiten het integraal-teken worden gehaald. De kracht K_1 zal in het tijdsinterval dt wel veranderen, doch in de limietovergang $dt \rightarrow 0$ nadert ook deze verandering tot nul en speelt dus geen rol ten opzichte van K_1 zelf.

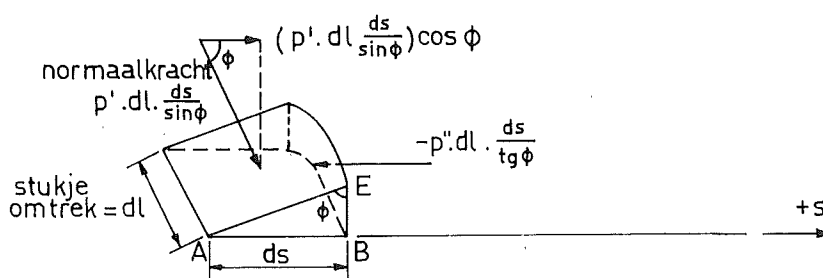


fig. 1.3.

De resulterende kracht op het daarbuiten gelegen gedeelte is volgens fig. 3:

$$K_2 = \int_1 p' \cdot dl \cdot ds \cdot \cotg\phi - \int_1 p'' \cdot dl \cdot ds \cdot \cotg\phi$$

Hierin is p' de over het oppervlak gemiddelde normaaldruk en p'' de druk aan de rechterzijde. In de limietovergang $ds \rightarrow 0$ wordt $p' = p''$, zodat de beide resulterende krachten elkaar opheffen.

Men kan dit ook zien door p' en p'' op de gebruikelijke wijze uit te schrijven

$$p'' = p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \text{ en } p' = p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

Duidelijk is nu te zien dat voor $ds \rightarrow 0$ ook $p' \rightarrow p''$

Hieruit volgt dus:

$$K_2 = 0$$

Opmerking: Deze afleiding geldt niet alleen voor vaste wanden, maar ook voor het vrije oppervlak in een rivier. In dit geval is de normaaldruk p' gelijk aan de atmosferische druk, die gewoonlijk gelijk wordt gesteld aan nul. Dit laatste is echter niet noodzakelijk. De beide krachten vallen in de limietovergang $ds \rightarrow 0$ altijd tegen elkaar weg.

Als inwendig aangrijpende kracht werkt de zwaartekracht. Noemen wij de hoek waarmee de bodem helt I_b (oplopend in pos. s-richting positief), dan is de component van het gewicht van de moot in de s-richting (zie fig.1.2):

$$K_3 = - \sin I_b \iint_A \rho \cdot g \cdot ds \cdot dA, \text{ of}$$

$$K_3 = - g \cdot \sin I_b \cdot ds \cdot \iint_A \rho \cdot dA$$

Afgezien van de wrijving zijn dus de krachten:

$$K_1 + K_2 + K_3 = - ds \iint_A \frac{\partial p}{\partial s} dA - (g \cdot \sin I_b \cdot ds) \iint_A \rho \cdot dA$$

Voor lange golven (géén versnellingen \perp s-richting!) is $\frac{\partial p}{\partial s}$ constant over het dwarsprofiel (zie fig. 1.2.), zodat deze grootte buiten het integraalteken mag worden gehaald. Dit is ook het geval met ρ , omdat toch altijd met de over het dwarsprofiel gemiddelde dichtheid, snelheid, enz. wordt gerekend.

Hiermede wordt:

$$K_1 + K_2 + K_3 = -A \cdot ds \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cdot \sin I_b \right)$$

Met betrekking tot de wrijving wordt verondersteld, dat de wet van de Chézy óók geldt voor de niet-eenparige stroom. ^{*} De schuifspanning volgt dan uit de bekende formules (college-dictaat b72):

$$\tau_b = \rho g R I \text{ en } v = c\sqrt{RI},$$

waaruit volgt:

$$\tau = \rho g \cdot \frac{v^2}{C^2}$$

Bedenkt men, dat de wrijving werkt in een richting, die tegengesteld is aan de stroom, dan is dus de wrijvingskracht op de gehele moot:

$$K_4 = -A \cdot ds \cdot \rho g \cdot \frac{v/v/}{C^2 R},$$

waarin dus voor de natte omtrek van de wand $\frac{A}{R}$ is gesteld, hetgeen direct volgt uit de definitie van hydraulische straal R.

De krachten, die in de impulsvergelijking in de pos. s-richting moeten worden ingevoerd worden dus:

$$\Sigma K_s = K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \text{ of}$$

$$(1-5) \quad \Sigma K_s = -A \cdot ds \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho \cdot g \cdot \sin I_b \right) - A \cdot ds \cdot \rho g \frac{v/v/}{C^2 R}$$

Opmerking: In deze afleiding is uitsluitend de wandwrijving in rekening gebracht. Voor een rivier met kribben zou eigenlijk ook de wrijving tussen de hoofdstroom en de tussen de kribben draaiende neren moeten worden beschouwd. In de praktijk gebeurt dit niet afzonderlijk.

Omdat de C-waarde wordt geijkt brengt men deze wrijving feitelijk onder bij de bodemwrijving, die in vele gevallen ook aanzienlijk groter is (breedte rivier \gg waterdiepte).

^{*} Deze veronderstelling is geoorloofd, omdat bij lange golven de veranderingen in tijd en plaats relatief klein zijn.

De verandering van impuls

In de beschouwingswijze van Lagrange wordt een bepaalde massa beschouwd, waarvan de verandering van impuls in de tijd wordt beschouwd ($\frac{d(mv)}{dt}$).

De zijdelingse toevoer, die in het voorgaande afzonderlijk werd ingevoerd om bijvoorbeeld ook een rivier met kribben nog één dimensionaal te kunnen berekenen, past eigenlijk niet in deze beschouwing.

De afleiding volgens Lagrange is in dit opzicht daarom minder consequent dan de afleiding volgens Euler, die in de volgende paragraaf wordt gegeven.

In het geval van zijdelingse afvoer impliceert de beschouwingswijze van Lagrange, dat de uit de hoofdstroom tredende massa moet worden gevolgd tot in het gebied dat buiten het doorstromingsprofiel van de hoofdstroom is gelegen. De daar werkzame krachten moeten dan ook mede in de beschouwing worden betrokken. Evenzo geldt bij zijdelingse toevoer, dat de beschouwde massa ook een gedeelte zou moeten omvatten, dat zich bij de aanvang van het tijdsinterval dt buiten het doorstromingsprofiel bevindt (bijvoorbeeld tussen de kribben of in de uiterwaarden).

Omdat de zijdelingse toevoer op verschillende manieren kan plaatsvinden, is het niet doenlijk hiervoor algemeen geldende formules op te stellen. De zijdelingse toe- en afvoer worden daarom in dit dictaat toch afzonderlijk in rekening gebracht, waarbij als inconsequentie wordt aanvaard, dat men dan niet meer één bepaalde massa beschouwt. De redenering is dan, dat de krachten K niet alléén worden gebruikt om de impuls te veranderen van een bepaalde massa, die in het doorstromingsprofiel is en blijft, doch ook om de impuls van de zijdelingse toegevoerde massa aan te passen aan de in de hoofdstroom heersende omstandigheden resp. de impuls van het zijdelings af te voeren water reeds binnen het doorstromingsprofiel zodanig te wijzigen, dat deze afvoer mogelijk wordt.

Opmerking: De moeilijkheden worden op deze manier in principe slechts omzeild en niet opgelost. In plaats van rekening te houden met de (vaak onbekende) omstandigheden buiten het doorstromingsprofiel moet nu de impuls van de toetredende resp. afstromende massa worden ingevoerd, die echter evenmin kunnen worden bepaald zonder de omstandigheden buiten de hoofdstroom in de beschouwing te betrekken.

Omdat later zal blijken, dat de desbetreffende term in de praktijk toch veelal mag worden verwaarloosd heeft deze struisvogelpolitiek in dit geval toch zin!

Wij beschouwen in beginsel een massa (m_1), die zich in de hoofdstroom bevindt en brengen de invloed van zijdelingse toe- of afvoer (m_2) afzonderlijk in rekening. De beschouwde massa (m_1) is $\rho \cdot A \cdot ds$. Hieruit volgt:

$$\frac{d(m_1 v)}{dt} = \frac{d(\rho \cdot v \cdot A \cdot ds)}{dt} = v \frac{d(\rho \cdot A \cdot ds)}{dt} + \rho \cdot A \cdot ds \cdot \frac{dv}{dt}$$

Omdat de verandering van impuls van de toe- of afgevoerde massa hierna afzonderlijk in rekening wordt gebracht en de beschouwde massa in de gedachte van Lagrange wordt gevolgd, moet in deze vergelijking wegens de continuïteit (behoud van massa) worden gesteld:

$$d(\rho \cdot A \cdot ds) = 0, \text{ zodat:}$$

$$\frac{d(m_1 v)}{dt} = \rho \cdot A \cdot ds \cdot \frac{dv}{dt}$$

De impulsverandering van de zijdelingse toe- of afgevoerde massa m_2 moet hierbij worden opgeteld, omdat een gedeelte van de werkzame krachten hiervoor wordt gebruikt. De zijdelingse toevoer per tijdseenheid wordt weer uitgedrukt in de hoeveelheid f per lengte-eenheid en per tijdseenheid.

De toegevoerde massa is dus:

$$m_2 = \rho \cdot f \cdot ds$$

Indien deze massa in het stroomvoerend profiel komt (resp. daaruit wordt afgevoerd) met een gemiddelde snelheidscomponent u in de richting van de hoofdstroom, is dus de impulsverandering per tijdseenheid:

$$\frac{d(m_2 v)}{dt} = (v - u) \cdot \rho \cdot f \cdot ds$$

Tenslotte wordt dus:

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{d(m_1 v)}{dt} + \frac{d(m_2 v)}{dt}, \text{ of}$$

$$(1-6) \quad \frac{d(mv)}{dt} = \rho \cdot A \cdot ds \cdot \frac{dv}{dt} + (v - u) \cdot \rho \cdot f \cdot ds$$

(1-5) en (1-6) geven na deling door $\rho \cdot A \cdot ds$ de bewegingsvergelijking

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{v/v'}{C^2 R} - (v - u) \frac{f}{A}$$

Omdat $v = f(s, t)$ volgt hieruit:

$$(1-7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{v/v'}{C^2 R} - (v - u) \frac{f}{A},$$

waarin f = zijdelings toegevoerde hoeveelheid per lengte-eenheid en per tijdseenheid.

u = component van de snelheid, die de toegevoerde of afgevoerde massa in de richting van de hoofdstroom heeft.

ρ = de over het dwarsprofiel gemiddelde dichtheid.

1.2.2. Afleiding van de bewegingsvergelijking volgens de beschouwingswijze van Euler.

In de gedachtengang van Euler wordt de impulsbalans opgesteld van een ruimtelijk vastgelegd volumen.

Om in te zien dat dit tot hetzelfde resultaat leidt als de methode van Lagrange wordt als voorbeeld de watersprong beschouwd.

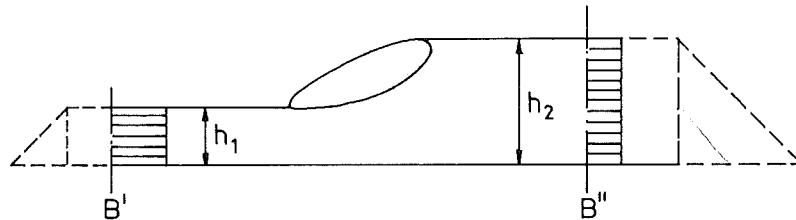


fig. 1.4.

Volgen wij de massa, die oorspronkelijk tussen de raaien B' en B'' is gelegen (volgens Lagrange), dan is volgens de in het college b72 behandelde methode:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2) dt = \rho \cdot v_2 dt \cdot h_2 \cdot v_2 - \rho \cdot v_1 dt \cdot h_1 \cdot v_1$$

$$\text{of: } \frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2) = \rho q (v_2^2 - v_1^2)$$

Als volgens Euler het volume tussen B' en B'' wordt beschouwd dan blijkt het bovenstaande overeen te komen met de balans:

de som van de krachten = het door raai B'' (uitstromende) impulstransport minus het door raai B' binnenstromende impulstransport = het resulterende uitstromende impulstransport.

De verandering van impuls in het middengedeelte is voor een permanent geval gelijk aan nul. Neemt men nu als niet-permanent geval een lopende watersprong, dan moet de verandering van impuls in het middengedeelte van het beschouwde volume natuurlijk ook worden meegenomen.

Dit voorbeeld maakt het aannemelijk, dat de impulsbalans van een ruimtelijk volume in een bepaalde richting (vector vergelijking) als volgt kan worden geformuleerd:

$$\sum K = \frac{d(mv)}{dt} = \text{resulterend uitstromend impulstransport} + \text{impulstoename binnen het beschouwde volume per eenheid van tijd.}$$

In verband met het onthouden van de tekens geeft men er soms de voorkeur aan deze wet te definiëren als volgt: in een bepaalde richting moet: impulstoename binnen beschouwd volume (per eenheid van tijd) = netto instroming van impuls (per eenheid van tijd) + de som van de werkzame krachten.

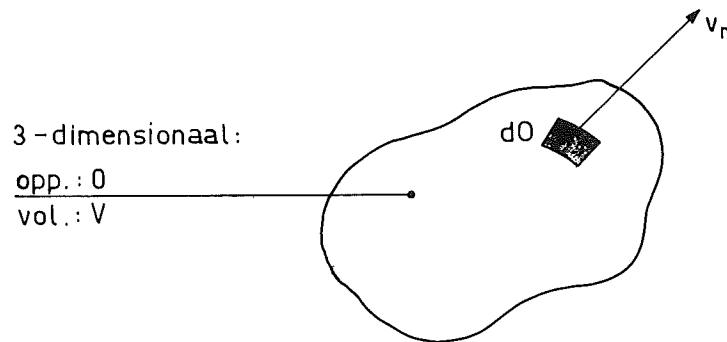


fig. 1.5.

Voor een willekeurig volume geldt in de x-richting:

$$\Sigma K_x = \iint_0 \rho \cdot v_x \cdot v_n \cdot dO + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot v_x) dV$$

Toegepast op lange golven (zie de nu ruimtelijk vastgelegde moot van fig.1.1.) wordt de impulstoename binnen de beschouwde moot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot v) \cdot dV = V \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot v) = A \cdot ds \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot v)$$

waarbij dus weer de over het profiel gemiddelde snelheid v en dichtheid ρ zijn ingevoerd.

Opmerking: De grens van het volume is hier dus precies langs de omtrek van het doorstromingsprofiel A gelegd, waardoor het impulstransport als gevolg van verandering van A afzonderlijk in rekening moet worden gebracht (zie hierna onder b). Men kan het controle-volume ook buiten A houden, doch dan moet hier direct worden ingevoerd: de term $ds \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial t}$ (zie ad. b).

Bij het bepalen van het resulterend uitstromend impulstransport kunnen drie vormen hiervan worden onderscheiden.

Deze zijn:

- a. het ter linkerzijde instromende resp. ter rechterzijde uitstromende impulstransport.
- b. het uitstromende impulstransport als gevolg van een verandering van het doorstromingsprofiel A.
- c. de zijdelingse toe- of afvoer.

Ad a.:

Het impulstransport aan de linkerzijde (s) is $\rho \cdot Q \cdot v$; aan de rechterzijde (s + ds):

$$\rho \cdot Q \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot Q \cdot v)}{\partial s} ds.$$

Resultierend is dus het in de richting van de hoofdstroom uitstromend impulstransport:

$$\frac{\partial(\rho \cdot Q \cdot v)}{\partial s} ds$$

Ad b.:

Omdat een vast ruimtelijk volume wordt beschouwd betekent een vergroting resp. verkleining van het oorspronkelijke doorstromingsprofiel, dat in feite een zijdelingse afvoer resp. toevoer van impuls door de wanden van het gekozen ruimtelijk volume plaats vindt.

Deze bedraagt per eenheid van tijd:

$$ds \cdot \rho \cdot v \frac{\partial A}{\partial t},$$

Samen met de onderaan pagina 1.11. genoemde impulstoename binnen de beschouwde moot ontstaat dan de term:

$$ds \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial t}$$

Ad c.:

Met gebruikmaking van dezelfde nomenclatuur als in de vorige paragrafen kan het uitstromende impulstransport als gevolg van zijdelingse toe- of afvoer worden uitgedrukt als:

$$- u \cdot \rho \cdot f \cdot ds$$

Opmerking: Het minteken is nodig, omdat f positief was genomen bij zijdelingse toevoer.

De impulsbalans is dus:

$$\Sigma K_s = \frac{\partial(\rho \cdot Q \cdot v)}{\partial s} ds + ds \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial t} - u \cdot \rho \cdot f \cdot ds$$

Hierin is:

$$\frac{\partial(\rho.A.v)}{\partial t} = \rho.A. \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial(\rho.A)}{\partial t}$$

Volgens de continuïteitsverg. (1-1) is hierin:

$$\frac{\partial(\rho.A)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho.v.A)}{\partial s} + \rho.f, \text{ zodat:}$$

$$\frac{\partial(\rho.A.v)}{\partial t} = \rho.A. \frac{\partial v}{\partial t} + v.\rho.f - v \frac{\partial(\rho.v.A)}{\partial s}$$

De term $\frac{\partial(\rho.Q.v)}{\partial s}$ ds kan als volgt worden uitgeschreven:

$$\frac{\partial(\rho.Q.v)}{\partial s} = \rho.Q. \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial(\rho.Q)}{\partial s}, \text{ of}$$

$$\frac{\partial(\rho.Q.v)}{\partial s} = \rho.v.A. \frac{\partial v}{\partial s} + v \cdot \frac{\partial(\rho.v.A)}{\partial s}$$

De impulsbalans wordt hiermede:

$$\Sigma K_s = \rho.v.A \frac{\partial v}{\partial s} ds + \rho.A.ds. \frac{\partial v}{\partial t} + (v - u).\rho.f.ds$$

ΣK_s wordt op dezelfde manier berekend als in de vorige paragraaf is gedaan bij de afleiding volgens Lagrange.

Na deling door $\rho.A.ds$ volgt dan weer verg. (1-7).

De massavergelijkingen zijn dus:

$$(1-1) \frac{\partial(\rho.A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v.A)}{\partial s} - \rho.f = 0$$

$$(1-7) \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{v/v}{C^2 R} - (v - u) \frac{f}{A}$$

In (1-1) komen niet alleen de afgeleiden van v en ρ naar s en t voor, doch ook nog afgeleiden van ρ en A naar s en t .

In principe is dit ook het geval in (1-7), doch door hierin bij de afleiding de continuïteitsverg, te substitueren zijn de afgeleiden van ρ en A naar s en t hieruit verdwenen. Hadden zij dit niet gedaan, dan zouden ook in de bewegingsverg. deze afgeleiden nog zijn voorgekomen in de vorm van een aantal extra termen, die echter vanwege de continuïteit gezamenlijk gelijk zijn aan nul!

De vergelijkingen, die hiervoor zijn afgeleid, zijn algemeen geldig. Dat wil zeggen dat de materiaaleigenschappen (van leiding en van gas of vloeistof) hierin nog niet zijn verdisconteerd.

Dit is de reden dat dit hoofdstuk de naam "Massavergelijkingen" heeft gekregen. De z.g. "Toestandsvergelijkingen", die in de volgende hoofdstukken zullen worden afgeleid verschaffen de nodige betrekkingen om ook de materiaaleigenschappen in rekening te brengen. Met behulp van deze betrekkingen kunnen dan de afgeleiden van ρ en A uit de continuïteitsverg. worden geëlimineerd, waardoor twee differentiaalvergelijkingen ontstaan met de twee afhankelijke variabelen v en p (of h !).

Het behoeft geen betoog, dat de toestandsvergn. bijvoorbeeld voor vloeistoffen en gassen of voor open en gesloten leidingen verschillend zullen zijn. In de volgende hoofdstukken moet dus onderscheid tussen deze specifieke gevallen worden gemaakt. Men verkrijgt dan dus vergn., die niet meer algemeen gelden, doch alléén voor het specifieke geval, waarvoor zij zijn afgeleid.



Hoofdstuk 2 DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR OPEN VLOEISTOFLEIDINGEN

2.1. DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN

- 2.1.1. De zijdelingse toevoer
- 2.1.2. De afgeleiden van de dichtheid
- 2.1.3. De afgeleiden van het stroomvoerend profiel
- 2.1.4. Het verband tussen de afgeleiden van p en die van h

2.2. DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR PRISMATISCHE "OPEN" VLOEISTOFLEIDINGEN (d.w.z. vrije waterspiegel)

- 2.2.1. De continuïteitsvergelijking
- 2.2.2. De vereenvoudigde continuïteitsvergelijking
- 2.2.3. De bewegingsvergelijking
- 2.2.4. De vereenvoudigde bewegingsvergelijking
- 2.2.5. De bewegingsvergelijking uitgedrukt in het piëzometrisch niveau.
- 2.2.6. Overzicht van de golfvergelijkingen voor prismatische leidingen met een vrije waterspiegel

2.1. DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN

In hoofdstuk 1 zijn de algemeen geldende massavergelijkingen afgeleid voor lange golven.

Deze waren:

$$\frac{\partial(\rho.A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v.A)}{\partial s} - \rho.f. = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{v/v}{C^2_R} - (v - u) \frac{f}{A} \quad (1-7)$$

Met behulp van de regel voor het differentiëren van produkten kan (1-1) ook als volgt worden geschreven:

$$(2-1) \quad \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial s} + v \cdot A \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} - \rho.f. = 0$$

Hierin komen dus afgeleiden van ρ en A naar s en t voor, die met behulp van de toestandsvergelijkingen zullen worden geëlimineerd, teneinde voor de verschillende specifieke gevallen een stelsel van twee differentiaalvergelijkingen met twee onafhankelijk en twee afhankelijk variabelen te verkrijgen.

Om te beginnen zal dit worden gedaan voor open leidingen (vrije water-spiegel!).

2.1.1. De zijdelingse toevoer f.

De zijdelingse toevoer f kwam tot uiting door de definitie:

$\rho.f.ds$ = zijdelings toegevoerde massa per tijdseenheid.

Bij open leidingen is de zijdelingse toe- en afvoer gewoonlijk een gevolg van een verschil tussen de bergende breedte b en de stroomvoerende breedte b_s (kribben!).

Per tijdseenheid wordt daardoor toegevoerd

$$- \rho(b - b_s).ds. \frac{\partial h}{\partial t}$$

Het minteken volgt uit de fysische overweging, dat een stijgende waterstand en dus een positieve waarde voor $\frac{\partial h}{\partial t}$ gepaard gaat met vulling van het bergende gebied en dus met zijdelingse afvoer, terwijl een negatieve waarde van $\frac{\partial h}{\partial t}$ aanleiding moet geven tot een zijdelingse toevoer!

Hieruit volgt dus:

$$\rho \cdot f \cdot ds = - \rho \cdot (b - b_s) ds \cdot \frac{\partial h}{\partial t}, \text{ of:}$$

$$(2-2) \quad f = - (b - b_s) \frac{\partial h}{\partial t}$$

2.1.2. De afgeleiden van de dichtheid

Omdat de "berging" in de vrije waterspiegel van een open leiding overheerst, mag de dichtheid ρ als een constante worden beschouwd, zodat de desbetreffende toestandsvergelijkingen luiden:

$$(2-3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2.1.3. De afgeleiden van het stroomvoerend profiel A.

Voor open leidingen geldt:

$$(2-4) \quad A = b_s \cdot h,$$

zodat voor prismatische leidingen ($b_s = \text{constant}$) geldt:

$$(2-5) \quad \frac{\partial A}{\partial s} = b_s \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$(2-6) \quad \frac{\partial A}{\partial t} = b_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

Voor niet-prismatische leidingen moet $b_s(s)$ natuurlijk worden meegedifferentieerd, waardoor er extra termen in de vergelijking verschijnen.

2.1.4. Het verband tussen $\frac{\partial p}{\partial s}$ en $\frac{\partial h}{\partial s}$.

In de bewegingsvergelijking komt voor de term $\frac{\partial p}{\partial s}$, terwijl de afgeleiden van A in (2-5) en (2-6) zijn uitgedrukt in de afgeleiden van h.

In beginsel kan alles of in h of in p worden uitgedrukt. Omdat voor open leidingen de interesse altijd uitgaat naar de waterdiepte h ligt het voor de hand hier ook $\frac{\partial p}{\partial s}$ uit te drukken in $\frac{\partial h}{\partial s}$.

De waterdiepte h wordt gemeten in de richting van de normaal, d.w.z. loodrecht op de bodem.

In lange golven (= rechte stroomlijnen) zal de druk lineair toenemen met de diepte.

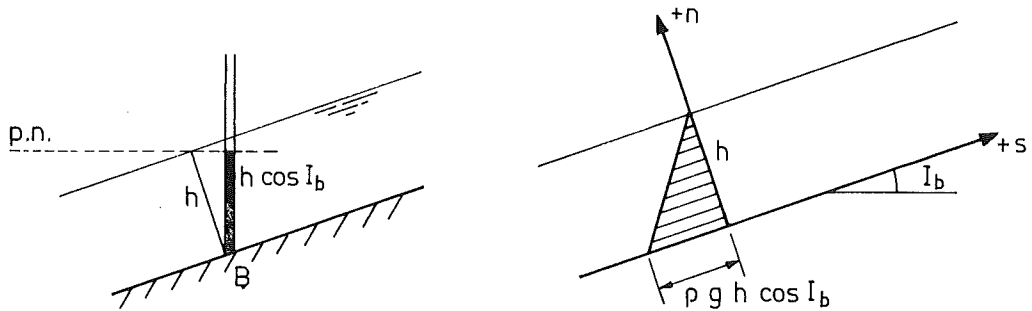


fig. 2.1.

Omdat dan het piezometrisch niveau langs de normaal constant is, zal het water in een stijgbuisje, dat in fig. 2.1. met de opening precies in B is geplaatst slechts stijgen tot een hoogte $h \cos I_b$, zodat de drukfiguur verloopt, zoals rechts in fig. 2.1. is aangegeven.

