TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
AFDELING DER LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK

Memorandum M-263

De bepaling van de spanningen rond een door een pen belast gat in een elastisch orthotrope of isotrope plaat met behulp van de methode van coëfficiënten vergelijking

door

Th. de Jong

Delft - Nederland
december 1976

1. INLEIDING

In lit. [1] worden de spanningsfuncties voor het bepalen van de spanningen rond een gat in een elastisch orthotrope of isotrope plaat, belast door een pen die zich daarin wrijvingsloos kan bewegen, opgelost met behulp van de integraalvoorstelling van Cauchy. In dit memorandum worden deze functies afgeleid met een methode die aansluit bij het collegedictaat "Versterkte Materialen" (lit. [2]), de methode van vergelijking van coëfficiënten in een Fourier-reeks. De oplossing van het pen-gat probleem in anisotrope materialen wordt daarmee gebracht binnen het kader van dat collegedictaat en dit memorandum moet dan ook als uitgewerkt voorbeeld voor de daar gegeven methode worden beschouwd.

Voor het opstellen van de algemene vergelijkingen voor de bepaling van spanningen en verplaatsingen in anisotrope platen en de oplossing daarvan m.b.v. bij specifieke problemen behorende randvoorwaarden wordt verwezen naar [2]. Hier worden slechts de veronderstellingen die daarbij zijn gebruikt weergegeven, evenals de veronderstellingen die zijn gemaakt bij de oplossing van het specifieke pen-gat probleem van [1].

a. Het materiaal van de plaat is macroscopisch homogeen.
b. Het materiaal gedraagt zich lineair elastisch.
c. De dimensies van de plaat zijn zodanig dat in de plaat van een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand kan worden gesproken.
d. De plaat is oneindig groot.
e. De pen die de plaat belast is oneindig stijf. Voor een pen-gat verbinding in glasvezel-kunsthars platen is dit een goede benadering bij gebruik van stalen pennen. Voor een stalen pen in b.v. elastisch isotrope laminaten van moderne vezelmaterialen is deze veronderstelling redelijk.
f. De pen belast de plaat uitsluitend via een radiale belasting, voor te stellen door:

$$P_r = p_o \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

$$(n \text{ oneven})$$

met een resultante in Y-richting. Tussen de pen en plaat is geen wrijving.

g. I.v.m. veronderstelling (f) worden de assen van elastische symmetrie van het plaatmateriaal samenvallend met de coördinaatassen verondersteld.

In dit memorandum worden de notaties van [1] gebruikt.

2. DE BASISVERGELIJKINGEN

Het pen-gat probleem d.m.v. een oneindig stijve pen in een elastische plaat is in feite een "mixed-boundary problem". Immers, op de helft van de gatrand waar de oneindig stijve pen op drukt wordt een voorwaarde voor de verplaatsingen (bij onbekende belasting) opgelegd, terwijl op de andere helft de belasting (nul, bij onbekende verplaatsingen) bekend is.

Door voor de belasting echter een sinusreeks

$$P_r = p_o \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \qquad \begin{array}{l}(0 < \theta < \pi)\\ (n \text{ oneven})\end{array} \tag{1}$$

aan te nemen wordt het probleem teruggebracht tot een "quasi mixed boundary problem" waarbij de spanningsfuncties op de klassieke wijze uit de randvoorwaarden voor de belastingen op de gatrand kunnen worden opgelost (randvoorwaardenprobleem van de 1e soort). De in de aldus bepaalde spanningsfuncties voorkomende coëfficiënten a_n kunnen daarna worden bepaald uit de aan de gatrand opgelegde verplaatsingsvoorwaarde voor $0 < \theta < \pi$ (randvoorwaardenprobleem van de 2e soort). Voor dit laatste wordt verwezen naar [1], hier zullen slechts de spanningsfuncties (met voorlopig onbekende a_n) worden afgeleid uit de randvoorwaarden voor de belasting. Deze randvoorwaarden zijn:

$$2 \text{ Re} \left[\phi(z_1) + \psi(z_2)\right] = \int_0^s Y_Y \, ds + K_1 \tag{2a}$$

$$-2 \text{ Re} \left[i\beta_1 \, \phi(z_1) + i\beta_2 \, \Psi(z_2)\right] = \int_0^s X_X \, ds + K_2 \tag{2b}$$

Deze formules gelden voor een binnencontour bij een integratie-richting tegen de klok in. K_1 en K_2 zijn constanten waarvan de grootte afhankelijk is van de ligging van het beginpunt van de integratieweg; zij zijn hier verder niet interessant.

