



BACHELOR EINDPROJECT

---

# Landens transformatie

De verbinding tussen  $\pi$ , het RMG en de bètafunctie

---

*Student:*  
Abel Frank

*Begeleider:*  
Jeroen Spandaw

31 augustus 2019

# Samenvatting

Eerst introduceren we het rekenkundig-meetkundig gemiddelde (RMG), een snel convergerend algoritme dat een verband heeft met  $\pi$  en nog veel meer constanten en functies. Hoffmann toont dit in een bewijs aan, echter is deze niet waterdicht en amper onderbouwd. Daarom gaan wij ons verdiepen in dit bewijs en met name een stap die twee ogenschijnlijk verschillende integralen aan elkaar gelijk stelt.

Het blijkt dat hiervoor Landens transformatie gebruikt kan worden. Om hier op te komen en hem ook nog eens te bewijzen moeten we de wereld van elliptische functies induiken. We gaan vooral werken met de zogeheten thèta-functies die we grondig gaan onderzoeken.

Vervolgens gaan we toewerken naar de Landen-transformatie-relaties die de basis zullen vormen voor Landens transformatie. Hiervoor moeten we veel eigenschappen en identiteiten aantonen. Dan stappen we over naar Jacobi's elliptische functies die de brug vormen naar elliptische integralen. Aan de hand van deze integralen en de Landen-transformatie-relaties kunnen we bewijzen dat het RMG inderdaad verborgen zit in een elliptische integraal van de eerste soort. Ook volgt hieruit dat er een verband is met  $\pi$ . Tot slot kijken we nog naar een aantal toepassingen van het RMG.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Het bewijs van het verband tussen <math>\pi</math> en het RMG</b>	<b>4</b>
2.1	De convergentie . . . . .	4
2.2	Hoe snel convergeert het RMG? . . . . .	5
2.3	Het verband tussen $\pi$ en het RMG . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Thèta-functies als oplossing van de warmtevergelijking</b>	<b>14</b>
3.1	Het eerste warmteprobleem . . . . .	14
3.2	Andere randvoorwaarden, andere thèta-functie . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Het complexe rooster</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Thèta-functies</b>	<b>24</b>
5.1	Eigenschappen . . . . .	24
5.1.1	Holomorf . . . . .	25
5.1.2	Dubbel quasi-periodiek . . . . .	27
5.1.3	Even en oneven . . . . .	28
5.1.4	Opmerkelijke eigenschappen . . . . .	30
5.2	Notatieverschil tussen veel bronnen . . . . .	32
5.3	Fundamentele optelformules . . . . .	37
5.3.1	Gevolgen van de optelformules . . . . .	41
5.3.2	De identiteit $\theta'_{11}(0) = -\pi\theta_{10}(0)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)$ . . . . .	43
5.4	Het oneindige product gekoppeld aan de oneindige som . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Landen-transformatie-relaties</b>	<b>55</b>
6.1	John Landen . . . . .	55
6.2	De transformatie-relaties . . . . .	55
6.2.1	Een andere transformatie-relatie . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Jacobi's elliptische functies</b>	<b>59</b>
7.1	De definitie . . . . .	59
7.1.1	De parameters $k$ en $k'$ . . . . .	60
7.2	Fundamentele eigenschappen . . . . .	65
7.3	De afgeleiden . . . . .	67
7.3.1	MacLaurin-reeks . . . . .	69

7.4	De primitieven . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Landens transformatie</b>	<b>73</b>
8.1	Elliptische integraal van de eerste soort . . . . .	73
8.2	De transformatie . . . . .	74
8.3	Bewijs aan de hand van integralen . . . . .	78
8.4	De substitutie van Carlson . . . . .	82
<b>9</b>	<b>Conclusies</b>	<b>84</b>
<b>10</b>	<b>Discussie</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Verband tussen de sinus, cosinus en tangens</b>	
<b>B</b>	<b>Gedomineerde convergentie stelling van Lebesgue</b>	
<b>C</b>	<b>Gewone differentiaalvergelijking</b>	
<b>D</b>	<b>Orthogonaliteit van een sinoïde</b>	
<b>E</b>	<b>Tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten</b>	
<b>F</b>	<b>Eigenschap van de arcsinh</b>	
<b>G</b>	<b>Bijektiviteit van <math>k</math> en <math>q</math></b>	
<b>H</b>	<b>Toepassingen van het RMG</b>	
H.1	Het Brent-Salamin algoritme . . . . .	
H.2	Algoritmes voor de natuurlijke logaritme . . . . .	
H.3	Elliptische integralen . . . . .	
<b>I</b>	<b>Weierstrass elliptische functies</b>	
I.1	Weierstrass $\sigma$ -functie . . . . .	
I.1.1	Eigenschappen . . . . .	
I.1.2	Vicieuze cirkel . . . . .	
I.1.3	Nieuwe definitie . . . . .	
I.2	Weierstrass $\zeta$ -functie . . . . .	
I.2.1	Eigenschappen . . . . .	
I.3	Weierstrass $\wp$ -functie . . . . .	
I.3.1	Eigenschappen . . . . .	

# Lijst met gebruikte symbolen

Symbol	Definitie/verklaring
$(a; q)_n$	q-Pochhammer symbol: $= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - aq^k)$ [1]
$\delta(x - x_i)$	De diracdelta is een distributie met 3 speciale eigenschappen: 1. $\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ \infty & x = x_i \end{cases}$ , 2. $f(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_i) dx$ , (de definiërende eigenschap) 3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = 1$ . (p.404-410 [2])

# Verklarende woordenlijst

Begrip	Definitie/verklaring
Analytische functie	Een functie die complex differentieerbaar is op het hele domein.
Elliptische functie	Een meromorfe functie $f$ op $\mathbb{C}$ waarvoor twee niet-nul complexe getallen $\omega_1$ en $\omega_2$ bestaan met $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ , zodat $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$ .
Holomorfe functie	Een synoniem voor een analytische functie.
Meromorf	Een functie die overal op het domein holomorf is met uitzondering van een aantal geïsoleerde singulariteiten, namelijk polen.
Quasi-periodieke functie	Een functie die veel weg heeft van een periodieke functie. Stel $f$ is quasi-periodiek met quasi-periode $a$ dan geldt $f(z + a) = g(z, f(z))$ waarbij $g$ een 'simpelere' functie is dan $f$ . Wat 'simpeler' is blijft vaag.

# Voorwoord

Dit bachelor eindproject is geschreven ter afsluiting van mijn bachelor Technische Wiskunde aan de Technische Universiteit Delft. Mijn begeleider is Jeroen Spandaw die mij ontzettend veel heeft geholpen en mij een andere kant van de wiskunde heeft laten ontdekken. Met dit werk poog ik beginnende wiskundestudenten een kijk te laten nemen in een wereld waar ze nog nooit van hebben gehoord. Daarnaast probeer ik ook de nodige historische gegevens te verschaffen, opdat wij niet vergeten wie zich hebben toegewijd aan de wiskunde.

Dit onderzoek kwam tot stand toen ik meneer Spandaw benaderde met de vraag of hij mijn BEP-begeleider wilde zijn. Hij was meteen razend enthousiast en kwam met vier onderwerpen waarvan ik er één mocht kiezen. Het werd het rekenkundig-meetkundig gemiddelde dat Lagrange heeft bedacht en waar Gauss veel onderzoek naar heeft gedaan. Meneer Spandaw vond een mooi artikel, waar een bewijs instaat over hoe  $\pi$  is gekoppeld aan dit gemiddelde. Echter was er één stap in het bewijs die uit het niets kwam en niet werd onderbouwd. Het klopte uiteraard wel allemaal, maar ik wilde weten hoe ik ook op die stap had kunnen komen. Dit verslag gaat over dat bewijs en de verdieping die nodig is om die ene stap te kunnen maken.

Naast dit alles wil ik uiteraard nog iedereen die mij heeft gesteund en geholpen tijdens mijn bachelor bedanken en met name mijn begeleider Jeroen Spandaw. Hij heeft mijn heel erg geïnspireerd en is een voorbeeld van hoe een wiskundige hoort te zijn: kritisch, razend enthousiast, perfectionistisch, behulpzaam en bomvol kleine wiskundige weetjes.

“Memento eorum qui tibi auxiliata sunt.”

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Laten we meteen beginnen met hetgeen waarover dit verslag gaat. Namelijk het verband tussen het rekenkundig-meetkundig gemiddelde (RMG),  $\pi$  en de bètafunctie. De eerste en de laatste zijn misschien onbekende termen voor de lezer, dus laat ik maar meteen de definities ervan geven.

Het rekenkundig en meetkundig gemiddelde van de getallen  $a, b \in \mathbb{R}^+$  zijn respectievelijk:  $\frac{a+b}{2}$  en  $\sqrt{ab}$ . Nu is het RMG als volgt gedefinieerd (waarbij ik afwijk van de gebruikelijke notatie; ik heb  $a$  en  $b$  omgedraaid).

**Definitie RMG.** Laat  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^+$  met  $0 < a_0 \leq b_0$ .

Definieer  $a_{n+1}$  en  $b_{n+1}$  als volgt:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \quad (1.1)$$

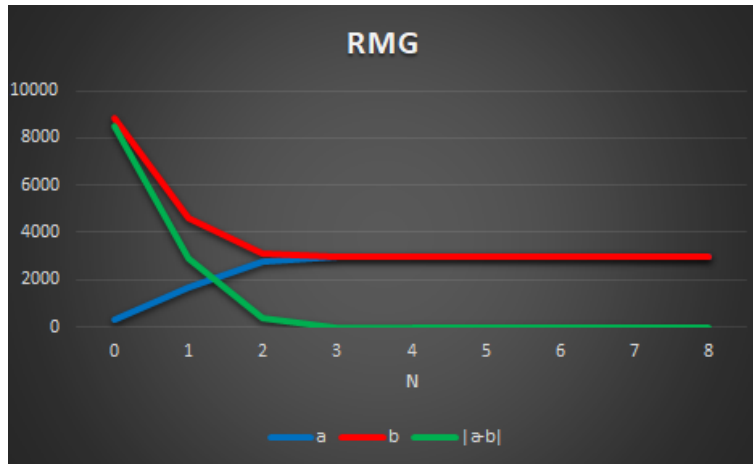
En aan de hand van de limiet van deze twee rijen is het rekenkundig-meetkundig gemiddelde bepaald.

$$\text{RMG}(a_0, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n := L. \quad (1.2)$$

Dit gemiddelde kwam voor het is voor in het werk van Joseph-Louis Lagrange. Hij beschreef het in een werk dat in 1784 werd gepubliceerd volgens Berndt en Almkvist [3] (in hun artikel verwijzen zij naar [4] voor het des betreffende werk). Carl Gauss heeft echter veel onderzoek gedaan naar het RMG en verschillende eigenschappen van dit gemiddelde aangetoond. Wat het RMG zo speciaal maakte was zijn zeer snelle convergentie, het feit dat het aan  $\pi$  gekoppeld was en dat het gebruikt kon worden voor het uitrekenen van elementaire functies. In figuur(1.1) zien we voor  $a = 324$  en  $b = 8848$  dat het RMG inderdaad snel convergeert. Wat interessant is om ons af te vragen hoe snel deze convergentie is. Hoe sneller, hoe sterker en waardevoller dit algoritme is. In het volgende hoofdstuk laten we zien dat het RMG kwadratisch convergeert. Maar waarnaar convergeert dit algoritme? Daar gaan we in het volgende hoofdstuk op in. Dan gaan we nu naar de bètafunctie die als volgt gedefinieerd is:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(x), \text{Re}(y) > 0. \quad (1.3)$$





Figuur 1.1: De snelle convergentie van het RMG voor  $a = 324$  en  $b = 8848$ .

Naar deze functie is veel onderzoek gedaan door Euler en Legendre. Leonard Euler was een Zwitserse natuur- en wiskundige die voor de meeste mensen bekend zal staan om zijn onderzoek naar het exponentiële getal ( $e$ ) en het oplossen van het Bazel-probleem<sup>1</sup> [5]. Adrien-Marie Legendre was Franse wiskundige uit de 18<sup>e</sup> die veel onderzoek heeft gedaan op het gebied van elliptische integralen en getaltheorie. Voor nu is het niet interessant om verder op de bètafunctie in te gaan, maar hij moest zeker wel genoemd worden.

Naast de definitie van het RMG en de bètafunctie zou ik graag nog twee belangrijke definities willen geven. De eerste is die van een elliptische integraal.

**Definitie elliptische integraal.** Een elliptische integraal is van de vorm

$$\int \frac{A(x) dx}{B(x)\sqrt{S(x)}}, \quad (1.4)$$

waarbij  $A$  en  $B$  polynomen in  $x$  zijn en  $S$  een polynoom van graad drie of vier.

De tweede is die van een elliptische functie.

**Definitie elliptische functie.** Een elliptische functie is een meromorfe functie  $f$  op  $\mathbb{C}$  waarvoor twee niet-nul complexe getallen  $\omega_1$  en  $\omega_2$  bestaan met  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ , zodat  $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$ .

<sup>1</sup>Voor mensen die geïnteresseerd zijn in dit probleem en zijn oplossing, raad ik het volgende filmpje aan: <https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls>

Deze definitie staat ook in de verklarende woordenlijst, maar is dermate belangrijk dat ik hem graag ook nog in het verslag zelf wil vermelden. Ik geef deze twee definities nu al, omdat ze we ze vaak gaan tegenkomen in het verslag.

Waar dit verslag over zal gaan, is het volgende verband:

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2 \text{RMG}(a, b)}, \quad (1.5)$$

waarbij

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}}. \quad (1.6)$$

Dit heb ik uit het werk van Hoffmann [6]. In dit werk staat ook zijn bewijs waar we zo dadelijk naar gaan kijken. Het verband waarbij de bètafunctie betrokken is, is eigenlijk een speciaal geval van (1.5) met  $a = 1$  en  $b = \sqrt{2}$ , volgens Wikipedia [7].

$$\text{RMG}(1, \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2 \text{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)} \quad (1.7)$$

In het volgende hoofdstuk zullen we zowel (1.5) als (1.7) bewijzen. In dat bewijs zal een moeilijke stap gemaakt worden die niet nader verklaard wordt. Wij gaan, in de daarop volgende hoofdstukken, kijken wat er achter deze stap zit en of het makkelijker kan. Voor de geïnteresseerde lezer heb ik in appendix [H] nog een kort stukje over de toepassingen van het RMG staan. Ook vind je in appendix [I] wat informatie over de Weierstrass functies.

# Hoofdstuk 2

## Het bewijs van het verband tussen $\pi$ en het RMG

In dit bewijs laten we zien wat het verband is tussen het RMG (Rekenkundig-Meetkundig Gemiddelde),  $\pi$  en de bètafunctie. Hierbij volg ik het bewijs dat Hoffmann geeft in zijn artikel [6]. Echter heb ik wel een paar toevoegingen gedaan, omdat zijn bewijs niet waterdicht was. Hij nam veel dingen voor waar aan en onderbouwt niet altijd zijn keuzes.

### 2.1 De convergentie

Eerst laten we zien dat het RMG inderdaad altijd naar een limiet convergeert. Herinner de definitie van het RMG en in het bijzonder de twee rijen (1.1). Deze twee rijen convergeren voor alle  $a_0, b_0 > 0$  naar elkaar en dit kunnen wij simpel aantonen in twee stappen.

Stap 1:

Gebruikmakend van de eigenschap van het kwadraat krijgen we

$$0 \leq (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n.$$

Hieruit volgt

$$2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n.$$

Dus krijgen we

$$a_{n+1} \leq b_{n+1}.$$

Stap 2:

$$a_n = \sqrt{a_n a_n} \leq \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1} \leq b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

Dus nu volgt de volgende vergelijking:

$$0 < a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0 < \infty. \quad (2.1)$$

Zowel  $a_n$  als  $b_n$  is een monotone begrensde rij zoals (2.1) laat zien. Dan volgt uit de monotone convergentie stelling dat beide rijen convergeren (Stelling 4.3.3 [8]).

Nu rest ons te laten zien dat ze naar dezelfde limiet convergeren, hetgeen Hoffmann niet heeft gedaan.

Stel dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L < M = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Merk op dat  $L > M$  niet kan door (2.1). Ook geldt natuurlijk dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L. \tag{2.2}$$

Maar wanneer we dit uitschrijven, krijgen we

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{LM} > L.$$

Dit is een tegenspraak. We kunnen nu concluderen dat deze twee rijen naar elkaar convergeren wanneer  $n \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{RMG}(a_0, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \tag{2.3}$$

## 2.2 Hoe snel convergeert het RMG?

Er is een manier waarop je kan bepalen hoe snel een convergente reeks convergeert. Ik volg de manier die Vermolen geeft in zijn boek (§4.2 [9]). Hierin wijk ik af van Hoffmann, die dit op een andere manier aantoont.

Wanneer een numerieke methode een reeks  $\{p_n\}$  produceert met limiet  $p$  en convergent is, dan is de snelheid van convergentie als volgt te bepalen. Als de volgende reeks bestaat voor de positieve constanten  $\lambda$  en  $\alpha$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p - p_{n+1}|}{|p - p_n|^\alpha} = \lambda, \tag{2.4}$$

dan convergeert de reeks met orde  $\alpha$ . Aangezien we net hebben bewezen dat de reeks inderdaad convergeert, kunnen wij nu aantonen hoe snel deze convergeert. Aangezien  $a_n$  en  $b_n$  naar elkaar convergeren, gaan wij dit doen door te kijken naar het verschil

tussen  $a_n$  en  $b_n$  met 0 als de limiet. Dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 - (a_{n+1} - b_{n+1})|}{|0 - (a_n - b_n)|^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{(b_n - a_n)^\alpha} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n}}{(b_n - a_n)^\alpha} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - 2\sqrt{a_n b_n} + a_n}{2(b_n - a_n)^\alpha} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^\alpha (\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})^\alpha} \\
&\stackrel{\alpha=2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})^2} = \frac{1}{8L}.
\end{aligned}$$

Zo zien we dat de orde van convergentie van het RMG 2 is, ook wel kwadratische convergentie genoemd.

## 2.3 Het verband tussen $\pi$ en het RMG

Dan gaan wij nu door naar de stelling die het verband aantoont tussen het RMG,  $\pi$  en de bètafunctie.

**Het verband tussen  $\pi$  en het RMG.** . *Laat het RMG( $a, b$ ) het rekenkundig-meetekundig gemiddelde van  $a$  en  $b$  zijn dan volgt voor  $a = 1$  en  $b = \sqrt{2}$  dat*

$$\frac{\pi}{2 \text{RMG}(1, \sqrt{2})} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (2.5)$$

Dit is hoe Hoffmann het in zijn werk heeft staan en wij gaan nu verder met het volgen van zijn bewijs [6].

*Bewijs.* Om de integraal  $I(a, b)$  uit vergelijking (1.6) te koppelen aan het RMG, moeten we een speciale eigenschap aantonen. Die eigenschap ziet er zo uit

$$I(a, b) = I\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right). \quad (2.6)$$

We bewijzen eerst (2.6) voordat we verdergaan. We halen eerst de cosinus uit de wortel bij  $I(a, b)$ .

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2(\theta)}} \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta. \quad (2.7)$$

We passen de volgende substitutie toe:  $t = \tan(\theta)$ . Dus  $dt/d\theta = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ . Dit geeft het volgende begin- en eindpunt van de integraal:  $\tan(0) = 0$  en  $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$ . Merk op dat de volgende goniometrische vergelijkingen gelden:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (2.8)$$

Een kort bewijs hiervan vind je in de appendix [A].

Uit (2.8) volgt nu dat

$$d\theta = \cos^2(\theta) dt = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

De integraal van (2.7) ziet er dan als volgt uit:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{(b^2 + a^2 t^2)(a^2 + a^2 t^2)}} dt. \quad (2.9)$$

We passen een simpele substitutie toe die we ook eerder hadden kunnen doen, maar nu kan je duidelijk zien waarom we hem doen. Laat  $u = at$ , dus  $\frac{du}{dt} = a$ .

Integraal (2.9) wordt nu

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(b^2 + u^2)(a^2 + u^2)}}. \quad (2.10)$$

Omdat we zo meteen de zeer ingewikkelde substitutie willen toepassen waarbij de ondergrens niet nul mag zijn, moeten we een slim trucje uithalen. Merk op dat de integrand een even functie is. Dit betekent dat wanneer wij de ondergrens naar min oneindig sturen, de integraal twee keer zo groot wordt. Dit gaan wij tegen door deze te vermenigvuldigen met een half. We krijgen nu de volgende uitdrukking voor  $I(a, b)$ :

$$I(a, b) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{(b^2 + u^2)(a^2 + u^2)}}. \quad (2.11)$$

## De ingewikkelde substitutie

We gaan nu de ingewikkelde substitutie toepassen die Hoffmann niet heeft onderbouwd. De substitutie is  $v = \frac{1}{2}\left(u - \frac{ab}{u}\right)$ . In dit verslag gaan we onderzoeken hoe je op deze substitutie uitkomt en of het makkelijker dan wel anders kan.

In figuur (2.1a) kunnen we meteen ook zien waarom we de integraal van  $-\infty$  tot  $\infty$  hebben laten lopen. Daarnaast zien we in hetzelfde figuur dat we  $v(-\infty) = -\infty$  en

$v(\infty) = \infty$  krijgen.

Bovendien leiden we de volgende gelijkheden als gevolg van de substitutie af:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{ab}{u^2} \right) = \frac{u^2 + ab}{2u^2},$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + v^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{u^2 - 2ab + \frac{a^2b^2}{u^2}}{4} \\ &= \frac{u^4 + (a^2 + b^2)u^2 + a^2b^2}{4u^2} \\ &= \frac{(u^2 + a^2)(u^2 + b^2)}{4u^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab + v^2 &= ab + \frac{u^2 - 2ab + \frac{a^2b^2}{u^2}}{4} \\ &= \frac{u^2 + 2ab + \frac{a^2b^2}{u^2}}{4} \\ &= \frac{u^4 + 2abu^2 + a^2b^2}{4u^2} \\ &= \frac{(u^2 + ab)^2}{4u^2}. \end{aligned}$$

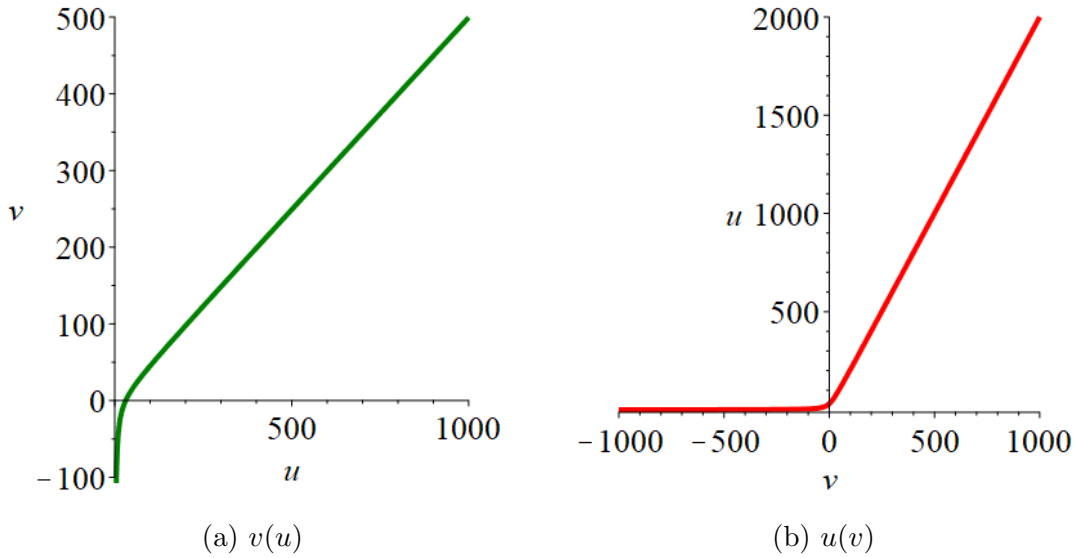
We hebben nu de volgende drie gelijkheden.

$$\frac{dv}{du} = \frac{u^2 + ab}{2u^2}, \quad (2.12)$$

$$ab + v^2 = \frac{(u^2 + ab)^2}{4u^2}, \quad (2.13)$$

$$\left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + v^2 = \frac{(u^2 + b^2)(u^2 + a^2)}{4u^2}. \quad (2.14)$$

We gaan nu vanaf de andere kant toewerken naar (2.10). Dit betekent dat we vanaf  $I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab})$  gaan toewerken naar  $I(a, b)$ . Omdat er een coördinaat-transformatie plaatsvindt, moeten we ook de grenzen aanpassen. Hiervoor kunnen we goed de inverse van  $v(u)$  gebruiken. We krijgen dan  $u = v \pm \sqrt{v^2 + ab}$ . Dit schrijven we als twee functies;  $u_1 = v + \sqrt{v^2 + ab}$  en  $u_2 = v - \sqrt{v^2 + ab}$ . Het moge duidelijk zijn dat



Figuur 2.1: De transformatie en zijn inverse geplote met  $a = 16$  en  $b = 59$

alleen  $u_1$  voldoet, aangezien  $u > 0$  en  $u_2 < 0$  voor alle waarden van  $v \in \mathbb{R}$ . In figuur (2.15) zien we de grafieken van zowel  $v(u)$  als  $u(v)$ . Uit (2.11) volgt nu dat

$$\begin{aligned}
 I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{((\sqrt{ab})^2 + v^2)((\frac{a+b}{2})^2 + v^2)}} \quad (2.15) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2+ab}{2u^2}}{\sqrt{\frac{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}{4u^2} \cdot \frac{(u^2+ab)^2}{4u^2}}} du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2+ab}{2u^2}}{\frac{1}{2} \frac{u^2+ab}{2u^2} \cdot \sqrt{(b^2+u^2)(a^2+u^2)}} du \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(b^2+u^2)(a^2+u^2)}} = I(a, b).
 \end{aligned}$$

We kunnen dus de volgende conclusie trekken

$$I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right). \quad (2.16)$$



We herkennen al snel het RMG in deze gelijkheid en we kunnen hem nu ook als volgt schrijven.

$$I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1}), \quad (2.17)$$

waarbij  $a_{n+1}, b_{n+1}$  gedefinieerd zijn zoals in (1.1). Uit vergelijking (2.17) volgt dat  $I(a_n, b_n)$  onafhankelijk is van  $n$ . We kunnen dus de limiet en integraal omdraaien, wanneer we aantonen dat de integrand van  $I(a_n, b_n)$  uniform convergeert volgens Lay (Stelling 9.2.4 [8]). Dit is iets wat Hoffmann niet heeft bewezen.

