



LABORATORIUM VOOR SCHEEPSBOUWKUNDE

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

BEREKENING VAN DE HYDRODYNAMISCHE COËFFICIENTEN
VAN OSCILLERENDE CILINDERS.

Ir B. de Jong.

maart 1967.

Berekening van de hydrodynamische coëfficiënten
van oscillerende cilinders.

Door: Ir B. de Jong.

Voorwoord.

Dit rapport is bedoeld als handleiding voor diegenen die zich op de hoogte willen stellen van de hydrodynamische achtergronden van de methoden om lange theoretische weg volgens de stripmethode de hydrodynamische eigenschappen van schepen te bepalen.

De lezer wordt bekend verondersteld met de grondslagen van de hydrodynamica en de theorie van de infinitesimale oppervlakte golven. Voor een bestudering van deze theorieën wordt verwezen naar [5], [6], [8], [9], en [10].

1. Inleiding.

De laatste jaren is veel aandacht geschonken aan de theoretische benadering van de hydrodynamische coëfficiënten van een schip, waarin vooral door het beschikbaar komen van rekenautomaten grote voortgang is gemaakt. Aangezien een driedimensionale methode i.h.a. tot te gecompliceerde berekeningen leidt, wordt het probleem beschouwd door toepassing van de zgn. stripmethode. Het schip wordt hierbij in een aantal secties verdeeld en van iedere sectie, die we constant van doorsnede veronderstellen, worden de hydrodynamische eigenschappen bepaald, waarbij we veronderstellen dat de verstoringen in de vloeistof t.g.v. de bewegingen van de sectie zich slechts uitbreiden in het gebied tussen de twee evenwijdige begrenzingsvlakken. Toepassing van zojuist genoemde methode vereist derhalve informatie omtrent de hydrodynamische eigenschappen van oneindig lange cilinders, (of eindige cilinders ingesloten door twee evenwijdige vlakken loodrecht op de as) met loodrechte doorsneden die overeenkomen met de doorsneden van de betreffende secties van het schip.

Door Ursell [13], [14] is de grootste bijdrage geleverd tot de oplossing van dit probleem. Hij beschouwde het probleem van een cirkelvormige cilinder, die harmonisch oscilleert, waarbij de gemiddelde stand van de as samenvalt met het vrije vloeistofoppervlak. Ursell gaat uit van de volgende veronderstellingen:

1. de vloeistof is niet visceus, incompressibel en rotatievrij.
2. de oscillatie is van dien aard dat lineariseren is toegestaan.

Uit 1. en 2. volgt dat bovenstaand probleem geformuleerd kan worden als een lineair potentiaal probleem, aangezien uit 1. volgt dat de snelheidspotentiaal ϕ moet voldoen aan de vergelijkingen van Laplace $\Delta\phi = 0$, terwijl volgens 2. de bijbehorende randcondities lineair zijn.

Ursell vond een oplossing door superpositie van geschikt gekozen functies die elk afzonderlijk voldoen aan de vergelijking van Laplace en de gelineariseerde vrije oppervlakte conditie en gezamenlijk voldoen aan de overige randcondities.

Tasai [10], [11] heeft de methode van Ursell gegeneraliseerd voor cilinders met meer algemene vorm, de zgn. Lewis-doorsneden, waarvan de vorm gekarakteriseerd wordt door drie parameters. Tasai paste een conforme transformatie toe waarmee de Lewis-doorsnede wordt afgebeeld op een halve cirkel. Door het beperkte aantal parameters kunnen de transformatieformules langs analytische weg worden bepaald.

Porter [7] heeft uitdrukkingen afgeleid voor de hydrodynamische coëfficiënten van cilinders, die niet op bevredigende wijze met een Lewis-doorsnede kunnen worden benaderd en waarvoor meer gecompliceerde transformatie formules nodig zijn. Hij heeft verder enige resultaten experimenteel geverifieerd. Echter een methode om de transformatieformules te vinden die een willekeurige dwarsdoorsnede van een schip afbeeldt op een halve cirkel wordt door hem niet gegeven.

Door toepassing van de iteratiemethode van Fil'shakova [1] heeft Smith 17 op het Laboratorium voor Scheepsbouwkunde een computerprogramma samengesteld waarmee voor elke willekeurige doorsnede de transformatie kan worden bepaald, die deze doorsnede afbeeldt op een halve cirkel waarna de bijbehorende hydrodynamische coëfficiënten kunnen worden bepaald. Opgemerkt wordt dat strikt genomen deze methode slechts toegepast kan worden wanneer de dwarsdoorsnede het vloeistofoppervlak leedrecht snijdt.

1. Probleemstelling.

We beschouwen in een oneindig diepe vloeistof een cilinder, die één dimensionaal harmonisch geoscilleerd wordt met frequentie σ en waarvan de gemiddelde stand van de as samenvalt met het vrije vloeistofoppervlak in de rusttoestand (Fig. 1.1.). Als mogelijke manieren van oscilleren zullen we hier dempen, verzetten en slingeren beschouwen.

De x-as nemen we horizontaal, samenvallend met het vrije vloeistofoppervlak en loodrecht op de as van de cilinder en de y-as verticaal, positief naar beneden en gaande door de gemiddelde stand van de as van de cilinder.

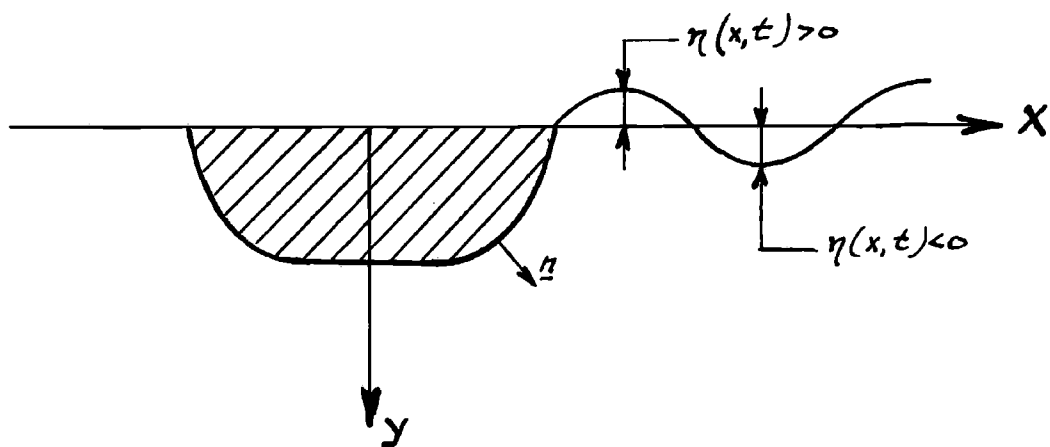


Fig. 1.1.

Verder veronderstellen we dat de amplitude van de oscillatie klein is t.o.v. de diameter van de cilinder en de lengte van de door de oscillatie gecreëerde golven, zodat we in de gelineariseerde benadering de waarde van alle fysische grootheden mogen betrekken op de middenstand van de cilinder. Door de lengte van de cilinder zeer groot te nemen t.o.v. de breedte of door de cilinder aan beide zijden in te sluiten tussen twee oneindig lange wanden loodrecht op de as van de cilinder, kunnen we de snelheidscomponenten evenwijdig met de as van de cilinder verwaarlozen en is de beweging tweedimensionaal.

Het bepalen van de bewegingen van de vloeistof onder invloed van de harmonische oscillatie van de cilinder is terug te brengen tot het oplossen van een randwaarde probleem uit de lineaire potentiaaltheorie zodat de snelheidspotentiaal $\phi(x, y, t)$ óók een harmonische functie is in de tijd. De potentiaal kan in complexe notatie derhalve geschreven worden als:

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-i\sigma t}, \quad (1.1)$$

waarbij we dus de werkelijke potentiaal krijgen door van het rechterlid het reële deel te nemen. We zullen voortaan bij berekeningen waar de tijdsafhankelijkheid van de variabelen niet ter sprake komt steeds met het tijdsafhankelijke deel $\phi(x,y)$ werken.

De snelheidspotentiaal moet overal in de vloeistof voldoen aan de vergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

vanwege (1.1) is (1.2) direct te schrijven als:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

Is $\eta = \eta(x,t)$ de golfhoogte t.g.v. het oscilleren van de cilinder, dan geldt in het gelineariseerde geval ([9], ch 2, (2.1.14)) voor golven die lang zijn t.o.v. hun amplitude:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (y=0) \quad (\text{kinematische oppervlakte conditie}) \quad (1.4)$$

We zien dus dat in de gelineariseerde vorm deze relatie weer betrokken wordt op het gemiddelde oppervlak van de vloeistof: $y=0$.

Conditie (1.4) berust op de hypothese dat alle vloeistofdeeltjes die zich eens op een grensvlak bevinden, daar altijd op blijven ([9], §1.4).

Een tweede conditie waaraan ϕ op het vrije oppervlak moet voldoen volgt uit de wet van Bernouilli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{p}{\rho} - g\eta = C(t) \quad (1.5)$$

Aangesien de druk op het vrije oppervlak constant is en aangesien het aan ϕ toevoegen van constante of tijdsafhankelijke termen geen invloed heeft op de snelheidsverdeling $(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y})$ in de vloeistof, kunnen we (1.5) na lineariseren herleiden tot:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (y=0) \quad (\text{dynamische oppervlakte conditie}) \quad (1.6)$$

Uit de condities (1.4) en (1.6) kunnen we η elimineren. We differentiëren (1.6) naar t en substitueren achtereenvolgens voor $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ het rechterlid van (1.4) en voor ϕ uitdrukking (1.1), zodat uiteindelijk:

$$K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y=0) \quad (\text{gelineariseerde vrije oppervlakte con-} \quad (1.7) \\ \text{ditie})$$

waarbij:

$$K = \frac{\sigma^2}{g}.$$

Verder geldt op de omtrek van de cilinder om dezelfde redenen als welke geleid hebben tot (1.4) dat de normale component van de snelheid van de cilinder o.i.v. de gedwongen oscillatie gelijk is aan de overeenkomstige component van de snelheid van de vloeistofdeeltjes op de cilinder, dus:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U_n(x, y) e^{-i\sigma t}$$

of:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U_n(x, y) \quad (\text{randwaarde op de cilinder}) \quad (1.8)$$

$\underline{n}$ is hierbij de normaal op de cilinder positief naar buiten gericht, (Fig. 1.1). Ten overvloede wordt erop gewezen dat (1.8) vanwege de hier toegepaste gelineariseerde benadering weer betrekking heeft op de gemiddelde positie van de cilinder.

Op fysische gronden is gemakkelijk in te zien dat de verstoringen in de vloeistof t.g.v. het oscilleren van de cilinder met toenemende diepte minder merkbaar worden, zodat:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \text{grad } \phi = 0 \quad (1.9)$$

Aangezien de gedwongen oscillatie harmonisch is, zullen op het vloeistofoppervlak golven ontstaan, die samengesteld zijn uit een staande golf waarvan de amplitude met de afstand van de cilinder snel afneemt en een regelmatige lopende golf, die zich aan beide zijden van de cilinder naar het oneindige voortplant. Laatst genoemde golf bewerkstelligt een uitstraling van energie, die aan de beweging van de cilinder onttrokken wordt, waardoor de vloeistof dus een dempende werking op de cilinder uitoefent. Dus:

$$\phi \rightarrow C_1 e^{-Ky} e^{i(-Kx + \sigma t)} \quad \text{voor } x \rightarrow +\infty$$

$$\phi \rightarrow C_2 e^{-Ky} e^{i(Kx + \sigma t)} \quad \text{voor } x \rightarrow -\infty$$

of:

$$\begin{aligned}
 \phi &\rightarrow C_1 e^{-Ky} e^{-iKx} && \text{voor } x \rightarrow +\infty \\
 \phi &\rightarrow C_2 e^{-Ky} e^{iKx} && \text{voor } x \rightarrow -\infty
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

(Voor een analytische afleiding van deze conditie zie men § 6.7 van [9]).

Resumerend staan we nu dus voor het probleem een potentiaal ϕ te bepalen die overal in de vloeistof een oplossing is van de vergelijking van Laplace $\Delta \phi = 0$ en verder nog voldoet aan de volgende randcondities:

- (i) de gelineariseerde vrije oppervlakte conditie (1.7)
- (ii) randvoorwaarde op de cilinder (1.8)
- (iii) voor $y \rightarrow \infty$ verdwijnt elke verstoring in de vloeistof (1.9)
- (iv) uitstralingsconditie (1.10)
- (v) voor dompen moet de potentiaal symmetrisch zijn:

$$\phi(x, y) = \phi(-x, y)$$

voor slingeren en verzetten is deze asymmetrisch:

$$\phi(x, y) = -\phi(-x, y)$$

(1.11)

Conditie (v) zien we op fysische gronden gemakkelijk in. Verder merken we op dat conditie (iv) vanwege (1.10) conditie (iii) impliceert.

We hebben tot nu toe de gedaante van de functie $U_n(x, y)$, de normale component van de gedwongen snelheid van de cilinder, onbepaald gelaten. Het spreekt vanzelf dat $U_n(x, y)$ zowel afhankelijk is van de wijze waarop de cilinder geoscilleerd wordt, dus dompen, verzetten of slingeren als van de vorm van de cilinder. We zullen in de nu volgende hoofdstukken boven gesteld probleem voor de drie zojuist genoemde manieren van oscilleren oplossen, waarbij de vorm van de cilinder willekeurig genomen mag worden.

2. Integraalvergelijking van de snelheidspotentiaal; Greense functies, Bronpotentiaal.

In dit hoofdstuk zal m.b.v. de stelling van Green een integraalvergelijking voor de snelheidspotentiaal worden opgesteld voor het geval van een verticaal oscillerende cilinder, waarbij aan de bijbehorende Greense functie en zijn fysische betekenis veel aandacht zal worden geschonken.

We veronderstellen dat de cilinder een harmonische, verticaal oscillerende beweging maakt zodat de bijbehorende snelheidspotentiaal volgens (1.11 V) symmetrisch moet zijn:

$$\phi(x,y) = \phi(-x,y) \quad (2.1)$$

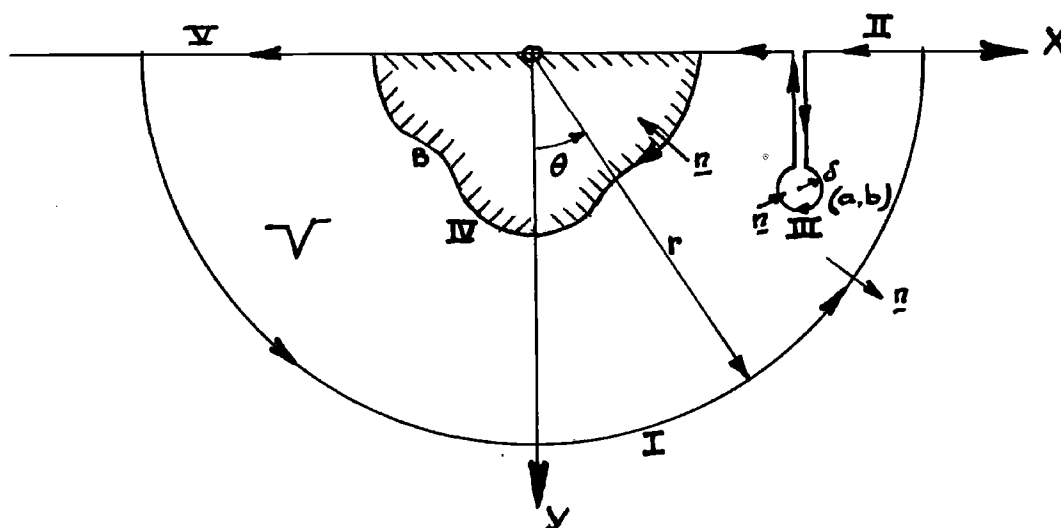


Fig. 2.1.

