



f3a
Technische Hogeschool Delft

Afdeling der Civiele Techniek

Waterloopkundige berekeningen I

Handleiding college b84

C.B. Vreugdenhil

Delft, augustus 1979



VAKGROEP
WATERBOUWKUNDE
Afd. Civiele Techniek
TH Delft

WATERLOOPKUNDIGE BEREKENINGEN I

Handleiding college b 84

C.B. Vreugdenhil

Augustus 1979

Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek

Uitgave 1979		b.84 ^k	203110					f 2,75
-----------------	--	-------------------	--------	--	--	--	--	--------

I	<u>Inleiding</u>	
	1. Wiskundige modellen	1
	2. Een voorbeeld: een schutsluis	2
	3. Enkele numerieke methodes	5
	4. Iets over partiële differentiaalvergelijkingen	12
II	<u>Golfproblemen</u>	
	5. Lange golven; gedrag	
	5.1. Karakteristieken	17
	5.2. Begin- en randvoorwaarden	19
	5.3. Analyse van de gelineariseerde vergelijkingen	21
	6. Karakteristiekenmethode voor lange golven	25
	7. Numerieke methodes voor een simple wave	
	7.1. Differentiemethodes	28
	7.2. Eindige-elementenmethodes	30
	7.3. Numerieke eigenschappen	32
	8. Golfvoortplanting	37
	9. Numerieke methodes voor lange golven	44
	10. Getijberekening: Kapuas Delta	50
	11. Waterslag	60
	12. Lange golven in twee dimensies	66
	13. Twee-lagen stroming	73
	14. Bodemverstoringen in een rivier	
III	<u>Diffusieproblemen</u>	
	16. Diffusie	
	16.1. Diffusievergelijking	81
	16.2. Diffusiecoefficient	82
	16.3. Gedrag van de oplossing	85
	16.4. Overdrachtsfunctie	88
	17. Numerieke methodes voor de diffusievergelijking	
	17.1. Differentie- en elementenmethode	91
	17.2. Stabiliteit en nauwkeurigheid	92
	18. Diffusiebenadering voor zoutindringing in een getijrivier	98
	19. Hoogwatergolven	101
	20. Kustlijnen	108

IV Potentiaalproblemen

21. Potentiaalstroming	
21.1. Potentiaalvergelijking en verwante problemen	112
21.2. Eigenschappen en randvoorwaarden	114
21.3. Bronbeleggingen	116
22. Numerieke oplossing van elliptische vergelijkingen	
22.1. Differentiemethodes	118
22.2. Eindige elementenmethodes	120
22.3. Bronbeleggingsmethode	124
22.4. Oplossing van stelsels lineaire vergelijkingen.	125
23. Diffractie van watergolven	129
24. Grondwaterstroming via eindige elementenmethode	133

Notatie

Literatuur

Waterloopkundige Berekeningen 1

1. Wiskundige modellen

Bij het onderzoek van vele fysische verschijnselen, o.a. in de waterloopkunde, wordt gebruik gemaakt van wiskundige modellen, uiteraard naast andere onderzoeksmiddelen. Traditioneel was een wiskundig model een theorie, geformuleerd in wiskundige termen, en opgesteld in wisselwerking met waarnemingen, hoofdzakelijk voor het begrijpen van een verschijnsel. Veelal waren de wiskundige vergelijkingen zo ingewikkeld dat het niet goed mogelijk was, voor meer dan eenvoudige gevallen kwantitatieve voorspellingen te doen. Dit is veranderd door de inschakeling van computers, die het mogelijk maken ook ingewikkelde vergelijkingen (bij benadering) op te lossen. Zo is nu een wiskundig model in engere zin op te vatten als een model van een concrete situatie, waarin met behulp van een theorie als boven bedoeld een antwoord gezocht wordt op een technische vraagstelling, bijv. hoe verandert de golfdoordringing in de haven van Scheveningen als de haventoeegang wordt verruimd?

Het ontwikkelen van computerprogramma's voor dergelijke problemen is vaak een vrij grote inspanning. Men ziet dan ook dat voor bepaalde klassen van problemen standaardprogramma's of programmapakketten worden gemaakt die aan de ontwerper of onderzoeker als hulpmiddel ter beschikking staan. Hoewel de gebruiker zich dan niet meer hoeft te bemoeien met de programma-ontwikkeling is er toch een zekere mate van kritisch inzicht nodig om zinvol gebruik te kunnen maken van zulke hulpmiddelen. Zo zal vrijwel altijd een schematisering van het te onderzoeken probleem nodig zijn; men zal zich erin moeten verdiepen of een bepaald programma geschikt is om er een gegeven probleem mee op te lossen; men zal de resultaten moeten interpreteren, fysische en numerieke fouten moeten opsporen, enz. Dit college richt zich voornamelijk op dergelijke aspecten van wiskundige modellen in de waterloopkunde.

Literatuur over dit vak is helaas erg verspreid; zie de literatuurlijst. Het enige boek dat direkt op dit gebied betrekking heeft is dat van Abbott - Computational Hydraulics, dat zich uitvoerig en wat onconventioneel bezig houdt met lange golven en de bijbehorende numerieke aspecten. Het boek van Roache - Computational Fluid Dynamics heeft rechtstreeks met het vakgebied te maken, maar is nog steeds sterk numeriek gericht. Een aardige inleiding met een wat algemeen karakter is het boek van Potter - Computational Physics.

2. Een voorbeeld: een schutsluis

Gegeven is een schutsluis in een kanaal:

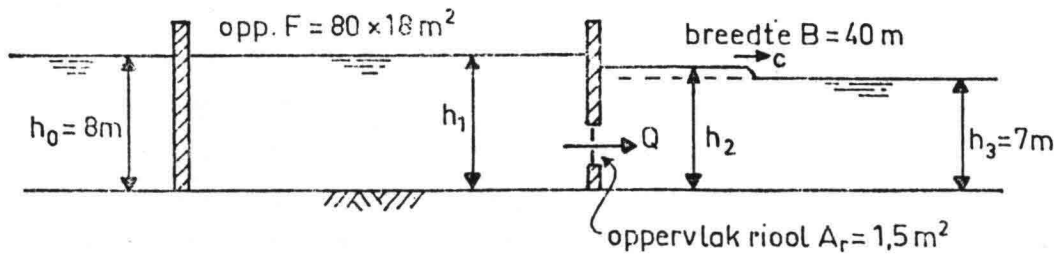


Fig. 2.1. Schutsluisprobleem

In verband met de bepaling van de transportcapaciteit van de vaarweg wordt gevraagd hoelang het duurt voordat het niveau in de schutkolk tot dat van het benedenpand is gezakt.

a. Eerste schatting

In eerste benadering wordt de uitstroming bepaald door de komberging in de schutkolk en het verval over het riool. Even veronderstellend dat de waterstand in het kanaal constant blijft geldt dan

$$F \frac{dh_1}{dt} = -Q \quad (2.1)$$

$$h_1 - h_2 = \frac{\xi Q^2}{2gA_r^2} \quad (2.2)$$

waarin ξ een verliescoëfficiënt voor de stroming door het riool is, neem aan van de orde 1. Op het tijdstip $t = 0$ is $h_1 = h_0$ en $h_2 = h_3$ en er volgt uit (2.2):

$$Q = Q_0 = \{2\xi^{-1}gA_r^2(h_0 - h_3)\}^{\frac{1}{2}} = 6,7 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Als het debiet constant zou blijven zou het niveau in een tijd t_0 gedaald zijn:

$$t_0 = F(h_0 - h_3)/Q_0 = 215 \text{ s}$$

Aangezien het debiet in werkelijkheid na verloop van tijd wel kleiner zal worden is dit een ondergrens.

b. Nauwkeuriger schatting

Bekijk de gemaakte veronderstellingen nader. Vgl. (2.1) blijft gelden als er geen golven in de schutkolk ontstaan. Dit zal ook wel niet het geval zijn aangezien de looptijd van zulke golven veel kleiner is dan de (geschatte) ledigingstijd t_0 . Op soortgelijke wijze blijft (2.2) geldig als de traagheid van de watermassa in het riool klein is t.o.v. die in de schutkolk. Om de waterstandsvariatiën in het kanaal in rekening te brengen veronderstellen we dat een kleine translatiegolf ontstaat, zodat bij benadering geldt (veronderstellingen controleren!)

$$Q = B(gh_3)^{\frac{1}{2}}(h_2 - h_3) \quad (2.3)$$

Door h_1 en h_2 te elimineren kunnen vgl. (2.1)...(2.3) gecombineerd worden tot

$$\left(\frac{\xi F}{gA_r^2} Q + \frac{F}{B(gh_3)^{\frac{1}{2}}}\right) \frac{dQ}{dt} + Q = 0 \quad (2.4)$$

met de beginvoorwaarde $Q = Q_0$ op $t = 0$. (2.5)

Om dit wat overzichtelijker te maken voeren we dimensieloze grootheden $Q' = Q/Q_0$ en $t' = t/t_0$ in:

$$2(Q' + \alpha) \frac{dQ'}{dt'} + Q' = 0 \quad (2.6)$$

met

$$Q' = 1 \text{ op } t' = 0 \quad (2.7)$$

en

$$\alpha^2 = A_r^2 \{2\xi B^2 h_3 (h_0 - h_3)\}^{-1}$$

Het blijkt dat er maar één dimensieloze parameter α een rol speelt (vergelijk met dimensie-analyse).

Extreme gevallen:

$$\alpha \ll 1 \rightarrow 2 \frac{dQ'}{dt'} + 1 = 0 \rightarrow Q' = 1 - \frac{1}{2}t'$$

dus de gevraagde tijdsduur is $2t_0 = 430$ s. In het gegeven voorbeeld is dit het geval: $\alpha \approx 0,01$.

$$\alpha \gg 1 \rightarrow 2\alpha \frac{dQ'}{dt'} + Q' = 0 \rightarrow Q' = \exp(-t/2\alpha)$$

Na een tijd $9\alpha t_0$ is nog ca. 1% van het begindebiet Q_0 over; dit is dus ongeveer de gevraagde tijdsduur.

In het geval dat α niet groot of klein is kan de vergelijking (2.6) ook nog analytisch opgelost worden (zie fig. 2.2):

$$Q' + \alpha \ln Q' = 1 - \frac{1}{2}t' \quad (2.8)$$

In vele gevallen lukt dat niet; dan kan een numerieke methode gebruikt worden.

c. Numeriek

Vgl. (2.6) kan ook in stapjes bij benadering worden opgelost. De eenvoudigste manier is:

$$2(Q'_k + \alpha) \frac{Q'_{k+1} - Q'_k}{\Delta t'} + Q'_k = 0 \quad (2.9)$$

waarin $Q'_k = Q'(k\Delta t)$

Beginvoorwaarde $Q'_0 = 1$.

Uit (2.9) kan Q'_{k+1} eenvoudig expliciet opgelost worden; dit heet dan ook een expliciete differentiemethode. Het is te verwachten dat zinvolle resultaten alleen gevonden worden als $\Delta t = t_0 \Delta t'$ klein is t.o.v. de tijdschaal van het probleem, waarvoor we de schatting t_0 hadden gemaakt. In fig. 2.2 is het resultaat van (2.9) voor enkele waarden van $\Delta t'$ en α vergeleken met de analytische oplossing.

Het blijkt dat deze methode erg goed werkt, zelfs voor $\Delta t' = 1$ (dus $\Delta t = t_0$). Dat is ook niet zo verwonderlijk omdat de werkelijke oplossing zich erg netjes gedraagt. Als de analytische oplossing niet bekend is, kan men dit vaststellen door met verschillende waarden van $\Delta t'$ te werken en de numerieke oplossingen te vergelijken.

Aangezien de coëfficiënt α in het algemeen niet exact bekend is, is het nuttig om de gevoeligheid van het resultaat voor variaties in α vast te stellen. Dat kan in dit geval met de analytische oplossing gedaan worden (fig. 2.2) maar als die niet beschikbaar is kan de numerieke oplossing gebruikt worden. In het voorbeeld is het resultaat nauwelijks gevoelig voor kleine veranderingen in α .

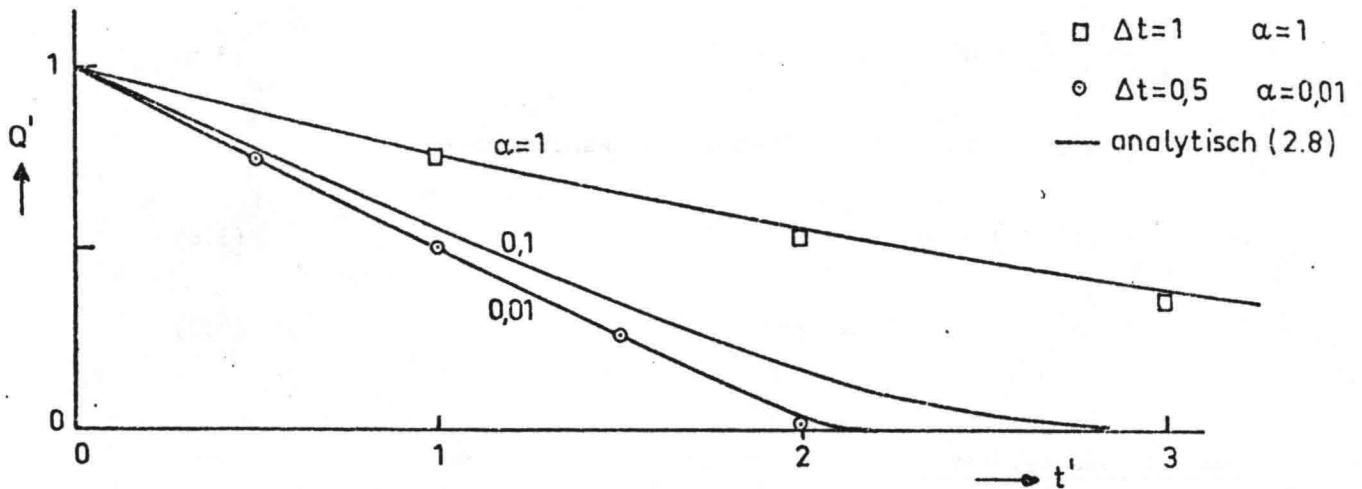


Fig. 2.2. Analytische en numerieke oplossing van het schutsluisprobleem

3. Enkele numerieke methodes

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld worden enkele numerieke methodes geïllustreerd, die verderop nader aan de orde komen. Als "modelprobleem" nemen we een harmonische getijgolf met kleine amplitude en met de nadere veronderstelling dat de bodemwrijving verwaarloosbaar is. Als randvoorwaarde aan de landzijde veronderstellen we dat het estuarium op $x = L$ afgesloten is.

Onder deze veronderstellingen zijn de vergelijkingen voor lange golven (zie verder hoofdstuk 5)

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA_s \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

waarin B en A_s bij benadering constant genomen worden. Randvoorwaarden:

$$x = 0 \quad h = h_0 + h_1 e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

$$x = L \quad Q = 0 \text{ of } \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

Stel nu $h = h_0 + h_1 h' e^{i\omega t}$ en $x = Lx'$ dan ontstaat voor de dimensieloze grootheden h' en x'

$$\frac{d^2 h'}{dx'^2} + \sigma^2 h' = 0 \quad \sigma = \omega L/c \quad (3.5)$$

met $c = (gA_s/B)^{1/2}$ voortplantingssnelheid. Randvoorwaarden:

$$x' = 0 \quad h' = 1 \quad (3.6)$$

$$x' = 1 \quad dh'/dx' = 0 \quad (3.7)$$

Analytische oplossing

De analytische oplossing kan geschreven worden als

$$h = A \cos \sigma x + B \sin \sigma x$$

met weglating van de accenten. De integratieconstanten A en B volgen uit de randvoorwaarden (3.6) en (3.7) met het resultaat

$$h = \cos \sigma x + \operatorname{tg} \sigma \sin \sigma x \quad (3.8)$$

(N.B. resonantie ontstaat als $\sigma = \pi/2 + n\pi$, dan is h' oneindig, d.w.z. dat een zeer kleine verstoring h_1 als een grote staande golf kan veroorzaken.)

$$h_1 = \frac{ar_2 - br_1}{r_2 - r_1} \quad (3.13)$$

en met deze startwaarde wordt dan de juiste oplossing gevonden. Zie fig. 3.1. Enkele numerieke benaderingen bij verschillende waarden van n zijn in fig. 3.4 gegeven..

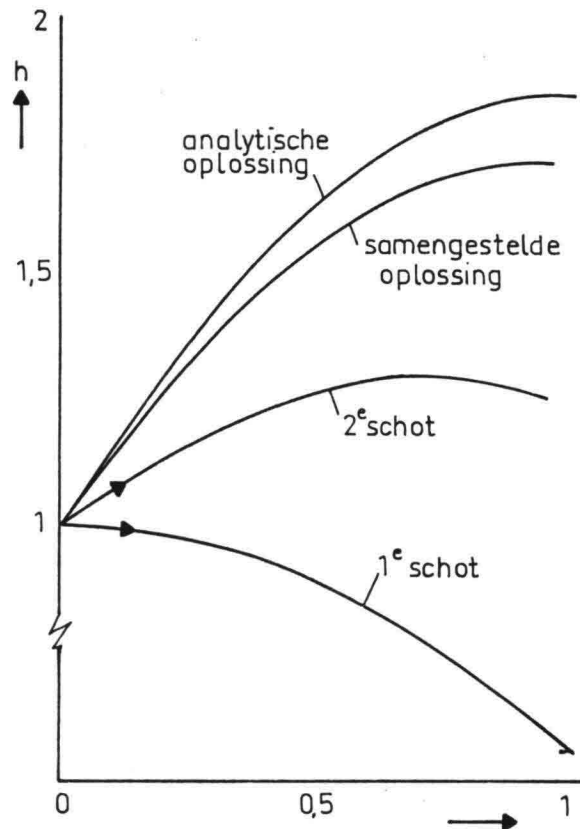


Fig. 3.1. Oplossing modelprobleem met schietmethode ($\sigma = 1$)

Variatiemethode

Uit de variatierekening volgt dat de oplossing van (3.5)...(3.7) ook gevonden kan worden als die functie h waarvoor

$$J = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - \sigma^2 h^2 \right\} dx \quad (3.14)$$

minimaal is onder de nevenvoorwaarde

$$h = 1 \quad (x = 0) \quad (3.15)$$

Zie hierover bijv. Courant/Hilbert (1962), Garabedian (1964) of college a108.

In veel fysische problemen heeft de grootheid J iets te maken met de energie in het systeem. Men kan nu proberen een benaderende functie te vinden die zo goed mogelijk aan dit criterium voldoet. Bijv.:

$$h = ax^2 + bx + c \quad (3.16)$$

Uit (3.15) volgt $c = 1$; de coëfficiënten a en b worden gevonden door het minimum van J te zoeken:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0 \quad (3.17)$$

geeft $a = \frac{\sigma^2}{18D} (\sigma^2 - 12)$

$$b = \frac{\sigma^2}{15D} (20 - \sigma^2)$$

$$D = \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{5} \sigma^2\right) \left(2 - \frac{2}{3} \sigma^2\right) - \left(2 - \frac{1}{2} \sigma^2\right)^2$$

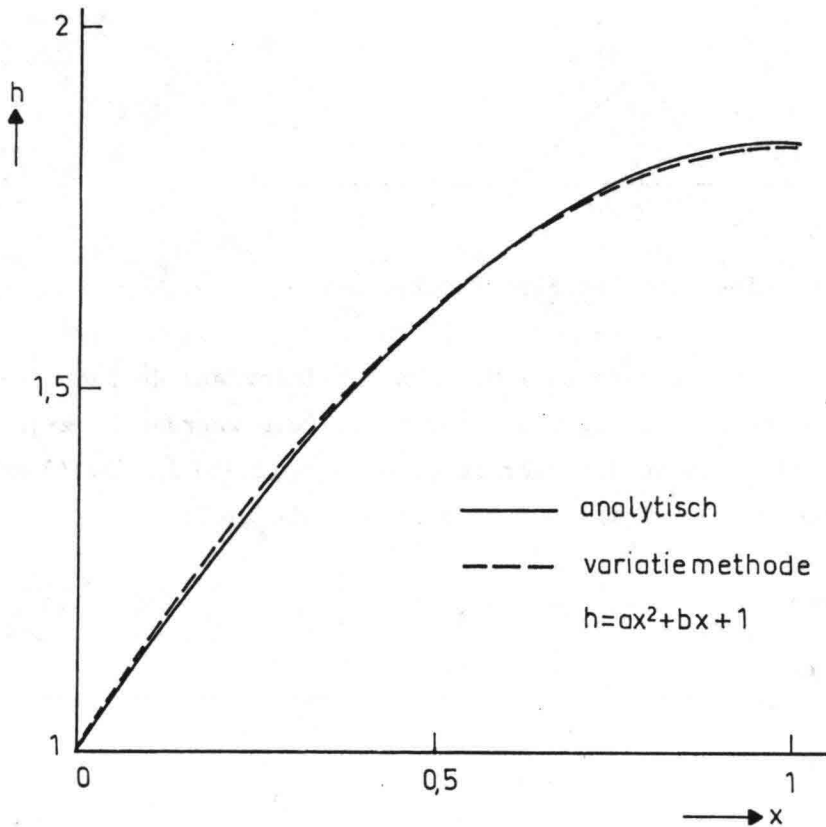


Fig. 3.2. Oplossing modelprobleem via variatiemethode ($\sigma = 1$)

Aan randvoorwaarde (3.7) wordt niet precies maar wel bij benadering voldaan. Als men de benaderde oplossing steeds zou verfijnen zou steeds beter aan die voorwaarde voldaan worden. In plaats van het polynoom (3.16) zijn ook andere functies mogelijk, bijv. Fourierreeksen.

Eindige - elementen methode

In de eindige elementen methode werkt men met een ander soort functies, nl. functies die slechts in een beperkt gebied van nul verschillen. Een (veel gebruikt) voorbeeld is lineaire interpolatie:

$$h = \sum_{j=0}^n h_j \psi_j(x) \quad (3.18)$$

$$\text{met} \quad \psi_j(x) = 0 \quad x < x_{j-1} \quad x > x_{j+1} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \quad x_{j-1} \leq x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \quad x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{aligned}$$

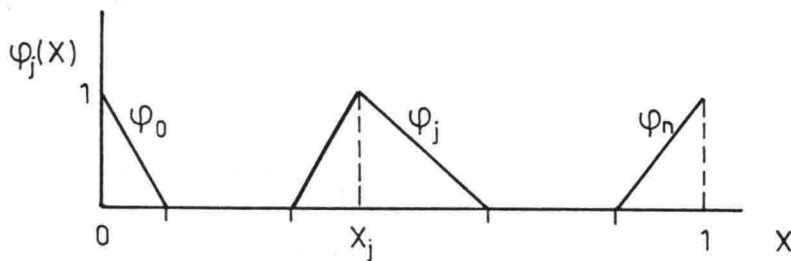


Fig. 3.3. Basisfuncties voor lineaire interpolatie

In ieder punt x_j is er maar één $\psi_j \neq 0$, zodat h_j inderdaad de functie-waarde van de benaderde h in dat punt voorstelt. Deze waarden h_j zijn vooralsnog onbekend en ze worden weer bepaald door (3.18) in (3.14) en (3.15) substitueren en het minimum te bepalen. Dit geeft

$$J = \sum_{j=0}^n h_j \sum_{i=j-1}^{j+1} h_i (\alpha_{ij} - \sigma^2 \beta_{ij}) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \text{waarin} \quad \alpha_{ij} &= \int_0^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx \\ \beta_{ij} &= \int_0^1 \psi_i \psi_j dx \end{aligned}$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= -\frac{1}{(x_i - x_{i-1})} & j = i - 1 \\ & \frac{1}{(x_i - x_{i-1})} + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)} & j = i \ (\neq 0 \text{ of } n) \\ & -\frac{1}{(x_{i+1} - x_i)} & j = i + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{ij} &= \frac{1}{6} (x_i - x_{i-1}) & j &= i-1 \\ \frac{1}{3} (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{3} (x_{i+1} - x_i) & & j &= i (\neq 0 \text{ of } n) \\ \frac{1}{6} (x_{i+1} - x_i) & & j &= i+1\end{aligned}$$

Voor de eindpunten wordt alleen het gedeelte genomen dat binnen het gebied valt. Alle overige waarden van α_{ij} en β_{ij} zijn nul.

Verder kennelijk $h_0 = 1$. (3.21)

Het minimum van J in (3.20) wordt gevonden uit

$$\frac{\partial J}{\partial h_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.22)$$

of

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} (\alpha_{ik} - \sigma^2 \beta_{ik}) h_i = 0 \quad (3.23)$$

Enkele voordelen van de eindige-elementenmethode t.o.v. de differentiemethode zijn

- (i) dat de punten x_j nog vrij gekozen kunnen worden, eventueel onregelmatig verdeeld
- (ii) dat de "natuurlijke" randvoorwaarde (3.7) zonder speciale maatregelen in rekening gebracht wordt.

Overigens bestaat er een nauwe relatie tussen beide methoden, wat blijkt door de punten x_j regelmatig verdeeld te kiezen: $x_j = j\Delta x$. Dan volgt uit (3.23)

$$\frac{h_{j-1} - 2h_j + h_{j+1}}{\Delta x^2} + \sigma^2 \left(\frac{1}{6} h_{j-1} + \frac{2}{3} h_j + \frac{1}{6} h_{j+1} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.24)$$

$$\frac{h_{j-1} - h_j}{\Delta x^2} + \sigma^2 \left(\frac{1}{6} h_{j-1} + \frac{1}{3} h_j \right) = 0 \quad j = n \quad (3.25)$$

gecombineerd met (3.21). Dit is weliswaar niet hetzelfde als de differentiebenadering (3.10) maar wel iets dergelijks. Zie fig. 3.4. voor het resultaat. Bij nader onderzoek blijkt het grote verschil in nauwkeurigheid uitsluitend te komen doordat (3.25) de randvoorwaarde beter benadert dan (3.12).

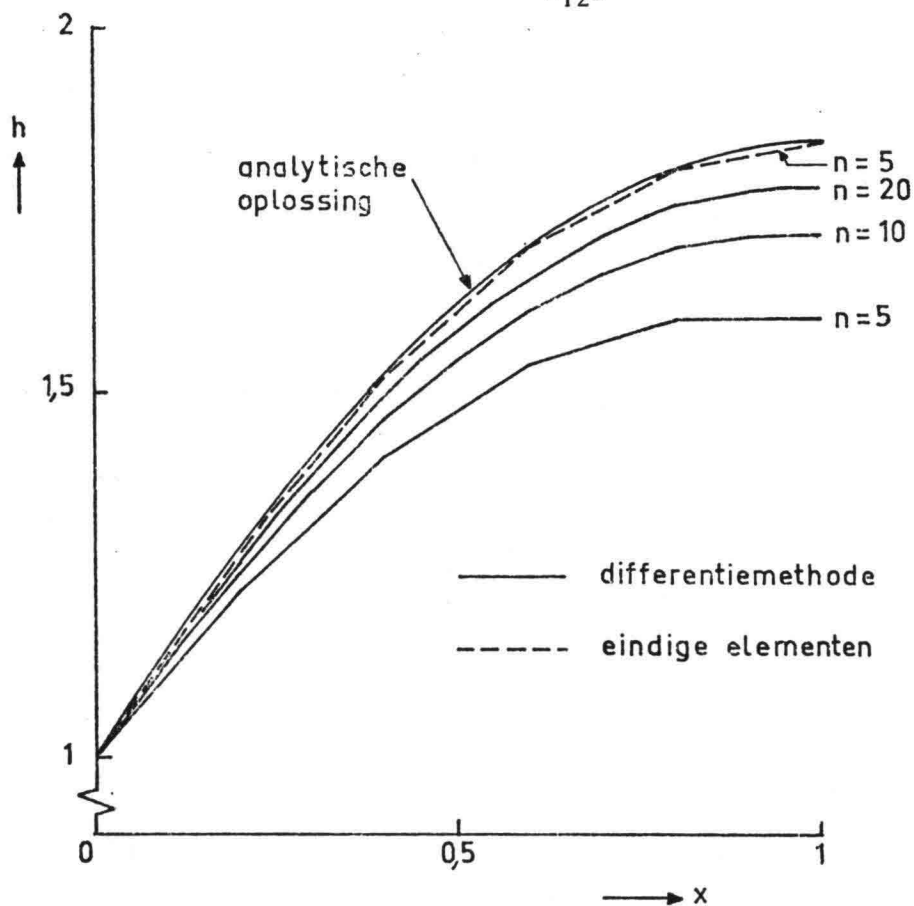


Fig. 3.4. Oplossing modelprobleem met de eindige-elementen methode

4. Iets over partiële differentiaalvergelijkingen

Bij het opstellen van wiskundige modellen komen we verschillende typen differentiaalvergelijkingen tegen met verschillende eigenschappen. Het is van belang om die typen te onderscheiden. Voor een uitvoerige behandeling van partiële differentiaalvergelijkingen en hun eigenschappen zie bijv. Timman (1963), Sommerfeld (1964).

Als eerste voorbeeld nemen we de vergelijking

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

die o.a. voorkomt als ruwe benadering voor de voortplanting van bodemverstorings in een zandige rivierbodem (hoogte $z(x,t)$; c is een functie van z , x en t). Als we de ontwikkeling van z volgen langs een lijn

$$x = x_0(t) \quad (4.2)$$

dan geldt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dx_0}{dt} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.3)$$

en daar komt nul uit als

$$\frac{dx}{dt} = c. \quad (4.4)$$

Zo'n lijn heet een karakteristiek. Hieruit blijkt dat de oplossing van (4.1) een golfkarakter heeft: een verstoring die op een zeker ogenblik aanwezig is plant zich met een snelheid c voort ("simple wave"). Weliswaar kan die voortplantingssnelheid van punt tot punt variëren, zodat de "golf" vervormd wordt (fig. 4.1)

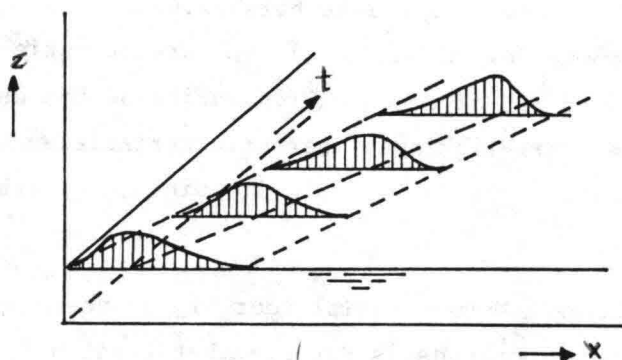


Fig. 4.1. Voortplanting van een "simple wave"

Als tweede voorbeeld bekijken we de vergelijkingen voor lange golven in een rivier. Gemakshalve nemen we de vereenvoudigde vergelijkingen; een soortgelijke procedure geldt ook voor de algemene vergelijkingen

$$\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{g u |u|}{C^2 a} = 0 \quad (4.6)$$

We proberen weer of er een eigenschap $f(a,u)$ is die langs een lijn bewaard blijft. Daartoe nemen we (4.5) plus m maal (4.6) en proberen m zo te bepalen dat de afgeleiden van a en u in dezelfde combinatie (als in (4.3)) voorkomen:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (u + mg) \frac{\partial a}{\partial x} + m \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{a}{m}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + m \frac{g u |u|}{C^2 a} = 0 \quad (4.7)$$

Als $u + mg = u + a/m$ wordt kennelijk aan de wens voldaan, dus $m^2 = a/g$. Dan volgt uit (4.7) na deling door m :

$$\frac{d}{dt} (u \pm 2(ga)^{\frac{1}{2}}) + \frac{g}{C^2} \frac{u|u|}{a} = 0 \quad (4.8)$$

langs de karakteristieken

$$\frac{dx}{dt} = u \pm (ga)^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Er zijn nu *twee* karakteristieken en langs ieder daarvan is er een typische combinatie $u \pm 2(ga)^{\frac{1}{2}}$. Die blijft echter niet constant, zoals uit (4.8) blijkt, maar verandert (langzaam) tengevolge van de bodemwrijving. Op basis van (4.8) en (4.9) kan een numerieke berekeningsmethode worden opgezet (karakteristiekenmethode, hfdst. 6). De karakteristieken zijn geen rechte lijnen aangezien u en a in het algemeen zullen variëren. Een dergelijk stelsel van differentiaalvergelijkingen waar karakteristieken voor bestaan wordt *hyperbolisch* genoemd. Vgl. (4.1) is in die zin ook hyperbolisch.

Hyperbolische vergelijkingen komen veelal voor bij de beschrijving van *golfproblemen*. In de waterloopkunde is dat o.a. het geval bij lange golven in één of twee dimensies en bij waterslagverschijnselen. Soortgelijke beschrijvingen gelden voor andere golfverschijnselen, zoals geluidsgolven of elektro-magnetische golven.

Een derde voorbeeld is dat van diffusie van een stof in een rivier. Gemakshalve even aannemend dat de dwarsdoorsnede en de stroomsnelheid constant zijn, luidt de continuïteitsvergelijking voor een stof met concentratie c :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

De flux f heeft een convectief en een diffusief stuk:

$$f = uc - D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4.11)$$

Deze vergelijking bevat geen afgeleide naar de tijd in tegenstelling tot bijv. (4.6). Om te zien wat dat voor gevolgen heeft wordt er kunstmatig even een term aan toegevoegd:

$$\epsilon \frac{\partial f}{\partial t} + D \frac{\partial c}{\partial x} = uc - f \quad (4.12)$$

waarin ϵ straks weer 0 moet worden. Bij toepassing van dezelfde procedure als hierboven voor het vinden van de karakteristieken moet gelden

$$mD = \frac{1}{m\epsilon} = \frac{dx_0}{dt} \quad (4.13)$$

$$\text{dus } m^2 = (\epsilon D)^{-1} \rightarrow \infty \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

De karakteristieken zijn gedegenereerd; de "voortplantingssnelheid" is oneindig geworden. Dit is typerend voor *parabolische* vergelijkingen. Combinatie van (4.10) en (4.11) geeft een vorm die bekend staat als de convectie-diffusie vergelijking.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \quad (4.14)$$

Parabolische vergelijkingen komen in de waterloopkunde voor bij diffusie van opgeloste of zwevende stoffen in water, bij de voortplanting van hoogwatergolven in rivieren, bij de theorie van kustlijnen en bij grondwaterstroming met een vrije waterspiegel. In een ander gebied leiden warmtegeleidingsproblemen vaak tot parabolische vergelijkingen.

Als laatste bekijken we een "evenwichtsprobleem" van (bijv.) potentiaalstroming in twee dimensies x, y . De continuïteitsvergelijking voor een onsamendrukbare vloeistof luidt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

waarin u en v de snelheidscomponenten zijn. Onder bepaalde voorwaarden (welke?) kan de stroming als rotatievrij beschouwd worden:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

Proberen we hier de procedure op toe te passen om karakteristieken in het x, y vlak vinden, dan leidt dat tot

$$m = -\frac{1}{m} = \frac{dy_o}{dx} \quad (4.17)$$

of $m^2 = -1$

wat geen reële oplossingen heeft. In dit geval bestaan er dus geen karakteristieken; men noemt het stelsel vergelijkingen *elliptisch*. Door eliminatie van één van beide onbekenden, bijv. v , (of door invoering van een potentiaalfunctie, hoofdstuk 21) ontstaat.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.18)$$

als "prototype" van een elliptische vergelijking. Dit is de Laplace- of potentiaalvergelijking. Dergelijke elliptische problemen komen in de waterloopkunde voor bij o.a. grondwaterstroming en diffractie van (periodieke) korte golven. In de elasticiteitstheorie en in de theorie van elektro-magnetische velden komen ook vaak elliptische vergelijkingen voor.

Tenslotte moet worden opgemerkt dat de hiervoor behandelde classificatie alleen betrekking heeft op 2e orde problemen in twee variabelen. Bij hogere orde problemen kunnen meerdere karakteristieken optreden die in allerlei combinaties reëel of imaginair kunnen zijn waardoor mengvormen tussen de typen kunnen ontstaan. Ook bij problemen in meerdere dimensies (bijv. tijdsafhankelijke twee-dimensionale stroming) kunnen de vergelijkingen een gemengd karakter hebben, waarbij het belang van sommige termen in de vergelijkingen kan bepalen welk type de overhand heeft. De gegeven indeling is desondanks nuttig voor een eerste indruk over het gedrag van de oplossingen.

5. Lange golven; gedrag

5.1. Karakteristieken

Een uitvoerige bespreking van de karakteristieken voor de lange-golfvergelijkingen is gegeven in het college b73 (lange golven). Voor de vergelijkingen voor niet-stationaire stroming in open leidingen

$$B \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q^2/A_s) + gA_s \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{C^2 R A_s} Q|Q| = 0 \quad (5.1.2)$$

zijn de karakteristieke voortplantingssnelheden

$$c = Q/A_s \pm \{gA_s/B + (1 - B_s/B)Q^2/A_s^2\}^{1/2} \quad (5.1.3)$$

waarin	a	waterdiepte
	B	bergende breedte (= breedte op de waterspiegel van het totale dwarsprofiel)
	h	waterhoogte
	Q	afvoer
	t	tijd
	x	plaats
	A _s	stroomvoerend dwarsprofiel
	R	hydraulische straal
	C	coefficient van Chézy voor bodemwrijving
	B _s	stroomvoerende breedte (= breedte op de waterspiegel van het stroomvoerende dwarsprofiel)

De karakteristieken zijn op te vatten als de banen van kleine verstoringen; zoals verderop blijkt (par. 5.3) zijn ze niet identiek met de banen van de werkelijke golven. Ze zijn ook op te vatten als de uitbreidingssnelheid van "informatie". Als er op een punt x_0 en tijdstip t_0 iets gebeurt, plant de invloed van die gebeurtenis zich voort met de karakteristieke voortplantingssnelheid. Dat betekent dat in punt x pas iets van de verstoring te merken is na een tijd $(x - x_0)/c$; dan komt het punt x in het *invloedsgebied* van x_0 te liggen (fig. 5.1). Omgekeerd is het punt x slechts afhankelijk van die punten die tussen de achterwaartse karakteristieken liggen; dat heet het *afhankelijkheidsgebied* (fig. 5.1).

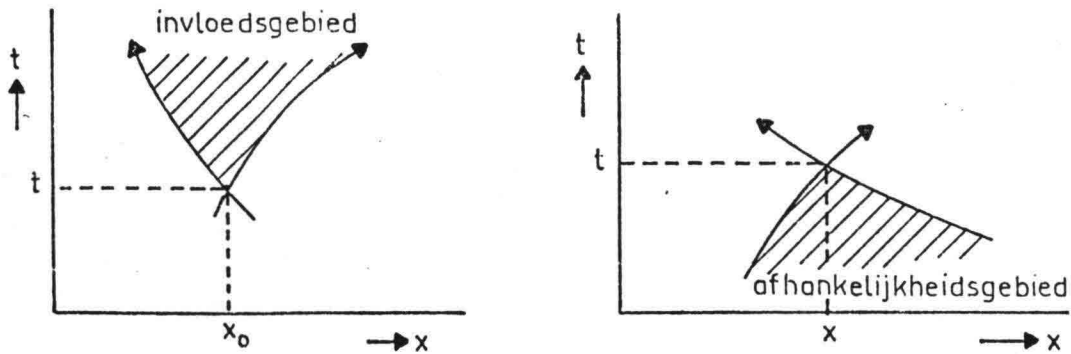


Fig. 5.1. Invloeds- en afhankelijkheidsgebieden.

Dit heeft gevolgen voor de voortplanting van fouten in een wiskundig model voor een golfprobleem. Als er een (numerieke of fysische) fout wordt geïntroduceerd, plant die zich in principe langs karakteristieken voort en blijft dus lange tijd bestaan. Er treedt enige damping op tengevolge van de bodemwrijving, maar die is vrij zwak. Een orde van grootte van de tijdschaal voor die damping volgt uit de eerste en de laatste term van (5.1.2), waaruit bij linearisering blijkt:

$$Q = Q_0 \exp \left(- \frac{2g|Q|t}{C^2 R A_s} \right) \quad (5.1.4)$$

dus een maatgevende tijd is

$$t_r = \frac{C^2 R A_s}{2g|Q|} \quad (5.1.5)$$

Q is hierin de heersende gemiddelde afvoer. De verhouding tot de golfperiode T (bijv. van een getijgolf) is

$$\frac{t_r}{T} = \frac{C^2 R A_s}{2g|Q|T} = \frac{1}{2K} \quad (5.1.6)$$

waarin

$$K = \frac{QT}{R A_s} \frac{g}{C^2} \quad (5.1.7)$$

een dimensieloze parameter is die verder ook nog van belang blijkt te zijn (par. 5.3). Voor een getijgolf (bijv. $R = 10$ m, $A_s = 10^4$ m, $Q = 1000$ m³/s) kan $K \approx 1$ zijn; de "dampingstijd" van een verstoring is dan in de orde van grootte van de getijperiode. Op een soortgelijke manier lopen fouten die in de randvoorwaarde worden gemaakt het gebied in, waarbij ze zwak gedempt worden.

Uit de algemene uitdrukking (5.1.3) blijkt dat de stroomsnelheid $u = Q/A_s$ niet erg belangrijk is zolang het getal van Froude

$$F = Q(gA_s/B)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.1.8)$$

klein is; de voortplantingssnelheid is dan ongeveer $(gA_s/B)^{\frac{1}{2}}$. Let wel dat dit nog belangrijk kan afwijken van de "bekende" waarde $(ga)^{\frac{1}{2}}$, in het geval dat er belangrijke niet-stroomvoerende gedeelten in het dwarsprofiel voorkomen (bijv. kribvakken), dus als $B_s < B$ of als de vorm van het dwarsprofiel ver van een rechthoek afwijkt.

5.2. Begin- en randvoorwaarden

Aangezien karakteristieken iets zeggen over de voortplanting van golven ligt het voor de hand dat er ook informatie uit te halen is wat betreft rand- en beginvoorwaarden. De algemene regel is: *het benodigde aantal randvoorwaarden is gelijk aan het aantal ingaande karakteristieken* (zie bijv. Courant en Hilbert, 1962). Dit kan als volgt aannemelijk gemaakt worden. Aan de zeerand van een getijrivier zijn er twee karakteristieken waarvan er (bij subkritische stroming) één naar buiten en één naar binnen loopt. De uitgaande golf is er een die vanuit de rivier komt; deze wordt dus bepaald door wat er eerder op de rivier gebeurd is en is niet onderhevig aan een randvoorwaarde. De ingaande karakteristiek bij de rand beschrijft echter de invallende golf die uit de zee afkomstig is; informatie daarover is niet in het model aanwezig en zal dus als randvoorwaarde opgelegd moeten worden. Op een soortgelijke manier kan een fysische interpretatie gegeven worden aan andere situaties (bijv. bij superkritische stroming).