Voor het drukverloop langs n kunnen we schrijven:

$$p = \rho \cdot g (h - n) \cos I_b$$

schuifspanning:

$$\tau = \rho g h \sin I$$

Hieruit volgt:

$$(2-7) \quad \frac{\partial p}{\partial s} = g \cdot \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial s} \cdot \cos I_b, \text{ of met (2-3):}$$

$$(2-8) \quad \frac{\partial p}{\partial s} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \cdot \cos I_b$$

Evenzo:

$$(2-9) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \cos I_b$$

Opmerking: Dit komt overeen met de "directe" afleiding, die bijvoorbeeld ook reeds bij de verhanglijnen werd gebruikt.

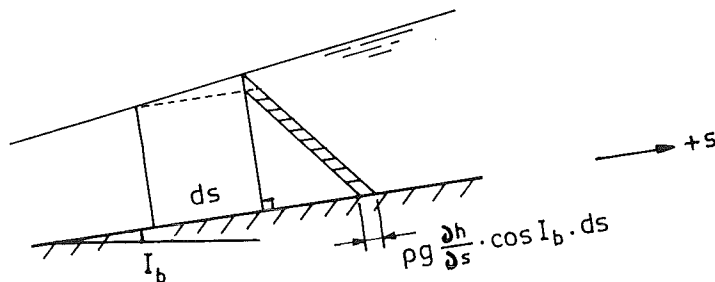


fig. 2.2)

Uit fig. 2.2. werd toen direct als resultante van de drukkkrachten hetzelfde resultaat gevonden.

Men kan in fig. 2.2. ook zien, dat $\frac{\partial p}{\partial s}$ voor lange golven over het dwarsprofiel constant is, zodat men ook de waarde aan de bodem kan nemen (zie (2-8)).

2.2.0. De golfvergelijkingen voor prismatische "open" vloeistofleidingen (d.w.z. vrije waterspiegel)

2.2.1. De continuïteitsvergelijking.

De massaverelijking werd gegeven door verg. (1-1):

$$\frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot A)}{\partial s} - \rho \cdot f = 0 \quad (1-1)$$

Met behulp van de regel voor het differentiëren van producten was dit geworden

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial A}{\partial s} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + v \cdot A \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s} - \rho \cdot f = 0 \quad (2-1)$$

Substitutie van (2-2) t/m (2-6) geeft dan de continuïteitsvergelijking voor prismatische open vloeistofleidingen:

$$(2-10) \quad \boxed{v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{b}{b_s} \frac{\partial h}{\partial t} = 0} \quad (\text{voor } \frac{\partial b_s}{\partial s} = 0)$$

Met $Q = b_s \cdot h \cdot v$ wordt dit:

$$(2-11) \quad \boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0}$$

Opmerking: In de afleiding van (2-10) werd verondersteld dat b_s in de s-richting niet verandert. Deze vergelijking geldt dus alléén voor $\frac{\partial b_s}{\partial s} = 0!$

Uit het feit, dat daarna verg. (2-11) werd afgeleid, wederom met de beperking $b_s = \text{constant}$ in de s-richting zou men kunnen opmaken, dat deze beperking ook hiervoor geldt. Dit is echter niet het geval.

Indien reeds in (2-1) $Q = v \cdot A$ was gesubstitueerd was voor het afleiden van (2-11) geen differentiatie van b_s naar s nodig geweest!

2.2.2. De vereenvoudigde continuïteitsvergelijking

De continuïteitsvergelijking uitgedrukt in Q (2-11) kan niet worden vereenvoudigd. Voor de vergelijking uitgedrukt in v (2-10) is dit wel mogelijk. Noem de snelheid, waarmee een punt (doorsnede) waarvoor $dh = 0$ is, zich voortplant: c .

Uit $dh = \frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial t} dt$ volgt dan $\frac{\partial h}{\partial t} = -c \frac{\partial h}{\partial s}$, zodat (2-10) wordt:

$$\left(v - \frac{b}{b_s} \cdot c\right) \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

Hieruit blijkt, dat de term $v \frac{\partial h}{\partial s}$ uit (2-10) mag worden verwaarloosd, indien:

$$\frac{b}{b_s} \cdot \frac{v}{c} \ll 1$$

De vereenvoudigde continuïteitsvergelijking wordt dus:

(2-12)

$h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{b}{b_s} \frac{\partial h}{\partial t} = 0$
alléén geldig voor $\frac{b}{b_s} \cdot \frac{v}{c} \ll 1$

Opm. Zoals later nog uitvoerig zal worden besproken, kan de voortplantingssnelheid van een z.g. translatie-golf worden benaderd met de uitdrukking:

$$c = \sqrt{\frac{g A}{b}} = \sqrt{\frac{b_s}{b} g h}$$

De verhouding $\frac{v}{c}$ wordt "het getal van Froude" genoemd. Deze verhouding blijkt voor alle verwaarlozingen een belangrijke rol te spelen.

Indien men een model voor een lange golf in een open leiding ontwerpt, moet er ondermeer voor gezorgd worden dat de schaal van deze verhouding gelijk is aan 1. Of wel de schaalfactor voor v moet gelijk zijn aan de schaalfactor voor c .

2.2.3 De bewegingsvergelijking

De massavergelijking was gegeven door verg. (1-7):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{v/v}{C^2 R} - \frac{f}{A} (v-u)$$

in (1-7)

Substitutie van de vergn. (2-2) en (2-8) geeft dan de bewegingsvergelijking van lange golven in open leidingen, uitgedrukt in de over het dwarsprofiel gemiddelde snelheid v en de waterdiepte h :

$$(2-13) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = -g \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \cos I_b - g \cdot \sin I_b - g \cdot \frac{v/v}{C^2 R} + \frac{b - b_s}{A} (v-u) \frac{\partial h}{\partial t}$$

De hoek waarmee de bodem helt I_b is bijna altijd zo klein, dat men mag stellen: $\cos I_b = 1$ en $\sin I_b = I_b$, waarmede (2-13) overgaat in:

$$(2-14) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} - g I_b - g \frac{v/v}{C^2 R} + \frac{b - b_s}{A} (v-u) \frac{\partial h}{\partial t}$$

alléén geldig indien $\cos I_b = 1$ en $\sin I_b = I_b$

Evenals de continuïteitsvergelijking kan ook de bewegingsvergelijking worden uitgedrukt in Q , inplaats van in v .

Daartoe moet worden gesubstitueerd: $v = \frac{Q}{b_s h} = \frac{Q}{A}$.

Hieruit volgt onder de aanname $b_s = \text{constánt}$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{b_s h} \right) = \frac{1}{b_s h} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{b_s h^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en:}$$

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{Q}{b_s^2 h^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{b_s^2 h^3} \cdot \frac{\partial h}{\partial s}$$

Door deze vergelijkingen te substitueren in vergelijking (2-13) of (2-14) ontstaat de bewegingsvergelijking uitgedrukt in Q .

Om de vergelijkingen in dit dictaat zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijk te houden, wordt een zijdelingse toe- of afvoer loodrecht op de stroomrichting verondersteld ($u = 0$).

In dat geval geeft genoemde substitutie in (2-14)

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q}{Ah} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{Q^2}{A^2 h} \frac{\partial h}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{Q/Q}{C^2 A^2 R} + \frac{b-b_s}{A^2} Q \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

① laten staan

② volgens (2-11) is $\frac{Q}{A^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{Q}{A^2} b \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\textcircled{3} \quad \frac{Q}{Ah} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q}{A^2} \cdot b_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ in rechterlid met $\textcircled{8}$ geeft:

$$\text{in rechterlid: } \frac{Q}{A^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} (b + b_s + b - b_s) = \frac{2bQ}{A^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} \text{ in rechterlid} = -g \left(\cos I_b - \frac{Q^2}{A^2 gh} \right) \frac{\partial h}{\partial s} = -g \left(\cos I_b - \frac{v^2}{gh} \right) \frac{\partial h}{\partial s}$$

$\textcircled{6}$ en $\textcircled{7}$ laten staan.

Het resultaat van deze bewerking is dus:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = -g \left(\cos I_b - \frac{v^2}{gh} \right) \frac{\partial h}{\partial s} - g \sin I_b + \frac{2bQ}{A^2} \frac{\partial h}{\partial t} - g \frac{Q/Q}{C^2 A^2 R}$$

Noemt men $\frac{1}{\cos I_b - \frac{v^2}{gh}} = \alpha$, dan wordt dit na delen door g :

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{\alpha}{gA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} - \alpha \sin I_b + \frac{2bQ\alpha}{gA^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\alpha Q/Q}{C^2 A^2 R},$$

(2-15)

$$\text{waarin } \alpha = \frac{1}{\cos I_b - \frac{v^2}{gh}}; \text{ alleen geldig voor } b_s = \text{constant en } u = 0$$

Opmerking: Bij het afleiden van de massaverelijkingen en dus ook van (2-15) is rekening gehouden met zijdelingse toe- of afvoer. In het algemeen wil dit zeggen, dat men niet $K = ma$, doch $Kdt = d(mv)$ heeft moeten gebruiken (niet constante massa!). Zou men (ten onrechte als $b \neq b_s$) de bewegingsvergelijking afleiden uit $K = ma$, dan zou in (2-13) en (2-14) de laatste term van het tweede lid niet worden gevonden, terwijl in de voorlaatste term van het tweede lid van vgl. (2-15) dan $(b + b_s)$ in plaats van $2b$ zou hebben gestaan. In de literatuur komt dit ten onrechte nogal eens voor. Zoals nog zal blijken is de gehele term veelal klein, zodat deze fout weinig practische betekenis heeft.

2.2.4. De vereenvoudigde bewegingsvergelijking.

a. Beschouwen wij eerst de term $\frac{b-b_s}{A} (v-u) \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$ in de vergn. (2-13) en (2-14):

Gemakshalve stellen wij eerst $u = 0$.

Volgens de continuïteitsvergelijking is $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{\partial Q}{\partial s}$ zodat

$$\begin{aligned} \frac{b-b_s}{A} \cdot v \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{b-b_s}{A \cdot b} \cdot v \frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{b-b_s}{A \cdot b} \cdot v \cdot \frac{\partial(v \cdot A)}{\partial s} \\ &= -\frac{b-b_s}{A} \cdot \frac{b_s}{b} \cdot v \cdot \left(v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ &= -\frac{b-b_s}{b} \cdot \frac{v}{h} \left(v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ &= -\frac{b-b_s}{b} \cdot \frac{v^2}{h} \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{b-b_s}{b} \cdot v \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= -\frac{b-b_s}{b} \cdot \frac{v^2}{h} \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{b-b_s}{b} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

De term $\frac{b-b_s}{A} v \frac{\partial h}{\partial t}$ is hiermede dus gesplitst in twee termen, die ieder voor zich met de term $g \frac{\partial h}{\partial s}$ kunnen worden vergeleken.

De eerste van deze beide termen is t.o.v. $g \frac{\partial h}{\partial s}$ te verwaarlozen, indien

$$\frac{b-b_s}{b} \cdot \frac{v^2}{h} \ll g, \text{ of indien:}$$

$$\left(1 - \frac{b_s}{b} \right) \frac{v^2}{gh} \ll 1.$$

Voor de tweede term kan men schrijven:

$$\frac{b-b_s}{b} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) = g \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{b-b_s}{b} \frac{v^2}{2g} \right) \ll g \frac{\partial h}{\partial s}, \text{ indien:}$$

$$\frac{b-b_s}{b} \cdot \frac{v^2}{2gh} \ll 1.$$

Omdat u bijna altijd kleiner zal zijn dan v, geldt dit in de praktijk gewoonlijk ook voor de gehele term $\frac{b-b_s}{A} (v-u) \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$.

Beschouwen wij nu de term $v \frac{\partial v}{\partial s}$ in de vergn. (2-13) of (2-14):

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Voegen wij deze term nu samen met $g \frac{\partial h}{\partial s}$, dan ontstaat:

$$-g \frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) = -g \frac{\partial}{\partial s} h \left(1 + \frac{v^2}{2gh} \right), \text{ waaruit volgt, dat ook de}$$

term $v \frac{\partial v}{\partial s}$ mag worden verwaarloosd t.o.v. $g \frac{\partial h}{\partial s}$, indien $\frac{v^2}{gh} \ll 1$.

Opmerking: Voor de verwaarlozingen speelt dus de verhouding $\frac{v}{\sqrt{gh}}$

(het getal van Froude; zie ook de opm. op blz. 2.5.) een grote rol. Een klein getal van Froude betekent ook een amplitude van de golf, die klein is t.o.v. de waterdiepte!

Indien nu ook nog - zoals gebruikelijk - $\cos I_b = 1$ en $\sin I_b = I_b$ wordt gesteld, wordt de vereenvoudigde bewegingsvergelijking uitgedrukt in v dus:

(2-16)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial h}{\partial s} - g \cdot I_b - g \frac{v/v}{C^2 R}$$

alléén geldig, indien $\frac{b-b_s}{b} \cdot \frac{v^2}{gh} \ll 1$ en $\cos I_b \approx 1$

Een analoge redenering geldt natuurlijk ook voor de bewegingsvergelijking uitgedrukt in Q (zie verg. (2-15)). In de vergelijking blijkt de term $\frac{2bQ\alpha}{gA^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$ klein t.o.v. $\frac{\partial h}{\partial s}$ en is verder $\alpha = 1$, indien $\frac{v^2}{gh} \ll 1$.

Het laatste volgt uiteraard direct uit de definitie van α . Het eerste kan gemakkelijk worden aangetoond, door uit te gaan van de vereenvoudigde vergelijking uitgedrukt in v en daarin $v = \frac{Q}{A}$ te substitueren.

De vereenvoudigde vergelijking uitgedrukt in Q wordt dan na enige bewerking:

(2-17)

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - I_b - \frac{Q/Q}{C^2 A^2 R}$$

alléén geldig indien $\frac{v^2}{gh} \ll 1$, $u = 0$, $\cos I_b \approx 1$ en $\sin I_b \approx I_b$

Opmerking: Soms ziet men in de literatuur wel $\alpha = 1$ gesteld, doch niet de bergingsterm verwaarloosd. Dit is niet consequent, doch men moet bedenken, dat de fout groter wordt naarmate meer wordt verwaarloosd. Zo kan men bijvoorbeeld door alléén $\alpha = 1$ te stellen een fout maken stel Δ , terwijl men door bovendien de bergingsterm te verwaarlozen een fout kan maken van 3Δ . Bij dit alles speelt natuurlijk ook de moeite, die het kost om een bepaalde term mede te nemen, een rol.

Bij getijberekeningen mag vaak ook de term I_b worden verwaarloosd!

2.2.5. De bewegingsvergelijking uitgedrukt in het piézometrisch niveau.

Soms bestaat de neiging in plaats van met de waterdiepte h te willen rekenen met het piezometrisch niveau (d.w.z. ten opzichte van een horizontaal vergelijkingsvlak). De termen met $\frac{\partial h}{\partial s}$ en I_b kunnen dan n.l. tesamen in één term worden ondergebracht.

Per definitie van piezometrisch niveau is:

$$(2-18) \quad pn = \frac{p}{\rho g} + z$$

In beginsel geldt dit overal, dus ook langs de bodem. Langs deze bodem geldt in ieder geval:

$$(2-19) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \sin I_b$$

$$(2-20) \quad p = \rho g h \cos I_b$$

Differentieert men (2-18) en (2-20) naar s , dan blijkt: (open leiding: $\rho = \text{constant}$)

$$(2-21) \quad \frac{\partial(pn)}{\partial s} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{en:}$$

$$(2-22) \quad \frac{\partial p}{\partial s} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \cdot \cos I_b$$

Substitutie van (2-19) en (2-22) in (2-21) geeft dan:

$$(2-23) \quad \frac{\partial(pn)}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} \cos I_b + \sin I_b.$$

(2-23) in (2-13) voor het geval $b = b_s$ geeft dan de bewegingsvergelijking voor open leidingen uitgedrukt in het p.n.

$$(2-24) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -g \frac{\partial(pn)}{\partial s} - g \frac{v/v}{C_R^2}$$

Een en ander kan ook visueel duidelijk worden gemaakt met behulp van figuur 2.3.

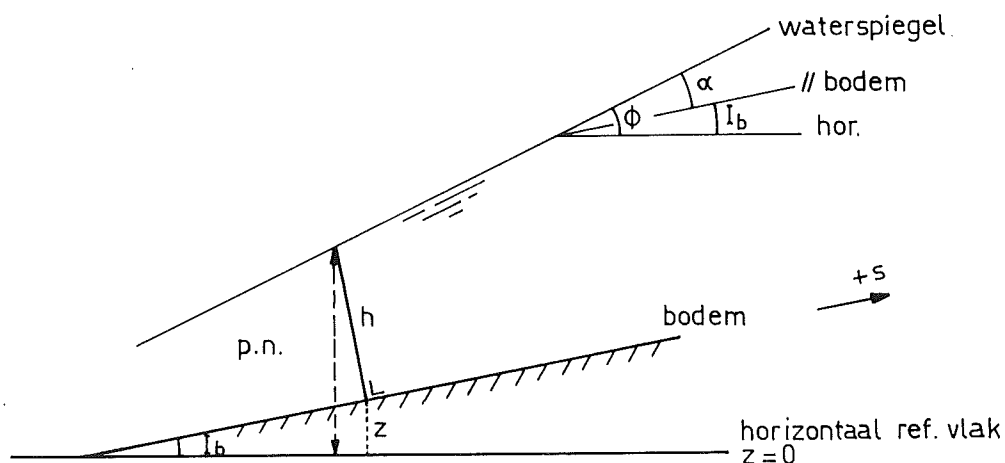


fig. 2.3.

Op analoge wijze kunnen ook de termen met $\frac{\partial h}{\partial t}$ worden uitgedrukt in het p.n. Uit (2-18) volgt:

$$\frac{\partial(pn)}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}$$

Afgezien van het academische geval (ook bij zandtransport is $\frac{\partial z}{\partial t} \ll \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t}$), dat men met een bodem heeft te maken, waarvan de hoogteligging in de tijd verandert, is $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Omdat wij weer de z van de bodem in rekening brengen, moet ook weer met de druk langs de bodem worden gerekend; dus met (2-20). Hieruit volgt: ($\rho = \text{constant!}$)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \cos I_b, \text{ zodat:}$$

$$\frac{\partial(pn)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \cos I_b, \text{ of:}$$

$$(2-25) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\cos I_b} \cdot \frac{\partial(pn)}{\partial t}.$$

Substitutie van (2-23) en (2-25) in (2-13) en (2-11) heeft tot resultaat dat de term met $\sin I_b$ uit de bewegingsvergelijking verdwijnt.

In de continuïteitsvergelijking komt echter $\frac{1}{\cos I_b}$ voor als coëfficiënt van de afgeleide naar de tijd.

Opm: In het algemeen levert het rekenen met het piëzometrisch niveau weinig voordelen op.

Indien de bodem (nagenoeg) horizontaal is en daarom $I_b = 0$ gesteld kan worden, is het werken met het piëzometrisch niveau wel aantrekkelijk omdat men dan een willek ref. vlak kan kiezen (b.v. N.A.P.).

Bij een open leiding, bestaande uit verschillende vakken met horizontale bodem kan met één ref. vlak worden gewerkt.

2.2.6. Overzicht van de golfvergelijkingen voor prismatische leidingen met vrije waterspiegel.

De continuïteitsvoorwaarden:

a) uitgedrukt in Q

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

b) uitgedrukt in v

$$v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{b}{b_s} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

c) uitgedrukt in v met als eis: $\frac{b_s}{b} \cdot \frac{v}{c} \ll 1$

$$h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{b}{b_s} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

alléén geldig indien $\frac{b_s}{b} \cdot \frac{v}{c} \ll 1$,
 waarin c = voorplantingssnelheid
 van dh = 0.

Opm: Voor translatiegolven is $c \approx \sqrt{gh}$. In de praktijk wordt het getal van Froude $\frac{v}{\sqrt{gh}}$ gehanteerd voor alle verwaarlozingen, zowel in de bewegingsvergelijking als in de continuïteitsvergelijking.

De bewegingsvergelijkingen

a) uitgedrukt in v .

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} \cos I_b - g \sin I_b - g \frac{v/v/}{C^2 R} + \frac{b-b_s}{A} (v - u) \frac{\partial h}{\partial t}$$

waarin u = de componente van de snelheid van het zijdelings afgevoerde resp. toegevoerde water in de stroomrichting.

De waarde van u is moeilijk te bepalen en heeft veelal slechts geringe invloed. Daarom wordt u meestal gelijk aan nul gesteld.

b) uitgedrukt in Q .

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{\alpha}{gA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} - \alpha \sin I_b + \frac{2bQ\alpha}{gA^2} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\alpha Q/Q/}{C^2 A^2 R}$$

$$\text{met } \alpha = \frac{1}{\cos I_b - \frac{v^2}{gh}}, \text{ alléén geldig voor } u = 0.$$

c) uitgedrukt in v met als eis $\frac{v^2}{gh} \ll 1$ en $\cos I_b \approx 1$ en $\sin I_b \approx I_b$:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - I_b - \frac{v/v/}{C^2 R}$$

$$\text{alléén indien } \frac{v^2}{gh} \ll 1 \text{ en } I_b \approx 0$$

d) uitgedrukt in Q met als eis $\frac{v^2}{gh} \ll 1$ en $\cos I_b \approx 1$ en $\sin I_b \approx I_b$:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{gA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} - I_b - \frac{Q/Q/}{C^2 A^2 R}$$

$$\text{alléén indien } \frac{v^2}{gh} \ll 1 \text{ en } I_b \approx 0$$

Tekenafpraak:

- In deze vergelijkingen moet I_b positief worden genomen, indien de bodem oploopt in positieve s-richting.
- Q en v zijn positief, indien het water in de positieve s-richting stroomt.



Hoofdstuk 3 DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR GESLOTEN LEIDINGEN

3.1. DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN

- 3.1.1. De zijdelingse toevoer
- 3.1.2. Het verband tussen druk en dichtheid voor vloeistoffen
- 3.1.3. Het verband tussen druk en dichtheid voor gassen
- 3.1.4. Het verband tussen de druk en het stroomvoerend profiel

3.2. DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR GESLOTEN LEIDINGEN

- 3.2.1. De continuïteitsvergelijking voor vloeistofleidingen
- 3.2.2. De continuïteitsvergelijking voor gasleidingen
- 3.2.3. De bewegingsvergelijking (voor zowel gas- als vloeistofleidingen)
- 3.2.4. De golfvergelijkingen voor gesloten vloeistofleidingen uitgedrukt in het piëzometrisch niveau.

3.1. DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN

In de bewegingsvergelijking was reeds de over het dwarsprofiel gemiddelde dichtheid ρ ingevoerd. Omdat in buizen gewoonlijk met relatief grote drukken wordt gerekend is deze middeling ook geen bezwaar en wordt gerekend met de over het dwarsprofiel gemiddelde snelheid, dichtheid en druk.

In de s-richting en de tijd zijn deze grootheden natuurlijk wel variabel gehouden.

3.1.1. De zijdelingse toevoer f.

In buisleidingen, welke op het optreden van lange golven (bijv. waterslag) moeten worden berekend, geschiedt een eventuele injectie van massa gewoonlijk plaatselijk, hetgeen als een splitsingspunt moet worden behandeld.

Van een zijdelingse toe- of afvoer over de gehele lengte van de buis is normaal geen sprake. Daarom wordt hier gesteld:

$$(3-1) \quad f = 0$$

In een uitzonderlijk geval, waarbij men toch met een zijdelingse toevoer zou moeten rekenen kan natuurlijk altijd de bijbehorende waarde van f worden bepaald en ingevoerd!

3.1.2. Het verband tussen druk en dichtheid voor vloeistoffen.

Per definitie van compressiemodulus K geldt voor vloeistoffen:

$$(3-2) \quad \frac{dV}{V} = - \frac{dp}{K} \quad \text{of}$$

$$\frac{dV}{dp} = - \frac{V}{K}$$

Opm. Het minteken is nodig, wanneer druk positief wordt gerekend en trek negatief.

Deze definitie geeft het verband tussen de druk (p) en het volume V van een bepaalde massa vloeistof.

Deze massa moet natuurlijk constant zijn, zodat

$$d(\rho V) = 0, \text{ of}$$

$$(3-3) \quad \frac{d(\rho V)}{dp} = 0, \text{ en dus:}$$

$$\rho \frac{dV}{dp} + V \frac{d\rho}{dp} = 0$$

(3-2) in (3-3) geeft:

$$-\frac{\rho}{K} + \frac{d\rho}{dp} = 0 \quad \text{of:}$$

$$(3-4) \quad \boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K}} \quad \text{geldig voor vloeistoffen met een compressiemodulus K.}$$

Hieruit volgt ook:

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{K}$$

Omdat onafhankelijk van de plaats of de tijd overal deze zelfde relatie bestaat, is ρ dus alléén een functie van p , waaruit met behulp van de kettingregel volgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial s}, \quad \text{of}$$

$$(3-5) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial s}} \quad \text{Op overeenkomstige wijze wordt gevonden:} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t}} \quad (3-6)$$

3.1.3. Het verband tussen druk en dichtheid voor gassen

Voor gassen moet worden uitgegaan van de wet:

$$p V^\alpha = \text{constant.}$$

Opm. Voor isothermische processen is $\alpha=1$. Voor adiabatistische processen (waaronder schokgolven) in lucht is $\alpha \approx 1,4$.

Voor andere gassen dan lucht moeten voor deze exponent α iets andere waarden dan 1,4 worden gebruikt.