We passen de stelling van Green toe, welke in het twee-dimensionale geval de volgende vorm heeft:

$$\iint_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (2.2)$$

V is een gebied omsloten door een contour S en $\underline{n}$ de uitwendige normaal op S .

Voor de functie ϕ kiezen we de snelheidspotentiaal van de vloeistof t.g.v. het dompen van de cilinder, terwijl ψ geschikt wordt gekozen zodat, na substitutie van ψ in (2.2) door de resulterende vergelijking voor ϕ aan de eisen omtrent eenduidigheid en existentie van een oplossing wordt voldaan. De functie ψ moet dan een bron-singulariteit hebben in een punt (a,b) in het gebied $y > 0$, buiten de cilinder. We kiezen voor ψ een functie van de vorm ([12] hoofdstuk VI-3):

$$\psi(x, y; a, b) = \log \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \psi_r(x, y; a, b) \quad (2.3)$$

De eerste term van het rechterlid is de potentiaal van een bron in het punt (a, b) . De functie ψ_r is regulier in het gebied $y > 0$, buiten de cilinder. We kiezen de contour S nu zodanig, dat ϕ en ψ in het door S omsloten gebied V regulier zijn. Derhalve wordt S opgebouwd (Fig. 2.1) uit de lijnen II en V langs het vrije oppervlak, de lijn IV langs de omtrek van de cilinder, een cirkeltje III met straal δ om het punt (a, b) en een grote cirkel I met straal r . Binnen dit gebied voldoen ϕ en ψ aan de vergelijking van Laplace zodat het linkerlid van (2.2) nul wordt en dus:

$$\oint_{I+II+III+IV+V} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (2.4)$$

We berekenen eerst de integraal langs het cirkeltje III, waarbij we van het resultaat $\delta \rightarrow 0$ nemen. Opgemerkt wordt dat voor kleine δ (2.3) over het cirkeltje III geschreven kan worden als:

$$\psi = \log \delta + \psi_r \quad (2.5)$$

Verder geldt op het cirkeltje:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \delta} \quad \text{en} \quad ds = \delta d\theta,$$

zodat:

$$\int_{III} = - \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ -\phi \frac{\partial}{\partial \delta} (\log \delta + \psi_r) + (\log \delta + \psi_r) \frac{\partial \phi}{\partial \delta} \right\} \delta d\theta$$

of:

$$\int_{III} = - \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ -\phi \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial \delta} \right) + (\log \delta + \psi_r) \frac{\partial \phi}{\partial \delta} \right\} \delta d\theta$$

Aangezien ψ_r en $\frac{\partial \psi_r}{\partial \delta}$ begrensd zijn, krijgen we dus voor $\delta \rightarrow 0$:

$$\int_{III} = -2\pi \phi(a, b) \quad (2.6)$$

Vervolgens beschouwen we de integraal over de stukken II en IV.

We kiezen nu ψ_r zo, dat de lijnintegraal langs het vrije oppervlak nul wordt:

$$\int_{II+V} \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} dx = 0 \quad (y=0)$$

Hieraan is voldaan wanneer de integraal van bovenstaande uitdrukking verdwijnt:

$$\phi \psi_y - \psi \phi_y = 0 \quad (y=0)$$

M.b.v. (1.7) zien we vanwege de symmetrie van bovenstaande vorm in $\phi = \psi$ dat hieraan voldaan is wanneer:

$$K\psi + \psi_y = 0 \quad (y=0) \quad (2.7)$$

Verder kunnen we ons nog afvragen aan welke eisen ψ moet voldoen, opdat de lijnintegraal op de grote cirkel voor het limietgeval $r \rightarrow \infty$ verdwijnt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} r d\theta = 0 \quad (2.8)$$

De potentiaal ϕ moet op de grote cirkel voor $r \rightarrow \infty$ het in (1.10) omschreven gedrag hebben. Aangezien de betrekking (2.8) symmetrisch is in ϕ en ψ zullen voor de geldigheid van deze betrekking de functies ϕ en ψ op de grote cirkel gelijk moeten zijn; dus de functie ψ representeert voor $|x| \rightarrow \infty$ een regelmatige uitgaande golf:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow C_1 e^{-Ky} e^{-iKx} && \text{voor } x \rightarrow +\infty \\ \psi &\rightarrow C_1 e^{-Ky} e^{iKx} && \text{voor } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wanneer door de functie ψ met de in (2.3) gegeven vorm voldaan is aan (2.7) en (2.9) dan resulteert (2.4) in de volgende integraalvergelijking in $\phi(x,y)$:

$$\phi(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_B \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} ds \quad (2.10)$$

B is de omtrek van de cilinder waarop de normale snelheid $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ gegeven is. De functie ϕ in de integrand van (2.10) is de waarde van ϕ op de omtrek van de cilinder. Nemen we nu het punt (a,b) op de omtrek van de cilinder dan krijgen we na toepassing van dezelfde procedure (het cirkeltje III verandert daarbij in een halve cirkel op B) de integraalvergelijking:

$$\phi(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_B \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} ds \quad (2.11)$$

waarbij nu zowel $\phi(a,b)$ als ϕ in de integrand betrekking hebben op waarden van ϕ op de cilinder B . We bepalen nu m.b.v. (2.11) de waarde van ϕ op de omtrek B waarna we m.b.v. (2.10) in staat zijn de waarde van ϕ in een willekeurig punt van de vloeistof te bepalen. De functie ψ , die we zodanig gekozen hebben dat de lijnintegralen langs I, II en V verdwijnen terwijl bovendien aan de eisen omtrent existentie en eenduidigheid van de oplossing van (2.10) voldaan wordt, wordt een Greense functie genoemd.

Rest ons nu nog de functie $\psi_r(x,y; a,b)$ van (2.3.) te bepalen. We substitueren (2.3) in (2.7):

$$K\psi_r + \psi_{r_y} = -\frac{K}{2} \log \left\{ (x-a)^2 + b^2 \right\} + \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} \quad (y=0)$$

We zoeken een oplossing van deze differentiaalvergelijking in de vorm:

$$\psi_r(x,y; a,b) = -\frac{1}{2} \log \left\{ (x-a)^2 + (y+b)^2 \right\} + \psi^1(x,y; a,b)$$

De eerste term in het rechterlid representeert een put in het beeldpunt $(a, -b)$ van (a,b) t.o.v. het vrije oppervlak. De functie ψ^1 moet dan voldoen aan:

$$K\psi^1 + \psi_y^1 = \frac{2b}{(x-a)^2 + b^2} \quad (y=0) \quad (2.12)$$

Het rechterlid van (2.12) is afgezien van een factor 2 juist de beeldfunctie van de Laplace-transformatie van $\cos p(x-a)$, dus (2.12) kan geschreven worden als:

$$K\psi^1 + \psi_y^1 = 2 \int_0^\infty e^{-pb} \cos p(x-a) dp \quad (y=0) \quad (2.13)$$

Beschouw nu de integraal:

$$\int_0^\infty e^{-pb} \cos p(x-a) dp \quad (2.14)$$

We vatten p op als een complexe variabele: $p = \alpha + i\beta$. Aangezien de integrand slechts een singulariteit heeft voor $p = -\infty$, mogen we de baan van de integratie, die in bovenstaand geval langs de reële as loopt, wijzigen in een willekeurige lijn L lopende van de oorsprong $(0,0)$ naar $(\infty,0)$ (Fig. 2.2.).

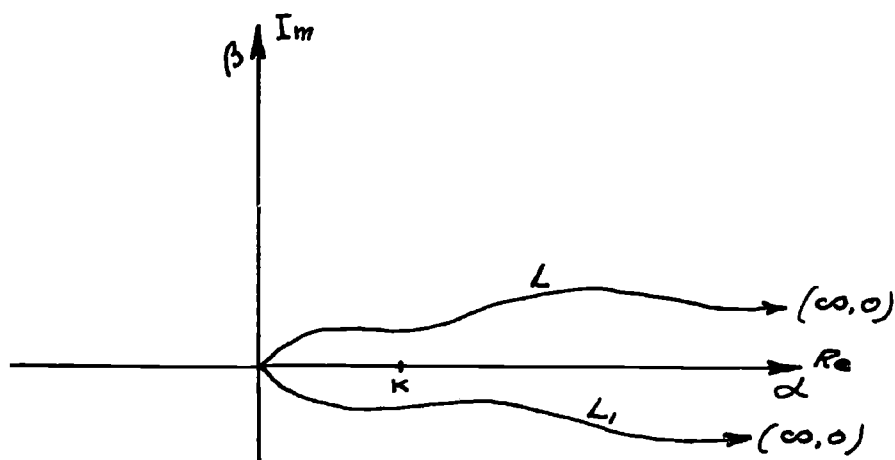


Fig. 2.2.

Eén van de elementaire eigenschappen van Greense functies is de symmetrie met betrekking tot de punten (x, y) en (a, b) , ([4] Hfdst. IX-3). D.w.s. de functie blijft hetzelfde wanneer we (x, y) en (a, b) verwisselen. Derhalve substitueren we in (2.13) voor ψ^1 de uitdrukking:

$$\psi^1(x, y; a, b) = 2 \int_L P(p, K) e^{-p(y+b)} \cos p(x-a) dp \quad (2.15)$$

De functie $P(p, K)$ moet zodanig bepaald worden dat voldaan wordt aan (2.13). Substitueren van (2.15) in (2.13) geeft:

$$\begin{aligned} -2 \int_L p \cdot P(p, K) e^{-pb} \cos p(x-a) dp + 2 \int_L K P(p, K) e^{-pb} \cos p \cdot \\ \cdot (x-a) dp = 2 \int_L e^{-pb} \cos p(x-a) dp \quad (y=0) \end{aligned}$$

dit wordt:

$$\int_L \left\{ (K-p)P(p, K) - 1 \right\} e^{-pb} \cos p(x-a) dp = 0$$

zodat:

$$P(p, K) = \frac{1}{K-p} \quad (2.16)$$

en:

$$\psi^1(x, y; a, b) = 2 \int_L \frac{e^{-p(y+b)}}{K-p} \cos p(x-a) dp \quad (2.17)$$

De integrand van (2.17) heeft een pool van de 1e orde in $p = K$ ($K = \frac{\alpha^2}{\beta}$, reëel). De contouren L kunnen we nu op twee manieren kiezen: over de singulariteit $p = K$ heen: bijv. L (Fig. 2.2) of onder de singulariteit door bijv. L_1 . Aangezien het residu van de integrand ongelijk nul is, zullen de waarden van de integraal langs deze twee contouren verschillend zijn. De functie ψ^1 , en daarmee ook ψ , is dus niet eenduidig bepaald. Deze eenduidigheid blijkt verschaft te worden door conditie (2.9): ψ moet op oneindige afstand van de cilinder een regelmatige uitgaande golf voorstellen. We gaan nu het gedrag van ψ bestuderen achtereenvolgens voor de contouren L en L_1 . Omdat we aan dezelfde zijde van de pool blijven, mogen we de contour L_1 wijzigen in M_1 en L in M_2 (Fig. 2.3).

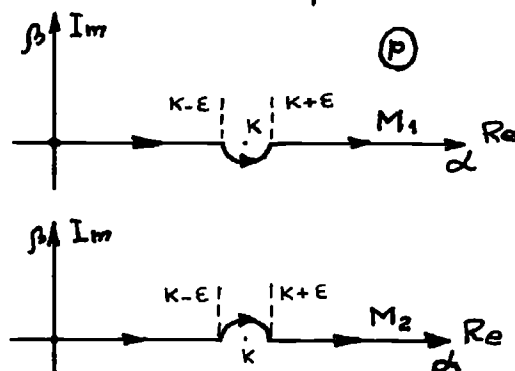


Fig. 2.3.

Voor $|x| \rightarrow \infty$ verdwijnt de logarithmische functie: $\log \sqrt{\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)^2 + (y+b)^2}}$ zodat overblijft het gedrag te bestuderen van ψ^1 voor $|x| \rightarrow \infty$ voor de contouren M_1 en M_2 .

We zullen nu aantonen dat ψ^1 voor $|x| \rightarrow \infty$ langs de contour M_2 regelmatige uitgaande golven geeft. We gaan over op de variabele $x' = x - a$ en $y' = y + b$, waarbij we de indices weer laten vervallen:

$$\psi_{M_2}^1 = \int_{M_2} \frac{e^{-py'} \{e^{ipx'} + e^{-ipx'}\}}{K - p} dp = \int_{M_2} \frac{e^{-p(y-ix)}}{K - p} dp + \int_{M_2} \frac{e^{-p(y+ix)}}{K - p} dp \quad (2.18)$$

Uitrekenen van de eerste integraal geeft:

$$\begin{aligned} \int_{M_2} \frac{e^{-p(y-ix)}}{K - p} dp &= \int_0^{K-E} \underbrace{\frac{e^{-\alpha(y-ix)}}{K - \alpha}}_{I_1} d\alpha + \int_{K-E}^{K+E} \underbrace{\frac{e^{-(\alpha+i\beta)(y-ix)}}{K - p}}_{I_2} dp + \\ &+ \int_{K+E}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-\alpha(y-ix)}}{K - \alpha}}_{I_3} d\alpha \end{aligned}$$

De eerste, tweede en derde integraal van het rechterlid noemen we resp. I_1 , I_2 en I_3 . Partieel integreren van I_1 geeft:

$$I_1 = - \frac{e^{-\alpha(y-ix)}}{(K-\alpha)(y-ix)} \int_{\alpha=0}^{\alpha=K-\epsilon} + \int_0^{K-\epsilon} \frac{e^{-\alpha(y-ix)}}{(K-\alpha)^2(y-ix)} d\alpha$$

We zien gemakkelijk in dat $I_1 \rightarrow 0$ voor $|x| \rightarrow \infty$. Op dezelfde manier kan aangetoond worden dat $I_3 \rightarrow 0$ voor $|x| \rightarrow \infty$. Verder geldt, omdat $\beta > 0$, $I_2 \rightarrow 0$ voor $|x| \rightarrow \infty$. Eveneens kan aangetoond worden dat voor de tweede integraal van het rechterlid van (2.18) de integraties over de reële as over $(0, K-\epsilon)$ en $(K+\epsilon, \infty)$ nul worden terwijl vanwege de residu stelling voor de integratie van de halve cirkel $(K-\epsilon, K+\epsilon)$ geldt:

$$\int_{K-\epsilon}^{K+\epsilon} \frac{e^{-p(y+ix)}}{K-p} dp = \int_{K-\epsilon}^{K+\epsilon} \frac{e^{-p(y+ix)}}{K-p} dp + 2\pi i \text{ (residu } p=K\text{)}.$$

Na substitutie van $p = \alpha + i\beta$ in het linkerlid zien we dat aangezien $\beta < 0$, deze integraal naar nul gaat voor $|x| \rightarrow \infty$. Het residu in $p=k$ wordt:

$$\lim_{p \rightarrow K} (p-K) \frac{e^{-p(y+ix)}}{K-p} = -e^{-K(y+ix)}$$

zodat:

$$\int_{K-\epsilon}^{K+\epsilon} \frac{e^{-p(y+ix)}}{K-p} dp = 2\pi i e^{-K(y+ix)}$$

en:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{M_2} \frac{e^{-py} \cos px}{K-p} dp = 2\pi i e^{-K(y+ix)} \quad (2.19)$$

Dus ψ^1 , en dus ook ψ , geeft, wanneer we de contour L in (2.17) vervangen door M_2 voor $|x| \rightarrow \infty$ een regelmatige uitgaande golf.