Formules (2) drukken de toename uit van de vormen tussen haken over een traject waarvan de grootte <u>willekeurig</u> is; s is dus een <u>willekeurig</u> punt op de contour waarop X_X en Y_Y werken.

In (2) zijn:

- X_X en Y_Y de componenten van de belasting op de contour in resp. X- en Y-richting.
- $\phi(z_1)$ en $\psi(z_2)$ spanningsfuncties; deze moeten worden bepaald.
- β_1 en β_2 dimensieloze grootheden die het anisotrope gedrag van het materiaal karakteriseren.

$$\beta_1^2 \, \beta_2^2 = \frac{C_{22}}{C_{11}}$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2C_{12} + C_{66}}{C_{11}}$$

  waarin C_{ij} de complianties zijn van het plaatmateriaal. Dit memorandum is beperkt tot uitsluitend reële waarden van β.
- z_1 en z_2 complexe coördinaten.

$$z_1 = x + i\beta_1 y$$

$$z_2 = x + i\beta_2 y$$

Voor het probleem van een pen belast gat in een orthotrope plaat, waarbij de spanningen in het oneindige verdwijnen en de belasting op de gatrand een resultante R_Y geeft, hebben de spanningsfuncties in (2) de volgende, algemene vorm:

$$\phi(z_1) = -\frac{R_Y}{4\pi} \frac{i(\mu_{xy} + \beta_2^2)}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \ln \zeta_1 + \sum_{m=1,2}^{\infty} A_m \zeta_1^{-m} \qquad (4a)$$

$$\psi(z_2) = \frac{R_Y}{4\pi} \frac{i(\mu_{xy} + \beta_1^2)}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \ln \zeta_2 + \sum_{m=1,2}^{\infty} B_m \zeta_2^{-m} \qquad (4b)$$

waarin:

$$\zeta_1 = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 + \beta_1^2 - 1}}{1 + \beta_1} \qquad (5a)$$

$$\zeta_2 = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + \beta_2^2 - 1}}{1 + \beta_2} \qquad (5b)$$

Voor de eenheidscirkel geldt nu:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \sigma = e^{i\theta}$$

Wordt voor de straal van het pen-belaste gat de waarde 1 genomen en de coördinaten z_1 en z_2 op de rand worden σ_1 resp. σ_2 genoemd, dan zijn de spanningsfuncties op de gatrand:

$$\phi(\sigma_1) = + \frac{R_Y}{4\pi} \frac{(\mu_{xy} + \beta_2^2)}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \theta + \sum_{m=1,2}^{\infty} A_m e^{-im\theta} \tag{6a}$$

$$\psi(\sigma_2) = - \frac{R_Y}{4\pi} \frac{(\mu_{xy} + \beta_1^2)}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \theta + \sum_{m=1,2}^{\infty} B_m e^{-im\theta} \tag{6b}$$

of, verkort geschreven:

$$\phi(\sigma_1) = A \ln \sigma + \phi_o(\sigma) \tag{7a}$$

$$\psi(\sigma_2) = B \ln \sigma + \psi_o(\sigma) \tag{7b}$$

waarin $\phi_o(\sigma)$ en $\psi_o(\sigma)$ enkelwaardige,analytische functies op en buiten de rand van het gat zijn en $A \ln \sigma$ en $B \ln \sigma$ meerwaardige functies die verantwoordelijk zijn voor de resulterende kracht in Y-richting. Eventuele constante termen zijn in het kader van dit memorandum niet interessant en zijn weggelaten.