Hieruit volgt:

$$d(p V^\alpha) = 0$$

$$p \alpha V^{\alpha-1} dV + V^\alpha dp = 0, \quad \text{of}$$

$$(3-7) \quad \frac{dV}{dp} = -\frac{V}{\alpha p}$$

Omdat ook in deze gaswet weer een bepaalde massa gas wordt beschouwd, geldt evenals voor vloeistoffen:

$$\frac{d(\rho V)}{dp} = 0, \quad \text{of}$$

$$(3-8) \quad \rho \frac{dV}{dp} + V \frac{d\rho}{dp} = 0$$

(3-7) in (3-8) geeft:

$$(3-9) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\alpha p}$$

Zoals gezegd, moet voor isothermische processen worden gerekend met $\alpha = 1$, terwijl voor adiabetische processen in lucht $\alpha = 1,4$ kan worden aangehouden. Snel verlopende processen zijn gewoonlijk adiabetisch, d.w.z. dat geen warmteuitwisseling (met de omgeving) plaatsvindt.

Op analoge wijze als hierboven volgt uit (3-9):

$$(3-10) \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\rho}{\alpha p} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$(3-11) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\alpha p} \frac{\partial p}{\partial t}$$

3.1.4. Verband tussen de druk en het stroomvoerend profiel.

Voor een ronde buis kan de berging, die door uitzetting van de buiswand ontstaat, als volgt worden berekend.

Veronderstelling: de wanddikte $w \ll$ de buisdiameter D .

Als gevolg van een drukverhoging dp ontstaat in de buiswand een trekspanning $d\sigma$.

sverhoging

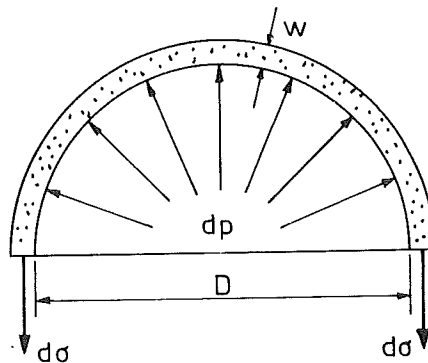


fig. 3.1.

Voor evenwicht moet: $\text{per } m^1$

$2 w d\sigma = dp D$, of

$$(3-12) \quad d\sigma = dp \frac{D}{2 w}$$

De verlenging van de buiswand bedraagt dan dl , waarbij:

$$(3-13) \quad dl = \frac{\pi D}{E} d\sigma$$

(3-12) in (3-13) geeft:

$$dl = dp \frac{\pi D^2}{2 w E}$$

De omtrek was dus πD en wordt nu:

$$\pi D \left(1 + \frac{dp D}{2 w E}\right)$$

De diameter is dus geworden: $D \left(1 + \frac{dp D}{2 w E}\right)$

De oppervlakte van het doorstromingsprofiel (= het volume per strekkende meter buis) was $\frac{1}{4} \pi D^2$ en wordt dus na uitzetting:

$$\frac{1}{4} \pi D^2 \left(1 + \frac{dp D}{2 w E}\right)^2$$

Voor kleine waarden van $\frac{dp D}{2 w E}$ (zie de opmerking hieronder) is dan:

$$dA = \frac{1}{4} \pi D^2 \frac{dp D}{w E}, \text{ of}$$

$$dA = \frac{A D}{w E} dp, \text{ of}$$

$$(3-14) \quad \boxed{\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\frac{w}{D} E}} \quad (\text{geldig voor } \frac{\sigma \text{ toelaatbaar}}{E} \ll 1).$$

Opmerking.

In het voorgaande is steeds gewerkt met de $d\sigma$, dl , enz., terwijl men in feite ook overal met eindige differenties $\Delta\sigma$, Δl , enz., had kunnen werken en dan tenslotte voor het limiet geval ook vgl. (3-14) had kunnen verkrijgen.

Dit is van belang in verband met de aanname $\frac{dp D}{2 w E} \ll 1$, omdat dp hierin niet de druktoename behoeft te zijn, die men later toch tot nul laat naderen en die om die reden dus weggelaten kan worden.

Ook indien men dp opvat als Δp (d.w.z. de volledige extra druk, die door de waterslag ontstaat) kan men stellen $\frac{dp D}{2 w E} \ll 1$.

Dat dit inderdaad zo is, blijkt indien vgl. (3-12) wordt gesubstitueerd.

Men krijgt dan: $\frac{\Delta p}{w} \frac{D}{E} = \frac{2 \Delta \sigma}{E}$, waarin $\Delta \sigma$ ten hoogste de toelaatbare spanning kan zijn.

In de praktijk zal $\frac{\sigma \text{ toelaatbaar}}{E}$ altijd wel klein zijn, al zijn uitzonderingen hierop wel denkbaar.

Op dezelfde wijze als waarop de afgeleiden van ρ werden bepaald uit (3-4) volgt uit (3-14):

$$(3-15) \quad \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{A}{\frac{w}{D} \cdot E} \cdot \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$(3-16) \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A}{\frac{w}{D} \cdot E} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

3.2. DE GOLFVERGELIJKINGEN VOOR GESLOTEN LEIDINGEN.

3.2.1. De continuïteitsvergelijking voor gesloten vloeistofleidingen.

Voor eliminatie van de afgeleiden van ρ en A moeten in dit geval (3-1), (3-5), (3-6), (3-15) en (3-16) in vergelijking (2-1) worden gesubstitueerd.

Het resultaat is:

$$(3-17) \quad \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{c} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

waarin $\frac{1}{c} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{\frac{w}{D} \cdot E}$

Opmerking:

Hierin is c alléén gedefinieerd volgens bovenstaande formule. Dat dit tevens de voortplantingssnelheid is van een discontinuïteit blijkt pas later bij het afleiden van de karakteristieke vergelijkingen. Op dit moment is c alléén nog ingevoerd als verkorte schrijfwijze.

3.2.2. De continuïteitsvergelijking voor gasleidingen.

Voor gasleidingen moeten de vergelijkingen (3-1), (3-10), (3-11) en (3-15) worden aangewend ter eliminatie van de afgeleiden van ρ en A in vergelijking (2-1).

Het resultaat is:

$$(3-18) \quad \left(\frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{\frac{w}{D} \cdot E} \right) \cdot v \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + \left(\frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{\frac{w}{D} \cdot E} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

waarin weer $\alpha = 1$ voor isothermische processen en $\alpha = 1,4$ voor adiabatische processen in lucht.

Omdat gewoonlijk op dezelfde gronden als eerder vermeld

$\alpha p \ll \frac{w}{D} \cdot E$ kan deze vergelijking ook worden vereenvoudigd tot:

$$(3-19) \quad \frac{v}{\alpha p} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\alpha p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

3.2.3. De bewegingsvergelijking (voor zowel gas- als vloeistofleidingen)

De massavergelijking was gegeven door (1-7). Omdat $f = 0$ is gesteld

(3-1) volgt hieruit:

$$(3-20) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \sin I_b - g \frac{v/v}{C^2 R}$$

3.2.4. De golfvergelijkingen voor gesloten vloeistofleidingen uitgedrukt in het piezometrisch niveau.

Voor gesloten leidingen wordt wel vaak gerekend met het piezometrisch niveau. Gewoonlijk wordt dit echter pas ingevoerd in de vergelijkingen der karakteristieken, die hierna zullen worden behandeld.

Inprincipe is echter:

$$pn = \frac{P}{\rho g} + z$$

$$\frac{\partial(pn)}{\partial s} = \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{p}{\rho^2 g} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s}, \text{ of}$$

$$(3-21) \quad \frac{\partial p}{\partial s} = \rho g \frac{\partial(pn)}{\partial s} + \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s} - \rho \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

Hierin is:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \sin I_b$$

en volgens (3-5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\rho}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial s}$$

Substitutie hiervan in (3-21) geeft:

$$(1 - \frac{p}{K}) \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = \rho g \frac{\partial(pn)}{\partial s} - \rho g \sin I_b,$$

Voor de weinig samendrukbare vloeistoffen, waarmee men in de praktijk te maken heeft, zal $\frac{p}{K} \ll 1$ zijn, zodat:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho g \frac{\partial(pn)}{\partial s} - \rho g \sin I_b,$$

waarmede de bewegingsvergelijking wordt:

$$(3-22) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -g \frac{\partial(pn)}{\partial s} - g \frac{v/v}{C^2 R}$$

Op dezelfde wijze kan ook worden gevonden:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial(pn)}{\partial t} - \rho g \frac{\partial z}{\partial t}$$

Of voor $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ (niet bewegende buis):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial(pn)}{\partial t}$$

Voor de continuïteitsvergelijking (3-17) vinden we dan:

$$(3-23) \quad \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{c} \cdot g \cdot \frac{\partial(pn)}{\partial s} + \frac{g}{c} \cdot \frac{\partial(pn)}{\partial t} - \frac{v}{c} \cdot g \cdot \sin I_b = 0$$

Hoofdstuk 4

ENIGE OPLOSSINGSMETHODEN VOOR PROBLEMEN WAARBIJ DE
GOLFVERGELIJKINGEN STERK MOGEN WORDEN VEREENVOUDIGD

- 4.1. INLEIDING
- 4.2. DE Z.G. KOMBERGINGSBESCHOUWING
- 4.3. VOORBEELDEN VAN BEREKENINGEN BETREFFENDE EEN
RELATIEF KORT BEKKEN
 - 4.3.1. Een bekken met een brede en diepe monding
 - 4.3.2. Een bekken met een nauwe monding
 - 4.3.3. Voorbeeld van een z.g. sluitgat-berekening
- 4.4. EEN BENADERINGSMETHODE VOOR HOOGWATERGOLVEN
 - 4.4.1. Het karakter van hoogwatergolven
 - 4.4.2. De voortplanting van een hoogwatergolf
 - 4.4.3. Berekeningen betreffende hoogwatergolven
- 4.5. EEN BENADERINGSMETHODE VOOR Z.G. TRANSLATIEGOLVEN
 - 4.5.1. Het karakter van translatiegolven
 - 4.5.2. De voortplanting van translatiegolven
 - 4.5.3. Vereenvoudigde berekeningen voor translatiegolven

4.1. INLEIDING

In de voorgaande hoofdstukken zijn de algemene differentiaal-vergelijkingen afgeleid, waarmee de voortplanting van lange golven in open resp. gesloten leidingen kunnen worden beschreven.

In de praktijk blijken zich verschillende problemen voor te doen, waarbij een of meer termen uit de algemene vergelijkingen een verwaarloosbaar kleine invloed hebben op het verschijnsel. In dit hoofdstuk worden nu voor een aantal van dergelijke problemen betreffende open leidingen enige oplossingsmethoden besproken.

Hierbij wordt de volgende procedure gevolgd:

Voor een bepaald probleem kan men op fysische gronden tot het inzicht komen dat bij het zoeken naar een oplossing een of meer mathematische vereenvoudigingen mogelijk zijn. Voor de (sterk) vereenvoudigde vergelijkingen worden oplossingen gezocht, die gemakkelijk(er) kunnen worden geïnterpreteerd. Het is mogelijk om dan achteraf de invloed van de verwaarlozingen (in orde van grootte) vast te stellen.

De gevolgde procedure zal ook voor problemen betreffende gesloten leidingen kunnen worden gevolgd.

In het college b 74 Vloeistofmechanica b.o. worden (sinds 1972) andere procedures behandeld, die in de toegepaste wiskunde bekend staan als z.g. "asymptotische methoden". Een dergelijke methode is er op gericht, om uitgaande van de algemeen geldende differentiaal-vergelijkingen, vergelijkingen voor speciale gevallen af te leiden. Door daarbij zeer systematisch te werk te gaan, wordt een goed inzicht mogelijk in het verband tussen verschillende benaderingen onderling en de nauwkeurigheid van een bepaalde benadering.

De filosofie van de asymptotische methoden speelt bij dit vak b 73A eigenlijk steeds een rol, zij het dat een en ander minder systematisch wordt opgezet. Bij de in dit hoofdstuk behandelde onderwerpen zal hier en daar het college b 74 dan ook worden genoemd als bron voor verdere informatie. De resultaten van een sterk vereenvoudigde oplossing kunnen op een bescheiden schaal worden gebruikt om de invloed van de verwaarlozingen vast te stellen.

Indien uit een dergelijke globale controle blijkt dat de invloed niet heel erg klein is, is men gedwongen een nauwkeuriger (hogere orde) benadering te geven teneinde meer zekerheid te verkrijgen.

Indien later meer algemeen toepasbare oplossingsmethoden zijn behandeld, bestaat de mogelijkheid om de invloed van een in de vergelijkingen voorkomende parameter vast te stellen.

4.2. DE Z.G. KOMBERGINGSBESCHOUWING

In het volgende wordt een prismatische open leiding beschouwd, die aan één zijde is afgesloten en aan de andere zijde in open verbinding staat met een diepe en brede zee-arm.

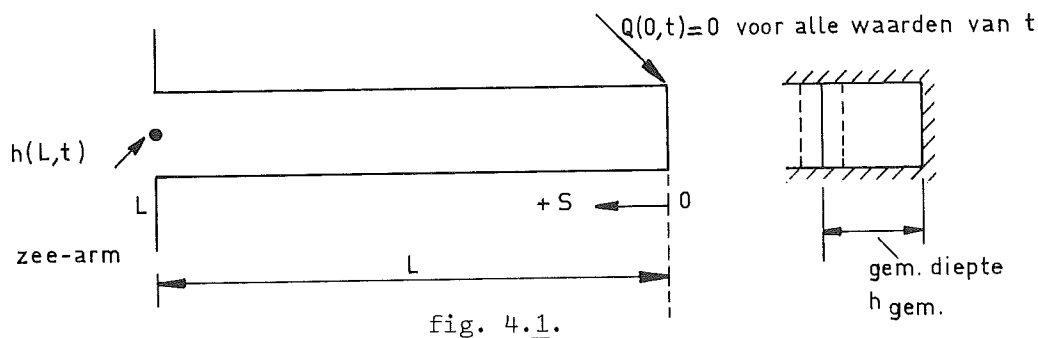


fig. 4.1.

De volgende veronderstellingen worden gemaakt:

1. De wanden zijn vertikaal, zodat $b = b_s = \text{konstant}$;
2. Hoewel dit niet noodzakelijk is wordt (in eerste instantie) de bodem horizontaal gedacht $I_b = 0$. De s -as is dan dus horizontaal.
3. Het verloop van de waterstanden is gegeven op de plaats $s = L$ als een vloeiend verlopende functie $h(L,t)$
4. Het getal van Froude $\frac{v^2}{gh}$ is erg klein, zodat de faktor $\alpha = 1$.

Zoals blijkt uit hoofdstuk 2 kan de voortplanting van een lange golf in het bekken worden beschreven met de vergelijkingen (2.15) en (2.11). Als rekening gehouden wordt met veronderstelling 2 en 4, dan gelden voor ieder punt tussen $s = 0$ en $s = L$ de volgende vergelijkingen:

$$(4-1) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} + \frac{2b}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$(4-2) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Op de plaats $s = 0$ is gegeven (de tweede randvoorwaarde) $Q(0,t) = 0$ voor alle waarden van t . Hieruit volgt ook dat alle termen in het rechter lid van verg. (4-1) voor alle waarden van t op deze plaats $s = 0$ gelijk aan nul zijn.

Indien het bekken zeer kort is t.o.v. de golflengte van de golf zal $Q = 0$ en $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ ook bij benadering gelden over de gehele lengte van het bekken. In dat geval geldt overal in het bekken:

$$(4-3) \quad \boxed{\frac{\partial h}{\partial s} = 0}$$

Hieruit volgt direkt $h = \text{konstant langs de } s\text{-as}$. De waterspiegel is dan in het gehele bekken op ieder moment horizontaal.

Hiermede is de bewegingvergelijking geïntegreerd met het resultaat dat de waterstanden overal in het bekken bekend zijn.

$$(4-4) \quad h(s,t) = h(L,t)$$

Voor de nog resterende continuïteits-vergelijking (4-2) heeft het resultaat tot gevolg dat de functie h in het rechter lid alleen nog van t afhangt:

$$(4-5) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{dh(L,t)}{dt}$$

Door deze vergelijking naar s te integreren kan, zoals dadelijk zal blijken, op eenvoudige wijze een oplossing voor $Q(s,t)$ worden verkregen.

Het is van belang om eerst na te gaan wanneer de veronderstelling (4-3) verantwoord is.

Onder welke voorwaarde(n) mag men volstaan met een z.g. (kom-)bergings-beschouwing?

Om hierin een inzicht te krijgen wordt eerst even verondersteld dat de randvoorwaarde $h(L,t)$ een sinusvormige functie is.

In een relatief diepe waterloop (weerstand nul) kan de voortplantings-snelheid van een lange golf worden benaderd met (zie ook onder 4.5.):

$$c = \sqrt{g h_{\text{gem}}} \quad (b = b_s)$$

De golflengte van een dergelijke golf wordt dan $\lambda = c T = T \sqrt{g h_{\text{gem}}}$. Hierin is T de periode van de golf.

Zoals bekend is zal zich in een afgesloten leiding een staande golf willen instellen. Een dergelijke staande golf is de som van twee lopende golven: een inlopende golf en een gereflekteerde golf.

De situatie, die zich in een dergelijk geval voordoet, laat zich in fig. 4.2. illustreren.

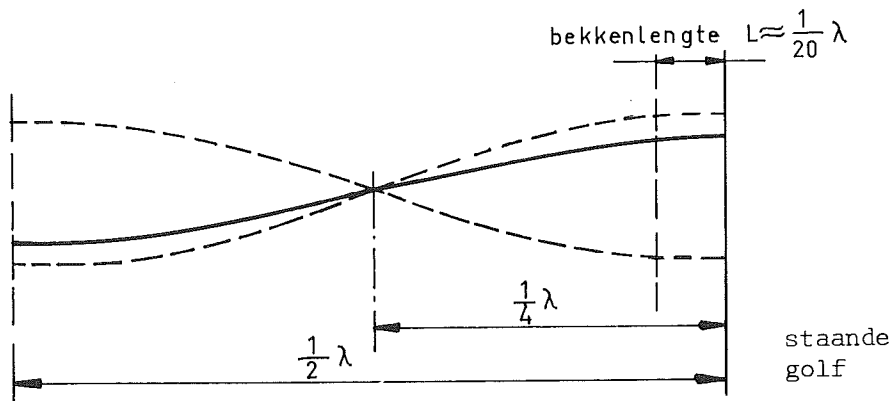


fig. 4.2.

Dit beeld maakt het duidelijk dat de veronderstelling (4-3) voor alle waarden van t verantwoord is als de lengte van het bekken niet groter is dan b.v. $\frac{1}{50}$ van de golflengte.

De voorwaarde is dus:

(4-6)

$$L \ll \lambda$$

Omdat $\lambda = cT$ en de looptijd τ gedefinieerd is door $\tau = \frac{L}{c}$ kunnen we de voorwaarde (4-6) ook als volgt uitdrukken:

$$\tau \ll T$$

In de laatste vorm kan de voorwaarde ook als volgt worden geïnterpreteerd. In de tijd dat een verstoring (een kleine verandering van de waterspiegel) heen en weer door het bekken loopt verandert de waterstand bij de rand slechts weinig:

(4-7)

$$2 \tau \ll T$$

Hiermee is een meer algemeen bruikbare voorwaarde verkregen. Men kan voor T een tijdsduur kiezen, die kenmerkend is voor het verschijnsel.

Opm: De randvoorwaarde $h(L,t)$ behoeft uiteraard niet sinusvormig te zijn, om toch het hierboven besproken beeld mogelijk te maken.

Laten we nu eerst kijken naar de verdere gevolgen van de veronderstelling (4-3) voor het gestelde probleem.

We kunnen de continuïteitsvergelijking (4-5) naar s integreren van $s = 0$ tot $s = s$:

$$\int_{s=0}^{s=s} \frac{\partial Q}{\partial s} ds = \int_{s=0}^{s=s} -b \frac{\partial h}{\partial t} ds$$

In het beschouwde geval zijn $\frac{\partial h}{\partial t}$ en b konstant over s . We vinden dan ook:

$$\int_{s=0}^{s=s} \frac{\partial Q}{\partial s} ds = -b \frac{dh}{dt} \int_{s=0}^{s=s} ds \rightarrow Q(s,t) - Q(0,t) = -b \frac{dh}{dt} s$$

Omdat $Q(0,t) = 0$ vinden we tenslotte

(4-8)

$$Q(s,t) = -b \frac{dh}{dt} s$$

Opm. 1. Controleer van deze laatste uitdrukking de tekens.

2. Ga na wat we vinden als b een of andere functie van s is.

Uit het bovenstaande volgt ook voor het debiet ter plaatse van $s = L$:

$$(4-9) \quad Q(L,t) = -b L \frac{dh}{dt} = -B \frac{dh}{dt}$$

De grootheid B wordt het kombergingsoppervlak van het bekken $0 - L$ genoemd. Het debiet en dus de stroomsnelheden in het bekken worden bepaald door het kombergingsoppervlak $b s$ en de waarde van $\frac{dh}{dt}$ op ieder moment.

Met (4-4) en (4-8) is een benaderende oplossing verkregen.

Het is mogelijk om achteraf een inzicht te verkrijgen in de juistheid van de gemaakte veronderstelling $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$.

Met de benadering, die hiervoor voor de functie $Q(s,t)$ is gevonden, kan men voor verschillende waarden van s en t de grootte van elk van de termen in het rechter lid van de bewegingsvergelijking benaderen. Hierop zal in 4.3. nader worden ingegaan.

Eerst worden nu nog enige opmerkingen gemaakt betreffende 4 in het begin gemaakte veronderstellingen (zie blz. 4.3.).

ad. 1. Als gevolg van de aanwezigheid van hooggelegen platen, schorren e.d. zal in de praktijk de vorm van het dwarsprofiel in het algemeen vrij grillig zijn. De bergende breedte b zal dan een functie zijn van de waterstand h . Indien het verloop van de functie $b(h)$ bekend is, kan men dit verloop bij het integreren van de vergelijking (4-5) verdisconteren.

In een dergelijk geval zal men ook onderscheid moeten maken tussen b en b_s (= de stroomvoerende breedte).

ad. 2. In getijgebieden e.d. heeft de bodem over het algemeen slechts een zeer geringe helling. Het is echter toch zinvol om na te gaan wat er in de beschouwing verandert indien $I_b \neq 0$.

Zoals in 2.2.5. is besproken kan men de term met I_b in de bewegingsvergelijking samen nemen met $\frac{\partial h}{\partial s}$ door over te gaan op het piëzometrisch niveau pn t.o.v. een horizontaal vergelijkingsvlak. In plaats van (4-1) en (4-2) hebben we dan te maken met de volgende vergelijkingen (zie: (2-23) en (2-25)):

$$(4-10) \quad \frac{\partial(pn)}{\partial s} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} - \frac{2 b}{g A^2} Q \frac{1}{\cos I_b} \frac{\partial(pn)}{\partial t}$$

$$(4-11) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{1}{\cos I_b} \frac{\partial(pn)}{\partial t}$$

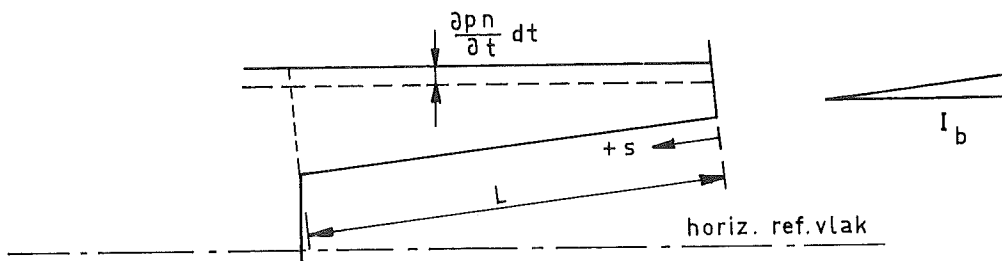


fig. 4.3

Uit het feit dat $L \ll \lambda$ volgt nu de veronderstelling

$$\frac{\partial(pn)}{\partial s} = 0 \rightarrow pn = \text{konstant over } s.$$

De faktor $\cos I_b$ b.v. in de noemer van het rechter lid van (4-11) is een gevolg van het feit dat de veranderingen van het piëz. niveau pn natuurlijk vertikaal worden gemeten en niet loodrecht op de s -richting (\perp de bodem).

De kombergingsbeschouwing houdt in dat het verloop van de waterstanden in t voor het gehele bekken gelijkgesteld wordt aan een bepaalde functie $h(t)$.

Uit het bovenstaande blijkt dat daardoor een sterk vereenvoudigd probleem overblijft.

Door het toepassen van een continuïteitsbeschouwing over een gedeelte van een bekken volgt direkt (zie fig. 4.4.), voor b is konstant:

$$Q(x,t) = - b x \frac{d(pn)}{dt}$$

Deze uitdrukking komt overeen met (4-8), waarbij de s -as ook horizontaal was verondersteld.

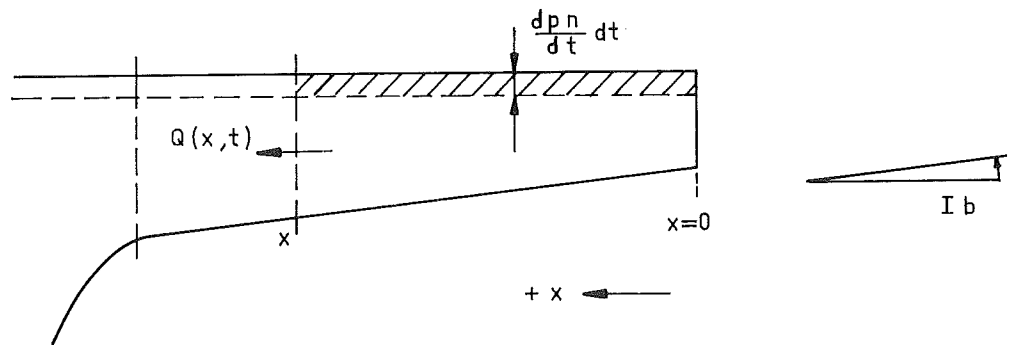


Fig. 4.4.

Uit het bovenstaande blijkt dat de bodemhelling geen rol zal spelen in de praktijk.

ad. 3. De beperking dat $h(L,t)$ een in de tijd vloeiend verlopende functie dient te zijn blijft gehandhaafd (geen discontinuïteiten). Deze beperking houdt direkt verband met de voorwaarde (4-7). Als $h(L,t)$ plotseling sterk zou stijgen dient men T in deze voorwaarde erg klein te nemen.

ad. 4. Men kan deze veronderstelling in een bepaald geval gemakkelijk achteraf controleren.

