

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK

Rapport LR-299

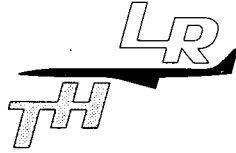
**HET SPANNINGSPROBLEEM IN ANISOTROPE
PLATEN ROND GATEN MET EEN VORM
AFWIJKEND VAN EEN ELLIPS**

door

Th. de Jong

DELFT - NEDERLAND

juni 1980



TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK

Rapport LR-299

**HET SPANNINGSPROBLEEM IN ANISOTROPE
PLATEN ROND GATEN MET EEN VORM
AFWIJKEND VAN EEN ELLIPS**

door

Th. de Jong

DELFT - NEDERLAND

juni 1980

SUMMARY

This document deals with stresses round rectangular and square openings with rounded corners in infinite orthotropic plates. An approximate solution from literature has been used. Numerical results are obtained for three different holes in six different laminates of carbon fibre reinforced plastic.

INHOUDSOPGAVE

1. Inleiding
2. De basisvergelijkingen voor vlakspanningstoestanden in anisotrope platen
3. De exakte oplossing voor ellipsvormige gaten
4. Gatvormen, afwijkend van een ellips
5. De benaderingsoplossing
 - De oplossing voor de ellips
 - De oplossing in eerste benadering
 - De oplossing in tweede benadering
 - Het convergentiegebied van de in een reeks van ϵ ontwikkelde stoorfunctie
6. Berekening van de spanningen
7. De numerieke uitwerking
8. Bespreking van de resultaten en konklusies
9. Literatuur

Figuren

Tabellen

Bijlage

1. INLEIDING

Door de mogelijke toepassing van geavanceerde composietmaterialen in primaire konstrukties van vliegtuigen is de vraag aktueel geworden welke invloed gaten voor inspektie en montage in vleugeldozen hebben op hun omgeving. Voor ellipsvormige gaten (waaronder uiteraard ook cirkelvormige) is het spanningsprobleem in anisotrope platen exakt oplosbaar. Lit. 1 geeft hiervoor de methode, die is gebaseerd op Muskelishvili's methode van de komplexe spanningsfuncties (lit. 2).

Dezelfde methode lijkt zonder problemen ook toepasbaar op gatvormen die afwijken van een ellips, zoals bijvoorbeeld benaderde rechthoeken, vierkanten of ovalen. Lit. 1 gebruikt voor dergelijke gatvormen echter een benaderingsmethode waarvan de numerieke resultaten afwijken van die verkregen met de exakte methode. Zonder daar verder op in te gaan worden in lit. 1 wiskundige problemen als reden voor het niet functioneren van de exakte methode genoemd.

In dit rapport wordt aangegeven waarom de exakte methode inderdaad niet funktioneert voor contouren anders dan een ellips, terwijl het principe van de benaderingsoplossing van lit. 1 is overgenomen voor de oplossing van het spanningsprobleem rond rechthoekige gaten met afgeronde hoeken. Door toepassing van de integraalvoorstelling van Cauchy is de hier gepresenteerde uitwerking echter sneller en wellicht ook nauwkeuriger dan die van lit. 1, die is gebaseerd op een ingewikkeld systeem van coëfficiëntenvergelijking van machtreeksen.

De in dit rapport gepresenteerde numerieke resultaten hebben betrekking op een aantal laminaten van C.F.R.P. (carbon fibre reinforced plastic) die als konstruktiemateriaal relevantie hebben. Het althans voor toepassing in platen minder interessante unidirektionele (U.D.) materiaal is als voorbeeld toegevoegd wegens het extreem anisotrope karakter. De eigenschappen van de gebruikte materialen, gemeten in het laboratorium voor Vormgeving, Fabricage en Vliegtuigmaterialen of

berekend uit gemeten waarden, zijn vermeld in nevenstaande tabel. In deze tabel zijn tevens de grootheden s_1 en s_2 vermeld die van belang zijn voor de spanningsberekening. De rechthoekige gaten met afgeronde hoeken zijn in het algemeen in de platen zo gesitueerd dat de langste zijde in de richting van de grootste stijfheid ligt omdat dit in werkelijke konstrukties ook meestal de richting van de grootste belasting is.

Laminaat	E_x GPa	E_y GPa	G_{xy} GPa	μ_{xy}	s_1	s_2
U.D.	156,77	8,95	5,35	0,3468	5,2899 i	0,7912 i
$(0^\circ/+45^\circ)_s$	119,12	18,75	12,81*	0,6296	2,6742 i	0,9425 i
$(0^\circ/_+45^\circ)_s$	79,75	23,57	16,55*	0,6625	0,2151 + 1,3391 i	-0,2151 + 1,3391 i
$(0^\circ/+45^\circ)_s$	66,12	25,78	20,27*	0,6926	0,5758 + 1,1269 i	-0,5758 + 1,1269 i
$(+45^\circ)_s$	20,20	20,20**	27,74	0,7287	0,8260 + 0,5636 i	-0,8260 + 0,5636 i
$(0^\circ/90^\circ)_s$	63,58	63,58**	5,84*	0,1460	3,2403 i	0,3086 i
quasi-isotroop					i	i

* berekende waarden

** gelijk verondersteld aan E_x

2. DE BASISVERGELIJKINGEN VOOR VLAKSPANNINGSTOESTANDEN IN ANISOTROPE PLATEN

Voor de afleiding van de basisvergelijkingen wordt verwezen naar lit. 1. Hier worden slechts de formules voor de spanningen en de randvoorwaarden-formules voor de belastingen gegeven.

Voor de spanningen geldt

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\operatorname{Re} \sum s_{k\varphi}^2 \phi_k'(z_k) \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re} \sum \phi_k'(z_k) \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re} \sum s_{k\varphi} \phi_k'(z_k)\end{aligned}\quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

De randvoorwaarden voor de belastingen zijn

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} \sum \phi_k(z_k) &= \int_0^s Y_y \, ds + K_1 \\ 2\operatorname{Re} \sum s_{k\varphi} \phi_k(z_k) &= - \int_0^s X_x \, ds + K_2\end{aligned}\quad (2.2)$$

waarin X_x en Y_y belastingscomponenten zijn. K_1 en K_2 zijn integratiekonstanten, de index φ geeft aan dat er tussen de materiaalassen en de coördinaatassen een hoek φ is.

$\phi_k(z_k)$ zijn voorsnag willekeurige, analytische funkties van de komplexe grootheden

$$z_k = x + s_{k\varphi} y \quad (2.3)$$

waarin $s_{k\varphi}$ wordt bepaald door de vergelijking

$$c_{11\varphi} s_{\varphi}^4 - 2 c_{16\varphi} s_{\varphi}^3 + (2 c_{12\varphi} + c_{66\varphi}) s_{\varphi}^2 - 2 c_{26\varphi} s_{\varphi} + c_{22\varphi} = 0$$

die behalve $s_{k\varphi}$ ook $\overline{s}_{k\varphi}$ als wortels heeft.

$$s_{k\varphi} = \frac{s_k \cos \varphi - \sin \varphi}{s_k \sin \varphi + \cos \varphi} \quad (2.4)$$

waarin voor s_k geldt

$$s_1 s_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}} \quad (2.5a)$$

$$s_1^2 + s_2^2 = - \frac{2 c_{12} + c_{66}}{c_{11}} \quad (2.5b)$$

c_{ij} zijn de materiaalcomplianties t.o.v. de materiaalassen, $c_{ij\varphi}$ zijn de complianties t.o.v. de koördinaatassen. s_1 en s_2 kunnen zowel complex als puur imaginair zijn.

De functies $\phi_k(z_k)$ hebben voor spanningsproblemen rond gaten waarbij geen resulterende kracht op de gatrand werkt als meest algemene vorm

$$\phi_k(z_k) = g_{-2}^{(k)} z_k^2 + g_{-1}^{(k)} z_k + g_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} \quad (2.6)$$

De termen met z_k^2 zijn aanwezig indien de plaat in P_{∞} in het vlak op buiging wordt belast, de termen met z_k zijn nodig bij konstante normaalspanningen of schuifspanningen in P_{∞} . De reeksen met negatieve machten van z_k geven de stoorspanningen t.g.v. de aanwezigheid van een gat in de plaat. De reeksen, buiten de gatrand holomorf, worden $\phi_k^0(z_k)$ genoemd.

In dit memorandum worden slechts platen beschouwd, belast door normaalspanningen p_x in X-richting, p_y in Y-richting en een schuifspanning p_{xy} , waardoor $g_{-2}^{(k)} = 0$.

Verder wordt $\varphi = 0$ genomen (geen hoek tussen materiaalassen en koör-

dinaatassen), waardoor

$$s_{k\varphi} = s_k \quad (2.7)$$

en, volgens lit. 2

$$g_{-1}^{(k)} = \frac{p_x - p_y \frac{s_l^2}{s_k^2} - p_{xy} (s_k + s_l)}{2 (s_k^2 - s_l^2)} \quad \begin{matrix} k = 1, 2 \\ l = 2, 1 \end{matrix}$$

De stoorfuncties $\phi_k^0(z_k)$ kunnen worden opgelost uit de randvoorwaardenvergelijkingen voor de gatrand. Omdat hier slechts naar onbelaste gatranden zal worden gekeken, zullen uitsluitend de randvoorwaardenvergelijkingen voor de belastingen (2.2) worden gebruikt. De oplossing voor spanningsproblemen, waarbij de verplaatsingen op de gatrand zijn voorgeschreven, is principieel echter niet anders dan de hier gepresenteerde.

3. DE EXAKTE OPLOSSING VOOR ELLIPSVORMIGE GATEN

Het gebied rond een ellipsvormig gat in het z-vlak wordt afgebeeld op het gebied rond de eenheidscirkel

$$\sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.1)$$

in het ζ -vlak met de transformatieformule

$$z = R \left(\frac{1+c}{2} \zeta + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \quad (3.2)$$

waarin R de halve as van de ellips langs de X-as is en Rc de halve as langs de Y-as. R is in feite een schaaalfactor die hier 1 wordt genomen. Voor c is 1 wordt de ellips uiteraard een cirkel.

Uit

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ z_k &= x + s_k y \end{aligned} \quad (3.3)$$

volgt:

$$z_k = \frac{1 - is_k}{2} z + \frac{1 + is_k}{2} \bar{z} \quad (3.3)$$

ofwel, met (3.2)

$$z_k = \frac{1 - is_k}{2} \left(\frac{1+c}{2} \zeta + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) + \frac{1 + is_k}{2} \left(\frac{1+c}{2} \bar{\zeta} + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\zeta} \right) \quad (3.4)$$

Op de eenheidscirkel is $\zeta = \sigma$ en $\bar{\zeta} = \bar{\sigma} = \sigma^{-1}$, zodat voor een punt z op de gatrand van de ellips geldt:

$$z = \frac{1+c}{2} \sigma + \frac{1-c}{2} \sigma^{-1} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \theta = \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2} \\
 y &= c \sin \theta = c \frac{\sigma - \sigma^{-1}}{2i}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

terwijl voor datzelfde punt eveneens geldt, volgend uit (3.3) en (3.6)

$$z_k = \frac{1 - is_k c}{2} \sigma + \frac{1 + is_k c}{2} \sigma^{-1}
 \tag{3.7}$$

(3.7) geeft dus de bij een punt z op de gatrand behorende koördinaat z_k als functie van de eenheidscirkel σ . (3.7) is een kwadratische vergelijking waaruit σ kan worden opgelost als functie van resp. z_1 en z_2

$$\sigma = \frac{z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - s_1^2 c^2 - 1}}{1 - is_1 c} = \frac{z_2 \pm \sqrt{z_2^2 - s_2^2 c^2 - 1}}{1 - is_2 c}
 \tag{3.8}$$

Kennelijk zijn er twee identieke combinaties van de verschillende coördinaten z_1 en z_2 die op de eenheidscirkel in het ζ -vlak beide gelijk zijn aan σ . Deze twee combinaties zullen ζ_1 en ζ_2 worden genoemd,

$$\zeta_1 = \frac{z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - s_1^2 c^2 - 1}}{1 - is_1 c}
 \tag{3.9a}$$

$$\zeta_2 = \frac{z_2 \pm \sqrt{z_2^2 - s_2^2 c^2 - 1}}{1 - is_2 c}
 \tag{3.9b}$$

die dus als eigenschap hebben dat voor de bij een punt z op de cirkelvormige of ellipsvormige gatrand behorende z_1 en z_2 geldt:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \sigma = \cos \theta + i \sin \theta
 \tag{3.10}$$

Met (3.9) zullen nu de randvoorwaarden langs de gatrand zo te formuleren blijken te zijn, dat de spanningsfunctie $\phi_k(z_k)$ er eenvoudig uit op te lossen zijn.

Voor een onbelaste gatrand worden de randvoorwaardenformules (2.2)

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum \phi_k(z_k) &= 0 \\ 2\operatorname{Re} \sum s_k \phi_k(z_k) &= 0 \end{aligned}$$

Met de bekende coëfficiënten $g_{-1}^{(k)}$ wordt voor de stoorfuncties $\phi_k^0(z_k)$ gevonden

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum \phi_k^0(z_k) &= -p_y x + p_{xy} y = f_1 \\ 2\operatorname{Re} \sum s_k \phi_k^0(z_k) &= -p_x y + p_{xy} x = f_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

waarin f_1 en f_2 uitgedrukt in σ worden:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{ip_{xy} c - p_y}{2} \sigma^{-1} - \frac{ip_{xy} c + p_y}{2} \sigma \\ f_2 &= \frac{p_{xy} - ip_x c}{2} \sigma^{-1} + \frac{p_{xy} + ip_x c}{2} \sigma \end{aligned} \quad (3.12)$$

In (3.11) zijn de integratiekonstanten K_1 en K_2 en de konstante termen $g_0^{(k)}$ verder niet beschouwd.

In (3.11) staan nu volgens (2.6) links van het gelijktaken machtrekken in z_k en rechts machtrekken (met weliswaar slechts twee termen, zie (3.12)) in σ . Het oplossen van $g_n^{(k)}$ uit (3.7) is daarmee principieel mogelijk via de methode van coëfficiënten-vergelijking, doch is onuitvoerbaar door de zeer ingewikkelde reeksen in $\cos n\theta$ en $\sin n\theta$ die door z_k^{-n} in de machtrekken $\phi_k^0(z_k)$ worden gegenereerd.