We kunnen op dezelfde wijze aantonen dat wanneer we voor L de contour M_1 nemen, ψ voor $|x| \rightarrow \infty$ een regelmatige inkomende golf geeft. We moeten derhalve om aan conditie (2.9) te voldoen M_2 handhaven en M_1 laten vervallen, zodat we nu dus een eenduidige voorstelling hebben voor de Greense functie ψ , die in de integraalvergelijkingen (2.10) en (2.11) gesubstitueerd moet worden: (we delen door een factor 2):

$$\psi(x, y; a, b) = \frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)^2 + (y+b)^2}} + \underbrace{\int_K}_{\substack{\text{over} \\ \text{de} \\ \text{reële} \\ \text{as}}} \frac{e^{-p(y+b)}}{K-p} \cos p(x-a) dp \quad (2.20)$$

Dus de functie ψ , die een oplossing is van $\Delta \psi = 0$, voldoet aan:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) de gelineariseerde oppervlakte conditie (2.7)} \\ \text{(ii) voor } |x| \rightarrow \infty \text{ representeert } \psi \text{ een regelmatige uitgaande} \\ \text{golf (2.9)} \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

Een geval, dat in het volgende hoofdstuk ter sprake komt bij het zoeken van de oplossing van het randwaardeprobleem door superpositie van een groot aantal potentiaalfuncties, is een bron in de oersprong ($a=b=0$) waarvan de potentiaal aan de eigenschappen (2.21) moet voldoen. Deze potentiaal wordt dus:

$$\psi = \underbrace{\int_K}_{\substack{\text{over} \\ \text{de} \\ \text{reële} \\ \text{as}}} \frac{e^{-py}}{K-p} \cos px \, dp \quad (2.22)$$

In de literatuur wordt (2.22) meestal in een andere vorm gegeven, die door toepassing van stellingen uit de complexe functietheorie uit (2.22) kan worden afgeleid. We zullen deze afleiding nu geven:

De integraal (2.22) splitsen we op in twee integralen I_1 en I_2 :

$$\underbrace{\int_K}_{\substack{\text{over} \\ \text{de} \\ \text{reële} \\ \text{as}}} \frac{e^{-py} \cos px}{K-p} dp = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\int_K}_{\substack{\text{over} \\ \text{de} \\ \text{reële} \\ \text{as}}} \frac{e^{-py} e^{ipx}}{K-p} dp + \underbrace{\int_K}_{\substack{\text{over} \\ \text{de} \\ \text{reële} \\ \text{as}}} \frac{e^{-py} e^{-ipx}}{K-p} dp \right\} \quad (2.23)$$

$I_1 \qquad \qquad \qquad I_2$

De berekening blijkt verschillende resultaten te geven voor $x > 0$ en $x < 0$. We zullen het geval $x > 0$ beschouwen. Voor $x < 0$ verloopt de redenering analoog.

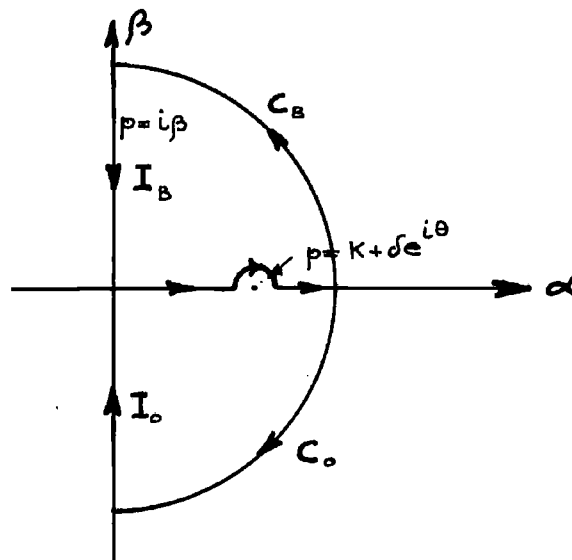


Fig. 2.4.

Voor de berekening van I_1 sluiten we de contour M met de kwartcirkel C_R en de positieve imaginaire as I_R zodat toepassing van de stelling van Cauchy leidt tot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-py} e^{-ipx}}{K-p} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-Re^{i\theta}y} e^{-iRe^{i\theta}x} \cdot Re^{i\theta}}{K - Re^{i\theta}} i d\theta + \int_{\infty}^0 \frac{e^{-i\beta y} e^{-\beta x}}{K - i\beta} i d\beta = 0$$

Verder uitgewerkt wordt dit:

$$\text{H.W.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x}}{K - \alpha} d\alpha + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{e^{-(K + Re^{i\theta})y} e^{i(K + Re^{i\theta})x}}{K - (K + Re^{i\theta})} Re^{i\theta} i d\theta$$

$$+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(Ry \cos \theta + Rx \sin \theta)} e^{-i(Ry \sin \theta - Rx \cos \theta)}}{K - R \cos \theta + iR \sin \theta} R e^{i\theta} i d\theta +$$

$$\int_{\infty}^0 \frac{e^{-i\beta y} e^{-\beta x}}{K - i\beta} i d\beta = 0 \quad (2.24)$$

hierbij moet onder de eerste integraal een hoofdwaaarde integraal worden verstaan. Op de kwartcirkel C_R geldt $\cos \theta > 0$ en $\sin \theta > 0$. Bovendien zijn x en y positief zodat in de limiet $R \rightarrow \infty$ de derde integraal verdwijnt. (2.24) wordt derhalve:

$$\text{H.W.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x}}{K - \alpha} d\alpha + \pi i e^{-Ky + iKx} + \int_{\infty}^0 \frac{e^{-i\beta y} e^{-\beta x}}{K - i\beta} i d\beta = 0 \quad (2.25)$$

Voor de berekening van I_2 sluiten we de contour met de kwartcirkel C_0 en de negatieve imaginaire as. Aangezien in dit geval de pool $p=K$ met residu

$$\lim_{p \rightarrow K} (p-K) \frac{e^{-py} e^{-ipx}}{K-p} = -e^{-Ky} e^{-iKx}$$

omsloten wordt, geeft toepassing van de residustelling:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-py} e^{-ipx}}{K-p} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-Re^{i\theta}y} e^{-iRe^{i\theta}x} \cdot Re^{i\theta}}{K - Re^{i\theta}} i d\theta +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-i\beta y} e^{-\beta x}}{K - i\beta} i d\beta = -2\pi i (-e^{-Ky} e^{-iKx}) = 2\pi i e^{-Ky} e^{-iKx}.$$

Op analoge wijze als in (2.24) valt de tweede integraal weg, zodat na uitwerken van de eerste integraal bovenstaande vorm resulteert in:

$$\text{H.W.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x}}{K - \alpha} d\alpha + \pi i e^{-Ky} e^{-iKx} + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-i\beta y} e^{\beta x}}{K - i\beta} d\beta = 2\pi i e^{-Ky} e^{-iKx} \quad (2.26)$$

Uit (2.23), (2.25) en (2.26) volgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-Py} \cos p x}{K - p} dp &= \text{H.W.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y} \cos \alpha x}{K - \alpha} d\alpha + \pi i e^{-Ky} \cos Kx = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\beta y} e^{-\beta x}}{K - i\beta} d\beta + \int_0^{\infty} \frac{e^{i\beta y} e^{-\beta x}}{K + i\beta} (-i) d\beta \right\} + \pi i e^{-Ky} e^{-iKx} \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2.27) is verder te herleiden tot:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-Py} \cos p x}{K - p} dp &= \text{H.W.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y} \cos \alpha x}{K - \alpha} d\alpha + \pi i e^{-Ky} \cos Kx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} (K \sin \beta y - \beta \cos \beta y)}{K^2 + \beta^2} d\beta + \pi i e^{-Ky} e^{-iKx} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

Op dezelfde manier kan aangetoond worden dat voor $x < 0$ de laatste regel vervangen moet worden door:

$$\int_0^{\infty} e^{\beta x} \frac{(K \sin \beta y - \beta \cos \beta y)}{K^2 + \beta^2} d\beta + \pi i e^{-Ky} e^{iKx} \quad (x < 0)$$

De potentiaal ϕ van een bron in de oorsprong, die voldoet aan de oppervlakte conditie en aan de uitstralingsconditie wordt dus gegeven door:

$$\phi = \int_0^{\infty} e^{\pm \beta x} \frac{(K \sin \beta y - \beta \cos \beta y)}{K^2 + \beta^2} d\beta + \pi i e^{-Ky} e^{\pm iKx} \quad (x \gtrless 0) \quad (2.28)$$

We definiëren:

$$\phi = \text{Re} \left\{ \phi e^{i\sigma t} \right\} = \frac{gb}{\pi\sigma} \left\{ \phi_0 \cos \alpha t + \phi_0 \sin \sigma t \right\},$$

waarbij b de golfhoogte op oneindige afstand van de cilinder is.

Uit (2.28) volgt dan:

$$\phi_0 = \pi e^{-Ky} \cos Kx$$

$$\phi_s = \pi e^{-Ky} \sin Kx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{K^2 + \beta^2} (\beta \cos \beta y - K \sin \beta y) d\beta \quad \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} \quad (2.29)$$

3. Bepalen van snelheidspotentiaal volgens Ursell voor dempende cirkelcilinder; toegevoegde massa en demping.

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat de potentiaal bepaald kan worden door het oplossen van de integraalvergelijking (2.11). Dit blijkt echter i.h.a. tot gecompliceerde numerieke berekeningen te leiden. Ursell [13] heeft een oplossingsmethode ontwikkeld die bestaat uit superpositie van potentiaalfuncties, die alleen voldoen aan de vergelijking van Laplace en de oppervlakte conditie. De oplossing wordt samengesteld uit de bronpotentiaal (2.28) en een lineaire combinatie van multipolenpotentialen met de gedaante:

$$\phi_{2m} = a^{2m} \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} + \frac{K}{2m-1} \frac{\cos(2m-1)\theta}{r^{2m-1}} \right\} \quad m=1,2,3,\dots \quad (3.1)$$

waarbij (r, θ) poolcoördinaten zijn:

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta \quad (3.2)$$

en a de straal van de cirkelcilinder (Fig. 3.1).

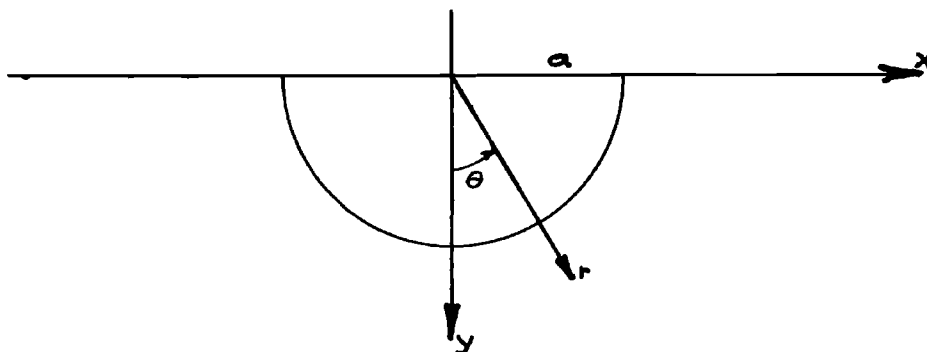


Fig. 3.1.

Aangesien we een verticaal oscillerende cilinder hebben zal de potentiaal symmetrisch zijn t.o.v. de y -as (1.11). We zien dat hieraan door (2.28) en (3.1) voldaan wordt. Derhalve zullen we ons bij onze verdere beschouwingen beperken tot het gebied $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. De tijdsafhankelijke potentiaal $\phi = \text{Re} \{ \phi e^{-i\sigma t} \}$ wordt dus volgens (2.29) en (3.1):

$$\phi = \frac{Kb}{\pi\sigma} \left[\phi_0(Kr; \theta) \cos \sigma t + \phi_1(Kr; \theta) \sin \sigma t + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \sigma t \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(Ka)_m^{2m} \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} + \frac{K}{2m-1} \frac{\cos(2m-1)\theta}{r^{2m-1}} \right\} + \\
& + \sin \sigma t \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(Ka)_m^{2m} \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} + \frac{K}{2m-1} \frac{\cos(2m-1)\theta}{r^{2m-1}} \right\} \Bigg] \quad (3.3)
\end{aligned}$$

waarbij:

$$\phi_0(Kr, \theta) = \pi e^{-Krcos\theta} \cos(Kr \sin \theta)$$

$$\phi_s(Kr, \theta) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta r \sin \theta}}{K^2 + \beta^2} \left\{ \beta \cos(\beta r \cos \theta) - K \sin(\beta r \cos \theta) \right\} d\beta \quad (3.4)$$

$$+ \pi e^{-Krcos\theta} \sin(Kr \sin \theta).$$

We kunnen gemakkelijk verifiëren dat de multipolen-potentialen ϕ_{2m} voldoen aan de oppervlakte-conditie. In hoofdstuk 2 hebben we laten zien dat de bronpotential $\phi_0 \cos \sigma t + \phi_s \sin \sigma t$ afkomstig van (2.28) juist deze vorm heeft gekregen door de functie ψ_r (2.3) zodanig te bepalen dat voldaan wordt aan de oppervlakte-conditie. Verder hebben we daar ook aangetoond dat deze potentiaal voor $|x| \rightarrow \infty$ een regelmatige uitgaande golf representeert. Aangezien de multipolen-potentialen voor $r \rightarrow \infty$ verdwijnen, voldoet de totale potentiaal ϕ (3.3) aan de uitstralingsconditie (1.11). Rest ons nu nog de coëfficiënten p_{2m} en q_{2m} zodanig te bepalen dat aan de randvoorwaarden op de cilinder voldaan wordt. Op de cilinder geldt (1.8):

$$\frac{dy}{dt} \cos \theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.5)$$

De aan ϕ toegevoegde stroomfunctie ψ bepalen we m.b.v. de Cauchy-Riemann relaties, welke in de in (3.2) gedefinieerde poolcoördinaten de volgende vorm hebben:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

zodat:

$$\psi = \frac{\pi h}{\pi \sigma} \left[\psi_0(Kr, \theta) \cos \sigma t + \psi_s(Kr, \theta) \sin \sigma t + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \sigma t \sum_1^{\infty} p_{2m}(Ka) a^{2m} \left\{ \frac{\sin 2m\theta}{r^{2m}} + \frac{K}{2m-1} \frac{\sin(2m-1)\theta}{r^{2m-1}} \right\} + \\
& \sin \sigma t \sum_1^{\infty} q_{2m}(Ka) a^{2m} \left\{ \frac{\sin 2m\theta}{r^{2m}} + \frac{K}{2m-1} \frac{\sin(2m-1)\theta}{r^{2m-1}} \right\} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

waarbij:

$$\begin{aligned}
\psi_0(Kr; \theta) &= \pi e^{-Krcos\theta} \sin(Kr \sin\theta) \\
\psi_m(Kr; \theta) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta r \sin\theta}}{K^2 + \beta^2} \left\{ \beta \sin(\beta r \cos\theta) + K \cos(\beta r \cos\theta) \right\} d\beta \quad (3.8) \\
&- \pi e^{-Krcos\theta} \cos(Kr \sin\theta).
\end{aligned}$$

De randconditie op de cilinder (3.5) wordt m.b.v. (3.6) geschreven als:

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{dy}{dt} \cos \theta \quad (r=a)$$

Na integratie wordt dit:

$$\psi = -a \frac{dy}{dt} \sin \theta + c(t) \quad (r=a)$$

Substitutie van $\theta = 0$ geeft $c(t) = 0$.