4.3. VOORBEELDEN VAN BEREKENINGEN BETREFFENDE EEN RELATIEF KORT BEKKEN4.3.1. Een bekken met een brede en diepe monding

In 4.2. is verondersteld dat de waterstand in de monding van het bekken (voor $s = L$; zie fig. 4.1.) bekend is.

Nu wordt verondersteld dat in plaats daarvan het verloop van de waterstanden bekend is in een brede en diepe zeearm t.p.v. de monding van het bekken (zie fig. 4.5.).

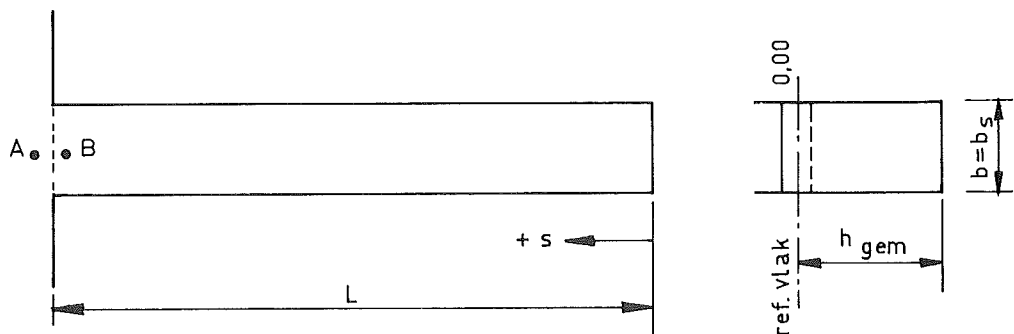


fig. 4.5.

Gegeven is $h_A(t)$ voor alle waarden van t .

De waterstand in B zal in het algemeen niet gelijk zijn aan de gegeven waterstand in A. Men kan zich tussen A en B verschillende oorzaken voor verliezen denken: overlaten, sluitgaten e.d.

Wat daarvan de konsekventies zijn wordt besproken in 4.3.2..

Hier wordt verondersteld dat de stroomsnelheden in de monding zo klein zijn dat zich tussen A en B geen meetbare vervallen voordoen. De waterstand in B is dan direkt bekend.

Wat betreft het verloop van de waterstanden in de tijd wordt verwezen naar de in 4.2. gemaakte opmerkingen.

In het volgende wordt als voorbeeld een concreet probleem bekeken. Daarbij wordt eenvoudigheidshalve voor het verloop van de randvoorwaarde in de tijd een sinusvormige functie gekozen:

$$h_A(t) = h_B(t) = 0.00 + \hat{h} \sin \omega t \quad \text{waarin: } \hat{h} = 1.00 \text{ m,}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

terwijl $T = 44700 \text{ s.}$

Gegeven is verder: $L = 4000 \text{ m}$, de gem. diepte onder het ref.vlak is

$$h_{\text{gem.}} = 10,00 \text{ m, } b = b_s = 200 \text{ m.}$$

De golflengte is $\lambda = c T \approx \sqrt{g h_{\text{gem.}}} \cdot 44700 = 447000 \text{ m.}$

De verhouding $\frac{\lambda}{L} \approx 110.$

De verhouding tussen de golflengte en de lengte van het aan één zijde afgesloten bekken is dus zo groot dat verondersteld mag worden:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (4-3)$$

Hierdoor is de waterstand overal in het bekken bekend:

$$(4-12) \quad \underline{h(s,t)} = h_A(t) = \underline{\hat{h} \sin \omega t}$$

Voor het gehele bekken is dus $\frac{dh(s,t)}{dt} = \omega \hat{h} \cos \omega t$

Volgens (4-8) kunnen we voor het debiet Q als functie van s en t schrijven:

$$(4-13) \quad Q(s,t) = -b \frac{dh}{dt} s = -b \omega \hat{h} (\cos \omega t) s$$

Voor het debiet in de monding vinden we dan:

$$Q(L,t) = -b L \omega \hat{h} \cos \omega t$$

Uitgaande van de hierboven gegeven grootheden vinden we:

$$(4-14) \quad Q(L,t) = -\hat{Q} \cos \omega t, \quad \text{waarin } \hat{Q} = b L \omega \hat{h} = \\ 200 \cdot 4000 \cdot 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = \underline{\underline{112 \text{ m}^3/\text{s}}}.$$

Door (4-12) en (4-13) met elkaar te vergelijken zien we dat tussen de functies Q en de functie(s) h het fase-verschil precies $\frac{\pi}{2}$ is.

Dit is ook zonder meer duidelijk omdat op het tijdstip, waarop $h(s,t)$ een extreme waarde bereikt, het debiet overal juist nul is (kombergings-beschouwing).

Het bovenstaande voorbeeld is betrekkelijk willekeurig gekozen. Voor het verloop van $h_A(t)$ in de tijd kan men zich iedere continue functie denken!

Voor het gekozen voorbeeld kan eenvoudig worden nagegaan of in dat geval de veronderstelling $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$ gerechtvaardigd is.

We kunnen gebruik maken van de bewegingsvergelijking in de vorm van bv. (2-15), waarin $I_b = 0$ en $\alpha = 1$ (gemakkelijk te controleren):

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q Q}{C^2 A^2 R} + \frac{2 b}{g A^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}$$

De termen in deze vergelijking hebben de dimensie van verhang en variëren met de tijd en met de plaats.

Voor $s = 0$ zijn alle termen voor alle waarden van t gelijk nul!

Voor $s = L$ zullen de termen de grootste waarden aannemen, omdat volgens (4-13) daar het debiet het grootst is. We zullen nu op die plaats de grootste absolute waarde in de tijd bepalen van de termen in het rechter lid:

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\frac{2 b}{g A^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}} \quad \frac{2 b}{g A^2} \approx \frac{400}{10 (2000)^2} = 10^{-5} \\ Q \frac{\partial h}{\partial t} \approx 112 \cdot 1,4 \cdot 10^{-4} \approx 3 \cdot 10^{-2} \end{array} \right\} \approx \underline{\underline{4,6 \cdot 10^{-7}}}$$

$$\boxed{\frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R}} \quad \text{een extreme waarde:} \quad \frac{(112)^2}{3600 (2000)^2 \cdot 10} \approx \underline{\underline{1 \cdot 10^{-7}}}$$

Gesteld $C = 60 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$

$$\boxed{\frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t}} \quad \text{een extreme waarde:} \quad \frac{1}{10 \cdot 2000} \cdot 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot 112 \approx \underline{\underline{1 \cdot 10^{-6}}}$$

Om een wat betere indruk te krijgen van de grootte van deze waarden zou men deze grootste verhangen met de bekkenlengte L kunnen vermenigvuldigen. Doen we dit dan vinden we de volgende "vervallen" resp:

$$\begin{aligned} 4000 \cdot 4,6 \cdot 10^{-7} &= 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 4000 \cdot 1 \cdot 10^{-7} &= 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 4000 \cdot 1 \cdot 10^{-6} &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

$\rightarrow 5 \text{ mm}$

Het is meer in overeenstemming met de werkelijkheid indien voor het bepalen van het "verval" voor het bekken een "gemiddelde" waarde voor het verhang wordt genomen.

Uit bovenstaande globale controle blijkt dat de gemaakte veronderstelling (4-3) voor het beschouwde geval wel verantwoord is.

- Opm. Het is interessant om te beredeneren wat het gedrag is van elk van de hier beschouwde termen uit de bewegingsvergelijking,
- ten opzichte van elkaar en
 - in de tijd gedurende een periode T en
 - in de plaats van $s = 0$ tot $s = L$.

4.3.2. Een bekken met een nauwe monding

We beschouwen weer het bekken van 4.3.1. echter met één wijziging. We veronderstellen dat tussen A en B een betrekkelijk nauw sluitgat is aangebracht. Het gevolg hiervan is dat de waterstanden in B merkbaar gaan afwijken van de gegeven randvoorwaarde $h_A(t)$.

We kennen nu de waterstanden in het bekken niet zonder meer. Wèl mag worden gesteld dat de waterspiegel-variaties in het bekken zelf door het aanbrengen van de vernauwing niet sterker worden. De veronderstelling (4-3) kan dan ook zonder enige twijfel worden gehandhaafd. Het gevolg is dat overal in het bekken de waterstand op ieder moment gelijk is aan de nog onbekende $h_B(t)$.

Volgens (4-9) kunnen we de volgende uitdrukking voor het debiet t.p.v. $s = L$ schrijven:

$$(4-15) \quad Q(L,t) = - b L \frac{dh_B(t)}{dt}$$

Nu moet een relatie worden gelegd tussen de grootheden $h_A(t)$, $h_B(t)$ en $Q_{A-B}(t) = Q(L,t)$.

Voor sluitgaten (openingen, overlaten e.d.) kan men de volgende betrekking opstellen (zie college b 72):

$$(4-16) \quad Q = \mu A_S \sqrt{2g (h_B - h_A)} \quad \text{of}$$

$$(4-17) \quad h_B - h_A = \frac{Q|Q|}{\mu^2 A_S^2 2g}$$

Voor het onbekende debiet hebben we dus twee vergelijkingen (4-15) en (4-16), waaruit voor de tweede onbekende $h_B(t)$ een differentiaal-vergelijking kan worden afgeleid.

We veronderstellen $h_B > h_A$, dan zal Q positief zijn.

Als we nu Q elimineren dan vinden we:

$$(4-18) \quad \mu A_s \sqrt{2g} \sqrt{h_B - h_A} = -bL \frac{dh_B}{dt}$$

Voor deze gewone niet-lineaire D.V. kan eenvoudig een numerieke oplossing worden gevonden. Men kan de vergelijking (4-18) vervangen door een differentie-vergelijking. Voor een bepaald tijdstip t kan men schrijven:

$$\mu A_s \sqrt{2g} \sqrt{h_B - h_A} = -bL \frac{\Delta h_B}{\Delta t}$$

Hieruit volgt:

$$(4-19) \quad \Delta h_B = -\frac{\Delta t}{bL} \sqrt{2g} \mu A_s \sqrt{h_B - h_A}$$

$$h_B(t+\Delta t) = h_B(t) - \frac{\Delta t}{bL} \sqrt{2g} \mu A_s \left[\sqrt{h_B - h_A} \right]_t$$

In 4.3.3. zal een voorbeeld worden besproken, waarbij de oplossing m.b.v. een grafiek wordt gevonden.

De vergelijking (4-18) wordt daartoe vervangen door de volgende vergelijking:

$$(4-20) \quad h_B(t+\Delta t) - h_B(t) = \frac{\Delta t}{bL} \sqrt{2g} \mu A_s \left[\sqrt{h_A - h_B} \right]_{t + \frac{1}{2}\Delta t}$$

Over een tijdstapje Δt wordt dan dus gewerkt met het gemiddelde verval d.w.z. op een tijdstip $t + \frac{1}{2}\Delta t$, terwijl de oppervlakte van het stroomvoerend profiel A_s wordt bepaald met waarden op het "oude" tijdstip t . Het werken met het gem. verval over een tijdstapje is bij een hand-berekening vooral wel zinvol omdat men daarbij nogal grote tijdstappen zal nemen (zie voorbeeld in 4.3.3.).

Indien een computer ingeschakeld wordt dan blijkt een benadering volgens verg. (4-19), d.w.z. een volledige "voorwaartse" differentie-benadering in de tijd, goede resultaten te geven. Als de tijdstap Δt te groot wordt gekozen worden de resultaten volkomen onbruikbaar. Dit wordt veroorzaakt door "instabiel gedrag" van het numerieke rekenproces.

Alleen bij voldoende kleine tijdstappen zal men daar geen hinder van onder- vinden.

4.3.3. Voorbeeld van een z.g. sluitgat-berekening

Met de tot dusverre in deze paragraaf besproken methode worden in de praktijk berekeningen uitgevoerd, die bekend staan als "sluitgat-bere- keningen" of "bekken-berekeningen".

Dergelijke berekeningen worden b.v. gemaakt bij het onderzoek t.b.v. het afsluiten van een bekken in een getijgebied.

Beschouwd wordt hetzelfde bekken als in 4.3.1. (zie fig. 4.5. en de ver- dere gegevens op blz. 4.9.).

De kombergingsoppervlakte van het bekken is konstant:

$$B = b L = 200 \cdot 4000 = 0,8 \cdot 10^6 \text{ m}^2.$$

Verondersteld wordt nu dat zich tussen A en B een relatief nauwe opening bevindt, waarvan het stroomvoerend profiel gelijk is aan:

$$A_s = b_s h_s = 20 \cdot 5 = 100 \text{ m}^2$$

De oppervlakte van het stroomvoerend profiel zal in het geval van een sluitgat variëren met de hoogte van de waterstanden h_A resp. h_B . In het volgende wordt verondersteld dat A_s konstant is.

De afvoercoëfficiënt μ wordt gelijk aan 1 gesteld.

De verg. (4-20) wordt gesplitst in twee vergelijkingen (zie resp. (4-16) en (4-15): **let op de tekens !!**

$$(4-21) \quad Q = -A_s \sqrt{2g z_{\text{gem.}}}, \quad \text{waarin } z_{\text{gem.}} \text{ staat voor}$$

$$h_A(t + \frac{1}{2}\Delta t) - h_B(t + \frac{1}{2}\Delta t)$$

(zie verg. (4-20))

$$(4-22) \quad \Delta h = -\frac{Q\Delta t}{B}$$

Voor de grootte van de tijdstap Δt wordt bij dit voorbeeld (handbere- kening!) gekozen $\Delta t = 1200 \text{ s}$.

Gegeven is het verloop van de buitenwaterstand:

$$h_A(t) = 0,00 + \hat{h} \sin \omega t, \quad \text{waarin } h = 1,00 \text{ m en } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

We stellen de periode T eenvoudigheidshalve gelijk aan 12 uur i.p.v. 12 uur 25 min. Verder wordt verondersteld dat de waterstand $h_A(t)$ van $t = 0$ tot $t = 3600$ seconden lineair stijgt van 0,00 m tot + 0,50 m (zie onderstaande fig. 4.6.).

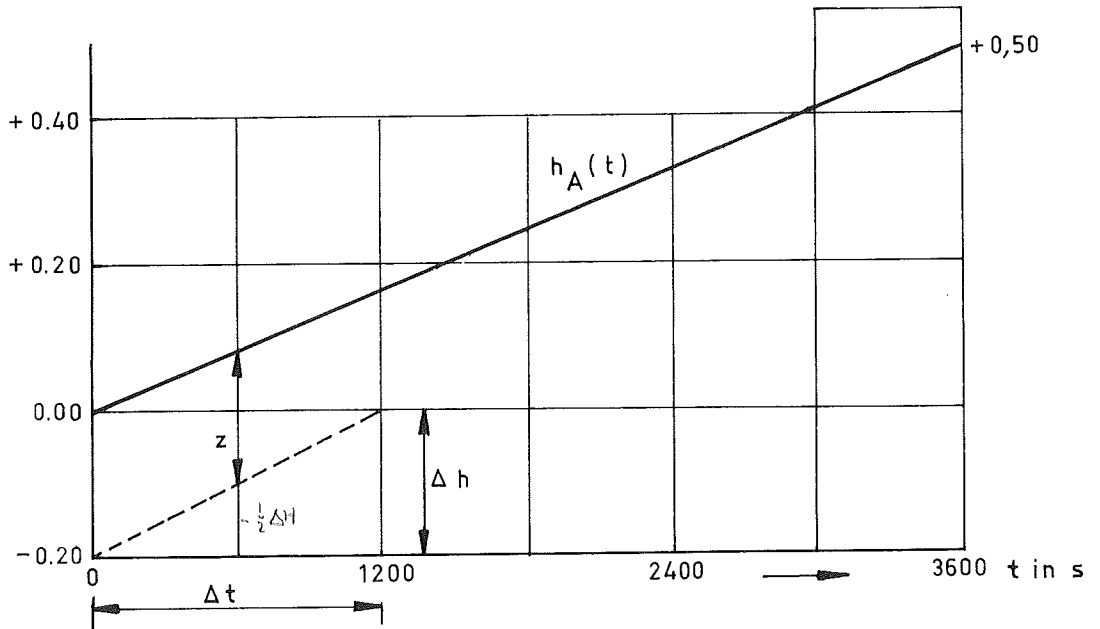


fig. 4.6.

$$5Q^2 + 750Q = 0,28 \cdot 10^6$$

$$\Rightarrow Q = 170 \text{ m}^3/\text{s}$$

Voor het vinden van een oplossing is een beginvoorwaarde nodig!

Verondersteld wordt dat op het tijdstip $t = 0$ de waterstand in het bekken gelijk is aan:

$$h_B(0) = 0,00 - 0,20 \text{ m}$$

Het verloop van de gezochte functie $h_B(t)$ wordt over een (niet te grote) tijdstap Δt lineair verondersteld.

Nu wordt van $t = 0$ tot $t = 1200$ s van dit verloop een eerste schatting gemaakt, waarna kan worden gecontroleerd of met de stippellijn aan (4-21) en (4-22) wordt voldaan (zie fig. 4.6.):

$$z = 0,18 \text{ m en } h = 0,20 \text{ m, } t = 1200 \text{ s en } B = 0,8 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ dus}$$

$$Q = -100 \sqrt{20 \cdot 0,18} = -190 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{instroming}) \quad \text{en}$$

$$\Delta h = \frac{190 \cdot 1200}{0,8 \cdot 10^6} \approx 0,28 \text{ m} \neq 0,20 \text{ m!}$$

Uit deze controle blijkt dat het verloop van $h_B(t)$ nog steiler zal zijn.

De volgende schatting is als stippellijn in fig. 4.7. weergegeven vanuit punt ①.

Deze schatting blijkt een wat te steil verloop te geven. De derde schatting is de getrokken lijn; dit verloop blijkt te voldoen.

Zoals in fig. 4.7. te zien is kan vervolgens het verloop van $h_B(t)$ over de volgende tijdstap op dezelfde wijze worden berekend.

In de volgende tabel zijn de verschillende waarden behorende bij het verloop van $h_B(t)$ van $t = 0$ tot $t = 3600$ s (getrokken lijn vanuit ①) verzameld:

tijdstap	$z_{\text{gem.}}$	Q	Δh
0 - 1200 s	0,15 m	173 m ³ /s	0,26 m
1200 - 2400 s	0,09 m	134 m ³ /s	0,20 m
2400 - 3600 s	0,07 m	118 m ³ /s	0,18 m

De beginvoorwaarde:

Zoals gezegd moet een waarde voor $h_B(t)$ bekend zijn op het tijdstip waarop met de berekening wordt begonnen.

Vooraf bij getijbewegingen is een dergelijke waarde in het algemeen niet gegeven, vandaar dat men dan voor de beginvoorwaarde een schatting maakt.

Bij het hier gestelde probleem blijkt na een zekere tijd de invloed van de beginvoorwaarde niet meer merkbaar.

Dit feit blijkt reeds uit het verloop van $h_B(t)$. Als het verloop van $h_A(t)$ ook na $t = 3600$ s lineair zou blijven, dan zou $h_B(t)$ evenwijdig met deze $h_A(t)$ gaan lopen.

Men kan een andere beginvoorwaarde kiezen en daarvoor de berekening uitvoeren. Men zal dan zien dat de gevonden oplossingen na een zekere tijd gaan samenvallen.

In fig. 4.7. is voor twee andere beginvoorwaarden ② en ③ de aanzet voor een dergelijke berekening gegeven. De bijbehorende waarden zijn:

begin-voorwaarde	$h_B(0)$	tijdstap	$z_{\text{gem.}}$	Q	Δh
②	- 0,40 m	0 - 1200 s	0,30 m	245 m ³ /s	0,37 m
③	- 0,60 m	0 - 1200 s	0,46 m	304 m ³ /s	0,45 m

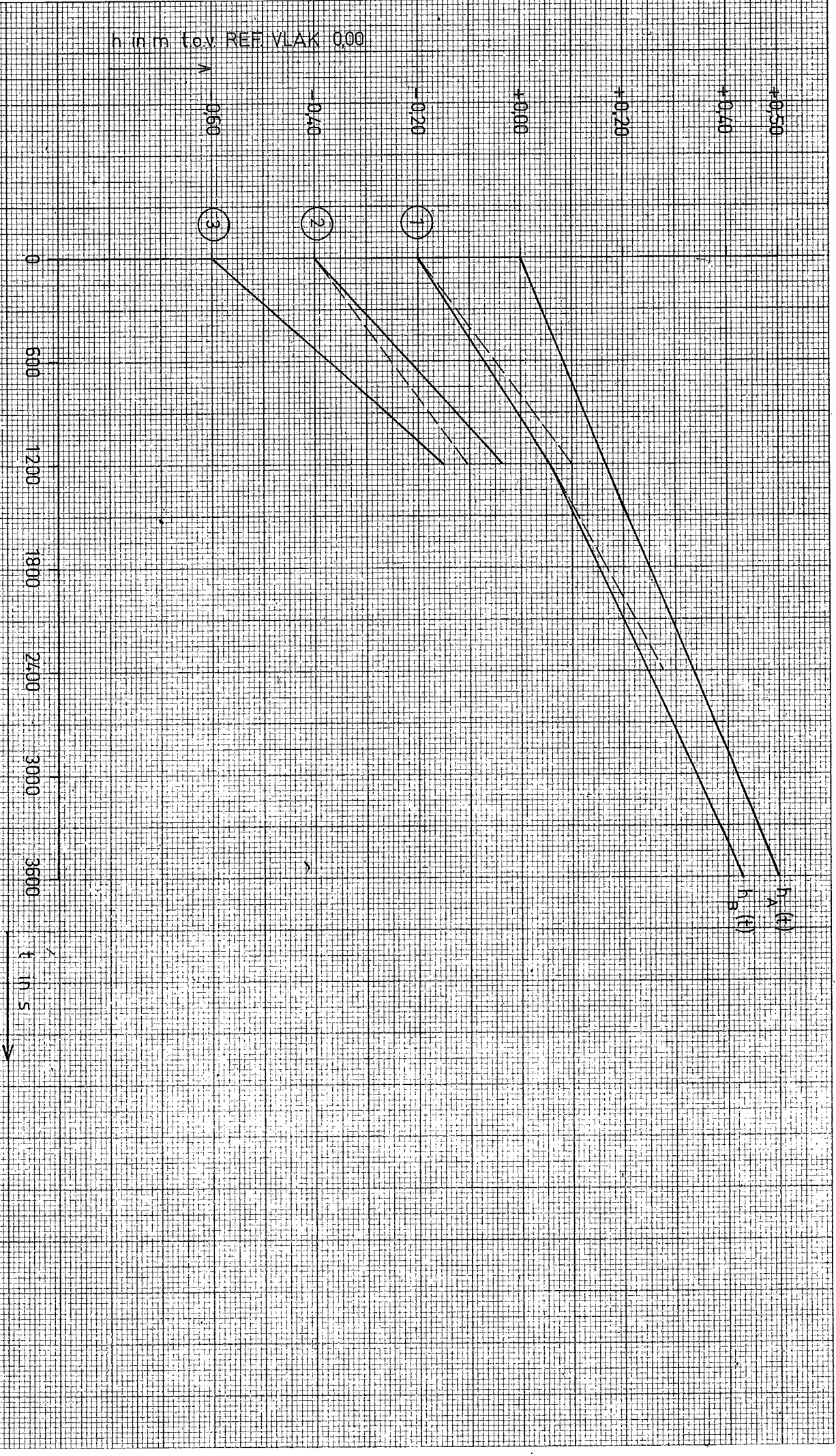
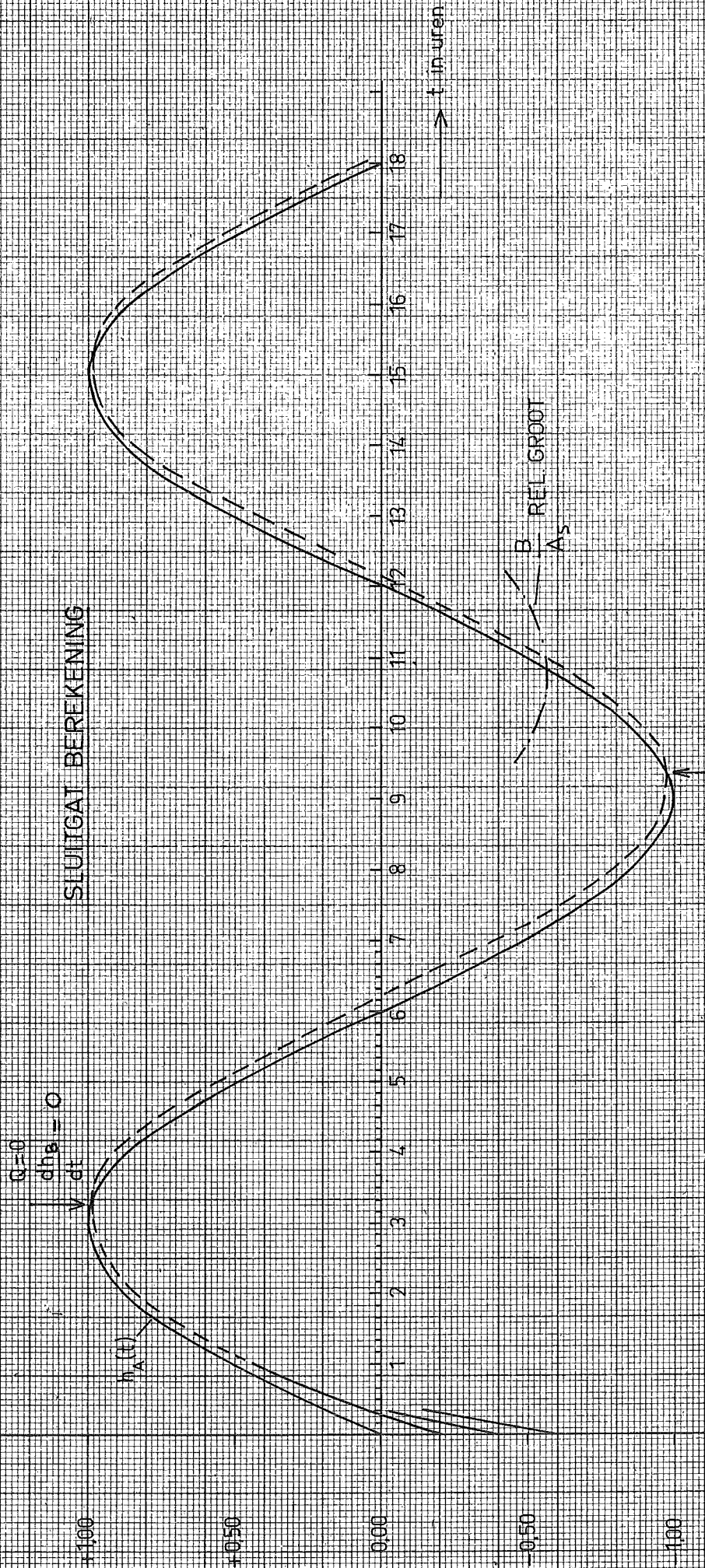


FIG. 4.7

In fig. 4.8. is weergegeven wat het resultaat zijn zal van een volledig uitgevoerde berekening voor het voorbeeld. De resultaten uit fig. 4.7. zijn ingetekend. Het verdere verloop van de functie $h_B(t)$ is gestippeld, terwijl i.v.m. het tekenen de verschillen $|h_B - h_A|$ iets zijn overdreven.