Er volgt uit deze regel ook dat er altijd *twee* beginvoorwaarden nodig zijn. Dit is vaak een probleem omdat het moeilijk is, de gedetailleerde stromingstoestand van een rivier op één tijdstip vast te stellen. Er zullen dus bij een geschatte begintoestand vaak grote fouten gemaakt worden. Gelukkig dempen deze uit door het wrijvingsmechanisme (par. 5.1) zodat de invloed van de beginvoorwaarden steeds kleiner wordt met toenemende tijd. Men kan dit experimenteel bekijken door periodieke randvoorwaarden op te leggen en te wachten tot het getij zich in het hele model met een zekere nauwkeurigheid reproduceert (fig. 5.2). Het mechanisme werkt ook bij niet-periodieke randvoorwaarden. Dan is de uitdampingstijd vast te stellen door oplossingen met twee verschillende beginvoorwaarden maar gelijke randvoorwaarden te vergelijken.

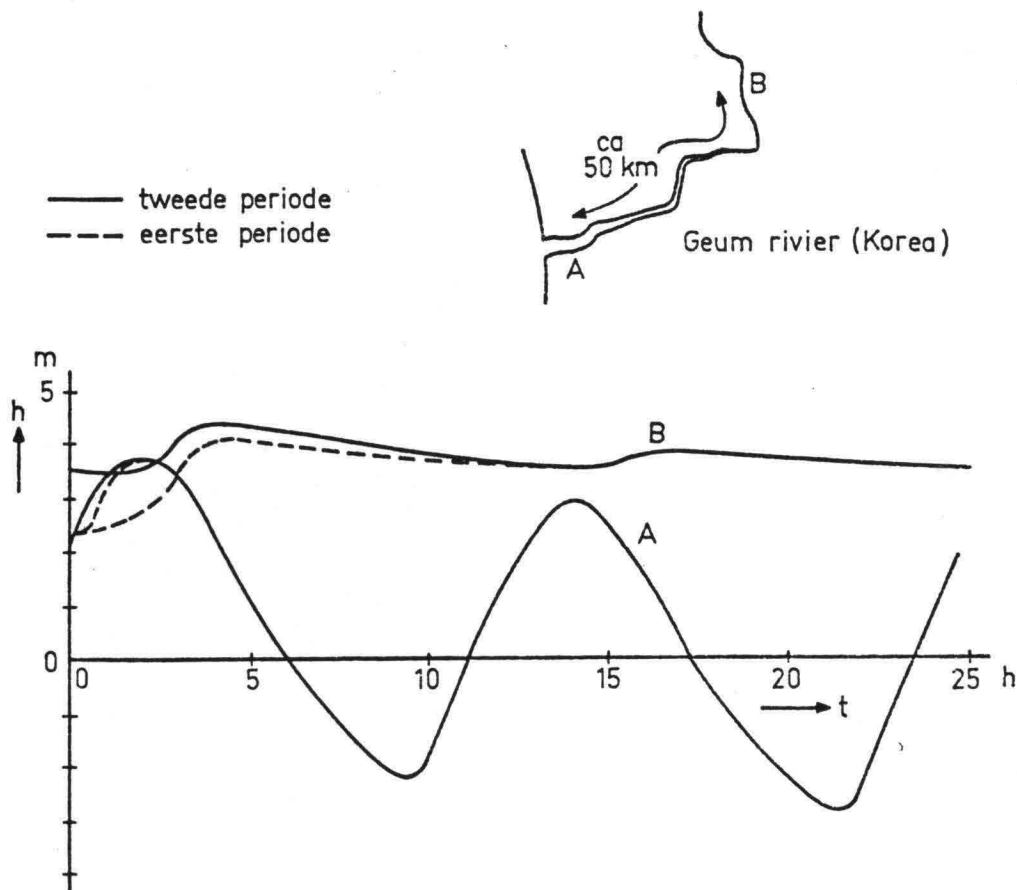


Fig. 5.2. Voorbeeld van de instelling van een periodiek getij

De voorgaande regel zegt alleen iets over het *aantal* randvoorwaarden maar niet over het type. Daarvoor bestaan verschillende mogelijkheden:

- a. Gesloten rand: $Q = 0$
- b. Getijrand : $h = h(t)$
- c. Rivierrand : $Q = Q(t)$

Als $Q(t)$ de rivierafvoer voorstelt, heeft deze voorwaarde alleen zin als hij *buiten het getijgebied* opgelegd wordt tenzij er zich inderdaad een constructie (stuw) bevindt dit het debiet vastlegt. Anders zal de getijgolf ertegen reflecteren op dezelfde manier als tegen een gesloten rand.

- d. Interne rand. Dit kan optreden bij een constructie in een rivier (bijv. een getijcentrale). Aangezien er aan weerszijden van de interne rand een randvoorwaarde nodig is, zijn er *twee* relaties nodig tussen de waterstanden en afvoeren aan weerszijden. Deze hebben te maken met de continuïteit en met de eigenschappen van de constructie (pompkarakteristiek, weerstand over een sluitgat etc.). Tot deze groep behoort ook een splitsingspunt. Als er drie riviertakken bij elkaar komen zijn er drie relaties nodig. Eén is de continuïteitsvergelijking; de andere twee zeggen bijv. dat de waterstanden in de drie takken gelijk zijn.
- e. Niet-reflecterende rand. Langs de ingaande karakteristiek wordt een combinatie Q en a voorgeschreven:

$$u \pm 2(ga)^{\frac{1}{2}} = f(t) \quad (5.2.1)$$

waarbij het teken overeenkomt met dat in (5.1.3).

f. Q-h kromme voor een rivier. Deze is alleen juist bij zeer langzame debiet-variatiën. Anders treden toch reflecties of opstuwing op.

Ter toelichting bij de niet-reflecterende randvoorwaarde (5.2.1) het volgende. In principe werken alle voorwaarden a,...,d reflecterend. Zelfs als een fysisch reële getijkromme aan de rand wordt opgelegd zal het model (min of meer per definitie) nog een enigszins afwijkend resultaat geven. Er kunnen reflecties in het model optreden die, weer bij de rand aangekomen, niet in de randvoorwaarde voorkomen en dus niet "weg kunnen lopen". Zij reflecteren opnieuw tegen de rand en blijven dus in het model. Voorwaarde (5.2.1) is nu gebaseerd op de splitsing in invallende en teruggekaatste golven. Voor het vereenvoudigde geval van een breed rechthoekig profiel zonder bodemwrijving geldt nl. dat

$$u \pm 2(ga)^{\frac{1}{2}} = \text{constant} \quad (5.2.2)$$

langs de karakteristieken

$$c = u \pm (ga)^{\frac{1}{2}} \quad (5.2.3)$$

Door de combinatie (5.2.2) behorend bij de invallende golf voor te schrijven (wat fysisch ook zinvol is) wordt de combinatie voor de teruggekaatste golf vrijgelaten, dus die kan het model uitlopen. In die zin is de randvoorwaarde (5.2.1) niet reflecterend. De karakteristieke voorwaarden behorend bij de volledige vergelijkingen (5.1.1) en (5.1.2) zijn niet in een simpele vorm als (5.2.1) te schrijven. Daardoor is (5.2.1) een benadering en treedt er toch enige reflectie op; echter veel minder dan bij de overige randvoorwaarden. Deze aanpak heeft ook nut als er in het model ingrepen worden gedaan (bouw van een constructie, verdieping van de rivier etc.) die de randvoorwaarde beïnvloeden. In sommige gevallen kan op fysische gronden worden verondersteld dat de invallende golf niet verandert, zodat voorwaarde (5.2.1) gehandhaafd kan blijven.

5.3. Analyse van de gelineariseerde vergelijkingen

Een belangrijk deel van het gedrag van de oplossing van de lange-golfvergelijkingen kan bij benadering worden gehaald uit de gelineariseerde vergelijkingen. Als we uitgaan van een permanente uniforme stroming met debiet Q_0 en waterdiepte a_0 geldt voor verstoringen van Q' en a'

$$B_0 \frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{Q_o}{A_{so}} Q' - \frac{Q_o^2}{A_{so}^2} B_{so} a' \right) + g A_{so} \frac{\partial a'}{\partial x} + \\ + g B_{so} a' \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{2 g |Q_o|}{C_o^2 R_o A_{so}} Q' + g Q_o |Q_o| \frac{d}{da} \left(\frac{1}{C^2 R A_s} \right)_o a' = 0 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

waarin hogere dan eerste machten van a' en Q' zijn verwaarloosd. Als het gaat om een oscillerende stroming met relatief kleine Q_o kan de factor $2|Q_o|$ in de wrijvingsterm volgens Lorentz vervangen worden door $\frac{8}{3\pi} \hat{Q}$ waarin $\hat{Q}$ de amplitude van het oscillerend debiet is. Als we nu de grootheden dimensioneloos maken met Q_o , a_o , een golfperiode T en een golflengte $(gA_{so}/B_o)^{\frac{1}{2}}T$ dan ontstaat, met weglating van de accenten:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + b F \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 F \frac{\partial Q}{\partial x} - F b_1^{-1} \frac{\partial a}{\partial x} + b^{-1} F^{-1} \frac{\partial a}{\partial x} + K(2Q - \gamma a) = 0 \quad (5.3.4)$$

$$\text{waarin} \quad F = Q_o A_{so}^{-1} (gA_{so}/B_o)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{getal van Froude} \quad (5.3.5)$$

$$b = A_{so} (B_o a_o)^{-1}, \quad b_1 = A_{so} (B_{so} a_i)^{-1} \quad (5.3.6)$$

$$K = \frac{Q_o T}{R_o A_{so}} \frac{g}{C_o^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{8}{3\pi} \frac{\hat{Q} T}{R_o A_{so}} \frac{q}{C_o^2} \quad (5.3.7)$$

$$\gamma = \frac{B_{so} a_o}{A_{so}} - C_o^2 R_o A_{so} a_o \frac{d}{da} \left(\frac{1}{C^2 R A_s} \right)_o \quad (5.3.8)$$

Als bijv. C onafhankelijk van a is, $R = a$ en $A_s = B_s a$ bij constante breedte $B_s = B_{so}$ (rechthoekig dwarsprofiel) dan volgt $\gamma = 3$.

De gelineariseerde vergelijkingen kunnen nu worden opgelost voor golfvormige verstoringen. We kunnen bijv. op de rand $x = 0$ een periodieke randvoorwaarde opleggen met een periode T , dus in dimensioneloze vorm:

$$a = a_1 \exp(2\pi i t) \quad (5.3.9)$$

Als er in werkelijkheid een ingewikkelder randvoorwaarde is, kan die in een Fourierreeks ontwikkeld worden, waarna iedere component apart geanalyseerd kan worden. Deze superpositie is mogelijk geworden door de linearisering.

Na verloop van tijd (uitdemping van de beginvoorwaarde!) zal de hele oplossing periodiek worden. Nemen we aan dat de rivier oneindig lang is dan ontstaan er geen gereflecteerde golven en zal de oplossing het karakter hebben van één gedempte golf:

$$a(x,t) = a_1 \exp \left\{ -\frac{x}{r} + 2\pi i \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \quad (5.3.10)$$

en
$$Q(x,t) = Q_1 \exp \left\{ -\frac{x}{r} + 2\pi i \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \quad (5.3.11)$$

Omdat de vergelijkingen lineair (gemaakt) zijn is de grootte van a_1 willekeurig. De waarden van r , c en Q_1 worden door het systeem bepaald en zijn daarvoor kenmerkend. Ze worden gevonden door (5.3.10) en (5.3.11) in (5.3.3) en (5.3.4) in te vullen. Uit de eerste volgt bijv.

$$2\pi i a_1 - b F Q_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi i}{c} \right) = 0 \quad (5.3.12)$$

De bepaling van r en c wordt hier niet uitgewerkt; het resultaat is in fig. 5.3. gegeven.

De interpretatie van (5.3.10) is een lopende golf met dimensieloze voortplantingssnelheid c en een demping zodanig dat de amplitude na een dimensieloze afstand r met een factor e^{-1} is gereduceerd. De werkelijke voortplantingssnelheid is dus

$$c = (g A_{so} / B_o)^{\frac{1}{2}} c' \quad (5.3.13)$$

en de werkelijke "relaxatieafstand" of dempingsafstand

$$L_r = (g A_{so} / B_o)^{\frac{1}{2}} T r \quad (5.3.14)$$

Als er om welke reden dan ook, wel gereflecteerde golven optreden dan gedragen die zich op een soortgelijke manier, gerekend t.o.v. het punt waar ze opgewekt worden.

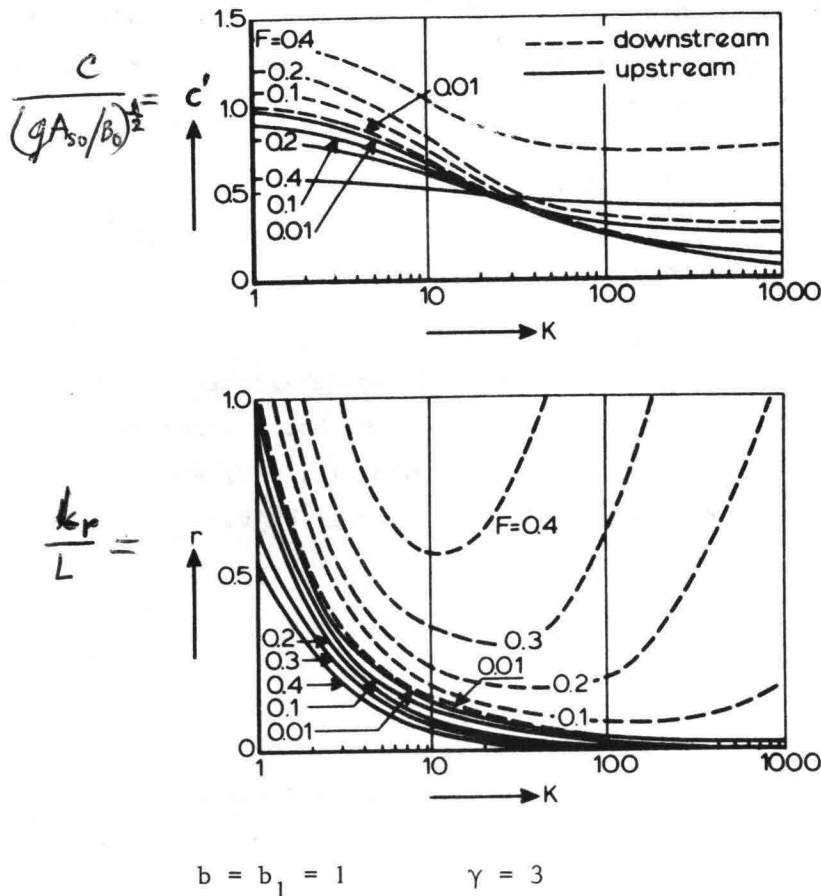


Fig. 5.3. Dimensieloze voortplantingssnelheid en dempingslengte voor de gelineariseerde lange-golf vergelijkingen

Extreme gevallen.

- Voor $K \rightarrow 0$ wordt $c' = F + 1$ wat overeenkomt met de karakteristieke voortplantingssnelheden. Verder gaat $r \rightarrow \infty$, wat betekent dat golven vrijwel niet meer gedemped worden. Dit is het geval voor golven met relatief korte periode en geringe bodemwrijving. Getijgolven vallen vaak in deze categorie evenals nog kortere golven zoals seiches.
- Voor $K \rightarrow \infty$ gaat c' naar een lage constante waarde. Deze blijkt overeen te komen met de voortplantingssnelheid van hoogwatergolven (zie verder Par. 13.1). Voor de golf die tegen de stroom in loopt gaat $r \rightarrow 0$; die golf wordt dus heel snel gedemped, zodat hij eigenlijk niet bestaat. De golf met de stroom mee wordt slechts zwak gedemped ($r \rightarrow \infty$). In het extreme geval dat er vrijwel geen damping meer is spreekt men van een kinematische golf (zie ook college b73).

In het algemeen kan een golf zich tussen beide uitersten in bevinden; zo kan een getijgolf duidelijk vertraagd worden door bodemwrijving en een hoogwatergolf kan een zo korte periode hebben dat hij toch een duidelijk "dynamisch" karakter krijgt.

Door (5.3.10) en (5.3.11) wordt de "overdrachtsfunctie" van een riviergedeelte met lengte x aangegeven. Als een golf volgens (5.3.9) als "input" wordt toegevoerd geeft de overdrachtsfunctie de demping en de faseverschuiving van de golf in het systeem aan. In het bijzonder kan vastgesteld worden welke golven zo sterk gedempt worden dat ze bij toepassing van een numerieke methode niet nauwkeurig weergegeven hoeven te worden.

6 Karakteristiekemethode voor lange golven

Op basis van de karakteristiekentheorie kan een numerieke methode opgezet worden. Voor de lange golven geldt (volgens de methode van hoofdstuk 4)

$$B \frac{dh}{dt} + m \frac{dQ}{dt} + m \frac{gQ|Q|}{C^2 R A_s} = 0 \quad (6.1)$$

langs de karakteristieken

$$\frac{dx}{dt} = Q/A_s \pm \{gA_s/B + (1 - B_s/B)Q^2/A_s^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

$$\text{waarbij} \quad m^{-1} = -\frac{Q}{A_s} \pm \{gA_s/B + (1 - B_s/B)Q^2/A_s^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

In (6.2) en (6.3) moet hetzelfde teken gekozen worden. Dat betekent dat men vanuit een bekende begintoestand door integratie van de gewone differentiaalvergelijkingen (6.1) en (6.2) in de tijd vooruit kan komen, volgens fig. 6.1. Langs de karakteristiek 2-5 gelden de vergelijkingen met het + teken, langs 3-5 die met het - teken. De vgl. (6.2) langs beide karakteristieken leggen de plaats van het snijpunt 5 vast; de beide vgl. (6.1) leveren vervolgens h en Q in punt 5. Het proces is echter wat ingewikkelder omdat de vier vergelijkingen onderling gekoppeld zijn: om h en Q te berekenen is de ligging van de karakteristieken nodig, maar die is omgekeerd weer van h en Q afhankelijk. Dit betekent in het algemeen dat de vergelijkingen bij benadering moeten worden opgelost, bijv. als volgt. Als de punten van het karakteristiekennet dicht bij elkaar liggen mag worden verondersteld dat de helling dx/dt niet veel varieert tussen 2-5 en

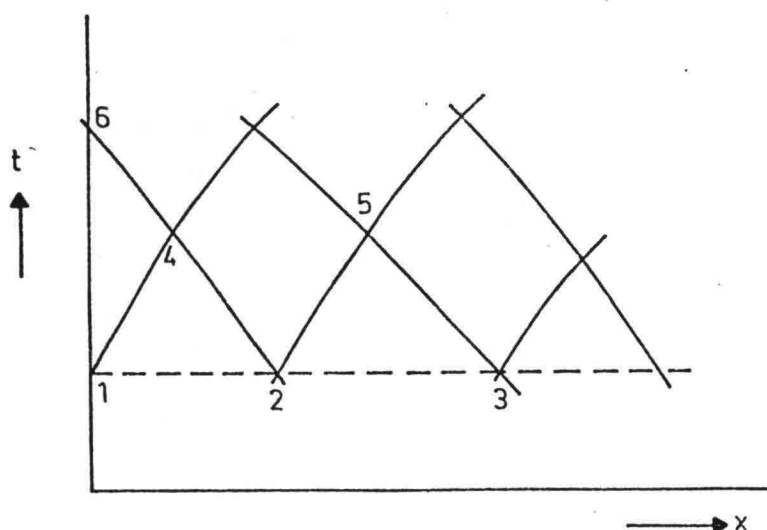


Fig. 6.1 Basis van de karakteristiekenmethode

3-5. Bij benadering geldt dus

$$x_5 = x_2 + c_2^+(t_5 - t_2) \quad (6.4)$$

$$x_5 = x_3 + c_2^-(t_5 - t_3)$$

waaruit x_5 en t_5 eenvoudig kunnen worden opgelost. Vervolgens worden de vgl. (6.1) benaderd als

$$B_2 \frac{h_5 - h_2}{t_5 - t_2} + m_2^+ \frac{Q_5 - Q_2}{t_5 - t_2} + \left(m^+ \frac{gQ|Q|}{C^2 R A_s} \right)_2 = 0 \quad (6.5)$$

$$B_3 \frac{h_5 - h_3}{t_5 - t_3} + m_2^- \frac{Q_5 - Q_3}{t_5 - t_3} + \left(m^- \frac{gQ|Q|}{C^2 R A_s} \right)_3 = 0 \quad (6.6)$$

waaruit h_5 en Q_5 kunnen worden opgelost. Desgewenst kan de nauwkeurigheid opgevoerd worden door de bewerking te herhalen met verbeterde (gemiddelde) waarden voor c , m en de wrijvingsterm. Veelal wordt echter met (6.4)... (6.6) volstaan. De nauwkeurigheid daarvan is nog te beïnvloeden door de maaswijdte te variëren.

Op de beschreven manier kan één nieuw punt in het karakteristiekennet bepaald worden. Dit kan voor een hele rij punten (4,5,...) gedaan worden. Aan een volgende rij moet weer een randpunt (6) toegevoegd worden. Hiertoe staan slechts twee van de vier vergelijkingen (6.4) ... (6.6) ter beschikking, maar die worden aangevuld door het feit dat punt 6 op de rand ligt en door de randvoorwaarde op die rand. Op deze wijze kan dus naar behoefte in de tijd doorgerekend worden.

De karakteristiekenmethode heeft als voordelen dat

- a. er op een natuurlijke wijze wordt aangesloten bij het golfkarakter van de oplossing (hoewel, zoals in par. 5.3 blijkt, de golven niet noodzakelijk langs de karakteristieken lopen)
- b. randvoorwaarden op een voor de hand liggende wijze in rekening gebracht worden.

Er zijn echter ook enkele nadelen die tot gevolg hebben dat de methode weinig gebruikt wordt:

- c. het karakteristiekennet wordt onregelmatig als de vergelijkingen niet-lineair zijn (fig. 6.1). De onderlinge afstand van de punten kan daardoor vrij sterk variëren en dat heeft een invloed op de nauwkeurigheid die moeilijk te beoordelen is
- d. de integratie langs de karakteristieken is, in tegenstelling tot simpele lineaire gevallen, niet exakt; ook hierdoor wordt een moeilijk te analyseren onnauwkeurigheid geïntroduceerd.
- e. De tijdstap ligt vast bij een gekozen puntenverdeling en kan dus niet groter gekozen worden dan $\Delta x/c$.

Nadeel c geldt niet voor (bijna) lineaire vergelijkingen. Zo kan bijv. voor waterslagberekeningen heel goed van de karakteristiekenmethode gebruik gemaakt worden (hfdst. 11). Een methode om dat nadeel in het algemeen te ondervangen is in de literatuur voorgesteld onder de naam "method of specified time intervals" (bijv. Streeter and Wylie, 1967). Het idee is om de tijdstap vast te leggen (fig. 6.2) met het gevolg dat de karakteristieken elkaar niet meer op die vaste tijdniveau's snijden.

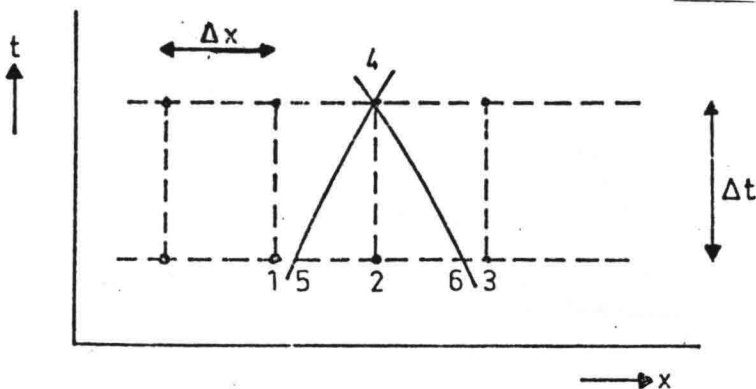


Fig. 6.2 Method of specified time intervals

De karakteristieke vergelijkingen kunnen nu worden toegepast langs 5-4 en 6-4 maar de punten 5 en 6 zijn geen roosterpunten. De waarden voor h en Q worden geïnterpoleerd tussen de roosterpunten 1, 2 en 3. Daardoor ontstaat een differentievergelijking tussen de punten 1, 2, 3, 4. Deze is echter formeel gelijkwaardig met een expliciet differentieschema als

besproken in hoofdstuk 7 waarvan de orde afhangt van de interpolatieprocedure. De methode verdient dan de naam karakteristiekenmethode niet meer.

7. Numerieke methodes voor een simple wave

7.1. Differentiemethodes

Om enkele begrippen duidelijk te maken wordt eerst uitgegaan van de kinematische-golf vergelijking (simple-wave vergelijking)

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (7.1.1)$$

waarbij de voortplantingssnelheid c ook nog constant wordt genomen. Voor deze eenvoudige vergelijking is de analytische oplossing eenvoudig aan-
gezien

$$a(x,t) = a(x - ct, 0) \quad (7.1.2)$$

(de waterdiepte blijft constant langs karakteristieken). Om een numerieke oplossing te krijgen kan de vergelijking op verschillende manieren *gediscretiseerd* worden: de grootheden moeten op de een of andere manier in een *eindig aantal gegevens* vastgelegd worden. Enkele mogelijkheden zijn: machtreeksen, Fourierreeksen, maar meer gebruikelijk is het karakteriseren van een functie door een eindig aantal functiewaarden op een rooster (fig. 7.1)

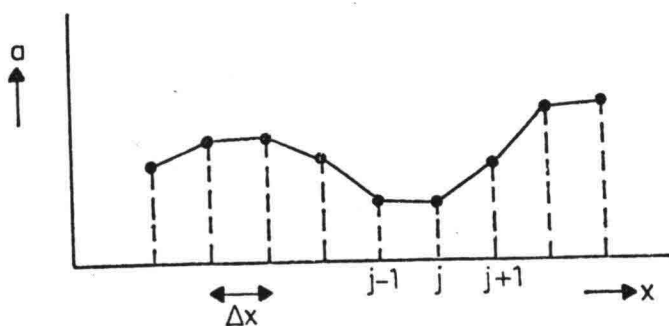


Fig. 7.1 Discretisering van een functie

Tussen de roosterpunten kan op een of andere manier geïnterpoleerd worden. Daarmee houdt ook de vraag verband hoe de afgeleiden in (7.2.1) weergegeven moeten worden. Afhankelijk van de interpolatietechniek zijn er verschillende uitdrukkingen mogelijk:

$$\frac{\partial a}{\partial x} (x = x_j) = \frac{a_j - a_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (7.1.3) \quad (\text{achterwaartse differentie})$$

$$= \frac{a_{j+1} - a_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{voorwaartse differentie})$$

$$= \frac{a_{j+1} - a_{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{centrale differentie})$$

$$= \frac{-a_{j+2} + 8a_{j+1} - 8a_{j-1} + a_{j-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4)$$

De bepaling van de fout bij deze benaderingen (de afbreekfout) komt in par. 7.3. aan de orde. Voor de afgeleide naar de tijd zijn er soortgelijke mogelijkheden; de functie a moet dus gediscrètiseerd worden op een twee-dimensionaal rooster (fig. 7.2).

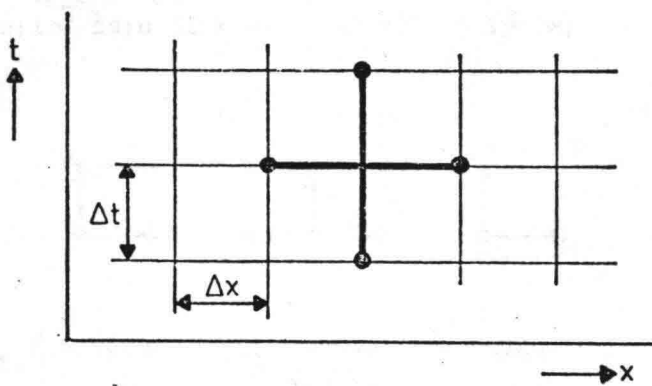


Fig. 7.2 Twee-dimensionaal rooster met leap-frog schema

In (7.1.3) is tevens de afbreekfout aangegeven, die iets zegt over de nauwkeurigheid. Door nu bijv. zowel voor de tijd- als ruimte-afgeleiden centrale differenties te gebruiken ontstaat een differentiemethode die bekend staat als de *leap-frog methode* (zie fig. 7.2)

$$\frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{2\Delta t} + c \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (7.1.4)$$

waarin $a_j^n = a(j\Delta x, n\Delta t)$. Er zijn echter nog diverse andere mogelijkheden, bijv.

- modified Lax schema

$$\frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} + c \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2\Delta x} - \alpha \frac{a_{j+1}^n - 2a_j^n + a_{j-1}^n}{2\Delta t} = 0 \quad (7.1.5)$$

- upstream differenties (Lelevier schema)

$$\frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} + c \frac{a_j^n - a_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (7.1.6)$$

- Crank-Nicholson schema

$$\frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} + \theta c \frac{a_{j+1}^{n+1} - a_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1 - \theta) c \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (7.1.7)$$

- vier-punts schema

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{a_{j+1}^{n+1} - a_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} \right\} + \theta c \frac{a_{j+1}^{n+1} - a_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) c \frac{a_{j+1}^n - a_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (7.1.8)$$

Al deze schema's benaderen op verschillende manieren en met verschillende nauwkeurigheden dezelfde vergelijking. De "differentie-moleculen" zijn in fig. 7.3 getekend.

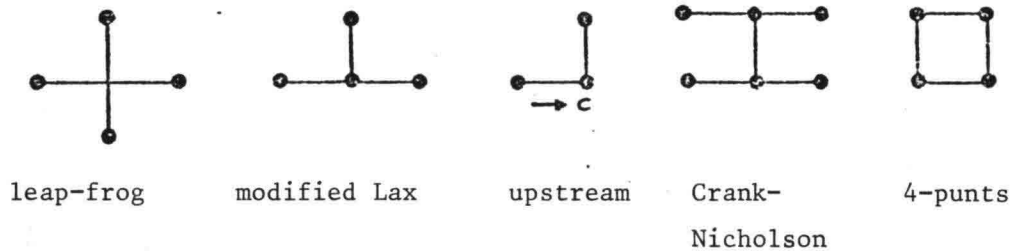


Fig. 7.3 Enkele differentieschema's

De schema's (7.1.4) ... (7.1.6) laten toe om één nieuw punt te berekenen vanuit de gegeven waarden op niveau n . Daarom zijn het *expliciete* schema's. Bij (7.1.7) en (7.1.8) worden alle waarden a_j^{n+1} aan elkaar gekoppeld via de differentievergelijkingen; deze moeten samen (en met de randvoorwaarden) opgelost worden. De methodes heten daarom *impliciet*. Het is duidelijk dat deze procedure ingewikkelder is dan de expliciete, maar daar staan andere voordelen tegenover (par. 7.3). De stelsels vergelijkingen die bij impliciete methodes ontstaan zijn veelal van een bandstructuur (vergelijk hoofdstuk 3) en daarom efficiënt op te lossen.

7.2. Eindige-elementen methodes

Bij *eindige-elementen methodes* komt de discretisering op een andere manier tot stand (zie ook par. 3): de onbekende functie wordt geschreven als een lineaire combinatie van een aantal basisfuncties ϕ_i .

$$a(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(x) \quad (7.2.1)$$

Voor de bepaling van de coëfficiënten $a_i(t)$ zijn er verschillende methodes. Als de differentiaalvergelijking gelijkwaardig is met een variatieprobleem (par. 3) kan (7.2.1) in de "energie"uitdrukking ingevuld worden en kan het minimum bepaald worden als functie van $a_i(t)$. In veel gevallen is zo'n variatieprincipe niet beschikbaar; men volgt dan de *gewogen-residuen methode*, waarbij de fout, overblijvend bij het invullen van (7.2.1) in de *differentiaalvergelijking*, in zekere zin klein gemaakt wordt, bijv. als volgt

$$\int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(x) \right\} v_j(x) dx = 0 \quad (7.2.2)$$

De gewichtsfuncties $v_j(x)$ kunnen nog op verschillende manieren gekozen worden; men kiest in ieder geval n verschillende, zodat (7.2.2) voldoende vergelijkingen levert om de coëfficiënten $a_i(t)$ te bepalen.

a. fout nul op discrete punten x_j (*collocatiemethode*):

$$v_j(x) = \delta(x - x_j) \quad (7.2.3)$$

b. fout nul gemiddeld over een strook (x_{j-1}, x_j) (*lijnenmethode*)

$$v_j(x) = \begin{cases} 1 & x_{j-1} \leq x < x_j \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (7.2.4.)$$

c. fout nul in zekere zin gemiddeld over het hele gebied (*Galerkin methode*)

$$v_j(x) = \phi_j(x) \quad (7.2.5)$$

Het resultaat van (7.2.2) is een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen:

$$\sum_{i=1}^n \left(b_{ij} \frac{da_i}{dt} + c_{ij} a_i \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (7.2.6)$$

met
$$b_{ij} = \int_0^L \phi_i(x) v_j(x) dx$$

$$c_{ij} = \int c \phi_i'(x) v_j(x) dx$$

De matrices b_{ij} en c_{ij} zijn vooraf te berekenen. De vergelijkingen (7.2.6) kunnen worden opgelost met een standaardmethode voor gewone differentiaalvergelijkingen (Euler, Heun, Runge Kutta, etc.).

Een typisch kenmerk van eindige-elementen methodes is dat de interpolatiefuncties slechts op een beperkt interval ongelijk aan nul zijn ("local

support"). Een veel gebruikt voorbeeld is in fig. 3.3 gegeven. Als we dat hanteren met de Galerkinmethode (7.2.5) en een impliciete methode voor de tijdsintegratie ontstaat bij een regelmatige verdeling van de steunpunten x_j (dat hoeft niet bij eindige-elementenmethodes):

$$\frac{1}{6} \frac{a_{j-1}^{n+1} - a_{j-1}^n}{\Delta t} + \frac{2}{3} \frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{6} \frac{a_{j+1}^{n+1} - a_{j+1}^n}{\Delta t} + \theta c \frac{a_{j+1}^{n+1} - a_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1 - \theta)c \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (7.2.6)$$

Dit is het schema van Stone en Brian.

Aan de randen van het gebied moeten veelal speciale maatregelen genomen worden (behalve bij de Galerkin methode, waar de randbehandeling vanzelf meegenomen wordt). In het geval van vgl. (7.1.1) zal op de bovenstroomse rand ($x = 0$) een randvoorwaarde voor a bekend moeten zijn (waarom?). Bij alle genoemde schema's kan die eenvoudig in rekening worden gebracht door het differentieschema pas vanaf $x = \Delta x$ toe te passen. Aan de benedenstroomse rand geldt echter geen randvoorwaarde maar de schema's (7.1.4), (7.1.5), (7.1.7) kunnen daar niet toegepast worden (dat zou informatie over een punt buiten het gebied vereisen). Op de benedenrand moet dus een speciaal schema toegepast worden, waarvoor vaak (7.1.6) of (7.1.8) worden gebruikt. Een en ander is niet zonder gevolgen voor stabiliteit en nauwkeurigheid.

7.3. Numerieke eigenschappen

Om een zinvolle keus te kunnen maken uit het grote aantal beschikbare numerieke methodes moeten we hun eigenschappen enigszins kunnen beoordelen (zie verder bijv. Richtmyer en Morton, 1967).

Het volgende schema geeft aan welke stappen bij de numerieke oplossing van een probleem gemaakt worden en welke verschijnselen daarbij een rol spelen. Deze worden hierna achtereenvolgens besproken.

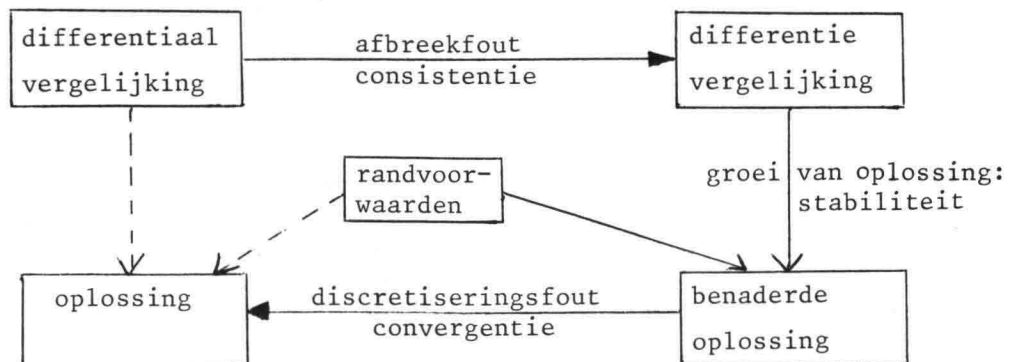


Fig. 7.4. Stappen bij numerieke oplossing

Consistentie en afbreekfout

De differentievergelijkingen zijn bedoeld als een benadering van de differentiaalvergelijking. De fout in de benadering kan geanalyseerd worden door de differentievergelijking via een Taylor-reeks weer naar een continue vorm om te werken. Voor het schema (7.1.5) leidt dit tot

$$\frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \dots \quad (7.3.1)$$

$$\frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + \dots \quad (7.3.2)$$

$$\frac{a_{j+1}^n - 2a_j^n + a_{j-1}^n}{2\Delta t} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \dots \right) \quad (7.3.3)$$

waarbij het rechterlid geldt op tijdniveau n en in punt j .

Nemen we alleen de laagste-orde termen mee dan blijkt dus uit (7.1.5) te volgen

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = \alpha \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \dots \quad (7.3.4)$$

Het verschil met de differentiaalvergelijking (7.2.1) zit in het rechterlid; dat heet de *afbreekfout* (truncation error). Als Δx en $\Delta t \rightarrow 0$ gaat de afbreekfout ook naar nul mits de tweede afgeleiden van a zich netjes gedragen. Dit betekent dat de differentievergelijking *consistent* is met de differentiaalvergelijking. Verder blijkt de afbreekfout evenredig te zijn met Δt en (als Δx en Δt in een vaste verhouding tot elkaar staan) met Δx ; de afbreekfout neemt daardoor lineair met Δx en Δt af als de stapgrootte verkleind wordt. Het schema is daarom van de *eerste orde* in Δx en Δt . In de praktijk laat men Δx en Δt niet naar nul gaan; in feite wordt dan (7.3.4) opgelost in plaats van (7.1.1). Nu volgt uit (7.3.4) door differentiatie

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} + O(\Delta x, \Delta t) = +c^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (7.3.5)$$

dus (7.3.4) kan ook worden geschreven als

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} (\alpha - \sigma^2) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \dots \quad (7.3.6)$$

waarin $\sigma = c \Delta t / \Delta x$ het *Courant getal* voorstelt.

Het rechterlid heeft de vorm van een diffusie-term. Eigenlijk wordt dus een soort diffusiebenadering toegepast, waarvan de diffusiecoëfficiënt (en dus de invloed op de oplossing) bepaald wordt door c , α , Δx en Δt . De effectief opgeloste vergelijking (7.3.6) wordt wel de *modified equation* genoemd.

De eigenschappen daarvan geven al enig inzicht in het gedrag van de oplossing van de differentievergelijking.

Uit (7.3.6) blijkt dat de eerste term van de afbreekfout nul wordt als $\alpha = \sigma^2$. De volgende term (niet uitgeschreven) wordt dan van belang; deze is één orde hoger dus we krijgen dan een tweede-orde schema dat bekend staat als het schema van Lax-Wendroff.

Nauwkeurigheid

Uiteindelijk van meer belang is de fout in de *oplossing* van de differentievergelijking, vergeleken met die van de differentiaalvergelijking (*discretiseringsfout*). Helaas is het niet eenvoudig, daar in het algemeen iets over te zeggen. Onder bepaalde voorwaarden (voor details zie bijv. Richtmyer en Morton, 1967) geldt voor lineaire vergelijkingen de *equivalentiestelling*: de discretiseringsfout is van dezelfde orde in Δx en Δt als de afbreekfout mits de differentievergelijking stabiel is. Voor het voorbeeld van vgl. (7.1.5) betekent dat dus voor de numerieke oplossing a_j^n t.o.v. de analytische oplossing $a(x,t)$:

$$a_j^n - a(j\Delta x, n\Delta t) = O(\Delta x, \Delta t) \quad (7.3.7)$$

De methode is dus in ieder geval *convergent* want de discretiseringsfout gaat naar nul als Δx en $\Delta t \rightarrow 0$. Dit zegt echter nog niets over de werkelijke grootte van de fout aangezien de coefficient van Δx en Δt in (7.3.7) daartoe bekend zou moeten zijn. Het is best mogelijk dat een tweede-orde methode onnauwkeuriger is dan een eerste-orde methode vanwege die coefficient in de discretiseringsfout.

Een heel andere methode om de nauwkeurigheid te schatten wordt behandeld in hfdst. 8. Er moet nog opgemerkt worden dat volgens Gustafsson (1975) voor hyperbolische vergelijkingen aan de rand een schema mag worden gebruikt van één orde lager dan in het binnengebied, zonder dat de convergentie volgens (7.3.7) wordt verstoord. Het kan wel betekenen dat de oplossing in een strook langs de rand minder nauwkeurig is.

Stabiliteit

Het kan voorkomen dat een differentieschema ondanks een benadering van zekere orde, toch onzin oplevert, zoals in het volgende voorbeeld van de leapfrog vergelijking (7.1.4) met $\sigma = 2$, waar a_j^n voor een aantal tijdniveaus

is aangegeven uitgaande van de startwaarden boven de streep. Op één punt ($j = 5, n = 1$) wordt een "fout" van 1 geïntroduceerd.