Door het verband (3.7) zoals dat op de gatrand geldt tussen z_1 en z_2 enerzijds en σ anderzijds is het daar mogelijk de machtrekken in z_k

te vervangen door machtreeksen in σ ,

$$\phi_k^0(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} = \phi_k^0(\sigma) \quad (3.13)$$

waarbij $\phi_k^0(\sigma)$ ook uitsluitend negatieve exponenten heeft.

Met (3.13) worden de randvoorwaardenformules (3.11) ook in het linkerlid geschreven in de koördinaat σ en niet meer in z_k . Kennelijk geeft σ aan de analytische functies $\phi_k^0(z_k)$ een geschiktere vorm voor het oplossen van de randvoorwaarden.

N.B.: Het is eenvoudig in te zien dat de machtreeksen $\phi_k^0(z_k)$ in z_k op de gatrand mogen worden vervangen door reeksen in σ . Immers, uit (3.7) volgt, met

$$\alpha_k = \frac{1 + i s_k c}{1 - i s_k c} \quad |\alpha_k| < 1 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{z_k} = \frac{2}{\sigma(1 - i s_k c)} \frac{1}{1 + \alpha_k \sigma^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)*} \sigma^{-n} \quad (3.15)$$

dus z_k^{-1} is een reeks met uitsluitend negatieve exponenten. Hetzelfde geldt dan voor z_k^{-3} , z_k^{-5} z_k^{-n} , zodat op de gatrand

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} = \phi_k^0(\sigma)$$

een reeks is in σ met uitsluitend negatieve exponenten.

Randvoorwaarden (3.11) worden nu met (3.13) als volgt

$$\begin{aligned} \sum_k \left\{ \phi_k^0(\sigma) + \overline{\phi_k^0(\sigma)} \right\} &= f_1 \\ \sum_k \left\{ s_k \phi_k^0(\sigma) + \overline{s_k \phi_k^0(\sigma)} \right\} &= f_2 \end{aligned} \quad k = 1, 2 \quad (3.16a)$$

of, na herschrijven

$$(s_\ell - s_k) \phi_k^0(\sigma) + (s_\ell - \bar{s}_k) \overline{\phi_k^0(\sigma)} + (s_\ell - \bar{s}_\ell) \overline{\phi_\ell^0(\sigma)} = s_\ell f_1 - f_2 \quad (3.16b)$$

$$k = 1, 2 \quad \ell = 2, 1$$

$\phi_k^0(\sigma)$ is volgens (3.8) en (3.9) de randwaarde van een buiten de gatrand holomorfe funktie $\phi_k^0(\zeta_k)$ die door de uitsluitend negatieve machten van ζ_k in P_∞ nul wordt. Volgens de integraalvoorstelling van Cauchy geldt dan ook voor de in het linkerlid van (3.16b) voorkomende $\phi_k^0(\sigma)$ en $\overline{\phi_k^0(\sigma)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi_k^0(\sigma)}{\sigma - \zeta_k} d\sigma &= \phi_k^0(\zeta_k) \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{\phi_k^0(\sigma)}}{\sigma - \zeta_k} d\sigma &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

zodat deze integraalvoorstelling, toegepast op (3.16b) als geheel direkt als oplossing van de stoorfunctie geeft

$$(s_\ell - s_k) \phi_k^0(\zeta_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{s_\ell f_1 - f_2}{\sigma - \zeta_k} d\sigma$$

In de integrand in het rechterlid staan volgens (3.12) een positieve en een negatieve macht van σ . De kringintegraal van het deel van de integrand met de positieve macht is echter nul, volgens Cauchy geeft het deel met de negatieve macht direkt

$$(s_\ell - s_k) \phi_k^0(\zeta_k) = - \frac{s_\ell p_y - i p_x c + (1 - i s_\ell c) p_{xy}}{2} \zeta_k^{-1} \quad (3.18)$$

Hiermee zijn de stoorfuncties voor een ellipsvormige opening dus opgelost. Omdat voor het berekenen van de spanningen nog moet worden gedifferentieerd naar z_k , worden met (3.9) de stoorfuncties in hun uiteindelijke vorm

$$\phi_k^0(z_k) = \frac{s_\ell p_y - i p_x c + (1 - i s_\ell c) p_{xy}}{2(s_k - s_\ell)} \left\{ \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - s_k^2 c^2 - 1}}{1 - i s_k c} \right\}^{-1} \quad (3.19)$$

Met (2.8) en (3.19) zijn de spanningsfuncties

$$\phi_k(z_k) = g_{-1}^{(k)} z_k + \phi_k^0(z_k)$$

voor door p_x , p_y en p_{xy} belaste anisotrope platen met ellipsvormige gaten volledig bekend in z_k en kunnen met (2.1) de spanningen op iedere willekeurige plaats, zowel op de gatrand als in het veld daarbuiten, worden berekend.

Resumerend kan worden gesteld dat het spanningsprobleem rond ellipsvormige contouren in anisotrope platen op relatief eenvoudige wijze is op te lossen omdat de stoorfuncties in de twee verschillende coördinaten z_1 en z_2 kunnen worden vervangen door stoorfuncties in de twee eveneens verschillende coördinaten ζ_1 en ζ_2 , die op de gatrand echter de eigenschap hebben

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \sigma$$

In de randvoorwaardenformules voor de gatrand zijn daarmee de twee stoorfuncties en de belastingen in één coördinaat σ uit te drukken. De stoorfuncties, uitgedrukt in σ bestaan uit uitsluitend negatieve machten van σ waardoor de snel tot een oplossing leidende integraalvoorstelling van Cauchy kan worden toegepast. De oplossing van het spanningsprobleem is exakt en geldig voor het hele gebied inclusief de gatrand.

4. GATVORMEN, AFWIJKEND VAN EEN ELLIPS

De transformatieformule

$$z = \frac{1+c}{2} \zeta + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\zeta} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n} \quad (4.1)$$

beeldt het gebied rond een willekeurige contour in het z -vlak af op het gebied rond de eenheidscirkel in het ζ -vlak.

Voor de contour zelf geldt

$$z = \frac{1+c}{2} \sigma + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\sigma} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sigma^{-n} \quad (4.2)$$

waarin de eerste twee termen weer een ellips voorstellen (vergelijk (3.5)) en de reeks een afwijking van de ellips geeft. Zo worden met $n = 2, 5, 8$ etc. driehoeken en met $n = 3, 7, 11$ etc. rechthoeken of ruiten verkregen. Voor $n \rightarrow \infty$ hebben deze contouren scherpe hoeken, wordt de reeks afgebroken dan krijgen de contouren afgeronde hoeken.

Hier zal slechts één term van de reeks worden gebruikt, en wel de term met $n = 3$. Is ε per definitie positief en wordt $c_3 = -1$ genomen dan is

$$z = \frac{1+c}{2} \sigma + \frac{1-c}{2} \sigma^{-1} - \varepsilon \sigma^{-3} \quad (4.3)$$

$$x = \cos \theta - \varepsilon \cos 3\theta = \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2} - \varepsilon \frac{\sigma^3 + \sigma^{-3}}{2} \quad (4.4)$$

$$y = c \sin \theta + \varepsilon \sin 3\theta = c \frac{\sigma - \sigma^{-1}}{2i} + \varepsilon \frac{\sigma^3 - \sigma^{-3}}{2i}$$

(4.3) beschrijft een rechthoekige contour (met afgeronde hoeken) waarvan de zijden evenwijdig met de koördinaatassen lopen. De halve lange zijde, evenwijdig aan de X -as, is $1-\varepsilon$, de halve korte zijde is $c-\varepsilon$. Met $c=1$ wordt de rechthoek uiteraard een vierkant (zou $c_3 = +1$ zijn genomen dan wordt de rechthoek een ruit en het vierkant wordt geroteerd over 45°).

Bij ellipsvormige gaten konden op de gatrand de stoorfuncties in de coördinaten z_k worden vervangen door machtreeksen in σ met uitsluitend negatieve exponenten. Bij andere gatvormen is dat niet het geval, zoals uit het volgende blijkt.

Ook nu geldt voor het verband tussen z_k en z formule (3.3), die geschreven wordt als

$$z_k = \frac{1 - is_k}{2} z \left(1 + \lambda_k \frac{\bar{z}}{z} \right) \quad \lambda_k = \frac{1 + is_k}{1 - is_k}$$

ofwel

$$\frac{1}{z_k} = \frac{2}{1 - is_k} \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \lambda_k \frac{\bar{z}}{z}} \quad (4.5)$$

Op de gatrand geldt volgens (4.3)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1+c}{2} \sigma \left(1 + \frac{1-c}{1+c} \sigma^{-2} - \frac{2\varepsilon}{1+c} \sigma^{-4} \right)} \quad (4.6)$$

(4.6) is een machtreeks in σ met uitsluitend negatieve exponenten indien

$$\left| \frac{1-c}{1+c} \sigma^{-2} - \frac{2\varepsilon}{1+c} \sigma^{-4} \right| < 1 \quad (4.7)$$

en dit is altijd zo voor $\varepsilon < c$ (deze voorwaarde tast de eenduidigheid en konformiteit van transformatie (4.1) niet aan; zie de bijlage).

$$\text{Dus } \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* \sigma^{-n} \quad \text{met } n \text{ oneven} \quad (4.8)$$

In (4.5) is verder, met $\left| \lambda_k \frac{\bar{z}}{z} \right| < 1$

$$\frac{1}{1 + \lambda_k \frac{\bar{z}}{z}} = 1 - \lambda_k \frac{\bar{z}}{z} + \left(\lambda_k \frac{\bar{z}}{z} \right)^2 - \dots \quad (4.9)$$

waarin uit (4.3) en (4.8) voor $\frac{\bar{z}}{z}$ volgt:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \left(\frac{1+c}{2} \sigma^{-1} + \frac{1-c}{2} \sigma - \varepsilon \sigma^3 \right) \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* \sigma^{-n} \quad (4.10)$$

(4.10) is een machtreeks in σ , die begint met $-\varepsilon d_1 \sigma^2$ en verder bestaat uit een konstante en termen met negatieve, even machten van σ , zodat ook (4.9) een machtreeks is in σ met zowel positieve als negatieve even machten en uiteraard een konstante.

(4.8) en (4.9) geven samen voor $\frac{1}{z_k}$ in (4.5) een machtreeks in σ met zowel positieve als negatieve oneven machten, ofwel

$$\frac{1}{z_k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n^{(k)} \sigma^n \quad n \text{ oneven}$$

Hetzelfde geldt dan uiteraard ook voor z_k^{-3} , z_k^{-5} etc. zodat op de gatrand

$$\phi_k^0(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(k)} \sigma^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{-n}^{(k)} \sigma^{-n} + c_n^{(k)} \sigma^n \right) \quad (4.11)$$

De spanningsfuncties behorend bij andere gatvormen dan ellipsen, die worden uitgedrukt in de eenheidscirkel σ , hebben behalve termen met negatieve machten ook termen met positieve machten van σ . (4.11) is dan ook de randwaarde van een functie $\phi_k^0(\zeta_k)$ die in P_{∞} niet nul wordt en waarvoor geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{\phi_k^0(\sigma)}}{\sigma - \zeta_k} d\sigma \neq 0$$

De integraalvoorstelling van Cauchy, toegepast op randvoorwaarden (3.16b), geeft nu dus, anders dan bij de ellips, niet direkt de stoorfunctie $\phi_k^0(\zeta_k)$. Immers, door de positieve machten van σ in $\phi_k^0(z_k)$, die in $\overline{\phi_k^0(z_k)}$ negatieve machten worden, geeft Cauchy,

$$\begin{aligned}
& (s_\ell - s_k) \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(k)} \zeta_k^{-n} + (s_\ell - \bar{s}_k) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n^{(k)} \zeta_k^{-n} + \\
& + (s_\ell - \bar{s}_\ell) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n^{(\ell)} \zeta_k^{-n} \\
& = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{s_\ell f_1 - f_2}{\sigma - \zeta_k} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$k = 1, 2 \quad \ell = 2, 1$$

Coëfficiëntenvergelijking van gelijke machten van ζ_k levert nu voor iedere n twee vergelijkingen met vier onbekenden $c_{-n}^{(k)}$ en $\bar{c}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2$), waarvan oplossing niet mogelijk is. Het willekeurig kiezen van twee van de onbekenden, zodanig dat aan de randvoorwaarden blijft voldaan, is niet mogelijk omdat $\bar{c}_n^{(k)}$ via de reeksontwikkeling van z_k^{-n} op de gatrand is gekoppeld aan $c_{-n}^{(k)}$. De twee (onbekende) koppelingen vormen namelijk de twee ontbrekende vergelijkingen voor elke waarde van n .

N.B.: In het voorgaande is min of meer als vanzelfsprekend aangenomen dat er een koördinaat ζ_k is met als randwaarde σ .

Een dergelijk eenvoudige relatie tussen ζ_k en z_k als bij de ellips is nu echter niet te geven omdat z_k , uitgedrukt in σ , een vierdegraads vergelijking is.

Uit het voorgaande blijkt dat de oplossingsmethode, die bij ellipsen snel de stoorfunctie $\phi_k^0(z_k)$ geeft, bij andere kontouren stelsels geeft van twee vergelijkingen met vier onbekenden. Wordt aangenomen dat de stoorfunctie in de koördinaten z_k op de gatrand kunnen worden vervangen door machtreeksen in σ met uitsluitend negatieve exponenten, dan worden in (4.12) de coëfficiënten $\bar{c}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2$) veronachtzaamd en leidt oplossing van $c_{-n}^{(k)}$ uit (4.12) tot foutieve resultaten.