- Opm. 1. Naarmate B groter is en/of A_s kleiner is zal de functie $h_B(t)$ meer van $h_A(t)$ verschillen (zie aangegeven stukje streep-stiplijn).
2. Op het tijdstip dat de beide functies elkaar snijden is:
 $h_A - h_B = 0$, $Q = 0$ en dus $\frac{dh_B}{dt} = 0$, dus h_B extreem.
3. In de praktijk kunnen zich ondermeer de volgende complicaties voordoen:
- tijdelijk "volkomen overlaat-situaties";
 - verschillende sluitgaten o.d. bij eenzelfde bekken;
 - bij gevallen ad. b.: geheel droogvallende drempel;
 - de kombergingsoppervlakte B niet konstant : $B(h) \rightarrow B(t)$.
4. Bij de Vakgroep Vloeistofmechanica is (t.b.v. afstudeerontwerpen e.d.) een ontwerpgrafiek beschikbaar, waarmee de maximale snelheden in een te ontwerpen sluitgat kunnen worden geschat. Deze ontwerpgrafiek kan juist in het ontwerp-stadium een belangrijke tijdsbesparing geven.
- Voorts zijn computerprogramma's beschikbaar:
- voor gevallen, waarin de grafiek niet bruikbaar is;
 - voor het uitvoeren van enkele controle-berekeningen, teneinde de nauwkeurigheid van de m.b.v. de ontwerpgrafiek gevonden waarden vast te stellen.
-

SLIJTGAT BEREKENING



VERSCHILLEN $\frac{B}{A_s}$ ZIJN TE GROOT WEERGEGEVEN II

zie
 FIG.
 4.7

FIG. 4.8

4.4. EEN BENADERINGSMETHODE VOOR HOOGWATERGOLVEN

4.4.1. Het karakter van hoogwatergolven

De afvoer van een rivier buiten het getij-gebied zal zich steeds voordoen als een zeer langzaam verlopende golfbeweging. In bepaalde periodes zijn door een tijdelijk verhoogde afvoer (door plotseling invallende dooi of door zware regenval) hierop z.g. hoogwatergolven gesuperponeerd. Deze lange golven hebben een opvallend karakter. Op de autografie "Hoogwater Voorjaar 1970" is het verloop van de waterstanden in de tijd aangegeven voor verschillende plaatsen langs de Rijn en de Waal. Minder lange golven, die zich tegelijkertijd kunnen voordoen zoals de getij-beweging o.d., blijven in het volgende buiten beschouwing.

In deze paragraaf wordt de aandacht gericht op een type golven waarbij naast de berging vooral de weerstand een belangrijke rol speelt. Opgemerkt wordt dat het meestal bijzonder moeilijk is om het grillige verloop van een rivierbed te vangen in een één-dimensionaal mathematisch model. Dit is duidelijk als men denkt aan uiterwaarden (met wegen en begroeiing), bochten e.d. Het is voor het beschrijven van het karakter van hoogwatergolven zinvol om aansluitend op de vorige hoofdstukken te werken met een één-dimensionaal model.

We beschouwen een hellende bak (zie fig. 4.9.), waarin zich een hoogwatergolf voortplant en waarvan $b \neq b_s$ is.

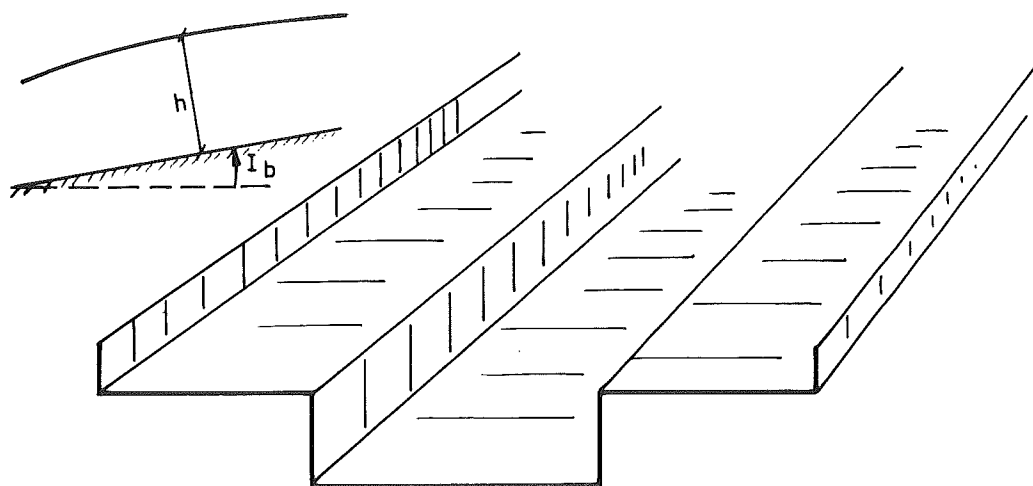
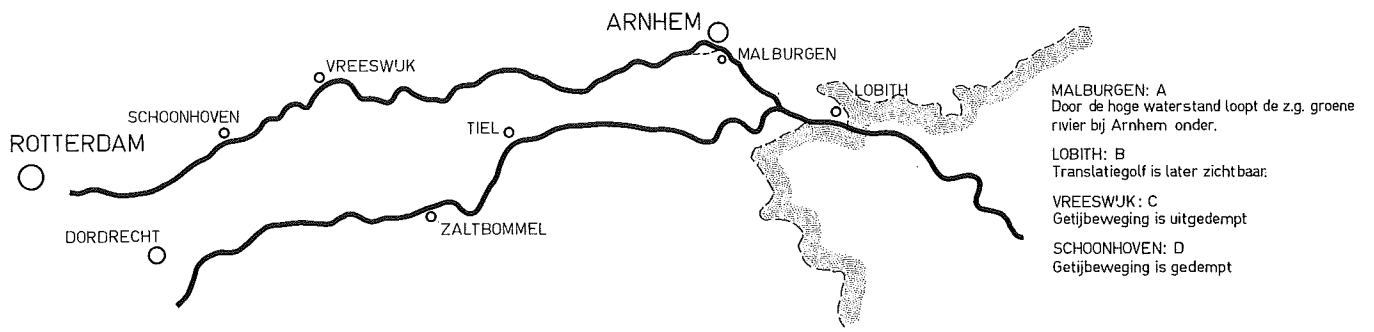
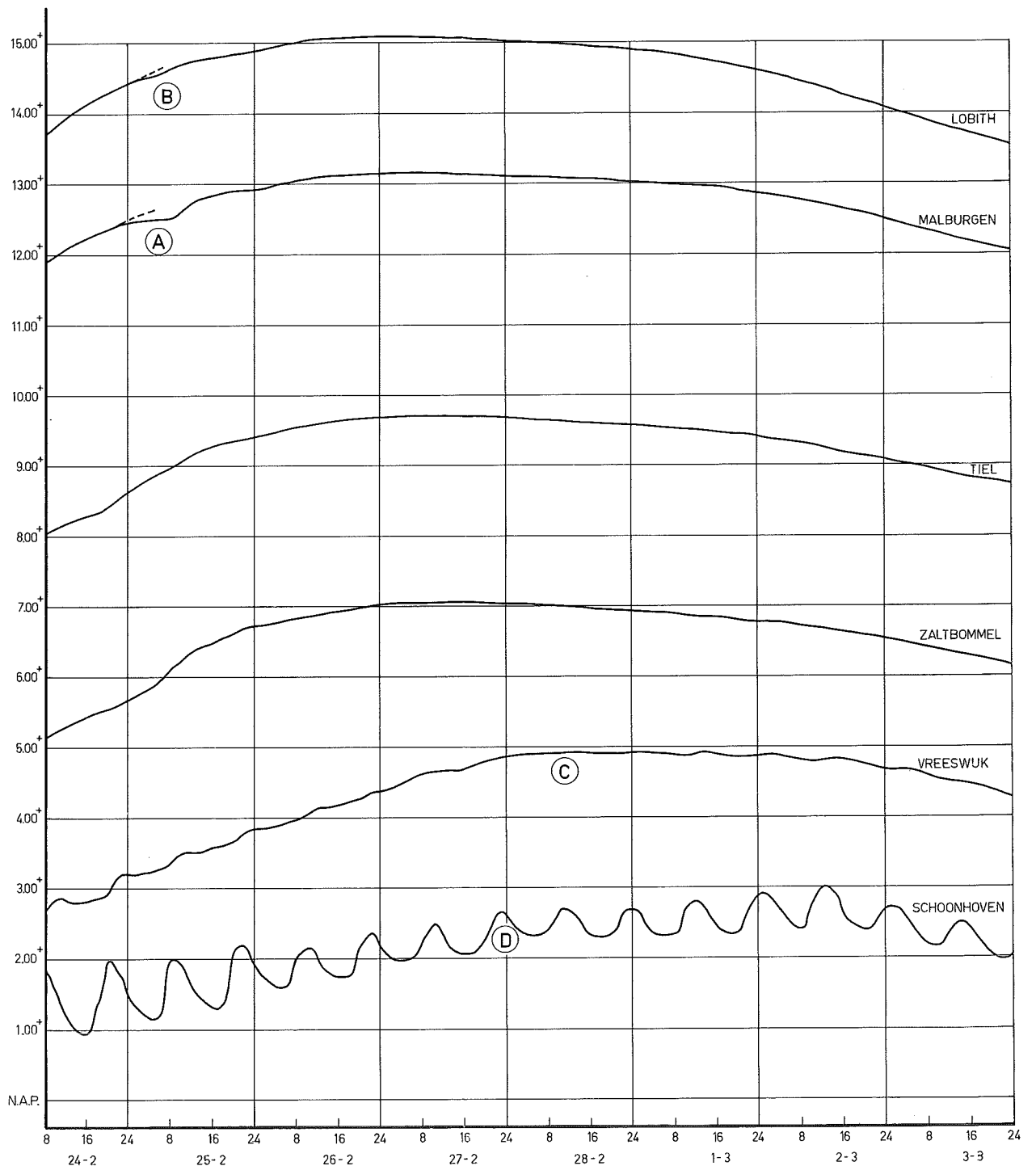


fig. 4.9.



HOOGWATER VOORJAAR 1970



Zoals in hoofdstuk 2 is afgeleid kan de voortplanting van een lange golf worden beschreven met de volgende vergelijkingen:

$$(2-17) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - I_b - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R}$$

$$(2-11) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Voor de veronderstellingen, die daarbij zijn gemaakt, wordt verwezen naar hoofdstuk 2.

Het bijzondere karakter van hoogwatergolven kan het best worden gedemonstreerd door voor enkele termen van de bovenstaande vergelijkingen een paar getalwaarden te geven.

Tijdens de voortplanting van een hoogwatergolf op een rivier zoals de Rijn zullen de hierna te noemen grootheden variëren. Het is zinvol om de orde van grootte zo goed mogelijk aan te geven en daarmee een grootste waarde voor elk van de termen uit de vergelijking (2.17) te bepalen.

Een vrij grote waarde voor de gem. snelheid is $v = 1,50$ m/s.

De golflengte van een hoogwatergolf blijkt zeer groot te zijn, minstens 10^5 m. De helling van de waterspiegel t.o.v. de bodem is erg klein; bij een veronderstelde waterstandsverhoging van 1,00 m is een grote waarde bv:

$$\frac{\partial h}{\partial s} \approx \frac{1}{0,5 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-5}$$

Een grootste waarde voor de versnelling kan worden geschat door te veronderstellen dat de gem. snelheid in één dag toeneemt van $v = 1,00$ m/s tot $v = 1,50$ m/s (hetgeen veel blijkt te zijn):

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{0,50}{24 \cdot 3600} \approx 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2.$$

We veronderstellen vervolgens dat

$$C = 50 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s},$$

$$R = h = 5 \text{ m en}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

Een orde van grootte voor de term I_b kan worden bepaald door te veronderstellen dat de stromingstoestand vóór dat de hoogwatergolf zich voordoet eenparig is.

We stellen I_b gelijk aan de waarde van de weerstandsterm, terwijl we de bovengenoemde snelheid $v = 1$ m/s kiezen:

$$\frac{v^2}{C^2 R} = \frac{1}{2500 \cdot 5} \approx 10^{-4}$$

Dus dan vinden we $I_b \approx 10^{-4}$

We vinden nu de volgende waarden voor elk van de termen van vergelijking (2-17) afzonderlijk:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial s} \approx 0,2 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t} \approx 0,5 \cdot 10^{-6} \\ I_b \approx 10^{-4} \\ \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} \approx 2 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \text{ "schattingen" voor de termen in de bewegingvergelijking}$$

Zoals ook uit het bovenstaande blijkt overheerst bij hoogwatergolven de invloed van de weerstand. De traagheidsterm blijkt erg klein te zijn t.o.v. de overige termen in de vergelijking.

In normale gevallen kunnen we bij hoogwatergolven deze traagheidsterm, dan ook verwaarlozen, waardoor een veel eenvoudiger benadering mogelijk wordt.

Het is uiteraard mogelijk om de invloed van de traagheidsterm voor een bepaald probleem te controleren.

In plaats van de vergelijkingen (2-17) en (2-11) werken we verder met de volgende vergelijkingen:

$$(4-23) \quad \text{bewegingsvergelijking} \quad \frac{\partial h}{\partial s} + I_b = - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R}$$

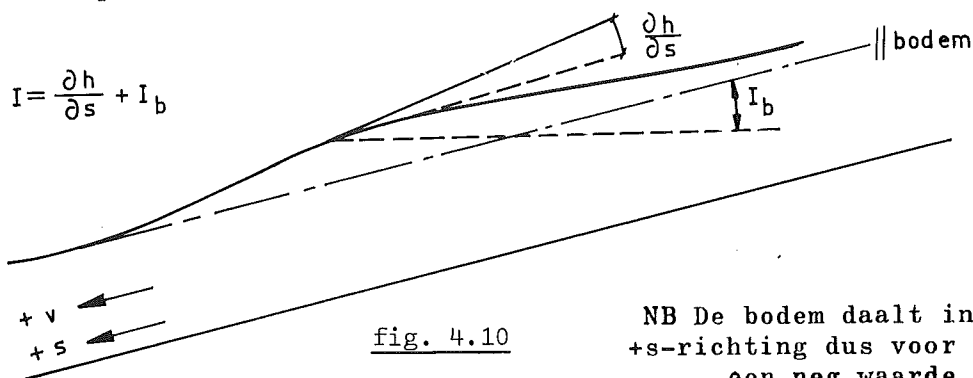
$$(4-24) \quad \text{continuïteitsvergelijking} \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Voor kleine hoeken I_b geldt $\sin I_b = \text{tg } I_b = I_b$ zodat we dan kunnen stellen $\frac{\partial h}{\partial s} + I_b =$ de helling van de waterspiegel t.o.v. een horizontaal referentie-vlak. Deze helling wordt wel I genoemd.

$$I = \frac{\partial h}{\partial s} + I_b$$

Opm: Dan staat I dus niet voor de helling van het energie-niveau maar voor de helling van de waterspiegel (pn) t.o.v. de horizontaal.

De richting van de stroomsnelheid v is bij dit type lange golven steeds dezelfde. We kunnen afspreken dat we de positieve s -as in de richting van het debiet Q kiezen. Volgens een eerder gemaakte tekenafspraken is Q dan positief, waardoor de modulusstrepen kunnen vervallen.



NB De bodem daalt in de +s-richting dus voor I_b een neg.waarde nemen.

We vinden dan een bewegingsvergelijking waarin natuurlijk zondermeer de wet van de Chézy is te herkennen:

$$I = - \frac{Q^2}{C^2 A^2 R} \quad \text{of} \quad Q^2 = - C^2 A^2 R I$$

Na substitueren van $A = b_s h$ en $R = h$ volgt uit (4-23) een veel gebruikte vergelijking:

$$(4-25) \quad Q = - C b_s h^{3/2} I^{1/2}$$

De helling van de waterspiegel t.o.v. de bodem $\frac{\partial h}{\partial s}$ blijkt vaak klein te zijn t.o.v. de bodemhelling $\text{tg } I_b = I_b$. Het gevolg hiervan is dat het debiet slechts in een relatief geringe mate met I varieert.

In de praktijk maakt men daar gebruik van door te veronderstellen dat het debiet Q uitsluitend afhankelijk is van h (zie verg. (4-25) met daarin $I = \text{konstant}$). Waarnemingen kunnen worden uitgezet in een Q/h -diagram (zie onder 4.4.3. fig. 4.14).

In het 5e jaar wordt door Prof. Ir. L. van Bendegom een b.o.-college f13B gegeven, waarin veel informatie over hoogwatergolven (hoogwaterbeheersing) wordt gegeven.

4.4.2. De voortplanting van een hoogwatergolf

Een hoogwatergolf blijkt tijdens het voortplanten te worden vervormd. Bij een golf, die aan vervorming onderhevig is, is het niet zonder meer mogelijk om van een voortplantingssnelheid te spreken. Men moet daarbij een of andere afspraak (definitie) maken.

Hierna zal een eenvoudige uitdrukking voor de voortplantingsnelheid worden gevonden, waarbij een duidelijke interpretatie mogelijk is.

Gezocht worden oplossingen voor de vergelijkingen (4-23) en (4-24). Bij een hoogwatergolf is het teken van Q steeds hetzelfde; verder is

$$A = b_s h \text{ en (brede rivieren) } R = h,$$

Q is pos.

zodat we voor (4-23) kunnen schrijven:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -I_b - \frac{Q^2}{c^2 b_s^2 h^3} \quad (4-26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4-24)$$

Als we de vergelijking (4-26) naar t differentieren, krijgen we:

$$(4-27) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = - \frac{2Q}{c^2 b_s^2 h^3} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{3Q^2}{c^2 b_s^2 h^4} \frac{\partial h}{\partial t}$$

De continuïteitsvergelijking (4-24) naar s differentieren geeft:

$$(4-28) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = - \frac{1}{b} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$$

Door nu (4-28) en (4-24) in (4-27) te substitueren kan men h elimineren. Men vindt voor (4-27) dan de volgende D.V.:

$$(4-29) \quad \frac{1}{b} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} - \frac{2Q}{c^2 b_s^2 h^3} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{3Q^2}{c^2 b_s^2 h^4 b} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Stelt men nu, zoals in 4.4.1. ook reeds werd besproken, dat

$$(4-30) \quad \boxed{\frac{\partial h}{\partial s} \ll I_b}$$

Het gevolg hiervan is dat in (4-26) $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$ gesteld wordt, waardoor in **verg.** (4-29) de term

$$\frac{1}{b} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$$

verdwijnt (d.w.z. verwaarloosd wordt t.o.v. de overige termen).

Het aldus geformuleerde probleem wordt beschreven door een D.V. die na

deling door $\frac{Q}{c^2 \frac{b_s^2}{b^2} h^3}$ luidt:

(4-31)

$$2 \frac{\partial Q}{\partial t} + 3 \frac{Q}{b h} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Voor deze partiële differentiaal-vergelijking (eerste orde, quasi lineair zie b.v. Handboek der Wiskunde) is een oplossing mogelijk als men stelt:

$$\frac{3}{2} \frac{Q}{b h} = \frac{ds}{dt} \quad \text{of wel:}$$

(4-32)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2} \frac{b_s}{b} v$$

Als aan (4-32) wordt voldaan dan wordt verg. (4-31) vervangen door:

$$(4-33) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \text{of wel} \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Q = konstant

Opm: Met behulp van (4-32) en (4-33) kan voor (4-31) op eenvoudige wijze een oplossing worden gevonden. Indien men voldoet aan (4-32) (deze voorwaarde wordt een karakteristieke richting in een s/t - diagram (zie fig. 4.11.) genoemd) dan geldt langs deze richting (4-33). Het bovenstaande is een toepassing van het principe "integratie m.b.v. karakteristieken" dat later in het college uitvoerig wordt behandeld en toegepast voor een stelsel van twee meer algemeen geldende D.V.n.

van A naar B langs
karakteristieke richting

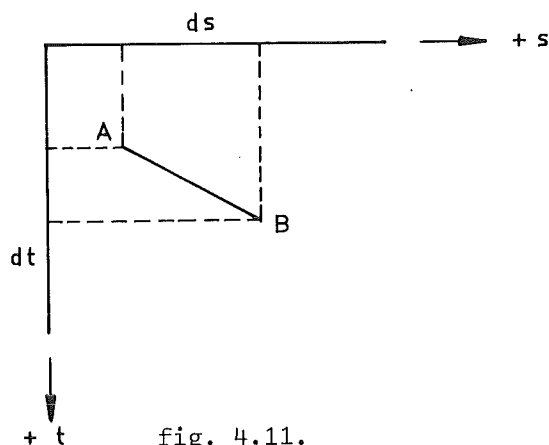


fig. 4.11.

Als de term $\frac{\partial h}{\partial s}$ in (4-26) verwaarloosd wordt t.o.v. I_b dan vinden we een vergelijking, waaruit volgt:

$$Q = - C b_s h^{3/2} I_b^{1/2}$$

Hieruit volgt als C , b_s en I_b konstant worden verondersteld:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = - C b_s I_b^{1/2} \frac{3}{2} h^{1/2} \frac{\partial h}{\partial s}$$

Omdat de gemiddelde snelheid in dit geval gelijk is aan

$$v = C I_b^{1/2} h^{1/2} \quad \text{is dus}$$

$$(4-34) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{3}{2} v b_s \frac{\partial h}{\partial s}$$

Als we nu (4-34) substitueren in de continuïteitsvergelijking (4-24), vinden we na delen door b de volgende D.V. :

$$(4-35) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{3}{2} v \frac{b_s}{b} \frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

Deze vergelijking komt overeen met vergelijking (4-31), alleen is nu de afhankelijk variabele h i.p.v. Q .

Ook nu is een eenvoudige oplossing mogelijk :

$$\underline{\text{indien:}} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2} v \frac{b_s}{b} \quad (4-32)$$

$$(4-36) \quad \underline{\text{dan}} \quad : \quad \frac{dh}{dt} = 0$$

Langs een karakteristieke richting (4-32) geldt dus zowel $Q = \text{konstant}$ als $h = \text{konstant}$. We kunnen $\frac{ds}{dt}$ volgens (4-32) de voortplantingssnelheid van een hoogwatergolf noemen.

Opm:1. Zoals later bij de behandeling van de methode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" nog zal worden besproken, kan men ook oplossingen geven indien het rechter lid van de vergelijking (4-31) of (4-35) niet nul zou zijn.

2. In het college b 74 worden verschillende typen lange golven onderling onderscheiden door uit te gaan van de algemeen geldende D.V.n. Daarbij blijkt dat de hierboven besproken behandeling kan worden geïnterpreteerd als een z.g. 0^e orde benadering voor een bijzonder lange hoogwatergolf (stemt overeen met de veronderstelling (4-30)). Indien een meer systematische beschouwing wordt opgezet, dan blijkt dat de volgende parameter voldoende groot moet zijn:

$$\frac{I_b}{h_{\text{gem.}}/\lambda} \quad \text{b.v. gelijk 10 of meer.}$$

Wordt deze parameter te klein b.v. ongeveer 1 of minder, dan is de veronderstelling (4-30) niet geoorloofd.

3. Indien men de verwaarlozing als gevolg van (4-30) niet mag invoeren, dan kan de hiervoor gevonden voortplantingssnelheid worden geïnterpreteerd als de snelheid waarmee de top (raaklijn // bodem) zich voortplant.

Als we even terugkeren naar de uitdrukking (4-25) dan kunnen we schrijven:

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = \frac{3}{2} C b_s h^{1/2} I^{1/2} = \frac{3}{2} b_s v.$$

Met de uitdrukking (4-32) voor de voortplantingssnelheid c kan dus worden gesteld:

$$(4-37) \quad \frac{\partial Q}{\partial h} = b c$$

Of als verondersteld wordt dat Q alleen een functie van h is $\frac{dQ}{dh} = b c$.

Bij het differentieren is de coëff. C konstant verondersteld, terwijl deze coefficient toch ook een functie van h is (denk b.v. aan de uitdrukking voor C volgens White-Colebrook, college b 72).

Opm: In de praktijk wordt bij rivieren gewerkt met een uitdrukking volgens Manning: $C = K \sqrt{h}$. In deze uitdrukking is K een faktor voor de relatieve bodemruwheid (zie college f8 / f10).

Indien men met de variatie van de coëff. C ook rekening houdt, dan blijkt dat verdisconteerd te kunnen worden in een geringe wijziging van de faktor $\frac{3}{2}$.