$x/\Delta x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t/\Delta t$									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	-2	0	2	0	0	0
3	0	0	4	0	-8	0	4	0	0
4	0	-8	0	24	0	-24	0	-8	0

Dit verschijnsel van explosieve groei heet instabiliteit. Voor ieder differentieschema moet dus behalve naar de afbreekfout ook nog naar de stabiliteit gekeken worden. Een methode daarvoor wordt in hfdst. 8 gegeven; in algemene gevallen is een waterdichte stabiliteitsanalyse moeilijk. Hier wordt een fysische verklaring gegeven van de mogelijkheid dat er een dergelijke instabiliteit optreedt (zie fig. 7.5). Dit heeft te maken met de invloeds- en afhankelijkheidsgebieden uit de karakteristiekentheorie.

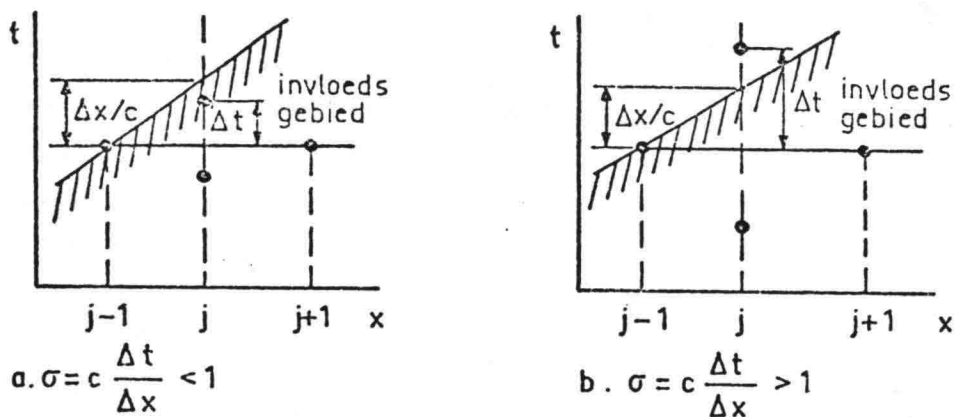


Fig. 7.5 CFL criterium voor stabiliteit

Het invloedsgebied van de punten $j-1, j, j+1$ op tijdniveau n ligt beneden de (éne) karakteristiek door $(j-1, n)$. Als het nieuw te berekenen punt $(j, n+1)$ daarbuiten valt (zoals in fig. b) kan het niet voldoende bepaald zijn: eigenlijk zouden ook nog punten links van $(j-1, n)$ in rekening gebracht moeten worden. Dit leidt tot instabiliteit. Als het nieuwe punt binnen het invloedsgebied ligt, krijgt het hoogstens teveel informatie en dat blijkt niet erg te zijn. Dit leidt dus tot het Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) criterium voor expliciete schema's:

$$\sigma = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (7.3.8)$$

Dit is een noodzakelijke, maar niet voldoende voorwaarde!

Voor impliciete schema's is deze voorwaarde in het algemeen niet van toepassing omdat daar het hele fysische invloedsgebied tegelijk in rekening gebracht wordt (fig. 7.6), ongeacht Δt . Dit is dan ook een van de grote voordelen van impliciete schema's: men kan zonder instabiliteit grote tijdstappen gebruiken. De gevolgen hiervan voor de nauwkeurigheid dienen echter goed in de gaten te worden gehouden (hoofdstuk 8)

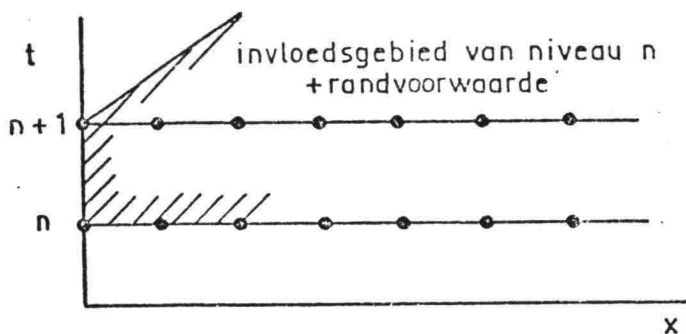


Fig. 7.6. CFL criterium geldt niet voor impliciete schema's

In het geval dat de voortplantingssnelheid c varieert of dat er (zoals bij lange golven) meerdere zijn, moet het CFL criterium overal, dus ook op het ergste punt, gelden. Als men bijv. een getijberekening doet voor een rivier waar lokaal een zeer diep gat voorkomt, dan is dat bepalend voor de bereikbare tijdstap, aangezien $c \approx (ga)^{\frac{1}{2}}$ daar maximaal is. Ook in de rest van het gebied is men dan gedwongen een kleine tijdstap (dus Courant getal aanmerkelijk kleiner dan 1) te gebruiken, hoewel dat uit nauwkeurigheidsoverwegingen helemaal niet wenselijk is (hoofdstuk 8).

Opmerking: ook op de stabiliteit kan de behandeling van de randen grote invloed hebben. Een analyse van die invloed is echter niet eenvoudig.

8. Golfvoortplanting

De numerieke eigenschappen stabiliteit en nauwkeurigheid zijn niet eenvoudig vast te stellen voor de algemene niet-lineaire lange-golf vergelijkingen met algemene randvoorwaarden. Voor lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten kan wel iets gedaan worden. We stellen nu als eis dat een numerieke methode, indien toegepast op de gelineariseerde vergelijkingen, stabiel en nauwkeurig moet zijn. Dat geeft weliswaar geen garantie maar wel een aanwijzing dat de methode bij toepassing op de niet-lineaire vergelijkingen ook stabiel is. Verder geeft de nauwkeurigheidsanalyse op zijn minst ook een orde van grootte voor het niet-lineaire geval, vooral als de niet-lineaire effecten niet al te sterk zijn. Een uitspraak over de juiste weergave van die niet-lineaire effecten kan op deze wijze uiteraard niet gedaan worden.

We bekijken eerst de simple-wave vergelijking (7.1.1). Deze heeft oplossingen met een golfkarakter van de vorm

$$a(x,t) = \hat{a} \exp \{ik(x - ct)\} \quad (8.1)$$

Hierin zijn twee punten van belang:

- a. De dampingsfactor is 1, d.w.z. na verloop van tijd (bijv. één periode T) is de amplitude ongewijzigd (dit komt natuurlijk door het verwaarlozen van de dampingstermen).
- b. De fase neemt lineair toe; na een periode T is hij -2π .

We gaan nu onderzoeken hoe deze eigenschappen door een numerieke methode worden weergegeven (zie ook Kreiss en Oliger, 1973). Daartoe leggen we een beginvoorwaarde op overeenkomstig (8.1):

$$a(x,0) = \hat{a} \exp(ikx) \quad (8.2)$$

Als voorbeeld nemen we het modified Lax schema (7.1.5). Dan blijkt, wanneer we a_j^n als beginvoorwaarde beschouwen:

$$\begin{aligned} a_j^{n+1} = \hat{a} & \left[\exp(ij\xi) - \frac{1}{2}\sigma \{ \exp(i(j+1)\xi) - \exp(i(j-1)\xi) \} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\alpha \{ \exp(i(j+1)\xi) - 2 \exp(ij\xi) + \exp(i(j-1)\xi) \} \right] \end{aligned} \quad (8.3)$$

waarin $\xi = k\Delta x = 2\pi\Delta x/L$

L = golflengte

Uit het rechterlid van (8.3) kan weer een factor $\exp(ij\xi)$ afgesplitst worden, zodat

$$a_j^{n+1} = \rho a_j^n \quad (8.4)$$

waarin ρ de *amplificatiefactor* is:

$$\rho = 1 - \alpha + \alpha \cos \xi - \sigma i \sin \xi \quad (8.5)$$

Deze factor is typerend voor het differentieschema; voor andere schema's worden andere factoren gevonden. Na $n_t = T/\Delta t$ tijdstappen is één golfperiode doorlopen; de numerieke oplossing is dan

$$a_j^{n_t} = \rho^{n_t} \hat{a} \exp(ikx) \quad (8.6)$$

De *amplitudefactor* is nu

$$d = |\rho|^{n_t} \quad (8.7)$$

De faseverschuiving is $n_t \arg(\rho)$, dus de verhouding met de werkelijke faseverschuiving -2π is de *relatieve voortplantingssnelheid*

$$c_r = -\frac{1}{2\pi} n_t \arg(\rho) \quad (8.8)$$

$$\text{waarbij } n_t = 2\pi(\sigma\xi)^{-1} \quad (8.9)$$

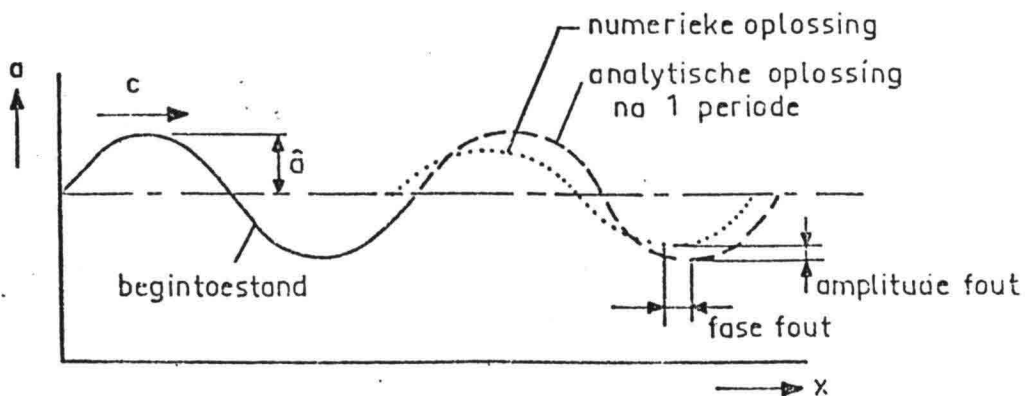


Fig. 8,1 Amplitude- en fasefout

Deze twee grootheden geven aan hoe groot de amplitudfout en de fasefout zijn (geïllustreerd in fig. 8.1). Als $d = 1$ en $c_r = 1$ zijn de fouten nul; de exacte oplossing wordt dan uit de numerieke methode verkregen. De uitdrukkingen (8.7) ... (8.9) zijn onafhankelijk van het gekozen differentieschema; die invloed zit alleen in de amplificatiefactor ρ . Het blijkt dat de numerieke nauwkeurigheid bepaald wordt door twee parameters:

$$\text{het aantal punten per golflengte } n_x = 2\pi\xi^{-1} \quad (8.10)$$

$$\text{het Courant getal } \sigma = c \Delta t / \Delta x \quad (8.11)$$

afgezien van eventuele parameters die nog in de differentiemethode voorkomen.

Binnen de grenzen voor stabiliteit (p. 40) is men vrij om de parameters σ en ξ te kiezen, zodanig dat de amplitude- en fasefouten aan bepaalde wensen voldoen. Als een nauwkeurigheid ε gewenst wordt, moet kennelijk gelden

$$|1 - d| \leq \varepsilon \quad \text{en} \quad |1 - c_r| \leq \varepsilon \quad (8.12)$$

Bij gegeven σ kan hieruit ξ opgelost worden (of omgekeerd). Het is belangrijk dat (8.12) *niet voor alle golflengtes* L hoeft te gelden maar alleen voor die waarden van L die in het probleem van belang zijn. Als bijvoorbeeld een getijgolf moet worden berekend dan moet een golf met de getijgolflengte nauwkeurig worden weergegeven, inclusief eventueel enkele harmonischen. De keuze van de maatgevende golflengte L gebeurt dus op fysische gronden. Uit de waarde voor ξ die uit (8.12) volgt kan dan de stapgrootte Δx worden afgeleid die de gewenste nauwkeurigheid levert. Uit de bijbehorende waarde van σ volgt dan de tijdstap.

Om de analyse wat overzichtelijker te maken kan een benadering voor kleine waarden van ξ worden gemaakt aangezien enige nauwkeurigheid toch slechts bereikt zal worden bij een behoorlijk aantal punten per golflengte (d.w.z. kleine ξ). Deze benadering is overigens niet noodzakelijk. Voor kleine ξ volgt uit (8.5)

$$\rho \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha\xi^2 - \sigma i\xi(1 - \frac{1}{6}\xi^2) \quad (8.13)$$

$$d \approx 1 - \pi\xi\sigma^{-1}(\alpha - \sigma^2) \quad (8.14)$$

$$c_r \approx 1 + \frac{1}{6}\xi^2(3\alpha - 2\sigma^2 - 1) \quad (8.15)$$

Uit de nauwkeurighedsvoorwaarden (8.12) volgt nu

$$\text{voor de amplitudedefout: } n_x \geq \frac{2\pi^2}{\epsilon\sigma} (\alpha - \sigma^2) \quad (8.16)$$

$$\text{voor de fasefout: } n_x \geq 2\pi \{|3\alpha - 2\sigma^2 - 1|/6\epsilon\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.17)$$

Het is niet noodzakelijk dat in beide relaties dezelfde nauwkeurigheid ϵ wordt gehanteerd; dit hangt af van de eisen die men aan het model stelt. De beide relaties zijn geïllustreerd in fig. 8.2, samen met overeenkomstige relaties voor andere differentieschema's. De resultaten zijn ook samengevat in tabel 8.1.

De amplificatiefactoren zeggen ook iets over de *stabiliteit*. Als de amplificatiefactor nl. voor enige golflengte L (d.w.z. voor enige waarden van ξ) een absolute waarde > 1 heeft, dan neemt de amplitude van een golf met die golflengte exponentieel toe in de tijd en is de methode instabiel. Op grond hiervan is het *Von Neumann criterium* voor (lineaire) stabiliteit:

$$|\rho| \leq 1 \quad \text{voor} \quad 0 \leq \xi \leq \pi \quad (8.18)$$

Let op dat $\xi > \pi$ niet mogelijk is omdat een golf niet met minder dan twee punten per golflengte kan worden beschreven. Verder kan worden opgemerkt dat eventueel zou kunnen worden toegestaan dat

$$|\rho| < 1 + O(\Delta t) \quad (8.19)$$

als men de oplossing slechts over een eindig tijdsinterval t wil weten. Er geldt nl. met $n = t/\Delta t$

$$|\rho|^n = \{1 + O(\Delta t)\}^n \sim (1 + \frac{b}{n})^n \sim e^b \quad (8.20)$$

en dat is begrensd voor $n \rightarrow \infty$ (tijdstap verkleinen, aantal tijdstappen toe laten nemen). Als men dus maar zorgt dat de initiële fout klein is, kan de (amplitude)fout altijd binnen de perken blijven, en de methode is nog stabiel te noemen. In de praktijk kan beter (8.18) aangehouden worden omdat men gewoonlijk met een vaste tijdstap Δt werkt en het aantal tijdstappen n groot wil laten worden, o.a. om de invloed van een foute begintoestand kwijt te raken. In dat geval zou (8.19) tot instabiliteit leiden.

Uitwerking van het Von Neumann criterium (8.18) voor het modified Lax schema (8.5) geeft

$$\sigma^2 \leq \alpha \leq 1 \quad (8.21)$$

Als $\alpha = 1$ is dit hetzelfde als het CFL criterium (7.3.8), maar voor $\alpha < 1$ is (8.21) strenger, waaruit blijkt dat het CFL criterium noodzakelijk maar niet voldoende is.

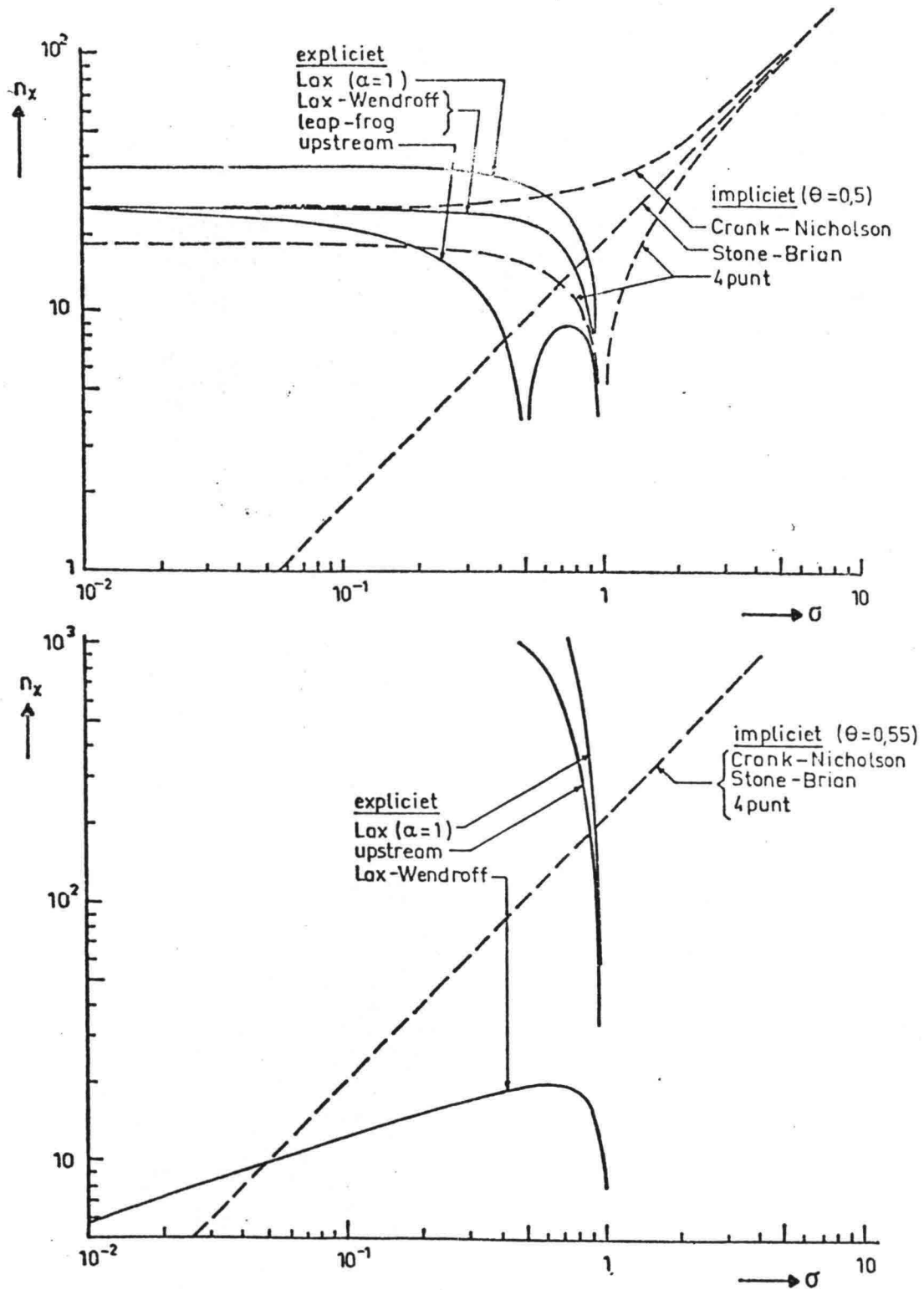


Fig. 8.2 Benodigd aantal punten per golflengte n_x voor nauwkeurigheid $\epsilon = 0,01$. Boven fasefouten, onder amplitudefouten. Voor het leap-frog schema is de amplitudefout nul. De fasefouten voor de impliciete schema's hangen slechts zwak van θ af.

Tabel 8.1. Eigenschappen van differentieschema's

naam	formule	orde	amplificatiefactor ρ	stabiliteit (Von Neumann)	dempingsfactor d	relatieve voorplantingssnelheid c_r
modified Lax (Lax: $\alpha = 1$)	7.1.5	1	$1 - \alpha \cos \xi - i \sigma \sin \xi$	$\sigma^2 \leq \alpha \leq 1$	$1 - \frac{\pi \xi}{\sigma} (\alpha - \sigma^2) + \dots$	$1 + \frac{1}{6} \xi^2 (3\alpha - 2\sigma^2 - 1) + \dots$
upstream diff.	7.1.6 (7.1.5 met $\alpha = \sigma $)	1	$1 - \sigma + \sigma \cos \xi - i \sigma \sin \xi$	$ \sigma \leq 1$	$1 - \frac{\pi \xi}{\sigma} (\sigma - \sigma^2) + \dots$	$1 + \frac{1}{6} \xi^2 (3 \sigma - 2\sigma^2 - 1) + \dots$
Lax-Wendroff	7.1.5 ($\alpha = \sigma^2$)	2	$1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \xi - i \sigma \sin \xi$	$ \sigma \leq 1$	$1 - \frac{\pi}{4} \sigma (1 - \sigma^2) \xi^3 + \dots$	$1 - \frac{1}{6} \xi^2 (1 - \sigma^2) + \dots$
leap-frog	7.1.4	2	$1 - \sigma^2 \sin^2 \xi - i \sigma \sin \xi$	$ \sigma \leq 1$	$d \equiv 1$	$1 - \frac{1}{6} \xi^2 (1 - \sigma^2) + \dots$
Crank-Nicholson	7.1.7	$1 (\theta \neq \frac{1}{2})$ $2 (\theta = \frac{1}{2})$	$\frac{1 - (1 - \theta) i \sigma \sin \xi}{1 + \theta i \sigma \sin \xi}$	$\theta \geq \frac{1}{2}$	$1 - (2\theta - 1) (\pi \sigma \xi + \dots)$	$1 - \frac{1}{6} \xi^2 \{1 + 2\sigma^2 (1 - 3\theta + 3\theta^2)\} + \dots$
4-punts	7.1.8	$1 (\theta \neq \frac{1}{2})$ $2 (\theta = \frac{1}{2})$	$\frac{1 - (1 - \theta) 2i \sigma \operatorname{tg} \xi/2}{1 + 2i \theta \sigma \operatorname{tg} \xi/2}$	$\theta \geq \frac{1}{2}$	$1 - (2\theta - 1) (\pi \sigma \xi + \dots)$	$1 + \frac{1}{12} \xi^2 \{1 - 4\sigma^2 (1 - 3\theta + 3\theta^2)\} + \dots$
Stone en Brian	7.2.16	$1 (\theta \neq \frac{1}{2})$ $2 (\theta = \frac{1}{2})$	$\frac{2 + \cos \xi - (1 - \theta) 3i \sigma \sin \xi}{2 + \cos \xi + 3i \theta \sigma \sin \xi}$	$\theta \geq \frac{1}{2}$	$1 - (2\theta - 1) (\pi \sigma \xi + \dots)$	$1 + \frac{1}{3} \sigma^2 \xi^2 (1 - 3\theta + 3\theta^2) + \dots$

9. Numerieke methodes voor lange golven

Bij de toepassing van de methodes uit hoofdstuk 7 op de lange-golfvergelijkingen doen zich enkele complicaties voor.

Een gekozen differentie- of eindige-elementen benadering wordt toegepast op *beide* vergelijkingen (5.1.1) en (5.1.2) en deze worden gelijktijdig opgelost. Bij sommige toepassingen worden Q en a in afwisselende punten gedefinieerd; men noemt dat een "staggered" rooster. De waarden van Q en a die nodig zijn in de differentievergelijkingen maar die niet beschikbaar zijn worden dan gemiddeld tussen de naburige punten.

Aan de randen is gewoonlijk één randvoorwaarde beschikbaar. Deze wordt aangevuld met een differentiebenadering van de continuïteitsvergelijking volgens (7.1.6) of (7.1.8). Het eerste helpt niet als a gegeven is op de rand; dan kan in plaats daarvan de impulsvergelijking gebruikt worden.

Bij impliciete methodes ontstaan niet-lineaire differentievergelijkingen. Die kunnen iteratief opgelost worden door het meerdimensionale Newton proces. Een goede beginschatting van de onbekenden is beschikbaar in de vorm van de waarden op het voorafgaande tijdstip. Vaak convergeert het proces in een klein aantal stappen. Aangezien iteratiestappen erg veel op tijdstappen lijken kan overwogen worden om per tijdstap maar één Newton stap te doen (dus de vergelijkingen te lineariseren en het lineaire stelsel op te lossen) en dan eventueel de tijdstap maar iets te verkleinen.

De golfvoortplantingsanalyse kan rechtstreeks op de lange-golfvergelijkingen worden toegepast als we de invloed van de bodemwrijving even verwaarlozen. Dan volgt nl. uit de karakteristieke theorie vgl. (4.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u + 2(ga)^{\frac{1}{2}}\} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \{u + 2(ga)^{\frac{1}{2}}\} = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u - 2(ga)^{\frac{1}{2}}\} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \{u - 2(ga)^{\frac{1}{2}}\} = 0 \quad (9.2)$$

waarbij c_1 en c_2 volgen uit (4.9). Als we $u \pm 2(ga)^{\frac{1}{2}}$ even als onbekende zien hebben beide vergelijkingen dezelfde vorm als (7.1.1) en mogen we dus op elk apart de resultaten van hoofdstuk 8 toepassen. De invloed van de bodemwrijving komt er in werkelijkheid nog bij, waardoor de splitsing niet helemaal correct is. Het geeft echter gewoonlijk nog wel een goede schatting. De bodemwrijving kan overigens wel de stabiliteit beïnvloeden (zie verderop).

Voorbeeld

Stel dat men de getijvoortplanting in een rivier wil berekenen over een afstand van ca. 35 km. De afmetingen van de rivier zijn in orde van grootte: $a \sim 12$ m, $B = B_s \sim 1100$ m. Het getij is dubbeldaags; de range aan de mond is ca. 1,6 m. Hoe groot zouden de stapgrootten bij de verschillende numerieke methodes ongeveer gekozen moeten worden?

Om deze vraag te beantwoorden moet eerst de gewenste nauwkeurigheid vastgesteld worden. Deze is afhankelijk van de verdere berekeningen; laten we aannemen dat een nauwkeurigheid van 0,01 m in de waterstand wordt gewenst (hoe zou dit kunnen worden vertaald in een nauwkeurigheid van de stroom-snelheden of debieten?). Aangezien de getijgolven vanaf de riviermond binnenkomen zal de numerieke fout toenemen vanaf de mond. Als we dus op $x = 35$ km aan de nauwkeurigheidseis voldoen, zal dat op het hele gebied zo zijn. Ook voor de fase moet een nauwkeurigheid worden geschat. Om die ook in waterstanden uit te drukken is een omrekening via stijging of daling nodig. De maximale waarde daarvan is ca. $0,8 \times 2\pi/T \approx 0,11 \times 10^{-3}$ ^{m/s}, dus een waterstandsverschil van 0,01 m komt overeen met een tijdsverschil van 90 s. Vervolgens moet de maatgevende golflengte worden vastgesteld. Laten we aannemen dat uit een getij-analyse van de randvoorwaarde blijkt dat de volgende getijcomponenten voorkomen:

component	amplitude (m)	periode (s)	golflengte (km)
M2	0,70	44700	492
M4	0,09	22350	246
M6	0,008	11175	123

Hieruit blijkt dat M2 en M4 belangrijk zijn, M6 nauwelijks en met verdere componenten hoeft geen rekening gehouden te worden. Als we M4 met een nauwkeurigheid van 0,005 m weergeven zal de totale nauwkeurigheid ongeveer goed zijn (achteraf controleren hoe groot de bijdrage van de andere componenten is). Bedenk wel dat de harmonischen sterker worden tengevolge van de vervorming van de golf. Bij een voortplantingssnelheid $c = (gA_s/B)^{1/2} \approx 11$ m/s volgen de golflengtes als aangegeven in het tabelletje.

Over een afstand van 35 km loopt de M4 golf $35/246 = 0,14$ golfperiodes. We kunnen dus accepteren dat

$$d^{0,14} = 1 \pm 0,005/0,09 = 0,944 \text{ à } 1,056$$

of

$$d = 0,67 \text{ à } 1,46 \rightarrow \epsilon = 0,33$$

De looptijd over 35 km is ca 3200 s; een fout van 90 s daarin komt dus overeen met $\epsilon = 0,03$.

Voor enkele van de numerieke methodes kunnen we nu een keus maken. De waarde van het Courant-getal σ is nog vrij; deze wordt o.a. bepaald door stabiliteitseisen en door de te verrichten hoeveelheid werk. Voor expliciete methodes moet voor de grootste voortplantingssnelheid nog aan het CFL criterium worden voldaan; $\sigma \leq 0,8$ is dan voldoende aan de veilige kant.

methode	σ	n_x (ampl.) ($\epsilon = 0,33$)	n_x (fase) ($\epsilon = 0,03$)	Δx (km)	Δt (s)
leap-frog	0,8	-	9	27	2000
Crank-Nicholson ($\theta = 0,55$)	1	5,5	18,5	13	1200
	10	55	104	2,4	2200
Stone-Brian ($\theta = 0,55$)	1	5,5	10,4	24	2200

Voor de leap-frog methode leidt dit tot een onrealistisch grote maaswijdte Δx ; uit andere overwegingen zal men die reeds kleiner kiezen, zodat de nauwkeurigheid dan geen probleem is. Bij de impliciete methodes blijkt de amplitudefout niet maatgevend te zijn; ook hier zijn de stapgrootten groter dan nodig zijn voor (bijv.) de weergave van de geometrie. Verder ziet men dat het weinig zin heeft, een hoge waarde van het Courantgetal te gebruiken. Weliswaar wordt de toelaatbare tijdstap wat groter, maar de maaswijdte moet kleiner worden, waardoor de totale hoeveelheid werk toch groter wordt. Wel is het mogelijk, de maaswijdte kleiner te nemen dan uit de tabel volgt (bijv. $\Delta x = 1$ km) en dan de tijdstap zo groot te nemen dat de gewenste nauwkeurigheid nog gehaald wordt ($\Delta x = 1$ km $\rightarrow \xi = 0,026 \rightarrow \sigma = 23 \rightarrow \Delta t = 2100$ s). Dit is bij een expliciete methode volgens de stabiliteitsbeperking niet mogelijk ($\Delta x = 1$ km $\rightarrow \xi = 0,026$; $\sigma = 0,8 \rightarrow \Delta t = 70$ s).

Keuze van de maatgevende golflengte

Zoals in het voorbeeld al bleek, hangt de keuze van de golflengte af van de probleemstelling en van het fysische gedrag van het systeem. Vooral bij verschijnselen met een min of meer periodiek karakter is daaruit meestal wel een zinvolle keus te maken. Moeilijker is het bij niet-periodieke

verschijnselen, bijv. het gevolg van een dambreuk of dijkbreuk. In de rand- of beginvoorwaarde zullen dan vrijwel alle frekwenties of golflengtes voorkomen (bereken bijv. de Fourier-componenten van een blokfunctie) en het is niet mogelijk om die allemaal nauwkeurig numeriek weer te geven. In dat geval is de golfvoortplantingsanalyse uit par. 5.3 van belang. Met name de damping van golven, afhankelijk van de periode T (en dus van de parameter K) bepaalt wat er na een rekenafstand x nog van de oorspronkelijke golfamplitude over is. Bij een gegeven afstand x kan men dus uit de overdrachtsfunctie (fig. 5.3) van het systeem afleiden welke golven nog van belang zijn en vervolgens kan een numeriek schema gezocht worden dat die golven voldoende nauwkeurig weergeeft.

Invloed van bodemwrijving op stabiliteit

Bij de voorgaande stabiliteitsanalyse volgens Von Neumann is de invloed van bodemwrijving verwaarloosd. Men zou het idee kunnen hebben dat de bodemwrijving, als een dempingsmechanisme, de stabiliteit alleen maar beter maakt. *Dit is niet altijd zo.* Als voorbeeld nemen we de simpele modelvergelijking

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} + sa = 0 \quad (9.3)$$

Passen we hier het leap-frog schema op toe volgens

$$\frac{a_j^{n+1} - a_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2\Delta x} + sa_j^n = 0 \quad (9.4)$$

dan blijkt de amplificatiefactor ρ te volgen uit

$$\rho^2 + 2 \sigma i \rho \sin \xi + 2 s \Delta t \rho - 1 = 0 \quad (9.5)$$

Voor het speciale geval $\sin \xi = 0$ zijn de wortels reëel en er moet er dus één > 1 zijn, wat betekent dat het schema instabiel is. Een eenvoudige remedie is, de laatste term in (9.4) te vervangen door

$$sa \approx \frac{1}{2} s (a_j^{n+1} + a_j^{n-1}) \quad (9.6)$$

Op een soortgelijke manier kan de wrijvingsterm in de lange-golfvergelijkingen behandeld worden, bijv.

$$\frac{gQ|Q|}{C^2 R A_s} \approx \left(\frac{g}{C^2 R A_s} \right)_j^n \frac{Q_j^{n+1} + Q_j^{n-1}}{2} \left| \frac{Q_j^{n+1} + Q_j^{n-1}}{2} \right| \quad (9.7)$$

of

$$\frac{gQ|Q|}{C^2 R A_s} \approx \left(\frac{g}{C^2 R A_s} \right)_j^n |Q_j^{n-1}| Q_j^{n+1} \quad (9.8)$$

De tweede vorm is makkelijker hanteerbaar omdat Q_j^{n+1} daar lineair in voorkomt. De stabiliteitsanalyse is hier wat ingewikkelder omdat de twee golven niet meer gescheiden kunnen worden. Zie bijv. Vreugdenhil (1973) of Mahmood et al (1975).

Behoud

De vergelijking (7.1.1) is afkomstig van de algemene continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (9.9)$$

gecombineerd met de bewegingsvergelijking voor uniforme, permanente stroming, die leidt tot

$$Q = f(a) \quad (9.10)$$

In continue vorm zijn (9.9) en (7.1.1) gelijkwaardig. In differentievorm is dat vaak niet meer zo, met name als de coefficient c niet constant is. Het leap-frog schema toegepast op beide vergelijkingen geeft

$$a_j^{n+1} - a_j^{n-1} = c_j \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j+1}^n - a_{j-1}^n) \quad (9.11)$$

$$A_j^{n+1} - A_j^{n-1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) \quad (9.12)$$

Als we nu de totale massa aan water bekijken, dan volgt (gemakshalve bij constante breedte) uit de beide vergelijkingen

$$\Delta x \sum_j B_j a_j^{n+1} - \Delta x \sum_j B_j a_j^{n-1} = \Delta t \sum_j B_j c_j (a_{j+1}^n - a_{j-1}^n) \quad (9.13)$$

$$\Delta x \sum_j A_j^{n+1} - \Delta x \sum_j A_j^{n-1} = \Delta t \sum_j (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) \quad (9.14)$$

Het is nu makkelijk te zien dat het rechterlid van (9.14) nul oplevert behalve aan de randen; dit komt overeen met (een discrete vorm van) de massabalans. De termen in het rechterlid van (9.13) vallen niet tegen elkaar weg, zodat daarbij niet exakt aan de discrete massabalans wordt voldaan. Hoewel men mag aannemen dat de fout in de massabalans wel klein zal zijn wanneer de oplossing van de differentievergelijking nauwkeurig is, wordt het toch vaak als wenselijk gezien om wel aan de discrete massabalans te voldoen. Dit geeft o.a. een controlemogelijkheid op de correctheid van de numerieke resultaten. Dit vereist dus dat de vergelijking in een *behoudsvorm* staat (zoals 9.9). Soortgelijke beschouwingen kunnen worden geboden voor behoud van impuls (belangrijk voor schokgolven, watersprongen, bores etc.) en energie (belangrijk voor stabiliteit).

Voor lange golf problemen in rivierenstelsels bestaan vele standaardprogramma's. In Nederland zijn de meest gebruikte pakketten: CHERIE en FLOWS (THD), NETFLOW (WL) en IMPLIC (RWS).

10. Getijberekening Kapuas-delta

In het kader van een transportstudie voor aluinaarde in Kalimantan (Indonesie) is door Stive (1977) een onderzoek gedaan naar de gevolgen van verbeteringen van de vaarweg op de getijbeweging in de delta van de Kapuas rivier (fig.10.1). Deze verbeteringen zullen invloed hebben op de afvoer-verdeling over de takken en op de waterstand; een en ander is weer van belang voor de plaatselijke bewoners, voor de scheepvaart en voor de sedimentbeweging. Doordat slechts summiere gegevens beschikbaar waren had het onderzoek het karakter van een gevoeligheidsonderzoek.

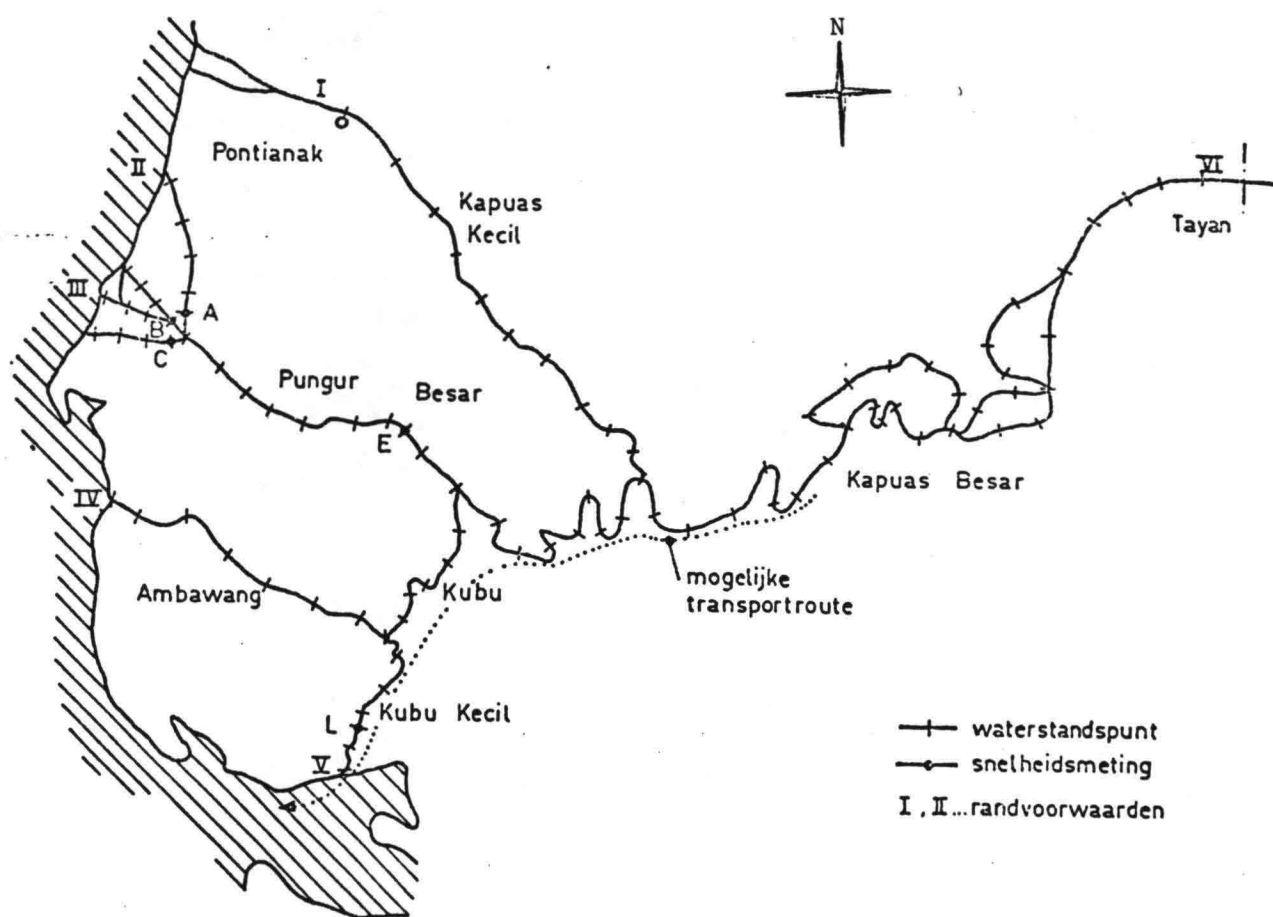


Fig.10.1 Kapuas delta met mogelijke transportroute

Voor de berekeningen werd gebruik gemaakt van het programma CHERIE, gebaseerd op de leap-frog methode. De convectietermen in de bewegings-vergelijking werden verwaarloosd, omdat het getal van Froude bij stroomsnelheden in de orde van 1 m/s en dieptes in de orde van 10 m een waarde heeft $F \approx 0,1$. Overigens heeft dit nog wel enige invloed op de voort-

plantingssnelheid (zie fig. 5.3). De waarde van K ligt in de orde van 10 à 20 voor de deltatakken en 200 voor de Kapuas Besar. Er is dus een duidelijk merkbare wrijvingsinvloed, vooral in het laatstgenoemde geval. In het programma worden waterstand h en debiet Q op afwisselende punten (zowel in plaats als in tijd; "staggered grid") berekend. Er is een stap-grootte $\Delta x \sim 3$ à 5 km gebruikt en een tijdstap $\Delta t = 300$ s. Bij dieptes van 5 à 15 m leidt dit tot een Courant getal $\sigma = 0,4$ à 1. Uit getij-analyses blijkt dat vooral enkeldaagse componenten van belang zijn. De getijgolfenlengte is dus van de orde $L \approx 1000$ km. Dat betekent $n_x \approx 200$ à 300, wat leidt tot een nauwkeurigheid $\epsilon \approx 10^{-4}$ voor de fasefouten. De numerieke fouten zijn dus verwaarloosbaar en misschien zou een wat grovere schematisering toelaatbaar zijn. Dit is niet onderzocht.

De *schematisering* is voor een deel gebaseerd op gemeten dwarsprofielen (Pungur, Kubu, Kubu Kecil) maar verder alleen op de Admiralty Chart en echopeilingen in langsrichting. Met name van de twee hoofdtakken Kapuas Kecil en Ambawang zijn de afmetingen dus niet erg nauwkeurig bekend. De meeste dwarsdoorsneden zijn geschematiseerd tot rechthoeken en trapezia; er is geen onderscheid gemaakt tussen bergende en stroomvoerende breedte. De bodemruwheid is geschat volgens de formule van Strickler met $k_N = 0,08$ m; prototype gegevens hierover ontbraken. Het is duidelijk dat voor een meer verantwoord model nadere metingen nodig zouden zijn voor wat betreft dwarsprofielen en bodemgesteldheid.