(7) in de formules voor de randvoorwaarden (2) geeft:

$$\beta_1 \phi_o(\sigma) - \beta_1 \overline{\phi_o(\sigma)} + \beta_2 \psi_o(\sigma) - \beta_2 \overline{\psi_o(\sigma)} = i \int_o^s X_X \, ds \tag{8a}$$

$$\phi_o(\sigma) + \overline{\phi_o(\sigma)} + \psi_o(\sigma) + \overline{\psi_o(\sigma)} = \int_o^s Y_Y \, ds - \frac{R_Y}{2\pi}\theta \tag{8b}$$

(8b) aftrekken van (8a) levert:

$$(\beta_1 - 1)\, \phi_o(\sigma) - (\beta_1 + 1)\, \overline{\phi_o(\sigma)} + (\beta_2 - 1)\, \psi_o(\sigma) - (\beta_2 + 1)\, \overline{\psi_o(\sigma)} =$$

$$= i \int_o^s (X_X + iY_Y) ds + \frac{R_Y}{2\pi} \theta \tag{9}$$

waarin:

$$(X_X + iY_Y) = P_r\, e^{i\theta} \tag{10}$$

Met de algemene uitdrukkingen (6) voor de spanningsfuncties op de gatrand en (10) wordt (9) nu:

$$\sum_{m=1,2}^{\infty} \left[\left\{ (\beta_1 - 1)\, A_m + (\beta_2 - 1)\, B_m \right\} e^{-im\theta} - \left\{ (\beta_1 + 1)\, \overline{A_m} + (\beta_2 + 1)\, \overline{B_m} \right\} e^{im\theta} \right] = i \int_0^s P_r\, e^{i\theta}\, ds + \frac{R_Y}{2\pi} \tag{11}$$

Vergelijking (11) is de basisvergelijking voor het bepalen van de coëfficiënten A_m en B_m uit de spanningsfuncties d.m.v. coëfficiëntenvergelijking. De resulterende kracht R_Y heeft hierin de waarde $\frac{\pi}{2}\, p_o$.

3. DE BEPALING VAN EEN GESCHIKTE UITDRUKKING VOOR DE RANDBELASTING P_r

Omdat voor

$$0 < \theta < \pi \qquad P_r = p_o \sum_{n=1,3}^{\infty} a_n \sin n\theta$$

en voor

$$\pi \leq \theta \leq 2\pi \qquad P_r = 0$$

zal de integraal in (11) voor het traject $0 < \theta < \pi$ een andere uitdrukking geven (nl. een functie van θ) dan voor het traject $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ (nl. een constante waarde, ofwel de waarde van de integraal over het traject $0 < \theta < \pi$ in $\theta = \pi$). De toename van de vorm tussen haken in (11) over een willekeurig traject is dus niet met één functie van θ te beschrijven.

P_r zal dan ook met behulp van een bepaalde integraal over het traject $0 \leq \theta \leq 2\pi$ moeten worden uitgedrukt door een functie die voor de hele contour van het gat geldt:

Stel hiertoe:

$$P_r = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p \, e^{ip\theta} \tag{12}$$

Beide zijden met $e^{-im\theta}$ vermenigvuldigen en integreren over $\theta = 0 - 2\pi$ geeft:

$$\int_0^{2\pi} P_r \, e^{-im\theta} \, d\theta = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p \int_0^{2\pi} e^{-i(m-p)\theta} \, d\theta \tag{13}$$

waarin:

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(m-p)\theta} \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad m \neq p \\ 2\pi & \text{voor} \quad m = p \end{cases}$$

zodat:

$$C_m = C_{p=m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r \; e^{-im\theta} \, d\theta \tag{14}$$

ofwel, volgens (12):

$$P_r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r \, . \, e^{-im\theta} \, d\theta \right\} e^{im\theta} \tag{15}$$

In (14) of (15) is wel tot uitdrukking te brengen dat P_r voor de trajecten $0 < \theta < \pi$ en $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ verschillende uitdrukkingen heeft, immers:

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r \; e^{-im\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{p_o}{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \sin n\theta \, . \, e^{-im\theta} \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 \, . \, e^{-im\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{p_o}{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \sin n\theta \, . \, e^{-im\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{p_o}{4\pi i} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \Big\{ \cos (n - m) \theta - \cos (n + m) \theta$$

$$+ i \sin (n - m) \theta + i \sin (n + m) \theta \Big\} d\theta \tag{16}$$

waarvan uitwerking geeft:

$$C_m = \frac{p_o}{2\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{n - m} + \frac{1}{n + m} \right) \quad \text{voor } m = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \tag{17}$$

$$C_m = \frac{p_o}{4i} a_m \quad \text{voor } m = 1, 3, 5, \ldots \tag{18}$$

$$C_m = - \frac{p_o}{4i} a_m \quad \text{voor } m = -1, -3, -5, \ldots \tag{19}$$

Voor P_r in (11) wordt nu de nieuwe uitdrukking gevonden:

$$P_r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \, e^{im\theta} = \frac{p_o}{2\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \frac{2}{n} +$$

$$+ \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{p_o}{2\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}\right) \left(e^{im\theta} + e^{-im\theta}\right)$$

$$+ \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{p_o}{4i} a_m e^{im\theta} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{-p_o}{4i} a_m e^{-im\theta}$$

In de twee laatste sommaties kan de sommatie-index m worden vervangen door n, waarmee:

$$P_r = \frac{p_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{a_n}{n} + \frac{p_o}{2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \sin n\theta$$

$$+ \frac{p_o}{\pi} \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}\right) \cos m\theta \qquad (20)$$

Uitdrukking (20) is nu één en dezelfde uitdrukking voor de radiale belasting P_r voor zowel de belaste als de onbelaste helft van de gatrand.

4. DE BEPALING VAN DE COËFFICIËNTEN VAN DE SPANNINGSFUNCTIES

In de basisvergelijking (11) voor het bepalen van de coëfficiënten A_m en B_m kan nu de integraal eenvoudig worden bepaald. Bij de gekozen integratie-richting is op de gatrand $ds = d\theta$, zodat, met (20):

$$\int_0^s p_r\, e^{i\theta}\, ds = \int_0^\theta \frac{p_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{a_n}{n}\, e^{i\theta}\, d\theta + \int_0^\theta \frac{p_o}{2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \sin n\theta . e^{i\theta}\, d\theta$$

$$+ \int_0^\theta \frac{p_o}{\pi} \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}\right) \cos m\theta \,.\, e^{i\theta}\, d\theta \qquad (21)$$

waarin geen onderscheid meer hoeft te worden gemaakt voor θ tussen 0 en π en tussen π en 2π.

$$\int_0^\theta e^{i\theta}\, d\theta = \frac{e^{i\theta}}{i} \qquad (22)$$

$$\int_0^\theta \sin n\theta\, e^{i\theta}\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{\sin 2\theta}{4i} - \dfrac{\theta}{2i} - \dfrac{\cos 2\theta}{4} & \text{voor } n = 1 \qquad (23) \\[2ex] \dfrac{\sin (n+1)\theta}{2i\,(n+1)} - \dfrac{\sin (n-1)\theta}{2i\,(n-1)} - \dfrac{\cos (n+1)\theta}{2\,(n+1)} - \\[2ex] \qquad - \dfrac{\cos (n-1)\theta}{2\,(n-1)} & \text{voor } n = 3, 5, 7, .. \qquad (24) \end{cases}$$

$$\int_0^\theta \cos m\theta\, e^{i\theta}\, d\theta = \frac{\sin (m+1)\theta}{2\,(m+1)} + \frac{\sin (m-1)\theta}{2\,(m-1)} - \frac{i \cos (m+1)\theta}{2\,(m+1)} +$$

$$+ \frac{i \cos (m-1)\theta}{2\,(m-1)} \qquad \text{voor } m = 2, 4, 6, \ldots \qquad (25)$$