De uitdrukking voor de voortplantingssnelheid van een hoogwatergolf, waarbij naast de berging de weerstand een sterk overheersende rol speelt, wordt dus:

$$(4-38) \quad c = \lambda \frac{b_s}{b} v \quad \text{waarin } \lambda = 1,5 \text{ à } 1,7$$

geldig als : $\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} \ll I_b$ en $\frac{\partial h}{\partial s} \ll I_b$, en voorts aan alle voor verg. (2-17) gemaakte veronderstellingen is voldaan.

Uit deze uitdrukking blijkt dat de voortplantingssnelheid van dit type lange ^lgöven ook kleiner kan worden dan de snelheid van de waterdeeltjes v . Dit is mogelijk als $b > 1,5 b_s$.

Voorbeeld teneinde deze opmerking te illustreren: (zie fig. 4.12)

Een bovenrivier wordt geschematiseerd tot drie parallelle takken 1,2 en 3. Het totale debiet Q is gelijk aan de som van de debieten door de drie takken, terwijl het verhang I gelijk is :

$$Q = C_1 b_{s_1} h_1^{3/2} I^{1/2} + C_2 b_{s_2} h_2^{3/2} I^{1/2} + C_3 b_{s_3} h_3^{3/2} I^{1/2}$$

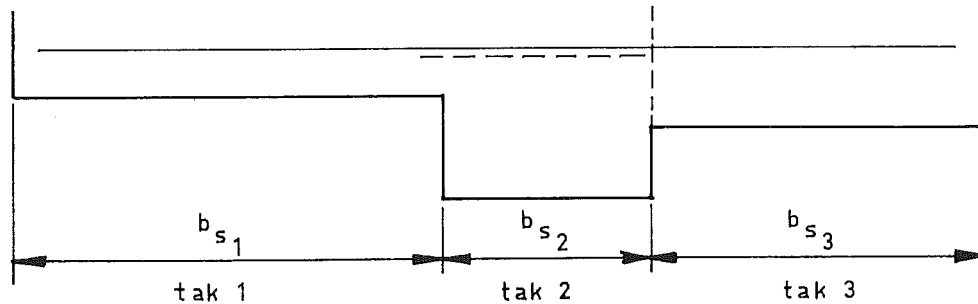


fig. 4.12

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{3}{2} (b_{s_1} v_1 + b_{s_2} v_2 + b_{s_3} v_3) , \text{ zodat we voor (4-37)}$$

vinden:

$$c = \frac{1}{b} \frac{dQ}{dh} = \frac{3}{2b} (b_{s_1} v_1 + b_{s_2} v_2 + b_{s_3} v_3)$$

Stel nu als getallen-voorbeeld:

	tak 1	tak 2	tak 3
b in m	450	150	300
v in m/s	0,50	1,00	0 -- → niet stroomvoerend

Dan
$$c = \frac{3}{2} \frac{1}{900} (450 \cdot 0,50 + 150 \cdot 1,00 + 0) = \underline{0,63 \text{ m/s}}$$

Indien we veronderstellen dat in vak 3 de gem. snelheid ook 0,50 m/s zou zijn, dan vinden we: $c = \underline{0,88 \text{ m/s}}$.

Indien de rivier slechts zou bestaan uit het vak 2 (de hoofdgeul) dan zou gevonden worden: $c = \underline{1,50 \text{ m/s}}$.

Voor de voortplantingssnelheid is de verhouding tussen de bergende breedte en de stroomvoerende breedte een belangrijke faktor, zoals uit deze globale beschouwing moge blijken.

4.4.3. Berekeningen betreffende hoogwatergolven

In het voorgaande werd $\frac{\partial h}{\partial s}$ verwaarloosd t.o.v. I_b , dus gesteld werd
$$\frac{\partial h}{\partial s} = 0.$$

Doet men dit niet dan blijft in de D.V. (4-29) de term $\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$ staan.

Indien deze differentiaal-vergelijking wordt gelineariseerd dan blijkt een praktisch bruikbare analytische oplossing mogelijk, waarover hierna nog enige opmerkingen volgen.

Tegenwoordig bestaan er mogelijkheden om m.b.v. numerieke benaderingsmethoden in beginsel voor alle niet lineaire differentiaal-vergelijkingen oplossingen te geven.

Het is van belang om na te gaan welke nauwkeurigheid in een bepaald geval nodig is. Een systematische aanpak is mogelijk indien de functies h en Q worden opgevat als een reeksontwikkeling naar een kleine parameter. (college b 74 : "asymptotische methoden in de vloeistofmechanica").

In dit college b73A wordt volstaan met het bespreken van een eerste orde benadering van het verschijnsel, die leidt tot een differentiaal-vergelijking, die overeenkomst vertoont verg. (4-29).

Hierbij worden de grootheden Q , h en I opgevat als de som van een gemiddelde waarde en een relatief klein variërend gedeelte:

$$\begin{aligned} Q &= \bar{Q} + q \\ h &= \bar{h} + \eta \\ I &= I_b + i \end{aligned}$$

Hierin zijn q , η en i klein verondersteld t.o.v. resp. \bar{Q} , \bar{h} en I_b .

De grootheden \bar{Q} en \bar{h} zijn konstant in de tijd.

We hebben te maken met een functie $\bar{Q} = f(\bar{h}, I_b)$, waarop een verstoring gesuperponeerd wordt, zodat:

$$\bar{Q} + q = f(\bar{h} + \eta, I_b + i)$$

Een reeksontwikkeling volgens Taylor voor een functie van twee veranderlijken krijgt in het algemeen de volgende gedaante:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \dots$$

We hebben de variabelen h en I met resp. de kleine verandering (stap)

$$\Delta h = \eta \quad \text{en} \quad \Delta I = i$$

Een dergelijke reeks opgesteld voor Q en beëindigd ná de termen met de eerste afgeleiden wordt dan:

$$\bar{Q} + q = \bar{Q} + \eta \left. \frac{\partial Q}{\partial h} \right|_{\substack{h=\bar{h} \\ I=I_b}} + i \left. \frac{\partial Q}{\partial I} \right|_{\substack{h=\bar{h} \\ I=I_b}} \quad \text{of}$$

$$(4-39) \quad \boxed{q = \eta \frac{\partial Q}{\partial h} + i \frac{\partial Q}{\partial I}} \quad \text{waarin } i = \frac{\partial h}{\partial s}$$

Voor de continuïteitsvergelijking vinden we

$$(4-40) \quad \frac{\partial \bar{Q}}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial s} = -b \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$$

Nu is per definitie $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial s} = 0$ en $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0$ dus gaat (4-40) over in:

$$(4-41) \quad \boxed{\frac{\partial q}{\partial s} = -b \frac{\partial \eta}{\partial t}}$$

Door (4-39) naar s te differentieren (waarbij $\frac{\partial Q}{\partial h}$ en $\frac{\partial Q}{\partial I}$ konstant worden gesteld) en $\frac{\partial q}{\partial s}$ in (4-41) te substitueren kan men q elimineren:

$$\frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \frac{\partial Q}{\partial I} = -b \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Volgens (4-37) kunnen we $\frac{\partial Q}{\partial h} = bc$ stellen.

Uit (4-25) volgt ook dat $\frac{\partial Q}{\partial I} = \frac{1}{2} \frac{Q}{I}$, zodat men uiteindelijk de volgende D.V. vindt:

$$(4-42) \quad c \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{Q}{b I} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Deze differentiaal-vergelijking is opgesteld door prof. dr. ir. J.C. Schönfeld in een artikel in "De Ingenieur" nr. 4 1948.

Deze differentiaal-vergelijking in h heeft dezelfde gedaante als de differentiaal-vergelijking (4-29) in Q . In het bovengenoemde artikel wordt een analytische oplossing gegeven, waarbij de golven de vorm van een kansverdelingsfunctie volgens Gauss hebben.

Opm. Voor de D.V. blijken ook oplossingen in de vorm van sinusfuncties te bestaan, zodat een benadering zoals later bij de z.g. Harmonische Methode wordt besproken mogelijk is. In dit geval zijn echter deze oplossingen toch niet geschikt omdat men voor een juiste beschrijving teveel harmonische componenten zou moeten meenemen, hetgeen bij niet lineaire vergelijkingen op praktische bezwaren stuit (zie "Principe Meervoudige Harmonische Methode").

Tegenwoordig bestaan er natuurlijk ook mogelijkheden voor een numerieke benadering van de hier beschouwde problemen. Hierop wordt nu niet verder ingegaan. Wel worden nog enkele opmerkingen gemaakt, die na het voorgaande mogelijk zijn.

Als gevolg van de reeksontwikkeling, blijkt uit (4-39):

- de eerste term in het rechter lid geeft de vermeerdering van Q aan als gevolg van de vergroting van de waterstand;
- de tweede term geeft de vermeerdering van Q als gevolg van de toename van het verhang.

Uit onderstaande fig. 4.13 blijkt nu:

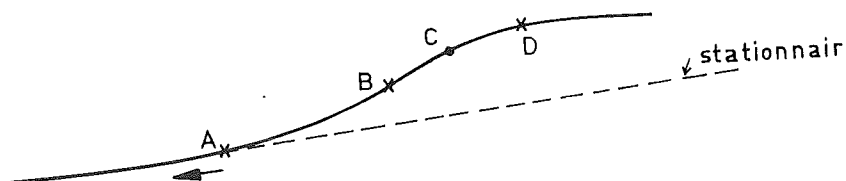
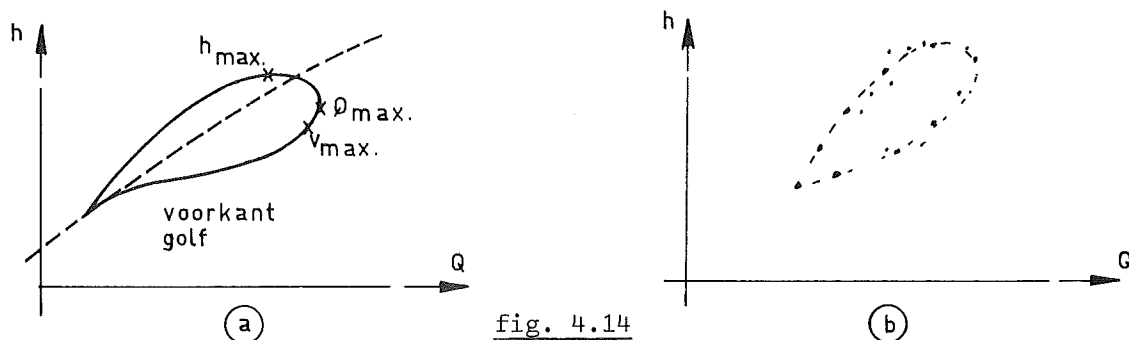


fig. 4.13.

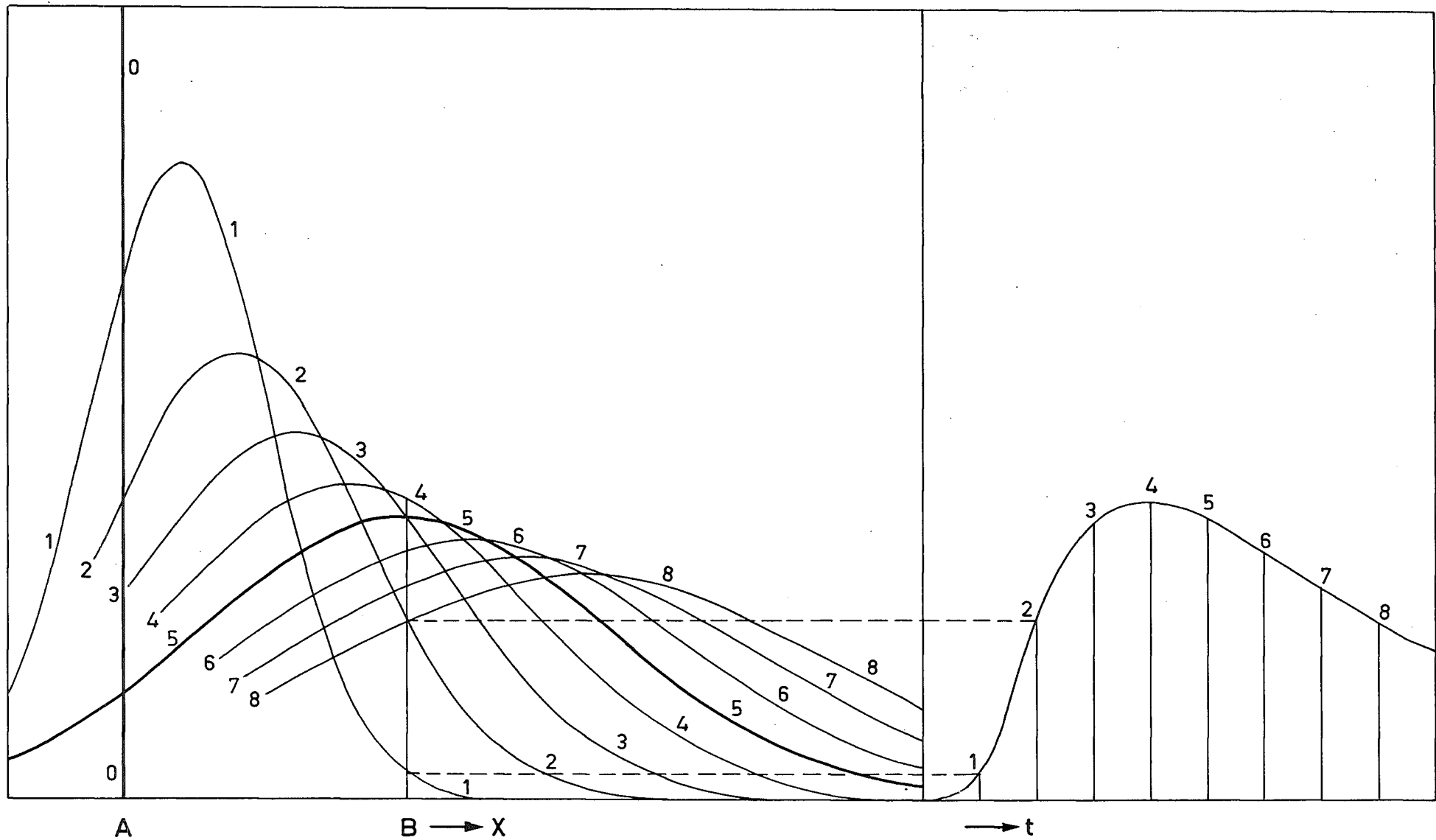
tussen A en B : zowel de waterstand als het verhang nemen toe;
 tussen B (een buigpunt) en het punt D waarin h maximaal is:
 de waterstand blijft stijgen, doch het verhang wordt weer kleiner;
 de beide termen in het rechter lid van (4-39) werken elkaar tegen.

Het punt waarvoor het debiet Q maximaal is zal dus ergens tussen de punten B en D in een punt C liggen. In de buurt van punt C verandert de waarde van Q nauwelijks, terwijl h nog wel stijgende is. Hierdoor zal het punt waarvoor v maximaal is even links van C zijn gelegen. Het gevolg van een en ander is dat men bij metingen, die worden uitgezet in een Q/h -diagram een functie met de vorm van fig. 4.14. (a) zal vinden. De verschillende gemeten punten zullen "een puntenwolk" vormen (zie fig. 4.14), wat in dit geval dus niet uitsluitend door de meetnauwkeurigheid of het stochastisch karakter van het verschijnsel wordt veroorzaakt.



Autografie "asymmetrisch peilschaalkromme":

Op deze autografie (ontleend aan het bovengenoemde artikel) geeft aan: dat ook als wordt uitgegaan van een golf, die symmetrisch blijft, de geregistreerde watersstanden op een bepaalde plaats een asymmetrische vorm te zien zullen geven. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat de hoogte van de golf tijdens het voortplanten geringer wordt (top-vervlakking).



Het ontstaan van een asymmetrische peilschaalkromme door de verzwakking van een symmetrische golf.

Links: de golf op een bepaald riviervak, op opeenvolgende tijdstippen, 0, 1, 2, enz.

Rechts: Het verloop van de waterstand met de tijd (peilschaalkromme), ter plaatse B.

TECHN.HOGESCHOOL DELFT
 afd. Weg- en Waterbouwkunde
 Vloeistofmechanica

4.5. EEN BENADERINGSMETHODE VOOR Z.G. TRANSLATIEGOLVEN4.5.1. Het karakter van translatiegolven

In deze paragraaf 4.5. wordt aandacht besteed aan een spectaculair type "lange golven". Zoals uit de Nederlandse naam blijkt wordt bedoeld een type golven, waarvan wordt verondersteld dat deze zich onvervormd voortplanten. Hiervoor is het in de eerste plaats noodzakelijk dat de weerstand mag worden verwaarloosd. Er blijken nog andere oorzaken te zijn voor het vervormen van een golf.

Het is van belang om nu reeds vast te stellen dat "onvervormd voortplanten" een veronderstelling is, waaraan nimmer volledig wordt voldaan. Er blijken echter in de praktijk verschillende problemen te bestaan waarvoor deze veronderstelling tot een zinvolle benadering leidt.

Een voorbeeld van een dergelijk probleem kan worden omschreven m.b.v. de in fig. 4.15. weergegeven situatie.

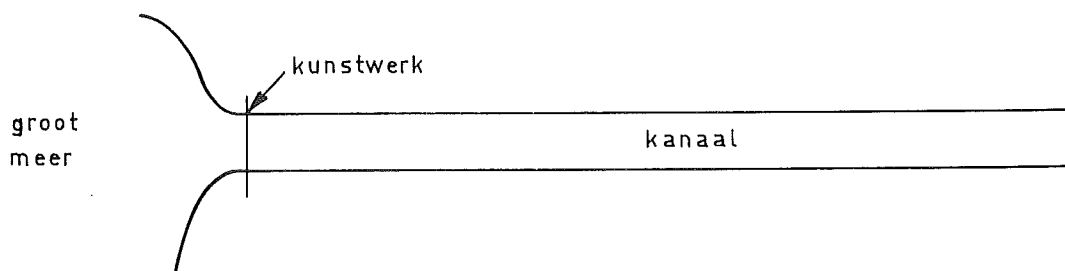


fig. 4.15

Tussen een groot meer en een kanaal bevindt zich een kunstwerk, waarmee water wordt ingelaten. In het kanaal stroomt het water met een gemiddelde snelheid v_0 .

Stel dat op een bepaald moment de oppervlakte van het beschikbare doorstromingsprofiel van het kunstwerk vrij plotseling groter wordt.

De tijd waarin dit gebeurt kan verschillend zijn, hetgeen bepalend is voor de vorm van de golf, die door de verandering ontstaat.

Voorlopig wordt ervan uitgegaan dat de verandering tot stand komt in een verwaarloosbaar korte tijd. Het front van de golf zal dan zeer steil zijn. Als nu nog wordt verondersteld dat de opening daarna niet meer verandert en dat het meer zo breed en diep is dat zich daarin geen merkbaar golfverschijnsel zal voordoen, dan krijgen we een eenvoudig voor te stellen verschijnsel (in het Engels : bore of surge).

Het front vormt een discontinue overgang tussen twee verschillende toestanden: h_0 , v_0 en $h_0 + \eta$, $v_0 + \Delta v$ (zie fig. 4.16).

De voortplantingssnelheid van alle punten van het front (onvervormd voortplantend) is gelijk c .

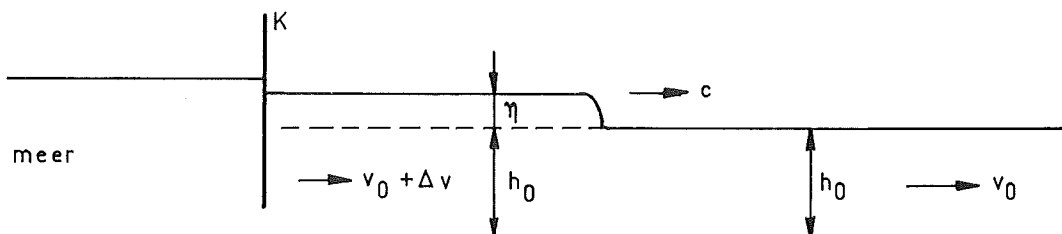


fig. 4.16

Als we vervolgens veronderstellen dat de opening na enige tijd b.v. weer verkleind wordt dan krijgen we een golf zoals in fig. 4.17 is weergegeven.

Naarmate de verandering plaats vindt in een langere tijd, zal het front van de golf minder steil verlopen.

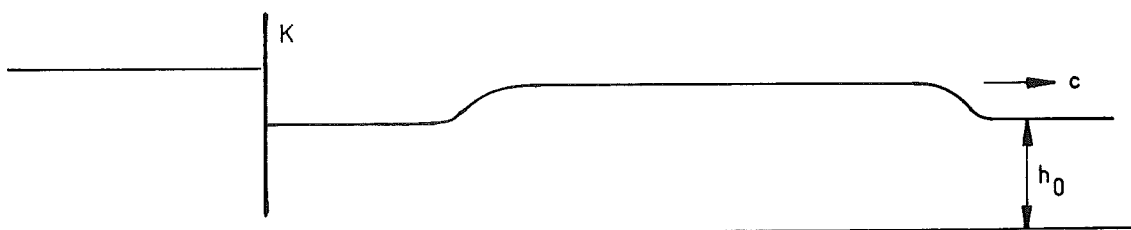


fig. 4.17

Na het voorgaande is het voor de hand liggend om ook nog even te kijken naar de gevolgen van uitsluitend een plotselinge verkleining van het doorstromingsprofiel van het kunstwerk. Uitgaande van een permanente toestand zal zich in dat geval een negatieve translatiegolf het kanaal in voortplanten (zie fig. 4.18).

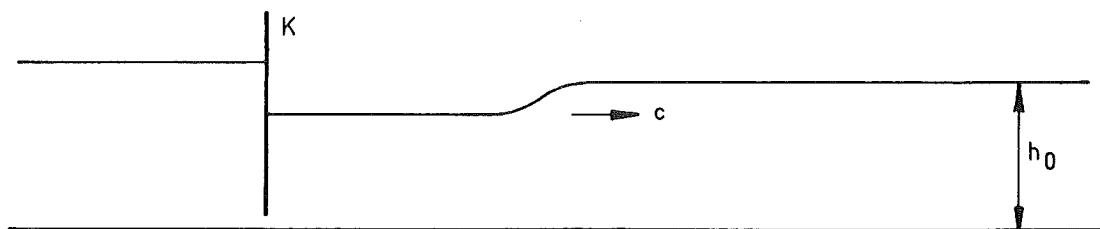


fig. 4.18

Het is vanzelfsprekend dat zich in het hierboven beschouwde kanaal-
pand ook dergelijke golven kunnen voordoen als gevolg van het manipu-
leren met een kunstwerk aan de andere zijde. Het blijkt dat de golven
zich tegen stromend water in kunnen voortplanten. Er blijkt daarbij een
grens te bestaan (de kritische snelheid, zie ook college b72).

De problemen worden gecompliceerder als blijkt dat een translatie-
golf, die eenmaal is opgewekt, zich niet alleen voortplant doch ook
zowel positief als negatief gereflecteerd kan worden.

Uit het bovenstaande moge blijken dat de hier bedoelde golven zich vaak
voordoen en bijzonder interessante problemen opleveren.

Ook voor de beschrijving van de voortplanting van translatiegolven
kan men uitgaan van de in hoofdstuk 2 afgeleide vergelijkingen.

De continuïteitsvergelijking :

$$(2-11) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Uitgaande van de bewegingsvergelijking (2-17) en de daarbij gemaakte
veronderstellingen (zie blz. 2.9.), wordt zoals steeds in deze paragraaf
de weerstand volledig verwaarloosd. Verder wordt gemakshalve de bodem
horizontaal verondersteld $I_b = 0$. De bewegingsvergelijking wordt dan:

$$(4-43) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Als nu verondersteld wordt dat b en A konstant zijn, dan zijn bovenstaande
vergelijkingen lineair.

De verg. (2-11) naar t differentieren en de verg. (4-43) naar s
differentieren geeft achtereenvolgens :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial t} + b \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{1}{g A} \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial s} = 0$$

Uit deze vergelijkingen kan b.v. Q worden geëlimineerd. Doet men dit
dan krijgt men de volgende vergelijking :

$$(4-44) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{g A}{b} \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = 0$$

Deze partiële differentiaal-vergelijking (4-44) is van het hyperbolische type en staat bekend als de golfvergelijking. Indien $\frac{gA}{b}$ een positieve konstante is, zeg c^2 , dan bestaan er analytische oplossingen voor deze D.V., waaraan in het algemeen door 2 in tegengestelde richting lopende golven wordt voldaan (zie b.v. Handboek der Wiskunde). De voortplantingssnelheid van deze golven blijkt dan gelijk aan c te zijn. In 4.5.3. zal op deze oplossingen voor (4-44) nog worden teruggekomen.

Later in het college b 73A wordt een belangrijke berekeningsmethode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" behandeld en toegepast. Daarbij zal blijken dat de in deze paragraaf 4.5. bedoelde problemen zich bijzonder goed lenen voor oplossingen volgens deze methode. In 4.5.3. zal nog nader op dit feit worden gewezen.

In deze paragraaf 4.5. wordt m.b.v. eenvoudige beschouwingen de voortplanting van translatiegolven nader geformuleerd.

4.5.2. De voortplanting van translatiegolven

Nadat in 4.3.1. verondersteld is dat de hier beschouwde golven zich onvervormd voortplanten, is de voortplantingssnelheid c van deze golven duidelijk gedefinieerd.

In de literatuur zijn voor de voortplantingssnelheid van translatiegolven op verschillende manieren uitdrukkingen afgeleid. Hierna zullen drie afleidingen worden gegeven, die elk enige specifieke informatie geven.

Beschouwd wordt steeds een golf met een vrij steil front, die zich voortplant in een prismatische open leiding met een diepte h_0 en een snelheid v_0 (in ongestoorde toestand).