We veronderstellen dat de ordinaat van de as van de cilinder gegeven wordt door:

$$y = 1 \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad (3.9)$$

De stroomfunctie op de cilinder moet derhalve voldoen aan:

$$\psi = 1 \sigma a \sin(\sigma t + \varepsilon) \sin \theta \quad (r=a) \quad (3.10)$$

Uit (3.7) en (3.10) volgt:

$$\begin{aligned}
& \psi_0(Ka; \theta) \cos \sigma t + \psi_m(Ka; \theta) \sin \sigma t + \\
& \cos \sigma t \sum_1^{\infty} p_{2m}(Ka) \left\{ \sin 2m\theta + \frac{Ka}{2m-1} \sin(2m-1)\theta \right\} + \\
& \sin \sigma t \sum_1^{\infty} q_{2m}(Ka) \left\{ \sin 2m\theta + \frac{Ka}{2m-1} \sin(2m-1)\theta \right\} = \frac{1a\pi K}{b} \sin(\sigma t + \varepsilon) \cdot \sin \theta \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Aangezien (3.11) geldt voor alle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ krijgen we na substitutie van $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \psi_0(Ka; \frac{\pi}{2}) \cos \sigma t + \psi_{\pi}(Ka; \frac{\pi}{2}) \sin \sigma t + \cos \sigma t \sum_1^{\infty} p_{2m}(Ka) \frac{Ka(-1)^{m-1}}{2m-1} + \\ + \sin \sigma t \sum_1^{\infty} q_{2m}(Ka) \frac{Ka(-1)^{m-1}}{2m-1} = \frac{1a\pi K}{b} \sin(\sigma t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.12)$$

We elimineren m.b.v. (3.12) de vorm $\frac{1a\pi K}{b} \sin(\sigma t + \varepsilon)$ uit (3.11). Van de aldus verkregen vorm stellen we de coëfficiënten van $\cos \sigma t$ resp. $\sin \sigma t$ aan elkaar gelijk en krijgen:

$$\begin{aligned} \psi_0(Ka; \theta) - \psi_0(Ka; \frac{\pi}{2}) \sin \theta &= \sum_1^{\infty} p_{2m}(Ka) f_{2m}(Ka; \theta) \\ \psi_{\pi}(Ka; \theta) - \psi_{\pi}(Ka; \frac{\pi}{2}) \sin \theta &= \sum_1^{\infty} q_{2m}(Ka) f_{2m}(Ka; \theta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

waarbij:

$$f_{2m}(Ka; \theta) = - \left[\sin 2m\theta + \frac{Ka}{2m-1} \left\{ \sin(2m-1)\theta - \sin \theta \sin \frac{1}{2}(2m-1)\pi \right\} \right]$$

In (3.13) worden de functies geleverd door de linkerleden ontwikkeld in een verzameling functies $f_{2m}(Ka; \theta)$ ($m=1, 2, 3, \dots$). Natuurlijk wordt in de praktijk slechts een eindig aantal (N) termen genomen, waarbij de nauwkeurigheid groter wordt naarmate we N groter maken. De coëfficiënten p_{2m} en q_{2m} kunnen bijv. bepaald worden met behulp van de methode der kleinste kwadraten.

Uit de wet van Bernoulli (1.5) volgt dat de hydrodynamische druk in een punt in de vloeistof in gelineariseerde vorm gegeven wordt door:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.14)$$

De hydrodynamische kracht per lengte-eenheid op de cilinder wordt derhalve:

$$P = -\rho \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} a \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=a} \cos \theta d\theta = -\frac{2\rho abK}{\pi} (M_0 \cos \sigma t - N_0 \sin \sigma t) \quad (3.15)$$

waarbij:

$$M_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_o(Ka; \theta) \cos \theta d\theta + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} q_{2m}(Ka)}{4m^2 - 1} + \frac{1}{4} \pi Ka q_2(Ka)$$

$$N_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_o(Ka; \theta) \cos \theta d\theta + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} p_{2m}(Ka)}{4m^2 - 1} + \frac{1}{4} \pi Ka p_2(Ka).$$

Een lange cilinder welke geheel ondergedompeld is in een oneindige ideale vloeistof ondervindt per lengte-eenheid een kracht $M\ddot{r}$ die gelijk is aan het product van de relatieve versnelling $\ddot{r}$ en de per lengte-eenheid door de cilinder verdrongen hoeveelheid vloeistof M .

De kracht blijft hetzelfde wanneer we de vloeistof wegdenken en aan de cilinder per lengte-eenheid een massa M toevoegen. M wordt derhalve de toegevoegde massa van de cilinder genoemd. Wanneer de cilinder in een vrij vloeistofoppervlak beweegt dan is de kracht (3.15) niet langer in fase met de versnelling. We ontbinden deze kracht in een component in fase met de versnelling welke geen energie dissipeert, en een component in fase met de snelheid welke het karakter heeft van een wrijvingskracht en verantwoordelijk is voor een energie dissipatie in de vorm van naar oneindig weglopende golven. De versnellingscomponent van de hydrodynamische kracht wordt gekarakteriseerd door de toegevoegde massa van de cilinder en de snelheidscomponent door de damping van de cilinder. We zullen deze twee grootheden nu berekenen. Uit (3.9) volgt voor de snelheid van de cilinder:

$$\frac{dy}{dt} = -1G \sin(Gt + \varepsilon),$$

samen met (3.12) geeft dit:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{Gb}{\pi aK} \left\{ A \cos Gt + B \sin Gt \right\} \quad (3.16)$$

waarbij:

$$A(Ka) = \psi_o(Ka; \frac{\pi}{2}) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} Ka}{2m-1} p_{2m}(Ka)$$

$$B(Ka) = \psi_s(Ka; \frac{\pi}{2}) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} Ka}{2m-1} q_{2m}(Ka) \quad (3.17)$$

De versnelling van de cilinder wordt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{bG^2}{\pi aK} \left\{ A \sin Gt - B \cos Gt \right\} \quad (3.18)$$

Uit (3.15) en (3.18) volgt voor de kracht in fase met de versnelling:

$$\frac{2\rho a b g}{\pi} \frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2} \{A \sin \sigma t - B \cos \sigma t\} \quad (3.19)$$

De kracht in fase met de snelheid volgt uit (3.15) en (3.16):

$$\frac{-2\rho a b g}{\pi} \frac{M_0 A - N_0 B}{A^2 + B^2} \{A \cos \sigma t + B \sin \sigma t\} \quad (3.20)$$

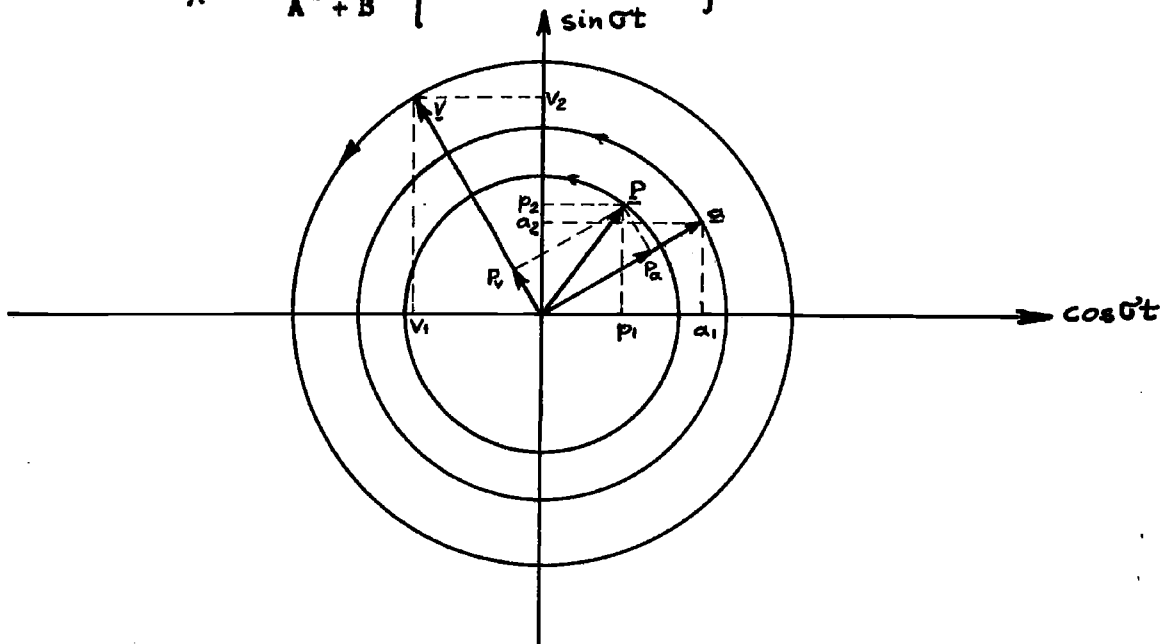


Fig. 3.2.

De juistheid van de formules (3.19) en (3.20) is m.b.v. een vectordiagram (Fig. 3.2) eenvoudig in te zien.

Stel dat de hydrodynamische kracht, de snelheid en de versnelling resp. gegeven worden door:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= p_1 \cos \sigma t + p_2 \sin \sigma t \\ \underline{y} &= v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t \\ \underline{a} &= a_1 \cos \sigma t + a_2 \sin \sigma t. \end{aligned}$$

De snelheid en de versnelling hebben 90° fase verschil. De component van $\underline{P}$ in fase met de versnelling wordt:

$$p_a = \frac{(\underline{P} \cdot \underline{a})}{|\underline{a}|} = \frac{(p_1 a_1 + p_2 a_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

De vectorvoorstelling van deze component wordt dus:

$$p_a \cdot \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} (a_1 \cos \sigma t + a_2 \sin \sigma t)$$

We kunnen nu nagaan dat (3.19) volgens dit procédé afgeleid is uit (3.15) en (3.18). Voor de krachtcomponent in fase met de snelheid verloopt de afleiding analoog.

De toegevoegde massa van de cilinder per lengte-eenheid is nu het quotiënt van (3.19) en (3.18):

$$m'(K_a) = 2 \rho_a^2 \frac{M_o B + N_o A}{A^2 + B^2} \quad (3.21)$$

De dimensieloze quotiënt $\frac{M_o B + N_o A}{A^2 + B^2}$ wordt gedefinieerd als de coëfficiënt van toegevoegde massa.

De dampingcoëfficiënt van de cilinder per lengte-eenheid wordt het quotiënt van (3.20) en (3.16):

$$N'(K_a) = 2 \rho_a^2 \sigma \frac{M_o A - N_o B}{A^2 + B^2} \quad (3.22)$$

Uit (3.7) en (3.17) volgt dat op de cilinder voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ de stroomfunctie geschreven kan worden als:

$$\psi = \frac{K_b}{\pi \sigma} \left\{ A \cos \sigma t + B \sin \sigma t \right\} \quad (r=a; \theta=\frac{\pi}{2})$$

Vergelijken we dit met (3.10) na substitutie van $\theta = \frac{\pi}{2}$ dan volgt dat de verhouding: $\frac{\text{golfamplitude in oneindig}}{\text{amplitude van de gedwongen oscillatie}}$ gelijk is aan:

$$\frac{b}{1} = \frac{\pi K_a}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.23)$$

We merken tenslotte nog op dat de gedurende één periode door de cilinder verrichte arbeid gelijk moet zijn aan de energie die gedurende dezelfde tijd door de regelmatige uitgaande golf wordt uitgestraald, dus twee maal de energie van één golflengte van de regelmatige uitgaande golf:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sigma}} P \frac{dy}{dt} \cdot dt = \int b^2 g^2 \frac{\pi}{\sigma}$$

Substitutie van (3.9) en (3.15) leidt tot de relatie:

$$M_0 A - N_0 B = \frac{\kappa^2}{2} \quad (3.24)$$

De dempingscoëfficiënt kan derhalve vereenvoudigd worden tot:

$$N'(K_m) = \frac{c_m^2 \sigma \pi^2}{A^2 + B^2} \quad (3.25)$$

4. Dampen van een cilinder met een willekeurige vorm.

In dit hoofdstuk zal worden besproken op welke wijze de methode van Ursell toegepast kan worden voor het berekenen van de toegevoegde massa en demping van een willekeurige cilinder. Het essentiële punt in dit procédé is dat door middel van een conforme transformatie een halve cirkel wordt afgebeeld op de loodrechte doorsnede S van de cilinder (Fig. 4.1.1) of, wat op hetzelfde neerkomt, we zoeken een zodanig systeem van kromlijnige coördinaten dat één van de coördinaatlijnen samenvalt met de omtrek van de doorsnede.

4.1. Kromlijnige coördinaten.

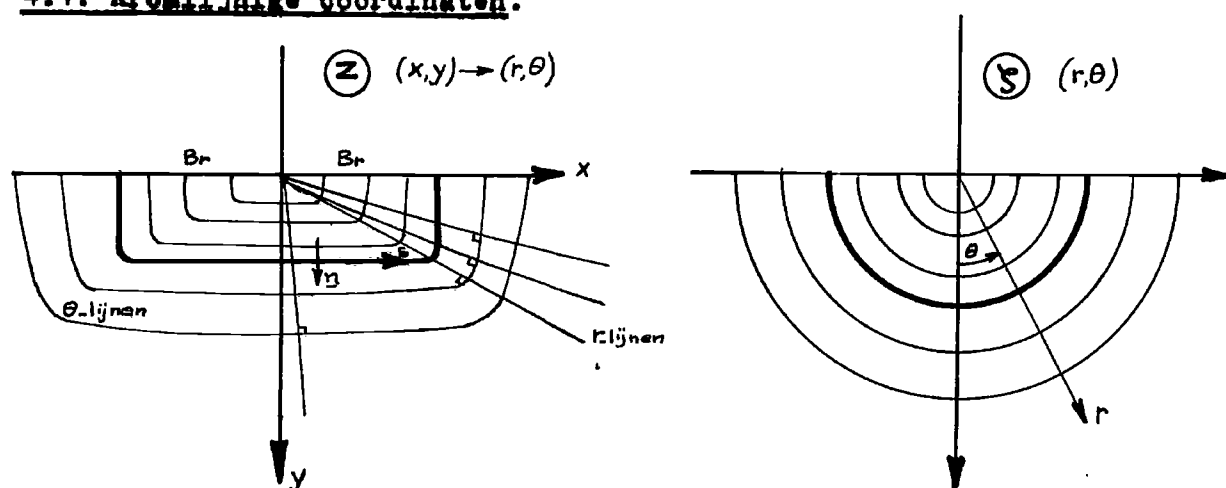


Fig. 4.1.1.

Noem het vlak van de halve cirkel het ζ -vlak en het vlak van de doorsnede van de cilinder het z -vlak. Bij een conforme afbeelding van het ζ -vlak op het z -vlak correspondeert met elk punt in het ζ -vlak, in poolcoördinaten gegeven door (r, θ) , een punt (x, y) van het z -vlak, waarbij x en y rechthoekige coördinaten zijn. Tussen de variabelen x, y en r, θ moeten derhalve relaties bestaan van de gedaante:

$$\begin{aligned} x &= f(r, \theta) \\ y &= g(r, \theta) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

in inverse vorm:

$$\begin{aligned} r &= \bar{f}(x, y) \\ \theta &= \bar{g}(x, y) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

We stellen nu de eis dat de conforme transformatie de halve cirkel afbeeldt op de doorsnede S . Heeft de cirkel een straal $r = a$ dan wordt S gegeven door:

$$\begin{aligned} x &= f(a, \theta) \\ y &= g(a, \theta) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

We nemen nu ook in het z -vlak als coördinaten de variabelen r en θ zodat langs S slechts de variabele θ van waarde verandert terwijl $r = a$ constant blijft. De conforme transformatie bewerkstelligt dus in het z -vlak een transformatie van rechthoekige coördinaten (x, y) naar kromlijnige coördinaten (r, θ) volgens de betrekkingen (4.1.2) en wel zodanig dat één van de coördinatenlijnen (in dit geval $r = a$) samenvalt met de te transformeren doorsnede. De coördinatenlijnen $r = \text{constant}$ en $\theta = \text{constant}$ representeren in het z -vlak twee verzamelingen krommen, die het beeld zijn van een conforme transformatie van de lijnen $r = \text{constant}$ en $\theta = \text{constant}$ in het ζ -vlak, dus van cirkels met de oorsprong als middelpunt en van rechte lijnen door de oorsprong (Fig. 4.1.1). Aangezien bij een conforme transformatie orthogonale lijnen in het beeldvlak moeten corresponderen met orthogonale lijnen in het originele vlak, moeten de lijnen $r = \text{constant}$ en $\theta = \text{constant}$ in het z -vlak elkaar ook loodrecht snijden. Dit heeft als belangrijke consequentie dat in het z -vlak differentiëren langs de doorsnede met lijncoördinaat s overeenkomt met differentiëren naar θ :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

en differentiëren langs de normaal n met differentiëren naar r :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

We zullen zien dat in het vervolg de plaatsafhankelijkheid van veel fysische grootheden zoals bijv. de stroomfunctie ψ en de potentiaal ϕ uitgedrukt wordt m.b.v. de kromlijnige coördinaten r en θ .