Als *randvoorwaarde* aan de bovenrand is een (constante) waterstand gebruikt. Dit punt ligt (ook bij springtij) praktisch buiten het getijgebied. Bij controle-berekeningen is vastgesteld dat het model als *resultaat* ook ongeveer de juiste afvoer produceerde voor enkele gevallen waarin die bekend was (toetsing). De randvoorwaarde aan de zeezijde is moeilijker aangezien betrekkelijk kleine amplitude- en faseverschillen van het getij over de verschillende riviermonden belangrijke gevolgen kunnen hebben voor de stroming in de delta. Bovendien ontbraken direkte getijmetingen op alle mondingen. Er is daarom voor gekozen, getij-analyses te maken van gemeten getijden op enkele punten langs de kust en vervolgens de getijconstanten te interpoleren naar de gewenste punten (fig.10.2). Het resultaat is vergeleken met beperkte getijmetingen in de mond van de Pungur Besar (fig.10.3). Hieruit blijkt dat een redelijke weergave van de getijkromme is bereikt met uitzondering van de periode rond doodtij. Een gevoeligheidsonderzoek van de modelresultaten met betrekking tot de getijrandvoorwaarden zou op zijn plaats zijn; dit is echter niet uitgevoerd. Een moeilijkheid is verder nog

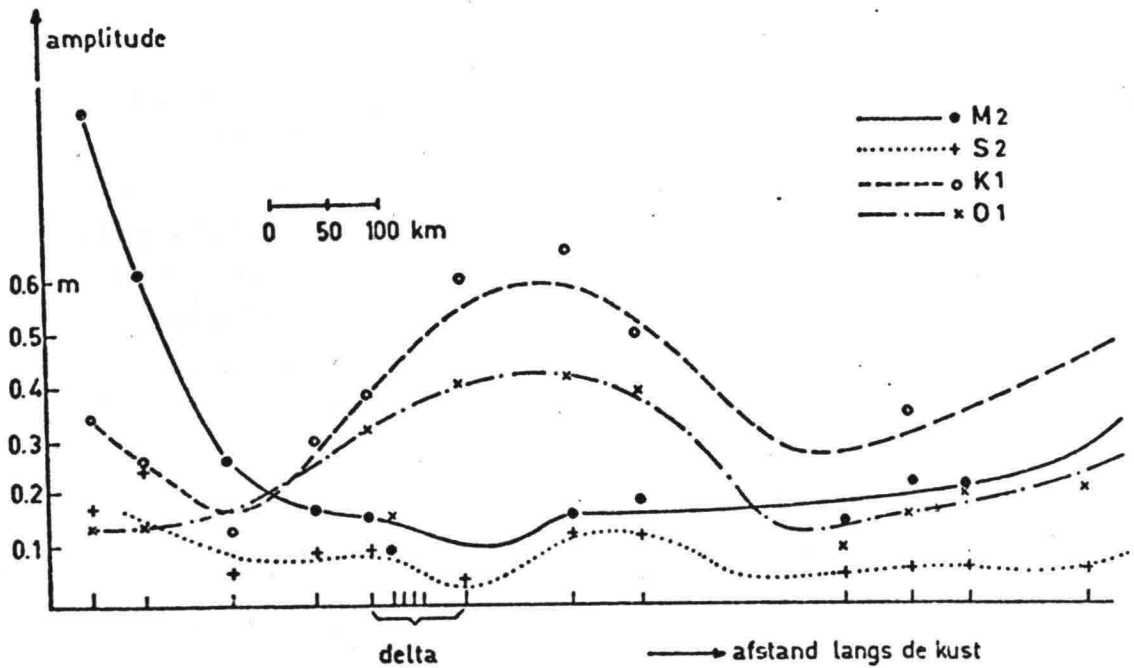


Fig. 10.2. Verloop van getijconstanten langs de kust. Alleen de amplitude is weergegeven.

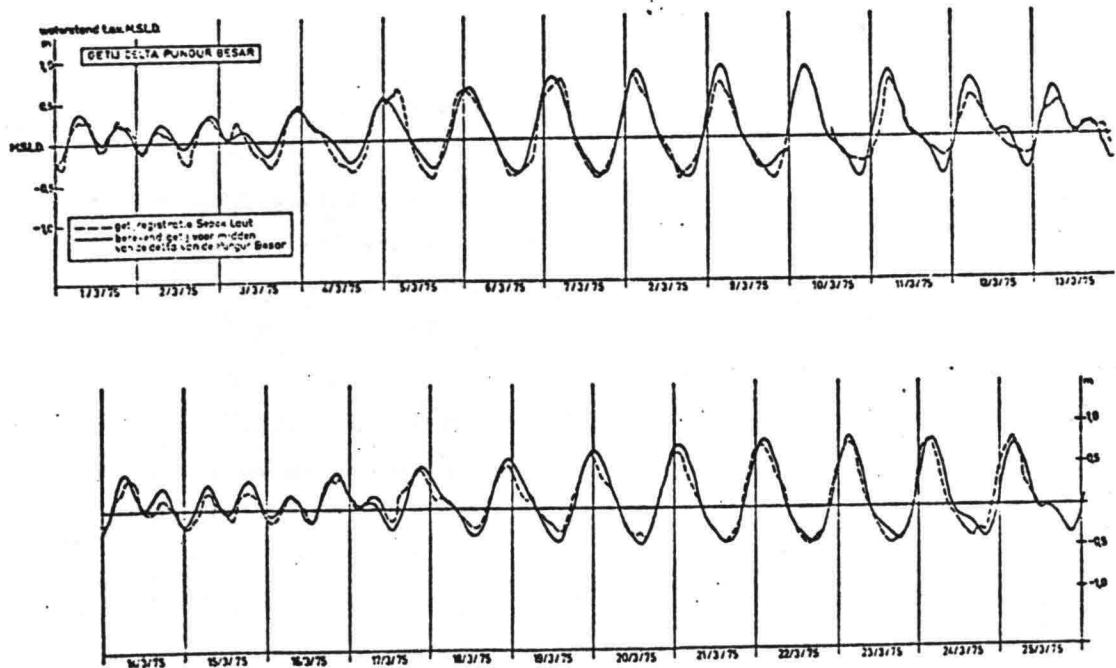


Fig. 10.3. Getij uit geïnterpoleerde getijconstanten in vergelijking met gemeten getij in de mond van de Pungur Besar (punt III in fig.10.1)

dat de getijrandvoorwaarde beïnvloed wordt door het rivierenstelsel en eventuele ingrepen daarin. Aangezien hier slechts ingrepen van beperkte omvang zijn bekeken mag worden verondersteld dat de randvoorwaarden niet veranderen.

Voor *toetsing* van het model waren enkele metingen beschikbaar, nl. snelheidsmetingen in de raaien A, B en C (fig.10.1) tijdens springtij, en snelheidsmetingen in E en L tijdens doodtij. In het laatstgenoemde geval zijn zoals vermeld de randvoorwaarden niet erg goed. Voor het eerstgenoemde geval zijn de resultaten gegeven in fig.10.4, waaruit blijkt dat de overeenstemming zeer matig is. De belangrijkste oorzaken daarvoor zijn vermoedelijk (a) de onvolledige snelheidsmetingen (b) de onbekendheid met de juiste randvoorwaarden, en (c) de onbekendheid met de afmetingen en ruwheid van het rivierenstelsel. Nadere toetsing is zonder verdere metingen niet mogelijk, zodat slechts geconcludeerd kan worden dat het model in orde van grootte redelijke resultaten geeft, maar dat verder voorlopig alleen op vergelijkende basis gewerkt kan worden.

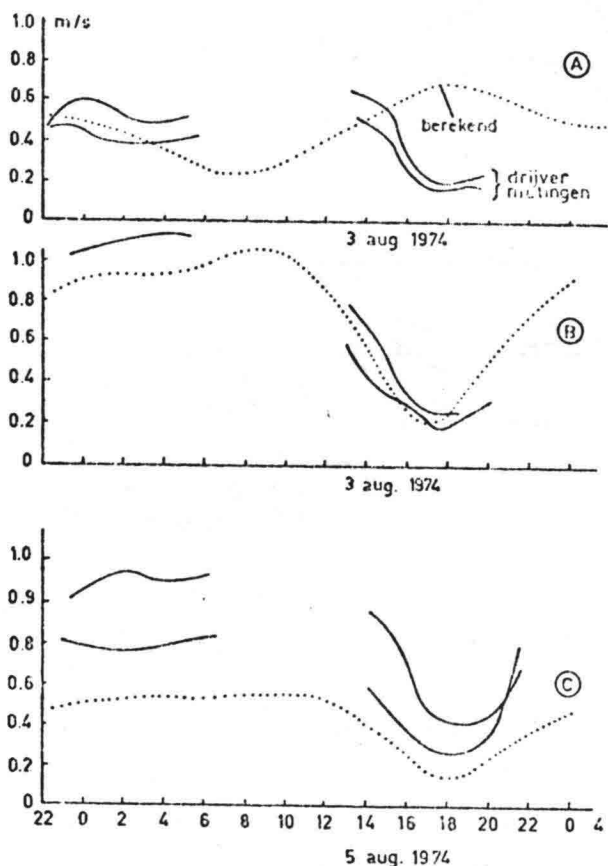


Fig.10.4 Vergelijking van berekende snelheden in de raaien A, B en C (fig.10.1) met drijvermetingen in verschillende punten van die raaien.

De gevoeligheid van het model is vervolgens onderzocht voor de onbekendheid met de rivieraftmetingen en voor enkele voorgestelde maatregelen ter verbetering van de vaarweg in de Kubu en de Kubu Kecil. Het resultaat van een verdieping met 4 m of een verondieping met 3 m van de Ambawang is te zien in fig. 10.5. De debietverdeling blijkt alleen beïnvloed te worden beneden het splitsingspunt Pungur Besar/Kubu. Met name de afvoer in de Kubu Kecil wordt sterk beïnvloed; zelfs zodanig dat bij verondieping geen kentering meer optreedt.

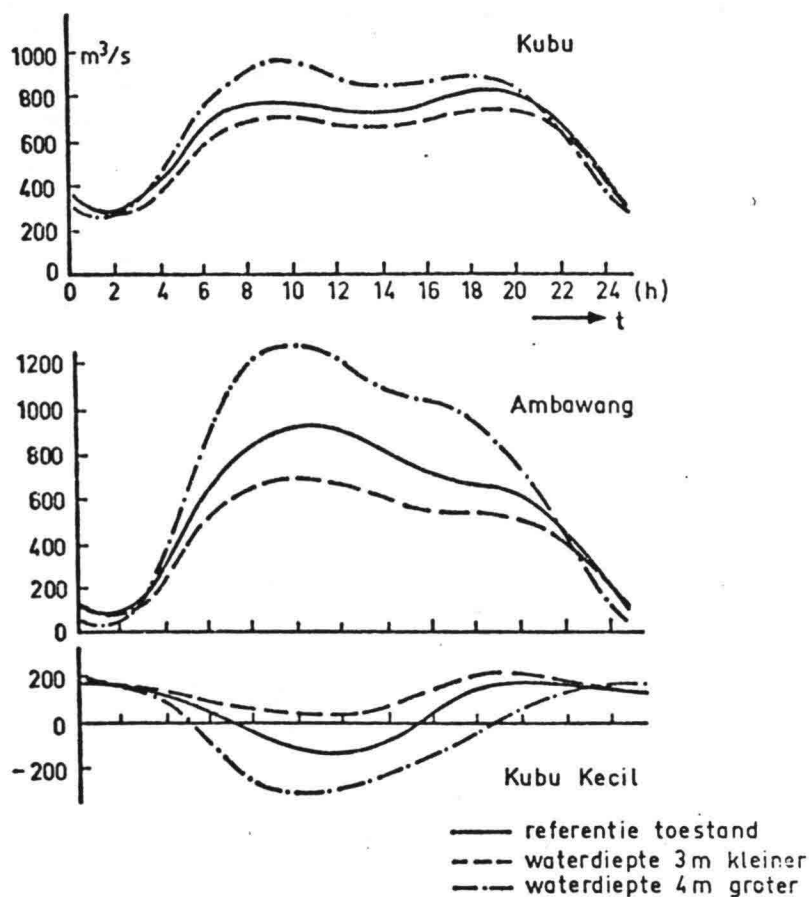


Fig.10.5. Invloed van grotere of kleinere waterdiepte in de Ambawang op de debietverdeling bij het splitsingspunt Kubu-Ambawang-Kubu Kecil.

Als voorbeeld van de rivierverbeteringen geeft fig. 10.6 het resultaat van een verruiming van Kubu en Kubu Kecil tot een diepte van ca. 7.60 beneden MSL, taluds van 1:5 en een bodembreedte van 100 m (waar nodig), gecombineerd met enkele bochtafsnijdingen, waarbij overigens de oude bochten open blijven. De grootste invloed is weer in de Kubu Kecil te zien waar de eb-debieten sterk toenemen. Door het verruimde profiel nemen de ebstroom-snelheden echter veel minder sterk toe (25%). Uiteraard kan aan al deze resultaten slechts een orienterende betekenis worden toegekend.

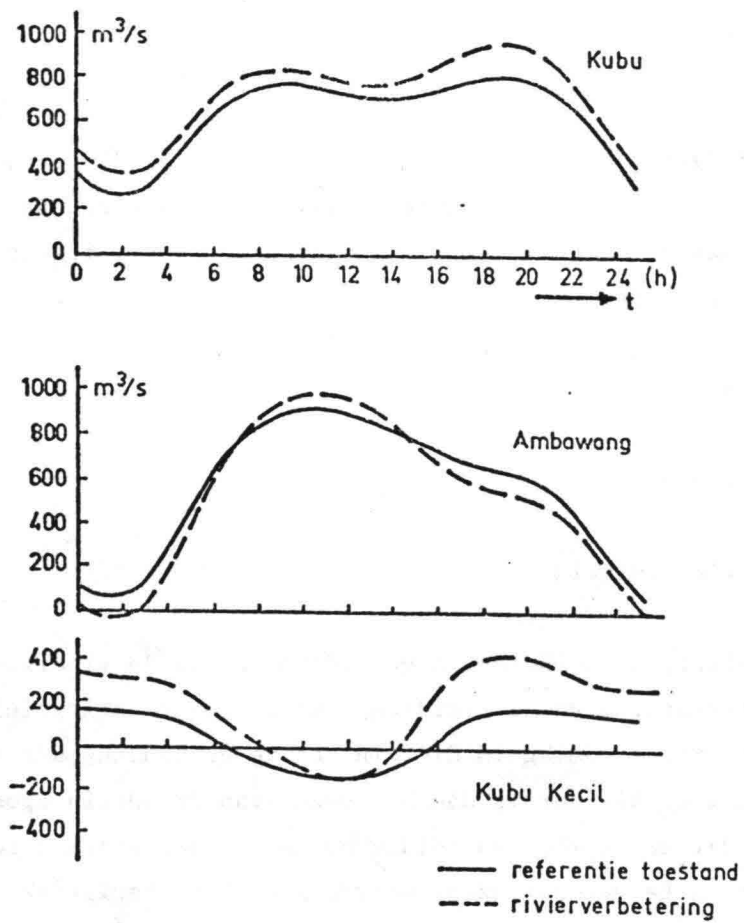


Fig.10.6. Invloed van rivierverbetering op de debietverdeling bij het splitsingspunt Kubu-Ambawang-Kubu Kecil.

11. Waterslag

Bij niet-stationaire stroming in *gesloten* i.p.v. open leidingen wordt de berging door variatie van de waterspiegel vervangen door een samendrukking van het water gepaard met drukvariaties. Die worden weer uitgedrukt in een piëzometrisch niveau h :

$$h = z + \frac{p}{\rho_o g} \quad (11.1)$$

met z = leidingniveau

p = druk

ρ_o = referentiedichtheid

Noem c de voortplantingssnelheid van geluidsgolven in de vloeistof (rekening houdend met de vervorming van de leiding). Er is een kwantitatief verschil met vrije-oppeervlakte stroming in die zin dat de verhouding u/c (getal van Mach) gewoonlijk veel kleiner is dan het getal van Froude in open leidingen. Er is daarom in dit geval meer aanleiding om de convectietermen in de bewegingsvergelijkingen te verwaarlozen, waardoor de karakteristieke voortplantingssnelheden overgaan in $\pm c$. De vergelijkingen zijn dan (zie college b73)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{u|u|}{c^2 R} = 0 \quad (11.3)$$

Deze vergelijkingen zijn bijna lineair (alleen de vrijvingsterm is het niet) en lenen zich daardoor erg goed voor oplossing met de karakteristiekenmethode (hoofdstuk 6).

Enkele opmerkingen

1. De "geluidssnelheid" c is sterk afhankelijk van de samenstelling van het water, met name van de hoeveelheid lucht of gas. Een variatie van meer dan een factor 10 is daardoor mogelijk, wat grote gevolgen voor de grootte en het gedrag van drukgolven kan hebben.
2. Als c constant genomen wordt hebben de drukgolven geen neiging tot vervorming zoals oppervlaktegolven. In werkelijkheid is c afhankelijk van de druk, waardoor toch een niet-lineair gedrag ontstaat en er in principe schokgolven kunnen optreden. Numerieke methoden daarvoor zijn ingewikkelder en vooral onderzocht voor gasdynamische toepassingen (zie bijv. Roache, 1976).

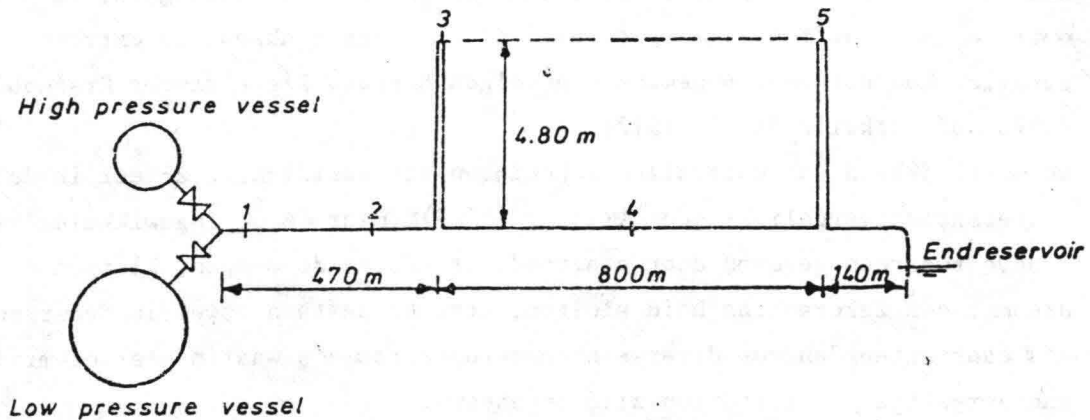


Fig. 11.1. Proefopstelling voor waterslag met hoge punten

Het resultaat van de berekening met hoge punten (waar cavitatie dus eerder op zal treden) is te zien in fig. 11.2 (a). Het blijkt dat de golven kwalitatief goed worden weergegeven, maar er zit een faseverschuiving in de teruglopende schokgolf. Het blijkt dat deze verklaard kan worden door aan te nemen dat er gas in het water zit met een volumeconcentratie in de orde van 2×10^{-6} . In plaats van dampbellen met een constante druk zijn er dan gasbellen waarin de isothermische toestandsvergelijking voor gas

$$pV = \text{const} \quad (11.4)$$

wordt toegepast. Dit geval is te zien in fig. 11.2 (b). De faseverschuiving is nu praktisch verdwenen en de rest van het drukverloop is vrijwel ongewijzigd zodat nu een redelijke overeenstemming met de meting bestaat. Dit geeft aan dat de onzekerheid bij zulke berekeningen vaak niet in de reken-techniek zit, maar in de fysische omstandigheden of (in andere gevallen) in het precieze gedrag van de randvoorwaarden. Het is hier dus weer van groot belang om de gevoeligheid van de resultaten van dergelijke onzekerheden vast te stellen.

3. Door de analogie met de vergelijkingen voor oppervlaktegolven kan een waterslagprogramma ook gebruikt worden voor open leidingen door te stellen $c = (g a_0)^{\frac{1}{2}}$, met de benadering dat de golven klein zijn (dus dat de waterdiepte weinig varieert) en evt. dat het getal van Froude klein is (zie voor een voorbeeld Jansen, 1979).
4. Een complicatie die in vele waterslagtoepassingen van belang is, is het optreden van cavitatie (dampbelvorming) bij lage drukken. In extreme gevallen kan dit zeer ongewenste gevolgen hebben. Zie hiervoor Kranenburg (1973) of Kalkwijk et al (1972).
5. De moeilijkheid van waterslagberekeningen zit veelal niet zozeer in de differentiaalvergelijkingen (11.2), (11.3) maar in de ingewikkelde randvoorwaarden gevormd door startende of afslaanende pompen, kleppen die met een zekere traagheid sluiten, etc. Er bestaan zowel in Nederland als daarbuiten dan ook diverse standaardprogramma's waarin meer of minder van dergelijke faciliteiten zijn ingebouwd.
6. Bij snelle verschijnselen is het gebruik van de stationaire vorm voor de wandwrijving eigenlijk niet meer verantwoord: het snelheidsprofiel in de leiding blijft niet gelijk aan dat bij stationaire stroming. Voor laminaire stroming is door Zielke (1968) aangegeven hoe dit moet worden opgelost; het blijkt dat daarbij een geheugeneffect optreedt. Voor turbulente stroming (het normale geval) is er geen rigoureuze methode bekend, hoewel de methode voor laminaire stroming (met aangepaste viscositeit) als ruwe benadering kan worden gebruikt.

Voorbeeld

In fig.11.1. is een proefopstelling voor waterslagverschijnselen met cavitatie getekend (Provoost, 1976). Twee hoge punten in de leiding simuleren bijv. dijk kruisingen. Een negatieve drukgolf wordt opgewekt door in een zekere tijd van het hoge- naar het lage-druk-reservoir over te schakelen. De druk aan het eind van de leiding wordt constant gehouden. Het verschijnsel van cavitatie wordt in de berekening gebracht als geconcentreerde cavitatiebellen in ieder roosterpunt. Zodra de druk in een roosterpunt beneden de dampspanning dreigt te komen wordt hij daarop vastgehouden. Dit levert een interne randvoorwaarde, zodat aan weerszijden verschillende stroomsnelheden ontstaan (hoe?), die de volume-verandering van de bel beschrijven. Het effect van deze belen is dat de voortplantingssnelheid van drukgolven tot praktisch nul wordt teruggebracht. Na reflectie van de negatieve golf tegen het eindreservoir komt er een positieve drukgolf terug die de cavitatiebellen weer doet verdwijnen. Dit gaat gepaard met een schokgolf.

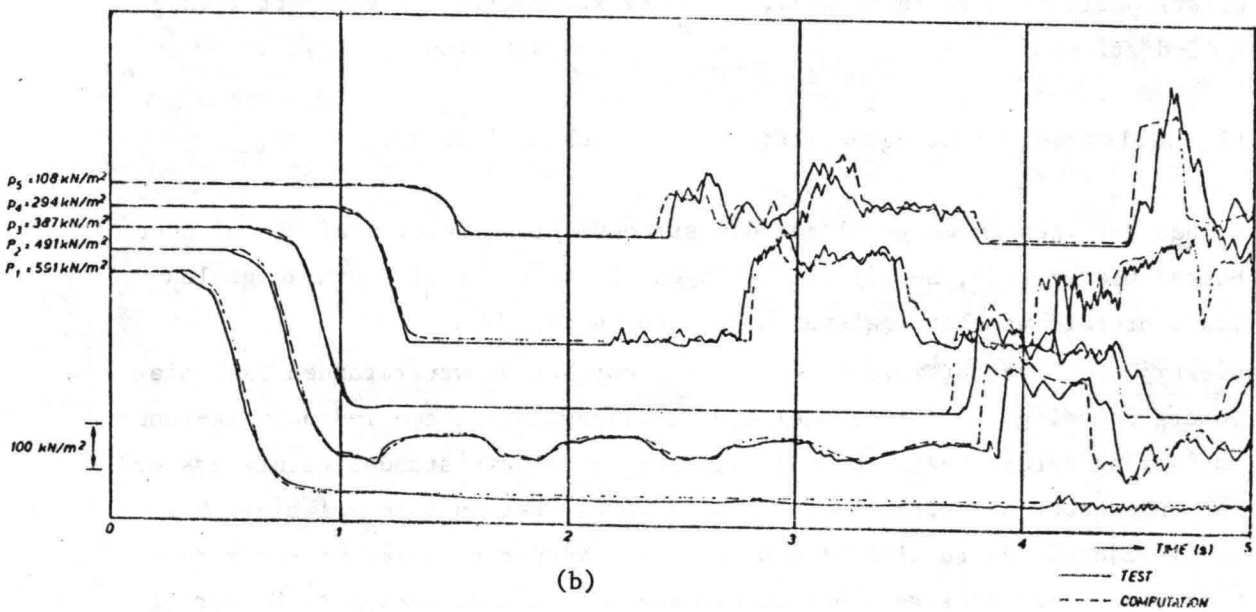
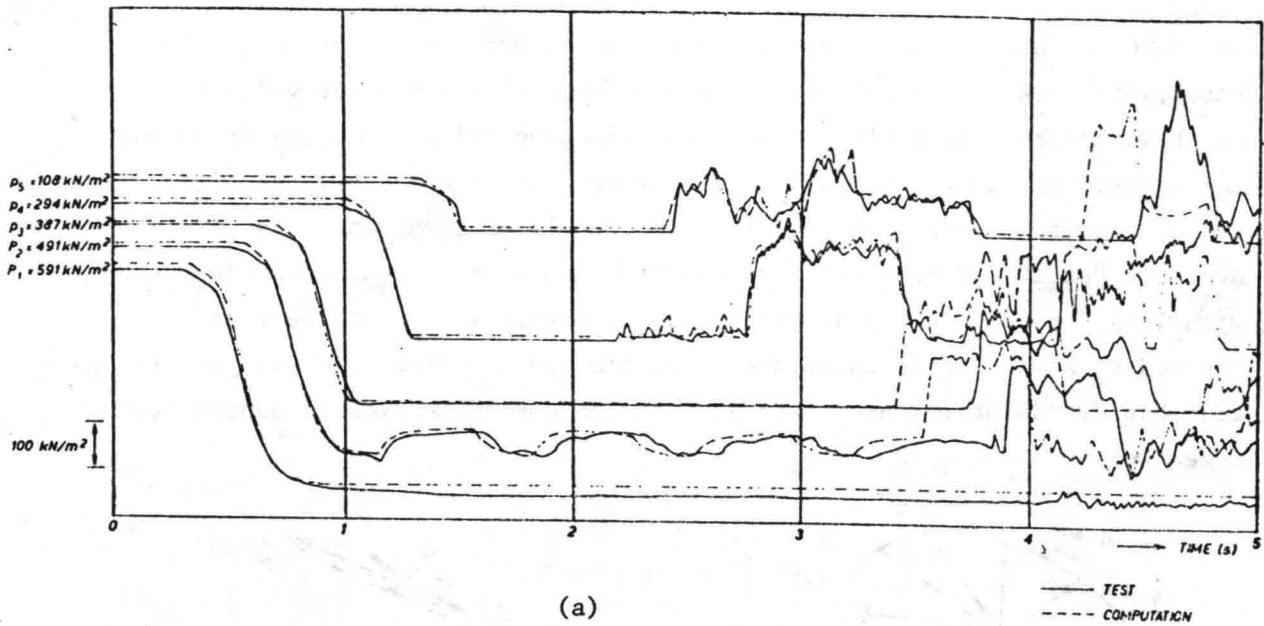
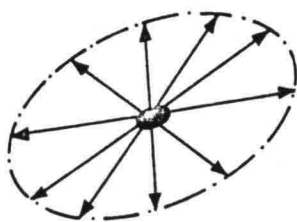


Fig.11.2. Resultaat van waterslagberekeningen met geconcentreerde cavitatiebellen, (a) zonder en (b) met vrij gas

12. Lange golven in twee dimensies

Er kan zich een aantal redenen voordoen waardoor de één-dimensionale beschrijving van lange golven, zoals in hoofdstuk 5, niet meer voldoet. Het belangrijkste criterium is de stroomrichting (fig. 12.1). Als de stroomsnelheidsvector in een bepaald punt voor een aantal opeenvolgende tijdstippen wordt getekend zal veelal een soort ellipsfiguur ontstaan. Als deze erg "plat" is, varieert de stroomrichting niet (afgezien van de tekenwisseling) en kan een één dimensionale schematisering nog wel worden toegepast. Als de beide assen van de ellips van dezelfde orde van grootte zijn kan dit duidelijk niet meer en moet een twee-dimensionale aanpak gekozen worden.



a. stroomrichting varieert veel,
2-d stroming



b. stroomrichting varieert weinig
1-d stroming

Fig. 12.1 Stroomrichtingsvariatie bepaalt schematisering.

In het eerstgenoemde geval zal die stroomrichting wel vooraf min of meer bekend moeten zijn, hetzij uit metingen of uit de ligging van de geulen. Een voorbeeld van het laatste is gegeven in fig. 12.2.

Hierbij moet bedacht worden dat het verloop van de waterstanden vaak niet zo erg gevoelig is voor de snelheidsverdeling, zodat een 1-d netwerk-schematisering eerder toelaatbaar is als men in de waterstanden geïnteresseerd is dan wanneer het stroombeeld gezocht wordt. Het laatste zal bijv. het geval zijn als de resultaten van het model verder gebruikt moeten worden voor studie van verspreiding van stoffen of sedimenttransport. Verder kan de aanwezigheid van geulen juist wijzen op een twee-dimensionaal effect door de Coriolis-invloed (eb- en vloedscharen) hetgeen in een 1-d model niet is weer te geven.

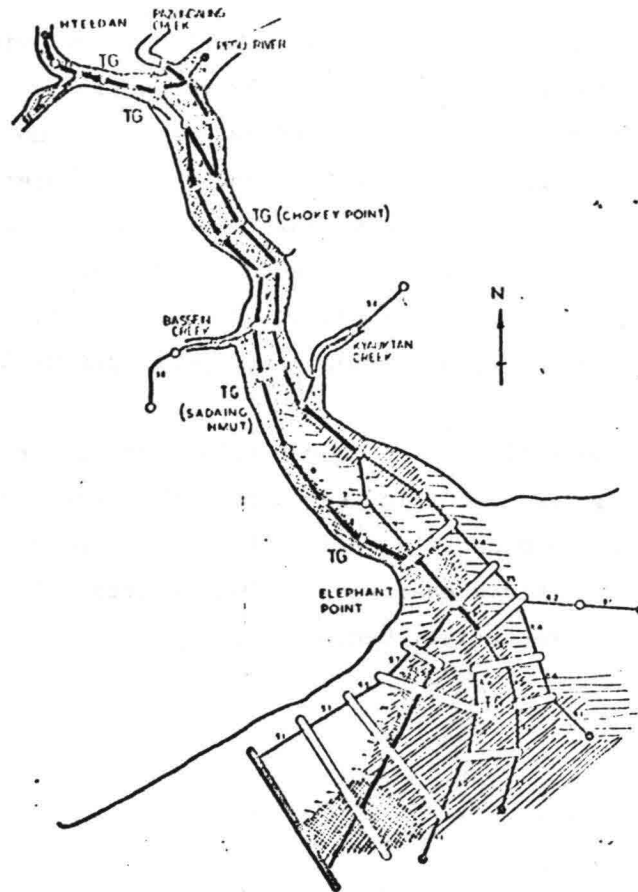


Fig.12.2 Voorbeeld van een 1-d netwerkschematisering van een 2-d gebied:
Rangoon rivier

De vergelijkingen voor over de diepte gemiddelde 2-d stroming zijn besproken in het college b73 (lange golven).

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (au) + \frac{\partial}{\partial y} (av) = 0 \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (au) + \frac{\partial}{\partial x} (au^2) + \frac{\partial}{\partial y} (auv) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} ga^2 \right) + ga \frac{\partial z_b}{\partial x} - fav + \\ + \frac{g}{C^2} u(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (av) + \frac{\partial}{\partial x} (auv) + \frac{\partial}{\partial y} (av^2) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} ga^2 \right) + ga \frac{\partial z_b}{\partial y} + fau + \\ + \frac{g}{C^2} v(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (12.3)$$

waarin f Coriolis parameter $2 \Omega \sin \gamma$
 Ω hoeksnelheid van de aardrotatie
 γ geografische breedte
 u, v over de diepte gemiddelde snelheid
 x, y horizontale coördinaten

Hierin zijn horizontale uitwisselingstermen (zijdelingse wrijving door turbulentie en niet-uniforme snelheidsverdeling) verwaarloosd. In vele gevallen is dit geoorloofd, zoals met een orde-van-grootte analyse kan worden aangetoond. Het is echter niet juist wanneer men geïnteresseerd is in circulatiestromingen (neren) die slechts door de zijdelingse wrijving aangedreven kunnen worden, althans in stationaire stroming. Ook bij stromingen die nog niet loslaten maar daar wel in de buurt komen, kan een invloed verwacht worden van de verwaarlozing van zijdelingse wrijving.

Het karakter van de vergelijkingen kan weer bekeken worden met behulp van karakteristieken; dit is echter in twee dimensies nogal ingewikkeld en wordt hier niet algemeen behandeld. Wel is het gedrag te zien door even te doen alsof er geen afgeleiden naar y zijn. Uit de drie vgl. (12.1) ... (12.3) volgen dan *drie* karakteristieken:

$$c_{1,2} = u \pm (ga)^{\frac{1}{2}} \quad (12.4)$$

$$c_3 = u \quad (12.5)$$

De laatste kwam in het één-dimensionale geval niet voor. Dit heeft gevolgen voor de randvoorwaarden. Als we de regel toepassen dat het aantal randvoorwaarden gelijk moet zijn aan het aantal ingaande karakteristieken dan blijkt dat er voor subkritische stroming:

a. bij *instroming* ($u > 0$) twee voorwaarden

b. bij *uitstroming* ($u \leq 0$) één voorwaarde

moeten worden opgegeven. Eén van die voorwaarden is van hetzelfde karakter als bij de 1-d modellen; de tweede kan bijv. iets zeggen over de stroomrichting bij instroming, maar de fysische betekenis van deze voorwaarde is nog niet geheel duidelijk. Verder blijkt het grensgeval ($u = 0$) te kunnen volstaan met één randvoorwaarde. Dit doet zich voor bij vaste randen (kusten, constructies) of bij verwaarlozing van de convectietermen in de bewegingsvergelijkingen.

Het type van randvoorwaarde op een getijrand kan net zo zijn als in het 1-d geval, dus een waterstand, een snelheid of debiet, of een combinatie van beide. Daar het nu een voorwaarde, niet in één punt, maar langs een lijn betreft moet het verloop van (bijv.) fase en amplitude langs die lijn goed gekozen worden. Dit is veelal geen eenvoudig probleem. Zo kan het opleggen van een waterstand, die langs de hele rand even hoog is, leiden

tot vreemde stromingen in het model, die zich over vrij grote afstand uitstrekken.

Wat de *numerieke methodes* betreft is er een soortgelijke keus als in het 1-d geval, met dien verstande dat de discretisering nu ook in de y-richting moet worden toegepast. Voor de differentie-methodes wordt een twee-dimensionaal rooster gekozen dat gewoonlijk rechthoekig en uniform is. Expliciete methodes laten toe dat waterdiepte en snelheidscomponenten in één punt worden berekend uit de direct omliggende punten. Impliciete methodes hebben hier een nog groter bezwaar dan in 1-d omdat nu koppelingen ontstaan tussen een punt en zijn burens aan vier zijden. Daar het aantal roosterpunten toch al groot zal zijn en de simpele structuur zoals bijv. in (3.10) niet meer geldt, kan de oplossing van de impliciete stelsels erg rekenintensief worden. Dit wordt dan ook meestal niet rechtstreeks gedaan: vaak wordt een splitsing gemaakt tussen x- en y-afgeleiden die afwisselend impliciet worden behandeld, waardoor telkens 1-d stelsels langs rijen of kolommen ontstaan (bijv. Leendertse, 1967). Een meer gedetailleerde bespreking van dergelijke methodes is hier niet op zijn plaats. Enkele opmerkingen:

1. Voor stabiliteitsonderzoek kan ook een analyse volgens Von Neumann worden gebruikt voor de gelineariseerde vergelijkingen, waarbij nu ook de voortplantingsrichting een rol speelt. De conclusies zijn vaak van dezelfde aard als in één dimensie. Wel leidt het CFL criterium tot een tijdstap die minstens een factor $\sqrt{2}$ ongunstiger is, aangezien dit criterium moet gelden in alle richtingen, dus ook diagonaal, waarin de stapgrootte eigenlijk $\sqrt{2}\Delta x$ is.
2. Instabiliteit tengevolge van niet-lineaire effecten (golfvervorming, turbulentie) schijnt in twee dimensies ernstiger gevolgen te hebben dan in één. Goede methodes om dit te analyseren ontbreken nog. Het gebeurt nogal eens dat men damping (zijdelingse wrijving) toevoegt om eventuele instabiliteit te onderdrukken.
3. Ook een golfvoortplantingsanalyse volgens hoofdstuk 8 kan in twee dimensies worden uitgevoerd. Veelal zal het resultaat niet essentieel verschillen.
4. Veel differentieschema's hebben bewust (punt 2) of onbewust toch zijdelingse wrijvingstermen (numerieke diffusie of viscositeit). Het is van belang om mogelijke effecten daarvan (bijv. in de vorm van neren) kritisch te bekijken.
5. Eindige-elementen methodes hebben het grote voordeel dat de geometrie (randen + diepteverdeling) goed kan worden geschematiseerd. Allerlei vormen van elementen, zoals driehoeken of niet-rechthoekige vierhoeken, zijn in gebruik. Het nadeel is dat de meeste methodes tot impliciete

stelsels aanleiding geven, wat tot hoge rekenkosten kan leiden. Verder wordt de nauwkeurigheid bepaald door de elementenverdeling en -vorm op een nog weinig doorziene manier. Elementenmethodes zijn voor dit soort problemen nog vrij weinig toegepast.

6. Bij een rechthoekig rooster voor differentie methodes is het schematiseren van randen en diepteverdeling niet zo eenvoudig. Randen worden meestal tot trapjeslijnen geschematiseerd. Over het effect daarvan op de nauwkeurigheid is niet veel bekend. Het weergeven van smalle geulen in een rooster vraagt om een bewuste schematisering: als men ermee volstaat, de diepte op de roosterpunten van de kaart af te lezen, kan de geul wel eens helemaal gemist worden! Beter is het, een geschematiseerde geul van 1 of 2x de maaswijdte te nemen, die wat betreft diepte en ruwheid aangepast is zodat de globale hydraulische eigenschappen dezelfde zijn als die van de werkelijke geul.
7. Ook voor lange golven in twee dimensies bestaan diverse standaardprogramma's. In Nederland zijn o.a. in gebruik TIDES (THD), WAQUA (RWS).

Voorbeeld

Enkele problemen en gebruiksmogelijkheden worden geïllustreerd door een model van het zeegebied voor de monding van de Gironde (Daubert en Graffe, 1969), zie fig. 12.3. Een van de belangrijke moeilijkheden, nl. het stellen van de randvoorwaarde op de zeerand, is hier opgelost door drie geneste modellen te gebruiken:

model 1	100 x 200 km ²	maaswijdte	5 km
model 2	65 x 80 km ²		2,5 km
model 3	30 x 30 km ²		1 km

Model 1 heeft als randvoorwaarde een vlakke invallende getijgolf loodrecht op de kust volgens (5.2.1). Deze invalshoek is niet willekeurig maar wordt bepaald door de getijvoortplanting verder op zee. De resultaten van model 1 werden overgebracht op de rand van model 2, daarna soortgelijk van model 2 naar model 3. Het effect van reflecties en vervormingen van de getijgolf wordt op die manier steeds meegenomen en wel in toenemende mate van detail. Op de rivierrand zijn gemeten waterstandskrommen opgelegd.

De gevoeligheid van het model voor een aantal parameters is vervolgens bepaald.

- a. Verwaarlozing van de convectietermen heeft (in dit geval!) weinig invloed behalve plaatselijk.
- b. Verwaarlozing van de Coriolis-versnelling heeft een duidelijke invloed (fig. 12.3, onderdeel 2) in het grote model. In het kleine model is er

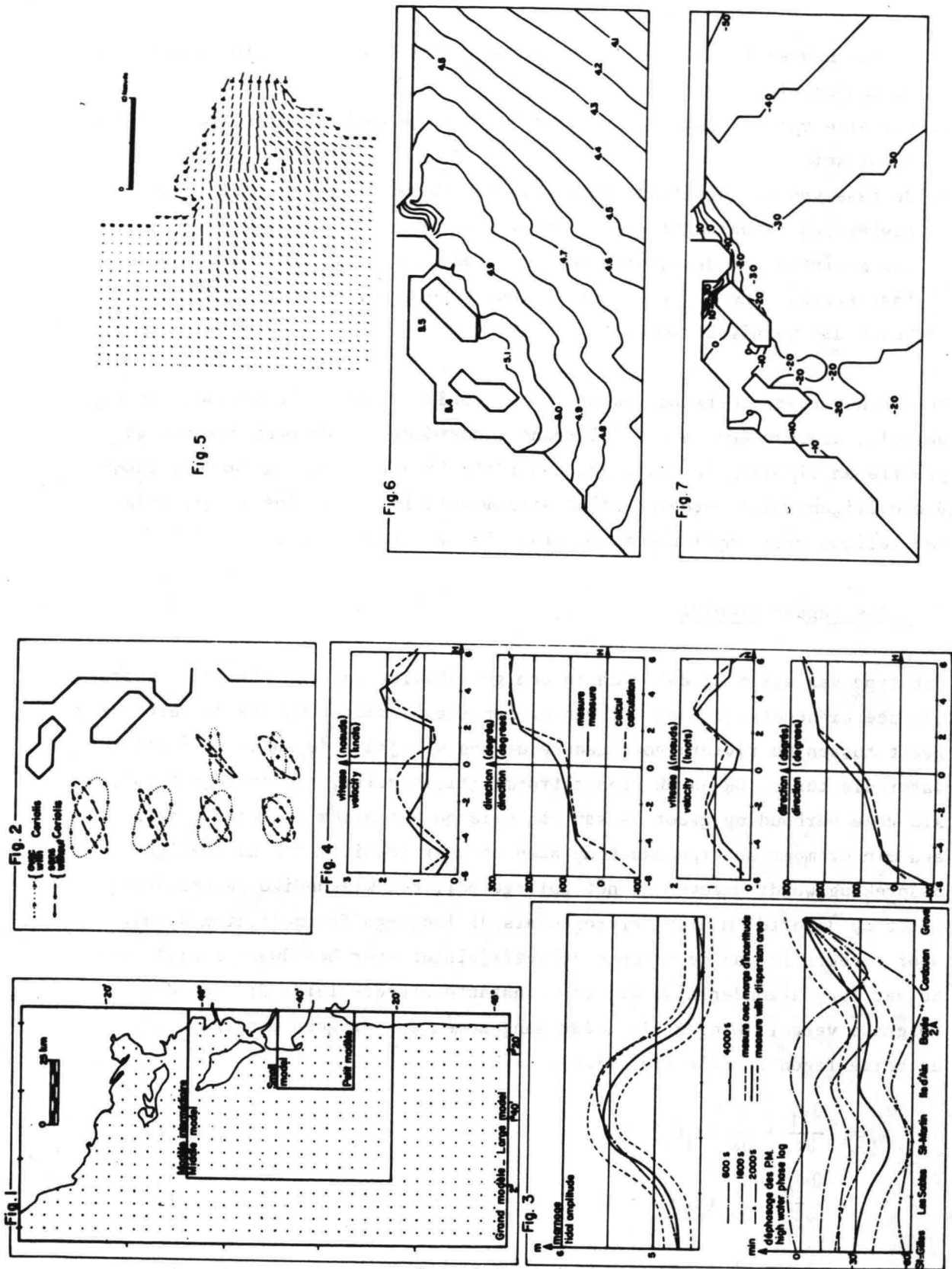


Fig. 12.3. Twee-dimensionaal model van het zeegebied voor de Gironde met enkele resultaten (uit Daubert en Graffe, 1969).

echter nauwelijks invloed mits de goede randvoorwaarden (incl. Coriolis) worden opgelegd.