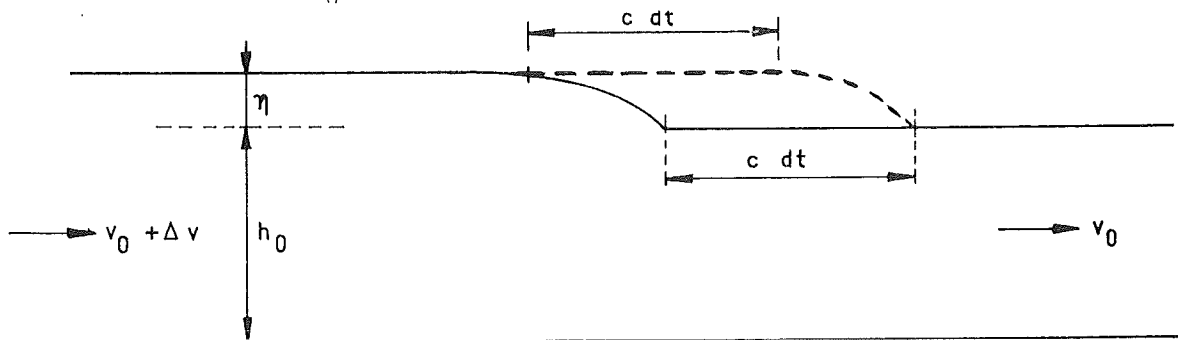


fig. 4.19

Na het passeren van het golffront is de waterstand t.o.v. de bodem gelijk aan $h = h_0 + \eta$, terwijl de gemiddelde snelheid dan gelijk is aan $v = v_0 + \Delta v$.

Als we nu een continuïteitsbeschouwing opzetten, dan is m.b.v. bovenstaande figuur gemakkelijk in te zien dat

$$Q_0 + \Delta Q = Q_0 + b c \eta.$$

Hieruit volgt :

(4-45)

$$\Delta Q = b c \eta$$

$$(v_0 + \Delta v)(h_0 + \eta) - v_0 h_0 = c \eta$$

Indien $b \neq b_s$, volgt uit (4-45) :

(4-46)

$$\Delta v = \frac{b}{b_s} \frac{\eta}{h_0 + \eta} c$$

Een impuls-balans

Bij het opstellen van een impuls-balans kan men kiezen tussen een beschouwingwijze volgens Euler en een beschouwingwijze volgens Lagrange (d.w.z. meebewegend). Hier wordt eerstgenoemde beschouwingwijze gevolgd. Hoewel de afleiding daardoor niet essentieel wordt beïnvloed, wordt gesteld

$$v_0 = 0 \quad \text{en} \quad v_0 + \Delta v = v.$$

De impuls-balans voor een vastgesteld controle-volume (zie onder 1.2.2.) (blz. 1.11) in de x-richting luidt :

$$\Sigma K_x = \iint_{\sigma} \rho v_x v_n d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{vol}} \rho v_x dV$$

We kiezen het volume dat zich bevindt tussen de raaien A en B (zie fig. 4.20). In het linker lid staan alle in de x-richting werkzame krachten:

$$\Sigma K_x = \frac{1}{2} \rho g \left[(h_0 + \eta)^2 - h_0^2 \right] b_s = \rho g \left(h_0 \eta + \frac{\eta^2}{2} \right) b_s$$

In het rechter lid staat het resulterend impulstransport door het begrenzend oppervlak σ plus de impulsstoename binnen het controle-volume.

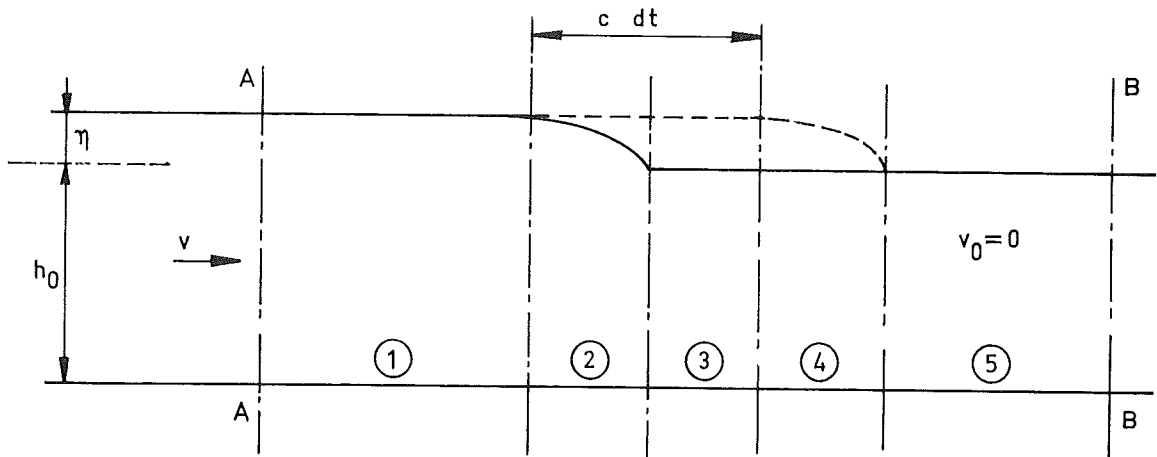


fig. 4.20

Het resulterend impulstransport kan worden bepaald door het bij B uitstromend transport te verminderen met het bij A instromend transport:

$$dt \iint_0 v_x v_n d\sigma = 0 - \underline{\underline{b_s \rho v dt (h_0 + \eta)(+v) = -\rho v (h_0 + \eta)v dt b_s}}$$

Voor het bepalen van de impulstoename binnen het beschouwde controle-volume wordt dit verdeeld in 5 delen. De totale verandering van impuls in dt is gelijk aan de som van de verschillen over dt $\left[(mv)_{na} - (mv)_{voor} \right]$ van elk der delen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(mv)}{\partial t} dt = & (m_1 v_1)_{na} - (m_1 v_1)_{voor} + (m_2 v_2)_{na} - (m_2 v_2)_{voor} + \\ & (m_3 v_3)_{na} - (m_3 v_3)_{voor} + (m_4 v_4)_{na} - (m_4 v_4)_{voor} + \\ & (m_5 v_5)_{na} - (m_5 v_5)_{voor}. \end{aligned}$$

Hierin is (zie fig. 4.20) :

$$\begin{aligned} (m_1 v_1)_{na} - (m_1 v_1)_{voor} = 0 \quad ; \quad (m_3 v_3)_{voor} = (m_4 v_4)_{voor} = 0 \quad ; \\ (m_5 v_5)_{na} = (m_5 v_5)_{voor} = 0 \quad \text{en} \quad (m_2 v_2)_{voor} = (m_4 v_4)_{na} \quad (\text{onvervormd} \\ \text{voortplanten}). \end{aligned}$$

Als daarmee rekening wordt gehouden vinden we:

$$\frac{\partial(mv)}{\partial t} dt = (m_2 v_2)_{na} + (m_3 v_3)_{na} = \underline{\underline{\rho c dt (h_0 + \eta) (+v) b_s}}$$

De impulsbalans geeft dus de volgende vergelijking : (gedeeld door b_s)

$$(4-47) \quad \rho g(h_0 \eta + \frac{\eta^2}{2}) = \rho v (c-v) (h_0 + \eta)$$

Als we nu nog rekening houden met (4-45), dan kunnen we voor de gemiddelde snelheid v substitueren :

$$(4-46) \quad v = \frac{b}{b_s} \frac{\eta}{(h_0 + \eta)} c$$

Uit deze relatie tussen v en c , waarbij verondersteld is dat $b \neq b_s$, volgt ook:

$$c - v = c \left(1 - \frac{b}{b_s} \frac{\eta}{h_0 + \eta} \right) = c \frac{b_s h_0 + (b_s - b)\eta}{b_s (h_0 + \eta)}$$

en daarna:

$$v (c - v) = c^2 \frac{b}{b_s} \frac{\eta}{(h_0 + \eta)} \frac{b_s h_0 + (b_s - b)\eta}{b_s (h_0 + \eta)}$$

Deze uitdrukking gesubstitueerd in (4-47) geeft na uitwerken de volgende vergelijking voor c^2 :

$$c^2 = \frac{b_s}{b} g h_0 \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{h_0}\right)^2}{1 + \left(1 - \frac{b}{b_s}\right) \frac{\eta}{h_0}}$$

Veronderstellen we nu weer $\frac{\eta}{h_0} \ll 1$ en dus $\frac{\eta^2}{h_0^2} \ll \frac{\eta}{h_0}$, dan wordt

de gevonden uitdrukking dus :

$$(4-47) \quad c^2 = \frac{b_s}{b} g h_0 \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}}{1 + \left(1 - \frac{b}{b_s}\right) \frac{\eta}{h_0}}$$

Veronderstellen we nu dat $b = b_s$, dan vinden we voor dat geval de volgende uitdrukking voor de voortplantingssnelheid c :

$$c = \sqrt{g h_0} \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}}$$

Door $(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0})^{\frac{1}{2}}$ te vervangen door een reeks waarvan de 2e- en hogere orde termen zijn weggelaten, kunnen we voor de laatste uitdrukking ook schrijven:

$$(4-48) \quad c = \sqrt{g h_0} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\eta}{h_0} \right) \quad (\text{voor beperkingen zie opm. 4})$$

opm. 1. In de uitdrukking (4-47) komt twee maal de verhouding $\frac{b}{b_s}$ voor. De invloed van deze verhouding in de noemer van de breuk is niet zo groot, omdat vermenigvuldigd wordt met de kleine waarde $\frac{\eta}{h_0}$. Als nu de verhouding $\frac{b}{b_s}$ niet al te groot wordt b.v. 2. à 3, dan volgt uit (4-47) als een goede benadering de volgende uitdrukking

$$(4-49) \quad c = \sqrt{\frac{b_s g h_0}{b} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right)}$$

2. In voorgaande paragrafen is reeds vaak gebruik gemaakt van de benadering :

$$c = \sqrt{g h_0}$$

We zien nu dat deze benadering voldoet voor zeer kleine waarden van de verhouding $\eta : h$ en als $b = b_s$.

3. Men kan een golf front opgebouwd denken uit een aantal stapjes Δh :

$$h = h_0 + n \Delta h \quad n = 1, 2 \text{ of } 3 \text{ (zie fig. (4-21)).}$$

De voortplantingssnelheid c is voor de drie niveau's verschillend :

$$c_3 > c_2 > c_1$$

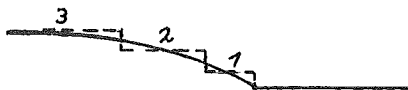


fig. 4.21.

Hiermee wordt duidelijk hoe ook zonder weerstand vervorming plaats vindt. Het front zal dan steiler worden.

4. Het is van belang dat men zich realiseert welke veronderstellingen bij bovenstaande afleiding zijn gedaan. Deze zijn:

- a. $b_s = \text{konstant}$;
- b. de golf vervormt niet tijdens het voortplanten;
- c. het verhang t.g.v. de weerstandsterm is zeer klein t.o.v. $\frac{\partial h}{\partial s}$;
- d. de bodemhelling zeer klein is t.o.v. $\frac{\partial h}{\partial s}$.

e. de verhouding $\frac{\eta}{h_0}$ klein is t.o.v. 1;

Verder is bij de overgang van (4-47) naar (4-48) nog gesteld:

f. $b = b_s$.

Hoewel dit niet nodig is natuurlijk is verondersteld dat de gem. snelheid vóór het golf-front nul is:

g. $v_0 = 0$.

5. In paragraaf 4.4. is voor de voortplantingssnelheid van een hoogwatergolf een uitdrukking afgeleid, die sterk afwijkt van b.v. uitdrukking (4-49). Omdat bij een hoogwatergolf de weerstand sterk overheerst (de traagheidsterm speelt zo'n ondergeschikte rol dat deze geheel wordt verwaarloosd) vindt men een relatief kleine voortplantingssnelheid.

Omdat bij de in deze paragraaf 4.5. beschouwde translatiegolven de traagheid juist een overheersende rol speelt is het zinvol om de beide typen golven náást elkaar te stellen.

Een energie-beschouwing in een meebewegend coördinatenstelsel.

Bij sommige dynamica-problemen blijkt een eenvoudiger beschouwing mogelijk door een bewegend coördinatenstelsel in te voeren. Hierna zal blijken dat deze aanpak een eenvoudige afleiding van een uitdrukking voor de voortplanting ^(snelheid) c mogelijk maakt.

Verondersteld wordt weer dat de stroomsnelheid van het water, waarin de translatiegolf zich voortplant gelijk nul is.

Gedefinieerd wordt nu een coördinatenstelsel dat met een gelijke snelheid c met de golf mee beweegt. Ten opzichte van dit coördinatenstelsel staat de golf dus stil en beweegt het water met een snelheid $c-v$ resp. c (zie fig. 4.22.).

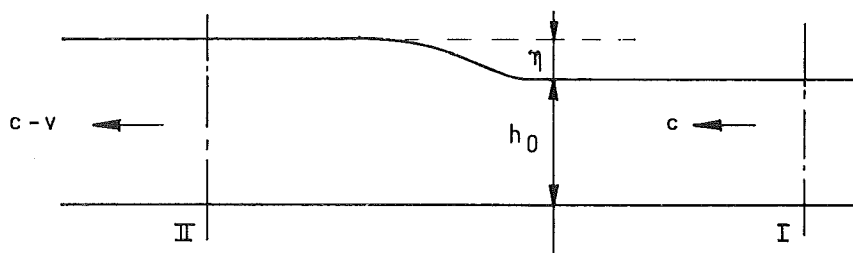


fig. 4.22

Omdat bij een lange golf de stroomlijnen in de raaien I en II recht worden verondersteld is het piëzometrisch niveau \perp de bodem konstant. Men kan dan, als verliezen worden verwaarloosd, de volgende energiebeschouwing houden:

$$h_0 + \frac{c^2}{2g} = h_0 + \eta + \frac{(c-v)^2}{2g}$$

Uit (4-46) volgt als eenvoudigheidshalve verondersteld wordt dat $b = b_s$:

$$c - v = c \frac{h_0}{h_0 + \eta} \quad [\text{continuïteit}]$$

Als we dit voor $c - v$ substitueren dan krijgen we de volgende vergelijking:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{(h_0 + \eta)^2}{2h_0 + \eta}$$

Indien zoals steeds verondersteld is $\eta \ll h_0$ dan volgt uit deze vergelijking voor c achtereenvolgens:

$$c = \sqrt{g h_0} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\eta}{h_0}}{1 + \frac{\eta}{2h_0}}}$$

$$(4-50) \quad c = \sqrt{g h_0} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g h_0} \left(1 + \frac{3\eta}{4h_0} \right)$$

Deze uitdrukking komt overeen met (4-48). Hierbij dient te worden opgemerkt dat bij deze afleiding alle verliezen zijn verwaarloosd.

Bij een steil front (bore) zal dit alleen ongeveer juist zijn, indien $\eta \ll h_0$, zoals reeds om andere redenen verondersteld was.

Afleiding volgens de Saint-Venant

Op het college wordt nog een derde afleiding besproken, waarbij de voortplantingssnelheid wordt gedefinieerd door te stellen:

$$dh = 0$$

Dit wil zeggen dat met een bepaalde hoogte van de waterspiegel wordt meegereisd en dat, omdat h een functie van s en t is, voor de voortplantingssnelheid de volgende uitdrukking wordt gesteld:

$$\frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial t} dt = 0 \quad \text{geeft } c = \frac{ds}{dt} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial h}{\partial s}} .$$

Gemakshalve wordt weer gesteld $b = b_s$.

De continuïteitsvergelijking (2-10) wordt dan:

$$(4-51) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

Met deze vergelijking kunnen we voor c schrijven:

$$(4-52) \quad c = v + h \frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial h}{\partial s}}$$

Verondersteld wordt nu dat v alleen een functie van h is, dan is:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{dv}{dh} \frac{\partial h}{\partial s} \quad \text{zodat (4-52) kan worden geschreven}$$

als:

$$(4-53) \quad c = v + h \frac{dv}{dh}$$

Opm. De veronderstelling $v = v(h)$ stemt overeen met de gemaakte veronderstellingen: golf vervormt niet tijdens het voortplanten en de weerstand wordt verwaarloosd.

In plaats van (4-43) wordt nu onder overigens dezelfde veronderstellingen de bewegingsvergelijking in v en h gebruikt (verg. (2-14)):

$$(4-54) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} + g \frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

Hierin is weer:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{dv}{dh} \frac{\partial h}{\partial s} ,$$

zodat

$$\frac{dv}{dh} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial s} \right) + g \frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

Als alle termen door $\frac{\partial h}{\partial s}$ gedeeld worden dan volgt hieruit:

$$\frac{dv}{dh} (-c + v) + g = 0$$

$$(4-55) \quad \frac{dv}{dh} = \frac{g}{c - v}$$

Substitueren we deze laatste uitdrukking in (4-53) dan geeft dit:

$$(4-56) \quad (c - v)^2 = g h \rightarrow \boxed{c = v \pm \sqrt{g h}}$$

Als we in (4-55) $c - v = \pm \sqrt{g h}$ substitueren dan krijgen we

$$(4-57) \quad \frac{dv}{dh} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Of $dv = \pm \sqrt{\frac{g}{h}} dh$, dus na integreren: $v = \pm 2 \sqrt{gh} + \text{konstante}$

Indien nu de volgende voorwaarden worden ingevoerd:

$$\text{voor } h = h_0 \text{ is } v = 0, \text{ dan wordt de konstante } \mp 2 \sqrt{g h_0},$$

zodat dan:

$$v = \pm 2 \sqrt{g h} \mp 2 \sqrt{g h_0}$$

Als dit tenslotte in (4-56) wordt gesubstitueerd dan geeft dit:

$$(4-58) \quad c = \pm 3 \sqrt{g h} \mp 2 \sqrt{g h_0} \quad (\text{volgens de Saint-Venant})$$

Als men hierin voor h weer substitueert $h = h_0 + \eta$, dan kan men de af te leiden uitdrukking met de eerder verkregen uitdrukkingen (4-48) en (4-50) vergelijken.

4.5.3. Vereenvoudigde berekeningen voor translatiegolven

Voor de voortplantingssnelheid c van een translatiegolf zijn in 4.5.2. verschillende uitdrukkingen afgeleid, waarbij de gemaakte veronderstellingen zijn vermeld.

In het volgende wordt de voortplanting van translatiegolven in kanalen met een eindige lengte beschouwd.

Gedacht wordt daarbij met name aan translatiegolven met een relatief geringe golfhoogte. Evenals in het voorgaande wordt de invloed van de weerstand volledig verwaarloosd en verondersteld dat de golven zich onvervormd voortplanten.

Indien een dergelijke golf zich met een bekende voortplantingssnelheid c voortplant in een kanaal, waarvan het water oorspronkelijk in rust is dan kan, zoals we op blz. 4.35 gezien hebben, de volgende continuïteitsvergelijking worden opgesteld :

$$(4-45) \quad \Delta Q = b c \eta$$

Deze uitdrukking is direkt te interpreteren. Meer in het algemeen kan i.p.v. (4-45) worden geschreven :

$$(4-59) \quad \Delta Q = b c \Delta h \quad \left(\text{of } \Delta h = \frac{1}{b c} \Delta Q \right)$$

Deze laatste uitdrukking geeft dus het verband aan tussen een verandering in de waterstand en de bijbehorende verandering in het debiet.

De eenvoudige uitdrukking (4-45) stelt ons in staat om meer inzicht te krijgen in de verschijnselen, die zich voordoen bij plotselinge vernauwingen en verwijdingen, bij splitsingspunten e.d.

Als eenvoudig voorbeeld wordt een kanaal A - B - C beschouwd, waarin zich t.p.v. B een discontinuïteit voordoet in het dwarsprofiel. Laten we b.v. veronderstellen dat de bergende breedte van het gedeelte A-B groter is dan de bergende breedte van het gedeelte B-C, dan is:

$$(bc)_{A-B} > (bc)_{B-C}$$

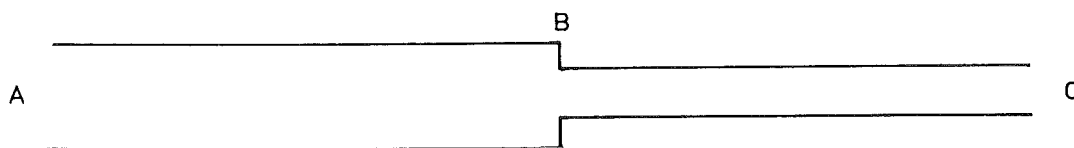


fig. 4.23.

Indien zich nu een translatiegolf voortplant van A in de richting C, dan is de discontinuïteit bij B voor de golf een vernauwing. Als gevolg daarvan vindt partiele reflectie plaats, waarvan de grootte nog onbekend is. Het punt B vormt een "splittingspunt" tussen de beide vakken. Voor een splittingspunt gelden de volgende voorwaarden :

- A. Geen verliezen : dat geeft dat de energiehoogte aan beide zijden van B gelijk is :

$$H_{B \text{ links}} = H_{B \text{ rechts}}$$

Indien verondersteld wordt dat de snelheidshoogte $\frac{v^2}{2g}$ bij dit type golven klein is t.o.v. de golfhoogte η , dan gaat bovenstaande voorwaarde over in:

$$(4-60) \quad h_{\text{links}} = h_{\text{rechts}} = h_B \quad \text{of t.o.v.}$$

het oorspronkelijke (stil-)wateroppervlak :

$$\eta_{\text{links}} = \eta_{\text{rechts}}$$

- B. De som van alle debieten, die naar een knooppunt toe stromen, is gelijk aan NUL :

$$(4-61) \quad \Sigma Q = 0$$

In dit voorbeeld geeft dit $Q_B \text{ links} = Q_B \text{ rechts}$.

Oppervlakkig gezien zou men de reflectie gelijk nul kunnen stellen. Dat zou geven:

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{en} \quad b_1 c_1 \eta_1 = b_2 c_2 \eta_2$$

Omdat $b_1 c_1 \neq b_2 c_2$ zijn deze twee uitdrukkingen met elkaar in tegenspraak.

Indien nu een gereflecteerde golf wordt verondersteld met een hoogte η_3 , dan moet worden voldaan aan:

$$(4-62) \quad \eta_1 + \eta_3 = \eta_2 \quad \text{en}$$

$$(4-63) \quad b_1 c_1 (\eta_1 - \eta_3) = b_2 c_2 \eta_2$$

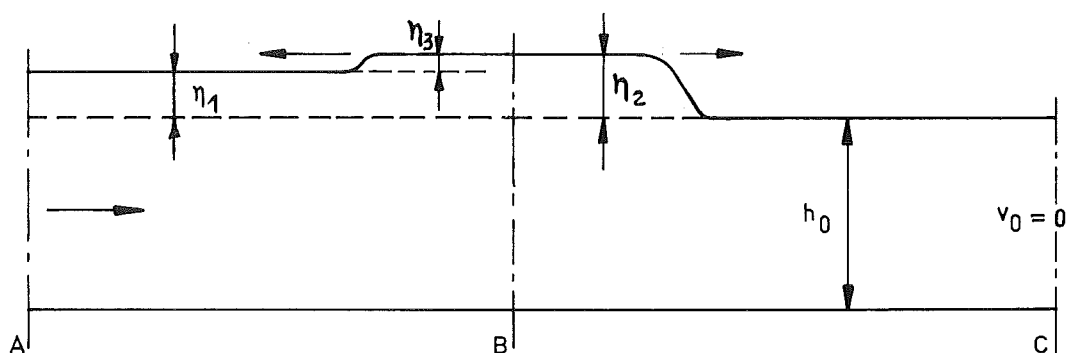


fig. 4.24.

Opm. 1. In het bovenstaande is de Q steeds positief gesteld in de richting waarin de golf loopt, zie ook verg. (4-45).

2. In het linker lid van (4-63) is Q_1 naar rechts verminderd met Q_3 naar links.

Het op deze wijze zonder meer superponeren van de ~~heen~~-en de teruglopende golf mag alleen als $\eta \ll h_0$.

Door uit (4-62) en (4-63) achtereenvolgens η_3 en η_2 te elimineren vindt men achtereenvolgens :

$$(4-64) \quad \eta_2 = \eta_1 \frac{2 b_1 c_1}{b_1 c_1 + b_2 c_2} \quad \text{en}$$

$$(4-65) \quad \eta_3 = \eta_1 \frac{b_1 c_1 - b_2 c_2}{b_1 c_1 + b_2 c_2}$$

Uit de nu verkregen uitdrukkingen (4-64) en (4-65) blijkt:

- (a.) Indien $b_1 c_1 = b_2 c_2$ dan $\eta_3 = 0$ en $\eta_2 = \eta_1$; de golf loopt gewoon door omdat er geen verandering van de grootte bc is.
- (b.) Als $b_2 c_2 > b_1 c_1$ dan wordt $\eta_2 < \eta_1$ en de gereflecteerde golf η_3 negatief.

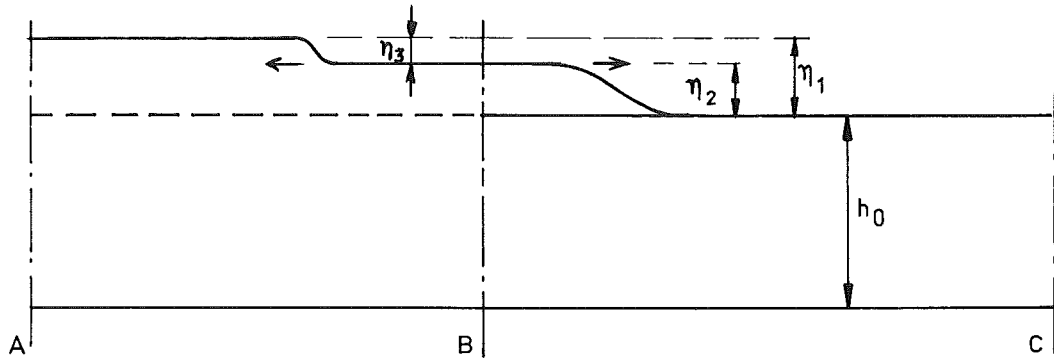


fig. 4.25

In een extreem geval : $b_2 c_2 \rightarrow \infty$ (b.v. grote zee)

dan wordt $\eta_3 = -\eta_1$ en $\eta_2 = 0$; d.w.z. volledige negatieve terugkaatsing.