Laat

$$f_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{b_n^2 \cos^2(\theta) + a_n^2 \sin^2(\theta)}}, \quad f(\theta) = \frac{1}{L}, \quad (2.18)$$

waarbij

$$RMG(a_0, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n := L.$$

Zij  $\epsilon > 0$ . Voor  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  kies  $N$  zodat voor alle  $n \geq N$  geldt dat  $\frac{b_n - a_n}{La_n} < \epsilon$ . Dit laatste kan, want  $a_n$  en  $b_n$  convergeren monotoon naar  $L$  zoals we eerder hebben laten zien. Nu laten we zien dat  $|f_n(\theta) - f(\theta)| < \epsilon$  voor alle  $n \geq N$ . Laat  $g_n(\theta) = f_n(\theta) - f(\theta)$ . Wij moeten de absolute waarde van  $g_n(\theta)$  bepalen. Dit doen we door de afgeleide gelijk te stellen aan nul en te kijken of er een maximum en/of minimum is.

$$\begin{aligned} \frac{dg_n}{d\theta}(\theta) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(b_n^2 \cos^2(\theta) + a_n^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} \cdot (2b_n^2 \cos(\theta)(-\sin(\theta)) + 2a_n^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \\ &= \frac{(b_n^2 - a_n^2) \cos(\theta) \sin(\theta)}{(b_n^2 \cos^2(\theta) + a_n^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Nu stellen we de afgeleide gelijk aan nul.

$$g_n'(\theta) = 0 \iff (b_n^2 - a_n^2) \cos(\theta) \sin(\theta) = 0.$$

Hieruit volgt  $\theta = 0$  of  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Nu zien we dat  $g_n(0) = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L}$  en  $g_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}$ . In het geval van gelijkheid zijn we klaar want dan  $a_n = b_n = L$ , en dus  $g_n(\theta) = 0$ . We zien dat  $g_n(\theta)$  zijn minimum in 0 heeft en zijn maximum in  $\frac{\pi}{2}$ .

We gaan aantonen dat zowel het maximum als het minimum kleiner is dan  $\epsilon$ .

Eerst het maximum:

$$|f_n(\theta) - f(\theta)| \leq \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{L - a_n}{La_n} < \frac{b_n - a_n}{Lb_n} < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Dan nog voor het minimum:

$$|f_n(\theta) - f(\theta)| \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{b_n - L}{Lb_n} < \frac{b_n - a_n}{Lb_n} < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Dus  $f_n(\theta)$  is uniform convergent.

Nu we dit weten, volgt automatisch volgens Lay dat je de limiet en integraal mag omdraaien (Stelling 9.2.4 [8]).

Je kan hetzelfde resultaat verkrijgen met de gedomineerde convergentie stelling van Lebesgue (zie appendix [B]).

Terug naar het bewijs. Voor de integraal  $I(a, b)$  volgt dat

$$\begin{aligned} I(a_0, b_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, b_n) \\ &= I(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = I(L, L) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{L} = \frac{\pi}{2L}. \end{aligned}$$

Zo volgt dus een belangrijke identiteit:

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2 \text{RMG}(a, b)}. \quad (2.19)$$

We zien dus dat  $\pi$  en het RMG verbonden zijn door middel van een integraal.

### **Gauss' constante en de getallen 1 en $\sqrt{2}$**

Als we nu de getallen 1 en  $\sqrt{2}$  invullen in het RMG, krijgen we een constante die we de constante van Gauss noemen:  $G = 1/\text{RMG}(1, \sqrt{2}) = 0,8346268416\dots$ . Gauss ontdekt dat er een verband was tussen het RMG en de lemniscaat constante. Laatst genoemde is afkomstig van de bètafunctie met  $x = \frac{1}{4}$  en  $y = \frac{1}{2}$  [7] [10] [11].

Dat verband ziet er als volgt uit:

$$\frac{\pi}{2 \operatorname{RMG}(1, \sqrt{2})} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 1,3110287 = \frac{L}{2}, \quad (2.20)$$

waarbij  $L$  de lemniscaat constante is.

Vanuit (2.19) gaan wij (2.20) aantonen.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2 \operatorname{RMG}(1, \sqrt{2})} &= I(1, \sqrt{2}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \cos^2(\theta) + 1 \sin^2(\theta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2(\theta)}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De substitutie die we gaan toepassen is  $t = \cos(\theta)$ . De grenzen worden:  $t = \cos(0) = 1$  en  $t = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Ook krijgen we  $\frac{dt}{d\theta} = -\sin(\theta) = -\sqrt{1-t^2}$ . Dan wordt (2.21)

$$\int_1^0 -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \quad (2.22)$$

We hebben aangetoond dat (2.20) inderdaad klopt.

### Herleiden naar de bètafunctie

Wij gaan nog een stapje verder door (2.22) te herleiden naar de bètafunctie. Echter is het makkelijker om dat andersom te doen. We gaan dus vanuit de definitie van de bètafunctie (1.3) toewerken naar (2.22). Merk op dat we om integraal (2.22) te verkrijgen  $y = \frac{1}{2}$  moeten kiezen.

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1-t}} dt.$$

In de wortel willen we een vierde macht, dus nemen we  $t = u^4$ . De grenzen blijven gelijk, maar  $\frac{dt}{du} = 4u^3$ .

$$\int_0^1 \frac{u^{4x-1} \cdot 4u^3}{\sqrt{1-u^4}} du = 4 \int_0^1 \frac{u^{4x-1}}{\sqrt{1-u^4}} du.$$

We zien nu dat het kiezen van  $x = \frac{1}{4}$  de gewenste integraal oplevert.

$$\frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \quad (2.23)$$

En zo zien we dat we aan de hand van (2.21) en (2.22) een verband tussen  $\pi$ , het RMG van 1 en  $\sqrt{2}$  en de bètafunctie van  $\frac{1}{4}$  en  $\frac{1}{2}$  afleiden.

$$\text{RMG}(1, \sqrt{2}) = \frac{2\pi}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}. \quad (2.24)$$

□

Dit was het einde van het bewijs. Echter wil ik, voordat we doorgaan naar de hoofdtekst, nog opmerken dat we nu een uitdrukking hebben voor de limiet van het RMG.

$$\text{RMG}(a, b) = \frac{\pi}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}}} \quad (2.25)$$

Vanaf nu gaan we ons focussen op hoe wij (2.16) kunnen bewijzen zonder die ingewikkelde substitutie. Aan het eind van het verslag zullen we nog terugblikken op de substitutie, echter blijkt er een naar mijns inziens beter manier te zijn om de twee integralen aan elkaar te koppelen. Beter, omdat het geen substitutie is die uit de lucht komt vallen, maar een transformatie die goed onderbouwd is. De weg naar deze substitutie is lang, maar de afleiding zal glashelder en leerzaam zijn. Opvallend genoeg is de eerste stap die we moeten zetten het begrijpen van de thèta-functies.

# Hoofdstuk 3

## Thèta-functies als oplossing van de warmtevergelijking

In dit hoofdstuk gaan we aan de hand van een wiskundig probleem twee van de vier thèta-functies afleiden. Dit doen we, omdat ik denk dat het beter is om deze functie op een natuur- en wiskundige manier te introduceren in plaats van meteen de definitie te geven en daarmee te werken.

We gaan een natuur- en wiskundige casus erbij pakken en oplossen. Het idee om de thèta-functies zo te introduceren en de casus heb ik uit het boek van Lawden (§1.1 [12]).

### 3.1 Het eerste warmteprobleem

We hebben te maken met het volgende probleem:

$$\text{PDV: } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , 0 \leq x \leq \pi \quad , t \geq 0. \quad (3.1)$$

$$\text{RV: } u(0, t) = 0 \quad , \quad u(\pi, t) = 0 \quad , t \geq 0. \quad (3.2)$$

$$\text{BV: } u(x, 0) = \pi \delta(x - \frac{1}{2}\pi). \quad (3.3)$$

De partiële differentiaalvergelijking die we hier zien, is de eendimensionale warmtevergelijking. De praktische toepassing kunnen we als volgt beschrijven. We hebben een eendimensionale, homogene staaf van een bepaald materiaal. Dit materiaal heeft warmtediffusiviteit  $k$ . De staaf is perfect geïsoleerd behalve aan de zijkanten. Hier wordt de temperatuur constant op 0 graden gehouden. Dit kan je zien als een vloeistof van nul graden die constant langs de staaf stroomt aan beide kanten. Dan is er nog de beginvoorwaarde. Dit is een warmte-impuls in het midden van de staaf met een temperatuur die (oneindig) hoog is.

## Separatie van variabelen

Om deze differentiaalvergelijking op te lossen beraden wij ons op de methode van separatie van variabelen zoals beschreven in het boek van Haberman (H2 [2]).

Laat

$$u(x, t) = \phi(x)h(t). \quad (3.4)$$

Substitueer dit in (3.1).

$$\phi(x) \frac{dh}{dt}(t) = kh(t) \frac{d^2\phi}{dx^2}(x).$$

Links en rechts delen door  $\phi(x)kh(t)$ , geeft

$$\frac{1}{kh(t)} \frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2\phi}{dx^2}(x).$$

We zien dat de linkerkant alleen afhankelijk is van de tijd en de rechterkant alleen van de plaats. Dit betekent dat zowel de linkerkant als de rechterkant gelijk moet zijn aan een constante. We kiezen  $-\lambda$  als constante voor praktische redenen.

$$\frac{1}{kh(t)} \frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = -\lambda.$$

Hieruit volgen twee differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dh}{dt}(t) = -\lambda kh(t), \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = -\lambda\phi(x). \quad (3.6)$$

De eerste (3.5) kunnen we makkelijk oplossen. Voor de uitwerking, zie appendix [C]. We krijgen

$$h(t) = ce^{-\lambda kt}. \quad (3.7)$$

We kunnen nu ook de randvoorwaarden anders uitdrukken.

$$\phi(0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\phi(\pi) = 0. \quad (3.9)$$

Aan de hand van deze randvoorwaarden kunnen wij (3.6) oplossen. Wij kijken alleen naar de oplossingen voor  $\lambda > 0$  en  $\lambda = 0$ , omdat er hoe dan ook geen oplossingen zijn voor  $\lambda < 0$  (zie appendix [E]). Zie hier waarom we voor “ $-\lambda$ ” kozen.

Eerst lossen we op voor  $\lambda = 0$ .

$$\phi(x) = c_1x + c_2. \quad (3.10)$$

Het invullen van (3.8) geeft  $c_2 = 0$  en van (3.9) geeft  $c_1 = 0$ . Dus voor  $\lambda = 0$  krijgen wij alleen de triviale oplossing. Echter zijn wij daar niet naar op zoek en gaan wij door met  $\lambda > 0$ .

$$\phi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Zie appendix [E] voor de afleiding van deze tweede orde differentiaalvergelijking. Om tot deze oplossing te komen heb ik gebruik gemaakt van een methode die beschreven staat in het boek van Braun (p.141-143 [13]). Eerst vullen we (3.8) in. Dan zien we dat  $c_1 = 0$ . Het invullen van (3.9) heeft wel resultaat:

$$c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Dit wordt

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \quad , n = 1, 2, \dots$$

Zo krijgen we

$$\lambda_n = n^2 \quad , n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Vervolgens zien we dat we nieuwe uitdrukkingen voor  $\phi$  en  $h$  krijgen.

$$\phi_n(x) = c_2 \sin(nx) \quad , n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$h_n(t) = ce^{-kn^2t} \quad , n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

### Superpositie

Voor de oplossing van  $u$  maken we gebruik van superpositie en de verkregen oplossingen (3.12) en (3.13).

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) e^{-kn^2t}. \quad (3.14)$$

Met beginvoorwaarde (3.3) gaan wij  $A_n$  bepalen. Voor  $t = 0$  wordt (3.14) dan

$$\pi \delta(x - \frac{1}{2}\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx). \quad (3.15)$$

Links en recht vermenigvuldigen met  $\sin(mx)$  en integreren over  $x$  geeft

$$\pi \int_0^{\pi} \delta(x - \frac{1}{2}\pi) \sin(mx) \, dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \sin(mx) \, dx \quad , m = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Omdat we niet te veel van het onderwerp af willen dwalen, zullen we aannemen dat de serie in (3.15) uniform convergeert naar de diracdelta en volgen op deze manier het boek van Haberman waarin dat ook wordt gedaan [2].<sup>1</sup> Tevens kunnen wij zien dat  $A_n \sin(nx)$  continu is voor alle  $x \in [0, \pi]$ . Nu mogen wij volgens de som en de integraal omdraaien (zie gevolg 9.2.5 in [8]).

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \pi \int_0^{\pi} \delta(x - \frac{1}{2}\pi) \sin(mx) \, dx.$$

Dan gaan we nu een belangrijke regel uit de integraalrekening gebruiken om dit verder op te lossen. Wij gaan gebruik maken van de orthogonaliteit van de sinusfunctie.

$$\int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}. \quad (3.17)$$

Het bewijs van deze gelijkheid staat in de appendix [D]. Door gebruik te maken van (3.17) gaat onze vergelijking er als volgt uitzien, wanneer wij  $m$  gelijkstellen aan  $n$ :

$$A_n = 2 \int_0^{\pi} \delta(x - \frac{1}{2}\pi) \sin(nx) \, dx \quad , n = 1, 2, \dots$$

De integraal kunnen we uitrekenen, omdat we de eigenschappen van de diracdelta kennen.

$$A_n = 2 \sin(\frac{1}{2}\pi n). \quad (3.18)$$

Dan vullen we (3.18) in bij (3.14).

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{2}\pi n) \sin(nx) e^{-kn^2 t}.$$

We schrijven de som uit.

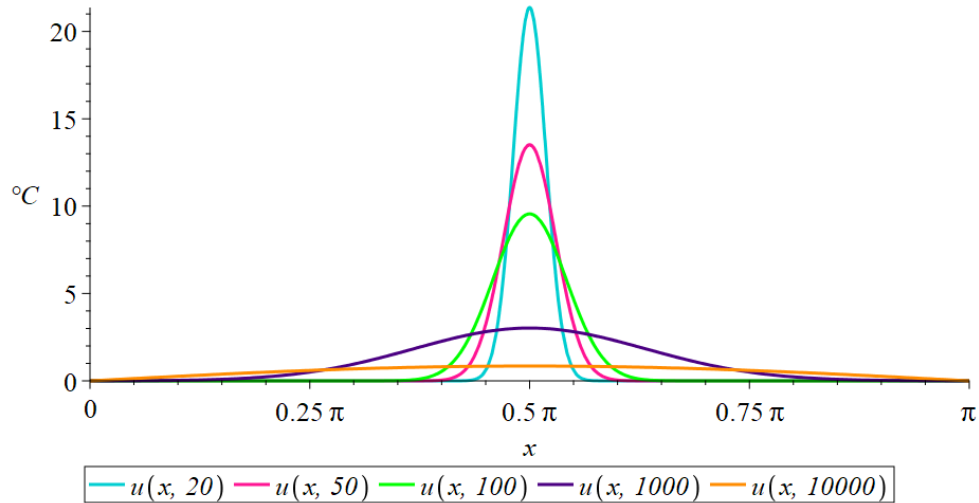
$$u(x, t) = 2 \left( \sin(x) e^{-kt} - \sin(3x) e^{-9kt} + \sin(5x) e^{-25kt} - \sin(7x) e^{-49kt} + \dots \right).$$

We hebben alleen de oneven termen van  $n$ , dus volgt dat

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin((2n+1)x) e^{-(2n+1)^2 kt}. \quad (3.19)$$

Wanneer we deze functie gaan plotten voor verschillende waarden van  $t$  zien we dat de warmte in het begin heel hoog is in het midden ( $x = \frac{1}{2}\pi$ ) en, naarmate de tijd





Figuur 3.1: De warmteverdeling in een staaf op verschillende tijden

vordert, zich steeds meer verspreidt over de staaf en uiteindelijk volledig uit de staaf verdwijnt. Dit is te zien in figuur (3.1).

Als we zeggen dat  $q = e^{-4kt}$  en  $x = z$  met  $z \in \mathbb{C}$ , dan krijgen we de definitie van de eerste Jacobi thèta-functie [14]:

$$\vartheta_1(z; q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin((2n+1)z). \quad (3.20)$$

### 3.2 Andere randvoorwaarden, andere thèta-functie

Met een soort gelijk voorbeeld (ook van Lawden §1.1 [12]) kunnen we nog een thèta-functie afleiden. Dit doen we door de randvoorwaarden aan te passen.

$$\text{RV: } \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0. \quad (3.21)$$

Deze randvoorwaarden houden in dat de staaf overal perfect geïsoleerd is en er dus geen warmte uit de staaf kan verdwijnen. Verder hebben we dezelfde warmtevergelijking en beginvoorwaarde. We gebruiken weer separatie van variabelen en krijgen

---

<sup>1</sup>Zelf heb ik nergens een bewijs hiervan kunnen vinden, dus mocht de lezer er wel één vinden, dan hoor ik dat graag (A.B.L.Frank@student.tudelft.nl)

dezelfde  $h$  (3.7), maar een andere  $\phi$ . De nieuwe randvoorwaarden voor  $\phi$  zijn namelijk

$$\frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \quad , \quad \frac{d\phi}{dx}(\pi) = 0.$$

Deze gaan we invullen in de afgeleide van (3.10):

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Voor  $x = 0$  krijgen wij  $c_2 = 0$  en voor  $x = \pi$  krijgen we de volgende vergelijking:

$$-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Dus of  $\lambda = 0$  of  $\lambda > 0$ . We gaan verder voor het tweede geval

$$\lambda_n = n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Voor  $\lambda = 0$  volgt

$$\phi_0(x) = c_3 \quad , \quad h_0(t) = c. \quad (3.22)$$

En voor  $\lambda > 0$

$$\phi_n(x) = c_1 \cos(nx) \quad , \quad h_n(t) = ce^{-kn^2t} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

We maken weer gebruik van superpositie en krijgen een uitdrukking voor  $u$ :

$$u_n(x, t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx) e^{-kn^2t}. \quad (3.23)$$

Hierbij is de term  $B_0$  afkomstig van  $\lambda = 0$ . Als we  $t = 0$  invullen, krijgen we de beginvoorwaarde.

$$\pi\delta(x - \frac{1}{2}\pi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx).$$

We vermenigvuldigen links en rechts met  $\cos(mx)$  en integreren over  $x$ . Dan krijgen we voor  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\pi \int_0^{\pi} \delta(x - \frac{1}{2}\pi) \cos(mx) dx = \int_0^{\pi} B_0 \cos(mx) dx + \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx) \cos(mx) dx.$$

We gaan er weer van uit dat de serie uniform convergeert. Daarnaast zijn alle termen van de serie continu voor alle  $x \in [0, \pi]$ . We verwisselen de integraal en som.

$$B_0 \int_0^\pi \cos(mx) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) \, dx = \pi \cos\left(\frac{1}{2}\pi m\right) \quad , m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Daarnaast maken we gebruik van een speciale eigenschap van de cosinusfunctie.

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \\ \pi & n = m = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

De uitwerking hiervan staat in de appendix [D]. Eerst vullen wij  $m = 0$  en daarna  $m = n \neq 0$  in (3.24) en gebruiken (3.25).

$$B_0 = 1 \quad , n = 0, \quad (3.26)$$

$$B_n = 2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) \quad , n = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Merk tevens op dat  $\int_0^\pi \cos(mx) \, dx = 0$  voor  $m = 1, 2, \dots$ . Nu gaan we (3.26) en (3.27) invullen in (3.23).

$$u(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) \cos(nx) e^{-kn^2 t} \quad (3.28)$$

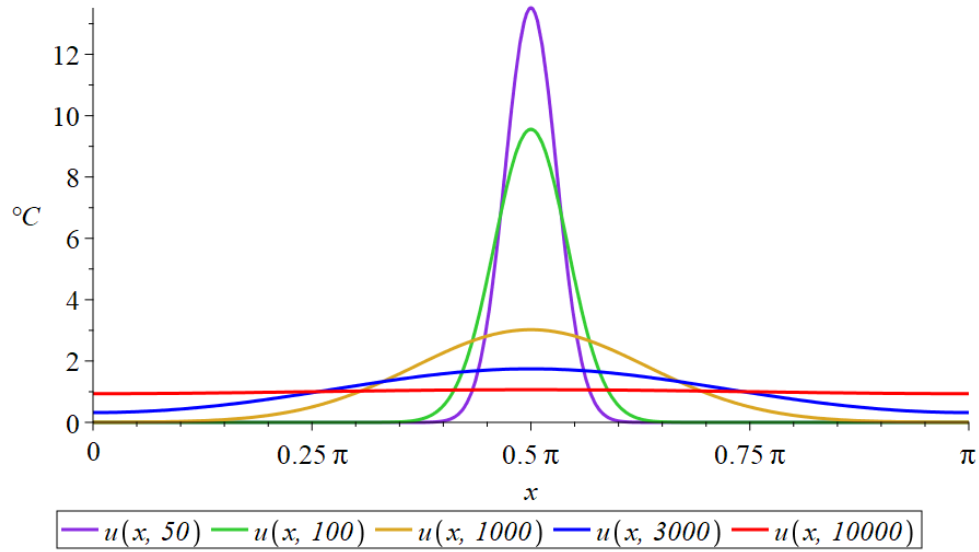
We schrijven de som uit.

$$u(x, t) = 1 + 2 \left( -\cos(2x)e^{-4kt} + \cos(4x)e^{-16kt} - \cos(6x)e^{-36kt} + \dots \right).$$

Dit wordt

$$u(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(2nx) e^{-4kn^2 t} \quad (3.29)$$

Als we deze functie plotten, zien we dat er in het begin ongelooflijk veel hitte in het midden van de staaf is. Naarmate de tijd verstrijkt, verdeelt de warmte zich over de staaf en wordt de hitte in het midden ook minder. Wanneer de warmte bij de zijanten komt, zien we echter dat de warmte niet weg kan (wat bij het eerste probleem wel het geval was) en het zich langzaam ophoopt. Wanneer  $t$  heel groot is, is de warmte uniform verdeeld over de staaf en is het overal 1 graad. Dit zien we terug in figuur (3.2) Als we zeggen dat  $q = e^{-4kt}$  en  $x = z$  met  $z \in \mathbb{C}$ , dan krijgen



Figuur 3.2: De warmteverdeling in een staaf op verschillende tijden met geïsoleerde zijkanen

we de definitie van de vierde Jacobi thèta-functie

$$\vartheta_4(z; q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz). \quad (3.30)$$

Voor de overige twee thèta-functies kon ik geen praktische toepassing vinden. Deze zullen we in het volgende hoofdstuk natuurlijk wel definiëren.

# Hoofdstuk 4

## Het complexe rooster

Voordat we naar de definitie van de thèta-functie gaan kijken, wil ik graag nog een kort hoofdstuk wijden aan de wiskundige wereld waarin we gaan werken. Deze is namelijk anders dan het bekende  $xy$ -vlak. Wij werken namelijk in een complex rooster. Dit is een rooster dat wordt opgebouwd door twee complexe getallen  $\omega_1$  en  $\omega_2$ . Een voorwaarde voor deze twee complexe getallen is wel dat hun quotiënt,  $\tau$ , niet reëel is ( $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ ). Naast deze voorwaarde stellen wij nog een eis, die later van pas komt:  $\text{Im}(\tau) > 0$ . Dan wordt als volgt het complexe rooster gedefinieerd:

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (4.1)$$

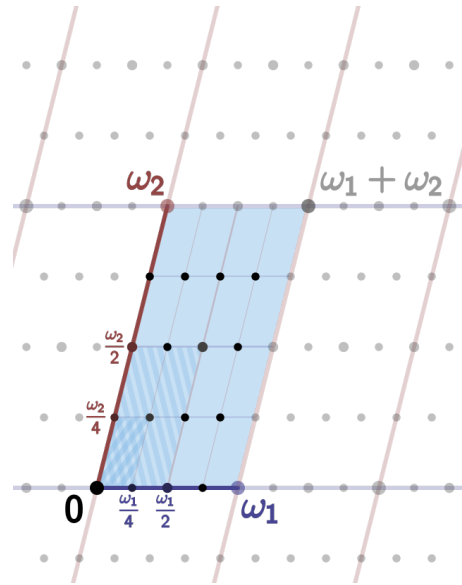
. Een andere notatie hiervoor is  $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ . In figuur (4.1) kunnen we goed zien hoe dit rooster er uit kan komen te zien. Deze uitleg van het complexe rooster komt overeen met het artikel van Nijhoff [15].

Echter is er nog een manier om dit rooster te definiëren. Nijhoff doet dit niet expliciet, maar gebruikt deze ook. In een artikel van Franz [16] wordt deze manier duidelijk uitgelicht. We gaan op basis van  $\tau$  het rooster maken.

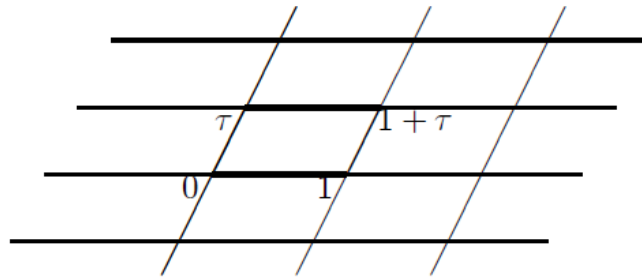
$$\Lambda = \{m\tau + n \mid n, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.2)$$

Hierbij is het eerdere rooster dus genormaliseerd in de  $\omega_1$ -richting. Dit rooster ziet er identiek uit zoals we zien in figuur (4.2)

Nu we dit alles weten, kunnen we doorgaan naar de thèta-functies.



Figuur 4.1: Het complexe rooster  $\Lambda$  gegenereerd door  $\omega_1$  en  $\omega_2$ . Overgenomen van Wikipedia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental\\_pair\\_of\\_periods](https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_pair_of_periods)).



Figuur 4.2: Het complexe rooster  $\Lambda$  gegenereerd door  $\tau$  en 1. Overgenomen uit het werk van Franz, 2007 [16].

# Hoofdstuk 5

## Thèta-functies

Wij zijn geïnteresseerd in elliptische integralen, dus vanzelfsprekend zullen elliptische functies en met name de thèta-functie een grote rol gaan spelen. Eén van de eersten die hier onderzoek naar deed was Carl Gustav Jacob Jacobi in het begin van de negentiende eeuw. Er zijn ook een aantal naar hem vernoemde functies die we tegen zullen komen. Opmerkelijk is dat er veel verschillende notaties zijn voor de thèta-functies, die van elkaar verschillen. Ik houd twee verschillende notaties aan en geef het steeds aan, wanneer ik welke gebruik. We introduceren hieronder de eerste van de twee.

**Definitie Thèta-functie.** We definiëren de thèta-functie als volgt voor  $x \in \mathbb{C}$

$$\theta_{ab}(x|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right]. \quad (5.1)$$

Hierbij zijn  $a, b = 0, 1$  en is  $\tau$  de modulus.

Deze definitie is afkomstig uit het werk van Frank Nijhoff [15]. Wij zullen voorlopig vasthouden aan deze definitie en verbanden leggen met afwijkende definities wanneer nodig. Het lijkt mij handig om nu alvast op te merken dat eigenlijk  $a, b \in \mathbb{Z}$ , maar dat de functies altijd terug te herleiden zijn naar één van de vier originele functies:  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{01}$  en  $\theta_{11}$ .

Merk op dat de reeks convergent is voor alle  $|x| \leq R$  en alle  $R > 0$  onder de voorwaarde dat  $\text{Im}(\tau) > 0$ . Dit zullen wij straks ook nog aantonen.

### 5.1 Eigenschappen

De thèta-functie heeft natuurlijk allerlei eigenschappen die de functie speciaal maken. Wij gaan een aantal vooraanstaande eigenschappen behandelen en ook een paar die later van pas zullen komen. We beginnen met het aantonen dat de functie holomorfe is.