We zullen nu m.b.v. een conforme transformatie de betrekking (4.1.1) bepalen die op S voldoen aan (4.1.3). We gebruiken hiervoor een methode ontwikkeld door de Rus Fil'chakova [1]:

Veronderstel dat we het gebied buiten de eenheidscirkel $|\zeta| \geq 1$, in poolcoördinaten omschreven door $\zeta = r e^{i\varphi}$, willen afbeelden op het gebied buiten de gesloten kromme S van het $z = x + iy$ -vlak.

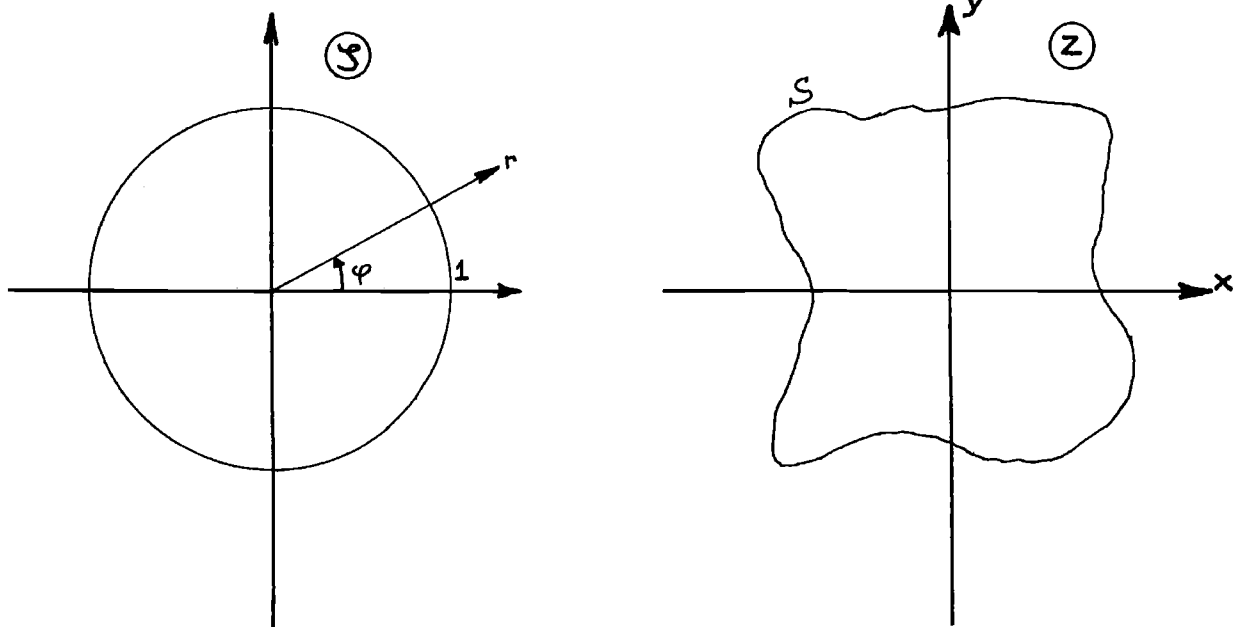


Fig. 4.1.2.

We zoeken een afbeelding in de vorm van een reeks met een eindig aantal termen:

$$z = \sum_{n=-1}^{m-2} C_n \varphi^{-n} = \sum_{n=-1}^{m-2} (A_n + i B_n) r^{-n} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \quad (4.1.4)$$

Voor het bepalen van de coëfficiënten C_n kiezen we op de eenheidscirkel $r = 1$, $2m$ punten die op onderling gelijke afstand van elkaar liggen, dus de poolhoek van elk punt verschilt steeds $\Delta\varphi = \frac{\pi}{m}$ met zijn twee aangrenzende punten. Vervolgens splitsen we deze punten in twee systemen punten: een even systeem $\varphi_{2k} = \frac{2k\pi}{m}$ en een oneven systeem $\varphi_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{m}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

De beeldpunten $z_{2k} = x_{2k} + i y_{2k}$ resp. $z_{2k-1} = x_{2k-1} + i y_{2k-1}$, ($k = 1, 2, \dots, m$) van deze punten op de doorsnede S noemen we knooppunten waarvan de coördinaten dus gegeven worden door:

$$\left. \begin{aligned} x_{2k} &= \sum_{n=-1}^{m-2} (A_n \cos n\varphi_{2k} + B_n \sin n\varphi_{2k}) \\ y_{2k} &= \sum_{n=-1}^{m-2} (-A_n \sin n\varphi_{2k} + B_n \cos n\varphi_{2k}) \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad (4.1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{2k-1} &= \sum_{n=-1}^{m-2} (A_n \cos n\varphi_{2k-1} + B_n \sin n\varphi_{2k-1}) \\ y_{2k-1} &= \sum_{n=-1}^{m-2} (-A_n \sin n\varphi_{2k-1} + B_n \cos n\varphi_{2k-1}) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

We hebben dus een even systeem van knooppunten (x_{2k}, y_{2k}) en een oneven systeem (x_{2k-1}, y_{2k-1}) , $k=1, 2, \dots, m$, die de beeldpunten zijn van de punten $(1, \varphi_{2k})$ resp. $(1, \varphi_{2k-1})$ op de eenheidscirkel.

Met behulp van orthogonaliteitseigenschappen, die gelden voor goniometrische functies met discrete argumenten, waarbij de intervallengte constant (hier: $\frac{2\pi}{m}$) is, kunnen we (4.1.5) op eenvoudige wijze inverteren met betrekking tot de coëfficiënten A_n en B_n . Voor het even systeem worden deze orthogonaliteitsrelaties:

$$\sum_{k=1}^m \sin j \varphi_{2k} \sin n \varphi_{2k} = \sum_{k=1}^m \cos j \varphi_{2k} \cos n \varphi_{2k} = \begin{cases} 0, & j \neq n \\ \frac{m}{2}, & j = n \end{cases} \quad (4.1.6)$$

$$\sum_{k=1}^m \sin j \varphi_{2k} \cos n \varphi_{2k} = 0$$

We vermenigvuldigen de vergelijkingen (4.1.5) resp. met $\cos j \varphi_{2k}$ en $\sin j \varphi_{2k}$ en nemen daarna de som van $k=1$ tot $k=m$. Dit levert met in acht-neming van de relaties (4.1.6):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (x_{2k} \cos j \varphi_{2k} - y_{2k} \sin j \varphi_{2k}) &= \sum_{n=-1}^{m-2} A_n \left(\sum_{k=1}^m \cos j \varphi_{2k} \cos n \varphi_{2k} + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^m \sin j \varphi_{2k} \sin n \varphi_{2k} \left. \right) + \sum_{n=-1}^{m-2} B_n \left(\sum_{k=1}^m \cos j \varphi_{2k} \sin n \varphi_{2k} - \right. \\ &- \sum_{k=1}^m \sin j \varphi_{2k} \cos n \varphi_{2k} \left. \right) = m A_j \end{aligned}$$

Op analoge wijze vermenigvuldigen we (4.1.5a) resp. met $\sin j \varphi_{2k}$ en $\cos j \varphi_{2k}$, zodat de volgende relaties resulteren:

$$A_j^{(+m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_{2k} \cos j \varphi_{2k} - y_{2k} \sin j \varphi_{2k})$$

$$B_j^{(+m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_{2k} \sin j \varphi_{2k} + y_{2k} \cos j \varphi_{2k})$$

$$j = -1, 0, 1, \dots, m-2.$$

De index $(+m)$ is aan A_j en B_j toegevoegd, om uit te drukken dat deze coëfficiënten bepaald zijn op basis van de even knooppunten.

Op analoge wijze kunnen we, uitgaande van (4.1.5b), een relatie bepalen tussen A_j en B_j en de oneven knooppunten. Aan A_j en B_j wordt dan de index $(-m)$ toegevoegd:

$$\begin{aligned} A_j^{(-m)} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_{2k-1} \cos j\varphi_{2k-1} - y_{2k-1} \sin j\varphi_{2k-1}) \\ B_j^{(-m)} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_{2k-1} \sin j\varphi_{2k-1} + y_{2k-1} \cos j\varphi_{2k-1}) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$j = -1, 0, 1, \dots, m-2.$$

Met behulp van (4.1.7) en (4.1.8) kunnen we, wanneer de knooppunten bekend zijn, de coëfficiënten bepalen waarbij $A_j = A_j^{(+m)} = A_j^{(-m)}$ en $B_j = B_j^{(+m)} = B_j^{(-m)}$. De locaties van de knooppunten zijn echter onbekend.

We zullen nu een iteratieproces ontwerpen gebaseerd op de eigenschap dat $A_j^{(+m)} = A_j^{(-m)}$ en $B_j^{(+m)} = B_j^{(-m)}$ zodat er vanwege (4.1.7) en (4.1.8) een relatie bestaat tussen de even en oneven knooppunten. Voor het bepalen van deze relatie gaan we uit (4.1.5a) en bijv. (4.1.8) $A_n^{(-m)}$ en $B_n^{(-m)}$ elimineren.

$$\begin{aligned} x_{2\nu} &= \sum_{n=-1}^{m-2} (A_n^{(-m)} \cos n\varphi_{2\nu} + B_n^{(-m)} \sin n\varphi_{2\nu}) = \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m x_{2k-1} \sum_{n=-1}^{m-2} \cos n(\varphi_{2k-1} - \varphi_{2\nu}) - y_{2k-1} \sum_{n=-1}^{m-2} \sin n(\varphi_{2k-1} - \varphi_{2\nu}) \right\} \\ y_{2\nu} &= \sum_{n=-1}^{m-2} (-A_n^{(-m)} \sin n\varphi_{2\nu} + B_n^{(-m)} \cos n\varphi_{2\nu}) = \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m x_{2k-1} \sum_{n=-1}^{m-2} \sin n(\varphi_{2k-1} - \varphi_{2\nu}) + y_{2k-1} \sum_{n=-1}^{m-2} \cos n(\varphi_{2k-1} - \varphi_{2\nu}) \right\} \end{aligned}$$

Op dezelfde manier krijgen we na eliminatie van $A_n^{(+m)}$ en $B_n^{(+m)}$ uit (4.1.5) m.b.v. (4.1.7):

$$\begin{aligned} x_{2\nu-1} &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m x_{2k} \sum_{n=-1}^{m-2} \cos n(\varphi_{2k} - \varphi_{2\nu-1}) - y_{2k} \sum_{n=-1}^{m-2} \sin n(\varphi_{2k} - \varphi_{2\nu-1}) \right\} \\ y_{2\nu-1} &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m x_{2k} \sum_{n=-1}^{m-2} \sin n(\varphi_{2k} - \varphi_{2\nu-1}) + y_{2k} \sum_{n=-1}^{m-2} \cos n(\varphi_{2k} - \varphi_{2\nu-1}) \right\} \end{aligned}$$

Na definitie van nieuwe grootheden:

$$\begin{aligned} \gamma_{2k-1,2\nu}^{I(m)} &= \frac{1}{m} \sum_{n=-1}^{m-2} \sin n(\varphi_{2k-1} - \varphi_{2\nu}); & \gamma_{2k,2\nu-1}^{I(m)} &= \frac{1}{m} \sum_{n=-1}^{m-2} \sin n(\varphi_{2k} - \varphi_{2\nu-1}); \\ \gamma_{2k-1,2\nu}^{II(m)} &= \frac{1}{m} \sum_{n=-1}^{m-2} \cos n(\varphi_{2k-1} - \varphi_{2\nu}); & \gamma_{2k,2\nu-1}^{II(m)} &= \frac{1}{m} \sum_{n=-1}^{m-2} \cos n(\varphi_{2k} - \varphi_{2\nu-1}); \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

krijgen we voor de formules van het iteratieproces:

$$x_{2\nu-1}^{(n)} = \sum_{k=1}^m x_{2k}^{(n)} \gamma_{2k,2\nu-1}^{II(m)} - y_{2k}^{(n)} \gamma_{2k,2\nu-1}^{I(m)} \quad (4.1.10)$$

$$y_{2\nu-1}^{(n)} = \sum_{k=1}^m x_{2k}^{(n)} \gamma_{2k,2\nu-1}^{I(m)} + y_{2k}^{(n)} \gamma_{2k,2\nu-1}^{II(m)}$$

$$x_{2\nu}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^m x_{2k-1}^{(n)} \gamma_{2k-1,2\nu}^{II(m)} - y_{2k-1}^{(n)} \gamma_{2k-1,2\nu}^{I(m)} \quad (4.1.11)$$

$$y_{2\nu}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^m x_{2k-1}^{(n)} \gamma_{2k-1,2\nu}^{I(m)} + y_{2k-1}^{(n)} \gamma_{2k-1,2\nu}^{II(m)}$$

Het iteratieproces verloopt nu als volgt:

Voor bijv. $m = 4, 8, 16, \dots$ geven we aan de hand van een grafische beschouwing een schatting voor de nulde benadering van de m even knooppunten $(x_{2k}^{(0)}, y_{2k}^{(0)})$, $k = 1, 2, \dots, m$. M.b.v. (4.1.10) berekenen we de bijbehorende oneven punten, welke i.h.a. niet op S zullen liggen. We brengen vervolgens deze punten bijv. lange verbindingslijnen met de oorsprong naar de contour en verkrijgen aldus de nulde benadering voor de oneven knooppunten $(x_{2k-1}^{(0)}, y_{2k-1}^{(0)})$. Met deze punten berekenen we met (4.1.11) de bijbehorende even punten, brengen ze naar de contour en krijgen aldus de eerste benadering voor de even knooppunten $(x_{2k}^{(1)}, y_{2k}^{(1)})$ enz. We zetten dit proces voort tot een volgende benadering met voldoende nauwkeurigheid samenvalt met zijn voorafgaande. Om de nauwkeurigheid van de transformatie te vergroten, moeten we voor m een grotere waarde nemen, bijv. $2m$, waarbij we de m even en oneven knooppunten van de vorige iteratie als een schatting voor de m even knooppunten van de nieuwe iteratie nemen, waarna we het iteratieproces weer op dezelfde wijze hervatten. Op deze wijze kunnen we nauwkeuriger de locaties van de knooppunten vaststellen.

De transformatievergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=-1}^{m-2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \\ y &= \sum_{n=-1}^{m-2} (-A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

zijn nu dus bepaald.