5. DE BENADERINGSOPLOSSING

In het voorgaande is gebleken dat bij contouren afwijkend van een ellips het aantal op te lossen coëfficiënten van de stoorfunctie $\phi_k^o(z_k)$ groter is dan het aantal beschikbare vergelijkingen. In lit. 1 wordt daarom een oplossingsmethode gegeven waarbij de ontbrekende vergelijkingen worden gekreëerd door op de gatrand de stoorfuncties, die daar volgens (4.5), (4.6) en (4.10) niet alleen functies van σ doch ook van ε zijn, te ontwikkelen in machtreeksen van de (kleine) coëfficiënt ε .

$$\phi_k^o(z_k) = \phi_{k0}^o + \varepsilon \phi_{k1}^o + \dots + \varepsilon^m \phi_{km}^o + \dots \quad (5.1)$$

waarin

$$\phi_{km}^o = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{d\varepsilon^m} \phi_k^o(z_k) \right\}_{\varepsilon=0}$$

Met (5.1) worden de randvoorwaardenvergelijkingen (3.11) zowel in het linkerlid als in het rechterlid machtreeksen van ε . Vergelijking van coëfficiënten van ε^m levert de extra vergelijkingen, nodig om $\phi_k^o(z_k)$ te kunnen bepalen. Deze coëfficiënten zelf zijn machtreeksen in σ waarvan de onbekende coëfficiënten evens door vergelijking of met de integraalvoorstelling van Cauchy kunnen worden opgelost.

Deze methode is een benaderingsmethode omdat (5.1) na een bepaalde term zal moeten worden afgebroken. Gebeurt dit direkt na de eerste term, dan wordt in feit $\varepsilon = 0$ gesteld en geeft (4.3) de transformatieformule voor de ellips. Door in (5.1) uitsluitend de eerste term te gebruiken worden dan ook de resultaten van het spanningsprobleem rond een ellips verkregen. Anders gezegd: de willekeurige gatvorm is dan benaderd door een ellips. Door ook de tweede term in (5.1) te gebruiken wordt een eerste benadering van het spanningsprobleem rond de werkelijke gatvorm verkregen.

De hiermee berekende "verfijning" van de spanningen wordt op de

spanningen, verkregen uit de elliptische benadering, gesuperponeerd. De derde term uit (5.1) geeft een tweede, nauwkeuriger benadering etc.

De randvoorwaardenvergelijkingen (3.11), met (4.4) en (5.1) geschreven als machtreeksen van ε , worden

$$\begin{aligned} \sum_k \left\{ \phi_{k0}^0 + \overline{\phi_{k0}^0} + \dots + \varepsilon^m \phi_{km}^0 + \varepsilon^m \overline{\phi_{km}^0} \right\} \\ = \left\{ \frac{ip_{xy}c-p_y}{2} \sigma^{-1} - \frac{ip_{xy}c+p_y}{2} \sigma \right\} + \varepsilon \left\{ \frac{p_y+ip_{xy}}{2} \sigma^{-3} + \frac{p_y-ip_{xy}}{2} \sigma^3 \right\} \\ \sum_k \left\{ s_k \phi_{k0}^0 + \overline{s_k \phi_{k0}^0} + \dots + \varepsilon^m s_k \phi_{km}^0 + \varepsilon^m \overline{s_k \phi_{km}^0} \right\} \\ = \left\{ \frac{p_{xy}-ip_xc}{2} \sigma^{-1} + \frac{p_{xy}+ip_xc}{2} \sigma \right\} - \varepsilon \left\{ \frac{p_{xy}+ip_x}{2} \sigma^{-3} + \frac{p_{xy}-ip_x}{2} \sigma^3 \right\} \end{aligned}$$

$$k = 1, 2 \quad (5.2)$$

De coëfficiënten van ε^m ($m = 0, 1$) in het rechterlid zijn machtreeksen van σ , weliswaar met slechts twee termen. De coëfficiënten ϕ_{km}^0 ($m = 0, 1, 2, 3$ etc.) van ε^m in het linkerlid, in eerste instantie geschreven in de coördinaten z_k , zullen daarom ook moeten worden uitgedrukt in σ .

Door het definiëren van een nieuwe veranderlijke ζ'_k gebeurt dit als volgt. Formule (3.3) geeft met transformatieformule (4.1) voor het verband tussen z_k en ζ , waarbij dus $n = 3$ en $c_3 = -1$

$$\begin{aligned} z_k = \frac{1 - is_k}{2} \left\{ \frac{1+c}{2} \zeta + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\zeta} + \lambda_k \left(\frac{1+c}{2} \bar{\zeta} + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right. \\ \left. - \varepsilon \left(\zeta^{-3} + \lambda_k \bar{\zeta}^{-3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

of, met

$$\frac{1+c}{2} \zeta + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\zeta} + \lambda_k \left(\frac{1+c}{2} \bar{\zeta} + \frac{1-c}{2} \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) = \zeta_k' \quad (5.4a)$$

$$z_k = \frac{1 - i s_k}{2} \left\{ \zeta_k' - \varepsilon \left(\zeta^{-3} + \lambda_k \bar{\zeta}^{-3} \right) \right\} \quad (5.5a)$$

Voor de gatrand wordt dus, met $\zeta = \sigma$

$$\zeta_k' = \frac{1+c}{2} \sigma + \frac{1-c}{2} \sigma^{-1} + \lambda_k \left(\frac{1+c}{2} \sigma^{-1} + \frac{1-c}{2} \sigma \right) \quad (5.4b)$$

$$\text{en} \quad z_k = \frac{1 - i s_k}{2} \left\{ \zeta_k' - \varepsilon \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \right\} \quad (5.5b)$$

Oplossen van σ uit (5.4b) geeft

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\zeta_1' \pm \sqrt{\zeta_1'^2 - 2(1+c^2)\lambda_1 - (1-c^2)(1+\lambda_1^2)}}{1+c+\lambda_1(1-c)} \\ &= \frac{\zeta_2' \pm \sqrt{\zeta_2'^2 - 2(1+c^2)\lambda_2 - (1-c^2)(1+\lambda_2^2)}}{1+c+\lambda_2(1-c)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Kennelijk zijn er ook nu twee identieke combinaties van de verschillende grootheden ζ_1' en ζ_2' die op de gatrand beide gelijk zijn aan σ . Deze combinaties worden, evenals in (3.9), ζ_1 en ζ_2 genoemd

$$\zeta_k = \frac{\zeta_k' \pm \sqrt{\zeta_k'^2 - 2(1+c^2)\lambda_k - (1-c^2)(1+\lambda_k^2)}}{1+c+\lambda_k(1-c)} \quad (5.7)$$

$$k = 1, 2$$

Als ζ_k de eenheidscirkel $\zeta_k = \sigma$ doorloopt, dan loopt ζ_k' volgens (5.4b) langs een ellips. Deze situatie is identiek aan die, gegeven door de formules (3.9) en (3.7): ζ_k' speelt hier dezelfde rol als z_k bij de oplossing van het spanningsprobleem rond de ellips.

N.B.: Door in (5.3) $\frac{1 - is_k}{2}$ niet buiten haken te halen wordt op de gatrand

$$\zeta_k' = \frac{1 - is_k^c}{2} \sigma + \frac{1 + is_k^c}{2} \sigma^{-1}$$

$$z_k = \zeta_k' - \varepsilon \left(\frac{1 - is_k}{2} \sigma^{-3} + \frac{1 + is_k}{2} \sigma^3 \right)$$

$$\zeta_k = \frac{\zeta_k' + \sqrt{\zeta_k'^2 - s_k^2 c - 1}}{1 - is_k^c}$$

waardoor de parallel tussen ζ_k' en z_k van het elliptische gat nog duidelijker wordt.

Met de in ζ_k' uitgedrukte z_k wordt dus de stoorfunctie op de gatrand:

$$\phi_k^0(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(k)} \left\{ \zeta_k' - \varepsilon \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \right\}^{-n} \quad (5.8)$$

waarin

$$h_n^{(k)} = g_n^{(k)} \left(\frac{1 - is_k}{2} \right)^{-n}$$

en waarmee de in (5.1) voorkomende ϕ_{km}^0 eenvoudig in ζ_k' zijn uit te drukken.

Immers

$$\begin{aligned}\phi_{km}^0 &= \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{d\varepsilon^m} \phi_k^0(z_k) \right\}_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{m!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right)^m \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(k)} n(n+1) \dots (n+m-1) (\zeta_k^1)^{-n-m} \\ & \quad k = 1, 2 \quad (5.9)\end{aligned}$$

Omdat in (5.9) door (5.4b) $(\zeta_k^1)^{-1}$ door een machtreeks van σ met uitsluitend negatieve exponenten kan worden vervangen, en dus de hele sommatie in (5.9) een machtreeks in σ met negatieve exponenten is, is ook ϕ_{km}^0 volledig uitgedrukt in σ .

Dit is als volgt eenvoudig in te zien

$$\begin{aligned}\phi_{k0}^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(k)} (\zeta_k^1)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} \\ \phi_{k1}^0 &= \frac{1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(k)} n (\zeta_k^1)^{-n-1} \\ &= \frac{-1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \frac{d}{d\zeta_k^1} \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(k)} (\zeta_k^1)^{-n} \\ &= \frac{-1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \frac{d}{d\zeta_k^1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} \quad (5.10)\end{aligned}$$

$$\phi_{km}^0 = \frac{(-1)^m}{m!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right)^m \frac{d^m}{d\zeta_k^1{}^m} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} \quad (5.11)$$

waarin de differentiatie naar ζ_k^1 met (5.4b) steeds zò kan worden uitgevoerd dat ϕ_{km}^0 volledig in σ blijft uitgedrukt.

Door de term $(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3)^m$ in ϕ_{km}^0 blijkt ook nu, evenals in (4.11), de aanwezigheid van positieve machten van σ in de stoorfunctie $\phi_k^0(z_k)$. Door een stapsgewijze benaderingsoplossing zal het echter mogelijk blijken te zijn positieve machten van σ steeds te koppelen aan in voorgaande stappen opgeloste coëfficiënten. De dan resterende onbekende delen van ϕ_{km}^0 bevatten uitsluitend negatieve machten van σ waardoor de randvoorwaardenvergelijkingen voor die delen oplosbaar zijn en niet leiden tot te weinig vergelijkingen met te veel onbekenden.

De oplossing voor de ellips

Vergelijking van coëfficiënten van ε^0 in (5.2) levert dezelfde vergelijkingen in ϕ_{k0}^0 als die voor de stoorfuncties $\phi_k^0(z_k)$ bij het elliptische gat, vergelijk (3.11). ϕ_{k0}^0 is dan ook gelijk aan die $\phi_k^0(z_k)$.

$$\phi_{k0}^0 = c_1^{(k)} \sigma^{-1} = \frac{s_\ell p_y - i p_x + (1 - i s_\ell c) p_{xy}}{2(s_k - s_\ell)} \sigma^{-1} \quad (5.12)$$

$k = 1, 2$

De oplossing in eerste benadering

Vergelijking van coëfficiënten van ε in (5.2) geeft

$$\sum_k \left\{ \phi_{k1}^0 + \overline{\phi_{k1}^0} \right\} = \frac{p_y + i p_{xy}}{2} \sigma^{-3} + \frac{p_y - i p_{xy}}{2} \sigma^3 \quad (5.13)$$

$$\sum_k \left\{ s_k \phi_{k1}^0 + \overline{s_k \phi_{k1}^0} \right\} = - \frac{p_{xy} + i p_x}{2} \sigma^{-3} - \frac{p_{xy} - i p_x}{2} \sigma^3$$

$k = 1, 2$

waarin zich in ϕ_{k1}^0 de inmiddels uit de elliptische benadering van de stoorfunctie bekende $c_1^{(k)}$ bevindt.

Immers, volgens (5.10) is

$$\begin{aligned}\phi_{k1}^0 &= \frac{-1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \frac{d}{d\zeta_k^1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} = \\ &= \frac{1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^{(k)} \sigma^{-n-1} \frac{d\sigma}{d\zeta_k^1}\end{aligned}$$

waarin met

$$\frac{1 - c + \lambda_k (1 + c)}{1 + c + \lambda_k (1 - c)} = \alpha_k \quad |\alpha_k \sigma^{-2}| < 1 \quad (5.14a)$$

$$\frac{2}{1 + c + \lambda_k (1 - c)} = \omega_k \quad (5.14b)$$

voor $\frac{d\sigma}{d\zeta_k^1}$ uit (5.4b) volgt

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\zeta_k^1} &= \frac{2}{1 + c + \lambda_k (1 - c)} \frac{1}{1 - \frac{1 - c + \lambda_k (1 + c)}{1 + c + \lambda_k (1 - c)} \sigma^{-2}} \\ &= \omega_k \sum_{n=0,1,2}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n\end{aligned} \quad (5.15)$$

ofwel

$$\begin{aligned}\phi_{k1}^0 &= \frac{1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \left\{ c_1^{(k)} \sigma^{-2} \omega_k + c_1^{(k)} \sigma^{-2} \omega_k \sum_{n=1,2}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=3}^{\infty} n c_n^{(k)} \sigma^{-n-1} \omega_k \sum_{n=0,1,2}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1!} \left(\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3 \right) \left\{ c_1^{(k)} \sigma^{-2} \omega_k + \sum_{n=4,6}^{\infty} d_n^{(k)*} \sigma^{-n} \right\} \\
&= \lambda_k c_1^{(k)} \omega_k \sigma + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(k)} \sigma^{-n}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\text{Hierin is } d_1^{(k)} = \lambda_k d_4^{(k)*} \tag{5.17}$$

een betrekking die bij de oplossing in tweede benadering nodig zal zijn.

In de eerste term van ϕ_{k1}^0 komt een aan de bekende $c_1^{(k)}$ gekoppelde positieve eerste macht van σ voor, in tegenstelling tot wat vergelijkingen (5.13) suggereren. Het nog onbekende deel van ϕ_{k1}^0 dat $f_{k1}(\sigma)$ zal worden genoemd, bevat uitsluitend negatieve machten van σ . Randvoorwaardenvergelijkingen (5.13) worden nu met (5.16)

$$\begin{aligned}
\sum_k \left\{ f_{k1}(\sigma) + \overline{f_{k1}(\sigma)} \right\} &= \frac{p_y + ip_{xy}}{2} \sigma^{-3} + \frac{p_y - ip_{xy}}{2} \sigma^3 \\
&\quad - \sum_k \left\{ c_1^{(k)} \omega_k \lambda_k \sigma + \overline{c_1^{(k)}} \overline{\omega_k} \overline{\lambda_k} \sigma^{-1} \right\} \\
\sum_k \left\{ s_k f_{k1}(\sigma) + \overline{s_k f_{k1}(\sigma)} \right\} &= - \frac{p_{xy} + ip_x}{2} \sigma^{-3} - \frac{p_{xy} - ip_x}{2} \sigma^3 \\
&\quad - \sum_k \left\{ s_k c_1^{(k)} \omega_k \lambda_k \sigma + \overline{s_k c_1^{(k)}} \overline{\omega_k} \overline{\lambda_k} \sigma^{-1} \right\} \\
&\quad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Omdat $f_{k1}(\sigma)$ de randwaarde is van een functie, holomorf buiten de gatrand en naar nul naderend in P_∞ mag de integraalvoorstelling van Cauchy worden toegepast, waarbij in (5.18) in het rechterlid de termen

met positieve machten van σ verdwijnen.