### 5.1.1 Holomorf

Het is belangrijk om aan te tonen dat deze functie holomorf is, omdat we dan veel eigenschappen verkrijgen, zoals complexe differentieerbaarheid (mits de eerste partiële afgeleide continu is). Dit gaan wij in drie stappen doen. De eerste stap is aantonen dat elke term in de reeks analytisch is. Dus laten zien dat

$$f_n(z|\tau) := \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( z + \frac{b}{2} \right) \right]$$

analytisch is voor alle  $n \in \mathbb{Z}$  en  $|z| \leq R$ . Eerst gaan wij  $\theta_{ab}(z|\tau)$  schrijven in de vorm  $u(x, y) + iv(x, y)$  met  $z = x + iy$  en  $\tau = t_1 + it_2$ ,  $t_2 > 0$ .

$$\begin{aligned} f_n(z|\tau) &= \exp \left[ \pi i \left( (t_1 + it_2) \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + iy + \frac{b}{2} \right) \right) \right] \\ &= \exp \left[ -2\pi y \left( n + \frac{a}{2} \right) - \pi t_2 \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + \pi i \left( t_1 \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right) \right] \\ &= \underbrace{e^{-2\pi y(n+\frac{a}{2})-\pi t_2(n+\frac{a}{2})^2} \cos \left( \pi \left[ t_1 \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] \right)}_{u_n(x,y)} \\ &\quad + i \underbrace{e^{-2\pi y(n+\frac{a}{2})-\pi t_2(n+\frac{a}{2})^2} \sin \left( \pi \left[ t_1 \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] \right)}_{v_n(x,y)}. \end{aligned}$$

Vervolgens laten we zien dat  $u$  en  $v$  voldoen aan de Cauchy-Riemann-differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = -\frac{\partial v_n}{\partial x}. \quad (5.2)$$

We gaan nu kijken of dit ook geldt voor onze  $u$  en  $v$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= -2\pi \left( n + \frac{a}{2} \right) e^{-2\pi y(n+\frac{a}{2})-\pi t_2(n+\frac{a}{2})^2} \sin \left( \pi \left[ t_1 \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] \right) = \frac{\partial v_n}{\partial y}. \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= -2\pi \left( n + \frac{a}{2} \right) e^{-2\pi y(n+\frac{a}{2})-\pi t_2(n+\frac{a}{2})^2} \cos \left( \pi \left[ t_1 \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] \right) = -\frac{\partial v_n}{\partial x}. \end{aligned}$$



Dus  $u_n$  en  $v_n$  voldoen aan de vergelijkingen voor alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Tevens zijn ook beide partiële afgeleiden continu, aangezien ze zijn opgebouwd uit continue functies. Dus elke term in de thèta-functie is analytisch.

De tweede stap is aantonen dat  $\theta_{ab}(x|\tau)$  normaal convergeert. Volgens Freitag geldt dit wanneer de reeks absoluut convergent is (Aanmerking III.1.5 [17]). Dit tonen we aan door middel van de “Weierstrass majorant test”. Een reeks van de vorm  $\sum_n a_n(x)$  is absoluut convergent, wanneer  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| < 1$  voor alle  $x$  in het betreffende domein. Dit heet de quotiënt-test en geeft absolute convergentie volgens Lay (Stelling 8.2.7 [8]). In ons geval hebben we

$$a_n(x) = \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right].$$

Laat  $x = x_1 + ix_2$  en  $\tau = t_1 + it_2$ , waarbij  $|x_1|, |x_2| \leq R$  en  $t_2 > 0$ . Tevens maken wij ook gebruik van de uniforme continuïteit in  $x$ . De functie  $a_n(x)$  is namelijk een samenstelling van uniform continue functies in het domein waarvoor geldt dat  $|x| \leq R$ .

Nu krijgen we

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \exp \left[ -2\pi x_2 - \pi t_2(a + 2n + 1) + i \{ \pi(a + 2n + 1)t_1 + 2_1 + \pi b \} \right] \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \exp \left[ -2\pi x_2 - \pi t_2(a + 2n + 1) \right] \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \exp \left[ 4R\pi - \pi t_2(a + 2n + 1) \right] = 0. \end{aligned}$$

Deze laatste stap volgt uit het feit dat  $t_2 > 0$  en  $x_2 > -R$ . Nu zien we waarom er dus moet gelden dat  $\text{Im}(\tau) > 0$ . Nu we de absolute convergentie van de reeks hebben aangetoond, kunnen we de derde en tevens laatste stap uitvoeren. We gebruiken nu een stelling uit het boek van Freitag om te bewijzen dat de thèta-functie holomorfe is (Stelling III.1.6 [17]). Deze zegt dat wanneer  $\theta_{ab}(x|\tau)$  een normaal convergente reeks is van analytische functies op een open deelverzameling van  $\mathbb{C}$ , dat dan de limiet ook analytisch is. Zoals we hebben bewezen is thèta-functie normaal convergent en zijn de termen analytisch, dus is de thèta-functie zelf ook analytisch (ook wel holomorfe geheten).

### 5.1.2 Dubbel quasi-periodiek

De functie is dubbel quasi-periodiek [15].

$$\begin{aligned}
 \theta_{ab}(x+1|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + 1 + \frac{b}{2} \right) \right] \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) + 2\pi i n + \pi i a \right] \\
 &= e^{\pi i a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] = e^{\pi i a} \theta_{ab}(x|\tau).
 \end{aligned}$$

De eerste periodieke relatie is dus

$$\theta_{ab}(x+1|\tau) = e^{\pi i a} \theta_{ab}(x|\tau). \quad (5.3)$$

De andere gaat als volgt

$$\begin{aligned}
 \theta_{ab}(x+\tau|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \tau + \frac{b}{2} \right) \right] \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( n^2 \tau + n \tau a + \frac{\tau a^2}{4} + 2n x + 2n \tau + n b + a x + a \tau + \frac{a b}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

We voegen termen **toe** en halen deze er ook weer **af**.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( n^2 \tau + 2n\tau \left( \frac{a+2}{2} \right) + \tau \left( \frac{a+2}{2} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tau + 2nx + nb + 2x + b + ax + \frac{ab}{2} - 2x - b \right) \right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau \left( n+1 + \frac{a}{2} \right) + 2 \left( n+1 + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) - \tau - 2x - b \right) \right] \\
&= e^{-\pi i(\tau+2x+b)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( m + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( m + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] = e^{-\pi i(\tau+2x+b)} \theta_{ab}(x|\tau).
\end{aligned}$$

De tweede periodieke relatie is dus

$$\theta_{ab}(x + \tau|\tau) = e^{-\pi i(\tau+2x+b)} \theta_{ab}(x|\tau). \quad (5.4)$$

### 5.1.3 Even en oneven

Wanneer we deze functie verder gaan onderzoeken, zien we dat er nog veel meer interessante eigenschappen zijn. Laten we eerst kijken voor welke waarden van  $a, b$  de functie even of oneven is.

$$\begin{aligned}
\theta_{ab}(-x|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( -x + \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ \pi i \tau \left( -n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( -n + \frac{a}{2} \right) \left( -x + \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ \pi i \tau \left( n - \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n - \frac{a}{2} \right) \left( x - \frac{b}{2} \right) \right] = \theta_{-a, -b}(x|\tau).
\end{aligned}$$

Het maakt namelijk niet uit of je begint met sommeren bij  $-\infty$  of  $\infty$ . We werken nu toe naar een uitdrukking met  $a, b$  en  $x$ .

$$\theta_{-a,-b}(x|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau n^2 - \tau n a + \frac{\tau a^2}{4} + 2n x - n b - a x + \frac{a b}{2} \right) \right].$$

We voegen termen **toe** en halen deze er ook weer **af**

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau n^2 + \tau n a + \frac{\tau a^2}{4} + 2n x - 2\tau n a + n b + a x - \tau a^2 + \frac{a b}{2} - 2n b - 2a x + \tau a^2 \right) \right] \\ &= e^{\pi i(\tau a^2 + 2a x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x - \tau a + \frac{b}{2} \right) \right) \right] \\ &= e^{\pi i(\tau a^2 + 2a x)} \theta_{ab}(x - a\tau|\tau). \end{aligned}$$

We hebben hier gebruik gemaakt van het feit dat  $b$  een geheel getal is. Voor de laatste stap kunnen we gebruik maken van vergelijking (5.4), maar ik wil de vergelijking van  $e^{\pi i(\tau a^2 + 2a x)} \theta_{ab}(x - a\tau|\tau)$  helemaal uitwerken.

$$\begin{aligned} & e^{\pi i(\tau a^2 + 2a x)} \theta_{ab}(x - a\tau|\tau) \\ &= e^{\pi i(\tau a^2 + 2a x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau n^2 + \tau n a + \frac{\tau a^2}{4} + 2n x - 2\tau n a + n b + a x - \tau a^2 + \frac{a b}{2} \right) \right] \\ &= e^{\pi i(\tau a^2 + 2a x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau n^2 - \tau n a + \frac{\tau a^2}{4} + 2n x + n b + a x + \frac{a b}{2} - \tau a^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

We voegen termen **toe** en halen deze er ook weer **af**

$$\begin{aligned}
&= e^{\pi i(\tau a^2 + 2ax)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau \left( n - a + \frac{a}{2} \right)^2 + 2nx + nb \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2ax - ab + ax + \frac{ab}{2} - \tau a^2 + 2ax + ab \right) \right] \\
&= e^{\pi i(\tau a^2 + 2ax)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau \left( n - a + \frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left( n - a + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) - \tau a^2 + 2ax + ab \right) \right] \\
&= e^{\pi i(\tau a^2 + 2ax)} e^{\pi i(-\tau a^2 + 2ax + ab)} \theta_{ab}(x|\tau) = e^{\pi iab} \theta_{ab}(x|\tau).
\end{aligned}$$

Bij de één-na-laatste stap maken we gebruik van het feit dat  $a$  een geheel getal is. Na al deze berekeningen kunnen we de volgende vergelijking opstellen:

$$\theta_{ab}(-x|\tau) = \theta_{-a,-b}(x|\tau) = e^{\pi i(\tau a^2 - 2ax)} \theta_{ab}(x - a\tau|\tau) = e^{\pi iab} \theta_{ab}(x|\tau). \quad (5.5)$$

Als we nu gaan kijken naar de vier mogelijke functies met  $a, b = 0, 1$  zien we dat drie van vier functies volgens vergelijking (5.5) even zijn en er één oneven is.

$$\begin{aligned}
\theta_{00}(-x|\tau) &= \theta_{00}(x|\tau) \quad , \quad \theta_{10}(-x|\tau) = \theta_{10}(x|\tau), \\
\theta_{01}(-x|\tau) &= \theta_{01}(x|\tau) \quad , \quad \theta_{11}(-x|\tau) = -\theta_{11}(x|\tau).
\end{aligned} \quad (5.6)$$

### 5.1.4 Opmerkelijke eigenschappen

De thèta-functie beschikt over nog een aantal interessante eigenschappen. Hieronder behandel ik er vijf. De eerste drie zijn mijn eigen werk en een toevoeging aan dat van Frank Nijhoff [15].

$$\begin{aligned}
\theta_{a,-b}(x|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x - \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) - 2\pi inb - \pi iab \right] \\
&= e^{-\pi iab} \theta_{ab}(x|\tau).
\end{aligned}$$

Dus volgt de vergelijking

$$\theta_{a,-b}(x|\tau) = e^{-\pi i ab} \theta_{ab}(x|\tau). \quad (5.7)$$

Dan hebben we nog twee vergelijkingen die betrekking hebben op  $2a$  en  $2b$  met  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \theta_{2a,b}(x|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau (n+a)^2 + 2\pi i (n+a) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau m^2 + 2\pi i m \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] = \theta_{0,b}(x|\tau). \end{aligned}$$

Bij de één-na-laatste stap maken we gebruik van  $m := n + a$ .

Nu voor  $2b$ .

$$\begin{aligned} \theta_{a,2b}(x|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) (x+b) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) x + 2\pi i n b + \pi i a b \right] = e^{\pi i ab} \theta_{a,0}(x|\tau). \end{aligned}$$

De twee eigenschappen die we net hebben bewezen zijn dus

$$\theta_{2a,b}(x|\tau) = \theta_{0,b}(x|\tau) \quad , \quad \theta_{a,2b}(x|\tau) = e^{\pi i ab} \theta_{a,0}(x|\tau). \quad (5.8)$$

Bij de laatste twee eigenschappen gaan we kijken wat er gebeurt als we bij  $a$  en  $b$  één optellen.

$$\begin{aligned} \theta_{a,b+1}(x|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b+1}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{1}{2} + \frac{b}{2} \right) \right] = \theta_{ab} \left( x + \frac{1}{2} | \tau \right). \end{aligned}$$

Voor  $a + 1$  is het iets ingewikkelder.

$$\begin{aligned}
\theta_{a+1,b}(x|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a+1}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a+1}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau n^2 + \tau n a + \tau n + \frac{\tau a^2}{4} + \frac{\tau a}{2} + \frac{\tau}{4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) + x + \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \left( \tau n^2 + \tau n a + \frac{\tau a^2}{4} + 2 \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{\tau}{2} + \frac{b}{2} \right) + \frac{\tau}{4} + x + \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= e^{\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i \left( x + \frac{b}{2} \right)} \theta_{ab} \left( x + \frac{\tau}{2} | \tau \right).
\end{aligned}$$

We hebben net de twee vergelijkingen verkregen waarbij we een halve verschuiving zien.

$$\theta_{a,b+1}(x|\tau) = \theta_{ab} \left( x + \frac{1}{2} | \tau \right) \quad , \quad \theta_{a+1,b}(x|\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i \left( x + \frac{b}{2} \right)} \theta_{ab} \left( x + \frac{\tau}{2} | \tau \right). \quad (5.9)$$

Gebruikmakend van deze vergelijkingen kunnen we een soort omzettafel maken voor de vier thèta-functies.

$$\begin{aligned}
\theta_{00}(x|\tau) &= \theta_{01} \left( x + \frac{1}{2} | \tau \right) = \mu \theta_{10} \left( x + \frac{1}{2} \tau | \tau \right) = -\mu \theta_{11} \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau | \tau \right), \\
\theta_{10}(x|\tau) &= -\theta_{11} \left( x + \frac{1}{2} | \tau \right) = \mu \theta_{00} \left( x + \frac{1}{2} \tau | \tau \right) = \mu \theta_{01} \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau | \tau \right), \\
\theta_{01}(x|\tau) &= \theta_{00} \left( x + \frac{1}{2} | \tau \right) = i\mu \theta_{11} \left( x + \frac{1}{2} \tau | \tau \right) = i\mu \theta_{10} \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau | \tau \right), \\
\theta_{11}(x|\tau) &= \theta_{10} \left( x + \frac{1}{2} | \tau \right) = i\mu \theta_{01} \left( x + \frac{1}{2} \tau | \tau \right) = i\mu \theta_{00} \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau | \tau \right).
\end{aligned} \quad (5.10)$$

Hierbij is  $\mu = e^{\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i x}$ .

## 5.2 Notatieverschil tussen veel bronnen

Voordat we doorgaan naar de volgende sectie, zou ik graag nog willen ingaan op een notatieverschil dat veel voorkomt. In veel bronnen zal je een andere notatie

vinden waarbij  $\vartheta(z; q)$  gebruikt wordt in plaats van  $\theta(x|\tau)$ . Deze notatie is ingevoerd door Tannery en Molk [18] en overgenomen door vele wiskundigen [19] die onderzoek hebben gedaan naar de thèta-functies, waaronder Whittaker en Watson [20]. Ik zou hier kort op in willen gaan en laten zien wat het verband is tussen enerzijds  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_3$  en  $\vartheta_4$  én anderzijds (5.6). We gaan veel gebruikmaken van Eulers formule ( $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ ) [21]. Laten we beginnen met de meeste eenvoudige thèta-functie:  $\theta_{00}$ .

$$\begin{aligned}
\theta_{00}(x|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} \cdot e^{2\pi i n x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} \cdot (\cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} \cos(2\pi n x) \\
&= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n z) := \vartheta_3(z; q).
\end{aligned}$$

Hierbij gebruiken we dat  $z = \pi x$  en  $q = e^{\pi i \tau}$ . Dan kijken we nu naar  $\theta_{10}$ .

$$\begin{aligned}
\theta_{10}(x|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2} \cdot e^{2\pi i (n+\frac{1}{2}) x} \\
&= q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)} \cdot e^{(2n+1)iz} \\
&= q^{\frac{1}{4}} \left( e^{iz} + q^2 e^{3iz} + e^{-iz} + q^6 e^{5iz} + q^2 e^{-3iz} + \dots \right) \\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos((2n+1)z) := \vartheta_2(z; q).
\end{aligned}$$



We gaan meteen verder met  $\theta_{01}$ .

$$\begin{aligned}
\theta_{01}(x|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} \cdot e^{2\pi i n(x + \frac{1}{2})} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2inz} \\
&= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz) := \vartheta_4(z; q).
\end{aligned}$$

En als laatste behandelen we  $\theta_{11}$ .

$$\begin{aligned}
\theta_{11}(x|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (n + \frac{1}{2})^2} \cdot e^{2\pi i (n + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{4}\pi i \tau} \cdot e^{\pi i \tau n(n+1)} \cdot e^{\pi i n} \cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} \cdot e^{(2n+1)\pi i x} \\
&= iq^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \cdot e^{(2n+1)iz} \\
&= iq^{\frac{1}{4}} \left( e^{iz} - q^2 e^{3iz} - e^{-iz} + q^6 e^{5iz} + q^2 e^{-3iz} + \dots \right) \\
&= -2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin((2n+1)z) := -\vartheta_1(z; q).
\end{aligned}$$

Wij hebben nu dus 2 notaties voor de thèta-functie die allemaal met elkaar verbonden zijn.

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z; q) &= -\theta_{11}(x|\tau) \quad , \quad \vartheta_2(z; q) = \theta_{10}(x|\tau), \\
\vartheta_3(z; q) &= \theta_{00}(x|\tau) \quad , \quad \vartheta_4(z; q) = \theta_{01}(x|\tau).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Met  $z = \pi x$  en  $q = e^{\pi i \tau}$ .

Ook wil ik graag nog de definities geven van deze functies (we hebben ze zelf al afgeleid).

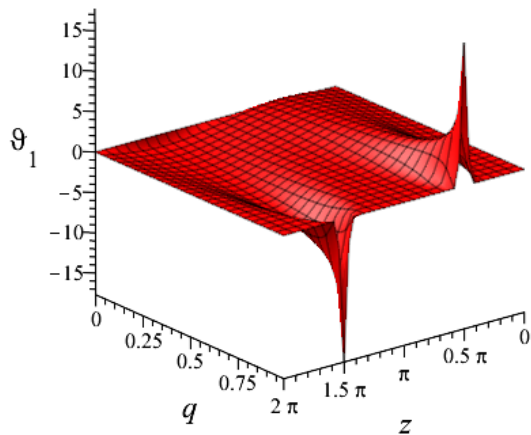
$$\vartheta_1(z; q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)iz} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin((2n+1)z), \quad (5.12)$$

$$\vartheta_2(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)iz} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos((2n+1)z), \quad (5.13)$$

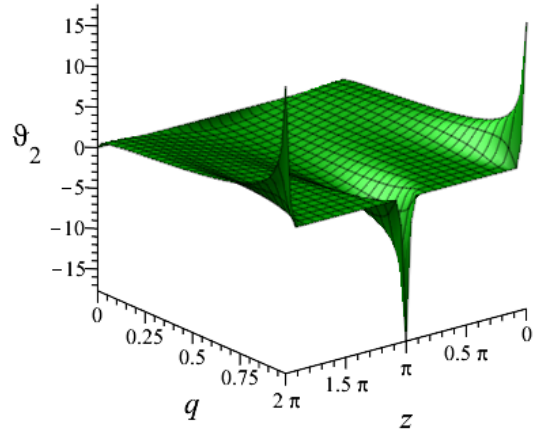
$$\vartheta_3(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{inz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz), \quad (5.14)$$

$$\vartheta_4(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2inz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz). \quad (5.15)$$

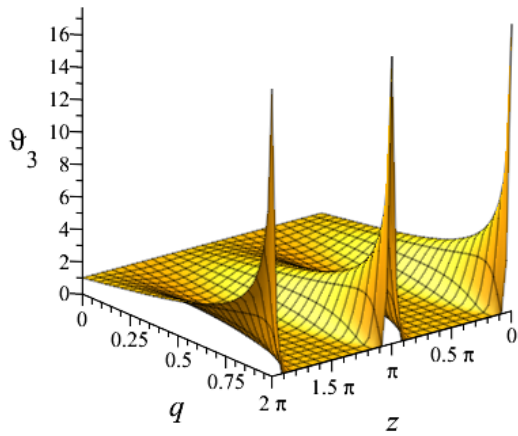
Deze definities gaan wij ook veel gebruiken, omdat de  $q$  een heeft ten opzichte van de notatie met een  $\tau$ . Namelijk dat je  $\exp[\pi i \tau]$  moet omrekenen naar de vorm  $e^{-t_2}(\cos(\pi t_1) + i \sin(\pi t_1))$  met  $t = t_1 + it_2$ , terwijl  $q$  al gelijk in de vorm  $q = q_1 + iq_2$ . We zullen tussen de  $\theta$ -notatie en  $\vartheta$ -notatie afwisselen en dit ook duidelijk aangeven. Een ander voordeel van de  $\vartheta$ -definitie is dat deze makkelijker te plotten is zoals we kunnen zien in (5.1).



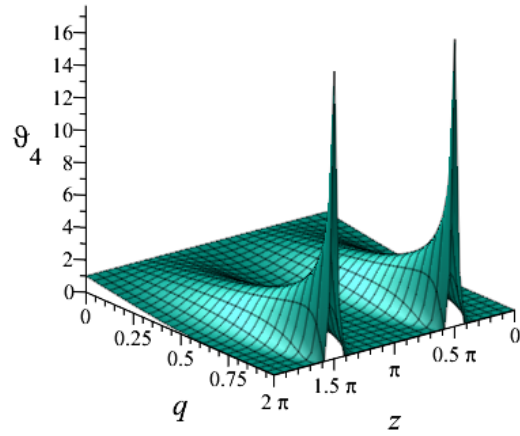
(a)  $\vartheta_1(z; q)$



(b)  $\vartheta_2(z; q)$



(c)  $\vartheta_3(z; q)$



(d)  $\vartheta_4(z; q)$

Figuur 5.1: De vier thèta-functies geplot op het interval  $(z, q) \in [0, 2\pi] \times [0, 0.99]$

### 5.3 Fundamentele optelformules

Wij gaan laten zien dat er optelformules zijn voor de thèta-functie, omdat hieruit vele vergelijkingen en identiteiten volgen die wij later nodig hebben. Wanneer wij twee thèta-functies met elkaar vermenigvuldigen kunnen we weer een quasi-periodieke functie terug verwachten met dezelfde eigenschappen. Dat zijn de redenen dat wij hiernaar gaan kijken.

Dus, stel nou dat wij twee thèta-functies met elkaar vermenigvuldigen, kunnen wij deze dan uitdrukken in andere thèta-functies? Dat gaan wij in deze paragraaf onderzoeken.

$$\begin{aligned}
& \theta_{ab}(x|\tau)\theta_{cd}(y|\tau) \\
&= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi i \tau \left( m + \frac{c}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( m + \frac{c}{2} \right) \left( y + \frac{d}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \pi i \tau \left( \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + \left( m + \frac{c}{2} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\pi i \left( \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) + \left( m + \frac{c}{2} \right) \left( y + \frac{d}{2} \right) \right) \right] \\
&= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \frac{1}{2} \pi i \tau \left( \left( n + m + \frac{a+c}{2} \right)^2 + \left( n - m + \frac{a-c}{2} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi i \left( \left( n + m + \frac{a+c}{2} \right) \left( x + y + \frac{b+d}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( n - m + \frac{a-c}{2} \right) \left( x - y + \frac{b-d}{2} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Laat  $N = n + m$  en  $M = n - m$ , dan volgt dat  $N + M = 2n \in 2\mathbb{Z}$  en ook volgt dat  $N - M = 2m \in 2\mathbb{Z}$ . Dus  $N$  en  $M$  zijn tegelijk even of oneven. Wanneer we de sommatie over  $n, m$  gaan vervangen door  $N, M$  krijgen we twee sommaties. Bij de één zijn  $N, M$  even en bij de ander oneven. Echter mogen wij dit alleen doen wanneer de

serie absoluut convergent is. Wanneer een reeks de volgende vorm heeft  $\sum_{n,m} a_{n,m}(x)$  is deze absoluut convergent wanneer  $\limsup_{n,m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1,m+1}(x)}{a_{n,m}(x)} \right| < 1$  voor alle  $x$  in het betreffende domein. Dit heet de quotiënt-test en geeft absolute convergentie volgens Lay (Stelling 8.2.7 [8]). In ons geval hebben we

$$a_{n,m}(x, y) = \exp \left[ \pi i \tau \left( n + \frac{a}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( n + \frac{a}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right) + \pi i \tau \left( m + \frac{c}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( m + \frac{c}{2} \right) \left( y + \frac{d}{2} \right) \right].$$

Laat  $x = x_1 + ix_2$  en  $y = y_1 + iy_2$  en  $\tau = t_1 + it_2$ , waarbij  $|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2| \leq R$  en  $t_2 > 0$ . Dan krijgen we

$$\begin{aligned} \limsup_{n,m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1,m+1}(x, y)}{a_{n,m}(x, y)} \right| &= \limsup_{n,m \rightarrow \infty} e^{-2\pi(x_2+y_2)-\pi t_2(a+c+2n+2m+2)} \\ &\leq \limsup_{n,m \rightarrow \infty} e^{4R\pi - \pi t_2(a+c+2n+2m+2)} = 0. \end{aligned}$$

Deze laatste stap volgt uit het feit dat  $t_2 > 0$ . En nu zien we waarom er dus moet gelden dat  $\text{Im}(\tau) > 0$ .