- c. Variatie van de bodemruwheid over het hele gebied tegelijk heeft in dit geval weinig invloed
- d. De fase van de invallende getijgolf t.o.v. de randvoorwaarde in de riviermond is belangrijk (zie onderdeel 3 van de figuur). Met behulp van metingen van getij-amplitude en -fase langs de kust kon de juiste faseverschuiving ongeveer worden vastgesteld. Op de getijamplitude heeft dit weinig invloed.

Voor een verdere toetsing van het model worden alleen twee snelheidsmetingen vermeld, waarvan één in de riviermond (onderdeel 4). De overeenkomst in grootte en richting is redelijk. Onderdelen 5,6,7 geven enkele resultaten die overigens niet getoetst zijn: stroombeeld in het kleine model, lijnen van gelijke getijamplitude resp. -fase in het grote model.

13. Tweelagen-stroming

Het type van stroming dat zich in een getijrivier instelt als er zoutwater uit zee binnendringt hangt af van de mengingsparameter M , die de verhouding geeft tussen de rivierafvoer gedurende een getijperiode en de hoeveelheid water die tussen LW en HW binnenstroomt (tidal prism, zie college f11a). Als deze verhouding groot is kan een gelaagd estuarium ontstaan waarin een min of meer scherpe zouttong heen en weer schuift. Een uitvoerige bespreking wordt gegeven in het college b81. Een wiskundige beschrijving wordt op dezelfde manier verkregen als de lange-golfvergelijkingen, nl. door integratie van de stromingsvergelijkingen over het dwarsprofiel, maar nu per laag afzonderlijk. Bij een constante breedte leidt dit tot de volgende vergelijkingen als wordt aangenomen dat er geen menging tussen de beide lagen is (zie fig. 13.1).

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a_1 u_1) = 0 \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a_2 u_2) = 0 \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} u_1^2 + g(a_1 + a_2 + z_b) \right\} + \tau_i / \rho a_1 = 0 \quad (13.3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} u_2^2 + g(a_1 + a_2 + z_b) - \epsilon g a_1 \right\} + (\tau_b - \tau_i) / \rho a_2 = 0 \quad (13.4)$$

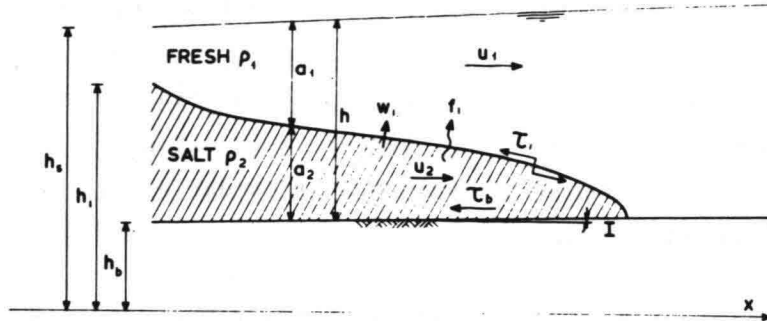


Fig. 13.1 Definities tweelagen-stroming

De bodemschuifspanning τ_b en de grensvlakschuifspanning τ_i worden verondersteld af te hangen van het kwadraat van de (relatieve) snelheid, waarbij in τ_i een deel van de bodemschuifspanning kan overblijven als het snelheidsverschil nul is:

$$\frac{\tau_i}{\rho} = k_a \frac{a_1}{h} u_2 |u_2| + k_i (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \quad (13.5)$$

$$\frac{\tau_b}{\rho} = k_b u_2 |u_2| \quad (13.6)$$

Het stelsel (13.1) ... (13.4) lijkt veel op een "dubbel" stel lange-golf vergelijkingen. Er kunnen dan ook zowel oppervlakte- als interne golven optreden, die enigszins gekoppeld zijn. De karakteristieken van het stelsel blijken voor kleine dichtheidsverschillen $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ te zijn (met enige benadering)

$$c_s = (a_1 u_1 + a_2 u_2)/a \pm (ga)^{\frac{1}{2}} \quad (13.7)$$

$$c_i = (a_2 u_1 + a_1 u_2)/a \pm \{a_1 a_2 a^{-2} (\epsilon ga - (u_1 - u_2)^2)\}^{\frac{1}{2}} \quad (13.8)$$

waarin $a = a_1 + a_2$, s staat voor surface en i voor intern. Het resultaat van (13.7) is identiek aan dat voor lange golven aangezien de eerste term niets anders is dan de gemiddelde snelheid. Uit (13.8) volgt als belangrijkste deel (voor kleine snelheden)

$$c_i \approx \left\{ \frac{a_1 a_2}{a} \varepsilon g a \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13.9)$$

Vergelijken we dit met $(ga)^{\frac{1}{2}}$ dan blijkt de verhouding in de orde van 0,09 te liggen (bij $\varepsilon = 0,03$). In andere situaties (bijv. koelwatercirculatie) kan de verhouding nog aanmerkelijk kleiner zijn. Interne golven lopen dus veel langzamer dan oppervlaktegolven. Als $a_1 \gg a_2$ blijkt $c_i \approx (\varepsilon g a_2)^{\frac{1}{2}}$ wat overeenkomt met een "gewone" oppervlaktegolf bij gereduceerde zwaartekracht εg . Iets dergelijks geldt bij $a_1 \ll a_2$. Verder heeft dit het gevolg dat c_i veel makkelijker van teken kan wisselen dan c_s , dus dat er "interne superkritische stroming" kan ontstaan.

Zoals gebruikelijk bepaalt het gedrag van de karakteristieken het aantal randvoorwaarden. Als we aannemen dat de gemiddelde stroming subkritisch is kunnen we de volgende gevallen onderscheiden:

één $c_s > 0$	beide $c_i \leq 0$	1 randvoorwaarde
"	één $c_i > 0$	2 randvoorwaarden
"	beide $c_i > 0$	3 randvoorwaarden

Een voorbeeld is de uitstroming van een rivier in de zee. De randvoorwaarde(n) voor de interne stroming zijn afhankelijk van wat er op zee gebeurt en verder moeilijk te meten (laat staan te voorspellen). Bij een *stilstaande* zouttong (zonder getij) kan aannemelijk worden gemaakt dat de stroming in de mond juist "intern kritisch" is, d.w.z. één $c_i = 0$ en de andere $c_i < 0$. Anders zou de "muur" van zout water in de zee wel naar binnen toe komen. Dit betekent

$$\frac{u_1^2}{\varepsilon g a_1} + \frac{u_2^2}{\varepsilon g a_2} = 1 \quad (13.10)$$

Deze voorwaarde is ook wel gehanteerd in niet-stationaire omstandigheden (Vreugdenhil, 1970) met redelijk succes, hoewel de argumentatie dan niet zo sterk is. Als er (intern-)superkritische stroming optreedt is (13.10) niet meer voldoende.

De sterk verschillende grootte van de voortplantingssnelheden heeft ook gevolgen voor de numerieke behandeling (fig. 13.2). Stel dat oppervlakte- en interne golven dezelfde periode hebben, zoals bij een getijrandvoorwaarde, dan zijn de golflengten sterk verschillend. Als we de beide golven met een vast rooster $\Delta x, \Delta t$ berekenen, gelden sterk verschillende waarden voor het Courant getal σ . Dit betekent i.h.a. dat één van beide golven te nauwkeurig of inefficiënt wordt berekend.

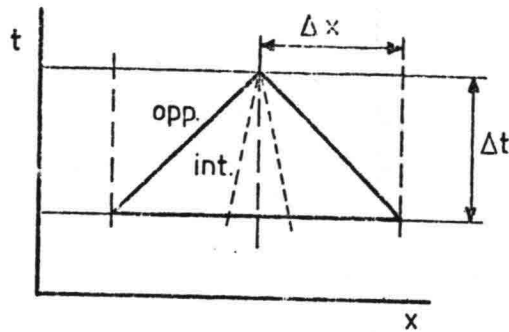


Fig. 13.2 Verschillende voortplantingssnelheden op een vast rooster

Om dit bezwaar te ondervangen zijn er voorstellen gedaan om een gemengde techniek te gebruiken, bijv. expliciet voor de interne golven en impliciet voor de oppervlaktegolven, of toepassing van verschillende roosters zodat beide golftypen met ongeveer gelijke waarden van n_x en σ werken. Deze technieken vragen wel dat een splitsing in de vergelijkingen kan worden aangebracht tussen oppervlakte- en interne golven. Dit blijkt ook bij benadering mogelijk te zijn (Vreugdenhil, 1979).

In fig. 13.3 is een voorbeeld van de laatstgenoemde techniek met verschillende roosters gegeven voor staande golven in een gesloten (1-d) bekken. Dit is ook een voorbeeld van controle van de numerieke berekeningen aan analytische oplossingen voor een speciaal geval. De analytische oplossing is verkregen door de vergelijkingen te lineariseren t.o.v. een rusttoestand. In de numerieke oplossing is een zeer kleine golfamplitude gehanteerd waardoor het systeem zich praktisch lineair gedraagt. Aangezien de golflengte hier door de lengte van het bekken wordt vastgelegd zijn gelijke Δx maar verschillende Δt (factor 20) gebruikt voor oppervlakte- en interne golven. De leap-frog-methode werd gebruikt. In de figuur zijn de volgende variabelen uitgezet:

oppervlaktegolven $a = a_1 + a_2$
 $q = a_1 u_1 + a_2 u_2$

interne golven $a' = a_1 / a$
 $v = u_1 - u_2$

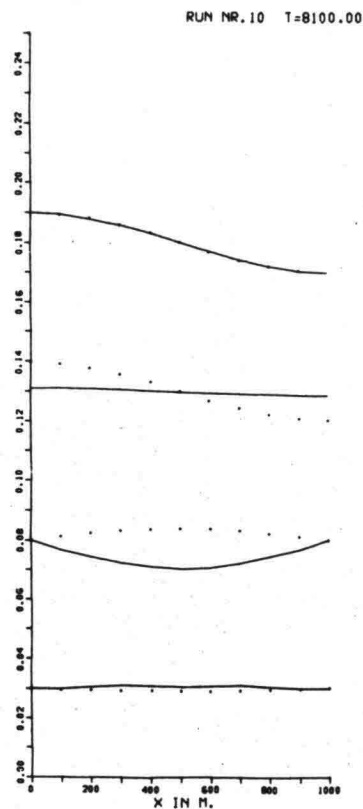
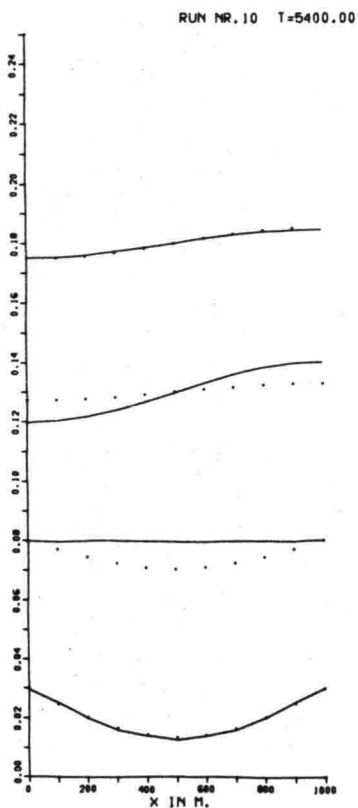
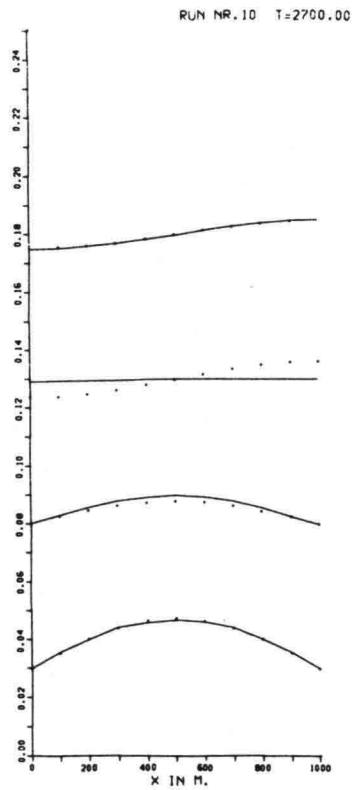
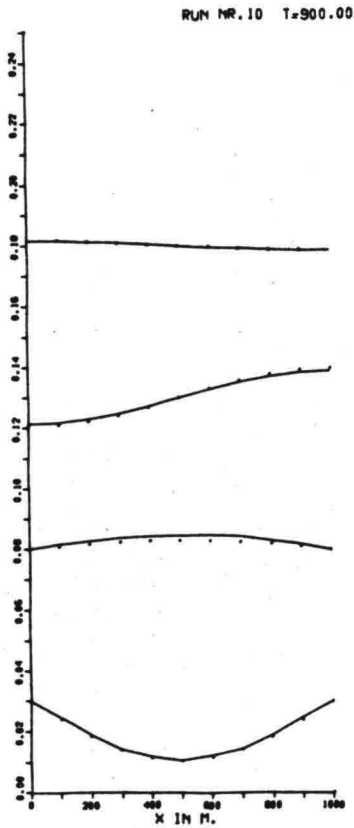


Fig. 13.3 Vergelijking van analytische (punten) en numerieke (lijnen) oplossingen voor een staande golf van kleine amplitude in een gesloten bekken. In iedere figuur van boven naar beneden a' , a , q , v (willekeurige schaal).

Verdere gegevens:

lengte van het bekken	$L = 1000 \text{ m}$
relatief dichtheidsverschil	$\epsilon = 0,01$
stapgroottes	$\Delta x = 100 \text{ m}, \Delta t_s = 7,5 \text{ s}, \Delta t_i = 150 \text{ s}$
diepte	$a = 10 \text{ m}$
initiële laagdikte	$a_2 = 5 \text{ m}$
geen bodem- of grensvlakwrijving	

Uit de figuur blijkt dat de amplitude van de golven netjes constant blijft maar dat de fase langzaam verloopt, zoals te verwachten was. Met behulp van tabel 8.1 kan dit kwantitatief gecontroleerd worden.

Voorbeeld

Het tweelagenmodel is toegepast op de Rotterdamse Waterweg waar geen scherpe scheiding tussen de lagen aanwezig is. Er zijn o.a. in 1956 uitgebreide metingen gedaan waaruit wel een laagdikte geschematiseerd kan worden. Het riviergedeelte vanaf Hoek van Holland tot voorbij Rotterdam is geschematiseerd tot een uniform kanaal met diepte 14 m en breedte 350 m (stroomvoerend) en 600 m (bergend). Enkele verdere gegevens:

dichtheid zeewater	$\rho_2 = 1025 \text{ kg/m}^3$
dichtheid rivierwater	$\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$
rivier afvoer	$Q = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$
wrijvingscoëfficiënten	$k_b = 0,028$ $k_i = 0,007$ $k_a = 0 \text{ of } k_b$
stapgrootte	$\Delta x_i = 500 \text{ m}$ $\Delta x_s = 2500 \text{ m}$ $\Delta t = 180 \text{ s}$

De berekening van oppervlaktegolven was geheel gescheiden van die van de interne golven. In beide gevallen werd de Lax-Wendroff methode gebruikt. Als randvoorwaarde voor de interne golven werd de voorwaarde voor kritische stroming (13.10) gebruikt. De waarde van de wrijvingscoëfficiënt k_i werd door proberen vastgesteld zodanig dat het resultaat van de berekening ongeveer met de metingen overeen kwam. Het betreft hier dus geen onafhankelijke verificatie. Het resultaat is weergegeven in fig. 13.4. waaruit blijkt dat het gedrag van de zouttong ongeveer correct wordt beschreven. De voorspellende waarde van dit type modellen wordt bepaald door de kennis van de wrijvingscoëfficiënt en eventuele uitwisselingscoëfficiënten. Voor een verdere bespreking zie Vreugdenhil (1970)

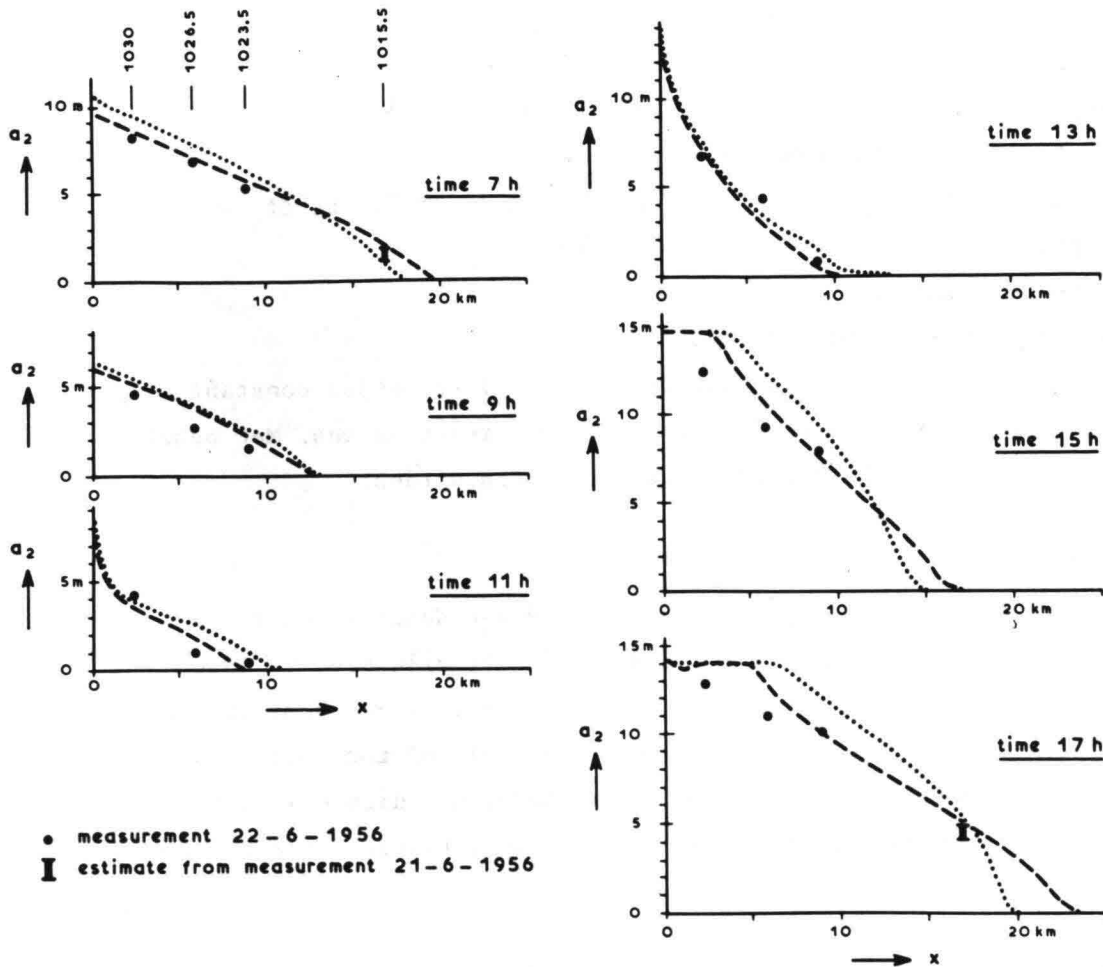


Fig 13.4 Langsdoorsneden van de zouttong in de Waterweg;
 $k_a = 0$ in case 3; $k_a = k_b$ in case 4.

14. Bodemverstoringen in een rivier

Als in een rivier met een zandige bodem een ingreep in het zandtransport plaatsvindt zal er plaatselijk erosie of sedimentatie van de bodem optreden. Voorzover dit op grote schaal gebeurt valt het verschijnsel in de categorie van lange golven. Lokale ontgrondingen, bijv. achter brugpijlers, horen daar niet bij. Een meer uitvoerige bespreking van het fysische proces wordt gegeven in de colleges f10 en f10a. Daar worden ook de vereenvoudigingen besproken die leiden tot het volgende stelsel vergelijkingen.

Als we aannemen dat de bodemverstoringen heel langzaam gaan, vergeleken met oppervlaktegolven, kunnen we de waterbeweging als kwasi-stationair beschouwen:

$$\frac{\partial}{\partial x} (ua) = 0 \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + ga + gz_b \right) + \frac{gu|u|}{C^2 a} = 0 \quad (14.2)$$

Als het totale zandtransport door een raai (per breedte-eenheid) s is en we nemen aan dat de berging van zwevend sediment verwaarloosbaar is, dan luidt de continuïteitsvergelijking voor het zand:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (14.3)$$

De beweging van het sediment wordt beschreven door een transportformule voor kwasi-stationaire stroming, weer omdat de veranderingen traag zijn:

$$s = f(u, \dots) \quad (14.4)$$

Behalve van de stroomsnelheid is s afhankelijk van materiaaleigenschappen, bodemruwheid etc. Deze parameters worden verder constant verondersteld en niet verder gespecificeerd. Hier zit overigens wel een van de beperkingen van deze aanpak.

Uit de drie differentiaalvergelijkingen (14.1) ... (14.3) voor a , u en z_b volgen op de gebruikelijke manier drie karakteristieken (voor een uitvoerige bespreking zie f10a). Twee hebben een oneindige voortplantingssnelheid, de derde geeft

$$c = \frac{u^2}{q} f'(u) (1 - F^2)^{-1} \quad (14.5)$$

waarin q het debiet per breedte-eenheid is (onafhankelijk van x volgens (14.1)). De twee karakteristieken met oneindig grote voortplantingssnelheid zijn de overblijfselen van de oppervlaktegolven. Er is verondersteld dat deze t.o.v. de bodemverstoringen zo snel (bijna oneindig snel) lopen dat de instelling van de stroming bij een veranderende bodemligging praktisch direkt gebeurt. De voortplantingssnelheid (14.5) behoort nu bij de bodemverstoringen. De orde van grootte hangt uiteraard van de situatie af, maar is in ieder geval klein (bijv. 1 m/dag). De voortplantingsrichting is stroomafwaarts (een en ander geldt alleen bij kleine F).

Om nog enig inzicht te krijgen in het gedrag van het systeem kunnen we het weer lineariseren, hoewel dit hier niet zo erg op zijn plaats is vanwege het sterk niet-lineaire karakter van de transportfunctie $f(u)$ (bijvoorbeeld evenredig met u^5). Met

$$a = a_0 + a'$$

etc. ontstaan de gelineariseerde vergelijkingen

$$u_0 a' + a_0 u' = 0 \quad (14.6)$$

$$u_0 u'_x + g a'_x + g z'_{bx} + \frac{g |u_0|}{C^2 a_0} (2u' - u_0 \frac{a'}{a_0}) = 0 \quad (14.7)$$

$$z'_{bt} + f'(u_0) u'_x = 0 \quad (14.8)$$

Door eliminatie volgt hieruit

$$z'_{bt} - D z'_{bxx} - \frac{D}{c} z'_{bxt} = 0 \quad (14.9)$$

waarin
$$D = \frac{u_o f'(u_o)}{3i_b}$$

i_b = bodemverhang in evenwichtstoestand

Proberen we een oplossing van de vorm

$$z'_b(x,t) = Z \exp(ikx + rt) \quad (14.10)$$

dan volgt door invullen

$$r = (-k^2 D - ikc k^2 D^2 / c^2)(1 + k^2 D^2 / c^2)^{-1} \quad (14.11)$$

Dit lijkt op de oplossing van een convectie-diffusie vergelijking (zie par. 15.4) met voortplantingssnelheid c_e en diffusiecoëfficiënt D_e die zou luiden

$$r = -k^2 D_e - ikc_e \quad (14.12)$$

Kennelijk

$$c_e = ck^2 D^2 / c^2 (1 + k^2 D^2 / c^2)^{-1} \quad (14.13)$$

$$D_e = D(1 + k^2 D^2 / c^2)^{-1} \quad (14.14)$$

De verhoudingen c_e/c en D_e/D hangen dus alleen af van de parameter

$$kD/c = ka_o(1 - F^2)(3i_b)^{-1} \quad (14.15)$$

Het gedrag is geïllustreerd in fig. 14.1. Het blijkt dat voor kleine kD/c een "puur" diffusiekarakter ontstaat en voor grote kD/c een convectief karakter (zie ook de Vries, 1975). In het laatste geval kan vgl. (14.9) kennelijk bij benadering worden vereenvoudigd tot

$$\frac{\partial z'_b}{\partial t} + c \frac{\partial z'_b}{\partial x} = 0 \quad (14.16)$$

Aan de hand hiervan zullen we dan ook enkele numerieke punten bespreken. Men moet echter niet uit het oog verliezen dat het diffusiegedeelte ook een rol kan spelen (zie daarover hoofdstuk 15,16).

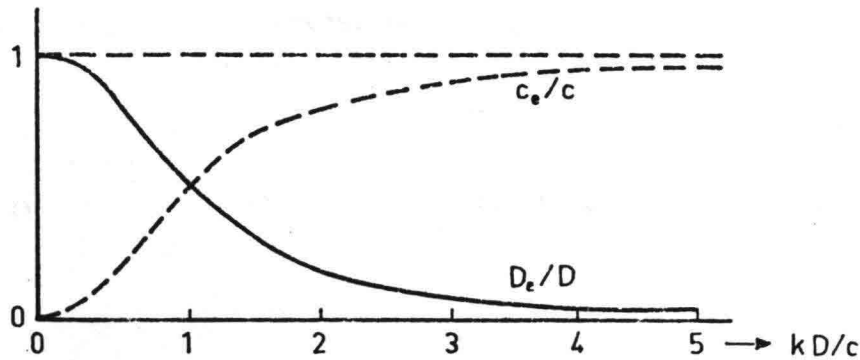


Fig. 14.1 Effectieve voortplantingssnelheid en diffusiecoëfficiënt voor bodemveranderingen.

Op vgl. (14.16) kan weer een differentiemethode worden toegepast. In de praktijk komt dat erop neer dat de differentiemethode op (14.3) wordt toegepast en dat na iedere stap een stuwkromme wordt berekend met behulp van (14.1) en (14.2) bij de dan heersende bodemligging. Bij impliciete methodes worden deze bewerkingen gekoppeld waardoor de berekening aanmerkelijk ingewikkelder wordt. In de praktijk zijn dan ook alleen expliciete methodes gebruikt (de Vries, 1973, zie ook Jansen, 1979). Dit is meestal ook wel aanvaardbaar omdat de kleine voortplantingssnelheid c relatief grote tijdstappen toelaat.

Een complicatie bij de keus van een numerieke methode is het feit dat de voortplantingssnelheid c sterk varieert. Als de waterdiepte (en daarmee de stroomsnelheid) over het gebied varieert met 20% kan c variëren met een factor 2. Door het stabiliteitscriterium is men bij de keuze van de tijdstap gebonden aan de ongunstigste waarde van c . Is het Courantgetal σ daar ca. 1 dan zal het in andere gebieden (veel) kleiner kunnen zijn en fig. 8.2 laat zien wat er dan met de nauwkeurigheid gebeurt. Dit kan aanleiding zijn om een methode van hogere orde te gebruiken of om een groot aantal punten per golflengte te kiezen.

Doordat de voortplantingssnelheid (14.5) gewoonlijk toeneemt met toenemende snelheid u (en nogal sterk) worden "golven" sterk vervormd: de fronten worden steiler en de staarten minder steil. Dit kan zo ver gaan dat een front bijna vertikaal gaat staan. Plaatselijk gelden dan de vergelijkingen gebaseerd op geleidelijk veranderende stroming niet meer (vergelijk een watersprong).

Het verschijnsel is analoog aan een *schokgolf*. Deze wordt geschematiseerd als een echte stap: men probeert geen uitspraak te doen over de precieze vorm van het front. Kennelijk gelden plaatselijk de differentiaalvergelijkingen niet meer; wel de principes van behoud van massa en impuls die eraan ten grondslag liggen. Voor de bodemveranderingen geldt met name:

$$c\Delta z = \Delta s \quad (14.17)$$

(zie fig. 14.2) waarin nu c de voortplantingssnelheid van het front is en

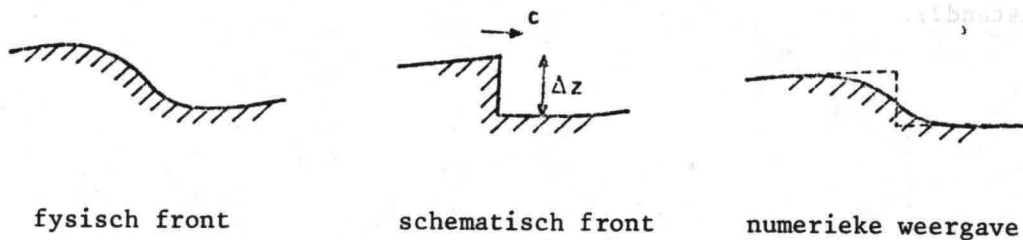


Fig. 14.2. Steil front bij bodemverstoring

Δs het verschil in transport tussen achter- en voorzijde (gemeten in de voortplantingsrichting). Nu kan men aantonen (Lax, 1954) dat zulke oplossingen met discontinuïteiten gevonden kunnen worden uit (14.3) waarbij dan automatisch aan (14.17) wordt voldaan; men noemt dat *zwakke oplossingen*. Zou men in plaats van (14.3) een differentieëbenadering gebruiken van de vergelijking

$$\frac{\partial z}{\partial t} + s'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (14.18)$$

dan zou men niet de juiste zwakke oplossing vinden. In het continue gedeelte is (14.18) gelijkwaardig met (14.3) maar bij de sprongen niet. Om die goed te krijgen moet de *behoudsvorm* (14.3) gebruikt worden (vergelijk p. 48). Ook numeriek ontstaat (uiteraard bij benadering) bij gebruik van (14.3) de juiste oplossing, inclusief sprongen die aan (14.17) voldoen. Wel worden de sprongen afgevlakt door de numerieke diffusie in de differentiemethodes (fig. 14.2). Ook kunnen secundaire golfjes achter het front ontstaan van numerieke oorsprong. De sprongen worden op deze wijze niet exact gelocaliseerd; men noemt dit *shock-capturing*. Er is ook een methode (*shock-fitting*) gebaseerd op de karakteristiekenmethode, waarmee plaats en grootte

van de sprong precies worden bijgehouden; deze is echter nogal omslachtig en wordt weinig toegepast.

Voorbeeld.

Als een rivierbocht wordt afgesneden (bijv. bij Rheden, Waterloopkundig Lab. 1970, zie fig. 14.3) dan is de situatie direct daarna niet meer in evenwicht. Door het opstuwingseffect (fig. 14.4) neemt de stroomsnelheid in de afgesneden bocht af in de stroomrichting en dus gebeurt dat ook met het transport. Het gevolg is dat er zand op de bodem wordt afgezet en dat de bodem omhoog komt. Door de vorm van de stuwkromme bovenstrooms van de afsnijding gebeurt daar het omgekeerde (wat is de uiteindelijke evenwichtstoestand?).

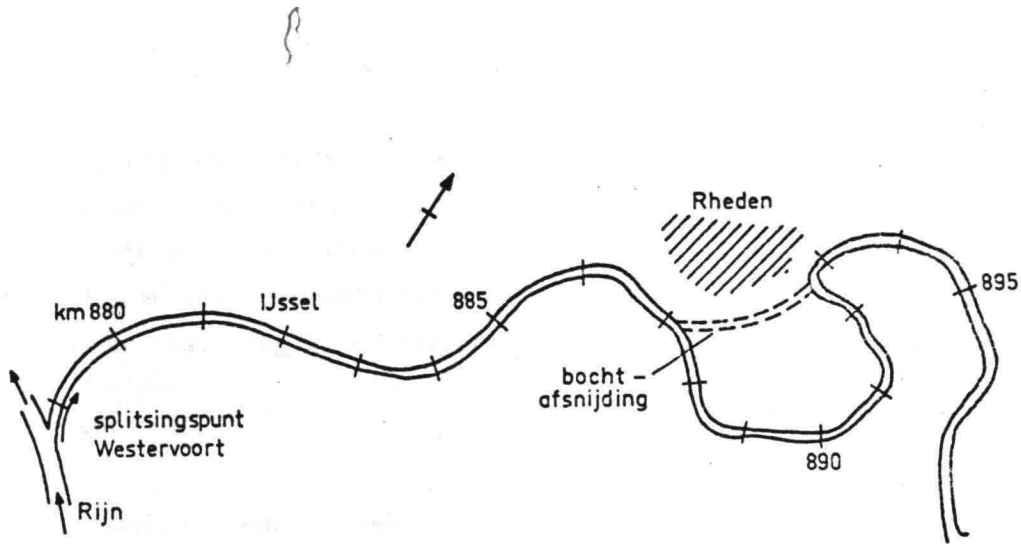


Fig. 14.3. Bochtafsnijding bij Rheden

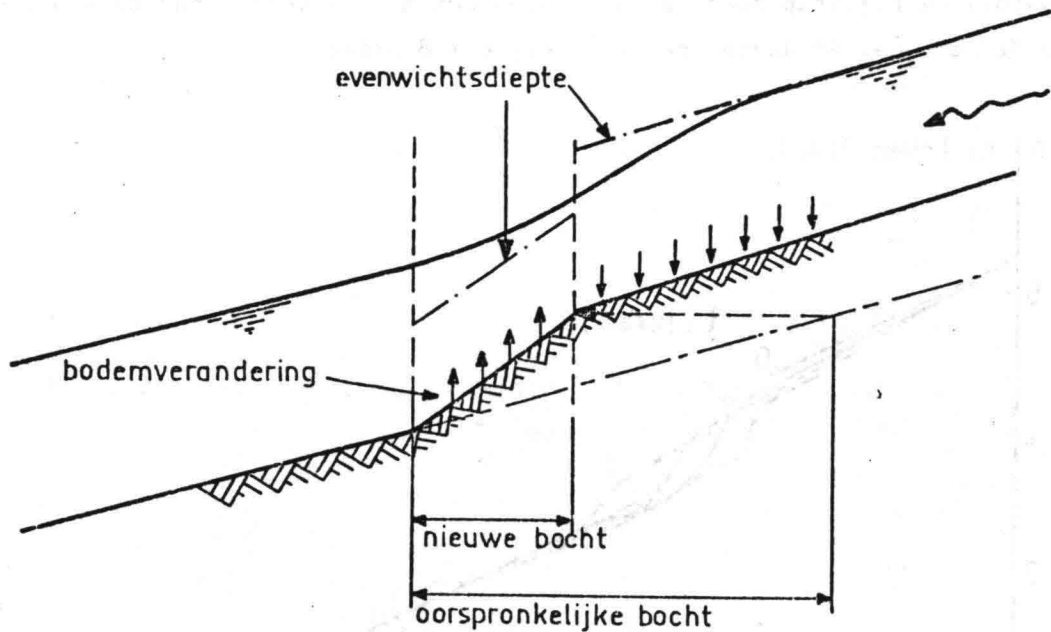


Fig. 14.4 Toestand na bochtafsnijding

Met behulp van een numerieke berekening is voor het geval van Rheden meer in detail aan het verloop van het proces gerekend, meer in het bijzonder met het oog op de ontwikkeling van de beschikbare waterdiepte voor de scheepvaart. Die neemt volgens fig. 14.4 eerst af en het is van belang om te weten hoe snel zich dat herstelt.

De aanzanding heeft het karakter van een steeds steiler wordend front dat zich in principe tot een "schok" ontwikkelt. Door de relatief sterke diffusie in het rekenschema (in dit geval het modified Lax schema) wordt het front echter weer afgevlakt, zoals blijkt uit fig. 14.5. Het schema gebaseerd op (7.1.5) wordt hier

$$\frac{z_{bj}^{n+1} - z_{bj}^n}{\Delta t} + \frac{s_{j+1}^n - s_{j-1}^n}{2\Delta x} - \alpha \frac{z_{bj+1}^n - 2z_{bj}^n + z_{bj-1}^n}{2\Delta t} = 0 \quad (14.19)$$

De waarde van α is zodanig gekozen dat

$$\alpha = \sigma_{\max}^2 + 0,01 \quad (14.20)$$

waarbij de tijdstap zodanig is gekozen dat $\alpha < 1$. Verder was $\Delta x = 500$ m zodat $\Delta t < \text{ca. } 60$ dagen moet zijn bij $c \sim 8$ m/dag.

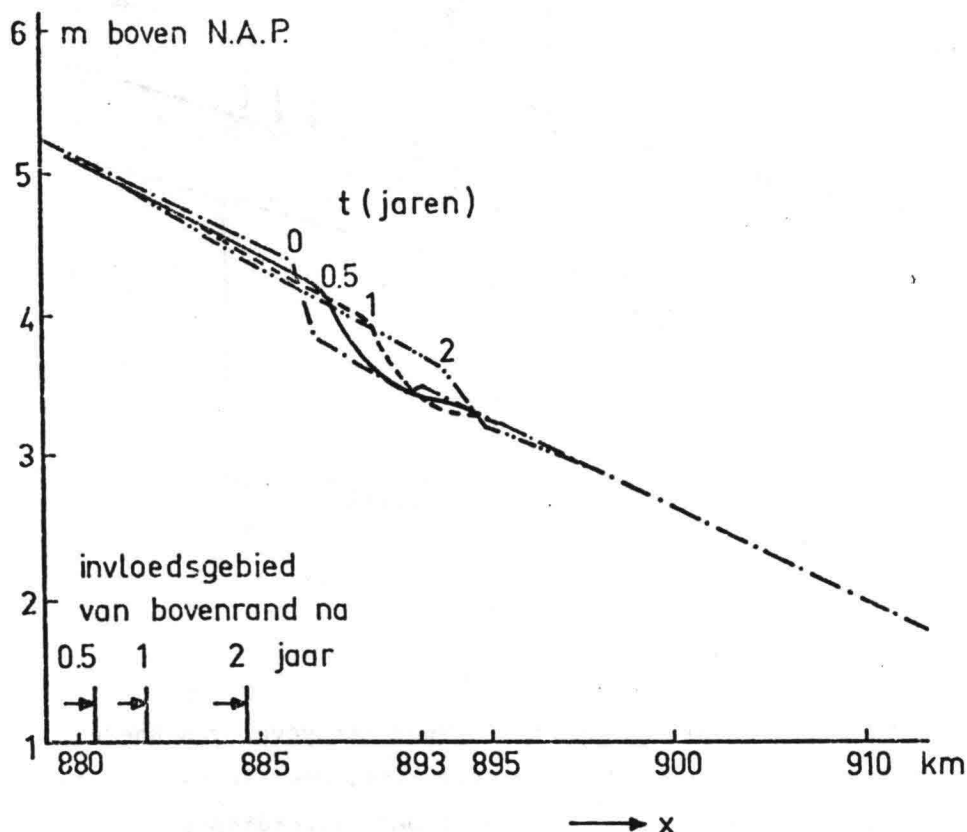


Fig. 14.5 Bodemverloop na bochtafsnijding bij evenwichtstransport
 $s = 110 \text{ m}^3/\text{etmaal}$

Een complicatie is hier gelegen in de randvoorwaarde bovenstrooms. Op 8 km boven de afsnijding bevindt zich nl. het splitsingspunt Westervoort. De zand- en waterverdeling is daar afhankelijk van de bodemligging. Als de invloed van de bochtafsnijding zich dus tot de bodemligging bij het splitsingspunt gaat uitstrekken veranderen de randvoorwaarden op een vooralsnog onbekende wijze. Er is daarom voor gekozen om de bodemhoogte bij Westervoort constant te houden. Dit is niet correct, maar de invloed van de verkeerde randvoorwaarde breidt zich slechts langzaam (nl. met de snelheid c uit (14.5)) uit en de rest van de berekening is wel correct. Deze grens is in fig. 14.5 aangegeven.

en blijkt na ca. 3 jaar bij de bochtafsnijding te zijn aangekomen. Verder kan de voorspelling niet voortgezet worden.

Een laatste opmerking betreft het feit dat de uitschuring van de rivierbodem in de praktijk beperkt zal worden door afpleistering: grof materiaal in de rivierbodem blijft liggen en vermindert daardoor ook het "aanbod" van fijner materiaal. Dit effect is in de berekening niet meegenomen.

16. Diffusie

16.1. Diffusievergelijking

Als "modelprobleem" voor diffusie bekijken we verspreiding van opgeloste stoffen in een rivier. De massabalans voor een stof over een "schijf" water loodrecht op de as van de rivier geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\bar{c}) + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{A\bar{c}}{t_r} = 0 \quad (16.1.1)$$

waarin $\bar{c}$ = over het dwarsprofiel gemiddelde concentratie

F = flux van opgeloste stof

t_r = relaxatietijd voor afbraak van de stof.

De flux is opgebouwd uit een aantal bijdragen:

$$F = A_s \bar{u} \bar{c} + \iint_{A_s} \left\{ -\gamma \frac{\partial c}{\partial x} + \overline{u'c'} + (u - \bar{u})(c - \bar{c}) \right\} dydz \quad (16.1.2)$$

convectie
moleculaire
diffusie
turbulente
diffusie
dispersie

waarin γ = moleculaire diffusiecoëfficiënt

$\overline{u'c'}$ = turbulent stoftransport

u = snelheidsprofiel

c = concentratieprofiel.