Na herschrijven van (5.18), op dezelfde wijze als is gebeurd bij (3.16) geeft Cauchy als oplossing voor $f_{k1}(\zeta_k)$

$$f_{k1}(\zeta_k) = \frac{\zeta_k^{-1}}{s_\ell - s_k} \left\{ (s_\ell - \bar{s}_k) \bar{\omega}_k \bar{\lambda}_k \overline{c_1^{(k)}} + (s_\ell - \bar{s}_\ell) \bar{\omega}_\ell \bar{\lambda}_\ell \overline{c_1^{(\ell)}} \right\} \\ + \frac{\zeta_k^{-3}}{2(s_\ell - s_k)} \left\{ s_\ell p_y + (is_\ell + 1) p_{xy} + ip_x \right\} \quad (5.19)$$

waarmee (5.16) wordt voor de gatrand

$$\phi_{k1}^0 = \omega_k \lambda_k c_1^{(k)} \sigma - \frac{\sigma^{-1}}{s_\ell - s_k} \left\{ (s_\ell - \bar{s}_k) \bar{\omega}_k \bar{\lambda}_k \bar{c}_1^{(k)} + (s_\ell - \bar{s}_\ell) \bar{\omega}_\ell \bar{\lambda}_\ell \bar{c}_1^{(\ell)} \right\} \\ + \frac{\sigma^{-3}}{2(s_\ell - s_k)} \left\{ s_\ell p_y + (is_\ell + 1) p_{xy} + ip_x \right\} \\ = \omega_k \lambda_k c_1^{(k)} \sigma + d_1^{(k)} \sigma^{-1} + d_3^{(k)} \sigma^{-3} \quad (5.20)$$

In ϕ_{k1}^0 bevindt zich dus een term met een coëfficiënt $c_1^{(k)}$ die is gevonden door oplossing van het spanningsprobleem rond een ellipsvormige kontour. De andere twee termen zorgen in eerste benadering voor aanpassing aan de randvoorwaarden van de werkelijke kontour.

De oplossing in tweede benadering

Vergelijking van coëfficiënten van ε^2 in (5.2) geeft

$$\sum_k \left\{ \phi_{k2}^0 + \overline{\phi_{k2}^0} \right\} = 0 \quad (5.21)$$

$$\sum_k \left\{ s_k \phi_{k2}^o + \overline{s_k \phi_{k2}^o} \right\} = 0 \quad (5.21)$$

Ook nu moeten positieve machten van σ in ϕ_{k2}^o gekoppeld worden aan de inmiddels bekende coëfficiënten, zodanig dat het onbekende deel van ϕ_{k2}^o weer een reeks is van uitsluitend negatieve machten van σ .

$$\begin{aligned} \phi_{k2}^o &= \frac{(-1)^2}{2!} (\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3)^2 \frac{d^2}{d\zeta_k'^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n} \\ &= \frac{-1}{2!} (\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3)^2 \frac{d}{d\zeta_k'} \left\{ \omega_k c_1^{(k)} \sigma^{-2} + \sum_{n=4,6}^{\infty} d_n^{(k)*} \sigma^{-n} \right\} \\ &= \frac{1}{2!} (\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3)^2 \left\{ 2\omega_k^2 c_1^{(k)} \sigma^{-3} \right. \\ &\quad \left. + \omega_k \sum_{n=4,6}^{\infty} n d_n^{(k)*} \sigma^{-n-1} \right\} \sum_{n=0,1}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n \\ &= \frac{1}{2!} (\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3)^2 \left[2\omega_k^2 c_1^{(k)} \sigma^{-3} \left\{ 1 + \alpha_k \sigma^{-2} + \sum_{n=2,3}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n \right\} \right. \\ &\quad \left. + 4\omega_k d_n^{(k)*} \sigma^{-5} \left\{ 1 + \sum_{n=1,2}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=6,8}^{\infty} \omega_k n d_n^{(k)*} \sigma^{-n-1} \sum_{n=0,1}^{\infty} (\alpha_k \sigma^{-2})^n \right] \end{aligned}$$

ofwel, met (5.17)

$$\phi_{k2}^o = \omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \sigma^3 (1 + \alpha_k \sigma^{-2}) + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)} \sigma + \sum_{n=1,3}^{\infty} e_n^{(k)} \sigma^{-n} \quad (5.22)$$

Het onbekende deel van ϕ_{k2}^0 is dus weer een machtreeks in σ met uitsluitend negatieve exponenten. Dit onbekende deel zal $f_{k2}(\sigma)$ worden genoemd. Randvoorwaardenvergelijkingen (5.21) met daarin (5.22) gesubstitueerd worden dan:

$$\begin{aligned} \sum_k \left\{ f_{k2}(\sigma) + \overline{f_{k2}(\sigma)} \right\} = \\ - \sum_k \left\{ \omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \sigma^3 (1 + \alpha_k \sigma^{-2}) + \overline{\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)}} \sigma^{-3} (1 + \bar{\alpha}_k \sigma^2) \right. \\ \left. + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)} \sigma + 2\overline{\omega_k \lambda_k d_1^{(k)}} \sigma^{-1} \right\} \\ \sum_k \left\{ s_k f_{k2}(\sigma) + \overline{s_k f_{k2}(\sigma)} \right\} = \\ - \sum_k \left\{ s_k \omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \sigma^3 (1 + \alpha_k \sigma^{-2}) + \overline{s_k \omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)}} \sigma^{-3} (1 + \bar{\alpha}_k \sigma^2) \right. \\ \left. + 2s_k \omega_k \lambda_k d_1^{(k)} \sigma + 2\overline{s_k \omega_k \lambda_k d_1^{(k)}} \sigma^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Omdat $f_{k2}(\sigma)$ uitsluitend negatieve machten van σ bevat en dus kan worden beschouwd als de randwaarde van een functie $f_{k2}(\zeta_k)$ die buiten het gat holomorf is en naar nul nadert in P_∞ kan Cauchy ook nu weer worden gebruikt.

Toepassing van Cauchy geeft als oplossing voor $f_{k2}(\zeta_k)$:

$$\begin{aligned} f_{k2}(\zeta_k) = - \left\{ \frac{s_\ell - \bar{s}_k}{s_\ell - s_k} \omega_k^2 \lambda_k^2 \bar{c}_1^{(k)} \zeta_k^{-3} (1 + \bar{\alpha}_k \zeta_k^2) \right. \\ \left. + \frac{s_\ell - \bar{s}_\ell}{s_\ell - s_k} \bar{\omega}_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \bar{c}_1^{(\ell)} \zeta_k^{-3} (1 + \bar{\alpha}_\ell \zeta_k^2) \right\} \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{s_\ell - \bar{s}_k}{s_\ell - s_k} \bar{\omega}_k \bar{\lambda}_k \overline{d_1^{(k)}} \zeta_k^{-1} + 2 \frac{s_\ell - \bar{s}_\ell}{s_\ell - s_k} \bar{\omega}_\ell \bar{\lambda}_\ell d_1^{(\ell)} \zeta_k^{-1} \} \quad (5.23)$$

waarmee ϕ_{k2}^0 op de gatrand wordt, na rangschikken naar machten van σ :

$$\begin{aligned} \phi_{k2}^0 &= \sigma^3 \omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} + \sigma (\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \alpha_k + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)}) \\ &- \frac{\sigma^{-1}}{s_\ell - s_k} \left\{ (s_\ell - \bar{s}_k) (\bar{\omega}_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \bar{c}_1^{(k)} \bar{\alpha}_k + 2\bar{\omega}_k \bar{\lambda}_k \bar{d}_1^{(k)}) \right. \\ &\quad \left. + (s_\ell - \bar{s}_\ell) (\bar{\omega}_\ell^2 \bar{\lambda}_\ell^2 \bar{c}_1^{(\ell)} \bar{\alpha}_\ell + 2\bar{\omega}_\ell \bar{\lambda}_\ell \bar{d}_1^{(\ell)}) \right\} \\ &- \frac{\sigma^{-3}}{s_\ell - s_k} \left\{ (s_\ell - \bar{s}_k) \bar{\omega}_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \bar{c}_1^{(k)} + (s_\ell - \bar{s}_\ell) \bar{\omega}_\ell^2 \bar{\lambda}_\ell^2 \bar{c}_1^{(\ell)} \right\} \\ &= \sigma^3 \omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} + \sigma (\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \alpha_k + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)}) \\ &\quad + e_1^{(k)} \sigma^{-1} + e_3^{(k)} \sigma^{-3} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Met ϕ_{k2}^0 is nu ook de stoorfunctie in tweede benadering bekend. De oplossing in derde benadering wordt niet gegeven; de methode van oplossen is identiek aan die voor de eerste en tweede benadering.

De stoorfunctie ϕ_k^0 voor het benaderde rechthoekige gat wordt nu op de gatrand

$$\phi_k^0 = c_1^{(k)} \sigma^{-1}$$

$$+ \varepsilon \left\{ c_1^{(k)} \omega_k \lambda_k \sigma + d_1^{(k)} \sigma^{-1} + d_3^{(k)} \sigma^{-3} \right\}$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ c_1^{(k)} \omega_k^2 \lambda_k^2 \sigma^3 + (\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \alpha_k + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)}) \sigma \right.$$

$$\left. + e_1^{(k)} \sigma^{-1} + e_3^{(k)} \sigma^{-3} \right\}$$

Uitbreiding van ϕ_k^0 naar het veld buiten de gatrand (en binnen een nog te bepalen konvergentiestraal) kan gebeuren door σ door ζ_k te vervangen (volgens 5.7). Uitbreiding mag nu niet door toepassing van Cauchy gebeuren omdat ϕ_k^0 immers positieve machten van σ bevat. Dit in tegenstelling tot wat is gebeurd bij de bepaling van $f_{km}(\sigma)$, die steeds zò zijn gekonstrueerd dat ze uitsluitend negatieve machten van σ bevatten waardoor Cauchy wel kon worden toegepast en waarbij positieve machten van σ in het rechterlid van de randvoorwaardenvergelijkingen wegvielen.

Het konvergentiegebied van de in een reeks van ε ontwikkelde stoorfunctie

In het voorgaande is gebleken dat de in tweede benadering afgeleide randvoorwaarde $\phi_k^0(\sigma)$ van de stoorfunctie

$$\phi_k^0(z_k) = \phi_{k0}^0 + \varepsilon \phi_{k1}^0 + \varepsilon^2 \phi_{k2}^0$$

positieve machten van σ bevat met als hoogste exponent 3. Dit duidt erop dat

$$\phi_k^0(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \phi_{kn}^0$$

slechts een beperkt konvergentiegebied buiten de gatrand heeft.

De algemene term

$$\varepsilon^m \phi_{km}^0 = \frac{(-1)^m}{m!} \varepsilon^m (\sigma^{-3} + \lambda_k \sigma^3)^m \frac{d^m}{d\zeta_k^m} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sigma^{-n}$$

is zelf een reeks in σ met positieve en negatieve machten van σ waarvan de term met de hoogste positieve macht wordt bepaald door het product van $\lambda_k^m \sigma^{3m}$ en de m^e -afgeleide van $c_1^{(k)} \sigma^{-1}$.

$$\frac{\varepsilon^m}{m!} \lambda_k^m \sigma^{3m} \frac{d^m}{d\zeta_k^m} c_1^{(k)} \sigma^{-1} = \varepsilon^m \lambda_k^m c_1^{(k)} \sigma^{2m-n}$$

De reeksontwikkeling van $\phi_k^0(z_k)$ convergeert nu in een gebied waarvoor geldt

$$\left| \frac{\varepsilon^m \phi_{km}^0}{\varepsilon^{m-1} \phi_{k(m-1)}^0} \right| < 1 \quad \text{voor } m \rightarrow \infty \quad (5.25)$$

Omdat de term met de hoogste positieve macht van σ buiten de gatrand het meest kritisch is voor convergentie kan (5.25) worden vervangen door de eis

$$\left| \frac{\varepsilon^m \lambda_k^m c_1^{(k)} \zeta_k^{2m-n}}{\varepsilon^{m-1} \lambda_k^{m-1} c_1^{(k)} \zeta_k^{2(m-1)-n}} \right| < 1 \quad \text{voor } m \rightarrow \infty$$

ofwel

$$\left| \varepsilon \lambda_k \zeta_k^2 \right| < 1$$

Het convergentiegebied van de reeksontwikkeling van $\phi_k^{\circ}(z_k)$ wordt dus aan de buitenkant begrensd door een cirkel met straal

$$\left| \zeta_k \right| < \sqrt{\frac{1}{\varepsilon |\lambda_k|}} \quad (5.26)$$

De in het voorgaande beschreven methode voor spanningsberekening, gebaseerd op de ontwikkeling van de stoorfuncties in reeksen van ε , kan dus slechts worden gebruikt voor een beperkt gebied buiten de gatrand.

6. BEREKENING VAN DE SPANNINGEN

In het voorgaande is in tweede benadering de randwaarde van de stoorfunctie $\phi_k^0(z_k)$ afgeleid,

$$\phi_k^0(\sigma) = \phi_{k0}^0 + \varepsilon \phi_{k1}^0 + \varepsilon^2 \phi_{k2}^0 \quad (6.1)$$

waarin ϕ_{k0}^0 , ϕ_{k1}^0 en ϕ_{k2}^0 , gegeven in resp. (5.12), (5.20) en (5.24) functies van σ zijn. Omdat σ volgens (5.6) en (5.7) de randwaarde is van ζ_k kan (6.1) naar het veld buiten de gatrand en binnen het door (5.26) bepaalde konvergentiegebied worden uitgebreid door σ door ζ_k te vervangen.