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \rightsquigarrow \sum_{\substack{N,M \in \mathbb{Z} \\ N,M \text{ even}}} + \sum_{\substack{N,M \in \mathbb{Z} \\ N,M \text{ oneven}}}$$

Als we  $N, M$  in de eerste sommatie vervangen met  $2N, 2M$  en in de tweede met  $2N + 1, 2M + 1$  dan kunnen we sommeren over  $N, M \in \mathbb{Z}$ . We krijgen dan.

$$\begin{aligned}
& \theta_{ab}(x|\tau)\theta_{cd}(y|\tau) \\
&= \sum_{N, M \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \frac{1}{2} \pi i \tau \left( \left( 2N + \frac{a+c}{2} \right)^2 + \left( 2M + \frac{a-c}{2} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi i \left( \left( 2N + \frac{a+c}{2} \right) \left( x + y + \frac{b+d}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 2M + \frac{a-c}{2} \right) \left( x - y + \frac{b-d}{2} \right) \right) \right] \\
&+ \sum_{N, M \in \mathbb{Z}} \exp \left[ \frac{1}{2} \pi i \tau \left( \left( 2N + 1 + \frac{a+c}{2} \right)^2 + \left( 2M + 1 + \frac{a-c}{2} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi i \left( \left( 2N + 1 + \frac{a+c}{2} \right) \left( x + y + \frac{b+d}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 2M + 1 + \frac{a-c}{2} \right) \left( x - y + \frac{b-d}{2} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Laat  $A = \frac{a+c}{2}$ ,  $C = \frac{a-c}{2}$ ,  $B = b+d$  en  $D = b-d$ . Dan volgt

$$\begin{aligned}
&= \sum_{N, M \in \mathbb{Z}} \exp \left[ 2\pi i \tau \left( \left( N + \frac{A}{2} \right)^2 + \left( M + \frac{C}{2} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\pi i \left( \left( N + \frac{A}{2} \right) \left( x + y + \frac{B}{2} \right) + \left( M + \frac{C}{2} \right) \left( x - y + \frac{D}{2} \right) \right) \right] \\
&+ \sum_{N, M \in \mathbb{Z}} \exp \left[ 2\pi i \tau \left( \left( N + \frac{A+1}{2} \right)^2 + \left( M + \frac{C+1}{2} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\pi i \left( \left( N + \frac{A+1}{2} \right) \left( x + y + \frac{B}{2} \right) + \left( M + \frac{C+1}{2} \right) \left( x - y + \frac{D}{2} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Dus krijgen we

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{N \in \mathbb{Z}} \exp \left[ 2\pi i \tau \left( N + \frac{A}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( N + \frac{A}{2} \right) \left( x + y + \frac{B}{2} \right) \right] \right) \\
&\cdot \left( \sum_{M \in \mathbb{Z}} \exp \left[ 2\pi i \tau \left( M + \frac{C}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( M + \frac{C}{2} \right) \left( x - y + \frac{D}{2} \right) \right] \right) \\
&+ \left( \sum_{N \in \mathbb{Z}} \exp \left[ 2\pi i \tau \left( N + \frac{A+1}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( N + \frac{A+1}{2} \right) \left( x + y + \frac{B}{2} \right) \right] \right) \\
&\cdot \left( \sum_{M \in \mathbb{Z}} \exp \left[ 2\pi i \tau \left( M + \frac{C+1}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( M + \frac{C+1}{2} \right) \left( x - y + \frac{D}{2} \right) \right] \right) \\
&= \theta_{AB}(x+y|2\tau)\theta_{CD}(x-y|2\tau) + \theta_{A+1,B}(x+y|2\tau)\theta_{C+1,D}(x-y|2\tau).
\end{aligned}$$

Dus nu hebben we de volgende vergelijking voor het vermenigvuldigen van thèta-functies:

$$\theta_{ab}(x|\tau)\theta_{cd}(y|\tau) = \theta_{AB}(x+y|2\tau)\theta_{CD}(x-y|2\tau) + \theta_{A+1,B}(x+y|2\tau)\theta_{C+1,D}(x-y|2\tau), \tag{5.16}$$

waarbij

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a+c}{2} \quad , \quad B = b+d, \\
C &= \frac{a-c}{2} \quad , \quad D = b-d.
\end{aligned}$$

Merk op dat voor  $a$  en  $c$  moet gelden dat of  $a = c = 0$  of  $a = c = 1$ . Uiteraard kunnen  $b$  en  $d$  de waarde 1 of 0 aannemen. Op deze manier kunnen we de acht vermenigvuldigingen opstellen van de thèta-functies met behulp van (5.7) en (5.8). In het geval dat je namelijk  $b = 0$  en  $d = 1$  hebt, dan is  $D = -1$ . Om dit op te lossen gebruik je (5.7). Mijn toevoeging aan het werk van Frank Nijhoff zijn de bewijzen van (5.7) en (5.8) die hij wel gebruikt heeft, maar niet genoemd.

De acht optelformules:

$$\theta_{00}(x|\tau)\theta_{00}(y|\tau) = \theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau) + \theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau), \quad (5.17)$$

$$\theta_{01}(x|\tau)\theta_{00}(y|\tau) = \theta_{01}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau) + \theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau), \quad (5.18)$$

$$\theta_{00}(x|\tau)\theta_{01}(y|\tau) = \theta_{01}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau) - \theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau), \quad (5.19)$$

$$\theta_{01}(x|\tau)\theta_{01}(y|\tau) = \theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau) - \theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau), \quad (5.20)$$

$$\theta_{10}(x|\tau)\theta_{10}(y|\tau) = \theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau) + \theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau), \quad (5.21)$$

$$\theta_{11}(x|\tau)\theta_{10}(y|\tau) = \theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau) + \theta_{01}(x+y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau), \quad (5.22)$$

$$\theta_{10}(x|\tau)\theta_{11}(y|\tau) = \theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau) - \theta_{01}(x+y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau), \quad (5.23)$$

$$\theta_{11}(x|\tau)\theta_{11}(y|\tau) = -\theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau) + \theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau). \quad (5.24)$$

### 5.3.1 Gevolgen van de optelformules

Hieronder zullen wij een aantal belangrijke gevolgen afleiden van de zonet bewezen optelformules. Deze zullen we laten gebruiken bij Jacobi's elliptische functies. We pakken vergelijkingen (5.17) en (5.21), kwadrateren ze en trekken ze van elkaar af.

$$\begin{aligned} \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) &= \theta_{00}^2(x+y|2\tau)\theta_{00}^2(x-y|2\tau) \\ &\quad + 2\theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau)\theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau) \\ &\quad + \theta_{10}^2(x+y|2\tau)\theta_{10}^2(x-y|2\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) &= \theta_{10}^2(x+y|2\tau)\theta_{10}^2(x-y|2\tau) \\ &\quad + 2\theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau)\theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau) \\ &\quad + \theta_{00}^2(x+y|2\tau)\theta_{10}^2(x-y|2\tau). \end{aligned}$$

We trekken de tweede van de eerste af.

$$\begin{aligned} \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) - \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) &= \theta_{00}^2(x+y|2\tau)\theta_{00}^2(x-y|2\tau) + \theta_{10}^2(x+y|2\tau)\theta_{10}^2(x-y|2\tau) \\ &\quad - \theta_{10}^2(x+y|2\tau)\theta_{00}^2(x-y|2\tau) - \theta_{00}^2(x+y|2\tau)\theta_{10}^2(x-y|2\tau). \end{aligned}$$

En dit leidt tot de volgende vergelijking

$$\begin{aligned} \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) - \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) \\ = (\theta_{00}^2(x+y|\tau) - \theta_{10}^2(x+y|2\tau)) \cdot (\theta_{00}^2(x-y|2\tau) - \theta_{10}^2(x-y|2\tau)). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Vervolgens vullen we  $y = 0$  in bij vergelijking (5.20)

$$\theta_{01}(x|\tau)\theta_{01}(0|\tau) = \theta_{00}^2(x|2\tau) - \theta_{10}^2(x|2\tau). \quad (5.26)$$



Nu combineren we (5.25) en (5.26) en krijgen we de identiteit

$$\theta_{01}(x+y|\tau)\theta_{01}(x-y|\tau)\theta_{01}^2(0|\tau) = \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) - \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau). \quad (5.27)$$

Het is opvallend en tevens erg handig dat we ervoor hebben gezorgd dat alle thèta-termen met  $2\tau$  verdwenen zijn. Op analoge wijze gaan wij nog drie van dit soort identiteiten afleiden. Kwadrateer (5.19) en (5.22) en tel ze bij elkaar op.

$$\begin{aligned} & \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) + \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(y|\tau) \\ &= (\theta_{11}^2(x+y|2\tau) + \theta_{01}^2(x+y|2\tau)) \cdot (\theta_{11}^2(x-y|2\tau)\theta_{01}^2(x-y|2\tau)). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Deze keer stellen we  $y$  gelijk aan nul in vergelijking (5.18).

$$\theta_{01}(x|\tau)\theta_{00}(0|\tau) = \theta_{01}^2(x|2\tau) + \theta_{11}^2(x+y|2\tau). \quad (5.29)$$

Vergelijkingen (5.28) en (5.29) geven nu samen weer een identiteit.

$$\theta_{01}(x+y|\tau)\theta_{01}(x-y|\tau)\theta_{00}^2(0|\tau) = \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) + \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(y|\tau). \quad (5.30)$$

Nog twee gelijksoortige identiteiten te gaan. Kwadrateer en trek (5.24) van (5.21) van elkaar af.

$$\begin{aligned} & \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) - \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{11}^2(y|\tau) \\ &= 4\theta_{10}(x+y|2\tau)\theta_{00}(x+y|2\tau)\theta_{10}(x-y|2\tau)\theta_{00}(x-y|2\tau). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Laat  $y = 0$  in vergelijking (5.21)

$$\theta_{10}(x|\tau)\theta_{10}(0|\tau) = 2\theta_{10}(x|2\tau)\theta_{00}(x|2\tau). \quad (5.32)$$

Pak (5.31) en (5.32) samen

$$\theta_{10}(x+y|\tau)\theta_{10}(x-y|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) = \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(y|\tau) - \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{11}^2(y|\tau).$$

Dit is echter niet de identiteit waar wij naar opzoek zijn. Wij gaan gebruikmaken van (5.10). Eerst tellen we  $\frac{1}{2}\tau$  op bij  $y$ .

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{4}\pi i\tau - \pi i(x+y) - \frac{1}{4} + \pi i(x-y)}\theta_{00}(x+y|\tau)\theta_{00}(x-y|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\pi i\tau - 2\pi iy}\theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) - (-1)e^{-\frac{1}{2}\pi i\tau - 2\pi iy}\theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(y|\tau). \end{aligned}$$

Zo krijgen we de identiteit

$$\theta_{00}(x+y|\tau)\theta_{00}(x-y|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) = \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) + \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(y|\tau). \quad (5.33)$$

De laatste identiteit verkrijgen we door in (5.33)  $\frac{1}{2}$  bij  $x$  op te tellen en weer te kijken naar (5.8) en (5.9).

$$\theta_{01}(x+y|\tau)\theta_{01}(x-y|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) = \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(y|\tau) + \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(y|\tau). \quad (5.34)$$

We hebben nu vier identiteiten afgeleid. Echter kunnen we uit deze vier vergelijkingen er nog vier verkrijgen. En juist die gaan wij gebruiken bij Jacobi's elliptische functies. Stel in identiteiten (5.27), (5.30), (5.33) en (5.34)  $y$  gelijk aan nul. Dan krijgen we

$$\theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(0|\tau) = \theta_{01}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(0|\tau) + \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau), \quad (5.35)$$

$$\theta_{01}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(0|\tau) = \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) + \theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(0|\tau), \quad (5.36)$$

$$\theta_{00}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) = \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(0|\tau) + \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(0|\tau), \quad (5.37)$$

$$\theta_{01}^2(x|\tau)\theta_{10}^2(0|\tau) = \theta_{11}^2(x|\tau)\theta_{00}^2(0|\tau) + \theta_{10}^2(x|\tau)\theta_{01}^2(0|\tau). \quad (5.38)$$

### 5.3.2 De identiteit $\theta'_{11}(0) = -\pi\theta_{10}(0)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)$

Wij gaan hier kort een identiteit afleiden, die we later gaan gebruiken bij de productformule. Ik volg zeer nauw het bewijs van Lawden (p.12 [12]). We pakken (5.22) en nemen de afgeleide naar  $x$ .

$$\begin{aligned} \theta'_{11}(x|\tau)\theta_{10}(y|\tau) &= \theta'_{11}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau) + \theta_{11}(x+y|2\tau)\theta'_{01}(x-y|2\tau) \\ &\quad + \theta'_{01}(x+y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau) + \theta_{01}(x+y|2\tau)\theta'_{11}(x-y|2\tau). \end{aligned}$$

We vullen nu  $x = y = 0$  in.

$$\theta'_{11}(0|\tau)\theta_{10}(0|\tau) = \theta'_{11}(0|2\tau)\theta_{01}(0|2\tau) + \theta_{01}(0|2\tau)\theta'_{11}(0|2\tau). \quad (5.39)$$

We hebben ook gebruik gemaakt van het feit dat  $\theta_{11}(0) = 0$ , volgende uit (5.12). Nu stellen we  $x = y = 0$  in de vergelijkingen (5.19) en (5.21). Dat ziet er als volgt uit:

$$\theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau) = \theta_{01}^2(0|2\tau), \quad (5.40)$$

$$\theta_{10}^2(0|\tau) = 2\theta_{10}(0|2\tau)\theta_{00}(0|2\tau). \quad (5.41)$$

We delen (5.39) door zowel (5.40) als (5.41).

$$\frac{\theta'_{11}(0|\tau)}{\theta_{10}(0|\tau)\theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau)} = \frac{\theta'_{11}(0|2\tau)}{\theta_{10}(0|2\tau)\theta_{00}(0|2\tau)\theta_{01}(0|2\tau)}.$$

Merk op dat links en rechts bijna hetzelfde staat, alleen is de  $\tau$  verdubbeld. Dit kunnen wij dus een aantal keer uitvoeren en zo krijgen wij

$$\frac{\theta'_{11}(0|\tau)}{\theta_{10}(0|\tau)\theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau)} = \frac{\theta'_{11}(0|2^n\tau)}{\theta_{10}(0|2^n\tau)\theta_{00}(0|2^n\tau)\theta_{01}(0|2^n\tau)}.$$

Wij gaan nu even kort over op de  $\vartheta$ , omdat het makkelijker werken is met  $q$  dan met  $\tau$ . Er verandert echter bijna niets, behalve dat  $\theta'_{11}(x|\tau) = -\pi\vartheta'_1(z; q)$ . Deze heffen elkaar uiteraard gewoon op.

$$\frac{\vartheta'_1(0; q)}{\vartheta_2(0; q)\vartheta_3(0; q)\vartheta_4(0; q)} = \frac{\vartheta'_1(0; q^{n^2})}{\vartheta_2(0; q^{n^2})\vartheta_3(0; q^{n^2})\vartheta_4(0; q^{n^2})}.$$

Laat  $n \rightarrow \infty$  dan gaat  $q^{2^n} \rightarrow 0$ , omdat  $|q| < 1$ . Dus volgt

$$\frac{\vartheta'_1(0; q)}{\vartheta_2(0; q)\vartheta_3(0; q)\vartheta_4(0; q)} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vartheta'_1(0; q)}{\vartheta_2(0; q)\vartheta_3(0; q)\vartheta_4(0; q)}.$$

Als we de definities van de  $\vartheta$ 's erbij pakken en  $z = 0$  invullen, kunnen we de limiet bepalen.

$$\vartheta'_1(0; q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{(n+\frac{1}{2})^2} = 2q^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}}), \quad (5.42)$$

$$\vartheta_2(0; q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} = 2q^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}}), \quad (5.43)$$

$$\vartheta_3(0; q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = 1 + \mathcal{O}(q), \quad (5.44)$$

$$\vartheta_4(0; q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = 1 + \mathcal{O}(q). \quad (5.45)$$

Hieruit kunnen we opmaken dat de limiet naar 1 toegaat en dus verkrijgen we de identiteit

$$\vartheta'_1(0; q) = \vartheta_2(0; q)\vartheta_3(0; q)\vartheta_4(0; q). \quad (5.46)$$

In de  $\theta$  vorm ziet deze er als volgt uit

$$\theta'_{11}(0|\tau) = -\pi\theta_{10}(0|\tau)\theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau). \quad (5.47)$$

### Een kleine maar belangrijke identiteit

De identiteit die we hieronder gaan afleiden, zullen we gebruiken om de afgeleide van  $\text{sn}(u)$  te kunnen schrijven als één product. Later zal deze functie worden geïntroduceerd.

Pak vergelijking (5.19) waarbij je de  $x$  en  $y$  omdraait. Vermenigvuldig dit resultaat met (5.22).

$$\begin{aligned}
& \theta_{11}(x|\tau)\theta_{10}(y|\tau)\theta_{00}(y|\tau)\theta_{01}(x|\tau) \\
&= \theta_{01}(x+y|2\tau)\theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{01}^2(x-y|2\tau) + \theta_{01}^2(x+y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau) \\
&+ \theta_{11}^2(x+y|2\tau)\theta_{11}(x-y|2\tau)\theta_{01}(x-y|2\tau) + \theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x+y|2\tau)\theta_{11}^2(x-y|2\tau).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Vervolgens draaien we in (5.48) de  $x$  en  $y$  om en tellen deze op bij de originele vergelijking. Door de aanwezigheid van de oneven  $\theta_{11}$ -functie vallen er termen weg en krijgen we

$$\begin{aligned}
& \theta_{11}(x|\tau)\theta_{10}(y|\tau)\theta_{00}(y|\tau)\theta_{01}(x|\tau) + \theta_{11}(y|\tau)\theta_{10}(x|\tau)\theta_{00}(x|\tau)\theta_{01}(y|\tau) \\
&= 2\theta_{11}(x+y|2\tau)\theta_{01}(x+y|2\tau) \cdot (\theta_{11}^2(x-y|2\tau) + \theta_{01}^2(x-y|2\tau)).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Net zoals in de vorige paragraaf gaan we nu de termen met  $2\tau$  wegwerken. Laat  $y = 0$  in (5.22) en (5.18), dan krijgen we twee vergelijkingen.

$$\begin{aligned}
\theta_{11}(x|\tau)\theta_{10}(0|\tau) &= 2\theta_{11}(x|2\tau)\theta_{01}(x|2\tau), \\
\theta_{01}(x|\tau)\theta_{00}(0|\tau) &= \theta_{01}^2(x|2\tau) + \theta_{11}^2(x|2\tau).
\end{aligned}$$

Als we deze in (5.49) invullen, verkrijgen wij onze identiteit.

$$\theta_{11}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{10}(0)\theta_{00}(0) = \theta_{11}(x)\theta_{10}(y)\theta_{00}(y)\theta_{01}(x) + \theta_{11}(y)\theta_{10}(x)\theta_{00}(x)\theta_{01}(y). \tag{5.50}$$

Waarbij alle functies dezelfde parameter  $\tau$  hebben. In vergelijking (5.50) pakken we de afgeleide naar  $y$ . Dit levert het volgende op:

$$\begin{aligned}
& [\theta'_{11}(x+y)\theta_{01}(x-y) - \theta_{11}(x+y)\theta'_{01}(x-y)]\theta_{10}(0)\theta_{00}(0) \\
&= \theta_{11}(x)\theta_{01}(x)[\theta'_{10}(y)\theta_{00}(y) + \theta_{10}(y)\theta'_{00}(y)] + \theta_{10}(x)\theta_{00}(x)[\theta'_{11}(y)\theta_{01}(y) + \theta_{11}(y)\theta'_{01}(y)].
\end{aligned}$$

Vervolgens stellen we  $y = 0$ . Let op dat er geldt dat  $\theta_{11}(0) = \theta'_{00}(0) = \theta'_{10}(0) = \theta'_{01}(0) = 0$  Dit volgt uit (5.12)-(5.15).

$$[\theta'_{11}(x)\theta_{01}(x) - \theta_{11}(x)\theta'_{01}(x)]\theta_{10}(0)\theta_{00}(0) = \theta'_{11}(0)\theta_{01}(0)\theta_{10}(x)\theta_{00}(x).$$

Links en rechts delen door  $\theta_{01}^2(x)$

$$\frac{\theta'_{11}(x)\theta_{01}(x) - \theta_{11}(x)\theta'_{01}(x)}{\theta_{01}^2(x)} = \frac{\theta'_{11}(0)\theta_{01}(0)}{\theta_{10}(0)\theta_{00}(0)} \frac{\theta_{10}(x)\theta_{00}(x)}{\theta_{01}^2(x)}.$$

Dus krijgen we

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\theta_{11}(x)}{\theta_{01}(x)} \right) = \frac{\theta'_{11}(0)\theta_{01}(0)}{\theta_{10}(0)\theta_{00}(0)} \frac{\theta_{10}(x)\theta_{00}(x)}{\theta_{01}^2(x)}. \tag{5.51}$$

## De afgeleiden van drie ratio's van thèta-functies

Aan de hand van (5.47) volgt een nieuwe uitdrukking voor (5.51):

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\theta_{11}(x)}{\theta_{01}(x)} \right) = -\pi\theta_{01}^2(0) \frac{\theta_{10}(x)\theta_{00}(x)}{\theta_{01}^2(x)}. \quad (5.52)$$

Voor de  $\vartheta$  ziet deze er overzichtelijker uit.

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right) = \vartheta_4^2(0) \frac{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)}. \quad (5.53)$$

We gaan nu even kort verder met de  $\vartheta$ -notatie, omdat we later in hoofdstuk 8 hier volledig in overgaan en daar worden deze afgeleiden gebruikt.

Door (5.36) om te schrijven en gebruik te maken van (5.53), kunnen we nog een afgeleide schrijven als één product.

$$\left( \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \right)^2 = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} - \frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} \left( \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right)^2.$$

Neem de afgeleide naar  $z$ .

$$2 \left[ \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \right] \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \right) = -2 \frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} \left[ \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right] \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right).$$

Nu passen we 5.53 toe.

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \right) = -\vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)}. \quad (5.54)$$

Dan valt er voor ons nog één afgeleide te bepalen. Dit doen we door (5.36) te herschrijven.

$$\left( \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \right)^2 = \frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} - \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} \left( \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right)^2.$$

Neem de afgeleide naar  $z$ .

$$2 \left[ \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \right] \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \right) = -2 \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} \left[ \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right] \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right).$$

Zoals net gebruiken we weer (5.53).

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \right) = -\vartheta_2^2(0) \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_2(z)}{\vartheta_4^2(z)}. \quad (5.55)$$

Deze drie afgeleiden komen weer aan bod wanneer we de afgeleiden van Jacobi's elliptische functies gaan bepalen.

## 5.4 Het oneindige product gekoppeld aan de oneindige som

Het is ontzettend handig om een oneindig product te koppelen aan een oneindige som. Op deze manier kan je op twee manieren aan een functie sleutelen en wellicht ook makkelijker bepaalde eigenschappen aantonen. Een ander voorbeeld van een dergelijke relatie zijn de Rogers-Ramanujan identiteiten<sup>1</sup>. Later zullen we zien waarom wij deze koppeling leggen. Voor het koppelen van de thèta-functie aan het oneindige product volg ik het bewijs van Lawden (p.12-15 [12]), omdat deze duidelijker en waterdicht is. Dat is ook de reden dat we voor dit hoofdstuk overgaan op de  $\vartheta$ -notatie.

### De Psi-functie

Laat als volgt  $\Psi$  gedefinieerd zijn

$$\Psi(t; q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) = (-tq^{-1}, -(tq)^{-1}; q^2)_{\infty}. \quad (5.56)$$

Hierbij is  $t \in \mathbb{C}^*$  een complexe parameter en  $|q| < 1$ . Ik wil graag ook nog laten zien hoe het product er uitziet wanneer we deze uitschrijven. Dit is handig voor later.

$$\Psi(t; q) = (1 + qt)(1 + q^3t)(1 + q^5t) \cdots (1 + qt^{-1})(1 + q^3t^{-1})(1 + q^5t^{-1}) \cdots. \quad (5.57)$$

### De holomorfe term

Eerst laten we zien dat de term van het product,  $f(z) = (1 + q^{2j-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1})$ , holomorfe is in  $z$ . Eerst schrijven we de term in de vorm  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  waarbij  $z = x + iy$ . voor het gemak schrijven we  $q^{2j-1} = a$  en  $t = z$

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 + az)(1 + az^{-1}) \\ &= 1 + a(z + z^{-1}) + a^2 \\ &= 1 + a \left( x + iy + \frac{1}{x + iy} \right) + a^2 \\ &= 1 + a \left( x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) + a^2 = \underbrace{\left( 1 + ax + \frac{ax}{x^2 + y^2} + a^2 \right)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left( ay - \frac{ay}{x^2 + y^2} \right)}_{v(x,y)}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Deze identiteiten kan je hier vinden: <https://dlmf.nist.gov/17.14>

Merk op dat  $u, v$  continu zijn voor  $|z| \neq 0$ . Vervolgens laten we zien dat  $u$  en  $v$  voldoen aan de Cauchy-Riemann-differentiaalvergelijkingen (5.2).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a + \frac{ay^2 - ax^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

De eerste voldoet. Nu de ander nog.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2axy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De tweede voldoet ook. Het is belangrijk om nu op te merken dat al deze partiële afgeleiden continu zijn voor  $|z| \neq 0$ . Het zijn namelijk composities van continue functies. Volgens Freitag kunnen we nu concluderen dat  $f$  holomorf is [17].

### Absolute convergentie

We willen eerst aantonen dit oneindige product absoluut convergent is. Laat  $t$  begrensd zijn in het gesloten domein  $r \leq |t| \leq R$  en  $q$  ook in het domein  $|q| \leq \rho < 1$ . Nu kunnen we laten zien dat het product zowel absoluut als uniform convergent is aan de hand van de Weierstrass M-test. Dit willen we aantonen, omdat we straks de volgorde van de reeks gaan omgooien en dat mag alleen als het product absoluut convergeert. We moeten eerst het product herschrijven naar de vorm  $\prod(1 + u_k)$  [22] (zie definitie IV.1.4 [17]).

$$\begin{aligned} \Psi(t; q) &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1}t)(1 + q^{2j-1}t^{-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1}t^{-1} + q^{2j-1}t + q^{4j-2}) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1}(t + t^{-1}) + q^{4j-2}). \end{aligned}$$

Wij hebben nu  $u_j = q^{2j-1}(t + t^{-1}) + q^{4j-2}$ . Om te laten zien dat het product (5.56) absoluut en uniform convergeert, moeten we aantonen dat de reeks  $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$  absoluut convergeert. Dit doen wij met de Weierstrass M-test zoals beschreven in het boek van Lay (zie stelling 9.1.11 [8]).

$$\begin{aligned} |u_j| &= |q^{2j-1}(t + t^{-1}) + q^{4j-2}| \\ &\leq |q|^{2j-1}(|t| + |t|^{-1}) + |q|^{4j-2} \\ &\leq \rho^{2j-1} \left( R + \frac{1}{r} \right) + \rho^{4j-2} = M_j. \end{aligned}$$

Merk op dat  $\sum M_j$  de reeks is van twee geometrische series.

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_j = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{2j-1} \left( R + \frac{1}{r} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{4j-2}.$$

Uit de quotiënt-test volgt dat beide reeksen convergeren, want  $\rho < 1$  (zie stelling 8.2.7 [8]). Dus  $\sum M_j$  is convergent en dat betekent dat (5.56) absoluut en uniform convergeert. Daarnaast hebben we nog een belangrijke eigenschap afgeleid. Herinner dat de term van het product holomorf was. De compositie van holomorfe functies is weer holomorf [23]. Omdat het product absoluut convergeert, kunnen we stellen dat de Psi-functie holomorf is voor alle waarden van  $t$  en  $q$ .

### Twee lemma's

Nu we dit hebben aangetoond, kunnen we kijken naar twee lemma's die we gaan gebruiken om dit product te koppelen aan de thèta-functie. De eerste kan de lezer zelf snel nagaan door naar de definitie van de psi-functie te kijken.

**Lemma 1 Psi-functie.** *Voor de psi-functie geldt dat*

$$\Psi(t^{-1}; q) = \Psi(t; q). \quad (5.58)$$

De tweede zal ik wel bewijzen.