De moleculaire bijdrage is gewoonlijk verwaarloosbaar; de turbulente bijdrage en die tengevolge van snelheids- en concentratieverschillen over het dwarsprofiel zijn in principe niet uit een één-dimensionale beschouwing af te leiden. Het is gebruikelijk om ze te "modellieren" als

$$\overline{u'c'} = - \epsilon_Y \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (16.1.3)$$

$$\iint_{A_s} (u - \bar{u})(c - \bar{c}) dydz = - A_s D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (16.1.4)$$

In kanalen en rivieren blijkt dan verder nog dat D gewoonlijk (veel) groter is dan ϵ_Y . Voor (16.1.4) wordt wel de (minder gelukkige) term *dispersie* gebruikt. Een betere term zou zijn: schijnbare diffusie door convectieverschillen (differential convection). Het idee om daarvoor een diffusiebenadering te gebruiken is afkomstig van Taylor (1954), verder uitgewerkt door o.a. Elder (1959) voor brede open kanalen en Fischer (1973) voor natuurlijke rivieren. In fig. 16.1. is een schema van de verspreiding gegeven waaruit blijkt dat er wel enige aanleiding is om het transport aan de gradient $\partial \bar{c} / \partial x$ te koppelen. Merk op dat de flux over het stroomvoerend deel van het dwarsprofiel wordt berekend, maar de berging over het volledige dwarsprofiel. Een principieel bezwaar tegen de diffusiebenadering is dat er ook netto transport in een richting tegengesteld aan die van de gemiddelde stroom in plaats vindt; dit is niet reëel op grond van de definitie van de flux (16.1.2).

De afbraakterm $\bar{A}c/t_r$ is in (10.1.1) opgenomen voor het geval van *niet-conservatieve* stoffen, zoals bijv. in waterkwaliteitsstudies voorkomen (levende organismen, ook radio-actieve stoffen). Ook *warmte* kan als een "opgeloste stof" worden gehanteerd; de concentratie is dan de temperatuur en de afbraakterm is afkomstig van warmteverlies naar de atmosfeer door het wateroppervlak. De coefficient t_r is dan afhankelijk van allerlei factoren, zoals de windsnelheid, luchtvochtigheid etc.

16.2. Diffusiecoefficient

De diffusiecoefficient D wordt bepaald door de snelheids- en concentratieverdeling en blijkt daardoor in verschillende omstandigheden nogal sterk verschillende waarden te kunnen aannemen. In speciale gevallen is de concentratieverdeling bij een gegeven snelheidsverdeling te berekenen, zodat dan ook de diffusiecoefficient berekend kan worden.

Voor een breed, ondiep kanaal met een logaritmische snelheidsverdeling over de vertikaal en zonder variaties in dwarsrichting vond Elder:

$$D = 6 a |u_x| \quad (16.2.1)$$

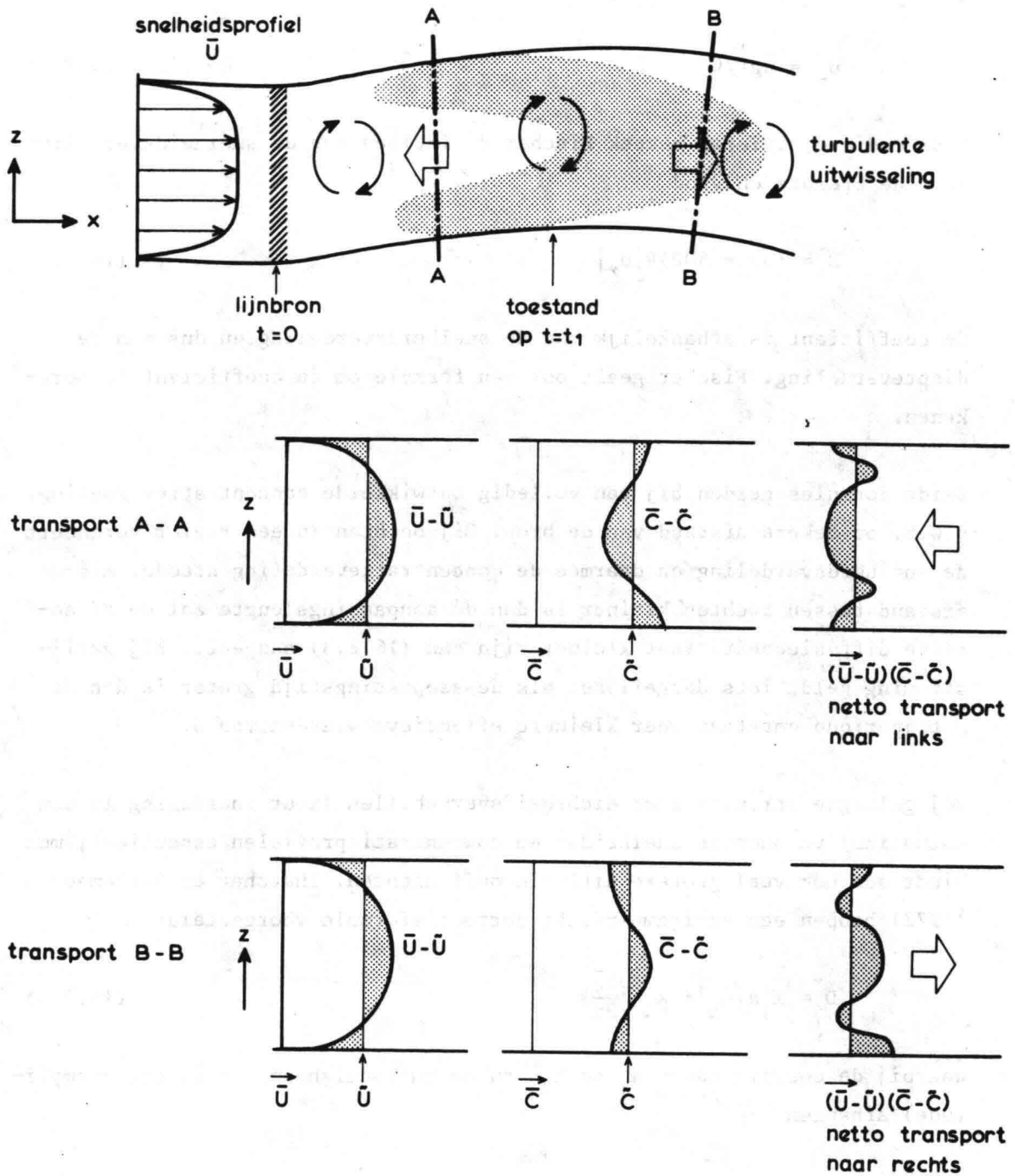


Fig. 16.1. verspreiding op grote schaal in een rivier

waarin $u_x = (\tau_b/\rho)^{1/2}$ de schuifspanningssnelheid bij de bodem is, in dit geval evenredig met de gemiddelde snelheid volgens

$$u_x = \bar{u}g^{1/2}/C \quad (16.2.2)$$

Voor ondiepe rivieren bekeek Fischer de invloed van de snelheidsverdeling over de breedte en vond

$$D = (50 - 500)R|u_x| \quad (16.2.3)$$

De coëfficiënt is afhankelijk van de snelheidsverdeling en dus van de diepteverdeling. Fischer geeft ook een formule om de coëfficiënt te berekenen.

Beide formules gelden bij een volledig ontwikkelde concentratieverdeling, d.w.z. op zekere afstand van de bron. Bij bochten in een rivier verandert de snelheidsverdeling en daarmee de concentratieverdeling steeds. Als de afstand tussen bochten kleiner is dan de aanpassingslengte zal de effectieve diffusiecoëfficiënt kleiner zijn dan (16.2.3) aangeeft. Bij getijstroming geldt iets dergelijks: als de aanpassingstijd groter is dan de getijperiode ontstaan weer kleinere effectieve waarden van D.

Bij gelaagde stroming door dichtheidsverschillen (zout indringing in een estuarium) veranderen snelheids- en concentratieprofielen essentieel; men vindt dan ook veel grotere diffusiecoëfficiënten. Thatcher en Harleman (1972) hebben een semi-empirische correctieformule voorgesteld:

$$D = k_1 a |u_x| + k_2 \left| \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right| \quad (16.2.4)$$

waarbij de coëfficiënten k_1 en k_2 van de omstandigheden (o.a. getij-amplitude) afhangen.

Een uiterst belangrijk effect dat de voorafgaande soms verre overtreft is dat van tijdelijke berging in "dode" gebieden, zoals havens, zijtakken, ondiepten. De getransporteerde stof wordt daarin tijdelijk geborgen en komt later weer vrij, wat tot een sterke longitudinale verspreiding aanleiding geeft. Men kan proberen dit effect ook in de diffusiecoëfficiënt D onder te brengen, maar die krijgt dan een nog sterker empirisch karakter dan hij per definitie al heeft.

16.3. Gedrag van de oplossing

Bij combinatie van (16.1.1) en (16.1.2) ontstaat de convectie-diffusie-vergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ac) + \frac{\partial}{\partial x}(Qc) + Ac/t_r = \frac{\partial}{\partial x}(A_s D \frac{\partial c}{\partial x}) \quad (16.3.1)$$

waar de streep voor het gemiddelde achterwege is gelaten. Met behulp van de continuïteitsvergelijking (5.1.1) kan dit worden omgewerkt tot de (niet-behoudende!) vorm

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial c}{\partial x} + c/t_r = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(A_s D \frac{\partial c}{\partial x}) \quad (16.3.2)$$

Als $A = A_s$ is $Q/A = u$ de gemiddelde snelheid. De factor $A_s D$ is gewoonlijk niet constant; voor een globale analyse nemen we nu even aan dat dat wel zo is en dat verder $A = A_s$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + c/t_r = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (16.3.3)$$

Opmerkingen voor de verspreiding van een "wolk" van opgeloste stof:

- $u \frac{\partial c}{\partial x}$ leidt tot een verschuiving van het zwaartepunt met een snelheid u
- c/t_r leidt tot een exponentiële damping $\exp(-t/t_r)$
- $D \partial^2 c / \partial x^2$ leidt tot een verspreiding, daarmee tot een afname van piekconcentratie, maar *niet tot verlies van stof*.

Dit blijkt o.a. uit de oplossing van (16.3.3) voor een puntbron, waarbij een hoeveelheid M geloosd wordt op $x = 0$ en $t = 0$. Die oplossing kan met behulp van Laplace- en Fouriertransformaties gevonden worden en luidt (zie fig. 16.2)

$$c(x,t) = \frac{M}{A} (4 \pi D t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - (x - ut)^2 (4Dt)^{-1} - \frac{t}{t_r} \right\} \quad (16.3.4)$$

Karakteristieke punten zoals de symmetrische vorm in x (niet in t !), de diffusie tegen de stroom in en de extra damping t.g.v. afbraak zijn hierin te zien. Uit (16.3.4) blijkt ook dat de invloed van de bron zich direkt (zij het misschien zwak) over het hele gebied uitbreidt.

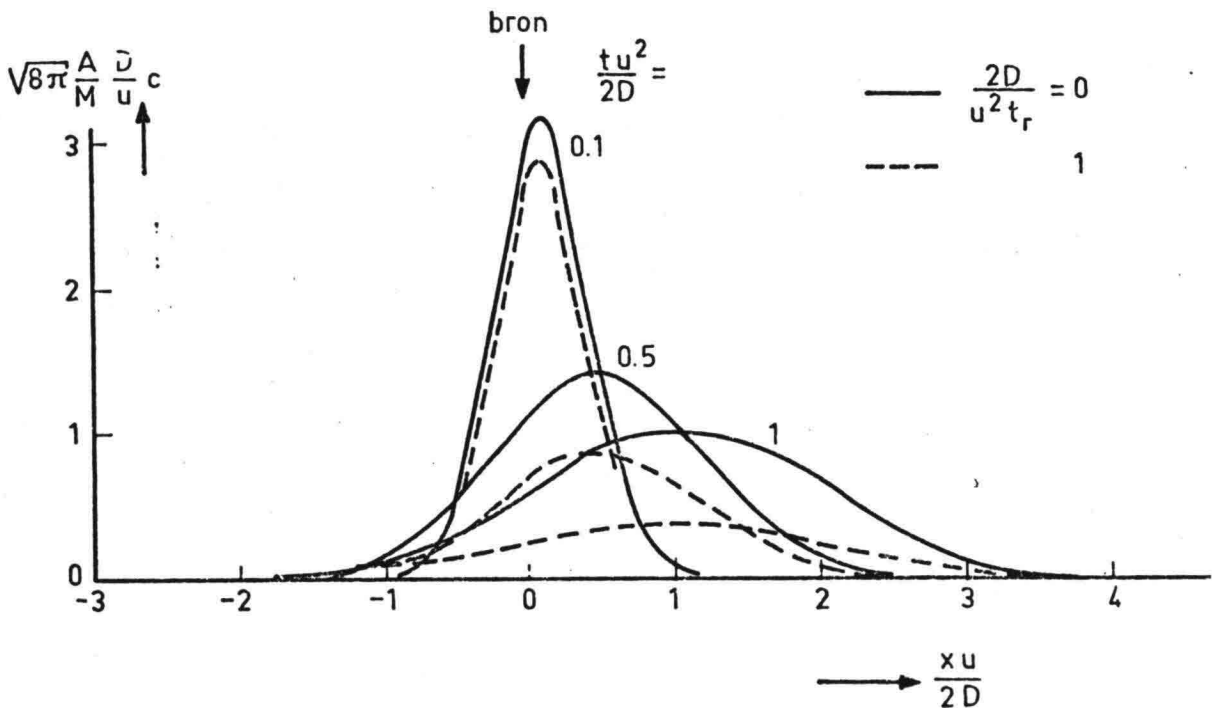


Fig. 16.2 Analytische oplossing van de diffusievergelijking voor een punt-bron

Begin- en randvoorwaarden

Voor de diffusievergelijking is slechts één beginvoorwaarde nodig, nl. de concentratieverdeling op $t = 0$. Dit is aannemelijk doordat alleen de eerste afgeleide naar de tijd in de vergelijking voorkomt.

Er zijn twee randvoorwaarden nodig, één op iedere rand. Deze komen overeen met de ontaarde karakteristieken voor dit geval (hoofdstuk 4). Bij *instroming* door een rand is het zinvol om de concentratie c of de flux $(uc - Dc_x)A_s$ voor te schrijven (niet allebei!). Bij *uitstroming* zou men fysisch eigenlijk geen randvoorwaarde op willen leggen; de wiskundige formulering heeft er echter wel één nodig. Gebruikelijk is een "zwakke" voorwaarde $c_{xx} = 0$, die zowel de concentratie als de flux "vrij" laat. Enkele mogelijkheden zijn dus:

- instroming: concentratie gegeven $c = c(t)$ (16.3.5)
- instroming: flux gegeven $A_s(uc - Dc_x) = F(t)$ (16.3.6)
- uitstroming: "zwakke" voorwaarde $c_{xx} = 0$ (16.3.7)
- gesloten rand: $c_x = 0$ (16.3.8)
- lozingspunt (interne rand):

$$\{A_s(uc - Dc_x)\}_{\text{links}} - \{A_s(uc - Dc_x)\}_{\text{rechts}} = F(t)$$
 (16.3.9)

De invloeden van onderdelen van begin- en randvoorwaarden breiden zich uit op een soortgelijke manier als de oplossing in fig. 16.2. Ze zijn te superponeren omdat de diffusievergelijking lineair is (tenzij een diffusiecoëfficiënt volgens 16.2.4 wordt gebruikt). Het gedrag van zulke bijdragen is nog een geïllustreerd in fig. 16.3.

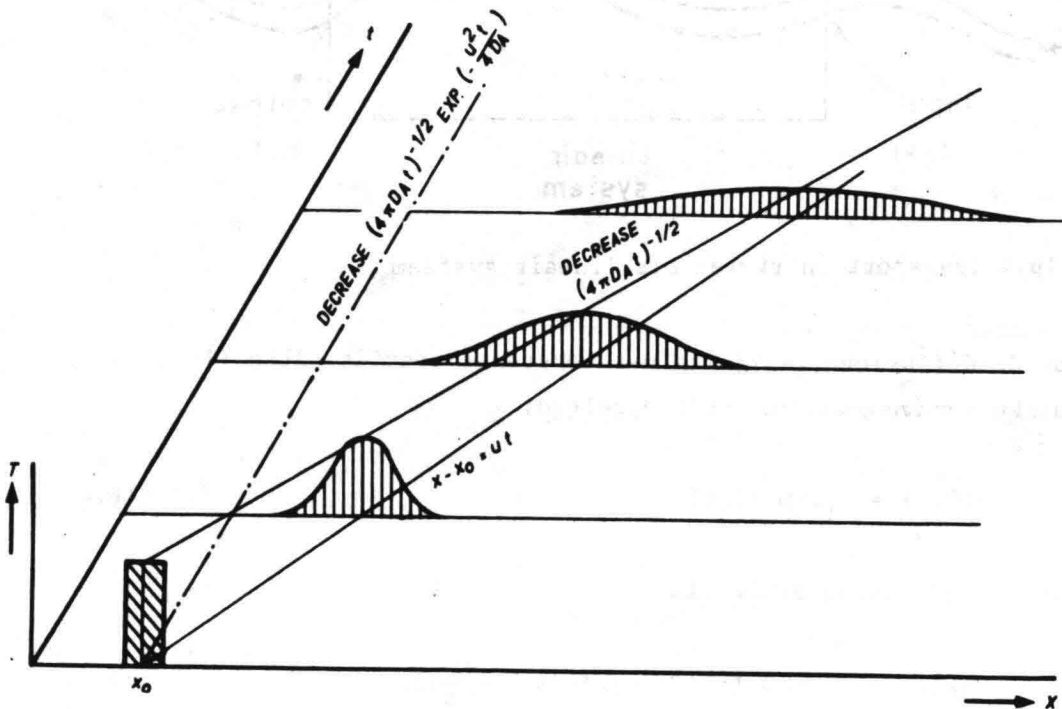


Fig. 16.3. Invloed van beginvoorwaarden voor de diffusievergelijking (soortgelijk voor randvoorwaarden)

16.4. Overdrachtsfunctie

Een andere manier om het gedrag van de diffusievergelijking te bekijken is voorgesteld door Dailey en Harleman (1972) analoog aan Par. 5.3. Lineariseren is hier niet nodig omdat de vergelijking al lineair is. Het proces van diffusie en transport in een riviergedeelte met lengte x kan worden gezien als een lineair systeem (fig. 16.4). Als men een signaal (lees: randvoorwaarde) met frekwentie ω en amplitude c_1 toevoert, dan bepaalt de overdrachtsfunctie wat het uitgangssignaal is (amplitude en fase). Hierbij wordt aangenomen dat de rivier oneindig lang is. Het is te verwachten dat hoge frekwenties sneller gedempt zullen worden dan lage. Als men dus een ingangssignaal met een zeker spectrum heeft, zal het hoogfrequentie deel daarvan afgesneden worden. Dit is o.a. van belang bij de numerieke dimensionering (zie par. 17.2). De analyse wordt hier alleen gegeven voor het geval zonder afbraakterm ($t_r = \infty$).

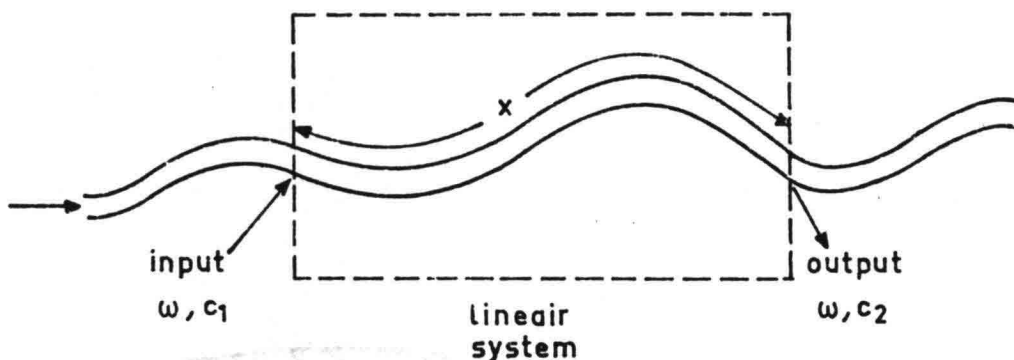


Fig. 16.4 Transport in rivier als lineair systeem

Als aan de diffusievergelijking met constante coëfficiënten (16.3.3) een periodieke randvoorwaarde wordt opgelegd:

$$c(0,t) = c_1 \exp(i\omega t) \quad (16.4.1)$$

dan ziet de oplossing eruit als

$$c(x,t) = c_1 \exp\left(-x/L + i\omega\left(t - \frac{x}{c_r u}\right)\right) \quad (16.4.2)$$

waaring $L = \text{dempingslengte (factor } e^{-1})$

$c_r = \text{relatieve voortplantingssnelheid t.o.v. } u.$

De dempingslengte L kan dimensieloos gemaakt worden als $r = uL/D$.

Zowel r als c_r zijn uitsluitend functies van het getal van Péclet:

$$P = 2\pi u^2 (\omega D)^{-1} \quad (16.4.3)$$

$$c_r = 4 \pi P^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 16 \pi^2 P^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (16.4.4)$$

$$r = 2 \left[\left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 16 \pi^2 P^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{-1} \quad (16.4.5)$$

Dit wordt afgeleid door (16.4.2) in de differentiaalvergelijking in te vullen. Zie fig. 16.5.

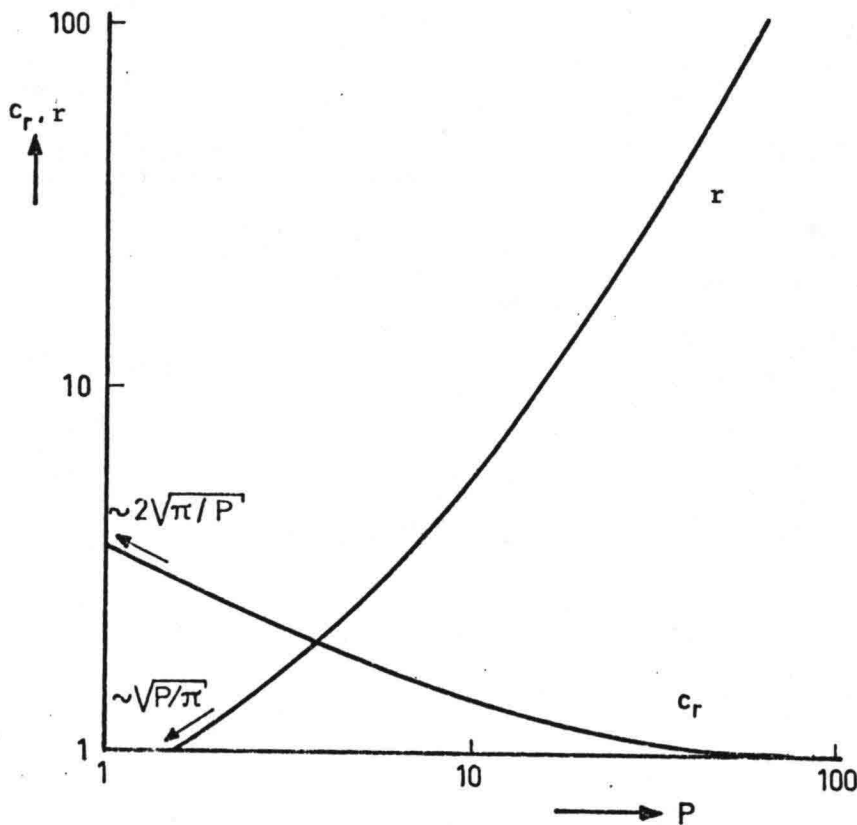


Fig. 16.5 Eigenschappen van overdrachtfunctie voor de convectie-diffusie-vergelijking

Met behulp van de parameters c_r en r kan bepaald worden wat de amplitude van de "golf" op afstand x nog is en wat de faseverschuiving is. In speciale gevallen, bijv. bij diffusie in een getijstrooming, zal het kiezen van de frekwentie wel duidelijk zijn, waarbij echter wel met hogere harmonischen rekening gehouden zal moeten worden. In andere gevallen, bijv. bij een plotselinge lozing (stapfunctie) zullen "alle" frekwenties voorkomen. Uit fig. 16.5. kan dan afgeleid worden welke daarvan na een afstand x nog van belang zijn (de hogere frekwenties worden sneller gedempt). Het significante deel van het spectrum moet dan evt. nauwkeurig numeriek worden weergegeven (par. 17.2).

17. Numerieke methodes voor de diffusievergelijking

17.1. Differentie- en elementenmethode

De diffusievergelijking kan op een soortgelijke manier gediscretiseerd worden als de voorbeelden in par. 7.1. Een voor de hand liggende methode is het expliciete schema (FTCS = forward time, central space differences)

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + u \frac{c_{j+1}^n - c_{j-1}^n}{2\Delta x} - D \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (17.1.1)$$

In tegenstelling tot het hyperbolische geval ($D = 0$) is dit schema wel (zij het voorwaardelijk) stabiel.

Het leap-frog schema is, toegepast op de diffusievergelijking, altijd instabiel (ga dit na). Er wordt nogal eens gebruik gemaakt van het upstream schema ($u > 0$):

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + u \frac{c_j^n - c_{j-1}^n}{\Delta x} - D \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (17.1.2)$$

Verder kan ook hier een soort Crank-Nicholson schema worden toegepast:

$$\begin{aligned} \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + \theta \left[u \frac{c_{j+1}^{n+1} - c_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - D \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] + \\ + (1 - \theta) \left[u \frac{c_{j+1}^n - c_{j-1}^n}{2\Delta x} - D \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (17.1.3)$$

Dit levert een tridiagonaal stelsel differentievergelijkingen, dat bovendien lineair is tenzij de diffusiecoëfficiënt van de concentratie afhangt (16.2.4).

De eindige-elementen methode kan hier ook op een soortgelijke manier worden toegepast als in Par. 7.2. Hoewel in de vergelijking nu een tweede afgeleide voorkomt is het niet beslist noodzakelijk dat de basisfuncties tweemaal differentieerbaar zijn. Dat komt omdat de orde door partiële integratie kan worden teruggebracht:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} v_j dx = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} v_j \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} dx \quad (17.1.4)$$

De eerste term is nul, behalve voor de elementen aan de uiteinden.
Met behulp hiervan ontstaat met de gewogen residuen methode:

$$\sum_{i=1}^n \{a_{ij} \frac{dc_i}{dt} + b_{ij} c_i\} = 0 \quad (17.1.5)$$

waarin

$$a_{ij} = \int_0^L \phi_i(x) v_j(x) dx \quad (17.1.6)$$

$$b_{ij} = \int_0^L \{u \phi_i'(x) v_j(x) + D \phi_i'(x) v_j'(x)\} dx \quad (17.1.7)$$

Nemen we, als voorbeeld, zowel voor ϕ als v weer de driehoekige basisfuncties van fig. 3.3 dan wordt, bij impliciete tijdintegratie, het volgende schema gevonden (voor regelmatig verdeelde steunpunten)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \frac{c_{j+1}^{n+1} - c_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{2}{3} \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{6} \frac{c_{j-1}^{n+1} - c_{j-1}^n}{\Delta t} + \\ & + \theta \left[u \frac{c_{j+1}^{n+1} - c_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - D \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] + \\ & + (1 - \theta) \left[u \frac{c_{j+1}^n - c_{j-1}^n}{2\Delta x} - D \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (17.1.8)$$

Dat komt (uiteraard) overeen met het schema van Stone en Brian (7.2.6).

17.2. Stabiliteit en nauwkeurigheid

Afbreekfout en numerieke diffusie

Het verschijnsel van numerieke diffusie is hier van groot belang omdat er ook al een werkelijke diffusie term is. Voor het expliciete schema (17.1.1) vinden we als "modified equation"

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (17.2.1)$$

Door (17.2.1) weer te differentiëren blijkt dat

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} &= -u \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} + D \frac{\partial^3 c}{\partial x^2 \partial t} + O(\Delta t) = \\ &= +u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - 2uD \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} + D^2 \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} + O(\Delta t)\end{aligned}\quad (17.2.2)$$

Er blijkt dus in (17.2.1) een diffusieterm te komen (waarmee niet gezegd is dat de overige termen van (17.2.2) onbelangrijk zijn) zodat

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} u^2 \Delta t \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \dots \quad (17.2.3)$$

De numerieke diffusiecoëfficiënt is dus

$$D_n = -\frac{1}{2} u^2 \Delta t \quad (17.2.4)$$

Deze is negatief wat op instabiliteit wijst. Zolang $D > D_n$ is er effectief nog een positieve diffusiecoëfficiënt. Het is duidelijk dat enige nauwkeurigheid in de weergave van de diffusieterm alleen bereikt wordt als

$$\frac{D_n}{D} = \frac{u^2 \Delta t}{2D} \ll 1 \quad (17.2.5)$$

wat bij gegeven u en D tot een beperking op Δt leidt.

Ga zelf na wat het upstream schema voor numerieke diffusie heeft en hoe erg dat is.

Stabiliteit

Met behulp van de Von Neumann methode kan de stabiliteit bekeken worden. Voor het expliciete schema (17.1.1) blijkt de amplificatiefactor te zijn:

$$\rho = 1 + \lambda(\cos \xi - 1) - \sigma i \sin \xi \quad (17.2.6)$$

waarin $\sigma = u \Delta t / \Delta x$ Courant getal

$\lambda = 2 D \Delta t / \Delta x^2$ diffusieparameter

$\xi = k \Delta x$

Dit is hetzelfde als (8.5) als α door λ wordt vervangen. De stabiliteitsvoorwaarde wordt dan ook

$$\sigma^2 \leq \lambda \leq 1 \quad (17.2.7)$$

Uit het eerste deel hiervan volgt

$$\frac{u^2 \Delta t}{2D} \leq 1 \quad (17.2.8)$$

(vergelijk met (17.2.5)) dus onafhankelijk van Δx is er al een bovengrens voor Δt . Op soortgelijke wijze kan de stabiliteit van de andere schema's bekeken worden. De stabiliteitsvoorwaarde voor de impliciete schema's blijkt weer te zijn $\theta \geq \frac{1}{2}$.

De voorwaarde $\lambda \leq 1$ is typerend voor diffusievergelijkingen. Deze voorwaarde kan enigszins begrepen worden door te kijken naar de tijd nodig om verspreiding door diffusie over één vak Δx tot stand te brengen. Uit (16.3.4) volgt (het gemakkelijkst door even $u = 0$ te nemen) dat deze tijd van de orde van grootte $t_d = \Delta x^2 / 4D$ is. Het ligt voor de hand dat Δt voor een expliciete methode niet teveel groter mag zijn dan die "mengingstijd" en dat leidt tot een beperking van $\lambda = \Delta t / 2t_d$.

Oscillaties

Ook als een schema stabiel is kunnen er, zelfs in een stationaire toestand, nog ruimtelijke slingeringen voorkomen die fysisch niet reëel zijn. Voor de stationaire toestand bij het schema (17.1.1) geldt bijv.

$$\left(\frac{1}{2} P_{\Delta x} - 1\right) c_{j+1} + 2 c_j + \left(-\frac{1}{2} P_{\Delta x} - 1\right) c_{j-1} = 0 \quad (17.2.9)$$

met $P_{\Delta x} = u\Delta x/D$ "cell Péclet number".

Deze vergelijking heeft oplossingen van de vorm

$$c_j = A r_1^j + B r_2^j \quad (17.2.10)$$

waarin de integratieconstanten A en B volgen uit de randvoorwaarden en $r_{1,2}$ uit invullen in (17.2.9):

$$r_1 = 1 \quad r_2 = \frac{2 + P_{\Delta x}}{2 - P_{\Delta x}} \quad (17.2.11)$$

Het blijkt dat $r_2 < 0$ als $P_{\Delta x} > 2$, en dat geeft een slingerende component in (17.2.10). Om dit te vermijden moet dus $P_{\Delta x} < 2$ zijn. Dit geldt ook voor (17.1.3) en (17.1.8) omdat daarin dezelfde ruimtelijke discretisatie gebruikt wordt. Overigens moet $P_{\Delta x}$ nog aanmerkelijk kleiner zijn om een *naauwkeurige* oplossing te krijgen. Dit geeft dus een beperking voor Δx onafhankelijk van Δt .

Naauwkeurigheid

Op een soortgelijke manier als in hoofdstuk 8 kan een golfvoortplantingsanalyse gedaan worden. De keuze van de maatgevende golflengte volgt òf uit een eventuele herkenbare periodiciteit in het probleem (bijv. bij getijden) òf uit de overdrachtsfunctie die in Par. 16.4 is besproken. Het tijdsverloop waarover de damping bekeken wordt kan hier beter gelijk genomen worden aan de relaxatietijd (fysische damping e^{-1}):

$$t_r = (k^2 D)^{-1} \quad (17.2.12)$$

zodat

$$n_t = \frac{t_r}{\Delta t} = \frac{n_x^2}{2\pi^2 \lambda} \quad (17.2.13)$$

Er spelen nu vier parameters een rol: σ , λ , P (16.4.3) en n_x (aantal punten per golflengte); deze zijn echter niet onafhankelijk:

$$\lambda = 2\sigma n_x P^{-1} \quad (17.2.14)$$

De dampingsfactor d is nu de verhouding tussen de numerieke en fysische damping over een aantal van n_t tijdstappen:

$$d = e^{|\rho|^{n_t}} \quad (17.2.15)$$

terwijl de relatieve voortplantingssnelheid volgt uit

$$c_r = - \frac{n_t \arg \rho}{u k t_r} = - \frac{n_x \arg \rho}{2\pi \sigma} \quad (17.2.16)$$

De uitwerking wordt hier alleen gegeven voor het expliciete schema, in de benadering voor grote n_x

$$d \approx 1 + \sigma^2/\lambda \quad (17.2.17)$$

$$c_r \approx 1 + (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\sigma^2)\xi^2 \quad (17.2.18)$$

zodat voor een nauwkeurigheid ε :

$$\sigma^2/\lambda = \frac{1}{2} u^2 \Delta t/D < \varepsilon \quad (17.2.19)$$

(vergelijk (17.2.5)!)

$$n_x > \left\{ \frac{2\pi^2}{3\varepsilon} |3\lambda - 1 - 2\sigma^2| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (17.2.20)$$

Het resultaat is in Fig. 17.1 gegeven, samen met dat voor het Crank-Nicholson schema (17.1.3) met $\theta = \frac{1}{2}$.

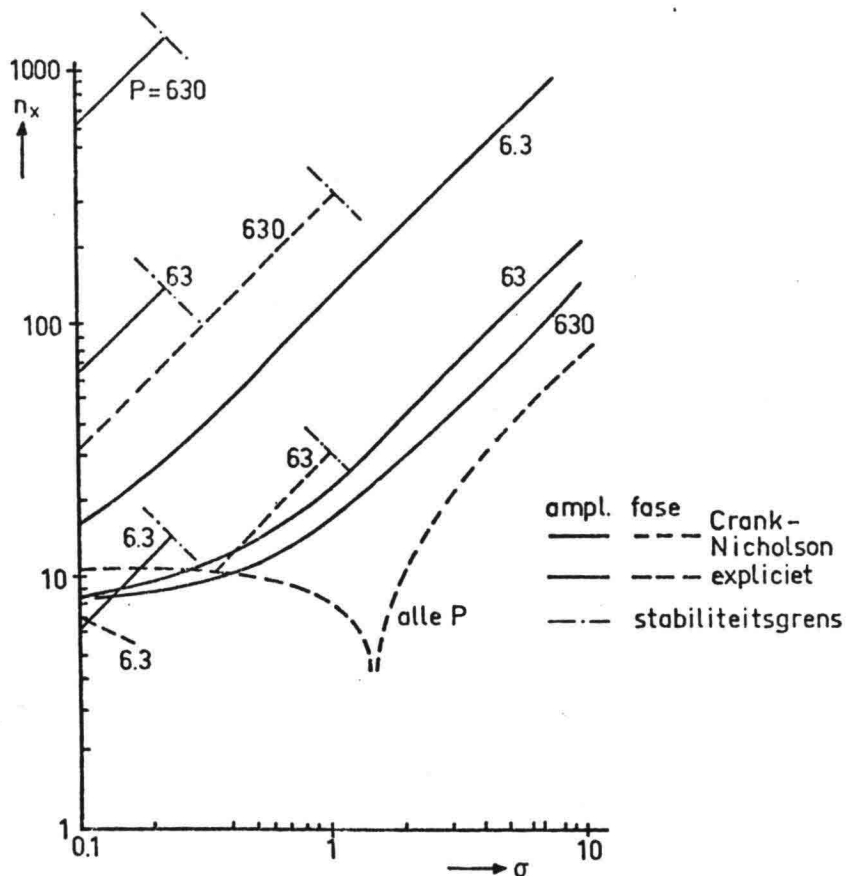


Fig. 17.1. Benodigd aantal punten per golflengte n_x voor de diffusievergelijking bij verschillende waarden van het Pécletgetal P .
Nauwkeurigheid $\varepsilon = 0,05$.

Het blijkt dat het expliciete schema, voornamelijk door de stabiliteitsgrenzen en de voorwaarde (17.2.19) nogal ongunstig uitkomt. Bij hogere nauwkeurigheid wordt dat nog erger (combineer (17.2.14) en (17.2.19)). Als de diffusieberekeningen worden gecombineerd met de waterbeweging moet erop gelet worden dat σ in beide gevallen niet hetzelfde betekent. Hier is de stroomsnelheid u daarin verwerkt; bij de golven is dat de voortplantings-snelheid.

Behoud

Aangezien de diffusievergelijking eigenlijk een continuïteitsvergelijking is, moet er goed op de massabalans gelet worden, met name bij niet-constante coëfficiënten. Gaan we uit van vgl. (16.3.2) dan zal het bij geen enkele numerieke methode lukken om aan de discrete massabalans te voldoen. Uitgaande van de behoudsvorm (16.3.1) is het nog niet vanzelfsprekend. Een gebruikelijke behoudende vorm is

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (Qc - A_s D \frac{\partial c}{\partial x}) \approx \frac{1}{\Delta x} \{ Q_{j+\frac{1}{2}} (c_{j+1} + c_j)/2 - (A_s D)_{j+\frac{1}{2}} (c_{j+1} - c_j)/\Delta x \} + \\ - \frac{1}{\Delta x} \{ Q_{j-\frac{1}{2}} (c_j + c_{j-1})/2 - (A_s D)_{j-\frac{1}{2}} (c_j - c_{j-1})/\Delta x \} \end{aligned} \quad (17.2.21)$$

De grootheden met index $j + \frac{1}{2}$ zullen gewoonlijk geïnterpoleerd moeten worden. De wijze waarop is wat het massabehoud betreft niet van belang, misschien wel wat de verdere nauwkeurigheid betreft. Verder moet nog worden opgemerkt, dat aan de randen gewoonlijk speciale maatregelen nodig zijn om te zorgen dat daar ook aan de massabalans wordt voldaan.

18. Diffusiebenadering voor zoutindringing in een getijrivier

Door Thatcher en Harleman (1972) is de diffusiebenadering toegepast op zoutindringing in een getijrivier onder de veronderstelling dat de stroming van het goed gemengde type is (vgl. hoofdstuk 13). In de bewegingsvergelijking (5.1.2) wordt een extra term opgenomen die de drukgradient tengevolge van dichtheidsverschillen beschrijft. Hierdoor ontstaat een (zwakke) terugkoppeling van de zoutbeweging op de waterbeweging. Voor het zouttransport wordt de diffusievergelijking (16.3.1) gebruikt zonder afbraakterm (zout is een conservatieve stof) en met een diffusiecoefficient volgens (16.2.4). In de geciteerde toepassing wordt D onafhankelijk van x en t genomen.

Als numerieke methodes zijn gehanteerd:

- het leap-frog schema op een "staggered" rooster zowel in plaats als tijd voor de waterbeweging,
- het schema van Stone en Brian voor de diffusievergelijking, met een stapgrootte $2\Delta x$ en tijdstap $2\Delta t$ waarbij de zoutconcentratie in dezelfde punten is gedefinieerd als de waterhoogten.

Als randvoorwaarde voor de zoutconcentratie aan de zee werd gebruikt:

- bij instroming: voorgeschreven concentratie met een "overgangsfunctie" om de sprong bij laagwaterkentering te overbruggen.
- bij uitstroming: in feite $c_{xx} = 0$, zij het in een wat vermomde vorm.

Thatcher en Harleman beschrijven o.a. een toepassing op het Delaware estuarium (fig. 18.1). Het werd geschematiseerd met $\Delta x \approx 3000$ m en $\Delta t \approx 180$ s. Voor het bovenstroomse en benedenstroomse gedeelte zijn enkele parameters in orde van grootte:

	mond	bovenloop
A_s (m^2)	150000	2000
B (m)	25000	300
a (m)	10	10
$\sigma_s = (ga)^{1/2} \Delta t / \Delta x$	0,6	0,6
u (m/s)	0,6	
$\sigma = u \Delta t / \Delta x$	0,03	
D (m^2/s)	1000	10
λ	0,02	2×10^{-4}

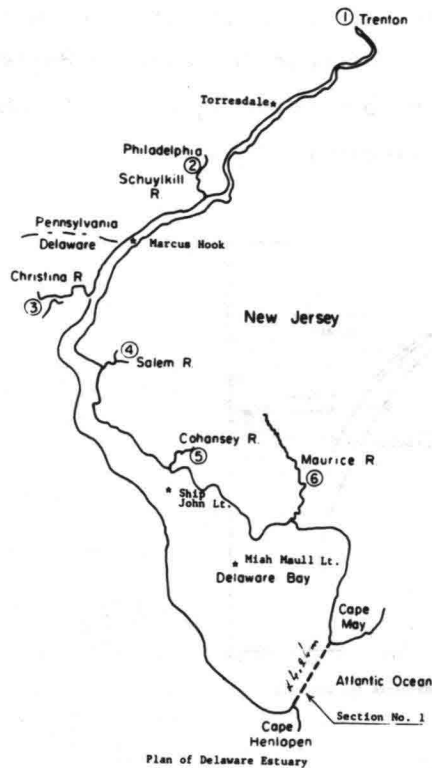


Fig. 18.1. Delaware estuarium, naar Thatcher en Harleman (1972)

Een oppervlakkige ijking van de waterbeweging gaf te zien dat er een voorlopende faseverschuiving in de waterstand optrad, oplopend tot $0,05 \text{ à } 0,07 \times T$ aan het bovenstroomse uiteinde. De demping van de berekende getijgolf was wat te zwak. Beide effecten zijn vermoedelijk aan de schematisering te wijten (bodemruwheid?) maar daar is niet verder naar gezocht. De waarde van Mannings n varieerde van $0,017$ aan de mond tot $0,033$ aan de bovenstroomse kant.