(constante termen, bepaald door de ondergrens van de cos-termen zijn weggelaten)

De basisvergelijking (11) wordt nu met (20), (21) en de uitgewerkte integralen (22) t/m (25):

$$\sum_{m=1,2}^{\infty}\Big[\Big\{(\beta_1 - 1)\,A_m + (\beta_2 - 1)\,B_m - (\beta_1 + 1)\,\overline{A_m} - (\beta_2 + 1)\,\overline{B_m}\Big\}\cos m$$

$$- i\Big\{(\beta_1 - 1)\,A_m + (\beta_1 - 1)\,B_m + (\beta_1 + 1)\,\overline{A_m} + (\beta_2 + 1)\,\overline{B_m}\Big\}$$

$$\sin m\theta\Big] = \frac{R_Y}{2\pi}\,\theta + \frac{p_o}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{a_n}{n}\,e^{i\theta} + \frac{ip_o}{2}\Big\{\frac{\sin 2\theta}{4i} - \frac{\theta}{2i} - \frac{\cos 2\theta}{4}\Big\}$$

$$+ \frac{ip_o}{2}\sum_{n=3,5}^{\infty} a_n\Big\{\frac{\sin (n + 1)\,\theta}{2i\,(n + 1)} - \frac{\sin (n - 1)\,\theta}{2i\,(n-1)} - \frac{\cos (n + 1)\,\theta}{2\,(n + 1)} -$$

$$- \frac{\cos (n - 1)\,\theta}{2\,(n - 1)}\Big\} + \frac{ip_o}{\pi}\sum_{m=2,4,6}^{\infty}\ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n\,\Big(\frac{1}{n - m} + \frac{1}{n + m}\Big)$$

$$\Big\{\frac{\sin (m + 1)\,\theta}{2\,(m + 1)} + \frac{\sin (m - 1)\,\theta}{2\,(m - 1)} - \frac{i\cos (m + 1)\,\theta}{2\,(m + 1)} +$$

$$+ \frac{i\cos (m - 1)\,\theta}{2\,(m - 1)}\Big\} \qquad (26)$$

waarin de meerwaardige termen met θ tegen elkaar wegvallen.

Vergelijking (26) moet nu gelden voor de gehele gatrand, dus voor iedere waarde van θ. Dat kan alleen als de coëfficiënten van sin $m\theta$ resp. cos $m\theta$ links en rechts van het gelijkteken gelijk zijn.
Gelijkstelling van deze coëfficiënten levert nu 2 x m complexe vergelijkingen, waarmee na scheiding in reële en imaginaire delen de 4 x m onbekende grootheden A_m, $\overline{A_m}$, B_m en $\overline{B_m}$ kunnen worden opgelost.

Uitwerking van (26) geeft dan:

voor m = even:

A_m en B_m zijn zuiver imaginair;

$$A_m = \frac{-ip_o}{8\,(\beta_2 - \beta_1)}\,\Big(\frac{\beta_2 - 1}{m}\,a_{m-1} - \frac{\beta_2 + 1}{m}\,a_{m+1}\Big) \qquad (27a)$$

$$B_m = \frac{ip_o}{8\,(\beta_2 - \beta_1)}\,\Big(\frac{\beta_1 - 1}{m}\,a_{m-1} - \frac{\beta_1 + 1}{m}\,a_{m+1}\Big) \qquad (27b)$$

voor m = oneven:

A_m en B_m zijn zuiver reëel;

$$A_m = \frac{-p_o}{\pi(\beta_2 - \beta_1)} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{na_n \{m^2 - n^2 + 1 - 2\beta_2 m\}}{\{(m-1)^2 - n^2\}\{(m+1)^2 - n^2\}} \tag{28a}$$

$$B_m = \frac{p_o}{\pi(\beta_2 - \beta_1)} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{na_n \{m^2 - n^2 + 1 - 2\beta_1 m\}}{\{(m-1)^2 - n^2\}\{(m+1)^2 - n^2\}} \tag{28b}$$