**Lemma 2 Psi-functie.** *Voor de psi-functie geldt dat*

$$qt\Psi(q^2t; q) = \Psi(t; q). \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \Psi(q^2t; q) &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j+1}t)(1 + q^{2n-3}t^{-1}) \\ &= (1 + q^3t)(1 + q^5t) \cdots (1 + q^{-1}t^{-1})(1 + qt^{-1})(1 + q^3t^{-1})(1 + q^5t^{-1}) \cdots \\ &= \frac{1 + q^{-1}t^{-1}}{1 + qt} (1 + qt)(1 + q^3t)(1 + q^5t) \cdots (1 + qt^{-1})(1 + q^3t^{-1})(1 + q^5t^{-1}) \cdots \\ &\stackrel{(5.57)}{=} \frac{1}{qt} \cdot \frac{qt + 1}{1 + qt} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j+1}t)(1 + q^{2n-3}t^{-1}) = \frac{1}{qt} \Psi(t; q). \end{aligned}$$



En zo volgt het tweede lemma voor de psi-functie.

Deze twee lemma's gaan wij gebruiken om het oneindige product te koppelen aan de oneindige som.

### De oneindige som

Aangezien  $\Psi$  analytisch is in  $t$  in de cirkelring  $r < |t| < R$ . Kunnen we de Psi-functie schrijven als een Laurentreeks om het punt  $t = 0$  (zie Gevolg III.5.2 [17]).

$$\Psi(t; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q)t^n. \quad (5.60)$$

We zien dat  $a_n$  een functie is van  $q$ . Om al deze termen uit te drukken in  $q$  komen de twee eigenschappen, die we net hebben aangetoond, van pas. Eigenschap (5.58) geeft ons dat  $a_n = a_{-n}$ . De ander (5.59) geeft ons de volgende vergelijking:

$$qt \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q)q^{2n}t^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q)t^n. \quad (5.61)$$

We halen  $qt$  naar binnen.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q)q^{2n+1}t^{n+1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q)t^n.$$

Dit wordt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n-1}(q)q^{2n-1}t^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q)t^n.$$

Zo kunnen wij zien dat we een uitdrukking voor  $a_n$  krijgen.

$$a_n = q^{2n-1}a_{n-1}. \quad (5.62)$$

Als wij (5.62) blijven herhalen krijgen we het volgende:

$$\begin{aligned} a_n &= q^{2n-1}a_{n-1} \\ &= q^{2n-1}q^{2n-3} \dots q^3qa_0 = q^{n^2}a_0. \end{aligned}$$

Dus krijgen we

$$a_n = q^{n^2}a_0. \quad (5.63)$$

Onze Psi-functie ziet er nu als volgt uit

$$\Psi(t; q) = a_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}t^n. \quad (5.64)$$

We gaan nu eerst deze oneindige som koppelen aan de thèta-functie om zo aan de hand van (5.46)  $a_0$  te bepalen. Dit doen we, omdat we dan  $z = 0$  hebben en  $a_0$  kunnen uitdrukken in termen van  $q$ . We gaan wel werken met de  $\vartheta$ -notatie om deze op het eind om te schrijven naar de  $\theta$ -notatie. Wanneer we  $t = -qe^{2iz}, qe^{2iz}, e^{2iz}, -e^{2iz}$  invullen en kijken naar vergelijkingen (5.12)-(5.15) respectievelijk, krijgen we de volgende gelijkheden:

$$\Psi(-qe^{2iz}; q) = ia_0(q)q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z; q), \quad (5.65)$$

$$\Psi(qe^{2iz}; q) = a_0(q)q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z; q), \quad (5.66)$$

$$\Psi(e^{2iz}; q) = a_0(q)\vartheta_3(z; q), \quad (5.67)$$

$$\Psi(-e^{2iz}; q) = a_0(q)\vartheta_4(z; q). \quad (5.68)$$

Eerst gaan we (5.65) herschrijven door gebruik te maken van het oneindige product.

$$\begin{aligned} a_0(q)q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1(z; q) &= -ie^{iz} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1}(-qe^{2iz}))(1 + q^{2j-1}(-q^{-1}e^{-2iz})) \\ &= -ie^{iz} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j}e^{2iz})(1 - q^{2j-2}e^{-2iz}) \\ &= -ie^{iz}(1 - e^{-2iz}) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j}e^{2iz})(1 - q^{2j}e^{-2iz}) \\ &= (-ie^{iz} + ie^{-iz}) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j}(e^{2iz} + e^{-2iz}) + q^{4j}) \\ &= 2 \sin(z) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 2q^{2j} \cos(2z) + q^{4j}). \end{aligned}$$

Bij de laatste stap maken we gebruik van Eulers formules [21]. Vervolgens pakken we de afgeleide naar  $z$ .

$$\begin{aligned} a_0(q)q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'(z; q) &= 2 \cos(z) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 2q^{2j} \cos(2z) + q^{4j}) + 2 \sin(z) \cdot \frac{d}{dz} \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 2q^{2j} \cos(2z) + q^{4j}) \right). \end{aligned}$$

Dan pakken we  $z = 0$  en krijgen we

$$a_0(q)q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'(0; q) = 2 \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})^2.$$

Op eenzelfde manier schrijven we (5.66) om en verkrijgen we

$$a_0(q)q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(z; q) = 2 \cos(z) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + 2q^{2j} \cos(2z) + q^{4j}).$$

Ook hier nemen we  $z = 0$ .

$$a_0(q)q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0; q) = 2 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j})^2.$$

Bij vergelijkingen (5.67) en (5.68) doe we hetzelfde.

$$a_0(q)\vartheta_3(0; q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1})^2,$$

$$a_0(q)\vartheta_4(0; q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j-1})^2.$$

We hebben nu de volgende vier vergelijkingen die we gaan gebruiken om  $a_0$  te bepalen.

$$\vartheta_1'(0; q) = \frac{2}{a_0(q)} q^{\frac{1}{4}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})^2,$$

$$\vartheta_2(0; q) = \frac{2}{a_0(q)} q^{\frac{1}{4}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j})^2,$$

$$\vartheta_3(0; q) = \frac{1}{a_0(q)} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1})^2,$$

$$\vartheta_4(0; q) = \frac{1}{a_0(q)} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j-1})^2.$$

We stoppen deze vier vergelijkingen in (5.46), dan krijgen we

$$\frac{2}{a_0(q)} q^{\frac{1}{4}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})^2 = \frac{2}{a_0^3(q)} q^{\frac{1}{4}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j})^2 (1 + q^{2j-1})^2 (1 - q^{2j-1})^2.$$

Dit wordt

$$a_0(q) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j}) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j}) (1 + q^{2j-1}) (1 - q^{2j-1}).$$

Voordat  $a_0$  zichzelf onthult, moet nog één lemma de revue passeren.

**Lemma oneindig product.** *Neem het oneindige product  $(q; q)_\infty$ .*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4) \cdots$$

*Deze kan je splitsen in even en oneven.*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j-1})(1 - q^{2j}) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j-1})(1 - q^j)(1 + q^j).$$

*Hieruit volgt dat*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j-1})(1 + q^j) = 1. \quad (5.69)$$

□

Dan kunnen we eindelijk  $a_0$  gaan bepalen.

$$\begin{aligned} a_0(q) &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j})(1 + q^{2j-1})(1 - q^{2j-1}) / (1 - q^{2j}) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j})(1 - q^{4j-2}) / (1 - q^{2j}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})}, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruik hebben gemaakt van het lemma voor  $q^2$ . Dus hebben we eindelijk  $a_0$  kunnen uitdrukken in  $q$ .

$$a_0(q) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})}. \quad (5.70)$$

Gebruikmakend van (5.70) schrijven we de thèta-functies als een oneindig product.

$$\vartheta_1(z; q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(z) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})(1 - 2q^{2j} \cos(2z) + q^{4j}), \quad (5.71)$$

$$\vartheta_2(z; q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos(z) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})(1 + 2q^{2j} \cos(2z) + q^{4j}), \quad (5.72)$$

$$\vartheta_3(z; q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})(1 + 2q^{2j-1} \cos(2z) + q^{4j-2}), \quad (5.73)$$

$$\vartheta_4(z; q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})(1 - 2q^{2j-1} \cos(2z) + q^{4j-2}). \quad (5.74)$$

Voor de  $\theta$ -notatie wordt dit

$$\theta_{11}(x|\tau) = -2e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \sin(\pi x) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - e^{2j\pi i\tau})(1 - 2e^{2j\pi i\tau} \cos(2\pi x) + e^{4j\pi i\tau}), \quad (5.75)$$

$$\theta_{10}(x|\tau) = 2e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \cos(\pi x) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - e^{2j\pi i\tau})(1 + 2e^{2j\pi i\tau} \cos(2\pi x) + e^{4j\pi i\tau}), \quad (5.76)$$

$$\theta_{00}(x|\tau) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - e^{2j\pi i\tau})(1 + 2e^{(2j-1)\pi i\tau} \cos(2\pi x) + e^{(4j-2)\pi i\tau}), \quad (5.77)$$

$$\theta_{01}(x|\tau) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - e^{2j\pi i\tau})(1 - 2e^{(2j-1)\pi i\tau} \cos(2\pi x) + e^{(4j-2)\pi i\tau}). \quad (5.78)$$

# Hoofdstuk 6

## Landen-transformatie-relaties

In dit hoofdstuk leggen we de basis voor de derivatie van Landens transformatie. We gaan namelijk de Landen-transformatie-relaties bepalen. Met deze transformaties leggen we het verband tussen  $\theta$ -functies met parameter  $\tau$  en  $\theta$ -functies met parameter  $2\tau$ . Maar wie was Landen eigenlijk? Het is wel zo netjes om te weten wie de persoon is achter de transformatie die wij in dit verslag trachten te herleiden.

### 6.1 John Landen

John Landen is geboren in 1719 in Peakirk, Engeland, en was de oudste van drie broers. Hij is opgeleid tot landmeter en heeft dit beroep 22 jaar lang uitgevoerd. Hier komt ook zijn interesse in wiskunde vandaan. Daarna is werd hij ‘land agent’ voor Earl Fitzwilliam. In zijn vrije tijd schreef hij vaak stukken voor de ‘Ladies’ Diary’, ondanks dat hij geen professionele wiskundige was. Later heeft hij zelf ook een aantal werken gepubliceerd. In 1775 schreef hij voor het eerst over ‘Landens transformatie’ in het vijfde deel van ‘Philosophical Transactions of the Royal Society’. Hij schreef vooral over dynamica, sommatie van reeksen en natuurlijke elliptische functies en integralen. Zijn laatste werk was het tweede volume van ‘Mathematical memoirs’. Dit werd een aantal dagen voor zijn dood uitgebracht. Hij stierf op 15 januari 1790. [24] [25]

### 6.2 De transformatie-relaties

We gaan handig gebruikmaken van de optelformules voor  $\theta$ -functies, omdat hier een verdubbeling van de  $\tau$  plaatsvindt. We pakken daarvan de volgende vier vergelijkingen (5.17), (5.19), (5.20) en (5.22) én stellen  $x$  gelijk aan  $y$ .

$$\begin{aligned}\theta_{00}^2(x|\tau) &= \theta_{00}(2x|2\tau)\theta_{00}(0|2\tau) + \theta_{10}(2x|2\tau)\theta_{10}(0|2\tau), \\ \theta_{00}(x|\tau)\theta_{01}(x|\tau) &= \theta_{01}(2x|2\tau)\theta_{01}(0|2\tau), \\ \theta_{01}^2(x|\tau) &= \theta_{00}(2x|2\tau)\theta_{00}(0|2\tau) - \theta_{10}(2x|2\tau)\theta_{10}(0|2\tau), \\ \theta_{11}(x|\tau)\theta_{10}(x|\tau) &= \theta_{11}(2x|2\tau)\theta_{01}(0|2\tau).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Nu zetten we  $x = 0$  bij de eerste drie vergelijkingen en krijgen we

$$\begin{aligned}\theta_{00}^2(0|\tau) &= \theta_{00}^2(0|2\tau) + \theta_{10}^2(0|2\tau), \\ \theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau) &= \theta_{01}^2(0|2\tau), \\ \theta_{01}^2(0|\tau) &= \theta_{00}^2(0|2\tau) - \theta_{10}^2(0|2\tau).\end{aligned}$$

Door middel van substitutie vinden we de volgende uitdrukkingen voor thèta-functies met  $x = 0$  en  $2\tau$ :

$$\theta_{00}^2(0|2\tau) = \frac{1}{2} (\theta_{00}^2(0|\tau) + \theta_{01}^2(0|\tau)), \quad (6.2)$$

$$\theta_{10}^2(0|2\tau) = \frac{1}{2} (\theta_{00}^2(0|\tau) - \theta_{01}^2(0|\tau)), \quad (6.3)$$

$$\theta_{01}^2(0|2\tau) = \theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau). \quad (6.4)$$

Als we deze vergelijkingen in de eerste vergelijkingen (6.1) stoppen, krijgen we de 'Landen-transformatie-relaties'.

$$\theta_{00}(2x|2\tau) = \frac{\theta_{00}^2(x|\tau) + \theta_{01}^2(x|\tau)}{\sqrt{2(\theta_{00}^2(0|\tau) + \theta_{01}^2(0|\tau))}}, \quad (6.5)$$

$$\theta_{10}(2x|2\tau) = \frac{\theta_{00}^2(x|\tau) - \theta_{01}^2(x|\tau)}{\sqrt{2(\theta_{00}^2(0|\tau) - \theta_{01}^2(0|\tau))}}, \quad (6.6)$$

$$\theta_{01}(2x|2\tau) = \frac{\theta_{00}(x|\tau)\theta_{01}(x|\tau)}{\sqrt{\theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau)}}, \quad (6.7)$$

$$\theta_{11}(2x|2\tau) = \frac{\theta_{11}(x|\tau)\theta_{10}(x|\tau)}{\sqrt{\theta_{00}(0|\tau)\theta_{01}(0|\tau)}}. \quad (6.8)$$

Wat we zien bij deze transformaties is dat we van een rooster gegenereerd door  $2\tau$  overgaan naar een rooster gegenereerd door  $\tau$ . Dus het rooster is gehalveerd bij wijze van spreken en dat is precies wat deze transformatie zo interessant maakt. Dan zou ik nu graag nog een andere Landen-transformatie-relatie willen toelichten, die verder niet van belang is voor ons doel: Landens transformatie.

### 6.2.1 Een andere transformatie-relatie

We werken vanuit de volgende determinant die veel weg heeft van de rechterkant van (5.23).

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \theta_{11}(x|2\tau) & \theta_{11}(y|2\tau) \\ \theta_{01}(x|2\tau) & \theta_{01}(y|2\tau) \end{vmatrix} \\
&= \theta_{11}(x|2\tau)\theta_{01}(y|2\tau) - \theta_{01}(x|2\tau)\theta_{11}(y|2\tau) \\
&= -\theta_{11}(-x|2\tau)\theta_{01}(-y|2\tau) + \theta_{01}(-x|2\tau)\theta_{11}(-y|2\tau) \\
&\stackrel{(5.9)}{=} -\theta_{10}\left(-x + \frac{1}{2}|2\tau\right)\theta_{00}\left(-y + \frac{1}{2}|2\tau\right) + \theta_{00}\left(-x + \frac{1}{2}|2\tau\right)\theta_{10}\left(-y + \frac{1}{2}|2\tau\right) \\
&= -\theta_{10}\left(x - \frac{1}{2}|2\tau\right)\theta_{00}\left(y - \frac{1}{2}|2\tau\right) + \theta_{00}\left(x - \frac{1}{2}|2\tau\right)\theta_{10}\left(y - \frac{1}{2}|2\tau\right) \\
&\stackrel{(5.23)}{=} \theta_{11}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}|\tau\right)\theta_{11}\left(\frac{x-y}{2}|\tau\right).
\end{aligned}$$

We hebben nu de volgende vergelijking afgeleid:

$$\begin{vmatrix} \theta_{11}(x|2\tau) & \theta_{11}(y|2\tau) \\ \theta_{01}(x|2\tau) & \theta_{01}(y|2\tau) \end{vmatrix} = \theta_{11}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}|\tau\right)\theta_{11}\left(\frac{x-y}{2}|\tau\right). \quad (6.9)$$



Om deze Landen-transformatie-relatie te verkrijgen, kiezen we  $y = x + 1$  en stoppen we in vergelijking (6.9). Dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\theta_{11}(x|\tau) \theta_{11}\left(-\frac{1}{2}|\tau\right) &= \begin{vmatrix} \theta_{11}(x|2\tau) & \theta_{11}(x+1|2\tau) \\ \theta_{01}(x|2\tau) & \theta_{01}(x+1|2\tau) \end{vmatrix} \\
&\stackrel{(5.9)}{=} \theta_{11}(x|2\tau)\theta_{01}(x+1|2\tau) - e^{-\pi i \cdot 0}\theta_{01}(x+1|2\tau) \cdot e^{\pi i}\theta_{11}(x|2\tau) \\
&= 2\theta_{11}(x|2\tau)\theta_{01}(x+1|2\tau) \\
&\stackrel{(5.4)}{=} 2\theta_{11}(x|2\tau)\theta_{01}(x|2\tau) \\
&= 2\theta_{11}(x|2\tau) \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i\tau - \pi i x + \pi i\tau - \frac{1}{2}\pi i}\theta_{11}(x-\tau|2\tau).
\end{aligned}$$

Bij de laatste stap pasten we (5.9) toe (let op dat we te maken hebben met  $2\tau$ ). Zo krijgen we de relatie

$$\theta_{11}(x|\tau) = 2e^{-\pi i x + \frac{1}{2}\pi i\tau} \frac{\theta_{11}(x|2\tau)\theta_{11}(x-\tau|2\tau)}{i\theta_{11}\left(-\frac{1}{2}|\tau\right)}. \quad (6.10)$$

Wat deze transformatie speciaal maakt, is het feit dat hij uitsluitend uit de  $\theta_{11}$ -functie bestaat, afgezien van de factor  $2e^{-\pi i x + \frac{1}{2}\pi i\tau}$ .

# Hoofdstuk 7

## Jacobi's elliptische functies

Jacobi's elliptische functies zijn bedacht door Carl Jacobi in 1829. Met deze functies kan je onder andere de beweging van een slinger beschrijven. Mocht je hier meer over willen weten, dan raad ik het artikel van Lima en Arun [26] en het boek van Lawden aan (§5.1 [12]). Jacobi's elliptische functies zijn opgebouwd uit thèta-functies en zullen dus ook overeenkomende eigenschappen hebben. Deze functies gaan ons uiteindelijk helpen om Landens transformatie aan te tonen.

### 7.1 De definitie

De eerste drie elliptische functies van Jacobi zijn als volgt gedefinieerd:

**Definitie Jacobi's elliptische functies.** Laat  $z = u/\vartheta_3^2(0; q)$ , dan krijgen we

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{\vartheta_3(0; q) \vartheta_1(z; q)}{\vartheta_2(0; q) \vartheta_4(z; q)}, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{cn}(u) = \frac{\vartheta_4(0; q) \vartheta_2(z; q)}{\vartheta_2(0; q) \vartheta_4(z; q)}, \quad (7.2)$$

$$\operatorname{dn}(u) = \frac{\vartheta_4(0; q) \vartheta_3(z; q)}{\vartheta_3(0; q) \vartheta_4(z; q)}. \quad (7.3)$$

Merk op dat wanneer  $q$  reëel is ( $\tau$  puur imaginair), dat de functies allemaal reëel zijn voor alle  $u \in \mathbb{R}$ .

#### Nieuw complex rooster

We introduceren een nieuw complex rooster waarbij we Lawden volgen (§2.2 [12]). Het rooster wordt gegenereerd door  $2\omega_1$  en  $2\omega_3$ , waarbij  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ . Dit komt overeen met het rooster van de Weierstrass functies, zie appendix [1]. Ook hebben we  $\frac{1}{2}\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$  met  $\operatorname{Im}(\tau) > 0$  en  $q = e^{\frac{1}{2}\pi i\tau}$ . Wij kiezen  $\omega_1$  en  $\omega_3$  zó dat ze de perioden zijn van de elliptische functies. Maar later meer hierover in het hoofdstuk.

### 7.1.1 De parameters $k$ en $k'$

Naast deze drie definities introduceren we nog twee complementaire parameters:  $k$  en  $k'$ .

$$k = \frac{\vartheta_2^2(0; q)}{\vartheta_3^2(0; q)} \quad , \quad k' = \frac{\vartheta_4^2(0; q)}{\vartheta_3^2(0; q)}. \quad (7.4)$$

Gebruikmakend van (5.35) (waarbij we  $x = 0$  nemen) leiden we een eigenschap van deze  $k$ 's af.

$$\begin{aligned} k^2 + k'^2 &= \frac{\vartheta_2^4(0; q) + \vartheta_4^4(0; q)}{\vartheta_3^4(0; q)} \\ &= \frac{\vartheta_3^4(0; q)}{\vartheta_3^4(0; q)} = 1. \end{aligned}$$

Dus volgt:

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (7.5)$$

Hieruit volgt weer dat

$$k = \sqrt{1 - k'^2} \quad , \quad k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (7.6)$$

#### Bijjectiviteit van $q$ en $k$

Belangrijk om in te zien is dat de parameter  $k$  niet onafhankelijk is. De parameter  $q$  (of  $\tau$ ) bepaalt de waarde van  $k$  (of andersom). Dit kunnen we aantonen door gebruik te maken van (5.13)-(5.15) en (5.72)-(5.74).

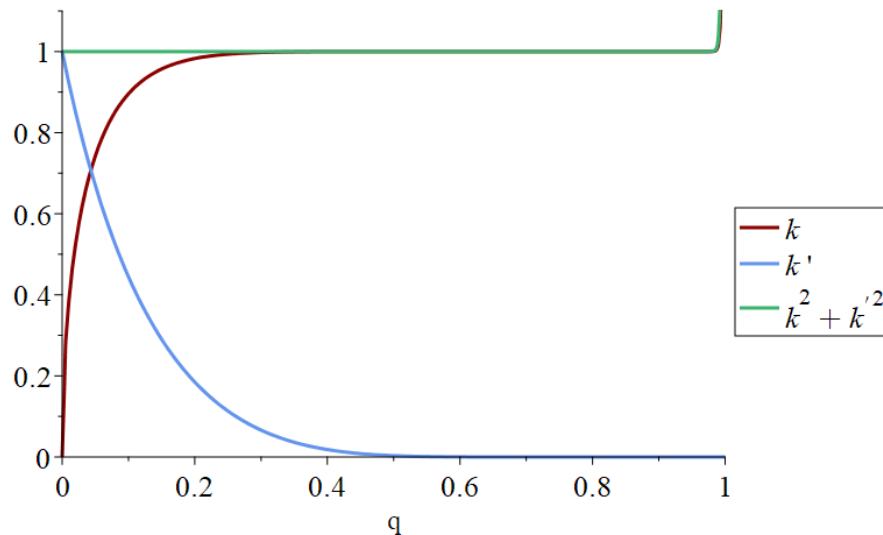
$$k = 4q^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 + q^2 + q^6 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots} \right)^2 = 4q^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1 + q^{2j}}{1 + q^{2j-1}} \right)^4, \quad (7.7)$$

$$k' = \left( \frac{1 - 2q + 2q^4 - \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots} \right)^2 = \prod_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1 - q^{2j-1}}{1 + q^{2j-1}} \right)^4. \quad (7.8)$$

Aan de hand van deze twee uitdrukkingen kunnen wij  $k$  en  $k'$  bepalen met  $q$ . Stel dat  $0 \leq q < 1$ . Wanneer  $q$  van 0 naar 1 stijgt, zien we in vergelijking (7.8) dat  $k'$  strikt monotoon van 1 naar 0 daalt. Uit (7.6) lezen we af dat  $k$  in dat geval strikt monotoon stijgt van 0 naar 1. Aangezien er één unieke waarde van  $k$  is voor elke waarde van  $q$  op het interval  $[0, 1)$  volgt nu dat  $k$  een bijjectieve functie van  $q$  is. Wanneer we het boek van Lay gebruiken zien we dat hieruit volgt dat ook de inverse functie  $q$  bijjectief is (stelling 2.3.24 [8]). In appendix [G] wordt dit nagegaan. Dit

betekent dat wij nu ook  $q$  kunnen uitdrukken in termen van  $k$ . Wat volgt is een nieuwe manier van het noteren van Jacobi's elliptische functies:  $\operatorname{sn}(u, k)$ . Zo zien we welke waarde van  $k$  is gebruikt. Ook hierbij geldt dat wanneer de  $k$  niet vermeld is je gewoon van bijvoorbeeld  $\operatorname{cn}(u, k)$  moet uitgaan.

Wij kunnen nu een speciaal geval voor de drie elliptische functies afleiden. We zien namelijk dat wanneer  $q$  naar nul gaat, dat ook  $k$  naar nul gaat (zie (7.7)). Dit alles zien wij terug in (7.1). Nu hebben we al eerder gezien wat er met de thèta-functies



Figuur 7.1: De grafieken van  $k$ ,  $k'$  en  $k^2 + k'^2$  voor  $0 \leq q \leq 1$ .

gebeurt wanneer  $z \rightarrow 0$ . Nu gaan we onderzoeken wat we krijgen wanneer  $q \rightarrow 0$ . We maken gebruik van (5.12)-(5.15) om te bepalen hoe de thèta-functies er uitzien voor kleine waarden van  $q$ .

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z; q) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin(z) + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}}), \\ \vartheta_2(z; q) &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos(z) + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}}), \\ \vartheta_3(z; q) &= 1 + \mathcal{O}(q), \\ \vartheta_4(z; q) &= 1 + \mathcal{O}(q).\end{aligned}$$

Nu kunnen we kijken wat er gebeurt als  $q \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow 0$ ) voor de elliptische functies. Hierbij gebruiken we ook (5.43)-(5.45). Eerst kijken we naar  $\text{sn}(u)$ :

$$\begin{aligned}
\text{sn}(u, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \text{sn}(u, k) \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vartheta_3(0; q)}{\vartheta_2(0; q)} \frac{\vartheta_1(z; q)}{\vartheta_4(z; q)} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1 + \mathcal{O}(q)}{2q^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})} \frac{2q^{\frac{1}{4}} \sin(z) + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})}{1 + \mathcal{O}(q)} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2q^{\frac{1}{4}} \sin(z) + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})}{2q^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\sin(z) + \mathcal{O}(q^2)}{1 + \mathcal{O}(q^2)} = \sin(z).
\end{aligned}$$

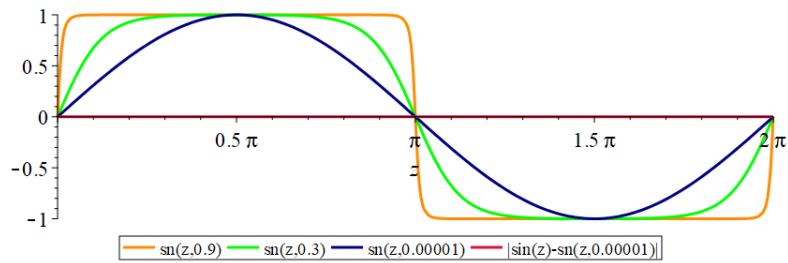
Dan volgt nu  $\text{cn}(u)$ :

$$\begin{aligned}
\text{cn}(u, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \text{cn}(u, k) \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vartheta_4(0; q)}{\vartheta_2(0; q)} \frac{\vartheta_2(z; q)}{\vartheta_4(z; q)} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1 + \mathcal{O}(q)}{2q^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})} \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cos(z) + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})}{1 + \mathcal{O}(q)} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cos(z) + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})}{2q^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{4}})} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\cos(z) + \mathcal{O}(q^2)}{1 + \mathcal{O}(q^2)} = \cos(z).
\end{aligned}$$

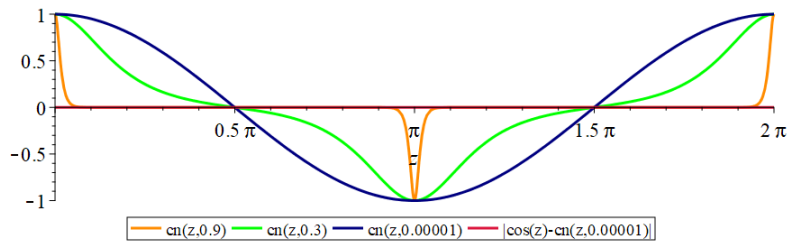
En tot slot  $\text{dn}(u)$ .

$$\begin{aligned}
\text{dn}(u, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \text{dn}(u, k) \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vartheta_4(0; q)}{\vartheta_3(0; q)} \frac{\vartheta_3(z; q)}{\vartheta_4(z; q)} \\
&= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1 + \mathcal{O}(q)}{1 + \mathcal{O}(q)} \frac{1 + \mathcal{O}(q)}{1 + \mathcal{O}(q)} = 1.
\end{aligned}$$

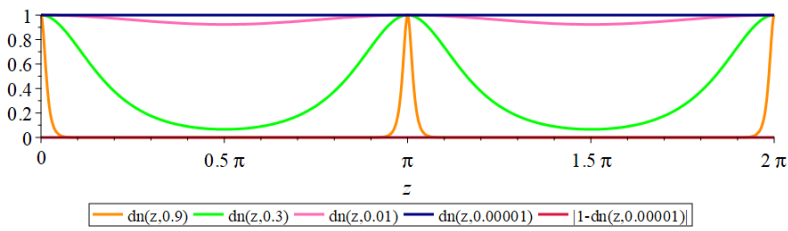
We zullen zo zien dat deze elliptische functies nog meer overeenkomsten hebben met de goniometrische functies.