Bij de zoutindringsberekeningen met een periodieke randvoorwaarde werd geconstateerd dat het erg lang duurt voordat een evenwichtstoestand is bereikt: ca. $30 \text{ à } 40$ getijperiodes. Een voorbeeld van de langzame convergentie is gegeven in fig. 18.2. Er werd een andere methode toegepast om de effectieve diffusiecoëfficiënt (of de waarde van k_2 in (16.2.4)) te

vinden die nodig is om gemeten evenwichtstoestanden in een schaalmodel van het estuarium te reproduceren. De gewenste zoutverdeling werd als begintoestand ingevoerd. Dan werden er ca. 10 getijperiodes doorgerekend voor verschillende waarden van k_2 en die waarde van k_2 waarvoor de situatie in evenwicht blijft werd uitgekozen. Aan de hand van deze en dergelijke berekeningen voor andere estuaria wordt door Thatcher en Harleman een empirisch verband gevonden tussen de parameter k_2 en de omstandigheden in het estuarium. Zie daarvoor de originele publikaties.

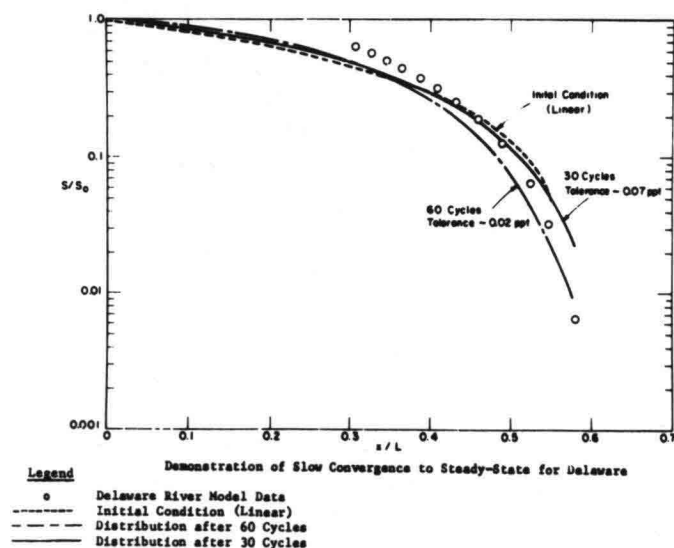


Fig. 18.2. Convergentie van de zoutverdeling in het delaware estuarium (Thatcher en Harleman, 1972).

Als verificatie werd een periode van 107 getijden in 1932 doorgerekend zonder verdere aanpassing van parameters. De gemeten zoutverdeling werd als begintoestand gebruikt. Gemeten zoetwater-afvoer en getijkrommen werden als randvoorwaarden gebruikt. De concentratie van zeewater werd (bij instroming) als randvoorwaarde voor de diffusievergelijking gebruikt. Een serie van 10 getijden vooraf diende om het model in te stellen. De diffusiecoëfficiënt werd uit de bovengenoemde empirische relatie afgeleid op basis van de gegevens van de voorafgaande (berekende) getijperiode. Het resultaat kon worden vergeleken met gemeten zoutconcentraties tijdens de hoogwaterkentering (fig. 18.3). Het blijkt dat de variaties redelijk goed maar niet exakt gevolgd worden. In feite is de zoutverdeling in dit geval nooit in evenwicht tengevolge van de grote insteltijd van zo'n evenwicht.

19. Hoogwatergolven

Zoals in Par. 5.3. besproken kan de voortplanting van een hoogwatergolf in bepaalde omstandigheden beschreven worden door een diffusievergelijking. Die omstandigheden hangen af van het Froude getal F en de wrijvingsparameter K . Aan de hand van de voortplantingssnelheid en dempingslengte zijn de grenzen zelfs kwantitatief af te schatten (Grijzen en Vreugdenhil, 1976). De benadering komt erop neer dat de versnellingstermen in de impulsvergelijking (5.1.2) verwaarloosd worden; dan blijft over

$$Q = A_s C \left\{ R(i_b - \frac{\partial a}{\partial x}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (19.1)$$

Samen met de continuïteitsvergelijking (5.1.1) geeft dit een vergelijking met een diffusiekarakter:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} - D \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0 \quad (19.2)$$

met
$$c = \frac{1}{B} (i_b - \frac{\partial a}{\partial x})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} (A_s C R^{\frac{1}{2}}) \quad (19.3)$$

$$D = \frac{A_s C R^{\frac{1}{2}}}{2B} (i_b - \frac{\partial a}{\partial x})^{-\frac{1}{2}} \quad (19.4)$$

Let op dat (19.2) *niet* in conservatieve vorm staat, zodat een numerieke uitwerking niet aan de globale massabalans zal voldoen (hoe zou een conservatieve vorm eruit zien?).

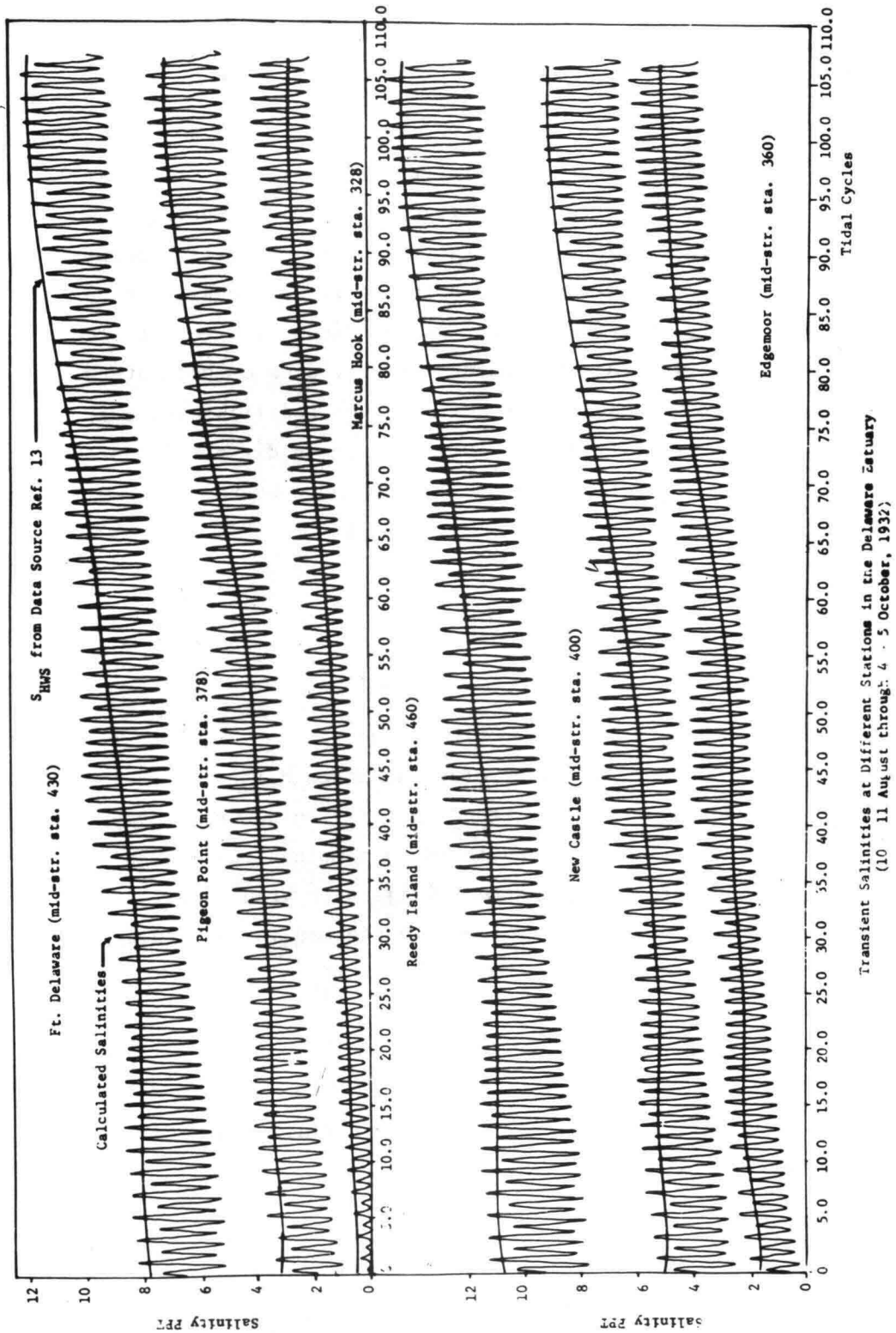


Fig. 18.3 Verificatie van het Delaware model onder niet-stationaire omstandigheden

Men zou nu op (19.2) allerlei numerieke methodes kunnen toepassen. Het is echter wenselijk, ook in dit geval de volledige dynamische vergelijkingen te gebruiken, zodat eventuele snelle verschijnselen, die niet door de diffusiebenadering worden beschreven, ook worden opgevangen. Wat gebeurt er nu met een numerieke methode voor de dynamische vergelijkingen voor het geval dat de diffusiebenadering van toepassing is? Voor (bijv.) de Crank-Nicholson methode wordt dan de gediscretiseerde impulsvergelijking bij benadering

$$gA_{s_j} (a_{j+1} - a_{j-1})/2\Delta x - gA_{s_j} i_b + \{gQ|Q|/C^2RA_s\}_j = 0 \quad (19.5)$$

op ieder tijdniveau n . Hieruit kan Q worden opgelost en ingevuld in de continuïteitsvergelijking:

$$\begin{aligned} & \frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{\theta}{\Delta x} \{A_{s_{j+1}} C_{j+1} R_{j+1}^{\frac{1}{2}} (i_b - \frac{a_{j+2} - a_j}{2\Delta x})^{\frac{1}{2}} + \\ & - A_{s_{j-1}} C_{j-1} R_{j-1}^{\frac{1}{2}} (i_b - \frac{a_j - a_{j-2}}{2\Delta x})^{\frac{1}{2}}\}^{n+1} + \frac{1-\theta}{\Delta x} \{\text{idem}\}^n = 0 \end{aligned} \quad (19.6)$$

Vergelijking met (19.2) laat zien dat dit eigenlijk een discretisatie van de diffusievergelijking is, zij het met de dubbele stapgrootte $2\Delta x$.

We zien dus dat een diffusiemethode, toegepast op de dynamische vergelijkingen, leidt tot een soortgelijke methode voor de diffusievergelijking. De versnellingstermen kunnen best in de impulsvergelijking blijven staan,

want die worden vanzelf wel klein als de waarden van F en K daartoe aanleiding geven. Het enige bezwaar is dat de karakteristieke voortplantings-snelheid (5.1.3) dan ook van kracht blijft, en daarmee (voor expliciete methodes) het CFL stabiliteitscriterium. Daarom is het gebruik van expliciete methodes in dit geval niet handig. Bij gebruik van een impliciete methode wordt het hele gebied van dynamische golven en diffusie benadering bestreken en de stapgroottes kunnen gekozen worden zodanig dat de gewenste nauwkeurigheid wordt bereikt. We krijgen dus het volgende overzicht (σ_s is nu het Courant getal gebaseerd op de karakteristieke voortplantings-snelheid).

	stabiliteit	nauwk. diffusie
expliciet	$\sigma_s < 1 \rightarrow$	(dus $\sigma \approx 0,1$)
impliciet	(dus $\sigma_s \approx 100$)	$\leftarrow \sigma \approx 10$

Het grote voordeel van een impliciete methode is dus dat we niet gehinderd worden door stabiliteitscriteria voor golven die eigenlijk helemaal niet van belang zijn. Verder is het op deze manier mogelijk in één in hetzelfde riviermodel zowel "snelle" (dynamische) als langzame golven te berekenen zonder dat daarbij op een andere numerieke methode hoeft te worden overgegaan.

Voorbeeld

Als voorbeeld van een toepassing van de dynamische vergelijkingen op hoogwatergolven nemen we een schematische rivier, waarbij het effect van verschillende soorten berging vergeleken wordt (Vreugdenhil en Van Zanten, 1973). Er is gebruik gemaakt van het Crank-Nicholson schema met $\theta = 0,55$. De dimensies van de rivier zijn de volgende:

lengte		500 km
breedte	B_s	200 m
bodemhelling	i_b	$1,087 \times 10^{-4}$
bodemruwheid	k	0,09 m
basisafvoer	Q_o	800 m ³ /s

Een hoogwatergolf met een topafvoer van $2500 \text{ m}^2/\text{s}$ is aan de rand ingevoerd, met een "periode" in de orde van $T = 200$ uur. De stapgrootten zijn $\Delta x = 5 \text{ km}$, $\Delta t = 1$ uur. Enkele afgeleide grootheden zijn

parameter	$Q = 800 \text{ m}^3/\text{s}$	$Q = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$
c (m/s)	1,5	3
D (m^2/s)	$1,8 \times 10^4$	$3,6 \times 10^4$
$P = Tc^2D^{-1}$	90	180
c_r	1,01	1,002
r	210	826
F	0,16	0,32
K	700	1400
σ	1,1	2,2
σ_s	4,5	4,5
λ	5	10

Op grond van de waarden van F en K behoort de golf duidelijk tot het kinematische of diffusietype. De golflengte is ongeveer $L = cT \approx 1000 \text{ à } 2000 \text{ km}$. De relaxatietijd (17.2.12) is dus $t_r \approx 400 \text{ h}$. Over de lengte van het model loopt de golf slechts ca. 100 h . De dempingsfactor is $d \approx 0,95 \text{ à } 0,98$ dus de demping over de looptijd van $0,25 t_r$ is $d^{0,25} \approx 0,994 \text{ à } 0,988$. De relatieve voortplantingssnelheid is volgens fig. 17.1 $c_r \approx 0,999$

Er zijn vier gevallen bekeken:

A1: uniforme rivier zonder uiterwaarden (fig. 19.1)

A2: idem met uiterwaarden (fig. 19.1)

B1: als A1 maar met een reservoir op 50 km vanaf de bovenstroomse rand (fig. 19.2)

B2: als A2 met een reservoir (fig. 19.3)

Het reservoir leidt tot het "afsnijden" van de top van de golf. De geborgen hoeveelheid water komt later weer vrij waardoor de golflengte in feite groter wordt en de demping zwakker (fig. 19.4). Dit geldt in beide gevallen. De invloed van de uiterwaarden (verlaging van de voortplantingssnelheid, sterkere demping) is duidelijk te zien. Verder benedenstrooms blijkt dat het reservoir geen of een averechts effect heeft (fig. 19.4).

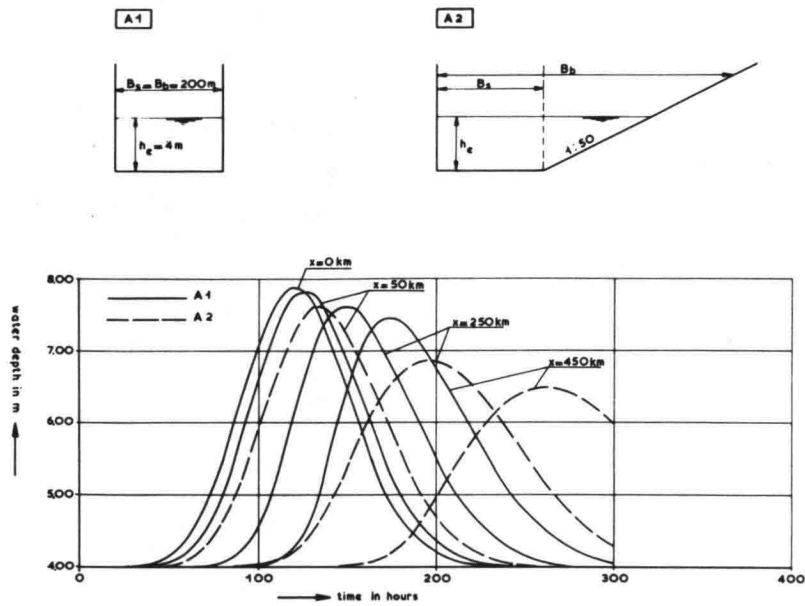


Fig. 19.1 Uniforme rivier met of zonder uiterwaarden

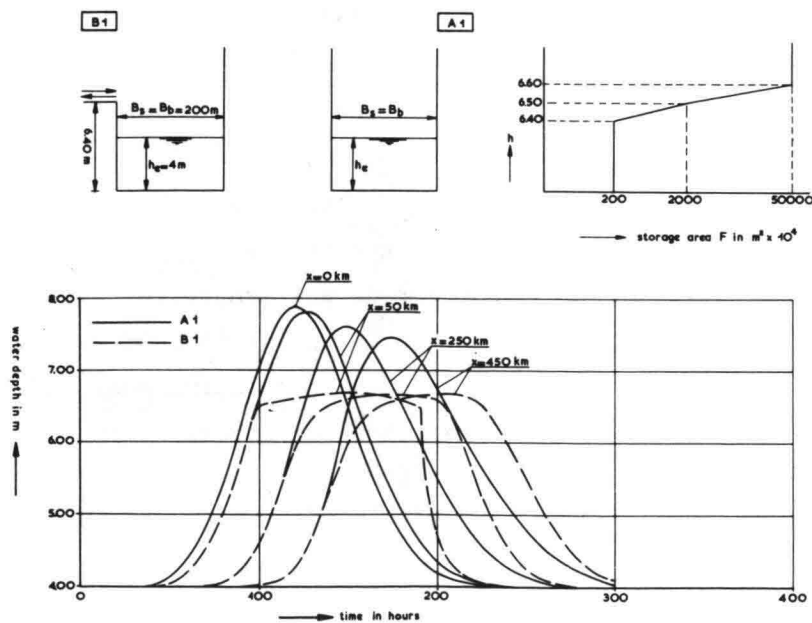


Fig. 19.2 Uniforme rivier met of zonder reservoir

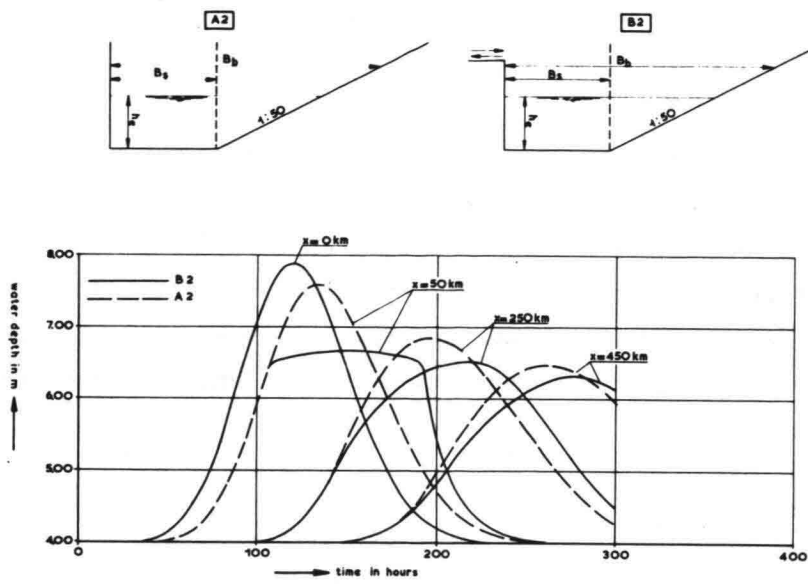


Fig. 19.3 Rivier met uiterwaarden met of zonder reservoir

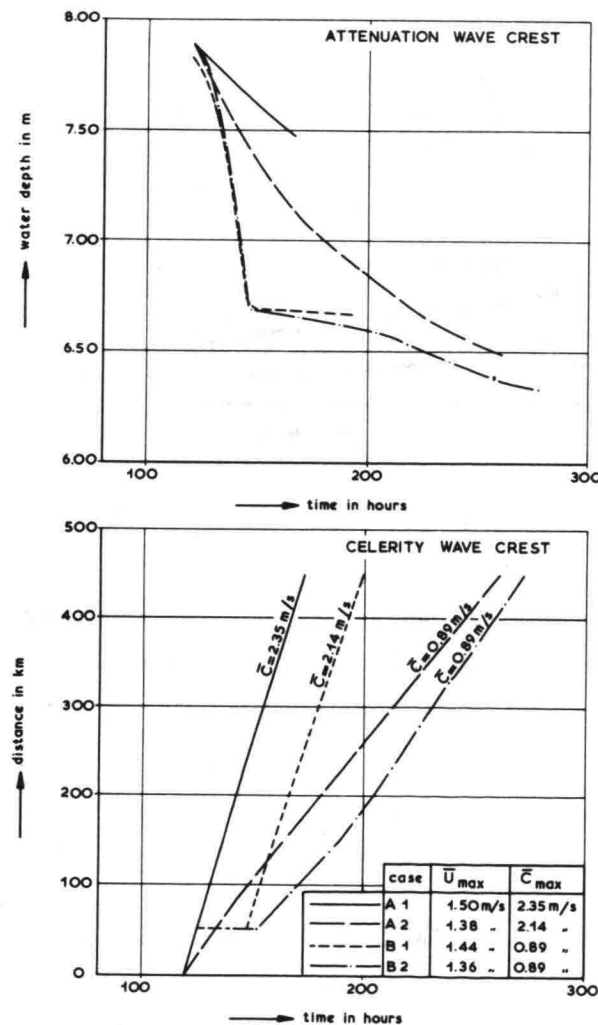


Fig. 19.4 Damping en voortplanting van de golf.

20. Kustlijnen

Door Pelnard-Considère (1957) is een globale methode aangegeven om kustlijnveranderingen te berekenen. Er wordt verondersteld dat het dwarsprofiel van het strand in evenwicht is en blijft. Bij aangroei of teruggang van de kust verschuift het strandprofiel dus evenwijdig. Dit betekent tevens dat het dwarstransport loodrecht op de kust nul is. De kustlijnveranderingen worden uitsluitend veroorzaakt door variaties in het langstransport (fig. 20.1).

$$a \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (20.1)$$

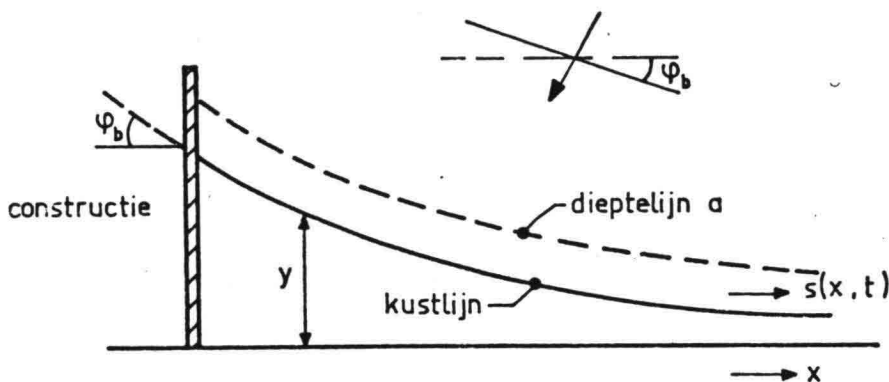


Fig. 20.1 Definities kustlijnberekeningen

Het langstransport vindt plaats onder invloed van golven die onder een hoek ϕ_b met de x-as invallen (eventueel na refractie). Het kwantitatieve verband tussen sedimenttransport en de golfeigenschappen wordt gewoonlijk gelegd door de CERC formule:

$$s = E \sin 2 \phi \quad (20.2)$$

waarin ϕ de hoek tussen de golfkam en de plaatselijke kustlijn is, dus bij benadering

$$\phi = \phi_b - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (20.3)$$

E bevat informatie over de golfhoogte en refractie-coëfficiënt. Uit een combinatie van (20.1) ... (20.3) volgt een diffusievergelijking:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (2 E \phi_b / a) \quad (20.4)$$

met $D = 2 E/a$. Voor $x \rightarrow \infty$ is $S_\infty \approx 2 E \phi_b$. Nemen we verder aan dat E constant is, dan volgt

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (20.5)$$

$$\text{met } D = S_\infty (\phi_b a)^{-1} \quad (20.6)$$

De begin- en randvoorwaarden hangen van het te onderzoeken geval af. In het geval van fig. 20.1 wordt de kustontwikkeling bekeken na de bouw van een havendam. De rand- en beginvoorwaarden zijn dan:

$$t = 0: y = 0 \quad (20.7)$$

$$x = 0: s = 0 \quad \text{dus} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \phi_b \quad (20.8)$$

$$x \rightarrow \infty: y \rightarrow 0 \quad (20.9)$$

Met behulp van Laplace transformaties is (20.6) ... (20.9) analytisch op te lossen:

$$y = \pi^{-\frac{1}{2}} \phi_b \{ (4Dt)^{\frac{1}{2}} e^{-u^2} - x \pi^{\frac{1}{2}} \text{erfc}(u) \} \quad (20.10)$$

met $u = x(4Dt)^{-\frac{1}{2}}$.

De complementaire errorfunctie $\text{erfc}(u)$ is gedefinieerd als

$$\text{erfc}(u) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_u^\infty e^{-\xi^2} d\xi \quad (20.11)$$

Er bestaan tabellen van. De oplossing (20.10) geldt slechts tot het moment dat de kustlijn het uiteinde van de golfbreker bereikt. Daarna verandert de randvoorwaarde (20.8) in $y = \text{const}$. Het zandtransport dat voor de golfbreker langs gaat kan dan berekend worden. Dit wordt hier niet uitgewerkt.

Voorbeeld

Door Nedeco (1978) is de kustontwikkeling bij de haven van Lomé in Togo bekeken op basis van de bovenstaande theorie. Aan de hand van waarnemingen kan de juistheid van de theorie bevestigd worden. De golfbreker, gebouwd in 1964, werd geschematiseerd als een golfbreker loodrecht op de oorspronkelijke kustlijn met een equivalente lengte van 777 m. Uit luchtfoto's en refractieberekeningen volgde een hoek van golfinval $\phi_b \approx 0,2$ (rad). Uit diverse waarnemingen en berekeningen volgden schattingen voor het evenwichts-transport S_∞ tussen 1×10^6 en $1,8 \times 10^6$ m³/jaar; een gemiddelde van $1,5 \times 10^6$ m³/jaar is aangehouden. De diepte a in het kustgebied was ca. 18 m. Op grond van deze gegevens volgt $D \approx 0,42 \times 10^6$ m²/jaar. De tijd waarin de kustlijn de (effectieve) top van de golfbreker bereikt wordt hiermee ca. 29 jaar. Dit getal is uiteraard nogal afhankelijk van de verschillende veronderstellingen. In fig. 20.2 is de theoretische kustlijnontwikkeling vergeleken met waarnemingen in 1969, 1973, 1975. Daaruit blijkt dat er een redelijke overeenkomst bestaat. Een meer gedetailleerde berekening op basis van (20.4) kan numeriek worden uitgevoerd. Het is echter niet zeker dat de resultaten daarvan meer betrouwbaar zijn gezien de onzekerheid in de gegevens.

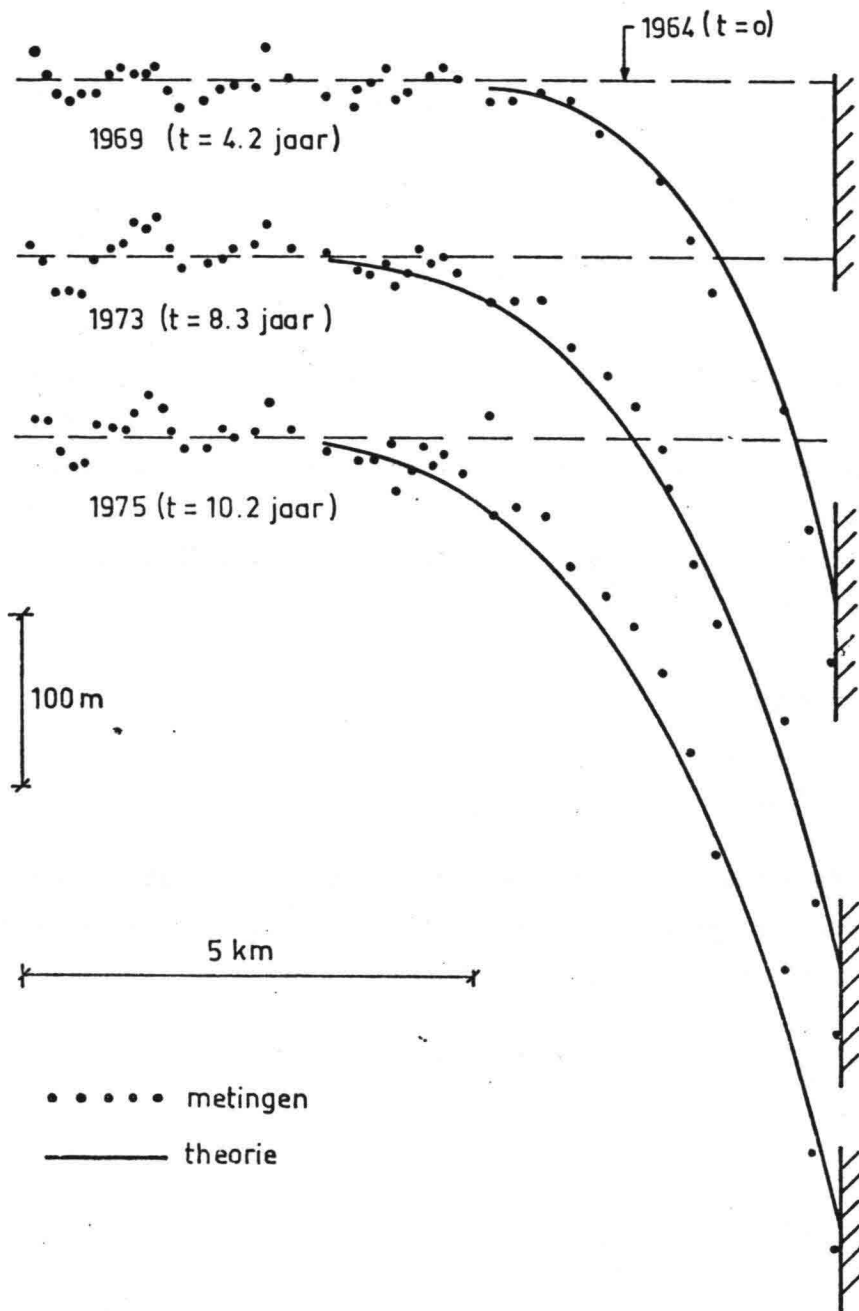


Fig. 20.2 Kustlijnonwikkeling bij de haven van Lomé (Nedeco, 1978)

21. Potentiaalstroming

21.1. Potentiaalvergelijking en verwante problemen

Potentiaalstroming komt bij "open" waterstroming niet veel voor aangezien de voorwaarden (de belangrijkste is dat de vloeistof wrijvingsloos is) niet vervuld worden. Bij korte golven wordt potentiaalstroming wel als eerste benadering gehanteerd. Bij stroming om vliegtuigen, schepen of voertuigen kan potentiaalstroming vaker als benadering gebruikt worden voorzover het een beweging in een stilstaande vloeistof betreft. Een ander belangrijk voorbeeld is de stroming van grondwater in een poreus medium waar de wet van Darcy geldt (bijv. Verruyt, 1970):

$$u = -k \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (21.1.1)$$

$$v = -k \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

waarin u en v de afvoercomponenten per eenheid van oppervlak zijn, k de doorlatendheidscoëfficiënt en ϕ de stijghoogte. Als de vloeistof onsamendrukbaar is en het korrelskelet star is de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (21.1.2)$$

of

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (21.1.3)$$

Als k onafhankelijk van x en y is ontstaat de potentiaal-(Laplace-)vergelijking

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (21.1.4)$$

Een en ander kan uiteraard ook in drie dimensies worden geformuleerd.

De potentiaalvergelijking is van het elliptische type (zie hoofdstuk 4). Vergelijkingen van dit type komen ook vaak voor wanneer men de evenwichtstoestand bekijkt die behoort bij parabolische of hyperbolische problemen. Zo volgt uit de 2-dimensionale diffusievergelijking voor een stationaire toestand

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad (21.1.5)$$

De lagere-orde termen hebben geen invloed op het elliptische karakter van de vergelijking (ga dit na).

Voor een stationaire twee-dimensionale stroming kan algemeen een stroomfunctie ψ worden ingevoerd:

$$au = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad av = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (21.1.6)$$

zodat exakt aan de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial x} (au) + \frac{\partial}{\partial y} (av) = 0 \quad (21.1.7)$$

wordt voldaan. Definieer de wervelsterkte (vorticititeit, rotatie) ω als

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (21.1.8)$$

dan volgt uit (21.1.6) en (21.1.8):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \omega \quad (21.1.9)$$

Uit deze zg. Poissonvergelijking kan bij bekende ω de stroomfunctie (en daarmee het snelheidsveld) worden berekend. De bepaling van ω moet gebeuren op grond van de impulsvergelijkingen. Bij "echte" potentiaalstroming geldt $\omega = 0$, maar ook bij $\omega \neq 0$ ontstaan kennelijk elliptische vergelijkingen.

Het feit dat een elliptisch probleem vaak een eindtoestand is van een hyperbolisch of parabolisch probleem wordt op grote schaal gehanteerd bij de numerieke oplossingstechnieken. Vele methodes zijn er bewust of onbewust op gebaseerd (zie hierover verder Lomax et al., 1975).

21.2. Eigenschappen en randvoorwaarden

De eigenschappen van elliptische vergelijkingen kunnen het best geïllustreerd worden aan de hand van de Laplace-vergelijking (21.1.4). Er bestaan elementaire oplossingen van de vorm

$$\phi = \phi_1 \ln (r/r_0) \quad (21.2.1)$$

waarin ϕ_1 en r_0 constanten zijn en

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad (21.2.2)$$

Dat (21.2.1) voldoet blijkt door invullen. Alleen in het punt (x_0, y_0) voldoet de uitdrukking niet aan de vergelijking, daar wordt ϕ oneindig. Dit is een "bron"oplossing waarbij in (x_0, y_0) een vloeistofstroom wordt toegevoerd die zich radiaal verspreidt (fig. 21.1).

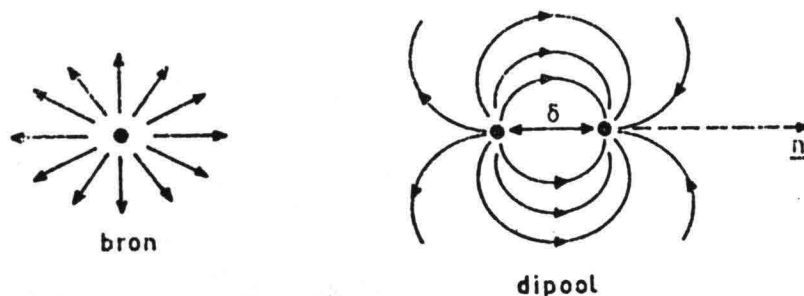


Fig. 21.1 Bron en dipool; stroomlijnen

Uit twee bronnen met gelijke maar tegengestelde sterkte ϕ_1 op een afstand δ ontstaat een dipool als $\delta \rightarrow 0$ met $\phi_1 \delta = \phi_2$ constant (fig. 21.1). De netto massastroom is in dat geval nul. De potentiaal behorend bij een dipool is

$$\phi = \phi_2 \frac{\underline{n} \cdot \underline{r}}{r^2} \quad (21.2.3)$$

waarbij $\underline{n}$ de asrichting van de dipool is en ϕ_2 de sterkte.

In drie dimensies wordt het equivalent van (21.2.1):

$$\phi = \frac{\phi_1}{r} \quad (21.2.4)$$

Een belangrijk kenmerk van (21.2.1) en (21.2.4) is dat de invloed zich over het *hele gebied* uitstrekt, anders dan bij hyperbolische en parabolische problemen. Ook de randpunten hebben hun invloed over het hele gebied; omgekeerd wordt de oplossing in een punt bepaald door de randvoorwaarden aan de hele rand. Voor meer theorie zie bijv. Lamb, 1932, Garabedian, 1964.

Aangezien de Laplace vergelijking van de tweede orde is kan men verwachten dat er in iedere richting twee randvoorwaarden nodig zijn. In dit geval moet er aan weerszijden één worden opgelegd, d.w.z. één in ieder punt van de rand van een gesloten gebied (2-d) of van het oppervlak van een gesloten volume (3-d). Als beide voorwaarden aan één kant zouden worden opgelegd zou een instabiele oplossing ontstaan (voor een voorbeeld zie Garabedian, 1964).

21.3. Bronbeleggingen

Als we er nu in zouden slagen om met behulp van bronnen of dipolen op de rand (zodat in het hele gebied aan de vergelijking wordt voldaan) een zodanige uitdrukking te vinden dat ook aan de randvoorwaarden is voldaan, dan hebben we kennelijk de oplossing van het probleem geconstrueerd. Zo is de potentiaal behorend bij een *dipoolbelegging* met sterkte $\mu(s)$ op de rand S (met de as loodrecht op de rand)

$$\phi_p = \frac{1}{\pi} \int_S \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{r}{r_o} ds \quad (21.3.1)$$

in het twee-dimensionale geval; r is de afstand tussen het randpunt en het punt P waar ϕ berekend wordt. Als het punt P naar de rand toe gaat blijkt de limiet op te leveren:

$$\lim \phi_p = \mu_p + \frac{1}{\pi} \int_S \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{r}{r_o} ds \quad (21.3.2)$$

De bijdrage μ_p ontstaat doordat de integrand singulier is voor $r = 0$. Als nu de randvoorwaarde voor ϕ luidt

$$\phi(s) = f(s) \quad \text{op} \quad S \quad (21.3.3)$$

dan volgt uit (21.3.2) voor P op S :

$$\mu_p + \frac{1}{\pi} \int_S \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{r}{r_o} ds = f_p \quad (21.3.4)$$

waarin r nu de afstand is tussen het punt P op de rand en een variabel punt op de rand. Vgl. (21.3.4) is een integraalvergelijking voor $\mu(s)$. Als $\mu(s)$ hieruit opgelost is, is de potentiaal (21.3.1) eveneens te berekenen. Deze methode kan worden toegepast als de elementaire oplossingen, behorend bij bronnen of dipolen, bekend zijn. Voor meer ingewikkelde vergelijkingen is dat vaak niet het geval.

Een voorbeeld voor het speciale geval van een cirkelvormig gebied (fig. 21.2) leidt tot het resultaat

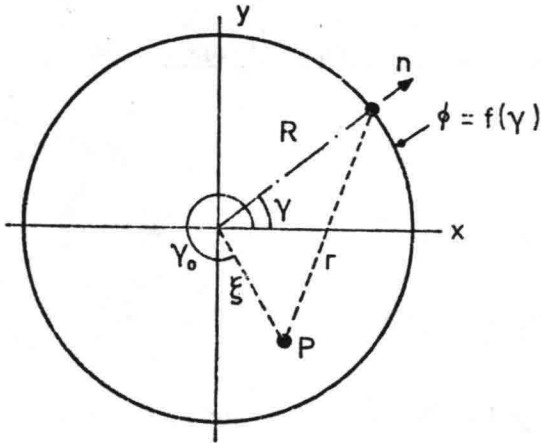


Fig. 21.2 Voorbeeld potentiaal bij dipoolbelegging

$$\phi_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2 - 2\eta \cos(\gamma_0 - \gamma)} f(\gamma) d\gamma \quad (21.3.5)$$

met $\eta = \xi/R$. De invloed van een deel van de rand volgt door te stellen

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= f & -\delta < \gamma < \delta \\ &0 & \text{elders} \end{aligned} \quad (21.3.6)$$

Het resultaat van (21.3.5) is voor dat geval getekend in fig. 21.3.

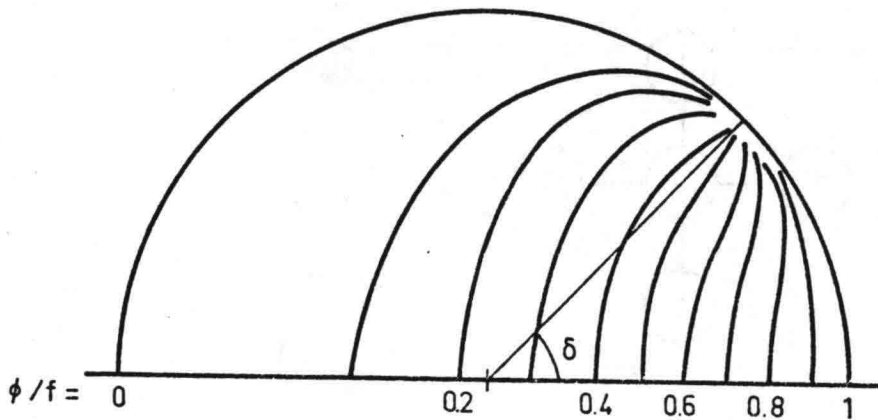


Fig. 21.3 Invloed van opgelegde potentiaal op een deel van de rand.

22. Numerieke oplossing van elliptische vergelijkingen

22.1. Differentiemethodes

Als voorbeeld nemen we de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (22.1.1)$$

waarin α een functie van x en y is. De vergelijking is lineair. Voor constante α ontstaat de Poissonvergelijking. Op een rand S is in ieder punt een randvoorwaarde gegeven, hetzij u of $\frac{\partial u}{\partial n}$ of een combinatie van beiden. Vgl. (22.1.1) kan weer op allerlei manieren in differentievorm geschreven worden. Een van de meest gebruikelijke vormen is

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left\{ \alpha_{k+\frac{1}{2},j} \frac{u_{k+1,j} - u_{k,j}}{\Delta x} - \alpha_{k-\frac{1}{2},j} \frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{\Delta x} \right\} + \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left\{ \alpha_{k,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\Delta y} - \alpha_{k,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{k,j} - u_{k,j-1}}{\Delta y} \right\} = f_{k,j} \end{aligned} \quad (22.1.2)$$

De afbreekfout is van de 2e orde (nagaan). Voor het geval van constante α en $\Delta x = \Delta y$ ontstaat (fig. 22.1)

$$u_{k+1,j} + u_{k-1,j} + u_{k,j+1} + u_{k,j-1} - 4u_{k,j} = \frac{\Delta x^2}{\alpha} f_{k,j} \quad (22.1.3)$$

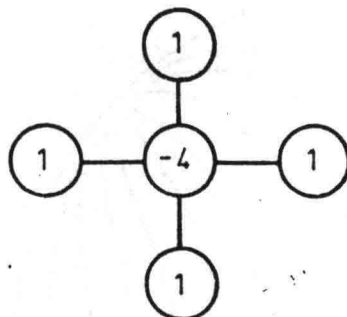


Fig. 22.1 5-punts schema voor de Poisson vergelijking.