- Ⓒ. Als $b_2 c_2 < b_1 c_1$, zoals in het voorbeeld was verondersteld, dan wordt $\eta_2 > \eta_1$ en de gereflecteerde golf η_3 positief.

In een extreem geval: $b_2 c_2 \rightarrow 0$ (wand met smalle spleet)

dan wordt $\eta_3 = \eta_1$ en

η_2 in een smalle spleet zal gelijk zijn aan $\eta_1 + \eta_3 = 2\eta_1$

(volledige positieve terugkaatsing).

De uitdrukkingen (4-64) en (4-65) kunnen ook worden gebruikt om de voortplanting van een translatiegolf in een waterloop met ~~meer-dere~~ discontinuïteiten te onderzoeken.

Als voorbeeld wordt gekeken naar een kanaal, met een gedeelte tussen I en II, waarvan de waarde van bc twee maal zo groot als van de rest is (zie fig. 4.26).

Een translatiegolf met een hoogte η_1 plant zich van links voort naar de discontinuïteit I.

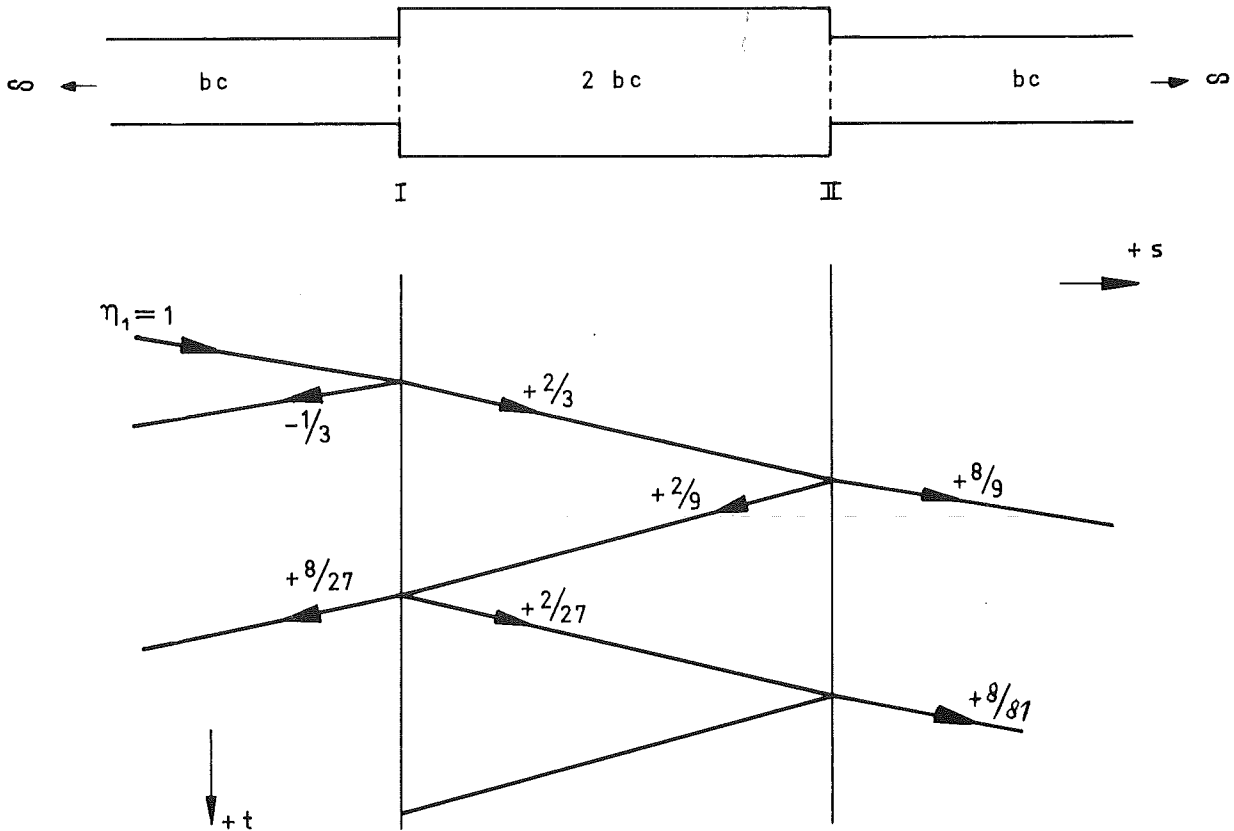


fig. 4.26

De voortplanting van de golven is schematisch weergegeven.

De van links aankomende golf η_1 zal bij I worden gereflecteerd volgens (4-65):

$$\eta_3 = \eta_1 \frac{bc - 2bc}{bc + 2bc} = -\frac{1}{3} \eta_1$$

De hoogte η_2 van de golf die doorgaat is volgens (4-64) :

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{2bc}{bc + 2bc} = +\frac{2}{3} \eta_1$$

Deze laatste golf komt enige tijd later bij II, waar $2bc$ plotseling overgaat in bc .

De aankomende golf is nu $\frac{2}{3} \eta_1$, zodat dit nu in (4-64) en (4-65) moet worden ingevuld i.p.v. η_1 .

De doorgaande golf wordt dus volgens (4-64):

$$\eta_4 = \frac{2}{3} \eta_1 \cdot \frac{2bc}{2bc + bc} = + \frac{8}{9} \eta_1$$

De gereflecteerde golf wordt volgens (4-65) :

$$\eta_5 = \frac{2}{3} \eta_1 \cdot \frac{2bc - bc}{2bc + bc} = + \frac{2}{9} \eta_1$$

etc. etc.

Opm.: Verondersteld is dat de gedeelten links van I en rechts van II zo lang zijn dat men ^(geen) gereflecteerde golven behoeft terug te verwachten.

In fig. 4.26 zijn nog enkele volgende resultaten weergegeven.

Als gevolg van één golf η_1 ontstaan in de drie gedeelten van het kanaal dus reeksen van golven, die in beginsel oneindig lang voorkomen echter met een in de tijd snel afnemende hoogte.

Opm.: In het gedeelte I-II lopen golven heen en weer, waarvan de hoogte een meetkundige reeks vormt:

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots \text{enz.}$$

De limiet van deze reeks ($\sum_1^{\infty} a \frac{r^n - 1}{r - 1}$) blijkt precies gelijk 1 te zijn.

Gezamenlijk zijn al deze golven dus even hoog als de aankomende golf η_1 .

Hetzelfde geldt voor de bij II naar rechts doorlopende golven, terwijl de bij I naar links teruggekaatste golven, na de eerste negatieve $-\frac{1}{3} \eta_1$, een reeks van positieve golven vormen waarvan de som gelijk is aan $\frac{1}{3} \eta_1$.

Een splitsingspunt.

Voor het geval een kanaal zich splitst in twee takken kunnen eveneens vergelijkingen worden afgeleid, die een grote gelijkenis vertonen met (4-64) en (4-65).

Men kan daarbij op dezelfde wijze te werk gaan als bij het afleiden van (4-64) en (4-65).

Als een aanlopende golf met een hoogte η_1 verondersteld wordt, zijn daarbij de volgende vergelijkingen van belang (zie fig. 4.27) :

$$Q_1 = \eta_1 b_1 c_1$$

$$Q_2 = \eta_2 b_2 c_2$$

$$Q_3 = \eta_3 b_1 c_1$$

$$Q_4 = \eta_4 b_4 c_4$$

$$Q_1 - Q_3 = Q_2 + Q_4$$

$$\eta_1 + \eta_3 = \eta_2 = \eta_4$$

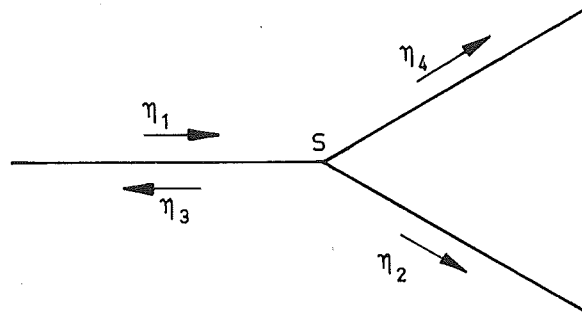


fig. 4.27

Opm.: In het bovenstaande is ervan uitgegaan dat er ook in de werkelijkheid sprake is van een splitsing punt. Dat is niet het geval.

Fysisch is er sprake van een wateroppervlak (soms zelfs met grote afmetingen) dat in het algemeen geen horizontaal vlak zal zijn.

Indien wrijvingsverliezen en vertragingverliezen voldoende klein zijn (als $\eta \ll h_0$) dan kan de waterstand in elk van de takken gelijk aan h_s worden gesteld.

Men kan nu overeenkomstig het voorgaande de volgende uitdrukkingen afleiden:

$$(4-66) \quad \eta_2 = \eta_4 = \eta_1 \frac{2 b_1 c_1}{b_1 c_1 + (b_2 c_2 + b_4 c_4)}$$

$$(4-67) \quad \eta_3 = \eta_1 \frac{b_1 c_1 - (b_2 c_2 + b_4 c_4)}{b_1 c_1 + (b_2 c_2 + b_4 c_4)}$$

Als we deze uitdrukkingen vergelijken met (4-64) resp. (4-65) dan blijkt dat we nu

$$(b_2 c_2 + b_4 c_4) \text{ hebben i.p.v. } b_2 c_2$$

We kunnen de beide takken dus vervangen denken door een tak, waarvan de waarde bc gelijk is aan de som van de bc -waarden van de beide takken (zie fig. 4.28).

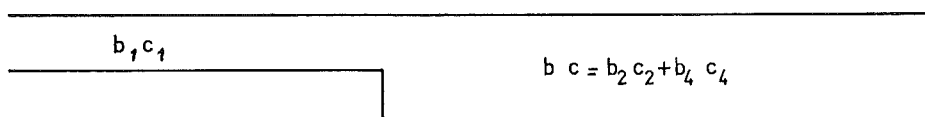


fig. 4.28

Omdat het probleem is opgevat als een knooppunt met eendimensionale takken, blijft de verandering van richting geheel buiten beschouwing.

- Opm.: 1. Indien de golflengte groot is t.o.v. de afmetingen van de splitsing is dat wel toelaatbaar. Men kan ook stellen: als de looptijd van de golf over de lengte van de splitsing klein is t.o.v. een voor de golf karakteristieke tijd (b.v. tijdsduur van stijgen van de waterspiegel, de periode o.d.).
2. In een laboratorium ziet men vaak dat om ruimte te besparen een gedeelte van een model voor lange golven wordt "opgevouwen". In fig. 4.29 is een dergelijk gedeelte van een model weergegeven, dat een riviergedeelte voorstelt. Een golf zal zich inderdaad op de gewenste wijze voortplanten indien de looptijd over de afstand a klein is t.o.v. een karakteristieke tijd.

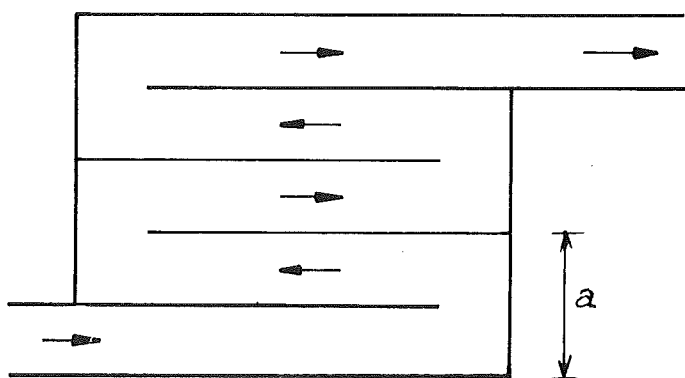


fig. 4.29

Bij het ontwerpen van havenbekkens e.d. dient men ook aandacht te besteden aan z.g. interferentie-verschijnselen.

Als voorbeeld wordt de situatie van fig. 4.30 besproken.

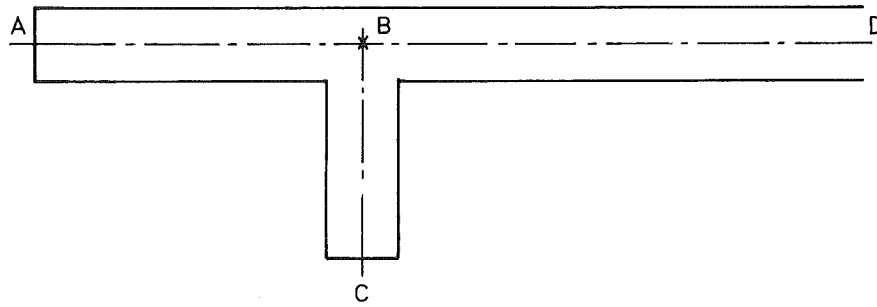


fig. 4.30

Bij A is een sluis (of een ander kunstwerk) gedacht, van waaruit op regelde tijden een golf het kanaal A - B in wordt gestuurd. Een dergelijke golf zal bij B gedeeltelijk worden gereflecteerd en gedeeltelijk doorgaan naar resp. C. en D.

De gereflecteerde golf zal in het gedeelte A - B bij A weer worden teruggekaatst.

Ook in C zal de daar aankomende golf worden teruggekaatst.

Indien de looptijd over het gedeelte A - B nu gelijk is aan de looptijd over het gedeelte B - C, dan zullen de van A en C terugkerende golven tegelijk weer aankomen bij B, hetgeen onverwacht hoge (lage) waterstanden kan geven.

Een dergelijke situatie heeft zich voorgedaan bij de sluis bij Born. Dat geval is met behulp van de eenvoudige vergelijkingen (4-66) en (4-67) uitgewerkt.

Autografie Sluis bij Born:

De sluis wordt volgens een bepaald programma gevuld en geledigd. Een golf wordt weergegeven door het verloop van Q in de tijd

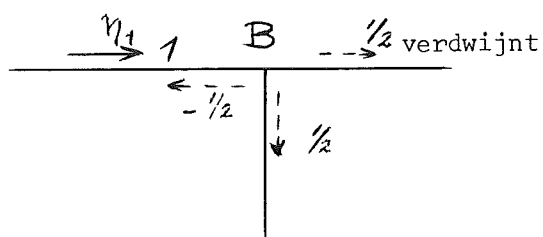
$$Q_{\max.} = 80 \text{ m}^3/\text{s} \quad \eta_{\max.} = 0,32 \text{ m} \quad \text{dus } bc \text{ is}$$

kennelijk gelijk aan $\frac{80}{0,32} = 250 \text{ m}^2/\text{s}$.

De lijnen in de x/t -diagrammen, die het verloop van de golven schematisch weergeven, komen overeen met het golf front.

Verondersteld is onvervormde voortplanting, dus de golftop komt steeds 3 minuten later.

Bij de op de autografie vermelde gegevens, kunnen nog enkele opmerkingen worden gemaakt:



t = 3 minuten :

golffront bereikt B :

$$\text{volgens (4-66)} : \eta_2 = \eta_4 = \eta_1 \frac{2}{1 + 3/1} = \frac{1}{2} \eta_1$$

$$\text{volgens (4-67)} : \eta_3 = \eta_1 \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2} \eta_1$$

t = 6 minuten : golftop bereikt B, zelfde verhoudingen.

golffront gereflecteerde golf bereikt C resp. A

Volledige positieve reflectie geeft:

Bij A : $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})$ dus totaal -1 , waarvan $-\frac{1}{2}$ terugloopt.

Bij C : $(+\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{2})$ dus totaal $+1$, waarvan $+\frac{1}{2}$ terugloopt.

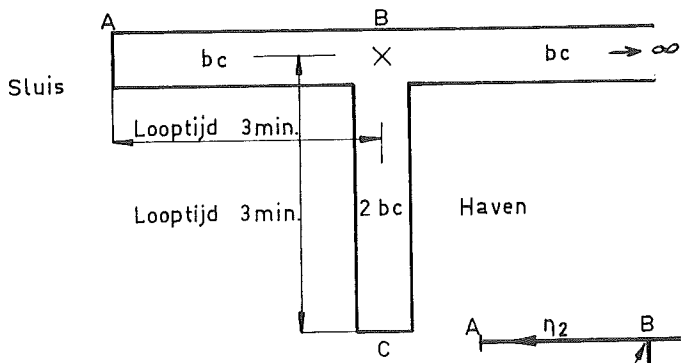
t = 9 minuten : Beide positief gereflecteerde golven $(-\frac{1}{2}$ en $+\frac{1}{2})$

bereiken B weer: $+\frac{1}{4}$ wordt gereflecteerd, daarbij komt

$+\frac{1}{2}$ dat van C - B doorloopt.

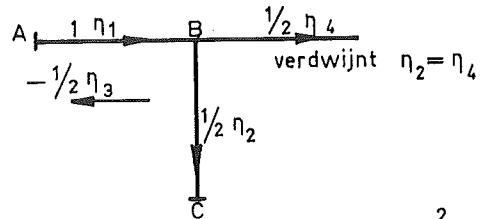
$(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = +\frac{1}{4}$ verdwijnt.

De golfhoogte in B - A is dus $+\frac{3}{4}$; positief gereflecteerd, geeft bij A $+1\frac{1}{2}$. De waterstanden worden dus hoger (lager) dan men oppervlakkig op grond van de oorspronkelijke golfhoogte zou verwachten.



OUDE TOESTAND

Sluis bij BORN



Aan eind v.d. haven terugkaatsing

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{2}{1 + \frac{b_2 c_2}{b_1 c_1}}$$

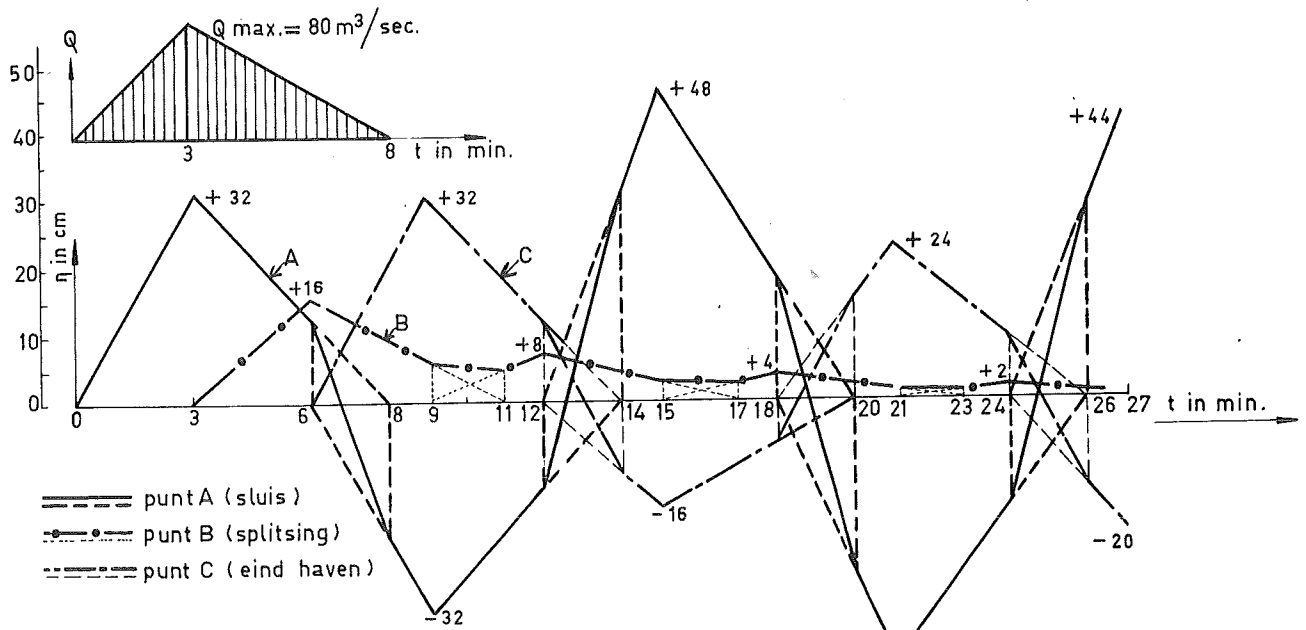
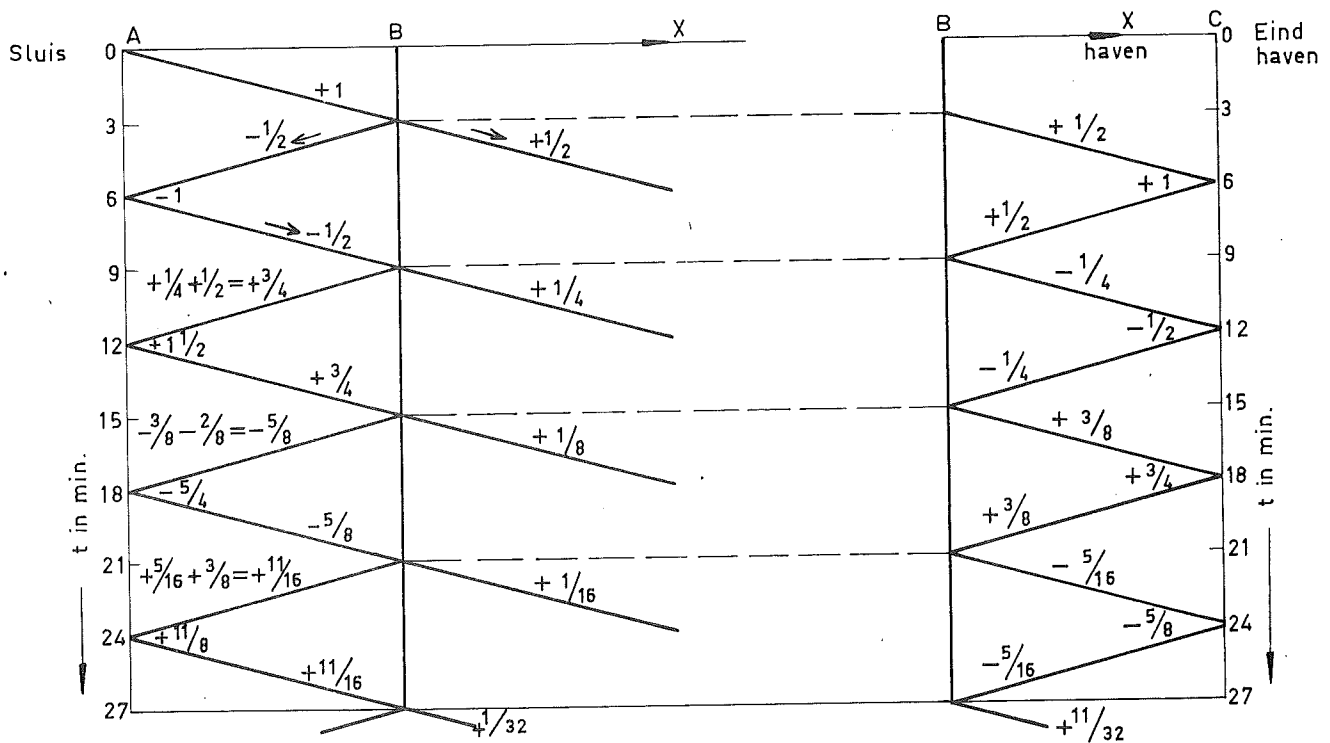
$$\eta_1 \frac{2}{1 + \frac{3}{1}} = \frac{1}{2} \eta_1$$

$$\eta_3 = \eta_1 \frac{1 - \frac{3}{1}}{1 + \frac{3}{1}} = -\frac{1}{2} \eta_1$$

Geen terugkaatsing

$$\eta_4 = \eta_2 = \eta \frac{2}{1 + 1} = \eta_1$$

Teruglopende golf uit de haven



- ==== punt A (sluis)
- punt B (splitsing)
- punt C (eind haven)

Slotopmerkingen betreffende paragraaf 4.5. :

1. Op blz. 434 is gesteld dat een analytische oplossing voor de gelijneariseerde vergelijkingen (2-11) en (4-43) mogelijk is door in verg. (4-44) te veronderstellen:

$$\frac{g A}{b} = c^2$$

Men kan door substitutie aantonen dat een algemene oplossing gevormd wordt door de volgende functies :

$$h = F_1\left(t - \frac{s}{c}\right) + F_2\left(t + \frac{s}{c}\right)$$

$$Q = b c \left[F_1\left(t - \frac{s}{c}\right) - F_2\left(t + \frac{s}{c}\right) \right]$$

De functies F_1 en F_2 kunnen, afhankelijk van de randvoorwaarden, nog ieder willekeurig verloop hebben. Als we stellen $F_2 = 0$, dan resteert een in de positieve s -richting lopende golf:

$$h = F_1\left(t - \frac{s}{c}\right) \quad \text{en} \quad Q = b c F_1\left(t - \frac{s}{c}\right)$$

Uit deze laatste uitdrukkingen blijkt dat h en Q konstant blijven langs een rechte lijn in het s/t -diagram.

Dit resultaat sluit geheel aan bij de in 4.5.3. besproken berekeningen.

2. Bij het behandelen van de oplossingsmethode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" zal blijken dat de uitdrukking (4-59) overeenkomt met één der karakteristieke vergelijkingen in de meest eenvoudige gedaante n.l.

$$\frac{dQ}{dh} = \mp b c, \quad \text{waarbij} \quad \frac{ds}{dt} = \pm c \quad \text{en} \quad c = \sqrt{\frac{g A}{b}}.$$

Ook zal blijken dat de vergelijkingen (4-56) en (4-57) overeenkomen met een bij elkaar behorend stel karakteristieke vergelijkingen.

Het is van belang om er nu reeds op te wijzen dat juist ook voor de in deze paragraaf 4.5. besproken golf-problemen de later in het college te behandelen oplossingsmethode bijzonder geschikt is.

Deel II is niet gereed.

In plaats daarvan wordt gewerkt met twee losse gedeelten, die eveneens verkrijgbaar zijn op kamer 0 96.

Deel I en de twee losse gedeelten kunnen nog niet als een volledig college-diktaat worden gezien.

Tenslotte wordt gewezen op de bestaande oefeningen b 73 A. Deze oefeningen worden tijdens de college-periode in gedeelten gratis verstrekt.

Na de college-periode zijn deze oefeningen ook verkrijgbaar op kamer 0 96.

december 1973