(a)  $\text{sn}(u)$



(b)  $\text{cn}(u)$



(c)  $\text{dn}(u)$

Figuur 7.2: De drie elliptische functies, waarbij  $k$  naar 0 gaat. Daarnaast wordt ook het verschil met de limietfunctie aangegeven.

## De overige Jacobi elliptische functies

Het moet gezegd worden dat er nog dertien andere elliptische functies zijn. Deze zijn echter allemaal te vormen uit de drie die wij eerder hebben gedefinieerd (7.1)-(7.3). Laat  $p, q \in [s, c, d, n]$ , dan krijgen we:

$$\text{pq}(u, k) = \frac{\text{pn}(u, k)}{\text{qn}(u, k)}. \quad (7.9)$$

Merk op dat voor  $p = q$  volgt dat  $\text{pq}(u, k) = 1$  en er dus vier van de in totaal zestien Jacobiaanse elliptische functies de eenheidsfunctie zijn.<sup>1</sup>

## Even of oneven

We kunnen heel snel zien dat alleen de sn-functie oneven is, omdat deze de oneven  $\vartheta_1$ -functie bevat en de rest allemaal even functies bevatten.

## Periodiciteit

Om de periodiciteit te bepalen, kijken we naar de quasi-periodiciteit van de thèta-functies (5.3) en (5.4). Op deze manier zien we dat alle drie de functies periodiek zijn.

$$\begin{aligned} \text{sn}(u + 2\pi\vartheta_3^2(0)) &= \text{sn}(u), \\ \text{sn}(u + \tau\pi\vartheta_3^2(0)) &= \text{sn}(u), \\ \text{cn}(u + 2\pi\vartheta_3^2(0)) &= \text{cn}(u), \\ \text{cn}(u + 2\tau\pi\vartheta_3^2(0)) &= \text{cn}(u + \pi\vartheta_3^2(0) + \tau\pi\vartheta_3^2(0)) = \text{cn}(u), \\ \text{dn}(u + \pi\vartheta_3^2(0)) &= \text{dn}(u), \\ \text{dn}(u + 2\tau\pi\vartheta_3^2(0)) &= \text{dn}(u). \end{aligned}$$

Het is handig om een andere notatie te introduceren volgens Lawden (§2.2 [12]). Laat  $K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0)$  en  $iK' = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0) = \tau K$ . Dan krijgen we

$$\begin{aligned} \text{sn}(u + 4K) &= \text{sn}(u + 2iK') = \text{sn}(u), \\ \text{cn}(u + 4K) &= \text{cn}(u + 4iK') = \text{cn}(u + 2K + 2iK') = \text{cn}(u), \\ \text{dn}(u + 2K) &= \text{dn}(u + 4iK') = \text{dn}(u) \end{aligned}$$

Nu zien we dat we voor het rooster  $\omega_1 = 4K$  en  $\omega_3 = 2iK'$  krijgen.

---

<sup>1</sup>Hier is een overzicht van de eerste zes, waarbij je de rest krijgt als je de reciproque pakt.  
<https://dlmf.nist.gov/22.2>

## 7.2 Fundamentele eigenschappen

Wij gaan nu een aantal fundamentele eigenschappen afleiden voor deze elliptische functies. Vanaf nu zetten we  $\tau$  en  $q$  er niet meer expliciet bij in de notatie van respectievelijk de  $\theta$ -notatie en  $\vartheta$ -notatie, tenzij dit nodig is. Wanneer je  $\theta_{ab}(x)$  ziet, betekent dit  $\theta_{ab}(x|\tau)$  en zo ook bij  $\vartheta_j(z)$ , die natuurlijk  $\vartheta_j(z; q)$  is.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) &= \frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta_2^2(0)} \frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_4^2(z)} + \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_2^2(0)} \frac{\vartheta_2^2(z)}{\vartheta_4^2(z)} \\ &= \frac{\vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(z) + \vartheta_4^2(0)\vartheta_2^2(z)}{\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(z)} \\ &\stackrel{(5.38)}{=} \frac{\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(z)} = 1. \end{aligned}$$

Dus hebben wij een eigenschap gevonden voor  $\operatorname{sn}(u)$  en  $\operatorname{cn}(u)$  die equivalent is aan die van  $\sin(x)$  en  $\cos(x)$ .

$$\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1. \quad (7.10)$$

Voor de volgende eigenschap pakken we het kwadraat van (7.3) en (7.1) en de factor  $k^2$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) &= \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} + \frac{\vartheta_2^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(z)} \\ &= \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z) + \vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} \\ &\stackrel{(5.36)}{=} \frac{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} = 1. \end{aligned}$$

Dus hebben we weer een ‘goniometrische’ eigenschap verkregen:

$$\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) = 1. \quad (7.11)$$



We leiden nog een identiteit af.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{dn}^2(u) - k^2 \operatorname{cn}^2(u) &= \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} - \frac{\vartheta_2^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} \cdot \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_2^2(z)}{\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(z)} \\
 &= \frac{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z) - \vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(0)\vartheta_2^2(z)}{\vartheta_3^4(0)\vartheta_4^2(z)} \\
 &= \frac{\vartheta_4^2(0) (\vartheta_3^2(0)\vartheta_3^2(z) - \vartheta_2^2(0)\vartheta_2^2(z))}{\vartheta_3^4(0)\vartheta_4^2(z)} \\
 &\stackrel{(5.35)}{=} \frac{\vartheta_4^4(0)\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^4(0)\vartheta_4^2(z)} = k'^2.
 \end{aligned}$$

Dus de laatste identiteit is

$$\operatorname{dn}^2(u) - k^2 \operatorname{cn}^2(u) = k'^2. \quad (7.12)$$

### 7.3 De afgeleiden

We gaan de afgeleiden van de drie elliptische functies bepalen. Dit doen we, omdat we straks de inverse van  $\operatorname{sn}(u)$  willen bepalen en daarvoor, zo blijkt later, is het handig om de afgeleide van  $\operatorname{sn}(u)$  te weten. Eerst merken we nog een belangrijke gelijkheid op:  $\frac{dz}{du} = 1/\vartheta_3^2(0)$ . Dan bepalen we nu de afgeleide van  $\operatorname{sn}(u)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) &= \frac{d}{du} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \\ &= \frac{d}{dz} \frac{dz}{du} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \\ &= \frac{1}{\vartheta_3(0)\vartheta_2(0)} \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right) = \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3(0)\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)}. \end{aligned}$$

In de laatste stap maken we gebruik van (5.53). Merk op dat we de twee andere elliptische functies terug zien in deze afgeleide. We krijgen dus

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) = \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u). \quad (7.13)$$

Gebruikmakend van (7.10) en (7.11) drukken we de afgeleide van  $\operatorname{sn}(u)$  uit in termen van zichzelf.

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) = \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(u)) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u))}. \quad (7.14)$$

We kunnen nu ook zien waarom de transformatie  $z = u/\vartheta_3^2(0)$  er is. Vullen we namelijk  $u = 0$  in, dan krijgen we  $\operatorname{sn}'(0) = 1$ . Een eigenschap die veel weg heeft van  $\sin'(0) = 1$ .

Voor de afgeleide van  $\operatorname{cn}(u)$  kijken we naar (5.54).

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u) &= \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3^2(0)} \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \right) \\ &= -\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3^2(0)} \vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)} = -\frac{\vartheta_4(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)}. \end{aligned}$$

Door in de laatste stap  $\vartheta_3(0)/\vartheta_3(0)$  toe te voegen, kunnen we nu weer de twee andere elliptische functies er uithalen.

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn}(u) = -\operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u). \quad (7.15)$$

Ook hier kunnen we de afgeleide uitdrukken in termen van  $\text{cn}(u)$  zelf kijkend naar (7.10) en (7.12.)

$$\frac{d}{du} \text{cn}(u) = -\sqrt{(1 - \text{cn}^2(u)) (k'^2 + k^2 \text{cn}^2(u))}. \quad (7.16)$$

Dan rest ons nog de afgeleide van  $\text{dn}(u)$  te bepalen met(5.55).

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \text{dn}(u) &= \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3^3(0)} \frac{d}{dz} \left( \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \right) \\ &= -\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3^3(0)} \vartheta_2^2(0) \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_2(z)}{\vartheta_4^2(z)} = -\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_2^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_2(z)}{\vartheta_4^2(z)}. \end{aligned}$$

Nu hebben we niet alleen de twee andere elliptische functies, maar ook de parameter  $k$  die we er uithalen.

$$\frac{d}{du} \text{dn}(u) = -k^2 \text{sn}(u) \text{cn}(u). \quad (7.17)$$

Tevens drukken we deze afgeleide ook nog uit in termen van  $\text{dn}(u)$  met behulp van (7.12) en (7.11).

$$\frac{d}{du} \text{dn}(u) = -\sqrt{(1 - \text{dn}^2(u)) (\text{dn}^2(u) - k'^2)}. \quad (7.18)$$

Het is niet verwonderlijk dat wij al deze functie kunnen uitschrijven in termen van de functie zelf. Dit komt doordat de exponentiële functie aan de basis ligt van al deze functies. Omdat deze drie functies zoveel overeenkomsten hebben met de sinus en cosinus, worden ze ook wel de elliptische sinus  $\text{sn}(u)$  en cosinus  $\text{cn}(u)$  genoemd. De  $\text{dn}(u)$  wordt de delta amplitude genoemd. In het Latijn wordt dit respectievelijk heel mooi sinus amplitudinis, cosinus amplitudinis en delta amplitudinis genoemd.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi\\_elliptic\\_functions](https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_elliptic_functions)

### 7.3.1 MacLaurin-reeks

We kunnen nu ook de Maclaurin-reeks van de drie functie uitwerken, omdat we weten dat  $\text{sn}(0) = 0$  en  $\text{cn}(0) = \text{dn}(0) = 1$ .<sup>3</sup> Eerst bepalen we de afgeleiden.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} \text{sn}(u) &= -\text{sn}(u) \text{dn}^2(u) - k^2 \text{sn}(u) \text{cn}^2(u), \\ \frac{d^3}{du^3} \text{sn}(u) &= -\text{cn}(u) \text{dn}^3(u) + 4k^2 \text{sn}^2(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u) - k^2 \text{cn}^3(u) \text{dn}(u), \\ \frac{d^4}{du^4} \text{sn}(u) &= \text{sn}(u) \text{dn}^4(u) + 14k^2 \text{sn}(u) \text{cn}^2(u) \text{dn}^2(u) \\ &\quad - 4k^2 \text{sn}^3(u) \text{dn}^2(u) - 4k^2 \text{sn}^3(u) \text{cn}^2(u) + k^4 \text{sn}(u) \text{cn}^4(u), \\ \frac{d^5}{du^5} \text{sn}(u) &= \text{cn}(u) \text{dn}^5(u) - 44k^2 \text{sn}^2(u) \text{cn}(u) \text{dn}^3(u) + 14k^2 \text{cn}^3(u) \text{dn}^3(u) \\ &\quad + 16k^4 \text{sn}^4(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u) - 44k^4 \text{sn}^2(u) \text{cn}^3(u) \text{dn}(u) + k^4 \text{cn}^5(u) \text{dn}(u), \\ \frac{d^6}{du^6} \text{sn}(u) &= -\text{sn}(u) \text{dn}^6(u) - 135k^2 \text{sn}(u) \text{cn}^2(u) \text{dn}^4(u) + 44k^2 \text{sn}^3(u) \text{dn}^4(u) \\ &\quad + 328k^4 \text{sn}^3(u) \text{cn}^2(u) \text{dn}^2(u) - 16k^4 \text{sn}(u) \text{dn}^2(u) - 93k^4 \text{sn}(u) \text{cn}^4(u) \text{dn}^2(u) \\ &\quad - 16k^6 \text{sn}^5(u) \text{cn}^2(u) + 132k^6 \text{sn}^3(u) \text{cn}^4(u) - k^6 \text{sn}(u) \text{cn}^6(u), \\ \frac{d^7}{du^7} \text{sn}(u) &= -\text{cn}(u) \text{dn}^7(u) + 402k^2 \text{sn}^2(u) \text{cn}(u) \text{dn}^5(u) - 135k^2 \text{cn}^3(u) \text{dn}^5(u) \\ &\quad + 1896k^4 \text{sn}^2(u) \text{cn}^3(u) \text{dn}^5(u) - 832k^4 \text{sn}^4(u) \text{cn}(u) \text{dn}^3(u) - 16k^4 \text{cn}(u) \text{dn}^3(u) \\ &\quad - 656k^6 \text{sn}^4(u) \text{cn}^3(u) \text{dn}(u) + 32k^6 \text{sn}^2(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u) - 80k^6 \text{sn}^4(u) \text{cn}(u) \text{dn}^3(u) \\ &\quad + 32k^2 \text{sn}^6(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u) - 93k^4 \text{cn}^5(u) \text{dn}^3(u) + 186k^6 \text{sn}^2(u) \text{cn}^5(u) \text{dn}(u) \\ &\quad + 396k^6 \text{sn}^2(u) \text{cn}^5(u) - 528k^6 \text{sn}^4(u) \text{cn}^3(u) - k^6 \text{cn}^7(u) \text{dn}(u) \\ &\quad + 5k^6 \text{sn}^2(u) \text{cn}^5(u) \text{dn}(u). \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we de Maclaurin-reeks van  $\text{sn}(u)$  bepalen.

$$\text{sn}(u) = u - \frac{1}{3!}(1+k^2)u^3 + \frac{1}{5!}(1+14k^2+k^4)u^5 - \frac{1}{7!}(1+135k^2+135k^4+k^6)u^7 + \mathcal{O}(u^9). \quad (7.19)$$

---

<sup>3</sup>Een Maclaurin reeks is een Taylorreeks rond het punt nul. De Taylorreeks staat beschreven in het boek van Lay [8] (Stelling 6.4.2)

Voor de andere twee functies, leiden we op eenzelfde manier de Maclaurin-reeks af.

$$\operatorname{cn}(u) = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}(1 + 4k^2)u^4 - \frac{1}{6!}(1 + 44k^2 + 16k^4)u^6 + \mathcal{O}(u^8), \quad (7.20)$$

$$\operatorname{dn}(u) = 1 - \frac{1}{2!}k^2u^2 + \frac{1}{4!}(4k^2 + k^4)u^4 - \frac{1}{6!}(16k^2 + 44k^4 + k^6)u^6 + \mathcal{O}(u^8), \quad (7.21)$$

## 7.4 De primitieven

Aangezien we de afgeleide hebben bepaald, is het ook wel zo netjes om te laten zien dat we door gebruik te maken van deze afgeleide ook de primitieven kunnen bepalen. Gezegd moet worden dat dit verder niet van belang is voor ons einddoel.

Bij het bepalen van deze primitieve verwaarlozen wij de additieve constante  $C$  in de notatie. Dit doen wij, omdat wij hier niet verder mee gaan werken. Laten wij beginnen met  $\operatorname{sn}(u)$ . We passen meteen een transformatie toe:  $t = \operatorname{sn}(u)$ . Substitueren wij deze in (7.14), dan krijgen we  $dt/du = \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ . Nu volgt:

$$\int \operatorname{sn}(u) \, du = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \, dt.$$

De volgende transformatie is:

$$x = \sqrt{1-t^2}, \text{ met } dx/dt = -t/\sqrt{1-t^2} \text{ en } t = \sqrt{1-x^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \, dt &= - \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2(\sqrt{1-x^2})^2}} \\ &= - \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2+k^2x^2}}. \end{aligned}$$

En weer een substitutie:

$$v = kx/\sqrt{1-k^2}, \text{ met } dv/dx = k/\sqrt{1-k^2} \text{ en } x = \frac{v}{k}\sqrt{1-k^2}.$$

$$\begin{aligned} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2+k^2x^2}} &= - \int \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{(1-k^2)+v^2(1-k^2)}} \, dv \\ &= - \frac{1}{k} \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}. \end{aligned}$$

Nu komt een slimme substitutie met de sinus hyperbolicus.  
 $v = \sinh(y)$ , met  $dv/dy = \cosh(y)$  en  $y = \operatorname{arcsinh}(v)$ .

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} &= -\frac{1}{k} \int \frac{\cosh(y)}{\sqrt{\sinh^2(y) + 1}} dy \\ &= -\frac{1}{k} \int 1 dy = -\frac{1}{k} y. \end{aligned}$$

Wij gaan terugredeneren met alle substituties.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} y &= -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}(v) \\ &= -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{kx}{\sqrt{1-k^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k\sqrt{1-\operatorname{sn}(u)^2}}{\sqrt{1-k^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k \operatorname{cn}(u)}{k'}\right) \\ &\stackrel{[F]}{=} -\frac{1}{k} \ln\left(\sqrt{\left(\frac{k \operatorname{cn}(u)}{k'}\right)^2 + 1} + \frac{k \operatorname{cn}(u)}{k'}\right) \\ &= -\frac{1}{k} \ln\left(\sqrt{\frac{k^2 \operatorname{cn}^2(u) + k'^2}{k'^2}} + \frac{k \operatorname{cn}(u)}{k'}\right) \\ &= -\frac{1}{k} \ln\left(\sqrt{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}(u)} + k \operatorname{cn}(u)\right) + \frac{1}{k} \ln(k') \\ &= -\frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn}(u) + k \operatorname{cn}(u)) = \frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn}(u) - k \operatorname{cn}(u)). \end{aligned}$$

In de laatste twee stappen is er veel gebeurd. We maakten gebruik van (7.12) en daarnaast hebben we  $k$  vervangen door  $-k$ . Ook de term  $(1/k) \cdot \ln(\sqrt{k^2 - 1})$  is verwaarloosd, omdat deze toch verdwijnt wanneer je de afgeleide pakt. Dus de primitieve van  $\operatorname{sn}(u)$  is

$$\int \operatorname{sn}(u) du = \frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn}(u) - k \operatorname{cn}(u)). \quad (7.22)$$

Op een soortgelijke manier bepalen we de primitieven van  $\text{cn}(u)$  en  $\text{dn}(u)$ .

$$\int \text{cn}(u) \, du = \frac{1}{k} \arccos(\text{dn}(u)), \quad (7.23)$$

$$\int \text{dn}(u) \, du = \arcsin(\text{sn}(u)). \quad (7.24)$$

Dan gaan we nu naar Landens transformatie.

# Hoofdstuk 8

## Landens transformatie

We hebben nu alle ingrediënten om de Landen transformatie te bewijzen en toe te passen. We gaan de laatste stappen zetten voor het bewijs.

### 8.1 Elliptische integraal van de eerste soort

We verkrijgen een elliptische integraal door de inverse van de sn-functie te bepalen. Wij maken hierbij gebruik van de inverse functie stelling zoals beschreven door Lay (Stelling 6.2.10 [8]). Laat  $y = \operatorname{sn}(x)$ . Dan volgt dat  $x = \operatorname{arcsn}(y)$ . De stelling geeft dan dat

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcsn}(y) = \frac{1}{\operatorname{sn}'(x)}. \quad (8.1)$$

Hieruit volgt dus dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \operatorname{arcsn}(y) &= \frac{1}{\operatorname{cn}(x) \operatorname{dn}(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(x))(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(x))}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}. \end{aligned}$$

Nu we de afgeleide van de arcsn weten, kunnen we deze integreren om zo de functie,  $\operatorname{arcsn}(x, k)$ , te verkrijgen. We gaan nu de notatie met de  $k$  aanhouden, omdat deze een belangrijke rol gaat vervullen. Tevens gebruiken we ook de  $x$  in plaats van de  $y$ , omdat dit overeenkomt met veel bronnen.

$$\operatorname{arcsn}(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}. \quad (8.2)$$

Merk op dat deze integraal alleen geldt voor  $0 < k < 1$  (de modulus) en  $0 \leq x \leq 1$ . We noemen (8.2) een elliptische integraal van de eerste soort. We zien ook meteen dat de integraal voldoet aan de definitie van een elliptische integraal (1.4). Als we de volgende substitutie toepassen op (8.2), krijgen we de integraal waar we naar opzoek zijn:  $t = \sin(\theta)$ . Dan volgt dat  $dt/d\theta = \cos(\theta)$ .



Tevens nemen we  $x = \sin(\phi)$ . Dit mag aangezien  $0 \leq x \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsn}(\sin(\phi), k) &= \int_0^\phi \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}. \end{aligned}$$

Dit wordt vaak als volgt genoteerd:

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}. \quad (8.3)$$

Integraal (8.3) is nu geschreven in Legendre-vorm<sup>1</sup>.

### Complete elliptische integraal van de eerste soort introduceren

Uit de definitie van  $\operatorname{sn}(u)$  en uit (7.9) volgt dat

$$\operatorname{sn}(u + K) = \operatorname{cd}(u)$$

Wanneer we  $u = 1$  invullen, zien we dat  $\operatorname{sn}(K) = 1$ . Nu volgt uit (8.2) dat

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (8.4)$$

Wij noemen (8.4) de complete elliptische integraal van de eerste soort.

## 8.2 De transformatie

We gaan nu een nieuwe transformatie afleiden aan de hand van de al eerder bewezen Landen-transformatie-relaties. Omdat we nu gebruik gaan maken van thèta-functies met parameter  $2\tau$  ( $q^2$ ) introduceren we  $k_1$  als equivalent van  $k$ , die hoort bij  $\tau$  ( $q$ ). Dan zal  $k_1$  er zo uitzien:

$$k_1 = \frac{\vartheta_2^2(0; q^2)}{\vartheta_3^2(0; q^2)}. \quad (8.5)$$

Als je goed kijkt, zijn we de rechterkant van (8.5) al eerder tegengekomen. Namelijk (6.3) gedeeld door (6.2). Dus (8.5) wordt nu

$$k_1 = \frac{\vartheta_3^2(0; q) - \vartheta_4^2(0; q)}{\vartheta_3^2(0; q) + \vartheta_4^2(0; q)}.$$

---

<sup>1</sup>Voor meer hierover zie: [https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre\\_form](https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_form)

En hier zien we weer  $k'$  in terug. Dus volgt nu dat

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}. \quad (8.6)$$

Voor  $k \in (0, 1)$  volgt uit (8.6) dat  $k_1 \in (0, 1)$ . Aan de hand van deze  $k_1$  gaan we een transformatie aantonen van  $q^2$  naar  $q$ . Wanneer we (6.8) delen door (6.7), krijgen we de volgende transformatie:

$$\frac{\vartheta_1(2z; q^2)}{\vartheta_4(2z; q^2)} = \frac{\vartheta_1(z; q)\vartheta_2(z; q)}{\vartheta_3(z; q)\vartheta_4(z; q)}.$$

We kunnen hier twee van Jacobi's elliptische functies uithalen. Dan wordt de vergelijking<sup>2</sup>

$$\frac{\vartheta_2(0; q^2)}{\vartheta_3(0; q^2)} \operatorname{sn}(u_1, k_1) = \frac{\vartheta_2^2(0; q)}{\vartheta_3^2(0; q)} \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cd}(u, k),$$

waarbij  $u_1 = 2z\vartheta_3^2(0; q^2)$ . Dankzij (7.5) en (8.5) wordt dit

$$\sqrt{k_1} \operatorname{sn}(u_1, k_1) = k \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cd}(u, k). \quad (8.7)$$

Dit is Landens transformatie. Zo dadelijk gaan wij deze op een andere manier toepassen.

Verder is het interessant om op te merken dat  $u_1$  en  $u$  aan elkaar gekoppeld zijn dankzij  $k'$ . Herschrijf (6.4) als volgt:

$$\vartheta_3^2(0; q^2) = \frac{1}{2}(1 + k')\vartheta_3^2(0; q).$$

Als we hier gebruik van maken, zien we dat

$$u_1 = 2z\vartheta_3^2(0; q^2) = z(1 + k')\vartheta_3^2(0) = (1 + k')u.$$

Dus

$$u_1 = (1 + k')u. \quad (8.8)$$

Aan de hand van (8.8) kunnen we twee elliptische integralen aan elkaar koppelen. Laat  $\sin(\varphi) = \operatorname{sn}(u_1, k_1)$  en  $\sin(\phi) = \operatorname{sn}(u, k)$ . Dan volgt uit (8.8) dat

$$\operatorname{arcsn}(\sin(\varphi), k_1) = (1 + k') \operatorname{arcsn}(\sin(\phi), k).$$

---

<sup>2</sup> $\operatorname{cd}(u) = \operatorname{cn}(u)/\operatorname{dn}(u)$  zie (7.9)

Wij schrijven het in de Legendre-vorm.

$$\int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)}} = (1 + k') \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}. \quad (8.9)$$

Het enige wat wij nog missen is het verband tussen  $\varphi$  en  $\phi$ . Als we kijken naar hoe wij ze hebben gedefinieerd, kunnen wij, aan de hand van (8.7), ze als volgt uitschrijven:

$$\sin(\varphi) = \frac{(1 + k') \sin(2\phi)}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}}. \quad (8.10)$$

Deze vergelijking werken we verder uit, zodat we een meer behapbare vergelijking krijgen.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2\phi)}{\sin(\varphi)} &= \frac{2}{1 + k'} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)} \\ &= \frac{2}{1 + k'} \sqrt{1 - (1 - k'^2) \sin^2(\phi)} \\ &= \sqrt{\frac{4 - 4 \sin^2(\phi) + 4k'^2 \sin^2(\phi)}{(1 + k')^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 + 2k'^2 + 2 \cos(2\phi) - 2k'^2 \cos(2\phi)}{(1 + k')^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - 2k' + k'^2 + 2 \cos(2\phi) - 2k'^2 \cos(2\phi) + 1 + 2k' + k'^2}{(1 + k')^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - k')^2}{(1 + k')^2} + \frac{2(1 - k') \cos(2\phi)}{1 + k'}} + 1 \\ &= \sqrt{k_1^2 + 2k_1 \cos(2\phi) + 1} \\ &= \sqrt{k_1^2 + 2k_1 \cos(2\phi) + \cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)} \\ &= \sqrt{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi)}. \end{aligned}$$

Op deze manier krijgen we

$$\sin(\varphi) = \frac{\sin(2\phi)}{\sqrt{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi)}}. \quad (8.11)$$

We gaan nu toewerken naar een speciale vorm zodat we bovenstaande vergelijking kunnen omschrijven naar de vorm “ $\tan(\varphi) =$ ”. Dit doen we met behulp van de volgende goniometrische eigenschap:

$$\sin(\alpha) = \gamma \iff \tan(\alpha) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (8.12)$$

We kunnen nu (8.11) omschrijven aan de hand van (8.12).