Voor het berekenen van de spanningen met formules (2.1) moet $\phi_k^0(z_k) \equiv \phi_k^0(\zeta_k)$ naar z_k worden gedifferentieerd. Volgens (5.7) is ζ_k nu echter wel als functie van ζ_k' bekend, doch niet als functie van z_k . Het uit (5.3) vinden van een verband tussen σ en z_k op de gatrand (en daarmee van ζ_k en z_k buiten de gatrand) is helaas niet mogelijk omdat (5.3) op die gatrand een vierdegraads vergelijking in σ geeft. Door het ontbreken van een éénduidig verband tussen ζ_k en z_k is het dan ook niet zonder meer mogelijk buiten de gatrand de spanningen te berekenen.

Het is echter wel mogelijk de afgeleide van $\phi_k^0(\zeta_k)$ naar z_k te bepalen in gevallen waar ζ_k en z_k beide slechts van één variabele afhangen, bijvoorbeeld op lijnen $x = \text{konst.}$ of $y = \text{konstant}$ of op de gatrand waar

$$\sigma = \cos \theta + i \sin \theta \quad (6.2)$$

$$z_k = (\cos \theta - \varepsilon \cos 3\theta) + s_k (c \sin \theta + \varepsilon \sin 3\theta) \quad (6.3)$$

Omdat de hoogste spanningen meestal op de gatrand voorkomen zal dit laatste geval verder worden uitgewerkt.

$$\frac{d\sigma}{dz_k} = \frac{d\sigma/d\theta}{dz_k/d\theta} = \frac{-\sin \theta + i \cos \theta}{(-\sin \theta + 3\varepsilon \sin 3\theta) + s_k(c \cos \theta + 3\varepsilon \cos 3\theta)}$$

ofwel, met

$$\begin{aligned} A &= c \cos \theta + 3\varepsilon \cos 3\theta \\ B &= -\sin \theta + 3\varepsilon \sin 3\theta \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\frac{d\sigma}{dz_k} = \frac{i\sigma}{s_k A + B} \quad (6.5)$$

Hiermee worden op de gatrand

- volgend uit (5.12)

$$\frac{d}{dz_k} \phi_{k0}^o = \frac{-i c_1^{(k)} \sigma^{-1}}{s_k A + B} \quad (6.6)$$

- volgend uit (5.20)

$$\frac{d}{dz_k} \phi_{k1}^o = i(\omega_k \lambda_k c_1^{(k)} \sigma - d_1^{(k)} \sigma^{-1} - 3d_3^{(k)} \sigma^{-3}) / (s_k A + B) \quad (6.7)$$

- volgend uit (5.24)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_k} \phi_{k2}^o = i \left\{ 3\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \sigma^3 + (\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \alpha_k + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)}) \sigma \right. \\ \left. - e_1^{(k)} \sigma^{-1} - 3e_3^{(k)} \sigma^{-3} \right\} / (s_k A + B) \end{aligned} \quad (6.8)$$

De gatrand is onbelast zodat voor de normaalspanning σ_t in de doorsnede loodrecht op de gatrand geldt

$$\sigma_t = \sigma_x + \sigma_y$$

Uit (2.1) volgt dan ook voor de gatrand

$$\sigma_t = 2\operatorname{Re} \sum_k (1 + s_k^2) \frac{d}{dz_k} \left\{ \phi_k(\sigma) \right\} \quad k = 1, 2 \quad (6.9)$$

waarin $\phi_k(\sigma)$ behalve de stoorfunctie $\phi_k^o(\sigma)$ ook nog de term $g_{-1}^{(k)} z_k$ bevat die het homogeen spanningsveld geeft en die na differentiëren naar z_k uiteraard uitsluitend $g_{-1}^{(k)}$ geeft.

$$\text{Met} \quad \frac{d}{dz_k} \left\{ \phi_k(\sigma) \right\} = g_{-1}^{(k)} + \frac{d}{dz_k} (\phi_{k0}^o + \varepsilon \phi_{k1}^o + \varepsilon^2 \phi_{k2}^o)$$

wordt σ_t , gerangschikt naar machten van σ

$$\sigma_t = 2\operatorname{Re} \sum_k (1 + s_k^2) \left[g_{-1}^{(k)} + i \left\{ 3\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \varepsilon^2 \sigma^3 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\omega_k^2 \lambda_k^2 c_1^{(k)} \alpha_k \varepsilon^2 + 2\omega_k \lambda_k d_1^{(k)} \varepsilon^2 + \omega_k \lambda_k c_1^{(k)} \varepsilon \right) \sigma \\
& - \left(c_1^{(k)} + d_1^{(k)} \varepsilon + e_1^{(k)} \varepsilon^2 \right) \sigma^{-1} - \left(3d_3^{(k)} \varepsilon \right. \\
& \left. + 3e_3^{(k)} \varepsilon^2 \right) \sigma^{-3} \Big\} / (s_k A + B) \Big] \quad (6.10)
\end{aligned}$$

$$k = 1, 2$$

Volledigheidshalve worden hier alle in (6.10) gebruikte symbolen nog eens gegeven, indien nodig met een kleine toelichting.

- s_k is de oplossing van (2.5)

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sqrt{\frac{r-a}{2}} + i \sqrt{\frac{r+a}{2}} \\
s_2 &= -\sqrt{\frac{r-a}{2}} + i \sqrt{\frac{r+a}{2}}
\end{aligned}
\quad \text{waarin} \quad
\begin{aligned}
r &= \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \\
a &= \frac{E_x}{2G_{xy}} - \mu_{xy}
\end{aligned}$$

- $g_{-1}^{(k)}$ bepaalt het homogene spanningsveld in de plaat; volgens (2.8)

$$g_{-1}^{(k)} = \frac{p_x - p_y s_\ell^2 - p_{xy} (s_\ell + s_k)}{2(s_k^2 - s_\ell^2)} \quad k = 1, 2 \quad \ell = 2, 1$$

p_x , p_y en p_{xy} zijn de belastingskomponenten op de plaat in P_∞

- λ_k , ω_k en α_k

volgens (4.5)

$$\lambda_k = \frac{1 + i s_k}{1 - i s_k}$$

volgens (5.14b)
$$\omega_k = \frac{2}{1 + c + \lambda_k (1 - c)} \quad \left(= \frac{1 - i s_k}{1 - i c s_k} \right)$$

volgens (5.14a)
$$\alpha_k = \frac{1 - c + \lambda_k (1 + c)}{1 + c + \lambda_k (1 - c)} \quad \left(= \frac{1 + i c s_k}{1 - i c s_k} \right)$$

c komt voor in de transformatieformule (4.1) en bepaalt mede de verhouding van de halve lange zijde en de halve korte zijde van de door (4.1) beschreven rechthoek met afgeronde hoeken. Met $c = 1$ wordt de rechthoek een vierkant.

- ε is een (kleine) coëfficiënt, voorkomend in transformatieformule (4.1). ε bepaalt de afronding van de hoeken van de rechthoek. Tevens bepaalt ε mede de verhouding van de halve lange zijde en de halve korte zijde.
De halve lange zijde is $1 - \varepsilon$, evenwijdig aan de X-as,
de halve korte zijde is $c - \varepsilon$, evenwijdig aan de Y-as.
 c is per definitie ≤ 1 verondersteld.

- σ is de eenheidscirkel,

$$\sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Met (4.2) bepaalt θ het verband tussen een punt op de eenheidscirkel in het ζ -vlak en het punt z op de werkelijke gatrand.

- $c_1^{(k)}$ is de coëfficiënt van de elliptische oplossing van het spanningsprobleem.
Volgens (5.12)

$$c_1^{(k)} = \frac{s_\ell p_y - i p_x c + (1 - i s_\ell c) p_{xy}}{2(s_k - s_\ell)} \quad k = 1, 2 \quad \ell = 2, 1$$

- $d_1^{(k)}$ en $d_3^{(k)}$ zijn coëfficiënten, voortkomend uit de oplossing in eerste benadering van het spanningsprobleem rond de werkelijke gat-vorm. Volgens (5.20)

$$d_1^{(k)} = \frac{-\left\{\bar{\omega}_k (s_\ell - \bar{s}_k) \bar{\lambda}_k \bar{c}_1^{(k)} + \bar{\omega}_\ell (s_\ell - \bar{s}_\ell) \bar{\lambda}_\ell \bar{c}_1^{(\ell)}\right\}}{s_\ell - s_k}$$

$$d_3^{(k)} = \frac{s_\ell p_y + (is_\ell + 1) p_{xy} + ip_x}{2(s_\ell - s_k)} \quad k = 1, 2 \quad \ell = 2, 1$$

- $e_1^{(k)}$ en $e_3^{(k)}$ zijn coëfficiënten, voortkomend uit de oplossing in tweede benadering van het spanningsprobleem rond de werkelijke gat-vorm. Volgens (5.24)

$$e_1^{(k)} = - \left\{ (s_\ell - \bar{s}_k) (\bar{\omega}_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \bar{c}_1^{(k)} \bar{\alpha}_k + 2\bar{\omega}_k \bar{\lambda}_k \bar{d}_1^{(k)}) + (s_\ell - \bar{s}_\ell) (\bar{\omega}_\ell^2 \bar{\lambda}_\ell^2 \bar{c}_1^{(\ell)} \bar{\alpha}_\ell + 2\bar{\omega}_\ell \bar{\lambda}_\ell \bar{d}_1^{(\ell)}) \right\} / (s_\ell - s_k)$$

$$e_3^{(k)} = - \left\{ (s_\ell - \bar{s}_k) \bar{\omega}_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \bar{c}_1^{(k)} + (s_\ell - \bar{s}_\ell) \bar{\omega}_\ell^2 \bar{\lambda}_\ell^2 \bar{c}_1^{(\ell)} \right\} / (s_\ell - s_k)$$

$$- A = c \cos \theta + 3\varepsilon \cos 3\theta$$

$$B = -\sin \theta + 3\varepsilon \sin 3\theta$$

Omdat de gatrand onbelast is kunnen uit σ_t eenvoudig σ_x , σ_y en τ_{xy} worden bepaald

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_t \sin^2 \alpha \\ \sigma_y &= \sigma_t \cos^2 \alpha \\ \tau_{xy} &= \sigma_t \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (6.11)$$

waarin α de hoek is tussen de raaklijn aan de kontour en de X-as

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{c \cos \theta + 3\varepsilon \cos 3\theta}{-\sin \theta + 3\varepsilon \sin 3\theta} \quad (6.12)$$

7. DE NUMERIEKE UITWERKING

In Fig. 1 is in het eerste kwadrant voor $c = 1$ en een drietal waarden van ε de contour van een vierkant gat met afgeronde hoeken gegeven. Duidelijk is de invloed van ε op de afronding van de hoeken te zien. Voor de spanningsberekening is gekozen voor $\varepsilon = 0,125$ omdat deze waarde de meest rechte zijden geeft.

Voor de rechthoekige gaten is gekozen voor de combinaties

$$\begin{array}{ll} c = 0,75 & \varepsilon = 0,111 \\ c = 0,5 & \varepsilon = 0,1 \end{array}$$

met als verhoudingen voor de lange en korte zijde resp. 1,39 en 2,25. Deze contouren zijn gegeven in Fig. 2. De bij een aantal waarden van de hoek θ behorende coördinaten x en y staan vermeld in Tabel 1.

De spanning σ_t volgens (6.10) is berekend met een eenvoudig programma in de programmeertaal Fortran die de mogelijkheid van complex rekenen heeft. In de tabellen 2 t/m 8 zijn de waarden van σ_t voor een aantal waarden van θ tussen 0° en 90° voor de in de inleiding genoemde materialen gegeven. De berekeningen zijn gedaan voor resp. $p_x = 1$, $p_y = 1$ en $p_{xy} = 1$. Bij iedere willekeurige combinatie van deze belastingsgevallen zijn de spanningen door eenvoudige superpositie te vinden. De belastingen $p_x = 1$ en $p_y = 1$ geven in $\pi - \theta$ dezelfde spanning als in θ ; voor $p_{xy} = 1$ is de spanning in $\pi - \theta$ gelijk aan die in θ , doch met tegengesteld teken.

Bij isotroop materiaal is $s_1 = s_2 = i$ waardoor de formule voor σ_t tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ leidt. De berekening van de spanningen in isotroop materiaal is dan ook gedaan met E , G en μ waarden die een geringe afwijking van het normale isotrope verband tussen deze grootheden geven zodat s_1 en s_2 niet exakt gelijk zijn aan i .

In Tabel 9 is de spanning σ_t rond een vierkant gat in een aantal laminaten, belast door p_x , vergeleken met de spanningen rond cirkelvormige gaten. In Tabel 10 wordt voor dezelfde gevallen de schuifspanning τ_{xy} gegeven. Tabel 11 vergelijkt waarden van τ_{xy} voor diverse gatvormen, inclusief de rechthoekige, in unidirectioneel materiaal, belast door p_x .

Door een $(0^\circ/90^\circ)_s$ laminaat met een rechthoekig (of vierkant) gat met $p_x = 1$ en $p_y = -1$ te belasten en het geheel daarna over 45° te roteren wordt het geval verkregen van een $(\pm 45^\circ)_s$ laminaat, op afschuiving $p_{xy} = 1$ belast, met een gat waarvan de zijden een hoek van 45° maken met de coördinaatassen. In Tabel 12 is voor het geroteerde vierkante gat en het geroteerde rechthoekige gat met $c = 0,5$ de spanning σ_t vergeleken met die rond de niet geroteerde gaten. In Tabel 13 is dit bovendien gedaan voor de schuifspanning τ_{xy} . De in de Tabellen 12 en 13 gegeven waarden van θ hebben in alle gevallen betrekking op de gaten waarvan de zijden evenwijdig aan de coördinaatassen lopen.

8. BESPREKING VAN DE RESULTATEN EN KONKLUSIES

De hier gepresenteerde oplossing geeft spanningen in tweede benadering. Omdat de derde en hogere benaderingen van de stoorkfuncties moeten worden vermenigvuldigd met ε^3 , ε^4 etc. ($\varepsilon \approx 0,1$) zullen deze de nauwkeurigheid van de oplossing slechts weinig vergroten; in de voorbeelden die lit. 1 geeft is het verschil tussen de spanningen in tweede en derde benadering hoogstens 1%.