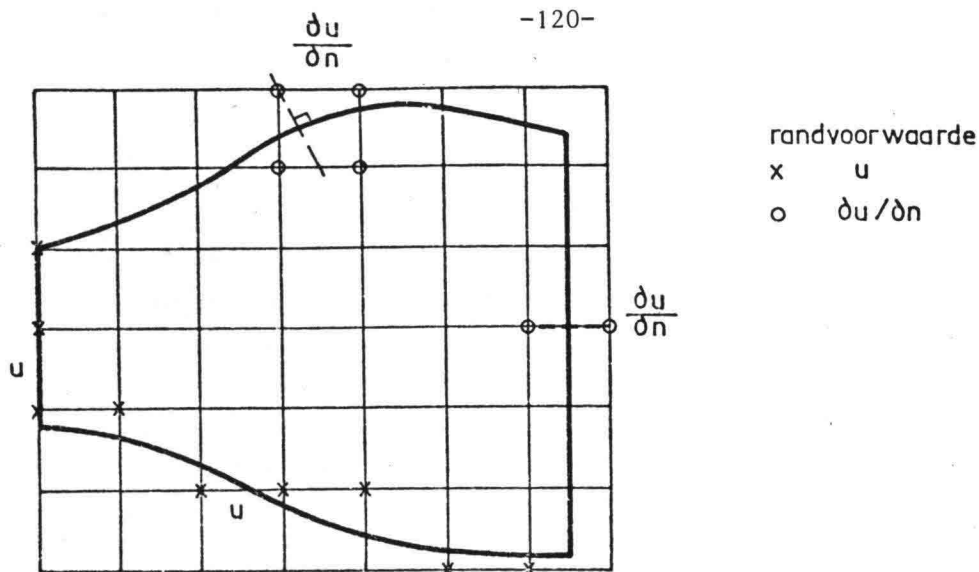


Fig. 22.2 Schematisering gebied in rechthoekig rooster

22.2. Eindige elementen methodes

De elliptische vergelijking (22.1.1) met *homogene* randvoorwaarden ($u = 0$ op de rand) is gelijkwaardig met het minimaliseren van (zie bijv. Courant en Hilbert, 1962)

$$J = \iint \left\{ \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + uf \right\} dx dy \quad (22.2.1)$$

Als de gegeven randvoorwaarden niet homogeen zijn ($u = g$ op de rand) kan men een functie u_0 zoeken die op de rand de waarde g aanneemt maar die niet aan de differentiaalvergelijking hoeft te voldoen. Dan ontstaat een aangepast stelsel

$$u' = u - u_0 \quad (22.2.2)$$

met

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = f' \quad (22.2.3)$$

$$u' = 0 \quad \text{op de rand} \quad (22.2.4)$$

$$f' = f - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (22.2.5)$$

en dat is weer in de vorm (22.2.1) te brengen. Overigens bestaat er niet bij alle differentiaalvergelijkingen zo'n variatieprincipe. In dat geval kan de gewogen-residuen methode worden toegepast. Het minimum van (22.2.1) kan benaderd worden door te stellen

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^n u_k \phi_k(x,y) \quad (22.2.6)$$

Dan wordt

$$J(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{kj} u_k u_j + \sum_{k=1}^n b_k u_k \quad (22.2.7)$$

waarin

$$a_{kj} = \iint \alpha \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (22.2.8)$$

$$b_k = \iint f \phi_k dx dy \quad (22.2.9)$$

Het minimum van J wordt op de gebruikelijke manier gevonden door differentiëren naar u_m :

$$\sum_{k=1}^n a_{km} u_k + b_m = 0 \quad (m = 1, \dots, n) \quad (22.2.10)$$

waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat $a_{km} = a_{mk}$. Het lineaire stelsel (22.2.10) kan op een standaard manier opgelost worden (zie par. 15.4).

Bij de eindige elementen methode wordt een gebied verdeeld in een aantal elementen van eenvoudige vorm (bijv. driehoeken, fig. 22.3) en er worden interpolatiefuncties ϕ_k gekozen die slechts op een beperkt gebied ongelijk aan nul zijn (bijv. lineaire functies, fig. 22.3). Er zijn natuurlijk nog vele andere mogelijkheden (zie bijv. college a108 of handboeken).

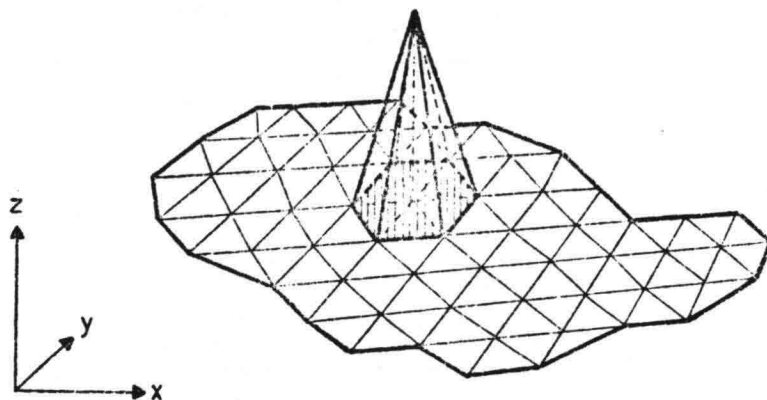


Fig. 22.3. Driehoekige elementen met lineaire interpolatiefunctie.

Om te zien tot welke "moleculen" dit leidt nemen we een regelmatig rooster met driehoekige elementen en lineaire interpolatiefuncties. Een punt heeft dan contact met 6 omliggende punten (d.w.z. die punten geven bijdragen ongelijk nul aan de coëfficiënten a_{km}). Voor dit geval kunnen de waarden van a_{km} gemakkelijk berekend worden; het resultaat is in fig. 22.4 aangegeven en dit blijkt samen te vallen met de differentiemethode van par. 22.1. In het voorbeeld is $\alpha = 1$ gekozen. In het algemeen zullen de bijdragen in de diagonaalpunten niet nul worden. Hieruit valt af te leiden dat deze elementenmethode ongeveer even nauwkeurig zal zijn als de differentiemethode van par. 22.1; echter zijn er nu twee voordelen: (a) de vorm van het gebied kan veel beter worden weergegeven en (b) de randvoorwaarden worden automatisch meegenomen. Het laatste punt wordt echter verzwakt als er gemengde randvoorwaarden zijn of als er geen variatieprincipe bestaat.

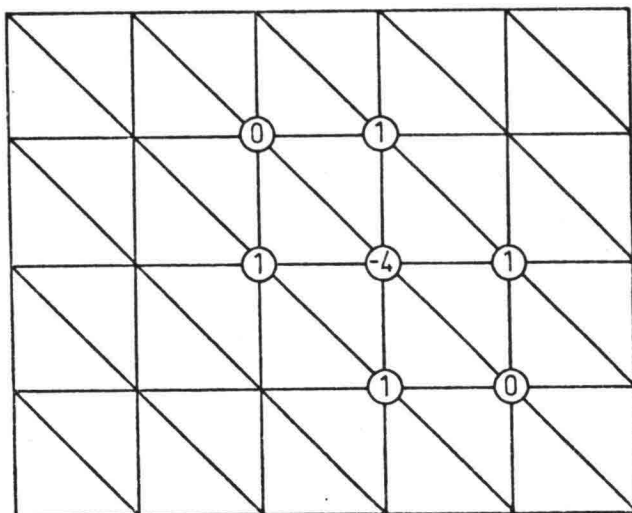


Fig. 22.4. "Differentiemolecuul" bij regelmatige elementenverdeling

Aangezien ieder knooppunt bij een elementenmethode slechts contact heeft met zijn naaste burens, ontstaat er ook een matrix met een bandstructuur als in par. 22.1. De bandbreedte zal echter variabel zijn omdat het aantal punten per "rij" niet constant hoeft te zijn. De nummering van de knooppunten is hierbij van belang.

De berekening van de integralen (22.2.8) en (22.2.9) kan tamelijk ver ge-automatiseerd worden. Er bestaan diverse programma's of subroutine-pakketten die de standaardbewerkingen van een eindige-elementen probleem voor hun rekening nemen, zoals:

- (i) het berekenen van de integralen
- (ii) het samenstellen van de bijdragen per knooppunt
- (iii) de nummering
- (iv) de oplossing van de lineaire vergelijkingen
- (v) de weergave van de resultaten.

Veel van dergelijke pakketten (zoals NASTRAN en ICES-STRUDEL) zijn nogal sterk gericht op problemen uit de sterkteleer. Andere zijn meer algemeen van karakter (bijv. AFEP).

22.3. Bronbeleggingsmethode

Door de opbouw van oplossingen met behulp van bron- of dipoolbeleggingen op de rand wordt een 2-dim. probleem teruggebracht tot een 1-dim. probleem (of 3-d tot 2-d) in de vorm van de integraalvergelijking (21.3.4). Als de oplossing daarvan bekend is, kan de potentiaal ϕ in ieder gewenst punt berekend worden uit (21.3.1), wat ook weer een 1-dim. bewerking is.

De oplossing van de integraalvergelijking kan weer benaderd worden door discretisering:

- a. verdeel de rand in segmenten
- b. beschrijf de variatie van de beleggingssterkte $\mu(s)$ met behulp van een eindig aantal parameters
- c. bereken de integraal in (21.3.4).

Dit leidt dan tot een stelsel lineaire algebraïsche vergelijkingen voor de onbekende parameters in stap b, en dit kan met een standaardmethode opgelost worden. De integraal (21.3.1) kan vervolgens op een soortgelijke manier berekend worden.

Het zal duidelijk zijn dat er vele manieren zijn om dit te doen. De eenvoudigste manier is:

- a. de segmenten zijn rechte lijnstukken (s_i, s_{i+1})
- b. de beleggingssterkte wordt per segment constant verondersteld (één parameter)

Het stelsel vergelijkingen gaat er dan a.v. uit zien:

$$\mu_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_j = f_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (22.3.1)$$

waarin

$$a_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{r}{r_0} ds$$

en r is de afstand tussen de randpunten $s_{i+\frac{1}{2}}$ en $s_{j+\frac{1}{2}}$ (fig. 22.5).

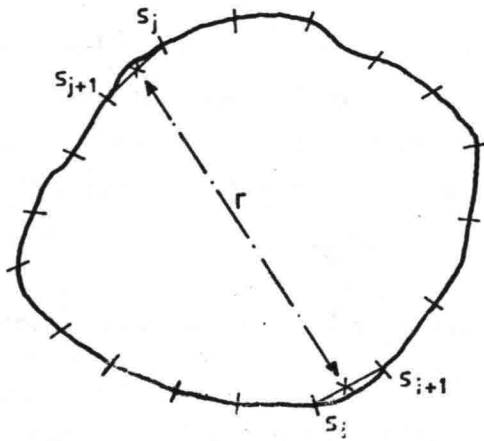


Fig. 22.5 Discretisering bronbeleggingsmethode

Speciale zorg moet worden besteed aan de berekening van a_{ii} aangezien de integrand singulier wordt. De lengte van de segmenten hoeft niet gelijk te zijn.

Het stelsel vergelijkingen (22.3.1) is in principe veel kleiner dan dat uit de differentie- of elementen aanpak. Daar staat tegenover dat het ook geen bandstructuur heeft maar een "volle" matrix. Voor de oplossings-technieken zie par. 22.4. Om de nauwkeurigheid op te voeren kunnen òf de segmenten verkleind worden òf nauwkeuriger benaderingen van de vorm van de rand en het verloop van de beleggingssterkte gehanteerd worden.

22.4. Oplossing van stelsels lineaire vergelijkingen

Bij de technieken voor de oplossing van elliptische vergelijkingen komen steeds grote stelsels lineaire vergelijkingen aan de orde. Het oplossen daarvan is een vak apart met een eigen literatuur. Zie bijv. Ames (1977), Roache (1976), Young (1971). Hier geven we alleen wat algemene begrippen. Het stelsel vergelijkingen is

$$\underline{Ax} = \underline{b} \quad (22.4.1)$$

Een belangrijk onderscheid is of de coëfficiëntenmatrix A "vol" of "leeg" (ijl, sparse) is. Het eerste is het geval bij de bronbeleggingstechniek (22.3.1), het tweede bij differentie- en elementenmethodes (22.1.3), (22.2.10). Bij "sparse" matrices hoeven alleen de elementen ongelijk nul in de computer bewaard te worden, wat met name bij een regelmatige structuur eenvoudig te realiseren is. Het geheugengebruik zal dan relatief laag zijn. Volle matrices vragen veel geheugen (bijv. $100 \times 100 = 10^4$ elementen).

Een tweede belangrijk onderscheid is dat tussen *direkte* en *indirekte* of *iteratieve* oplossingsmethodes. Het eerste geval (Gauss-eliminatie) leidt in een eindig aantal bewerkingen tot de oplossing $\underline{x}$ van (22.4.1). In het tweede geval wordt de oplossing iteratief benaderd tot op een zekere (kleine) fout.

Bij een direkte oplossingsmethode moeten we (vrijwel) nooit denken aan het berekenen van de inverse matrix zodat

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \quad (22.4.2)$$

Dit is veel te veel werk. Het is voldoende, de Gauss-eliminatie met terug substitutie uit te voeren, ook wel LU decompositie genoemd (ontbinding in lower en upper driehoeksmatrices). Bij een bandmatrix van n vergelijkingen met bandbreedte $2k+1$ is de hoeveelheid werk ongeveer $\frac{1}{2} n^2 k$ bewerkingen (vermenigvuldigingen). Daarbij helpt het niet of er binnen de banden nog diagonalen met nullen staan want die worden bij het decompositieproces opgevuld. Aan geheugenruimte is dus ongeveer $2nk$ nodig. Dit zijn nogal grote getallen vooral als de matrix vol is ($k = n$) en n groot.

Bij een iteratieve methode wordt de geschatte oplossing stap voor stap verbeterd, bijv. volgens het Gauss-Seidel proces:

$$x_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left\{ - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} x_i^{(m+1)} - \sum_{i=j+1}^n a_{ji} x_i^{(m)} + b_j \right\} \quad (22.4.3)$$

waarin m de iteratiestap aangeeft. Een versnelling is nog mogelijk door de correctie per iteratiestap nog met een overrelaxatiefactor te vermenigvuldigen; dit leidt tot de successieve overrelaxatie methode (SOR). Zie daarover verder de literatuur. Uit (22.4.3) is te zien dat de bewerking alleen uitgevoerd hoeft te worden voor die elementen die ongelijk nul zijn; bij het 5-punts differentieschema van fig. 22.1 geeft dit dus 5 vermenigvuldigingen per punt of $5n$ per iteratiestap. Het benodigde geheugenbeslag is $7n$. Bij iteratieve methodes is de convergentie niet vanzelfsprekend. Een algemene regel is dat de vergelijkingen diagonaal dominant moeten zijn, d.w.z.

- a. $a_{ii} > 0$ en $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) of omgekeerd
- b. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Zie daarover verder de literatuur.

De rekentijd voor een dergelijke methode wordt nu bepaald door de convergentiesnelheid, d.w.z. het aantal stappen nodig om de fout beneden een zekere waarde te krijgen. Dit is afhankelijk van het type vergelijking. Voor het geval van fig. 22.1 is er nogal wat theoretisch werk gedaan en zijn de convergentiesnelheden voor de verschillende iteratiemethodes wel bekend (zie bijv. Young, 1971). Zo is voor de Gauss-Seidel methode in 2 dimensies het aantal stappen, nodig om de fout met een factor 10 te verminderen, van de orde

$$N \sim 0,23 n_x^2 \quad (22.4.4)$$

als n_x het aantal punten in het rooster in de x-richting is (aangenomen $n_y = n_x$).

De keuze tussen de verschillende methodes wordt dus enerzijds bepaald door het beschikbare computergeheugen en anderzijds door de rekentijd. Als voorbeeld nemen we de Laplace- of Poissonvergelijking op een rechthoekig gebied met $K \times K$ rekenpunten met de 5-punts differentiemethode, of met $4K$ punten met de bronbeleggingsmethode. Het aantal bewerkingen en geheugenplaatsen is voor de diverse methodes a.v.

	rekentijd (bewerkingen)	geheugenplaatsen
bronbelegging	$32 K^3$	$32 K^2$
direkte oplossing		
differenties	$\frac{1}{2} K^5$	$2 K^3$
direkte oplossing		
differenties	$5K^4$	$7 K^2$
Gauss-Seidel		

Voor verschillende waarden van K is het resultaat te zien in fig. 22.6. Bij Gauss-Seidel is 4 maal het aantal stappen van (22.4.4) aangehouden, zodat een foutreductie van 10^{-4} wordt gebruikt. Dit is enigszins willekeurig: er zou ook iets voor te zeggen zijn om de nauwkeurigheid te laten

toenemen met K omdat dan ook de nauwkeurigheid van het differentieschema verbetert. Het blijkt dat de bronbeleggingsmethode qua rekentijd verreweg het gunstigst is, hoewel hierbij geen rekening is gehouden met de berekening van de coëfficiënten. Als in alle K^2 roosterpunten de potentiaal wordt berekend komt er nog $4K^3$ aan rekentijd bij; dit is nauwelijks van belang t.o.v. de oplossing van het stelsel. De Gauss-Seidel methode is wat geheugenruimte betreft veel gunstiger dan de andere methodes, maar de rekentijd kan nogal groot worden. Er zijn echter ook sneller convergerende iteratiemethodes. Voor andere problemen kunnen de verhoudingen anders liggen; met name in drie dimensies.

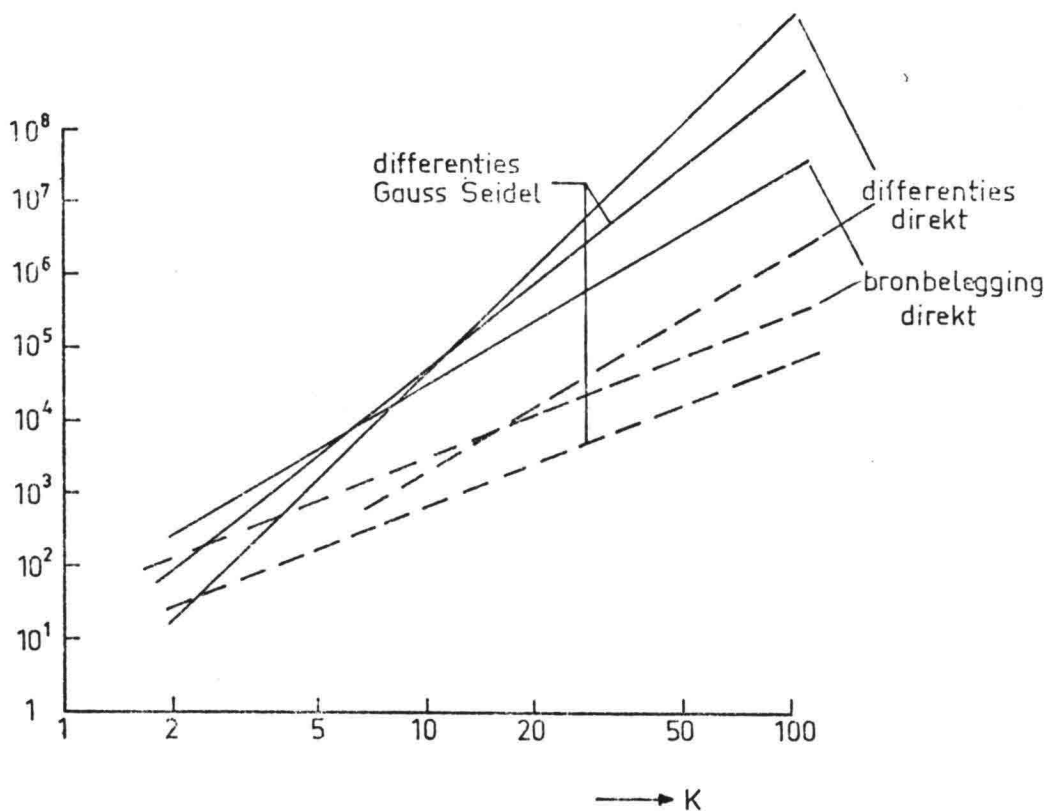


Fig 22.6. Aantal bewerkingen en geheugenruimte voor verschillende oplossingsmethoden als functie van aantal punten K .

23 Diffractie van watergolven

Watergolven die bij de kust aankomen worden door verschillende processen vervormd. Bij een haven zijn we erin geïnteresseerd in hoeverre de golven, ondanks de golfbrekers, nog binnendringen. Als de waterdiepte constant (of groot) is spelen er twee processen een rol: diffractie om de obstakels gevormd door golfbrekers, en reflectie tegen de oevers. Als bovendien de diepte variabel is of als er een belangrijke stroming aanwezig is treedt er ook nog golfrefractie op; dat laten we nu buiten beschouwing.

Voor het bestuderen van diffractie wordt de lineaire golftheorie gebruikt, gebaseerd op potentiaalstroming met gelineariseerde randvoorwaarden. De potentiaal Φ blijkt er dan uit te zien als (Berkhoff, 1976, Stoker, 1957)

$$\Phi(x,y,z,t) = \phi(x,y)e^{i\omega t} \frac{\cosh k(z+a)}{\cosh ka} \quad (23.1)$$

waarin ω frekwentie

k golfgetal

a waterdiepte (constant verondersteld)

z verticale coördinaat

Het golfgetal k en de frekwentie ω voldoen aan de *dispersierelatie*

$$\omega^2 = gk \tanh(ka) \quad (23.2)$$

en de uitwijking van de waterspiegel η volgt in deze benadering uit

$$\eta(x,y,t) = i\omega g^{-1} \phi(x,y) e^{i\omega t} \quad (23.3)$$

De twee-dimensionale potentiaal ϕ voldoet aan de *Helmholtz-vergelijking*

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + k^2 \phi = 0 \quad (23.4)$$

Het golfveld wordt gesplitst in een (bekende) invallende golf ϕ_i en een diffractiegolf ϕ_d :

$$\phi = \phi_i + \phi_d$$

zodanig dat aan de randvoorwaarden wordt voldaan. Deze houden in dat op de oevers aan de reflectievoorwaarde wordt voldaan. In de simpelste vorm (volledige reflectie) luidt die

$$u_n = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (23.6)$$

waarin n de normaalrichting op de oever is. Bij gedeeltelijke reflectie wordt gesteld

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \kappa \alpha \phi = 0 \quad (23.7)$$

waarin α een complexe reflectiecoëfficiënt is, het imaginaire deel houdt verband met de gebruikelijke reflectiecoëfficiënt R (verhouding teruggekaatste golf tot invallende golf) en het reële deel houdt verband met de faseverschuiving bij reflectie (zie Berkhoff, 1976). De diffractiepotentiaal voldoet aan (23.4) en aan de randvoorwaarde (bij volledige reflectie)

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \quad (23.8)$$

De oplossing kan worden gevonden met bronbeleggingen op de randen, gebruik makend van een elementaire oplossing voor een bron, die luidt

$$\phi = \frac{1}{2i} H_o^1(kr) \quad (23.9)$$

in analogie met (21.2.1); H_o^1 is een Hankel-functie. De potentiaal in een punt P wordt nu

$$(\phi_d)_P = \int_s \mu(s) \frac{1}{2i} H_o^1(kr) ds \quad (23.10)$$

en de bronsterkte $\mu(s)$ volgt uit de integraalvergelijking

$$- \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)_P = \mu_P + \int_s \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{2i} H_o^1(kr) \right\} ds \quad (23.11)$$

waarbij P nu op de rand ligt (hier volledig reflecterend). Om te voorkomen dat ook de buitenkant van de haven met bronnen belegd moet worden, wordt op een raai in de haveningang ook een bronbelegging gehanteerd, die via continuïteitseigenschappen gekoppeld is aan de invallende golf en de uit-

gestraalde golf in het buitengebied. Zie daarover ook Berkhoff (1976).

De numerieke moeilijkheid zit in de oplossing van de integraalvergelijking (23.11). Daartoe wordt de rand in een aantal rechte segmenten gesplitst waarop de bronsterkte constant wordt verondersteld. De integralen over de segmenten volgend uit (23.11) kunnen dan worden berekend en er ontstaat een stelsel lineaire vergelijkingen in de bronsterkten. Als dat stelsel wordt opgelost kan via (23.10) in ieder gewenst punt de potentiaal en daarmee de golfhoogte worden berekend.

De nauwkeurigheid van het proces wordt bepaald door de lengte van de segmenten. Door vergelijking met analytische oplossingen is vastgesteld dat deze niet groter mag zijn dan 20% van de golflengte (liever 10%). De berekening wordt dus kostbaar als de afmetingen van de haven groot zijn t.o.v. de golflengte. Daarentegen zijn berekeningen van slingeren (seiches) gemakkelijk te doen omdat die een relatief grote golflengte hebben (in de orde van de haven afmeting). Een voorbeeld van een diffractieberekening voor een haven met verschillende waarden van de reflectiecoëfficiënt is gegeven in fig. 23.1. Het aantal segmenten op de rand was hier ca. 150, de verhouding segmentlengte tot golflengte ca. 0,2 (aan de hoge kant).

Fig. 23.1. Golfhoogteverdeling in een haven bij verschillende waarden van de reflectiecoëfficiënt R (Berkhoff, 1976)

24. Grondwaterstroming via eindige elementenmethode

De eindige-elementen methode beschreven in par. 22.2 wordt o.a. op ruime schaal toegepast voor berekening van grondwaterstroming. Het volgende voorbeeld is afkomstig van ir. F.B.J. Barends (Lab. v. Grondmechanica) en is uitgevoerd met het programmapakket SEEP. In het kader van de verbetering van een dijk is een berekening uitgevoerd van de grondwaterstroming en de bijbehorende verdeling van de grondwaterspanning. Deze resultaten zijn daarna gebruikt om de grondmechanische stabiliteit door te rekenen (hier niet beschreven). De dijk is opgebouwd uit enkele lagen met verschillende doorlatendheidscoëfficiënten k , zie fig. 24.1. De grondwaterstroming wordt nu beschreven door vgl. (21.1.3). In ieder laag is k constant, zodat hij uit de vergelijking verdwijnt, maar op de grenzen van de lagen moet aan de continuïteitsvergelijking voldaan worden, d.w.z. dat behalve de potentiaal ϕ ook de flux door de grens

$$F = k \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (24.1)$$

continu moet zijn. Wegens de sprong in k ontstaat er ook een sprong in $\partial \phi / \partial n$ en dus een knik in de lijnen van gelijke potentiaal.

De randvoorwaarden zijn de volgende (zie fig. 24.1)

a. rechtsboven: waterdiepte en dus druk gegeven:

$$\phi = h \quad (24.2)$$

waarin h het waterniveau is.

b. verdere bovengrens: freatische lijn. De positie van deze lijn is vooraf onbekend.

Er gelden twee voorwaarden:

$$\text{- waterspanning nul:} \quad \phi = z_s(x) \quad (24.3)$$

$$\text{- rand is stroomlijn:} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (24.4)$$

als $z = z_s(x)$ de plaats van de rand aangeeft. Men kan een freatische lijn aannemen en één van beide randvoorwaarden opleggen. Aan de andere zal dan niet worden voldaan. Door iteratieve aanpassing van de gekozen rand kan uiteindelijk aan beide voorwaarden voldaan worden. In het voorbeeld is dit niet gedaan. Op grond van ervaring is de positie van de freatische

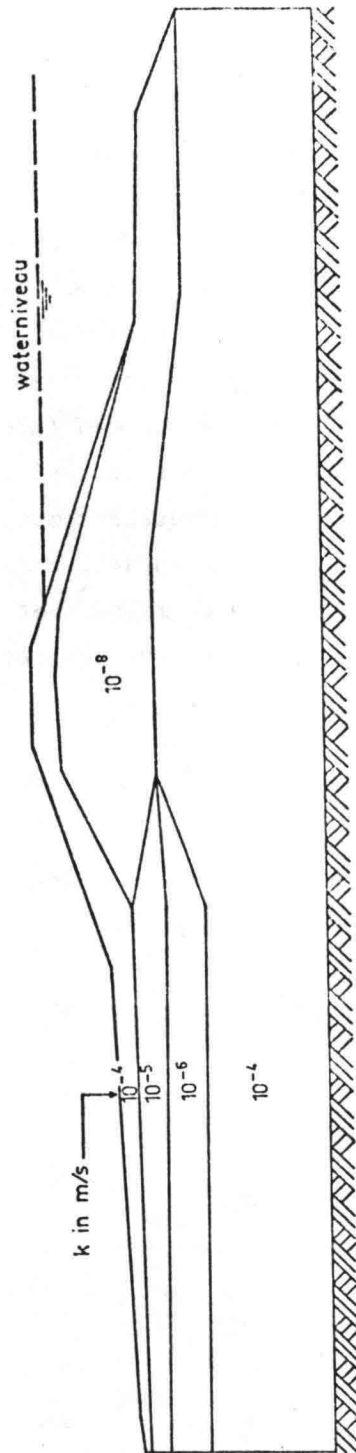


Fig. 24.1 Schematisering dijkprofiel

lijn geschat en verder niet aangepast. Als randvoorwaarde is (24.3) gebruikt.

c. onderrand: ondoorlatend $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ (24.5)

d. linker- en rechterrand: de bepaling van deze randvoorwaarden is een zaak van schematisering en ervaring. Men zou bijv. geschatte waarden van ϕ als randvoorwaarde op kunnen leggen. Het is dan van belang om de gevoeligheid van de resultaten voor onzekerheden in die randvoorwaarden vast te stellen.

De berekening is uitgevoerd met driehoekige elementen en lineaire interpolatiefuncties, zie fig. 2.42 voor de elementen configuratie. De elementen-indeling wordt door het programma verzorgd op globale aanwijzing van de gebruiker. Het totaal aantal elementen in het voorbeeld is ca. 200, het aantal knooppunten ca. 140.

Het stelsel lineaire vergelijkingen dat uit het variatieprincipe ontstaat, wordt opgelost door middel van een iteratieve (successieve overrelaxatie) methode.

In fig. 24.3 zijn enkele resultaten weergegeven. De lijnen van gelijke potentiaal (stijghoogte) bestaan uit rechte lijnstukjes vanwege de lineaire interpolatie in de elementen. Op de onderrand is $\partial \phi / \partial z$ niet precies nul (24.5) wat te maken heeft met de beperkte nauwkeurigheid. Bij verfijning van het elementennet zou beter aan de voorwaarde voldaan worden (vergelijk hoofdstuk 3). In ieder element kan de snelheidsvector worden berekend; deze is ook in fig. 24.3 aangegeven. Hieruit blijkt dat de freatische lijn niet precies een stroomlijn is zoals te verwachten was op grond van het feit dat de positie geschat is. In de linkeronderhoek van de figuur is een fysisch vreemde stroming te zien die wordt veroorzaakt òf door de randvoorwaarde van de linkerrand òf doordat het iteratieproces nog niet geconvergeerd is. De ervaring leert dat dit weinig gevolgen heeft voor de drukverdeling.

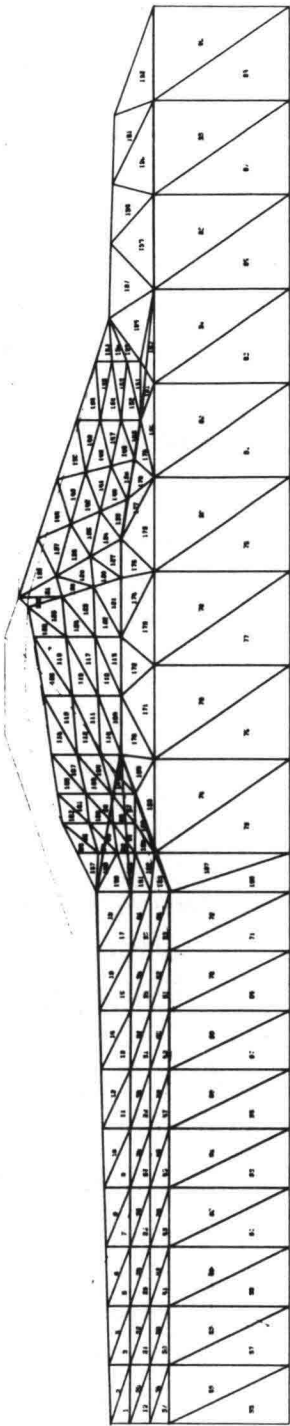


Fig. 24.2 Elementenverdeling

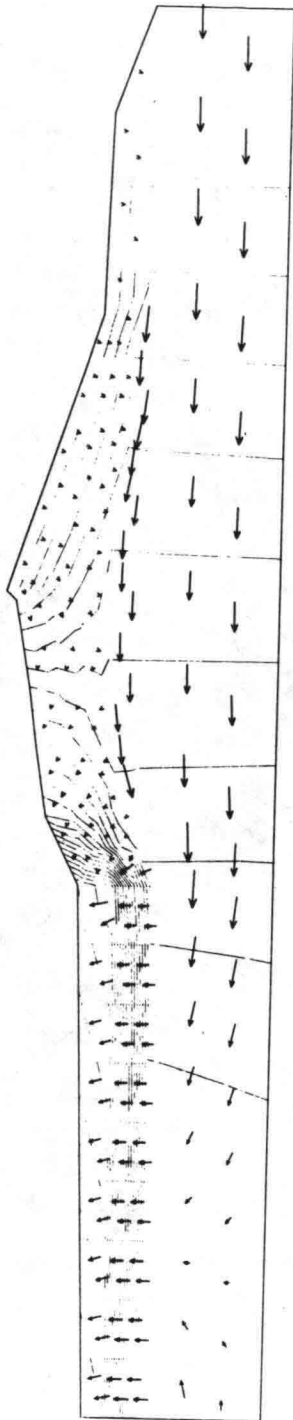


Fig. 24.3 Berekende potentiaal en stroomsnelheid

Notatie

symbool	betekenis	dimensie
a	waterdiepte	L
a_1, a_2	laagdikte van laag 1 en 2	L
A	oppervlakte dwarsprofiel	L^2
A_s	oppervlak stroomvoerend dwarsprofiel	L^2
B	breedte op de waterspiegel	L
B_s	breedte van stroomvoerend profiel op de waterspiegel	L
c	voortplantingssnelheid	LT^{-1}
c_r	relatieve voortplantingssnelheid (8.8)	-
C	coefficient van Chézy	$L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$
d	dempingsfactor per golfperiode (8.7)	-
D	diffusiecoefficient	L^2T^{-1}
f	Coriolis parameter	T^{-1}
F	getal van Froude	-
	ook: bergend oppervlak	L^2
g	versnelling van de zwaartekracht	LT^{-2}
h	waterspiegelniveau	L
i_b	bodemhelling	-
J	te minimaliseren grootheid in variatiemethode	diverse
k	bodemruwheid	L
	ook: golfgetal (8.3)	L^{-1}
	ook: doorlatendheidscoefficient	$L T^{-1}$
K	parameter voor wrijvingsinvloed	-
n_t	aantal tijdstappen (8.9)	-
n_x	aantal rekenpunten (8.10)	-
p	druk	FL^{-2}
P	getal van Péclet (16.4.3)	-
Q	debiet	L^3T^{-1}
r	dimensieloze dempingsafstand	-
R	hydraulische straal	L
t	tijd	T
t_r	relaxatietijd	T
T	golfperiode	T
u	gemiddelde snelheid (x-richting)	LT^{-1}
u_1, u_2	snelheden in lagen 1 en 2	LT^{-1}
u_x	schuifspanningssnelheid	LT^{-1}

v	gemiddelde snelheid (y-richting)	LT^{-1}
x, y	coordinaten	L
z_b	bodemniveau	L
Δt	tijdstap	T
Δx	maaswijdte	L
ϕ	potentiaal	$L^2 T^{-1}$
ψ	stroomfunctie	$L^2 T^{-1}$
λ	diffusieparameter (17.2, 6)	-
μ	bronsterkte per lengte-eenheid	diverse
ρ	amplificatiefactor	-
σ	getal van Courant (8.11) (17.2.6)	-
τ_i, τ_b	schuifspanning op grensvlak en bodem	FL^{-2}
θ	gewichtsfactor in differentiemethode	-
ξ	dimensieloze maaswijdte (8.3)	-
η	uitwijking waterspiegel	L
ω	frekwentie	T^{-1}

Literatuur

Boeken van belang voor het vak:

- Abbott, M.B. (1979) - Computational Hydraulics, Pitman.
- Jansen, P.Ph. (ed.) (1979) - Principles of river engineering, Pitman.
- Mahmood, K. & Yevjevich, V. (eds.) (1975) - Unsteady flow in open channels, Water Res. Publ., Fort Collins, Col.
- Potter, D. (1973) - Computational physics, Wiley, New York.
- Roache, P.J. (1976) - Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publ., Albuquerque, New Mex.

Partiële differentiaalvergelijkingen

- Courant, R. en Hilbert, D. (1962) - Methods of mathematical physics, Interscience.
- Garabedian, P.R. (1964) - Partial differential equations, Wiley, New York.
- Sommerfeld, A. (1964) - Partial differential equations in physics, Academic Press, New York.
- Timman, R. (1963) - Partiële differentiaalvergelijkingen, in: Handboek der Wiskunde I (L. Kuiper en R. Timman) Scheltema & Hobbema, Amsterdam.

Numerieke methodes:

- Ames, W.F. (1977) - Numerical methods for partial differential equations, Nelson, London.
- Kreiss, H. en J. Oliger (1973) - Methods for the approximate solution of time dependent problems, WMO, GARP Publ. Ser. no. 10.
- Mitchell, A.R. (1977) - Computational methods in partial differential equations, Wiley.
- Mitchell, A.R. and R. Wait (1977) - The finite element method in partial differential equations, Wiley.
- Richtmyer, R.D. en K.W. Morton (1967) - Difference methods for initial-value problems, Interscience, New York.
- Strang, G. en Fix, G.J. (1973) - An analysis of the finite element method, Prentice-Hall.

- Streeter, V.L. & Wiley, E.B. (1967) - Hydraulic transients, McGraw-Hill, New York.
- Taylor, G.F. (1954) - The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, Proc. Roy. Soc. A, 223, 446-448 en A, 225, 473.
- Thatcher, M.L. & Harleman, D.R.F. (1972) - A mathematical model for the prediction of unsteady salinity intrusion in estuaries, MIT, Ralph M. Parsons, Lab, Rep. 114.
- Verruyt, A. (1970) - Theory of groundwater flow, MacMillan.
- Vreugdenhil, C.B. (1970) - Computation of gravity currents in estuaries, Proefschrift Delft, ook Waterloopkundig Lab. Publ. no. 83.
- Vreugdenhil, C.B. (1973) - Computational methods for open channel flow, in: Waterloopkundig Lab. Publ. 100, 1973.
- Vreugdenhil, C.B. (1979) - Two-layer shallow-water flow in two dimensions, a numerical study, J. Comp. Physics.
- Vreugdenhil, C.B. & van Zanten, B.H.J. (1973) - Computation of flood waves, numerical aspects, Waterloopkundig Lab. rapport S89-III.
- de Vries, M. (1975) - A morphological time scale for rivers, IAHR Congres Sao Paulo, paper B3, ook Waterloopkundig Lab. publ. 147.
- de Vries, M. (1973) - Application of physical and mathematical models for river problems, IAHR Symposium River Mechanics, Bangkok, ook Waterloopkundig Lab. publ. 112.
- Waterloopkundig Laboratorium (1970) - Yssel, morfologische gevolgen van een bochtafsnijding, Rapport W30-II.
- Young, D.M. (1971) - Iterative solution of large linear systems, Acad. Press.
- Zielke, W. (1968) - Frequency-dependent friction in transient pipe flow, J. Basic Eng., D90, 1, 109-115.

Verdere verwijzingen

- Berkhoff, J.C.W. (1976) - Mathematical models for simple harmonic linear water waves, wave diffraction and refraction, Proefschrift Delft, ook Waterloopkundig Lab., Publ. no. 163.
- Daubert, A. en O. Graffe (1967) - Technique du modèle mathématique de l'embouchure d'un estuaire, IAHR Congres Kyoto, 479-489.
- Elder, J.W. (1959) - The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., vol. 5, 544-560.
- Fischer, H.B. (1973) - Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow, Ann. Rev. Fluid Mech. 5, 59-78.
- Grijzen, J.G. en C.B. Vreugdenhil (1976) - Numerical representation of flood waves in rivers, Int. Symp. Unsteady flow in open channels, Newcastle-upon-Tyne, ook Waterloopkundig Lab. Publ. no. 165.
- Gustafsson, B. (1975) - The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems, Math. Comp. 29, 130, 396-406.
- Kalkwijk, J.P.Th., C. Kranenburg, C.B. Vreugdenhil, A.H. de Vries (1974) - Investigation into cavitation in long horizontal pipelines caused by waterhammer, WL Publ. 115.
- Kranenburg, C. (1973) - Transient cavitation in pipelines, Diss. Delft.
- Lamb, Sir H. (1932) - Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press.
- Lax, P.D. (1954) - Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math. 7, 159.
- Leendertse, J.J. (1967) - Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation, RAND Mem. RM-5294-PR.
- Lomax, H. & Steger, J.L. (1975) - Relaxation methods in fluid mechanics, Ann. Rev. Fluid Mech. 7, 1975, 63-88.
- Nedeco (1978) - République Togolaise: Etude détaillée de l'évolution de l'érosion littorale, phase 2.
- Pelnard-Considère, R. (1957) - Essais de théorie de l'évolution des formes de rivage en plages de sable et de galets, 4^{me} Journées d'Hydraulique, les Energies de la Mer, Question III, Rapport 1.
- Provoost, G.A. (1976) - Investigation into cavitation in a prototype pipeline caused by waterhammer, Waterloopkundig Lab. Publ. 170.
- Stive, M. (1977) - Onderzoek naar de invloed van rivierverbeteringen in de Kapuas-delta, Deelontwerp vloeistofmechanica THD.
- Stoker, J.J. (1956) - Water waves, Interscience Publ.