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{\frac{\sin(2\phi)}{\sqrt{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi)}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(2\phi)}{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi)}}} \\ &= \frac{\frac{\sin(2\phi)}{\sqrt{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi)}}}{\sqrt{\frac{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi) - \sin^2(2\phi)}{(k_1 + \cos(2\phi))^2 + \sin^2(2\phi)}}} = \frac{\sin(2\phi)}{k_1 + \cos(2\phi)}. \end{aligned}$$

Dan hebben we

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(2\phi)}{k_1 + \cos(2\phi)}.$$

Dit wordt

$$(k_1 + \cos(2\phi)) \sin(\varphi) = \sin(2\phi) \cos(\varphi).$$

Zo krijg je

$$k_1 \sin(\varphi) = \sin(2\phi) \cos(\varphi) - \cos(2\phi) \sin(\varphi).$$

Aan de linkerkant staat nu de verschilregel van de sinus, dit wordt dan

$$k_1 \sin(\varphi) = \sin(2\phi - \varphi).$$

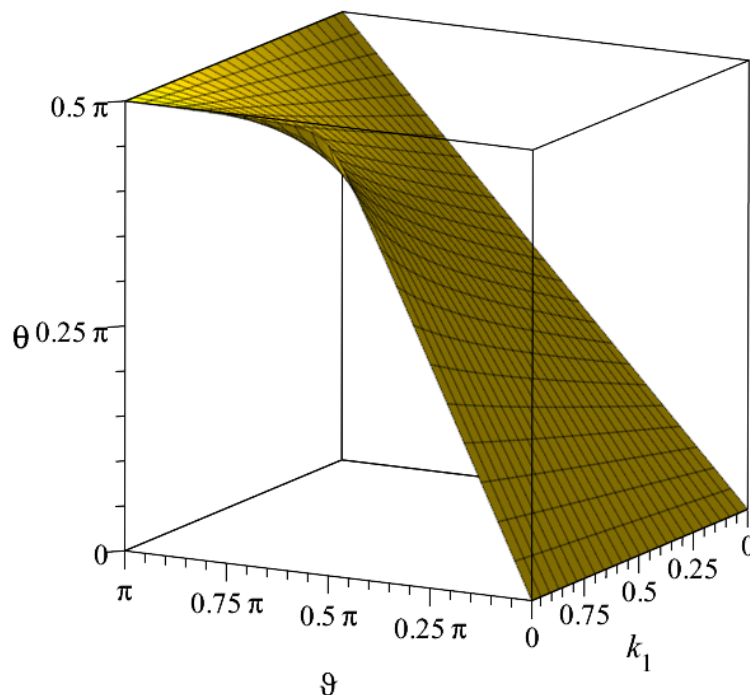
Neem links en rechts de arcsin,

$$\arcsin(k_1 \sin(\varphi)) = 2\phi - \varphi,$$

Uiteindelijk krijgen we dus

$$2\phi = \varphi + \arcsin(k_1 \sin(\varphi)). \quad (8.13)$$

We hebben met (8.13) een verband gelegd tussen  $\varphi$  en  $\phi$  en zullen hier zo meteen nog profijt van hebben. Tevens zien we in figuur (8.1) dat wanneer  $\vartheta$  van 0 naar  $\pi$  loopt, dat  $\theta$  van 0 naar  $\frac{\pi}{2}$  loopt.



Figuur 8.1: Het verband tussen  $\vartheta$  en  $\theta$

### 8.3 Bewijs aan de hand van integralen

Voordat we de volledige definitie van Landens transformatie geven, laten we eerst nog zien dat we Landens transformatie ook aan de hand van integralen en substituties kunnen bewijzen.

We hebben de volgende elliptische integraal:

$$\operatorname{arcsn}(\sin(\varphi), k_1) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)}}. \quad (8.14)$$

Hierbij is  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . We passen de volgende verandering van variabele toe:

$$2\theta = \vartheta + \arcsin(k_1 \sin(\vartheta)). \quad (8.15)$$

Merk op dat deze volledig berust op de al eerder bewezen relatie (8.13). We krijgen dan de volgende substitutie van  $d\theta$  voor  $d\vartheta$ :

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = \frac{1}{2} + \frac{k_1 \cos(\vartheta)}{2\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)}} = \frac{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)} + k_1 \cos(\vartheta)}{2\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)}}. \quad (8.16)$$

Ook de  $\phi$  verandert zoals beschreven in (8.13).

Na de substitutie ziet de integraal er als volgt uit:

$$\int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)}} = 2 \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)} + k_1 \cos(\vartheta)}. \quad (8.17)$$

Vervolgens maken we nog een belangrijke afleiding uit (8.15).

$$\sin(2\theta) = \sin\left(\vartheta + \arcsin(k_1 \sin(\vartheta))\right).$$

Weer de regel van Simpson gebruiken, geeft

$$\sin(2\theta) = \sin(\vartheta) \cos\left(\arcsin(k_1 \sin(\vartheta))\right) + k_1 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta).$$

De cosinus uitschrijven in termen van de sinus.

$$\sin(2\theta) = \sin(\vartheta) \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)} + k_1 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta). \quad (8.18)$$

Merk op dat dit zeer veel lijkt op de noemer van de elliptische integraal (8.17). Als we  $\sin(2\theta)/\sin(\vartheta)$  kunnen uitschrijven in termen van  $\theta$ , wordt de integraal kloppend. Als we (8.10) en (8.18) beiden schrijven in de vorm " $\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\vartheta)} =$ ", leiden we de volgende identiteit af:

$$k_1 \cos(\vartheta) + \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)} = \frac{2}{1 + k'} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}. \quad (8.19)$$

Als we (8.19) toepassen op (8.17), dan krijgen we

$$2 \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)} + k_1 \cos(\vartheta)} = (1 + k') \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}. \quad (8.20)$$

Wanneer we goed naar (8.20) kijken, halen we er weer een elliptische integraal uit.

$$(1 + k') \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} = (1 + k') \operatorname{arcsn}(\sin(\phi), k).$$

Hieruit volgt Landens transformatie.

$$\operatorname{arcsn}(\sin(\varphi), k_1) = (1 + k') \operatorname{arcsn}(\sin(\phi), k). \quad (8.21)$$

Dan kunnen wij nu eindelijk de definitie van Landens transformatie geven in de integraalvorm die wij nodig hebben.

**Definitie Landens transformatie (integraalvorm).** Laat  $F(\varphi, k)$  de onvolledige elliptische integraal van de eerste soort zijn. Dan is Landens transformatie als volgt gedefinieerd:

$$F(\varphi, k_1) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2(\vartheta)}} = (1 + k') \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} = (1 + k')F(\phi, k), \quad (8.22)$$

waarbij

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \quad , \quad k = \sqrt{1 - k'^2} \quad , \quad 2\phi = \varphi + \arcsin(k_1 \sin(\varphi)).$$

Hierbij geldt dat  $k \in (0, 1)$  en  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Wij gaan deze transformatie toepassen op ons probleem. Belangrijk om in te zien is dat wij in (8.22) van rechts naar links gaan werken. Wij hebben de integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}}.$$

en deze gaan we omschrijven naar Legendres vorm.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} &= \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2(\theta) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\theta)}} \\ &= \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\theta)}} \\ &= \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - \frac{a^2}{b^2}) \sin^2(\theta)}}. \end{aligned}$$

We kunnen aflezen dat wij  $k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$  hebben. Dat betekent dat  $k' = \frac{a}{b}$  en  $k_1 = \frac{b-a}{b+a}$ . Nu moeten wij nog zorgen dat er  $1 + k' = \frac{b+a}{b}$  voor de integraal staat en vervolgens kunnen we ook de transformatie uitvoeren.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b+a} \cdot \frac{b+a}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - \frac{a^2}{b^2}) \sin^2(\theta)}} \\
&= \frac{1}{b+a} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 \sin^2(\vartheta)}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(b+a)^2 - (b-a)^2 \sin^2(\vartheta)}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(b^2 - b^2 \sin^2(\vartheta) + a^2 - a^2 \sin^2(\vartheta) + 2ab + 2ab \sin^2(\vartheta))}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \cos^2(\vartheta) + 2ba \cos^2(\vartheta) + 2ab \sin^2(\vartheta) + 2ab \sin^2(\vartheta)}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(a+b)^2 \cos^2(\vartheta) + 4ab \sin^2(\vartheta)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2(\vartheta) + (\sqrt{ab})^2 \sin^2(\vartheta)}}.
\end{aligned}$$

Zo hebben we dus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2(\vartheta) + (\sqrt{ab})^2 \sin^2(\vartheta)}}. \quad (8.23)$$

Dit is nog niet de vorm die we willen hebben. Wij willen dat de integraal van het rechterlid van 0 tot  $\frac{\pi}{2}$  loopt. Wanneer we kijken naar figuur (8.2), zien we dat de integrand vermoedelijk puntsymmetrie in  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Wat we nu dus willen, is de puntsymmetrie<sup>3</sup> van de integrand van het rechterlid in het punt  $\frac{\pi}{2}$  wiskundig aantonen. Puntsymmetrie ziet er als volgt uit:

$$f(p-a) = f(p+a).$$

---

<sup>3</sup>Zie: <https://www.hhofstede.nl/modules/symmetrie.htm>



Met  $p$  de symmetrieas en  $a$  een willekeurig punt in het domein. Laat de integrand als volgt gedefinieerd zijn:

$$f(\theta, a, b) = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2(\theta) + (\sqrt{ab})^2 \sin^2(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dan tonen we nu de puntsymmetrie aan.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, a, b\right) &= \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + (\sqrt{ab})^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 (\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\gamma))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{ab})^2 (\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\gamma) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\gamma))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \sin^2(\gamma) + (\sqrt{ab})^2 \cos^2(\gamma) \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dan nu aan de rechterkant.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + \gamma, a, b\right) &= \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + (\sqrt{ab})^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 (\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\gamma) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\gamma))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{ab})^2 (\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\gamma) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\gamma))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \sin^2(\gamma) + (\sqrt{ab})^2 \cos^2(\gamma) \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Zo zien we dat  $f\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, a, b\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + \gamma, a, b\right)$  en de integrand dus puntsymmetrie heeft in  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Dit betekent dat we (8.23) nu als volgt kunnen schrijven:

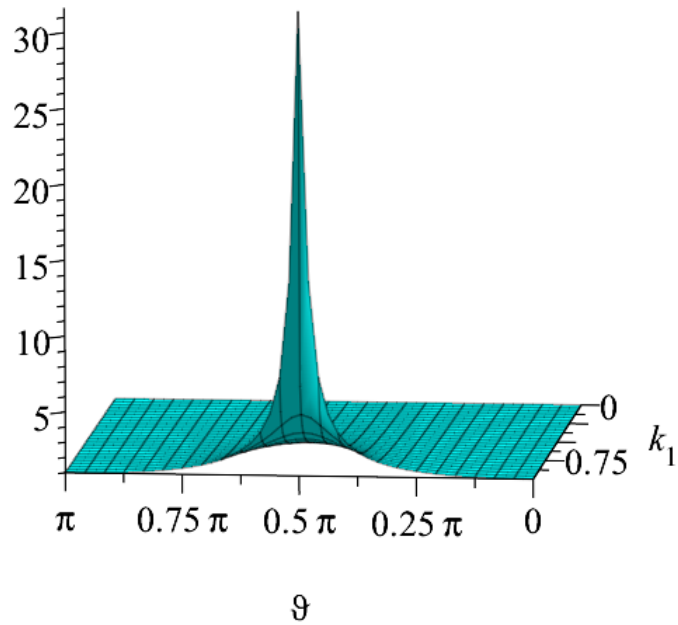
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2(\vartheta) + (\sqrt{ab})^2 \sin^2(\vartheta)}} \quad (8.24)$$

Dan hebben we het gewenste resultaat.

## 8.4 De substitutie van Carlson

Het is wel opvallend dat wij een hele andere substitutie en werkwijze hebben gebruikt dan Hoffmann. Waar hij  $v = \frac{1}{2}\left(u - \frac{ab}{u}\right)$  gebruikt om de gelijkheid van

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{((\sqrt{ab})^2 + v^2)((\frac{a+b}{2})^2 + v^2)}} = \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}}$$



Figuur 8.2: 3D plot van de integrand van het rechterlid (8.23): Er is puntsymmetrie in  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

te bewerkstelligen, gebruiken wij Landens transformatie om de gelijkheid van (8.23) aan te tonen. Echter heb ik geen verband tussen beide methoden kunnen vinden. Wel heb ik een vermoeden hoe Hoffmann aan zijn transformatie is gekomen. Hij heeft zich waarschijnlijk laten inspireren door Carlson. Dit vermoed ik, omdat J. Borwein en P. Borwein dezelfde substitutie gebruiken in hun bewijs (§1.2 [11]). Zij verwijzen vervolgens naar het werk van Carlson die dit heeft onderbouwd in een artikel [27]. Wat hij doet is eigenlijk ook een substitutie uitvoeren zonder uit te leggen hoe hij hier opgekomen is. Echter is de substitutie die Carlson doet anders dan die van Borwein en Hoffmann. Opvallend is dat ik ook geen verband tussen die twee heb kunnen ontdekken. Tevens kon ik met Carlsons methode ook geen een verband leggen met Landens transformatie.

We kunnen dus concluderen dat het ons niet gelukt is om de substitutie van Hoffmann te doorgronden en te begrijpen waar deze vandaan komt. Wel hebben wij het vermoeden dat deze gebaseerd is op de methode van Carlson. Echter zit in zijn methode een net zo wonderbaarlijke substitutie. Wel is het ons gelukt om op een andere manier het verband tussen het RMG en  $\pi$  te bewijzen aan de hand van Landens transformatie. Daarnaast hebben wij deze transformatie zelf afgeleid en bewezen.

# Hoofdstuk 9

## Conclusies

We hebben bewezen dat er een verband is tussen  $\pi$  en het RMG in het bewijs van Hoffmann. Echter maakte hij een stap die hij niet nadere toelichtte. Wij zijn vervolgens de wereld van elliptische functies ingedoken en kwamen na veel werk uit op Landens transformatie. Wij hebben de juistheid van deze transformatie aangetoond en daarmee ook bevestigd dat er inderdaad een verband is tussen het RMG en  $\pi$ . Opvallend is dat wij een heel andere weg hebben gevolgd dan Hoffmann en geen verband tussen de twee methoden hebben kunnen vinden.

Een andere conclusie die wij kunnen trekken is dat wij er niet in zijn geslaagd te achterhalen hoe je op de substitutie van Hoffmann komt noch op die van Carlson.

# Hoofdstuk 10

## Discussie

Tijdens mijn onderzoek ben ik op vele dingen gestuit waar ik nog niet eerder van had gehoord zoals elliptische functies en Landens transformatie. Daarnaast kwam ik tijdens mijn onderzoek erachter dat ik misschien een andere aanpak had moeten hanteren voor het behalen van mijn doel. Ik ben veel met randzaken bezig geweest in plaats van het einddoel: Landens transformatie. Tevens waren er ook een aantal moeilijkheden die ik moest aanpakken. Neem bijvoorbeeld het notatieverschil van de vele bronnen over  $\theta$ -functies. Hierdoor ben je veel tijd kwijt aan het bestuderen van bronnen, omdat je elke keer dingen moet omschrijven naar de notatie die jijzelf hanteert. Ook ik heb mij hier schuldig aangemaakt door in het begin de  $\theta$ -notatie veel te gebruiken en op het eind alleen nog maar de  $\vartheta$ -notatie. Dit kan verwarrend zijn voor de lezer en ook voor mijzelf, aangezien ik elke keer moest narekenen of ik het wel goed had omgeschreven. Ik denk dat je het beste de  $\vartheta$ -notatie kan aanhouden, omdat deze korter is en makkelijker om mee te rekenen. Een groot nadeel aan de wereld van elliptische functies en het komen tot het bewijs van Landens transformatie is de grote hoeveelheid aan formules en vergelijkingen. Je raakt hierdoor snel het overzicht kwijt en het is moeilijk naar één ding toe te werken zonder vaak te moeten uitweiden.

Ik denk dat het goed mogelijk is om hier verder onderzoek naar te doen. Ik vermoed namelijk dat er een verband is tussen de methode van Hoffmann en die van ons. Ook denk ik dat er een verband is tussen de methode van Hoffmann en Carlson. Daarnaast lijkt het mij zeer nuttig om te kijken waar we het RMG nog meer kunnen toepassen, aangezien zijn verband met  $\pi$  en elliptische integralen ervoor zorgt dat het terugkomt in veel vakgebieden. Zelf zou ik graag nog willen kijken naar de Weierstrass elliptische functies en hun toepassingen en eigenschappen. Eigenlijk heb ik dat ook een klein beetje gedaan, echter achtte ik het niet waarde voor dit verslag en daarom heb ik dat ik de appendix gestopt [I].

# Bibliografie

- [1] Wikipedia. q-Pochhammer symbol — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Q-Pochhammer\\_symbol](https://en.wikipedia.org/wiki/Q-Pochhammer_symbol), 2019. Geraadpleegd op 13 augustus 2019.
- [2] Richard Haberman. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Peason, 5 edition, 2014.
- [3] Gert Almkvist and Bruce Berndt. Gauss, landen, ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses,  $\pi$ , and the ladies diary. *The American Mathematical Monthly*, 95(7), September 1988.
- [4] Joseph-Louis Lagrange. Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Turin*, 1784.
- [5] Wikipedia. Bazel-prbleem — Wikipedia, de vrije encyclopedie. <https://nl.wikipedia.org/wiki/Bazel-probleem>, 2019. Geraadpleegd op 21 augustus 2019.
- [6] Christian W. Hoffmann.  $\pi$ : Pi and the arithmetic-geometric mean. [http://www.ehoffmann.ch/Pi\\_AE.pdf](http://www.ehoffmann.ch/Pi_AE.pdf), 2003.
- [7] Wikipedia. Gauss's constant—Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%27s\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%27s_constant), 2019. Geraadpleegd op 24 augustus 2019.
- [8] S.R. Lay. *Analysis with an Introduction to Proof*. Peasron, 5 edition, 2014.
- [9] C. Vuik, F. J. Vermolen, M. B. van Gijzen, and M. J. Vuik. *Numerical Methods of Ordinary Differential Equations*. Delft Academic Press, 2 edition, 2016.
- [10] Eric W. Weisstein. Lemniscate Constant—Mathworld, a wolfram web resource. <http://mathworld.wolfram.com/LemniscateConstant.html>, 2019. Geraadpleegd op 24 augustus 2019.
- [11] J. M. Borwein and P. B. Borwein. *Pi and the AGM*. Wiley-Interscience, 1998.
- [12] D.F. Lawden. *Elliptic Functions and Applications*, volume 80. Springer-Verlag, 1989.

- [13] Martin Braun. *Differential Equations and Their Applications*. Springer, 4 edition, december 1992.
- [14] F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, and B. V. Saunders. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Theta functions: Definitions and periodic properties. <https://dlmf.nist.gov/20.2>. Geraadpleegd op 24 augustus 2019.
- [15] Frank Nijhoff. Elliptic functions. <http://www1.maths.leeds.ac.uk/~frank/math3491/AppA.pdf>.
- [16] Marina Franz. Theta functions. *Irish Mathematical Society*, (60):91–112, 2007.
- [17] E. Freitag and R. Busam. *Complex Analysis*. Springer, 2 edition, 2009.
- [18] J. Tannery and J. Molk. *Elements De LA Theorie Des Fonctions Elliptiques: 4 Volumes in 2 Books*. Chelsea Pub Co, 2 edition, juni 1972.
- [19] Wikipedia. Jacobi theta functions (notational variations) — Wikipedia, the free encyclopedia. [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jacobi%20theta%20functions%20\(notational%20variations\)oldid=819545845](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jacobi%20theta%20functions%20(notational%20variations)oldid=819545845), 2019. Geraadpleegd op 19 juli 2019.
- [20] E. T. Whittaker and N. G. Watson. *A course of Modern Analysis*. Cambridge [Eng.] : University Press, 1920.
- [21] Encyclopedia of Mathematics. Euler formulas. [http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Euler\\_formulasoldid=32798](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Euler_formulasoldid=32798).
- [22] Encyclopedia of Mathematics. Infinite product. [http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Infinite\\_productoldid=38627](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Infinite_productoldid=38627).
- [23] Wikipedia. Analytic function — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Analytic%20functionoldid=892139907>, 2019. Geraadpleegd op 23 juli 2019.
- [24] Wikipedia. John Landen—Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/John.Landen>, 2019. Geraadpleegd op 22 augustus 2019.
- [25] J. J. O’Conner and E.F. Robertson. John landen. <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Landen.html>. Geraadpleegd op 22 augustus 2019.

- [26] F. M. S. Lima and P. Arun. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime.  
<https://arxiv.org/pdf/physics/0510206v3.pdf>.
- [27] B. C. Carlson. Algorithms involving arithmetic and geometric means. *The American Mathematical Monthly*, 78(5):496–505, mei 1971.
- [28] Wikipedia. Dominated convergence theorem — Wikipedia, the free encyclopedia.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Dominated\\_convergence\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem), 2019. Geraadpleegd op 13 augustus 2019.
- [29] Eugene Salamin. Computation of  $\pi$  using arithmetic-geometric mean. *American Mathematical Society*, 30(135), juli 1976.
- [30] Lorenz Milla. Easy proof of three recursive  $\pi$ -algorithms.  
<https://arxiv.org/pdf/1907.04110v1.pdf>, juli 2019.
- [31] Wikipedia. Logarithm — Wikipedia, the free encyclopedia.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/LogarithmArithmetic%E2%80%93geometric\\_mean\\_approximation](https://en.wikipedia.org/wiki/LogarithmArithmetic%E2%80%93geometric_mean_approximation), 2019. Geraadpleegd op 13 augustus 2019.
- [32] Wikipedia. Legendre's relation — Wikipedia, the free encyclopedia.  
<http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Legendre's%20relation&oldid=737429584>, 2019. Geraadpleegd op 19 juli 2019.
- [33] Weierstrass elliptic functions.  
<https://dlmf.nist.gov/23.2>.
- [34] Wikipedia. Weierstrass functions — Wikipedia, the free encyclopedia.  
<http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Weierstrass%20functions&oldid=895774203>, 2019. Geraadpleegd op 19 juli 2019.
- [35] G. Pastras. Four lectures on weierstrass elliptic function and applications in classical and quantum mechanics.  
<https://arxiv.org/pdf/1706.07371.pdf>.

# Bijlage A

## Verband tussen de sinus, cosinus en tangens

Stel  $t = \tan(\theta)$ . Dan kunnen we zowel de sinus als de cosinus uitdrukken in termen van  $t$ .

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Dit wordt

$$\sin(\theta) = t \cos(\theta).$$

Maak gebruik van de goniometrische gelijkheid:  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ .

$$\sin(\theta) = t\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}.$$

Links en rechts kwadrateren.

$$\sin^2(\theta) = t^2(1 - \sin^2(\theta)).$$

Zo krijgen we

$$\sin^2(\theta)(1 + t^2) = t^2.$$

Dan volgt dat

$$\sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Uit de eerder genoemde goniometrische gelijkheid volgt ook dat

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}.$$

De uitdrukking voor  $t$  invullen.

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \frac{t^2}{1 + t^2}}.$$

Zo volgt dat

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$



# Bijlage B

## Gedomineerde convergentie stelling van Lebesgue

De stelling luidt als volgt [28] : Laat  $\{f_n\}$  een rij meetbare complex-waardige functies zijn op een meetbare ruimte  $(S, \Sigma, \mu)$ . Als de rij puntsgewijs convergeert naar een functie  $f$  en er een integreerbare functie  $g$  bestaat met de eigenschap  $|f_n(x)| \leq g(x)$  voor alle  $n$  en alle  $x \in S$ . Dan volgt dat  $f$  integreerbaar is en dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n \, d\mu = \int_S f \, d\mu.$$

Dit gaan wij toepassen op

$$f_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{b_n^2 \cos^2(\theta) + a_n^2 \sin^2(\theta)}} \quad , \quad f(\theta) = \frac{1}{L}.$$

Het enige dat wij hoeven te doen, is het vinden van een integreerbare functie  $g$  op het interval  $[0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} |f_n(\theta)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{b_n^2 \cos^2(\theta) + a_n^2 \sin^2(\theta)}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2(\theta) + a_n^2 \sin^2(\theta)}} \right| \\ &= \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_0}. \end{aligned}$$

Dus wij hebben  $g(\theta) = \frac{1}{a_0}$  en de stelling volgt.

# Bijlage C

## Gewone differentiaalvergelijking

We gaan het volgende probleem oplossen:

$$\frac{dh}{dt}(t) = -\lambda k h(t)$$

Eerste delen we links en rechts door  $h(t)$  en vervolgens integreren we de vergelijking over  $t$ .

$$\int \frac{1}{h(t)} dh = -\lambda k \int 1 dt.$$

Dit wordt

$$\ln(h(t)) = -\lambda k t + C.$$

Pak de inverse van de natuurlijke logaritme.

$$h(t) = c e^{-\lambda k t}.$$

Met  $c = e^C$ . Zo hebben we de gewone differentiaalvergelijking opgelost.