Lit. 1 geeft formules voor σ_t (in tweede benadering) in de bij $\theta = 0^\circ$, 45° en 90° behorende punten op de rand van een vierkant gat. Invullen van de hier gebruikte materiaaleigenschappen leidt tot waarden voor σ_t die tot ca 2% afwijken van de in de Tabellen 2 t/m 8 gepresenteerde waarden bij overeenkomstige θ . Lit. 1 werkt met de in zeer ingewikkelde formules resulterende methoden van coëfficiënten-vergelijking. De in dit memorandum gepresenteerde oplossing is weliswaar gebaseerd op hetzelfde principe als die van lit. 1, doch leidt in zijn uitwerking veel direkter en sneller tot relatief eenvoudige formules en is daardoor wellicht nauwkeuriger.

Uit de Tabellen 2 t/m 8 blijkt dat voor de belastingsgevallen $p_x = 1$ en $p_y = 1$ de spanningsconcentratiefactoren geen opvallend hoge waarden aannemen.

Volgens Tabel 9 laat een vergelijking met cirkelvormige gaten zien dat bij unidirectioneel materiaal en het door unidirectionele lagen overheerste $(0_4^\circ/\pm 45^\circ)_s$ laminaat de maximale factoren bij p_x zelfs aanzienlijk lager zijn dan bij cirkelvormige gaten. Bovendien treedt de maximale spanning niet, zoals bij cirkelvormige gaten, op bij $\theta = 90^\circ$, doch dichterbij de hoeken. Het lijkt alsof het gebied rond $\theta = 90^\circ$ "in de schaduw" ligt van de hoeken van rechthoek of vierkant. Dit doet vermoeden dat de maximale normaalspanning op de Y-as niet optreedt aan de gatrand doch enigszins daarbuiten, zoals dat bijvoorbeeld ook het geval is bij een cirkelvormig gat in een door p_x belast $(\pm 45^\circ)_s$ laminaat.

Belangrijk is dat de maximale σ_t voor breuk lang niet altijd bepalend is omdat hij meestal op plaatsen optreedt waar het laminaat in de richting van σ_t de grootste stijfheid, maar vooral ook de grootste sterkte heeft. Een goed voorbeeld daarvan is het unidirektionele materiaal dat bij een treksterkte van $\bar{\sigma}_x = 1500$ MPa bij een vierkant gat met $(\sigma_t/p_x)_{\max} = 4,48$ een theoretische breukbelasting heeft van $\bar{p}_x = 335$ MPa en met een cirkelvormig gat van $\bar{p}_x = 212$ MPa. Uit Tabel 10 blijkt echter dat de maximale schuifspanningsconcentratiefactoren in beide gevallen bij benadering gelijk zijn en bij een toelaatbare schuifspanning van $\bar{\tau}_{xy} = 80$ MPa slechts een breukbelasting $\bar{p}_x = 125$ MPa toelaten. Bij breuk zal dan ook, zoals experimenteel meerdere keren is vastgelegd, een afschuifbreuk in de richting van de belasting optreden en geen trekbreuk loodrecht erop. Uit Tabel 11 blijkt verder dat de maximale schuifspanningsconcentratiefactoren in unidirektioneel materiaal voor alle vier de beschouwde gatvormen bij benadering gelijk zijn; de breuklasten bij deze vier gatvormen zullen dan ook niet ver uiteen liggen.

Een dergelijk eenvoudige redenering t.a.v. breuk is voor de meeste andere laminaten niet te geven. Immers daar zal een breukcriterium, eventueel laagsgewijs toegepast in een groot aantal punten op de gatrand, uitsluitel moeten geven over de vraag hoe en waar breuk optreedt en of een rechthoekig gat ongunstiger of wellicht zelfs gunstiger is dan een cirkelvormig. De tendens die in de resultaten voor unidirektioneel materiaal zit, geldt vermoedelijk ook voor laminaten met een overheersende unidirektionele versterking.

Opvallend is dat bij alle beschouwde laminaten bij belasting p_{xy} rechthoekige of vierkante gaten hoge waarden van de normaalspanning σ_t geven bij de afronding van de hoeken, ongeveer daar waar de gatrand een hoek van 45° maakt met de X-as. Of dit een reden is voor een lage toelaatbare afschuifbelasting is uiteraard afhankelijk van het aantal lagen onder $\pm 45^\circ$. Uit Tabel 12 blijkt dat bij $(\pm 45^\circ)_s$ laminaten het roteren van de gaten over 45° een sterke verlaging van de maximale σ_t

tot gevolg heeft. Bij een toelaatbare trekspanning van 800 MPa in de hoofdrichtingen van het laminaat is voor de vierkante gaten

$$\text{- niet gekanteld } (\sigma_t/p_{xy})_{\max} = 11,3824 \quad \bar{p}_{xy} = 70 \text{ MPa}$$

$$\text{- gekanteld } (\sigma_t/p_{xy})_{\max} = 3,9118 \quad \bar{p}_{xy} = 204 \text{ MPa}$$

Bij $\bar{\tau}_{xy} = 800 \text{ MPa}$ voor het $(+45^\circ)_s$ laminaat en $\bar{\tau}_{xy} = 80 \text{ MPa}$ voor het $(0^\circ/90^\circ)_s$ laminaat worden de toelaatbare afschuifbelastingen, gebaseerd op de maximale schuifspanningen uit Tabel 13:

$$\text{- niet gekanteld } (\tau_{xy}/p_{xy})_{\max} = 5,6912 \quad \bar{p}_{xy} = 140 \text{ MPa}$$

$$\text{- gekanteld } (\tau_{xy}/p_{xy})_{\max} = 0,6655 \quad \bar{p}_{xy} = 120 \text{ MPa}$$

Kennelijk is bij een $(+45^\circ)_s$ laminaat op afschuiving belast het niet gekantelde gat kritiek door overschrijding van de maximaal toelaatbare trek- of drukspanning op plaatsen, behorend bij $\theta = 45^\circ, 135^\circ$ etc.

Voor een rechthoekig gat geldt hetzelfde. Het eventueel kantelen van rechthoekige gaten dient echter wel zo te gebeuren dat de lange zijden onder trek en niet onder druk staan.

Hoewel ook hierover een breukcriterium uitsluitsel moet geven, doen de hier gegeven resultaten vermoeden dat kantelen van rechthoekige of vierkante gaten in andere, door $\pm 45^\circ$ lagen overheerste en voornamelijk door afschuiving belaste laminaten, eveneens zinvol kan zijn.

Tot slot moet worden opgemerkt, dat alle hier vermelde resultaten uitsluitend betrekking hebben op de in de Figuren 1 en 2 gegeven contouren. Verfijning van de transformatieformules van deze contouren, zodanig dat mathematisch betere rechthoeken of vierkanten worden verkregen, heeft behalve rechte zijden ook scherpere hoeken tot gevolg waardoor de spanningen bij die hoeken aanzienlijk kunnen stijgen, hetgeen voor werkelijke konstrukties uiteraard ontoelaatbaar is. Voor konstruktief

realistische gaten met rechte zijden en dezelfde afrondingen van de hoeken als in Figuren 1 en 2 zijn de hier gegeven resultaten echter wel goed bruikbaar.

9. LITERATUUR

1. Lekhnitskii: Anisotropic Plates, Gordon and Breach, London, 1968.
2. Muskhelishvili: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Groningen, 1953.

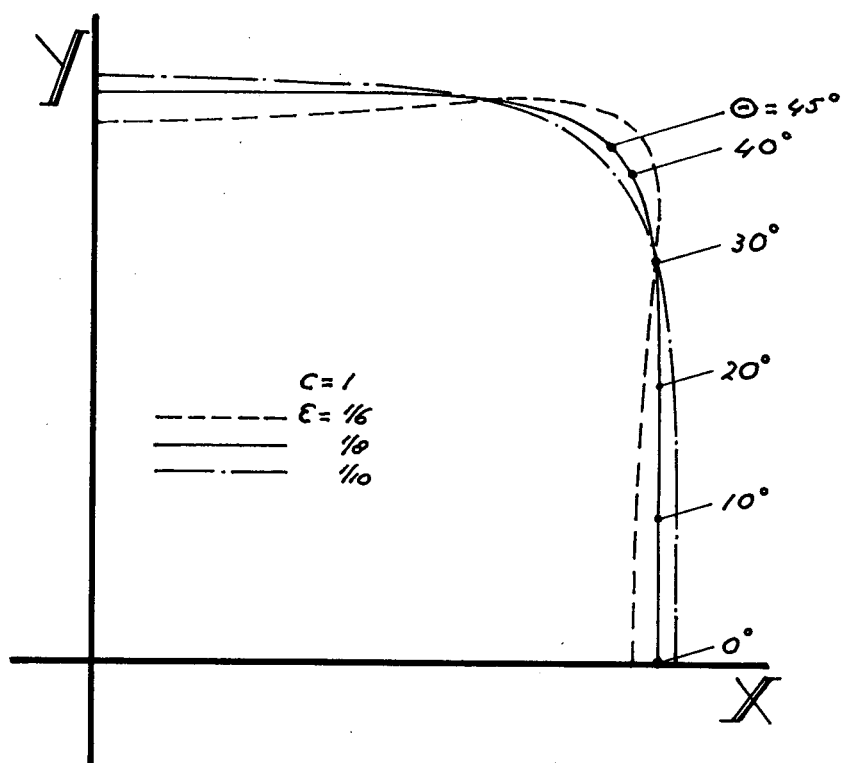


Fig. 1: De contour van een "vierkant" gat voor drie waarden van ε .

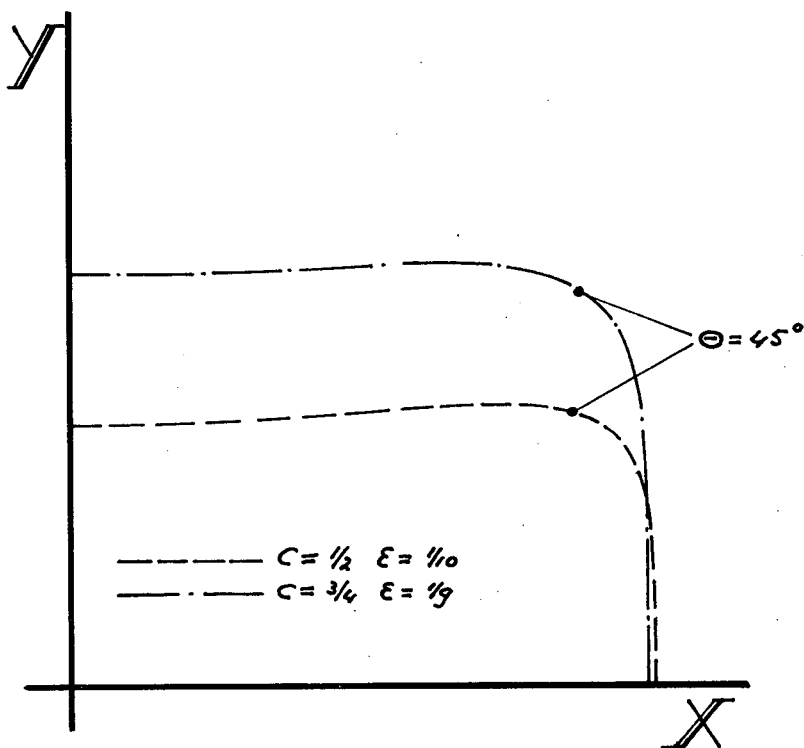


Fig. 2: De contour van twee "rechthoekige" gaten voor twee combinaties van c en ε .

θ°	$c=0,5 \quad \varepsilon=0,1$		$c=0,75 \quad \varepsilon=0,111$		$c=1 \quad \varepsilon=0,125$	
	x	y	x	y	x	y
0	0,9000	0	0,8889	0	0,8750	0
5	0,8996	0,0695	0,8889	0,0941	0,8754	0,1195
10	0,8982	0,1368	0,8886	0,1858	0,8765	0,2361
15	0,8952	0,2001	0,8884	0,2727	0,8775	0,3472
20	0,8897	0,2576	0,8841	0,3527	0,8772	0,4503
25	0,8804	0,3079	0,8775	0,4243	0,8740	0,5434
30	0,8660	0,3500	0,8660	0,4861	0,8660	0,6250
35	0,8450	0,3834	0,8479	0,5375	0,8515	0,6943
40	0,8160	0,4080	0,8216	0,5783	0,8285	0,7510
45	0,7778	0,4243	0,7857	0,6089	0,7955	0,7955
50	0,7294	0,4330	0,7390	0,6301	0,7510	0,8285
55	0,6702	0,4355	0,6809	0,6431	0,6943	0,8515
60	0,6000	0,4330	0,6111	0,6495	0,6250	0,8660
65	0,5192	0,4273	0,5299	0,6510	0,5434	0,8740
70	0,4286	0,4198	0,4382	0,6492	0,4503	0,8772
75	0,3295	0,4122	0,3374	0,6459	0,3472	0,8775
80	0,2236	0,4058	0,2292	0,6424	0,2361	0,8765
85	0,1130	0,4015	0,1159	0,6398	0,1195	0,8754
90	0	0,4000	0	0,6389	0	0,8750

Tabel 1: De bij de hoek θ behorende coördinaten x en y van drie gatkontouren.

Materiaal C.F.R.P. unidirektioneel

$$E_x = 156.77 \text{ GPa} \quad G_{xy} = 5.35 \text{ GPa}$$

$$E_y = 8.95 \text{ GPa} \quad \nu_{xy} = 0.3468$$

θ°	c=0,5			c=0,75			c=1		
	$\varepsilon=0,1$			$\varepsilon=0,111$			$\varepsilon=0,125$		
	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$
	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$
	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$
0	-0,2185	2,1886	0	-0,2139	1,8310	0	-0,2123	1,6102	0
10	-0,2117	2,3090	-0,5610	-0,2107	1,9175	-0,4559	-0,2111	1,6794	-0,3930
20	-0,1694	2,7029	-1,4235	-0,1892	2,2032	-1,1129	-0,1999	1,9083	-0,9403
30	0,0317	3,3122	-3,1092	-0,0837	2,7114	-2,3196	-0,1369	2,3416	-1,9126
40	0,8939	3,7164	-6,9598	0,3348	3,1132	-4,5238	0,1348	2,8072	-3,6811
45	4,5400	0,3344	-15,6219	2,0207	3,1755	-9,8090	2,8822	2,8374	-6,9710
50	3,0933	-4,009	-5,0244	4,4750	2,8505	-12,6956	1,0908	0,4025	-11,5185
55	1,7427	-3,4241	-1,0212	3,0395	-1,9527	-10,5614	3,8787	4,4818	-5,8022
60	1,3290	-3,0981	-0,1074	2,2519	-3,5557	-3,3226	4,0545	-3,0980	-1,7379
65	1,2335	-3,0336	0	2,0619	-3,3476	-0,8796	3,0849	-3,4234	0
70							2,8008	-3,3703	
80									
90									

Tabel 2: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in unidirektioneel C.F.R.P.