Aangezien we slechts geïnteresseerd zijn in cilinders die symmetrisch zijn t.o.v. de x- en de y-as (we beschouwen in feite slechts het gedeelte $y > 0$ van de doorsnede zodat we de doorsnede dus symmetrisch kunnen denken t.o.v. de x-as) kan (4.1.12) herleid worden tot:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=-1}^{m-2} A_{2n+1} \cos(2n+1)\varphi \\ y &= \sum_{n=-1}^{m-2} A_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

We merken op dat in dit geval de coördinaatassen van het φ -vlak getransformeerd worden in de coördinaatassen van het z-vlak en aangezien de cirkel de horizontale as loodrecht snijdt zal de door (4.1.13) verkregen cilinderdoorsnede de x-as loodrecht snijden. Deze transformatie beperkt zich dus tot doorsneden die de x-as loodrecht snijden.

Vergelijken we Fig. 4.1.1. en Fig. 4.1.2. dan zien we dat $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Dit gesubstitueerd in (4.1.13) geeft:

$$\begin{aligned} x &= A_{-1} \sin \theta + \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n A_{2n+1} \sin(2n+1)\theta \\ y &= A_{-1} \cos \theta + \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^{n+1} A_{2n+1} \cos(2n+1)\theta \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Op analoge wijze vinden we dat een punt (r, θ) van het φ -vlak getransformeerd wordt in een punt (x, y) in het z-vlak volgens:

$$\begin{aligned} x &= A_{-1} r \sin \theta + \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{A_{2n+1} \sin(2n+1)\theta}{r^{2n+1}} \\ y &= A_{-1} r \cos \theta + \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{A_{2n+1} \cos(2n+1)\theta}{r^{2n+1}} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Dit zijn juist de transformatieformules welke door Porter gebruikt worden [7]. Porter gebruikt een enigszins gewijzigde notatie. Eenvoudigheidshalve zullen wij deze notatie hier overnemen; (4.1.15) wordt dan:

$$\begin{aligned} x &= a \left\{ r \sin \theta + \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{a_{2n+1}}{r^{2n+1}} \sin(2n+1) \theta \right\} \\ y &= a \left\{ r \cos \theta + \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} \frac{a_{2n+1}}{r^{2n+1}} \cos(2n+1) \theta \right\} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

We merken nog op dat voor het geval de cilinder cirkelvormig is, de coëfficiënten $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ zijn. De coëfficiënt a geeft dan de verhouding van de stralen van de cirkels in het x -vlak en het y -vlak; a wordt om die reden de schaafactor van de transformatie genoemd.

4.2. Berekening van toegevoegde massa en damping van een willekeurige cilinder [7].

We zullen eerst, analoog met de door Ursell voor de cirkelvormige cilinder gevolgde methode, de bij dit randwaarde probleem behorende snelheidspotentiaal samenstellen uit een bronpotentiaal en een lineaire combinatie van multipolen-potentialen. Voor de bronpotentiaal nemen we, evenals voor de cirkelvormige cilinder, uitdrukking (2.28), welke voldoet aan de oppervlakte conditie en de uitstralingsconditie. Om aan de randconditie op de cilinder te voldoen superponeren we een geschikt gekozen lineaire combinatie van multipolen-potentialen, waarbij elke multipool-potentiaal aan de oppervlakteconditie voldoet en verdwijnt voor $|x| \rightarrow \infty$.

De multipool-potentiaal definiëren we als:

$$\varphi_{2m} = \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} + ka \left\{ \frac{\cos(2m-1)\theta}{(2m-1)r^{2m-1}} + \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{(2n+1)a_{2n+1} \cos(2m+2n+1)\theta}{(2m+2n+1)r^{2m+2n+1}} \right\} \quad (4.2.1)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

We merken op dat φ_{2m} voor $r \rightarrow \infty$ verdwijnt. Om aan te tonen dat φ_{2m} voldoet aan de oppervlakteconditie transformeren we deze betrekking eerst d.m.v. (4.1.16) van rechthoekige coördinaten (x, y) in kromlijnige coördinaten (r, φ) :

$$K\phi + \phi_y = 0 \quad (y=0).$$

kan, aangezien $\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0$ voor $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (de θ -lijnen snijden de x -as loodrecht), geschreven worden als:

$$K\phi + \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (\theta = \pm \frac{\pi}{2}) \quad (4.2.2)$$

Uit (4.1.17) volgt:

$$\frac{dy}{d\theta} = -a \left\{ r \sin \theta + \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^{n+1} (2n+1) a_{2n+1}}{r^{2n+1}} \sin(2n+1) \theta \right\}$$

waaruit voor $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dy}{d\theta} = \mp \left\{ r - \sum_{n=0}^N (2n+1) a_{2n+1} \cdot \frac{1}{r^{2n+1}} \right\}$$

In kromlijnige coördinaten krijgt de oppervlakteconditie de vorm:

$$K a \left\{ r - \sum_{n=0}^N (2n+1) \frac{a_{2n+1}}{r^{2n+1}} \right\} \theta \mp \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (4.2.3)$$

Substitutie van (4.2.1) in (4.2.3) toont aan dat ϕ_{2m} voldoet aan de oppervlakteconditie. Dus de snelheidspotentiaal, die de oplossing is van het randwaarde probleem, krijgt de vorm:

$$\phi = \frac{ab}{\pi \sigma} \left\{ (\phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \phi_{2n}) \cos \sigma t + (\phi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \phi_{2n}) \sin \sigma t \right\} \quad (4.2.4)$$

waarbij ϕ_0 en ϕ_s overeenkomstig (2.29) gedefinieerd worden:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \pi e^{-Ky} \cos Kx \\ \phi_s &= \pi e^{-Ky} \sin Kx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} (\beta \cos \beta y - K \sin \beta y)}{\beta^2 + K^2} d\beta \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

M.b.v. de Cauchy-Riemann betrekkingen (3.6) berekenen we de overeenkomstige stroomfunctie:

$$\psi = \frac{ab}{\pi \sigma} \left\{ (\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \psi_{2n}) \cos \sigma t + (\psi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \psi_{2n}) \sin \sigma t \right\} \quad (4.2.6)$$

waarbij:

$$\psi_0 = \pi e^{-Ky} \sin Kx$$

$$\psi_s = -\pi e^{Ky} \cos Kx + \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} (\beta \sin \beta y + K \cos \beta y)}{\beta^2 + K^2} d\beta$$

$$\psi_{2m} = \frac{\sin 2m\theta}{r^{2m}} + K a \left\{ \frac{\sin(2m-1)\theta}{(2m-1)r^{2m-1}} + \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{(2n+1)a_{2n+1}}{2m+2n+1} \cdot \frac{\sin(2m+2n+1)\theta}{r^{2m+2n+1}} \right\} \quad (4.2.7)$$

We moeten nu nog de coëfficiënten p_{2m} en q_{2m} zodanig bepalen dat voldaan wordt aan de randvoorwaarde op de cilinder. De redenering verloopt analoog met de overeenkomstige berekening in hoofdstuk 3. Op de cilinder moet $\bar{\phi}$ voldoen aan:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = \frac{dy}{dt} \cos \alpha \quad (4.2.8)$$

α is de hoek van de normaal met de positieve y -as (Fig. 4.2.1).

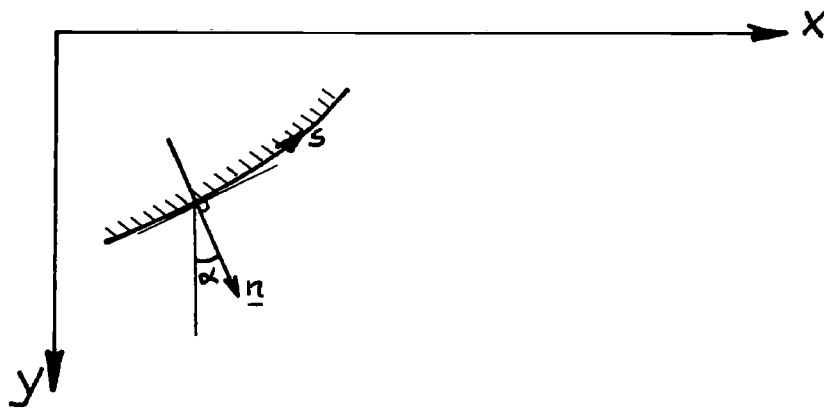


Fig. 4.2.1.

Verder geldt op de cilinder:

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\sin \alpha = -\frac{\partial y}{\partial s} \quad (4.2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}$$

zodat de randvoorwaarde op de cilinder ($r=1$) geschreven kan worden als:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{dy}{dt} \frac{\partial x}{\partial s}$$

Na integratie leidt dit tot:

$$\psi(r=1, \theta) = - \frac{dy}{dt} x(r=1, \theta) + c(t) \quad (4.2.10)$$

Substitutie van $\theta=0$ ($x=0$) geeft $c(t)=0$, zodat:

$$\psi(r=1, \theta) = - \frac{dy}{dt} x(r=1, \theta) \quad (4.2.11)$$

Substitutie van $\theta = \frac{\pi}{2}$ geeft:

$$\psi(1, \frac{\pi}{2}) = - \frac{dy}{dt} Br \quad (4.2.12)$$

$Br = x(1, \frac{\pi}{2})$ is de halve breedte van de doorsnede (Fig. 4.1.1). Elimineren van $\frac{dy}{dt}$ uit (4.2.11) en (4.2.12) geeft:

$$\psi(1, \theta) = \frac{x(1, \theta)}{Br} \psi(1, \frac{\pi}{2}) \quad (4.2.13)$$

Substitutie van (4.2.6) en gelijkstellen van de coëfficiënten van $\cos \sqrt{t}$ en $\sin \sqrt{t}$ geeft resp.:

$$\psi_c(1, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \psi_{2m}(1, \theta) = \frac{x(1, \theta)}{Br} \left\{ \psi_c(1, \frac{\pi}{2}) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) \right\}$$

$$\psi_s(1, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \psi_{2m}(1, \theta) = \frac{x(1, \theta)}{Br} \left\{ \psi_s(1, \frac{\pi}{2}) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) \right\}$$

of:

$$\psi_c(1, \theta) - \frac{x(1, \theta)}{Br} \psi_c(1, \frac{\pi}{2}) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} f_{2m}(1, \theta) \quad (4.2.14)$$

$$\psi_s(1, \theta) - \frac{x(1, \theta)}{Br} \psi_s(1, \frac{\pi}{2}) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} f_{2m}(1, \theta)$$

waarbij:

$$f_{2m}(1, \theta) = \frac{x(1, \theta)}{Br} \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) - \psi_{2m}(1, \theta) \quad *)$$

De vergelijkingen (4.2.14) hebben dezelfde structuur als (3.13). De coëfficiënten p_{2m} en q_{2m} worden op evereenkomstige wijze berekend.

*) Zie opmerking aan het slot van deze paragraaf.

De snelheidspotentiaal ϕ op de cilinderomtrek ($r=1$) schrijven we als:

$$\phi(1, \theta) = \frac{g b}{\pi \sigma} (M \sin \sigma t + N \cos \sigma t) \quad (4.2.15)$$

waarbij:

$$M(1, \theta) = \phi_0(1, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \varphi_{2m}(1, \theta)$$

$$N(1, \theta) = \phi_0(1, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \varphi_{2m}(1, \theta)$$

De druk langs de omtrek berekenen we volgens (3.14):

$$p(1, \theta) = - \frac{\rho g b}{\pi} (M \cos \sigma t - N \sin \sigma t) \quad (4.2.16)$$

We definiëren:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g b}{\pi \sigma Br} (-A \cos \sigma t - B \sin \sigma t) \quad (4.2.17)$$

zodat:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{g b}{\pi Br} (A \sin \sigma t - B \cos \sigma t) \quad (4.2.18)$$

waarbij volgens (4.2.12):

$$\begin{aligned} A &= \psi_0(1, \frac{\pi}{2}) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) \\ B &= \psi_0(1, \frac{\pi}{2}) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

We kunnen de druk ontbinden in een component in fase met de snelheid en een component in fase met de versnelling. Dit geschiedt op analoge wijze als in hoofdstuk 3.

$$p(1, \theta) = \frac{\rho g b}{\pi} \frac{MB + NA}{A^2 + B^2} (A \sin \sigma t - B \cos \sigma t) - \frac{\rho g b}{\pi} \frac{MA - NB}{A^2 + B^2} (A \cos \sigma t + B \sin \sigma t)$$

of:

$$p(1, \theta) = \rho Br \frac{MB + NA}{A^2 + B^2} \ddot{y} + \rho Br \frac{MA - NB}{A^2 + B^2} \dot{y} \quad (4.2.20)$$

De totale verticale kracht op de cilinder per lengte-eenheid wordt:

$$F = 2 \int_{S(0 < \theta < \frac{\pi}{2})} p(1, \theta) \cos \theta d\theta \quad (4.2.21)$$

Uit (4.2.9) en (4.1.17) volgt dat op de omtrek van de cilinder:

$$\begin{aligned} \cos\alpha ds &= \frac{\partial x}{\partial \theta} ds = dx = \\ &= a \left\{ \cos \theta + \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1) a_{2n+1} \cos(2n+1)\theta \right\} d\theta = a W(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Substitutie van $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $r=1$ in de eerste vergelijking van (4.1.17) geeft:

$$Br = a \left\{ 1 + \sum_{n=0}^N a_{2n+1} \right\} = a G$$

dus:

$$a = \frac{Br}{G} \quad (4.2.23)$$

(4.2.21) wordt derhalve:

$$F = 2 Br \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(1, \theta) \frac{W(\theta)}{G} d\theta.$$

Substitutie van (4.2.16) in deze vergelijking geeft:

$$F = \frac{2\rho g b Br}{\pi} (N_0 \sin \sigma t - M_0 \cos \sigma t) \quad (4.2.24)$$

waarbij:

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(1, \theta) \frac{W(\theta)}{G} d\theta \\ N_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(1, \theta) \frac{W(\theta)}{G} d\theta \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

We ontbinden de verticale kracht in een component in fase met de versnelling en een component in fase met de snelheid:

$$\begin{aligned} F &= \frac{2\rho g b Br}{\pi} \cdot \frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2} (A \sin \sigma t - B \cos \sigma t) + \\ &+ \frac{2\rho g b Br}{\pi} \cdot \frac{M_0 A - N_0 B}{A^2 + B^2} (-A \cos \sigma t - B \sin \sigma t). \end{aligned}$$

M.b.v. (4.2.17) en (4.2.8) wordt bovenstaande uitdrukking:

$$F = 2\rho Br^2 \frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2} \ddot{y} + 2\rho Br^2 \frac{M_0 A - N_0 B}{A^2 + B^2} \sigma \dot{y} \quad (4.2.26)$$

Op analoge wijze als voor de cirkelvormige cilinder zien we uit (4.2.26) dat de coëfficiënt van $\ddot{y}$ de toegevoegde massa per lengte-eenheid van de cilinder is:

$$m'' = 2\rho Br^2 \frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2} \quad (4.2.27)$$

In dimensieloze vorm krijgen we dus voor de coëfficiënt van toegevoegde massa:

$$\frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2} \quad (4.2.28)$$

De demping van de cilinder per lengte-eenheid wordt:

$$N' = 2\rho Br^2 \sigma \frac{M_0 A - N_0 B}{A^2 - B^2} \quad (4.2.29)$$

Door de gedissipeerde energie gelijk te stellen aan de door de cilinder verrichte arbeid krijgen we een aan (3.24) equivalente relatie:

$$M_0 A - N_0 B = \frac{\pi^2}{2} \quad (4.2.30)$$

zodat voor (4.2.29) geschreven kan worden:

$$N' = \frac{2\rho Br^2 \sigma \pi^2}{A^2 + B^2} \quad (4.2.31)$$

Analoog met (3.23) vinden we voor de verhouding van de golfamplitude op oneindige afstand en de amplitude van de gedwongen oscillatie:

$$\frac{KBr \pi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.2.32)$$

Opmerking: I.p.v. $\frac{dy}{dt}$ te elimineren uit (4.2.11) en (4.2.12) en daarna gelijkstellen van coëfficiënten van $\cos \sigma t$ en $\sin \sigma t$, hetgeen leidt tot het stelsel vergelijkingen (4.2.14) voor p_{2m} en q_{2m} , kunnen we ook voor $\frac{dy}{dt}$ in (4.2.11) de uitdrukking (4.2.17) substitueren en daarna coëfficiënten van $\cos \sigma t$ en $\sin \sigma t$ gelijkstellen. We krijgen dan achtereenvolgens:

$$\psi(1,0) = \frac{Kb}{\pi \sigma Br} (A \cos \sigma t + B \sin \sigma t) \cdot x(1,0) \quad (4.2.33)$$

dit wordt:

$$\psi_c(1, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \psi_{2m}(1, \theta) = \frac{g_b}{\pi \sigma Br} x(1, \theta) \cdot A$$

$$\psi_s(1, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \psi_{2m}(1, \theta) = \frac{g_b}{\pi \sigma Br} x(1, \theta) \cdot B$$

of:

$$\psi_c(1, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m} f_{2m}$$

$$\psi_s(1, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m} f_{2m}$$

waarbij:

$$f_0 = \frac{g_b}{\pi \sigma Br} x(1, \theta)$$

$$f_{2m} = -\psi_{2m}(1, \theta)$$

en:

$$p_0 = A, \quad q_0 = B.$$

De berekening van A en B volgens (4.2.19) vervalt nu dus.