De spanningsfuncties zijn nu, op de coëfficiënten a_n na, op de gatrand bekend. Uitbreiding naar het gehele plaatveld geeft nu:

$$\phi(z_1) = -\frac{R_Y}{4\pi} \frac{i\,(\mu_{xy} + \beta_2^2)}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \ln \zeta_1 - \frac{ip_o}{8\,(\beta_2 - \beta_1)} \sum_{m=2,4}^{\infty} \left(\frac{\beta_2 - 1}{m} a_{m-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta_2 + 1}{m}\right) \zeta_1^{-m} - \frac{p_o}{\pi(\beta_2 - \beta_1)} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty}$$

$$\frac{na_n \{m^2 - n^2 + 1 - 2\beta_2 m\}}{\{(m-1)^2 - n^2\}\{(m+1)^2 - n^2\}} \zeta_1^{-m} \tag{29a}$$

$$\psi(z_2) = \frac{R_Y}{4\pi} \frac{i\,(\mu_x + \beta_1^2)}{\beta_2^2 \quad \beta_1^2} \ln \zeta_2 + \frac{ip_o}{8(\beta_2 - \beta_1)} \sum_{m=2,4}^{\infty} \left(\frac{\beta_1 - 1}{m} a_{m-1}\right.$$

$$\left. - \frac{\beta_1 + 1}{m}\right) \zeta_2^{-m} + \frac{p_o}{\pi(\beta_2 - \beta_1)} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty}$$

$$\frac{na_m \{m^2 - n^2 + 1 - 2\beta_1 m\}}{\{(m-1)^2 - n^2\}\{(m+1)^2 - n^2\}} \zeta_2^{-m} \tag{29b}$$

5. BESPREKING VAN HET RESULTAAT

De met de methode van coëfficiënten vergelijking gevonden spanningsfuncties (29) zijn, op een constante term na, gelijk aan de met de integraalvoorstelling van Cauchy gevonden functies (6.5.) van [1], zoals eenvoudig kan worden ingezien als in (29) de lopende index m in de eerste sommatie wordt vervangen door $n = m - 1$.
Bij de toepassing van de integraalvoorstelling van Cauchy worden de in de randvoorwaarden voor de belasting voorkomende spanningsfuncties op de gatrand direct uitgebreid naar het gehele plaatveld door integratie van

$$\frac{\phi_o(\sigma)}{\sigma - \zeta_1}$$

resp.

$$\frac{\psi_o(\sigma)}{\sigma - \zeta_2}$$

over het volledige traject $\theta = 0 - 2\pi$.
Deze integratie over het volledige traject maakt het mogelijk de in het rechterlid van de randvoorwaarden voorkomende onbepaalde integralen te splitsen in een van θ afhankelijke uitdrukking voor het traject $0 - \pi$ en een constante, van θ onafhankelijke uitdrukking voor het traject $\pi - 2\pi$.

Bij de in dit memorandum gebruikte methode wordt in feite hetzelfde gedaan, alleen in een andere volgorde. Eerst wordt voor de radiale belasting een uitdrukking bepaald die geldt voor de <u>gehele</u> gatrand, waarna op de normale wijze uit de ontstane Fourier-reeks de coëfficiënten van de spanningsfuncties worden bepaald. De op die wijze gevonden spanningsfuncties op de gatrand worden daarna uitgebreid naar het gehele plaatveld door de complexe coördinaat σ op de gatrand te vervangen door de complexe coördinaten ζ_1 en ζ_2 in het z_1- resp. z_2-vlak. In feite is echter bij deze uitbreiding eveneens gebruik gemaakt van de integraalvoorstelling van Cauchy.

LITERATUUR

1. De Jong, Th.: "Spanningen rond een gat in een elastisch orthotrope of isotrope plaat, belast door een pen die zich daarin wrijvingsloos kan bewegen". Rapport LR-223, Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, TH-Delft, juli 1976.

2. Spies, G.J.: "Versterkte Materialen", Collegedictaar ka 83, TH-Delft, Afdeling der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, 1972.