Zie Tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

Materiaal C.F.R.P. ($0^\circ/\pm 45^\circ$)_s

$$E_x = 119,12 \text{ GPa} \quad G_{xy} = 12,81 \text{ GPa}$$

$$E_y = 18,75 \text{ GPa} \quad \mu_{xy} = 0,6296$$

θ°	$c=0,5$			$\varepsilon=0,1$			$c=0,75$			$\varepsilon=0,111$			$c=1$			$\varepsilon=0,125$		
	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_y = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_y = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_y = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_y = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_y = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_y = 0$
0	-0,3583	2,1713	0	0	-0,3537	1,8205	0	0	0	0	-0,3521	1,6034	0	0	0	0	0	0
10	-0,3486	2,2901	-0,5756	-0,5756	-0,3493	1,9053	-0,4592	-0,4592	-0,4592	-0,4592	-0,3507	1,6712	-0,3919	-0,3919	-0,3919	-0,3919	-0,3919	-0,3919
20	-0,2853	2,6912	-1,4923	-1,4923	-0,3172	2,1879	-1,1346	-1,1346	-1,1346	-1,1346	-0,3342	1,8956	-0,9447	-0,9447	-0,9447	-0,9447	-0,9447	-0,9447
30	0,0458	3,4410	-3,5493	-3,5493	-0,1498	2,7349	-2,4733	-2,4733	-2,4733	-2,4733	-0,2354	2,3354	-1,9708	-1,9708	-1,9708	-1,9708	-1,9708	-1,9708
35	3,7978	3,7978	-8,4427	-8,4427	0,6264	3,3266	-5,4901	-5,4901	-5,4901	-5,4901	0,2388	2,9436	-4,1912	-4,1912	-4,1912	-4,1912	-4,1912	-4,1912
40	1,6032	3,6280	-10,5837	-10,5837	2,8719	1,7550	-9,3200	-9,3200	-9,3200	-9,3200	1,9514	3,0565	-8,0405	-8,0405	-8,0405	-8,0405	-8,0405	-8,0405
45	3,6058	-0,6054	-8,9724	-8,9724	3,5160	-1,5646	-5,5890	-5,5890	-5,5890	-5,5890	3,5911	2,5807	-8,7715	-8,7715	-8,7715	-8,7715	-8,7715	-8,7715
50	2,4428	-2,3488	-3,3695	-3,3695	3,2715	-2,1540	-2,1579	-2,1579	-2,1579	-2,1579	3,3561	-0,5459	-7,2324	-7,2324	-7,2324	-7,2324	-7,2324	-7,2324
55	1,6691	-2,2104	-1,2391	-1,2391	2,3562	-2,0893	-2,0893	-2,0893	-2,0893	-2,0893	2,3677	-1,9810	-3,1113	-3,1113	-3,1113	-3,1113	-3,1113	-3,1113
60	1,3557	-2,0311	-0,4351	-0,4351	1,8895	-2,0438	-2,0438	-2,0438	-2,0438	-2,0438	2,1974	-2,1059	-1,0935	-1,0935	-1,0935	-1,0935	-1,0935	-1,0935
70	1,2709	-1,9714	0	0	1,7599	-2,0438	-2,0438	-2,0438	-2,0438	-2,0438	2,1974	-2,0882	0	0	0	0	0	0
80																		
90																		

Tabel 3: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in een $(0^\circ/\pm 45^\circ)_s$ C.F.R.P. laminaat. Zie tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

Materiaal C.F.R.P. ($0_2^0/\pm 45^0$)_s
 $E_x = 79,75 \text{ GPa}$ $G_{zy} = 16,55 \text{ GPa}$
 $E_y = 23,57 \text{ GPa}$ $\nu_{xy} = 0,6625$

θ^0	$c=0,5$ $\varepsilon=0,1$			$c=0,75$ $\varepsilon=0,111$			$c=1$ $\varepsilon=0,125$		
	$p_x = 1$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 1$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 1$	$p_x = 0$	$p_x = 0$
0	-0,4870	2,1774	0	-0,4828	1,8269	0	-0,4812	1,6089	0
10	-0,4748	2,2982	-0,6074	-0,4775	1,9127	-0,4765	-0,4799	1,6774	-0,4023
20	-0,3918	2,7141	-1,6007	-0,4360	2,2001	-1,1899	-0,4592	1,9041	-0,9775
30	0,0740	3,5718	-4,0289	-0,2082	2,7847	-2,6814	-0,3267	2,3581	-2,0830
35		3,9662							
40	2,1905	3,2695	-9,0804	0,9537	3,4517	-6,3904	0,3619	3,0627	-4,7382
45	3,1363					-8,3801		3,1128	
50	3,0536	-0,7033	-6,1747	3,1092	0,9825	-7,9269	2,5990	2,1385	-8,2469
55				3,1236			3,2719		
60	2,1340	-1,6869	-2,5059	2,7510	-1,2559	-3,8162	3,1889	-0,7075	-5,0820
70	1,5795	-1,6450	-1,0619	2,0681	-1,5855	-1,6019	2,5015	-1,4879	-2,1613
80	1,3299	-1,5400	-0,4108	1,7255	-1,5583	-0,6080	2,0796	-1,5617	-0,8074
90	1,2586	-1,5010	0	1,6262	-1,5329	0	1,9538	-1,5539	0

Tabel 4: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in een $(0_2^0/\pm 45^0)_s$ C.F.R.P. laminaat. Zie Tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

Materiaal C.F.R.P. ($0^\circ/\pm 45^\circ$)_s

$$E_x = 66,12 \text{ GPa} \quad G_{xy} = 20,27 \text{ GPa}$$

$$E_y = 25,78 \text{ GPa} \quad \mu_{xy} = 0,6926$$

θ°	c=0,5 $\varepsilon=0,1$			c=0,75 $\varepsilon=0,111$			c=1			$\varepsilon=0,125$		
	$p_x = 1$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 1$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 1$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 0$	$p_x = 0$
	$p_y = 0$	$p_y = 1$	$p_y = 0$	$p_y = 0$	$p_y = 1$	$p_y = 0$	$p_y = 0$	$p_y = 1$	$p_y = 1$	$p_y = 0$	$p_y = 0$	$p_y = 0$
	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 1$	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 1$	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 1$	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 0$	$p_{xy} = 1$	$p_{xy} = 1$
0	-0,5583	2,1395	0	-0,5548	1,8023	0	-0,5534	1,5919	0	0	0	0
10	-0,5454	2,2568	-0,5965	-0,5493	1,8851	-0,4647	-0,5522	1,6579	-0,3910	-0,3910	-0,3910	-0,3910
20	-0,4565	2,6714	-1,5848	-0,5048	2,1647	-1,1641	-0,5301	1,8767	-0,9509	-0,9509	-0,9509	-0,9509
30	0,0733	3,6531	-4,2097	-0,2549	2,7730	-2,6859	-0,3859	2,3274	-2,0475	-2,0475	-2,0475	-2,0475
35		4,1970										
40	2,5666	3,1331	-9,4053	1,1813	3,6415	-7,0017	0,4220	3,1661	-4,9888	-4,9888	-4,9888	-4,9888
45	3,0914			3,1435	0,6447	-8,6982	2,9823	3,2588	-8,2831	-8,2831	-8,2831	-8,2831
50	2,7766	-0,7226	-4,9879			-7,0470	2,9234	1,9234	-8,2831	-8,2831	-8,2831	-8,2831
55							3,2513					
60	1,9833	-1,4604	-2,0977	2,5051	-1,1428	-3,0830	2,9512	-0,7497	-4,1387	-4,1387	-4,1387	-4,1387
70	1,5251	-1,4452	-0,9392	1,9296	-1,3901	-1,3425	2,2956	-1,3167	-1,7628	-1,7628	-1,7628	-1,7628
80	1,3084	-1,3668	-0,3754	1,6429	-1,3741	-0,5255	1,9422	-1,3739	-0,6762	-0,6762	-0,6762	-0,6762
90	1,2448	-1,3359	0	1,5582	-1,3555	0	1,8366	-1,3691	0	0	0	0

Tabel 5: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in een ($0^\circ/\pm 45^\circ$) C.F.R.P. laminaat.
Zie Tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

Materiaal C.F.R.P. ($0^\circ/90^\circ$)_s

$$E_x = 63,58 \text{ GPa} \quad G_{xy} = 5,84 \text{ GPa}$$

$$E_y = 63,58 \text{ GPa} \quad \mu_{zy} = 0,1460$$

θ°	$c=0,5 \quad \varepsilon=0,1$			$c=0,75 \quad \varepsilon=0,111$			$c=1 \quad \varepsilon=0,125$		
	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$
	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$
	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$
0	-0,8677	3,4696	0	-0,8469	2,6940	0	-0,8337	2,2055	0
10	-0,8158	3,7303	-1,8388	-0,8329	2,9042	-1,3189	-0,8371	2,3726	-1,0037
20	-0,4204	4,1105	-4,6416	-0,6578	3,4922	-3,5490	-0,7763	2,9314	-2,7535
25					3,6424				
30	0,5411	2,6067	-5,7383	0,1569	3,1979	-5,9524	-0,2144	3,4102	-5,7228
35									-6,2485
40	1,5962	1,1896	-6,1794	1,0205	1,4520	-5,1815	0,8064	1,8648	-5,5673
45			-7,8530						
50	3,4688	-0,2116	-7,5994	2,5814	0,5495	-6,6667	1,8648	0,8064	-5,5673
55				3,3236					-6,2485
60	2,4133	-0,9082	-3,1711	3,2200	-0,5971	-4,8669	3,4102	-0,2144	-5,7228
70	1,6510	-0,8727	-1,2174	2,3482	-0,8480	-2,0055	2,9314	-0,7763	-2,7535
80	1,3508	-0,8148	-0,4386	1,8899	-0,8333	-0,7253	2,3726	-0,8371	-1,0037
90	1,2706	-0,7956	0	1,7641	-0,8191	0	2,2055	-0,8337	0

Tabel 6: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in een $(0^\circ/90^\circ)_s$ C.F.R.P. laminaat. Zie Tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

Materiaal C.F.R.P. ($\pm 45^\circ$)_s

$$E_x = 20,20 \text{ GPa} \quad G_{xy} = 27,74 \text{ GPa}$$

$$E_y = 20,20 \text{ GPa} \quad \mu_{xy} = 0,7287$$

θ°	c=0,5 $\varepsilon=0,1$			c=0,75 $\varepsilon=0,111$			c=1 $\varepsilon=0,125$		
	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$
	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$
	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$
0	-0,8991	1,9178	0	-0,8972	1,6565	0	-0,8971	1,4902	0
10	-0,8853	2,0149	-0,5120	-0,8916	1,7224	-0,3889	-0,8968	1,5425	-0,3227
20	-0,7895	2,4036	-1,4043	-0,8429	1,9556	-0,9821	-0,8726	1,7164	-0,7840
30	-0,0135	4,0612	-4,9405	-0,5499	2,6505	-2,5222	-0,7079	2,1325	-1,7595
35		5,8028	-11,4546						
40	3,7038	1,8591	-8,2444	2,9254	4,9435	-10,9698	0,6950	3,7933	-6,2446
45				3,9108			4,0338	4,0338	-11,3824
50	1,9617	-0,6525	-2,1236	2,6607	-0,2113	-3,5330	3,7933	0,6950	-6,2446
60	1,5444	-0,9100	-1,0028	1,8128	-0,8090	-1,3286	2,1325	-0,7079	-1,7595
70	1,3270	-0,9298	-0,5122	1,5257	-0,8989	-0,6414	1,7164	-0,8726	-0,7840
80	1,2083	-0,9076	-0,2204	1,3847	-0,9016	-0,2707	1,5425	-0,8968	-0,3227
90	1,1706	-0,8966	0	1,3406	-0,8968	0	1,4902	-0,8971	0

Tabel 7: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in een $(\pm 45^\circ)_s$ C.F.R.P. laminaat. Zie Tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

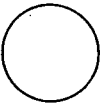
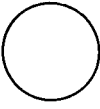
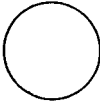
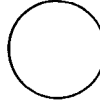
Materiaal C.F.R.P. quasi-isotroop

$$E_x = 53,31 \text{ GPa} \quad G_{xy} = 19,99 \text{ GPa}$$

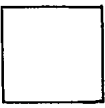
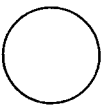
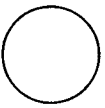
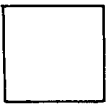
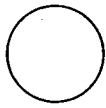
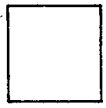
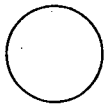
$$E_y = 53,29 \text{ GPa} \quad \mu_{xy} = 0,333$$

θ^0	c=0,5 $\varepsilon=0,1$			c=0,75 $\varepsilon=0,111$			c=1 $\varepsilon=0,125$		
	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$	$P_x = 1$	$P_x = 0$	$P_x = 0$
	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$	$P_y = 0$	$P_y = 1$	$P_y = 0$
	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 0$	$P_{xy} = 1$
0	-0,8776	2,5055	0	-0,8686	2,0558	0	-0,8635	0	0
10	-0,8509	2,6694	-0,9528	-0,8597	2,1737	-0,7122	-0,8642	1,8664	-0,5764
20	-0,6455	3,1920	-2,5941	-0,7668	2,5610	-1,8531	-0,8258	2,1784	-1,4619
30	0,4367	3,7085	-6,0063	-0,1999	3,1764	-4,2323	-0,5050	2,7499	-3,2694
35			-7,7743		3,2650			3,0237	
40	2,6416	1,7308	-7,7328	1,7716	2,6932	-7,4178	0,9785	2,9645	-6,5306
45	2,8701								-7,3996
50	2,5835	-0,4696	-4,0550	2,9315	0,2571	-5,4571	2,9644	0,9790	-6,5318
55							3,0239		
60	1,8894	-0,8984	-1,8163	2,3542	-0,7193	-2,5323	2,7502	-0,5051	-3,2703
70	1,4838	-0,9039	-0,8487	1,8485	-0,8691	-1,1533	2,1786	-0,8261	-1,4623
80	1,2898	-0,8656	-0,3475	1,5941	-0,8666	-0,4632	1,8665	-0,8645	-0,5765
90	1,2325	-0,8497	0	1,5185	-0,8580	0	1,7728	-0,8638	0

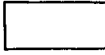
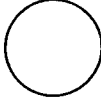
Tabel 8: Spanningen rond drie verschillende gatvormen in een quasi-isotroop C.F.R.P. laminaat. Zie tabel 1 voor de bij θ behorende coördinaten x en y van de contouren.