# Bijlage D

## Orthogonaliteit van een sinoïde

We gaan twee integralen uitwerken. De eerste (voor  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ) is

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) \, dx &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos(nx - mx) \, dx - \frac{1}{2} \cos(nx + mx) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n - m)x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n + m)x) \, dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2nx) \, dx, & n = m \\ \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n - m)x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n + m)x) \, dx, & n \neq m \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n\pi), & n = m \\ \frac{1}{2(n-m)} \sin((n-m)\pi) - \frac{1}{2(n+m)} \sin((n+m)\pi), & n \neq m \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} .\end{aligned}$$

De andere integraal is voor  $n, m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) \, dx &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos(nx - mx) \, dx + \frac{1}{2} \cos(nx + mx) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n - m)x) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n + m)x) \, dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 \, dx, & n = m = 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2nx) \, dx, & n = m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n - m)x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n + m)x) \, dx, & n \neq m \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n\pi), & n = m \neq 0 \\ \frac{1}{2(n-m)} \sin((n - m)\pi) + \frac{1}{2(n+m)} \sin((n + m)\pi), & n \neq m \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases} .
 \end{aligned}$$

# Bijlage E

## Tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

We gaan de tweede orde differentiaalvergelijking oplossen volgens de methode uit het boek van Braun [13]. Een tweede orde differentiaalvergelijking ziet er als volgt uit:

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0.$$

Met  $a, b$  en  $c$  constanten en  $a \neq 0$ . Braun vult vervolgens  $y = e^{rt}$  in, waarbij  $r$  nog bepaald dient te worden. Dan krijgen we

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + e^{rt} = 0.$$

Oplossen voor  $r$  geeft

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Stel dat  $b^2 - 4ac > 0$  dan is de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y(t) = c_1 \exp\left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}t\right] + c_2 \exp\left[\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}t\right]$$

voor  $b^2 - 4ac = 0$ .

$$y(t) = c_1 \exp\left[-\frac{b}{2a}t\right] + c_2 t \exp\left[-\frac{b}{2a}t\right].$$

Voor  $b^2 - 4ac < 0$  volgt er een speciaal geval. Want we krijgen namelijk een complexe waarde voor  $r_{1,2}$ .

$$y(t) = c_1 \exp\left[\frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}t\right] + c_2 \exp\left[\frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}t\right]$$

Wat volgt is dat we  $y$  kunnen schrijven als  $y(t) = u(t) + iv(t)$ , door gebruik te maken van Eulers formules [21].

$$c_3 \exp\left[-\frac{b}{2a}t\right] \cos\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}t\right) + c_4 \exp\left[-\frac{b}{2a}t\right] \sin\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}t\right),$$

waarbij  $c_3 = c_1 + c_2$  en  $c_4 = c_1 - c_2$ . Zo krijgen we ogenschijnlijk twee reële oplossingen  $y_1(t) = u(t)$  en  $y_2(t) = v(t)$ . Maar zijn dit wel oplossingen voor het probleem? Het antwoord is ja. Als we  $u(t) + iv(t)$  in de differentiaalvergelijking stoppen, moet dit nul worden. Wat volgt, is de volgende vergelijking:

$$(au''(t) + bu'(t) + cu(t)) + i(av''(t) + bv'(t) + cv(t)) = 0.$$

Wanneer een imaginair getal gelijk is aan nul, betekent dit dat zowel het reële deel als het imaginaire deel gelijk is aan nul. En dus zijn  $y_1(t) = u(t)$  en  $y_2(t) = v(t)$  inderdaad oplossingen van het probleem.

Nu we weten dat een complexe oplossing is toegestaan en we alle mogelijkheden hebben behandeld, kunnen wij ons probleem oplossen.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad \lambda > 0.$$

Dus hebben we

$$r_1 = \frac{\sqrt{-4\lambda}}{2} = i\sqrt{\lambda} \quad , \quad r_2 = \frac{-\sqrt{-4\lambda}}{2} = -i\sqrt{\lambda}.$$

We zien dat we imaginaire waarden krijgen voor  $r$ , dus wordt onze oplossing van de vorm:

$$\phi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Zo hebben wij het probleem opgelost. Tevens kunnen we hier ook meteen zien waarom oplossingen voor  $\lambda < 0$  niet kunnen in combinatie met homogene randvoorwaarden. De oplossing wordt dan

$$\phi(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Hier zie je dat oplossingen van deze vorm niet kunnen bestaan. Dit komt doordat je werkt met homogene randvoorwaarden of je maakt ze homogeen. Deze oplossing kan nooit nul worden, tenzij je de triviale oplossing pakt.

# Bijlage F

## Eigenschap van de arcsinh

We laten hier zien hoe je de arcsinh anders kan schrijven. Laat

$$y = \operatorname{arcsinh}(x).$$

Dan hebben we

$$x = \sinh(y).$$

Dit wordt

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Links en rechts vermenigvuldigen met  $2e^y$  en alles naar één kant halen.

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

De abc-formule geeft dat

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

We pakken de natuurlijke logaritme,  $\ln$ , dus alleen de ‘plus’ gaat mee:

$$y = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right).$$

Gezien de manier waarop wij  $x$  hebben gedefinieerd volgt dat alle waarden in  $\mathbb{R}$  zijn toegestaan en dus krijgen we

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right). \tag{F.1}$$

# Bijlage G

## Bijektiviteit van $k$ en $q$

Laat  $q$  van 0 naar 1 stijgen. Dan nemen we voor deze kleine waarden van  $q$  de volgende definitie voor  $k$ :

$$k = 4q^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1+q^2}{1+q} \right)^4.$$

De eerste afgeleiden van  $k$  en  $k'$  zijn:

$$\frac{dk}{dq} = \frac{2(q^2+1)^3(9q^3+17q^2-7q+1)}{\sqrt{q}(q+1)^5}.$$

We zien dat  $k$  geen nulpunten heeft voor  $0 \leq q < 1$ . Ook heeft de afgeleide van  $k$  geen nulpunten in datzelfde domein en zien we al snel dat  $\frac{dk}{dq} > 0$  voor  $0 \leq q < 1$ . Dus kunnen we stellen dat  $k$  strikt monotoon stijgend is op het interval  $[0, 1)$ . Uit de definitie van  $k' = \sqrt{1-k^2}$  volgt nu automatisch dat deze strikt monotoon dalend is op datzelfde interval. We kunnen nu stellen dat voor elke waarde van  $q$  in het interval  $[0, q)$  er één unieke waarde van  $k$  bestaat en dus ook van  $k'$ . Dit betekent dat  $k$  en  $k'$  bijectief zijn op het domein  $[0, 1)$ . Uit stelling 2.3.24 [8] uit het boek van Lay volgt nu dat de inverse functie  $q(k)$  ook bijectief is.



# Bijlage H

## Toepassingen van het RMG

Graag zou ik nog een aantal toepassing van het RMG willen uitlichten. Op deze manier wil ik het nut van het RMG en het berekenen van  $\pi$  aantonen.

### H.1 Het Brent-Salamin algoritme

Dit algoritme is in 1974 onafhankelijk van Gauss en Legendre bedacht door Richard Brent en Eugene Salamin [29]. Het wordt ook wel het Gauss-Legendre algoritme genoemd en hij werkt als volgt [30]. Laat

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad , \quad c_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}.$$

Merk op dat hier  $a$  en  $b$  zijn omgedraaid in vergelijking met hoe ik het RMG heb gedefinieerd. Dan volgt nu voor  $a_0 = 1$  en  $b_0 = 1/\sqrt{2}$  dat  $\pi$  zo benaderd kan worden:

$$\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - 2 \sum_{j=1}^n 2^j c_j^2}.$$

Wanneer  $n$  naar oneindig gaat, krijgen we gelijkheid. Dit algoritme convergeert kwadratisch, een gevolg van het RMG. In tabel (H.1) Kunnen we deze kwadratische convergentie goed waarnemen. Een bewijs van dit algoritme en zijn convergentie vind je in het artikel van Salamin [29], maar ook in een recent werk van Milla [30].

Brent-Salamin algoritme				
$n$	$a_n$	$b_n$	benadering van $\pi$ : $\pi_n$	$ \pi_n - \pi $
0	1	0.70710	0	$\pi$
1	0,85355	0,84089	3,14057	$1,01340 \cdot 10^{-3}$
2	0,84722	0,84720	3,14159	$7,37624 \cdot 10^{-9}$
3	0,84721	0,84721	3,14159	$1,67615 \cdot 10^{-14}$

Tabel H.1: Tabel van het Brent-Salamin algoritme

## H.2 Algoritmes voor de natuurlijke logaritme

Niet alleen  $\pi$  kunnen we snel benaderen met het RMG, maar ook elementaire functies zoals de natuurlijke logaritme. We zullen er twee behandelen. De eerste komt uit het boek van Borwein (§7.2 [11]).

$$\ln\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\pi}{\text{RMG}\left(\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\right)^2, \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}\right)^2\right)}.$$

Uiteraard is deze alleen gedefinieerd voor  $0 < q \leq 1$ , omdat de functie bij  $q = 0$  niet gedefinieerd is en vanaf  $q = 1$  wordt de functie negatief en het RMG kan niet negatief worden. Deze benadering is gebaseerd op een identiteit die wij niet hebben behandeld:

$$\pi \frac{K(k')}{K(k)} = \ln\left(\frac{1}{q}\right).$$

De tweede staat op Wikipedia [31] en ziet er als volgt uit:

$$\ln(x) \approx \frac{\pi}{2 \text{RMG}\left(1, \frac{2^{2-m}}{x}\right)}.$$

Deze formule is bedacht door Gauss. Hoe groter  $m$  hoe langer de berekening, maar ook hoe preciezer de benadering. Het nadeel van deze formule is het feit dat je  $\ln(2)$  eerst moet benaderen, maar hiervoor kunnen we het andere algoritme gebruiken. Het voordeel van deze benaderingen is dat je meteen alle logaritmische functies kan benaderen ongeacht het grondtal.

## H.3 Elliptische integralen

Uiteraard kunnen wij ook met het RMG een groot aantal elliptische integralen zeer nauwkeurig benaderen. De meest voor de hand liggende zijn we in het begin al tegengekomen (2.25). Deze kunnen we ook anders uitschrijven.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} = \frac{\pi}{2 \text{RMG}(a, b)}.$$

# Bijlage I

## Weierstrass elliptische functies

Dan zou ik graag in dit hoofdstuk nog wat extra informatie verschaffen over de Weierstrass elliptische functies. Ik heb hier namelijk wel onderzoek naar gedaan, maar uiteindelijk bleek ik het niet nodig te hebben voor Landens transformatie. Echter heeft het wel veel te maken met elliptische functies en thèta-functies en wilde ik het dus toch graag kwijt in het verslag. Dus zie dit als een korte introductie.

### I.1 Weierstrass $\sigma$ -functie

Laten we beginnen met het definiëren van de eerste Weierstrass functie.

**Definitie Weierstrass  $\sigma$ -functie.**

$$\sigma(z|2\omega_1, 2\omega_2) = 2\omega_1 \exp \left[ \frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1} \right] \frac{\theta_{11}(x|\tau)}{\theta'_{11}(0|\tau)} , \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} , \quad z = 2\omega_1 x. \quad (\text{I.1})$$

Dit is definitie zoals gegeven in het werk van Frank Nijhoff [15]. Hierbij is  $\eta$  als volgt gedefinieerd.

$$\eta_i \equiv \zeta(\omega_i) , \quad i = 1, 2. \quad (\text{I.2})$$

Ook is er nog een speciale relatie tussen  $\eta_i$  en  $\omega_i$ . Deze wordt Legendre's relatie genoemd [32].

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}. \quad (\text{I.3})$$

#### I.1.1 Eigenschappen

We gaan nu kijken naar een aantal eigenschappen van de  $\sigma$ -functie die relevant zijn.

## Even of oneven

Eerst kijken we of  $\sigma(z)$  een even of oneven functie is.

$$\begin{aligned}\sigma(-z) &= 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1(-z)^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{-z}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\ &= -2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} = -\sigma(z).\end{aligned}$$

Duidelijk is dus dat de  $\sigma$ -functie een oneven functie is. Dit komt doordat de  $\theta_{11}$ -functie oneven is.

## Quasi-periodiek

Omdat er een thèta-functie in de sigma-functie zit is het interessant om te kijken of de laatstgenoemde ook quasi-periodiek is. We kijken hierbij naar  $z + 2\omega_1$  en  $z + 2\omega_2$  (alsof we al weten dat dit gaat werken).

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2\omega_1) &= 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1(z + 2\omega_1)^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z+2\omega_1}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\ &= 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1(z^2 + 4z\omega_1 + 4\omega_1^2)}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1} + 1|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\ &\stackrel{(5.3)}{=} 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] e^{\eta_1(2z+2\omega_1)} \cdot e^{\pi i} \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1} + 1|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\ &= -2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}(x|\tau)}{\theta'_{11}(0|\tau)} e^{2\eta_1(z+\omega_1)} = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)} \sigma(z).\end{aligned}$$

Het is duidelijk dat de sigma-functie hier quasi periodiek is. Voor de volgende periodiciteit maken we gebruik van een aantal eigenschappen.  $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  en  $\eta_1 \tau = \frac{\pi i}{2\omega_1} + \eta_2$ ,

waarbij de laatste volgt uit (I.3).

$$\begin{aligned}
\sigma(z + 2\omega_1) &= 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1(z + 2\omega_2)^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z+2\omega_2}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\
&= 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1(z^2 + 4z\omega_2 + 4\omega_2^2)}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1} + \tau|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\
&\stackrel{(5.4)}{=} 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] e^{\eta_1(2z\tau + 2\tau\omega_2)} \cdot e^{-\pi i\left(\tau + \frac{z}{\omega_1} + 1\right)} \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} \\
&= 2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} e^{\left(\frac{\pi i}{2\omega_1} + \eta_2\right)(2z + 2\omega_2)} \cdot e^{-\pi i\tau - \frac{\pi iz}{\omega_1}} \cdot e^{-\pi i} \\
&= -2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} e^{2\eta_2(z + \omega_2)} \cdot e^{\frac{\pi iz}{\omega_1} + \pi i\tau} \cdot e^{-\pi i\tau - \frac{\pi iz}{\omega_1}} \\
&= -2\omega_1 \exp\left[\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right] \frac{\theta_{11}\left(\frac{z}{2\omega_1}|\tau\right)}{\theta'_{11}(0|\tau)} e^{2\eta_2(z + \omega_2)} = -e^{2\eta_2(z + \omega_2)} \sigma(z).
\end{aligned}$$

En hier zien we een identieke quasi-periodiciteit. Samengevat hebben wij zojuist de volgende twee quasi-periodieke eigenschappen van de sigma-functie afgeleid.

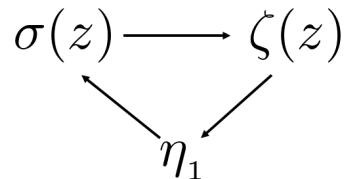
$$\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z + \omega_1)} \sigma(z) \quad , \quad \sigma(z + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z + \omega_2)} \sigma(z). \quad (\text{I.4})$$

### I.1.2 Viciuze cirkel

Het is wellicht al opgevallen dat de sigma-functie afhankelijk is van  $\eta_1$ . Deze is gedefinieerd in vergelijking (I.2). Hierbij is  $\zeta(z)$  echter ook een functie (waar we straks naar gaan kijken). Wat nu opmerkelijk is het feit dat die functie als volgt gedefinieerd is:

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \quad (\text{I.5})$$

We stuiten nu op een probleem; de zeta-functie is de logaritmische afgeleide van de sigma-functie. En zo kom je weer bij de sigma functie waar  $\eta_1$  inzit. Op deze manier blijf je doorgaan en kom je in een vicieuze cirkel.



Figuur I.1: De vicieuze cirkel van de sigma-functie,  $\eta_1$  en de zeta-functie.

In het werk van Nijhoff wordt hier niet op ingegaan en stapt hij plotseling over naar een productrepresentatie van de sigma functie met het argument dat de thèta-functie in de definitie van Nijhoff van de sigma-functie geschreven kan worden als een product. Wij hebben inderdaad aangetoond dat de thèta-functie geschreven kan worden als een product. Echter neemt dit niet weg dat de  $\eta_1$  plotseling is verdwenen zonder enige vorm van uitleg. Daarom heb ik besloten hier af te wijken van het werk van Nijhoff en een andere bron te beraden voor de definitie van de sigma-functie.

### I.1.3 Nieuwe definitie

We gaan opzoek naar een nieuwe definitie van de sigma-functie. Veel bronnen op het internet geven de volgende definitie. De definitie die ik vanaf nu ga volgen is die van Lawden. Deze lijkt erg op die van Nijhoff. Lawden geeft echter een andere betekenis vaan  $\eta_1$  (§6.2 [12]).

**Nieuwe definitie Weierstrass  $\sigma$ -functie.** Laat het rooster gegenereerd worden door  $\omega_1, \omega_3$  met  $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ . Laat

$$\sigma(u; \omega_1, \omega_3) = \frac{2\omega_1}{\pi\vartheta_1'(0; q)} \exp\left[\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right] \vartheta_1(z; q), \quad (\text{I.6})$$

waarbij  $q = e^{\pi i \tau}$ ,  $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ ,  $z = \frac{\pi u}{2\omega_1}$  en  $\eta_1 = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{\vartheta_1'''(0; q)}{\vartheta_1'(0; q)}$ .

Vanaf nu laten we in de notatie  $\omega_1, \omega_3$  en  $q$  weg, tenzij deze veranderen of ze belangrijk zijn.

De functie is zo gedefinieerd, zodat deze aan een aantal voorwaarden voldoet. De eerste is  $\sigma(0) = 0$ . Deze zien we al snel, aangezien  $\vartheta_1(0) = 0$ . De tweede is dat de eerste afgeleide in nul gelijk is aan één,  $\sigma'(0) = 1$ , de derde dat  $\sigma''(0) = 0$  en de laatste dat  $\sigma'''(0) = 0$ . Vanuit deze definitie kan je ook naar een productrepresentatie gaan, omdat wij de thèta-functie kunnen schrijven als een product (5.71). Dit ga ik niet allemaal uitwerken, maar veel bronnen op het internet geven de volgende definitie. De definitie die ik volg is gebaseerd op twee bronnen [33] en [34]. Hierbij het in de opmaak van de eerste bron gebruikt en de notatie van het rooster van de tweede.

**Productrepresentatie sigma-functie.** De sigma-functie wordt als volgt gedefinieerd, waarbij  $\Lambda^* = \{2k\omega_1 + 2l\omega_2 | k, l \in \mathbb{Z}^*\}$ .

$$\sigma(z; \Lambda) = z \prod_{\omega \in \Lambda^*} \left( \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left[\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right] \right). \quad (\text{I.7})$$

We zullen straks zien dat het zeer handig is dat wij de sigma-functie kunnen schrijven als een product. Dit doen wij, omdat wij later functies gaan behandelen die zijn opgebouwd uit de sigma-functie en met de representatie zoals in de definitie (I.1) is het lastiger om deze functies uit te drukken en tevens kraakt die definitie zoals gezegd.

## I.2 Weierstrass $\zeta$ -functie

Voor de zeta-functie zijn er twee definities die op hetzelfde neerkomen alleen gaan wij de één afleiden uit de ander. De eerste definitie hebben we al eerder gezien (I.5). Wanneer we deze definitie van de sigma-functie uitschrijven (I.7), kunnen we de zeta-functie uitdrukken in termen van  $z$  en  $\Lambda$ . Tevens maken we even gebruik van

de volgende notatie om zo te lange regels te voorkomen:  $\omega_{kl} = 2k\omega_1 + 2l\omega_2$ , dit heb ik overgenomen uit het werk van Nijhoff [15].

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma'(z; \Lambda)}{\sigma(z; \Lambda)} &= \frac{\prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots) + z \frac{d}{dz} (\prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots))}{z \prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots)} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{\frac{d}{dz} \left( \left(1 - \frac{z}{\omega_{1,0}}\right) \exp \left[ +\frac{z}{\omega_{1,0}} + \frac{z^2}{2\omega_{1,0}^2} \right] \left(1 - \frac{z}{\omega_{1,1}}\right) \exp \left[ +\frac{z}{\omega_{1,1}} + \frac{z^2}{2\omega_{1,1}^2} \right] \dots \right)}{\prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots)} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{-\frac{1}{\omega_{1,0}} \prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots) \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega_{1,0}}} + \left( \frac{1}{\omega_{1,0}} + \frac{z}{\omega_{1,0}^2} \right) \prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots)}{\prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots)} \\
&\quad + \frac{-\frac{1}{\omega_{1,1}} \prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots) \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega_{1,1}}} + \left( \frac{1}{\omega_{1,1}} + \frac{z}{\omega_{1,1}^2} \right) \prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots)}{\prod_{\omega \in \Lambda^*} (\dots)} + \dots \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z - \omega_{1,0}} + \frac{1}{\omega_{1,0}} + \frac{z}{\omega_{1,0}^2} + \frac{1}{z - \omega_{1,1}} + \frac{1}{\omega_{1,1}} + \frac{z}{\omega_{1,1}^2} + \dots \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - \omega_{kl}} + \frac{1}{\omega_{kl}} + \frac{z}{\omega_{kl}^2} \right] = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[ \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right]
\end{aligned}$$

Hierbij staan de drie lagen punten voor wat er tussen de grote haken staat in (I.7). We hebben nu een definitie voor de zeta-functie afgeleid die alleen afhankelijk is van  $z$  en  $\Lambda$ .

**Definitie Weierstrass zeta-functie.** We definiëren de Weierstrass zeta-functie als volgt voor  $z \in \mathbb{C}$

$$\zeta(z; \Lambda) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[ \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right] \tag{I.8}$$

Deze definitie wijkt licht af van die van Nijhoff; een paar mintekens zijn omgedraaid.



### I.2.1 Eigenschappen

Net als bij de sigma-functie gaan wij nu voor de zeta-functie kijken naar een aantal relevante eigenschappen.

#### Even of oneven

We gaan onderzoeken of de zeta-functie even dan wel oneven dan wel geen van beide is.

$$\begin{aligned}\zeta(-z; \Lambda) &= \frac{1}{-z} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[ \frac{1}{-z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{-z}{\omega^2} \right] \\ &= -\frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[ -\frac{1}{z + \omega} - \frac{1}{-\omega} - \frac{z}{\omega^2} \right] \\ &= -\left( \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[ \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right] \right) = -\zeta(z; \Lambda)\end{aligned}$$

Bij de één-na-laatste stap hebben we  $\omega$  vervangen met  $-\omega$ . Dit mag, want in feite draai je de sommatie om. We zien dus dat de zeta-functie een oneven functie is.

$$\zeta(-z; \Lambda) = -\zeta(z; \Lambda) \tag{I.9}$$

#### Quasi-periodiek

Het is natuurlijk aannemelijk dat de zeta-functie, die is opgebouwd uit de sigma-functie, ook quasi-periodiek is. Uiteraard moeten wij dit nog wel eerst aantonen. Dit is echter lastig te doen vanuit (I.8). We zullen zo zien hoe dit veel slimmer kan.

### I.3 Weierstrass $\wp$ -functie

Net als bij de zeta-functie zijn er twee definitie waarbij de één uit de ander volgt. De originele definitie luidt als volgt:

$$\wp(z; \Lambda) = -\frac{d\zeta(z; \Lambda)}{dz} \tag{I.10}$$

Vanuit deze definitie kunnen wij de p-functie uitdrukken in termen van  $z$  en  $\Lambda$ .

$$-\zeta'(z; \Lambda) = - \left( -\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[ -\frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2} \right] \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

De hebben nu dus de volgende definitie voor de Weierstrass p-functie.

**Definitie Weierstrass p-functie.** We definiëren de Weierstrass p-functie als volgt

$$\wp(z; \Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (\text{I.11})$$

Ook hier is een klein verschil met het werk van Nijhoff. Het is hetzelfde verschil als bij de zeta-functie en dus betreft het gewoon dezelfde functie.

### I.3.1 Eigenschappen

#### Even of oneven

$$\begin{aligned} \wp(-z; \Lambda) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z; \Lambda) \end{aligned}$$

Bij de laatste stap gebruiken we weer de truc met het wisselen van  $\omega$  en  $-\omega$ .

## Periodiek

$$\begin{aligned}
\wp(z + 2\omega_1; \Lambda) &= \frac{1}{(z + 2\omega_1)^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z + 2\omega_1 - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\
&= \frac{1}{(z - \omega_{-1,0})^2} + \frac{1}{(z - \omega_{-2,0})^2} - \frac{1}{\omega_{-1,0}^2} + \frac{1}{(z - \omega_{-2,1})^2} - \frac{1}{\omega_{-1,1}^2} \\
&+ \frac{1}{(z - \omega_{-1,1})^2} - \frac{1}{\omega_{0,1}^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\omega_{1,0}^2} + \frac{1}{(z - \omega_{0,1})^2} - \frac{1}{\omega_{1,1}^2} + \dots \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z - \omega_{-1,0})^2} - \frac{1}{\omega_{-1,0}^2} + \frac{1}{(z - \omega_{-1,1})^2} - \frac{1}{\omega_{-1,1}^2} \\
&+ \frac{1}{(z - \omega_{0,1})^2} - \frac{1}{\omega_{0,1}^2} + \frac{1}{(z - \omega_{1,1})^2} - \frac{1}{\omega_{1,1}^2} + \dots \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z; \Lambda)
\end{aligned}$$

We zien dus dat de p-functie periodiek is met periode  $2\omega_1$ . Op analoge wijze toon je aan dat de p-functie ook periodiek is met periode  $2\omega_2$ . De p-functie heeft dus de volgende periodieke eigenschap

$$\wp(z + 2\omega_i; \Lambda) = \wp(z; \Lambda) \quad , \quad i = 1, 2. \quad (\text{I.12})$$

Ik zou graag nog willen opmerken dat je aan de hand van (I.12) heel mooi de quasi-periodiciteit van de sigma-functie en zeta-functie kan aantonen zonder de reeksen te hoeven uitschrijven. Deze bewijzen zijn gebaseerd op het werk van G. Pastras [35]. Herinner dat de zeta-functie de negatieve afgeleide van de p-functie is (I.10). Dus als wij (I.12) links en rechts integreren, krijgen wij een quasi-periodieke uitdrukking voor de zeta-functie.

$$\zeta(z + 2\omega_i; \Lambda) = \zeta(z; \Lambda) + C$$

We vullen  $z = -\omega_i$  in.

$$\zeta(\omega_i; \Lambda) = \zeta(-\omega_i; \Lambda) + C.$$

Ook maken we gebruik van het feit dat de zeta-functie oneven is (I.9).

$$2\zeta(\omega_i; \Lambda) = C$$

Dus zo volgt de quasi-periodieke eigenschap van de zeta-functie.

$$\zeta(z + 2\omega_i; \Lambda) = \zeta(z; \Lambda) + 2\eta_i \quad (\text{I.13})$$

Op eenzelfde manier gaan we de quasi-periodieke eigenschap van de sigma-functie afleiden. We weten dat de zeta-functie de logaritmische afgeleide van de sigma-functie is (I.5). Dus als we vergelijking (I.13) integreren krijgen we

$$\ln(\sigma(z + 2\omega_i; \Lambda)) = \ln(\sigma(z; \Lambda)) + 2z\eta_i + c.$$

We werken de ln weg en schrijven  $C = e^c$

$$\sigma(z + 2\omega_i; \Lambda) = Ce^{2z\eta_i} \sigma(z; \Lambda).$$

We vullen  $z = -\omega_i$  in.

$$\sigma(\omega_i; \Lambda) = Ce^{2\omega_i\eta_i} \sigma(-\omega_i; \Lambda).$$

We maken gebruik van het feit dat de sigma-functie oneven is (??).

$$C = -e^{2\omega_i\eta_i}.$$

Dus krijgen we de volgende quasi-periodieke relatie voor de sigma-functie

$$\sigma(z + 2\omega_i; \Lambda) = -e^{2\eta_i(z+\omega_i)} \sigma(z; \Lambda) \quad , \quad i = 1, 2. \quad (\text{I.14})$$

We zien dat deze manier van het aantonen van de quasi-periodiciteit veel fijner en duidelijker is. Dit geeft nog maar een s aan hoe je in de wiskunde een probleem op meerdere manieren kan benaderen en oplossen. Dit is het einde van deze korte introductie en ook van het hele verslag.

Bedankt voor het lezen.

Duimpie.