4.3. Toegevoegde massa en demping van een cilinder met een "Lewis-doorsnede!"

We zullen nu een speciaal geval beschouwen van de in 4.2. besproken theorie, waarbij in de transformatieformules (4.1.16) $N=2$ wordt genomen. De eenheidscirkel wordt in dit geval getransformeerd in een doorsnede, die in vele gevallen een redelijke benadering is voor de dwarsdoorsnede van een schip. Dit soort doorsneden zijn veelvuldig gebruikt door Lewis en Grim voor hun berekeningen en staan in de Engelstalige literatuur bekend als "Lewis-forms".

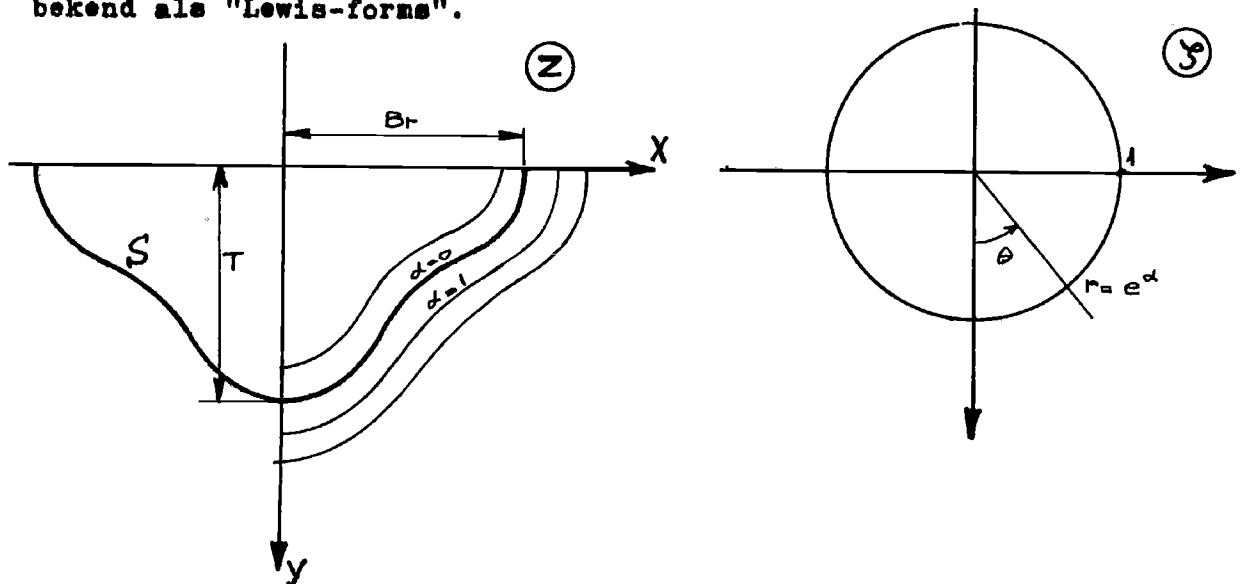


Fig. 4.3.1.

Tasai [10] geeft een uitvoeriger behandeling van dit geval. We zullen eenvoudigheidshalve de door hem gebruikte notatie overnemen: i.p.v. de voerstraal r wordt de variabele α gebruikt in de vorm $r = e^\alpha$, zodat in het y -vlak de eenheidscirkel overeenkomt met $\alpha = 0$ en in het z -vlak de coördinatenlijn $\alpha = 0$ samenvalt met de omtrek van de doorsnede. De transformatieformules (4.1.16) worden in de notatie van Tasai:

$$\frac{x}{M} = e^\alpha \sin \theta + a_1 e^{-\alpha} \sin \theta - a_3 e^{-3\alpha} \sin 3\theta \quad (4.3.1)$$

$$\frac{y}{M} = e^\alpha \cos \theta - a_1 e^{-\alpha} \cos \theta + a_3 e^{-3\alpha} \cos 3\theta$$

Op de omtrek van de doorsnede, waar $\alpha = 0$, geldt:

$$\frac{x_0}{M} = (1 + a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta \quad (4.3.2)$$

$$\frac{y_0}{M} = (1 - a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta$$

De schaalfactor van de transformatie wordt hier dus aangeduid met M waarvoor volgens (4.2.23):

$$M = \frac{Br}{1+a_1+a_3}$$

Als parameters voor de dwarsdoorsnede nemen we:

$$H_0 = \frac{Br}{T} \quad \text{en} \quad G = \frac{S}{2BrT} \quad (4.3.3)$$

S is de oppervlakte van de doorsnede, T de diepgang en Br de halve breedte. Vanwege het beperkte aantal termen in de transformatievergelijkingen is het mogelijk op algebraïsche wijze een expliciete uitdrukking te vinden voor de coëfficiënten a_1 en a_3 , zodat de veel rekentijd vergende iteratiemethode wordt verneden:

$$a_1 = \frac{H_0 - 1}{H_0 + 1} (a_3 + 1); \quad a_3 = \frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3}}{2c_1} \quad (4.3.4)$$

waarbij:

$$c_1 = \left(3 + \frac{2G}{\pi}\right) + \left(1 - \frac{2G}{\pi}\right) \left(\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}\right)^2,$$

$$c_2 = 2 \left\{ \left(1 - \frac{2G}{\pi}\right) \left(\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}\right)^2 + \frac{2G}{\pi} \right\},$$

$$c_3 = \left(1 - \frac{2G}{\pi}\right) \left\{ \left(\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}\right)^2 - 1 \right\}.$$

Uit (4.2.1) volgt dat de multipolen-potentiaal φ_{2m} voor dit geval de volgende gedaante krijgt:

$$\begin{aligned} \varphi_{2m} = e^{-2m\alpha} \cos 2m\theta + \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} & \left\{ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \cos(2m-1)\theta + a_1 \frac{e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \right. \\ & \left. \cdot \cos(2m+1)\theta - \frac{3a_3}{2m+3} e^{-(2m+3)\alpha} \cos(2m+3)\theta \right\} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

waarbij:

$$\zeta_0 = K \cdot Br = \frac{\sigma^2}{g} Br.$$

Voor de overeenkomstige stroomfunctie krijgen we uit (4.2.7):

$$\psi_{2m} = e^{-2m\alpha} \sin 2m\theta + \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \sin(2m-1)\theta + a_1 \frac{e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \right.$$

$$\left. \sin(2m+1)\theta - \frac{3a_3}{2m+3} e^{-(2m+3)\alpha} \sin(2m+3)\theta \right\} \quad (4.3.6)$$

$$m=1,2,3,\dots$$

De totale potentiaal resp. stroomfunctie krijgt dus de gedaante (4.2.4) resp. (4.2.6) waar voor φ_{2m} en ψ_{2m} resp. de uitdrukkingen (4.3.5) en (4.3.6) gesubstitueerd moeten worden. Voor het berekenen van de coëfficiënten p_{2m} en q_{2m} gaan we op analoge wijze te werk als voor het algemene geval in (4.2):

De randconditie op de omtrek van de cilinder resulteert in de conditie (4.2.11) waaraan de stroomfunctie ψ moet voldoen:

$$\psi(\alpha=0, \theta) = -\frac{dy}{dt} x(\alpha=0, \theta) \quad (4.3.7)$$

We elimineren $\frac{dy}{dt}$ m.b.v. (4.2.12), stellen coëfficiënten van $\cos \sigma t$ en $\sin \sigma t$ aan elkaar gelijk en krijgen aldus de twee uitdrukkingen (4.2.14) welke hier de volgende gedaante krijgen:

$$\begin{aligned} \psi_c(\alpha=0, \theta; \zeta_0, a_1, a_3) - \frac{\sin \theta + a_1 \sin \theta - a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} \psi_c(\alpha=0, \theta=\frac{\pi}{2}; \zeta_0, a_1, a_3) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} f_{2m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_s(\alpha=0, \theta; \zeta_0, a_1, a_3) - \frac{\sin \theta + a_1 \sin \theta - a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} \psi_s(\alpha=0, \theta=\frac{\pi}{2}; \zeta_0, a_1, a_3) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} f_{2m}, \end{aligned}$$

waarbij:

$$\begin{aligned} f_{2m} = - \left[\sin 2m\theta + \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1} + a_1 \frac{\sin(2m+1)\theta}{2m+1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3a_3 \sin(2m+3)\theta}{2m+3} \right\} + \frac{\zeta_0 (-1)^m}{(1+a_1+a_3)^2} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} \right. \\ \left. \cdot (\sin \theta + a_1 \sin \theta - a_3 \sin 3\theta) \right] \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

De toegevoegde massa en de demping worden berekend volgens (4.2.27) resp. (4.2.29).

De grootheden M_0 , N_0 , A en B krijgen overeenkomstig (4.2.25) en (4.2.10) de vorm:

$$M_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta_0(0, \theta; a_1, a_3, \zeta_0) \frac{\cos \theta + a_1 \cos \theta - 3a_3 \cos 3\theta}{1 + a_1 + a_3} d\theta + \frac{1}{1 + a_1 + a_3} \cdot$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q_{2n} \left(\frac{1+a_1}{4n^2-1} + \frac{9a_3}{4n^2-9} \right) + \frac{\pi \zeta_0}{4(1+a_1+a_3)} \left\{ (1+a_1-a_1a_3) q_{2-a_3} q_4 \right\} \right].$$

$$N_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta_0(0, \theta; a_1, a_3, \zeta_0) \frac{\cos \theta + a_1 \cos \theta - 3a_3 \cos 3\theta}{1 + a_1 + a_3} d\theta + \frac{1}{1 + a_1 + a_3} \cdot$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_{2n} \left(\frac{1+a_1}{4n^2-1} + \frac{9a_3}{4n^2-9} \right) + \frac{\pi \zeta_0}{4(1+a_1+a_3)} \left\{ (1+a_1-a_1a_3) p_{2-a_3} p_4 \right\} \right].$$

$$A = \psi_0\left(0, \frac{\pi}{2}; a_1, a_3, \zeta_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\zeta_0) (-1)^{n-1} \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{a_1}{2n+1} - \frac{3a_3}{2n+3} \right\}$$

$$B = \psi_0\left(0, \frac{\pi}{2}; a_1, a_3, \zeta_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n}(\zeta_0) (-1)^{n-1} \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{a_1}{2n+1} - \frac{3a_3}{2n+3} \right\}$$

5. Verzetten en slingeren.

In dit hoofdstuk zullen de hydrodynamische coëfficiënten berekend worden voor een cilinder die een gedwongen harmonische verzetbeweging of slingerbeweging maakt. Daarbij zal ook aandacht worden geschonken aan de gekoppelde beweging tussen slingeren en verzetten. Volgens (1.11) moet de snelheidspotential, die een oplossing is van het randwaarde probleem, asymmetrisch zijn. Derhalve zijn de bronpotential (2.28) en de multipolen-potentialen, die gebruikt worden voor het symmetrische probleem niet meer bruikbaar. We zullen in dit hoofdstuk derhalve eerst de potentialen moeten afleiden die resp. de bronpotential en de multipolen-potentialen vervangen en daarna overgaan tot het berekenen van de hydrodynamische coëfficiënten.

5.1. Potential van een dipool in de oorsprong; asymmetrische multipolen-potentialen.

We kunnen op fysische gronden gemakkelijk insien dat een dipool een stromingsveld geeft dat asymmetrisch is t.o.v. de lijn door de dipool loodrecht op de asrichting.

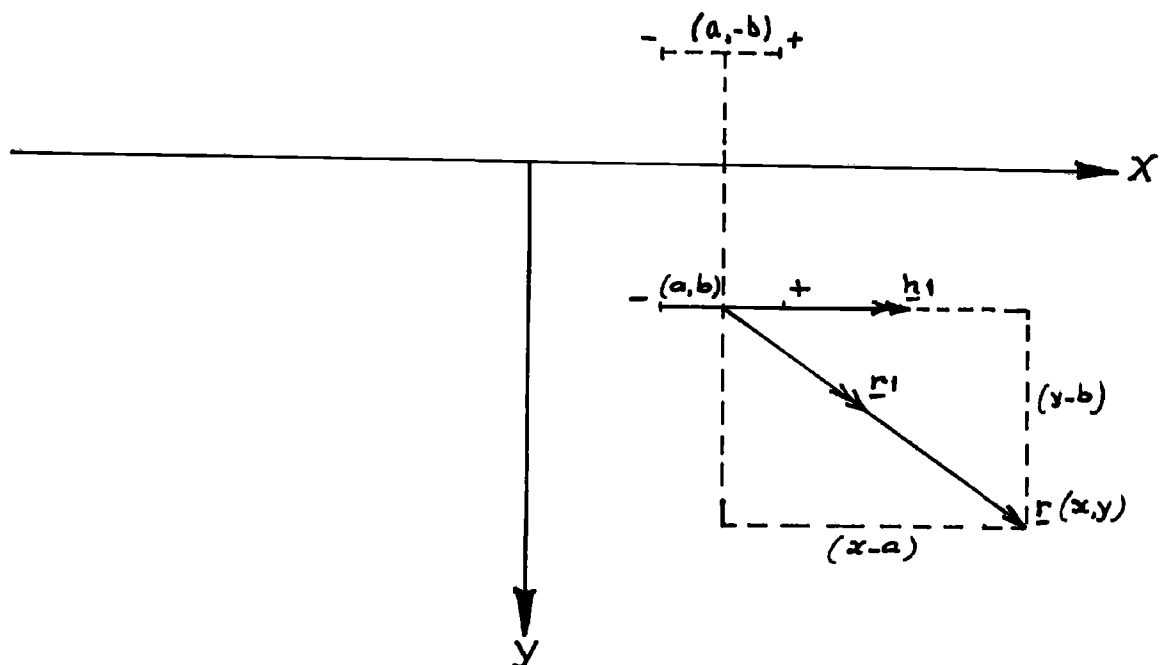


Fig. 5.1.1.

Veronderstel een horizontale dipool met moment M in (a,b) , (Fig. 5.1.1). De potentiaal in een punt (x,y) t.g.v. de dipool wordt [12]:

$$\phi_{\text{dip}} = \frac{M(\underline{r} \cdot \underline{n}_1)}{|\underline{r}|} = \frac{M(\underline{r} \cdot \underline{n}_1)}{|\underline{r}|^2} = \frac{M(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (5.1.1)$$

$\underline{n}_1$ is de eenheidsvector in de x -richting, $\underline{r}$ de verbindingsvector van (a,b) met (x,y) .