θ°	isotroop		$(0_4^0/\pm 45^\circ)_s$		$(\pm 45^\circ)_s$		unidirectioneel	
								
	σ_t/p_x	σ_t/p_x	σ_t/p_x	σ_t/p_x	σ_t/p_x	σ_t/p_x	σ_t/p_x	σ_t/p_x
0	-0,8635	-1	-0,3521	-0,3967	-0,8971	-1	-0,2123	-0,2389
5	-0,8641	-0,9696	-0,3519	-0,3904	-0,8973	-0,9967	-0,2121	-0,2347
10	-0,8642	-0,8794	-0,3507	-0,3711	-0,8968	-0,9842	-0,2111	-0,2221
15	-0,8568	-0,7321	-0,3464	-0,3383	-0,8913	-0,9531	-0,2081	-0,2013
20	-0,8258	-0,5321	-0,3342	-0,2907	-0,8726	-0,8831	-0,1999	-0,1725
25	-0,7348	-0,2856	-0,3042	-0,2266	-0,8239	-0,7362	-0,1805	-0,1354
30	-0,5050	0	-0,2354	-0,1431	-0,7079	-0,4468	-0,1369	-0,0896
35	0,0123	0,3159	-0,0836	-0,0363	-0,4042	0,0726	-0,0447	-0,0334
40	0,9785	0,6527	0,2388	0,0995	0,6950	0,8636	0,1348	0,0357
45	2,1996	1	0,8773	0,2724	4,0338	1,7741	0,4609	0,1229
50	2,9644	1,3473	1,9514	0,4937	3,7933	2,4689	1,0908	0,2362
55	3,0239	1,6840	3,1236	0,7789	2,6414	2,7633	2,3101	0,3896
60	2,7502	2	3,5911	1,1481	2,1325	2,7556	3,8787	0,6073
65	2,4362	2,2856	3,3561	1,6248	1,8742	2,6163	4,4818	0,9334
70	2,1786	2,5321	2,9420	2,2284	1,7164	2,4530	4,0545	1,4500
75	1,9911	2,7321	2,5984	2,9530	1,6114	2,3122	3,4831	2,3112
80	1,8665	2,8794	2,3677	3,7254	1,5425	2,2093	3,0849	3,7594
85	1,7957	2,9696	2,2387	4,3625	1,5030	2,1477	2,8684	5,8221
90	1,7728	3	2,1974	4,6167	1,4902	2,1273	2,8008	7,0811

Tabel 9: De spanning σ_t rond vierkante respectievelijk ronde gaten in een viertal met p_x belaste laminaten.

θ°	isotroop		$(0_4^\circ/\pm 45^\circ)_s$		$(\pm 45^\circ)_s$		unidirectioneel	
								
	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-0,0063	-0,0842	-0,0026	-0,0339	-0,0065	-0,0865	-0,0015	-0,0204
10	-0,0091	-0,1504	-0,0037	-0,0635	-0,0095	-0,1683	-0,0022	-0,0379
15	-0,0044	-0,1830	-0,0018	-0,0846	-0,0046	-0,2383	-0,0011	-0,0503
20	0,0126	-0,1710	0,0005	-0,0934	0,0134	-0,2838	0,0031	-0,0555
25	0,0441	-0,1094	0,0182	-0,0868	0,0494	-0,2820	0,0108	-0,0519
30	0,0714	0	0,0333	-0,0620	0,1001	-0,1935	0,0194	-0,0388
35	-0,0033	0,1484	0,0225	-0,0170	0,1090	0,0341	0,0120	-0,0157
40	-0,4131	0,3214	-0,1008	0,0490	-0,2934	0,4252	-0,0569	0,0176
45	-1,0998	0,5000	-0,4387	0,1362	-2,0169	0,8870	-0,2305	0,0614
50	-1,2514	0,6634	-0,8238	0,2431	-1,6013	1,2157	-0,4605	0,1163
55	-0,8152	0,7912	-0,8421	0,3660	-0,7121	1,2983	-0,6228	0,1830
60	-0,3888	0,8660	-0,5078	0,4971	-0,3015	1,1932	-0,5484	0,2629
65	-0,1461	0,8754	-0,2013	0,6223	-0,1124	1,002	-0,2688	0,3575
70	-0,0333	0,8138	-0,0450	0,7162	-0,0263	0,7884	-0,0621	0,4660
75	0,0103	0,6830	0,0134	0,7382	0,0083	0,5780	0,0180	0,5778
80	0,0197	0,4924	0,0250	0,6371	0,0163	0,3778	0,0326	0,6429
85	0,0131	0,2578	0,0163	0,3788	0,0109	0,1865	0,0209	0,5055
90	0	0	0	0	0	0	0	0

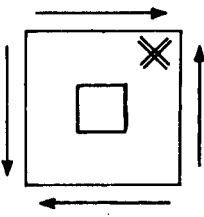
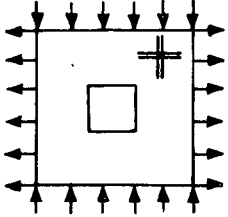
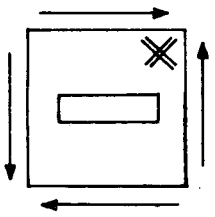
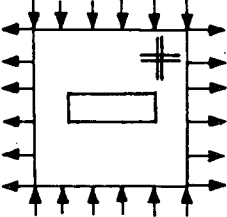
Tabel 10: De spanning τ_{xy} rond vierkante respectievelijk ronde gaten in een viertal met p_x belaste laminaten.

unidirektioneel				
				
	c=0,5	c=0,75	c=1	
θ°	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x	τ_{xy}/p_x
0	0	0	0	0
5	0,0026	0,0002	-0,0015	-0,0204
10	0,0066	0,0015	-0,0022	-0,0379
15	0,0133	0,0050	-0,0011	-0,0503
20	0,0221	0,0116	0,0031	-0,0555
25	0,0247	0,0202	0,0108	-0,0519
30	-0,0121	0,0202	0,0193	-0,0388
35	-0,1506	-0,0239	0,0120	-0,0157
40	-0,3970	-0,1657	-0,0569	0,0176
45	-0,6171	-0,3928	-0,2305	0,0614
50	-0,4488	-0,5911	-0,4605	0,1163
55	-0,0178	-0,5473	-0,6228	0,1830
60	0,1780	-0,2165	-0,5484	0,2629
65	0,1762	0,0146	-0,2688	0,3575
70	0,1411	0,0875	-0,0621	0,4660
75	0,1031	0,0873	0,0179	0,5778
80	0,0673	0,0641	0,0326	0,6429
85	0,0033	0,0333	0,0209	0,5055
90	0	0	0	0

Tabel 11: De spanning τ_{xy} rond een viertal gatvormen
in een met p_x belast unidirektioneel laminaat.

θ°	σ_t/p_{xy}	σ_t/p_{xy}	σ_t/p_{xy}	σ_t/p_{xy}
0	0	-3,0392	0	-4,3374
5	-0,1542	-3,0812	-0,2393	-4,3946
10	-0,3227	-3,2097	-0,5120	-4,5493
15	-0,5235	-3,4268	-0,8670	-4,6922
20	-0,7840	-3,7077	-1,4043	-4,5309
25	-1,1551	-3,9118	-2,4060	-3,5987
30	-1,7595	-3,6246	-4,9405	-2,0655
35	-2,9814	-2,4685	-11,4546	-0,7472
40	-6,2446	-1,0585	-8,2444	0,4066
45	-11,3824	0	-3,6645	2,1016
50	-6,2446	1,0585	-2,1236	3,6804
55	-2,9814	2,4685	-1,4200	3,8160
60	-1,7595	3,6246	-1,0028	3,3215
65	-1,1551	3,9118	-0,7195	2,8557
70	-0,7840	3,7077	-0,5122	2,5237
75	-0,5235	3,4268	-0,3517	2,3034
80	-0,3227	3,2097	-0,2204	2,1656
85	-0,1542	3,0812	-0,1062	2,0902
90	0	3,0392	0	2,0663

Tabel 12: De spanning σ_t rond gaten in met schuifspanning p_{xy} belaste platen waarbij de zijden van de gaten respectievelijk evenwijdig aan en onder 45° met de coördinaatassen lopen. Het materiaal is $(\pm 45^\circ)_s$ C.F.R.P.

 $c = 1$ $\epsilon = 0,125$  $c = 0,5$ $\epsilon = 0,1$  $c = 0,5$ $\epsilon = 0,1$  $c = 0,5$ $\epsilon = 0,1$				
θ°	τ_{xy}/p_{xy}	τ_{xy}/p_{xy}	τ_{xy}/p_{xy}	τ_{xy}/p_{xy}
0	0	0	0	0
5	-0,0011	0,0225	0,0029	0,0530
10	-0,0034	0,0339	0,0161	0,1429
15	-0,0027	0,0177	0,0580	0,3137
20	0,0120	0,0567	0,1830	0,5906
25	0,0693	0,2346	0,5666	0,8475
30	0,2488	0,5125	1,8807	0,7863
35	0,8038	0,6655	5,6577	0,3691
40	2,6361	0,4468	3,6610	-0,1805
45	5,6912	0	0,9680	-0,5551
50	2,6361	-0,4468	0,2102	-0,3643
55	0,8038	-0,6655	-0,0057	0,0154
60	0,2488	-0,5125	-0,0577	0,1913
65	0,0693	-0,2346	-0,0570	0,2263
70	0,0120	-0,0567	-0,0415	0,2043
75	-0,0027	0,0177	-0,0246	0,1609
80	-0,0034	0,0339	-0,0112	0,1096
85	-0,0011	0,0225	-0,0028	0,0553
90	0	0	0	0

Tabel 13: De spanning τ_{xy} rond gaten in met schuifspanning p_{xy} belaste platen waarbij de zijden van de gaten respectievelijk evenwijdig aan en onder 45° met de coördinaatassen lopen. Het materiaal is $(\pm 45^\circ)_s$ C.F.R.P.

BIJLAGE: DE VOORWAARDE VOOR EENDUIDIGHEID EN KONFORMITEIT VAN DE TRANS-
FORMATIE

$$\omega(\zeta) = z = \frac{1+c}{2} \zeta + \frac{1-c}{2} \zeta^{-1} - \varepsilon \zeta^{-3}$$

waarin per definitie

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 < c \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

De voorwaarde voor eenduidigheid en konformiteit van de transformatie is dat voor het hele gebied buiten de gatrand moet gelden

$$\omega'(\zeta) = \frac{1+c}{2} - \frac{1-c}{2} \zeta^{-2} + 3\varepsilon \zeta^{-4} \neq 0 \quad (\text{B.2})$$

ofwel de wortels van (B.2) moeten binnen de gatrand liggen, dus

$$|\zeta_{\text{wortel}}| < 1 \quad (\text{B.3})$$

(B.2) is een kwadratische vergelijking in ζ^{-2} . Aan (B.3) wordt voldaan indien voor de wortels ζ_{12}^{-2} van (B.2) geldt

$$|\zeta_{12}^{-2}| > 1 \quad (\text{B.4})$$

waarin

$$\zeta_{12}^{-2} = \frac{(1-c) \pm \sqrt{(1-c)^2 - 24\varepsilon(1+c)}}{12\varepsilon} \quad (\text{B.5})$$

Voor

$$\varepsilon \leq \frac{(1-c)^2}{24(1+c)} \quad (\text{B.6})$$

is ζ_{12}^{-2} een reële grootte die aan de eis (B.4) voldoet voor

$$0 < \varepsilon \leq \frac{(1-c)^2}{24(1+c)} \quad (\text{B.7})$$

Voor

$$\varepsilon > \frac{(1-c)^2}{24(1+c)} \quad (\text{B.8})$$

is ζ_{12}^{-2} een complexe grootheid die aan de eis (B.4) voldoet voor

$$\frac{(1-c)^2}{24(1+c)} < \varepsilon < \frac{1+c}{6} \quad (\text{B.9})$$

Kennelijk is de transformatie dus altijd eenduidig en konform indien (voor positieve ε)

$$\varepsilon < \frac{1+c}{6} \quad (\text{B.10})$$

Aan deze eis is bijvoorbeeld altijd voldaan als $\varepsilon < c$ wordt gekozen.

Formule (4.6) kan in een machtreeks ontwikkeld worden indien

$$\left| \frac{1-c}{1+c} \sigma^{-2} - \frac{2\varepsilon}{1+c} \sigma^{-4} \right| < 1 \quad (4.7)$$

waarin

$$\begin{aligned} & \left| (1-c) \sigma^{-2} - 2\varepsilon \sigma^{-4} \right| = \\ & = \sqrt{\left\{ (1-c) \cos 2\theta - 2\varepsilon \cos 4\theta \right\}^2 + \left\{ (1-c) \sin 2\theta - 2\varepsilon \sin 4\theta \right\}^2} \\ & = \sqrt{(1-c)^2 + 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon(1-c) \cos 2\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

(B.11) neemt een maximale waarde aan als $\cos 2\theta = -1$, waardoor

$$\text{Max} \left| (1-c)^2 \sigma^{-2} - 2 \sigma^{-4} \right| = 1-c + 2\varepsilon$$

Rapport 299



60141070393