We veronderstellen nu een dipool in (a,b) met moment $\frac{1}{2K}$ en met de x -as in de positieve x -richting, en een even sterke dipool in $(a,-b)$ waarvan de potentialen dus resp. worden gegeven door:

$$\phi_{\text{dip}}(a,b) = \frac{1}{2K} \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (5.1.2)$$

$$\phi_{\text{dip}}(a,-b) = \frac{1}{2K} \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y+b)^2}$$

We beschouwen nu de potentiaal:

$$\phi = \phi_{\text{dip}}(a,b) + \phi_{\text{dip}}(a,-b) + \phi_r \quad (5.1.3)$$

ϕ_r is een reguliere functie, die zodanig bepaald moet worden dat ϕ voldoet aan de oppervlakte conditie $K\phi + \phi_y = 0$. We krijgen dan na substitutie van ϕ , voor ϕ_r de conditie:

$$K\phi_r + \phi_{ry} = -\frac{(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} = -\int_0^\infty e^{-pb} \sin(x-a)p \, dp \quad (b>0) \quad (5.1.4)$$

waarbij:

$$\frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2}$$

de beeldfunctie is van de Laplace transformatie van $\sin(x-a)p$.

Op analoge wijze als in hoofdstuk voor de bronpotentiaal vinden we voor ϕ_r de uitdrukking:

$$\phi_r = - \underbrace{\int_{M_2}}_{\rightarrow} \frac{e^{-p(y+b)} \sin p(x-a)}{K-p} \, dp \quad (5.1.5)$$

De eenduidigheid voor ϕ_r wordt evenals voor de bronpotentiaal, verschaft door de conditie dat ϕ_r voor $|x| \rightarrow \infty$ een regelmatige uitgaande golf representeert, waardoor de contour $\underbrace{M_1}_{\rightarrow}$ vervalt (Fig. 2.3).

Voor een dipool in de oorsprong ($a = b = 0$) krijgen we dus de potentiaal:

$$\phi = \frac{x}{K(x^2 + y^2)} - \int_{M_2} \frac{e^{-py} \sin px}{K-p} dp \quad (5.1.6)$$

Deze potentiaal voldoet dus aan de oppervlakteconditie, representeert voor $|x| \rightarrow \infty$ een regelmatige uitgaande golf en is asymmetrisch.

ϕ_r kunnen we op analoge wijze als ψ' in (2.22) herleiden tot:

$$\phi_r = \mp \int_0^\infty \frac{e^{\mp \beta x} \{K \cos \beta y + \beta \sin \beta y\}}{K^2 + \beta^2} d\beta \pm \pi e^{-Ky} \mp i K x \quad (5.1.7)$$

Voor de dipoolpotentiaal $\bar{\phi}_{\text{dip}} = \text{Re} \left\{ \phi_{\text{dip}} e^{-i\sigma t} \right\}$ definiëren we:

$$\bar{\phi}_{\text{dip}} = \frac{Kb}{\pi\sigma} \left\{ \phi_0 \cos \sigma t + \phi_s \sin \sigma t \right\} \quad (5.1.8)$$

zodat:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -\pi e^{-Ky} \sin Kx \\ \phi_s &= +\pi e^{-Ky} \cos Kx \mp \int_0^\infty \frac{K \cos \beta y + \beta \sin \beta y}{\beta^2 + K^2} e^{\mp \beta x} d\beta + \frac{x}{K(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

Met $\bar{\phi}_{\text{dip}}$ correspondeert de stroomfunctie $\bar{\psi}_{\text{dip}}$ gegeven door:

$$\bar{\psi}_{\text{dip}} = \frac{Kb}{\pi\sigma} \left\{ \psi_0 \cos \sigma t + \psi_s \sin \sigma t \right\}$$

waarbij:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \pi e^{-Ky} \cos Kx \\ \psi_s &= +\pi e^{-Ky} \sin Kx - \int_0^\infty e^{\mp \beta x} \frac{\beta \cos \beta y - K \sin \beta y}{K^2 + \beta^2} d\beta - \frac{y}{K(x^2 + y^2)} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Tenslotte definiëren we de asymmetrische multipolen-potentialen:

$$\varphi_{2m} = \frac{\sin(2m+1)\theta}{r^{2m+1}} + K_a \left\{ \frac{\sin 2m\theta}{2mr^{2m}} + \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a_{2n+1} (2n+1) \sin(2n+2m+2)\theta}{(2m+2n+2)r^{2m+2n+2}} \right\} \quad (5.1.10)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

Door substitutie van (5.1.9) en (4.2.3) tonen we aan dat φ_{2m} voldoet aan de oppervlakteconditie. Met φ_{2m} correspondeert de stroomfunctie:

$$\psi_{2m} = \frac{\cos(2m+1)\theta}{r^{2m}} - K_a \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{2mr^{2m}} + \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a_{2n+1} (2n+1) \cos(2m+2n+2)\theta}{(2m+2n+2)r^{2m+2n+2}} \right\}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

We zoeken nu geheel analoog met het probleem van de dampende cilinder een oplossing voor het randwaarde probleem, waarbij de cilinder een verzetbeweging of een slingerbeweging maakt in de vorm van de som van de dipoolpotentialen (5.1.8) en een lineaire combinatie van multipolen-potentialen (5.1.10).

$$\phi = \frac{gb}{\pi\sigma} \left[\left\{ \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \phi_{2n} \right\} \cos \sigma t + \left\{ \phi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \phi_{2n} \right\} \sin \sigma t \right] \quad (5.1.12)$$

De bijbehorende stroomfunctie wordt:

$$\psi = \frac{gb}{\pi\sigma} \left[\left\{ \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \psi_{2n} \right\} \cos \sigma t + \left\{ \psi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \psi_{2n} \right\} \sin \sigma t \right] \quad (5.1.13)$$

5.2. Toegevoegde massa en demping bij verzetten; slingermoment t.g.v. verzetten.

De randconditie op de cilinder wordt in dit geval (Fig. 4.2.1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{dx}{dt} \sin \alpha \quad (5.2.1)$$

Met (4.2.9) kan dit geschreven worden als:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{dx}{dt} \frac{dy}{ds} \quad (5.2.2)$$

waaruit na integratie volgt:

$$\psi(r=1, \theta) = \frac{dx}{dt} y(r=1, \theta) + C(t) \quad (5.2.3)$$

Substitutie van $\theta = \frac{\pi}{2}$ geeft: $C(t) = \psi(1, \frac{\pi}{2})$ zodat:

$$\psi(1, \theta) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{dx}{dt} y(1, \theta) \quad (5.2.4)$$

We kunnen nu analoog met (4.2.11) t/m (4.2.13), $\frac{dx}{dt}$ elimineren of in bovenstaande vorm $\frac{dx}{dt} = -x_a \sigma \sin(\sigma t + \gamma)$ substitueren (we veronderstellen x gegeven door $x = x_a \cos(\sigma t + \gamma)$), zodat een uitdrukking wordt verkregen welke analoog is met (4.2.33).

We zullen hier de eerste methode toepassen. Substitutie van $\theta = 0$ in (5.2.4) geeft:

$$\psi(1, 0) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{dx}{dt} \tau \quad (5.2.5)$$

eliminieren van $\frac{dx}{dt}$ uit (5.2.4) en (5.2.5) geeft:

$$\frac{1}{\gamma(1,0)} \left\{ \psi(1,0) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) \right\} = \frac{1}{T} \left\{ \psi(1,0) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) \right\}$$

Substitutie van (5.1.13) en gelijkstellen van de coëfficiënten van $\cos \sigma t$ en $\sin \sigma t$ levert resp.:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_0(1,0) - \psi_0(1, \frac{\pi}{2}) \right\} - \frac{\gamma(1,0)}{T} \left\{ \psi_0(1,0) - \psi_0(1, \frac{\pi}{2}) \right\} &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} f_{2m} \\ \left\{ \psi_s(1,0) - \psi_s(1, \frac{\pi}{2}) \right\} - \frac{\gamma(1,0)}{T} \left\{ \psi_s(1,0) - \psi_s(1, \frac{\pi}{2}) \right\} &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} f_{2m} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

waarbij:

$$f_{2m} = \frac{\gamma(1,0)}{T} \left\{ \psi_{2m}(1,0) - \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) \right\} - \left\{ \psi_{2m}(1,0) - \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) \right\}$$

(5.2.6) vormt een stelsel vergelijkingen waaruit we p_{2m} en q_{2m} kunnen berekenen. We definiëren analoog met (4.2.17):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gb}{\pi \sigma T} \left\{ -A \cos \sigma t - B \sin \sigma t \right\} \quad (5.2.7)$$

zodat:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{gb}{\pi T} \left\{ A \sin \sigma t - B \cos \sigma t \right\}$$

waarbij volgens (5.1.13) en (5.2.5):

$$\begin{aligned} A &= \psi_0(1, \frac{\pi}{2}) - \psi_0(1,0) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \left\{ \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) - \psi_{2m}(1,0) \right\} \\ B &= \psi_s(1, \frac{\pi}{2}) - \psi_s(1,0) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \left\{ \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) - \psi_{2m}(1,0) \right\} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Geheel equivalent met (4.2.15) definiëren we voor de potentiaal langs de cilinder:

$$\phi(1,0) = \frac{gb}{\pi \sigma} (M \sin \sigma t + N \cos \sigma t) \quad (5.2.9)$$

zodat voor de druk langs de cilinder:

$$p(1,0) = -\frac{p_0 gb}{\pi} (M \cos \sigma t - N \sin \sigma t) \quad (5.2.10)$$

waarbij vanwege (5.1.12):

$$\begin{aligned} M(1,0) &= \phi_s(1,0) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} \varphi_{2m}(1,0) \\ N(1,0) &= \phi_0(1,0) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} \varphi_{2m}(1,0) \end{aligned}$$

Uit (5.2.7) en (5.2.10) volgt analoog met (4.2.20):

$$p(1, \theta) = \rho T \frac{MB+NA}{A^2+B^2} \ddot{x} + \rho T \frac{MA-NB}{A^2+B^2} \dot{\sigma} \dot{x} \quad (5.2.11)$$

De totale horizontale hydrodynamische kracht (van de cilinder op de vloeistof) wordt:

$$F_x = \int_{S(0 < \theta < \frac{\pi}{2})} \{ p(1, \theta) - p(1, -\theta) \} \sin \alpha \, ds \quad (5.2.12)$$

Uit (4.2.9), (4.1.16) en (4.2.23) volgt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \, ds &= \frac{\partial y}{\partial s} \, ds = dy = a \left\{ -\sin \theta + \sum_{n=0}^N (-1)^n a_{2n+1} (2n+1) \sin(2n+1)\theta \right\} d\theta = \\ &= \frac{Br}{G} V(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Aangezien de druk asymmetrisch is in θ wordt (5.2.12):

$$F = 2 Br \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(1, \theta) \frac{V(\theta)}{G} d\theta \quad (5.2.14)$$

Substitutie van (5.2.11) geeft:

$$F = 2 \rho T Br \frac{MB+NA}{A^2+B^2} \ddot{x} + 2 \rho T Br \frac{MA-NB}{A^2+B^2} \dot{\sigma} \dot{x}$$

waarbij:

$$\begin{aligned} N_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(1, \theta) \frac{V(\theta)}{Br} d\theta \\ M_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(1, \theta) \frac{V(\theta)}{Br} d\theta \end{aligned}$$

De toegevoegde massa per lengte-eenheid wordt derhalve:

$$2 \rho T Br \frac{MB+NA}{A^2+B^2} \quad (5.2.15)$$

De damping per lengte-eenheid wordt:

$$2 \rho T Br \frac{MA-NB}{A^2+B^2} \dot{\sigma} \quad (5.2.16)$$

We zien m.b.v. Fig. 4.2.1. dat vanwege de symmetrie van $p(1, \theta)$ in θ voor het moment op de cilinder t.g.v. de verzetsbeweging (positief met de wijzers van het uurwerk) geldt:

$$M_{RS} = 2 \int_{S(0 < \theta < \frac{\pi}{2})} \{ p \sin \alpha \cdot y - p \cos \alpha \cdot x \} ds$$

m.b.v. (4.2.9) wordt dit:

$$M_{RS} = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta}) d\theta \quad (5.2.17)$$

Substitutie van (5.2.10) geeft:

$$M_{RS} = \frac{Br^2 2 \rho gb}{\pi} \left\{ -X_{RS} \sin \sigma t + Y_{RS} \cos \sigma t \right\} \quad (5.2.18)$$

waarbij:

$$X_{RS} = \frac{1}{Br^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(1, \theta) (x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta}) d\theta$$

$$Y_{RS} = \frac{1}{Br^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(1, \theta) (x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta}) d\theta$$

We ontbinden het moment in een component in fase met de versnelling en een component in fase met de snelheid volgens:

$$M_{RS} = I_{RS} \left(-\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + N_{RS} \left(-\frac{dx}{dt} \right) \quad (5.2.19)$$

Dit zijn de koppelingstermen tussen verzetten en slingeren in de bewegingsvergelijking voor slingeren, waarbij I_{RS} en N_{RS} resp. het traagheidsmoment en het dempingsmoment t.g.v. verzetten zijn. Uit (5.2.7) en (5.2.18) volgt:

$$M_{RS} = \frac{-2\rho gb Br^2}{\pi} \frac{BY_R + AX_R}{A^2 + B^2} (A \sin \sigma t - B \cos \sigma t) - \frac{2\rho gb Br^2}{\pi} \cdot$$

$$\cdot \frac{AY_R - BX_R}{A^2 + B^2} (-A \cos \sigma t - B \sin \sigma t)$$

$$= -2\rho T Br^2 \frac{BY_R + AX_R}{A^2 + B^2} \ddot{x} - 2\rho \sigma T Br^2 \frac{AY_R - BX_R}{A^2 + B^2} \dot{x}$$

zodat:

$$I_{RS} = 2\rho T Br^2 \frac{BY_R + AX_R}{A^2 + B^2} \quad (5.2.20)$$

$$N_{RS} = 2\rho \sigma T Br^2 \frac{AY_R - BX_R}{A^2 + B^2}$$

Voor de verhouding van de golfamplitude op oneindige afstand van de cilinder en de amplitude van de gedwongen oscillatie krijgen we op analoge wijze als bij dompen:

$$\frac{b}{x_a} = \frac{\pi L K T}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

terwijl eveneens de relatie $M_0 A - N_0 B = \frac{\pi^2}{2}$ geldig blijft.

We zullen nu voor het speciale geval van een Lewis-doorsnede voor bovenstaande grootheden M_S , N_S en I_{RS} , N_{RS} uitdrukkingen afleiden [11]. De multipool-potentiaal krijgt de vorm:

$$\varphi_{2m}(\alpha, \theta) = \left[e^{-(2m+1)\alpha} \sin(2m+1)\theta + \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{e^{-2m\alpha}}{2m} \sin 2m\theta + \frac{a_1 e^{-(2m+2)\alpha}}{2m+2} \sin(2m+2)\theta - \frac{3a_3}{2m+4} e^{-(2m+4)\alpha} \sin(2m+4)\theta \right\} \right] \quad (5.2.21)$$

$$m=1, 2, \dots$$

De corresponderende stroomfunctie wordt:

$$\psi_{2m}(\alpha, \theta) = \left[e^{-(2m+1)\alpha} \cos(2m+1)\theta - \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{e^{-2m\alpha}}{2m} \cos 2m\theta + \frac{a_1 e^{-(2m+2)\alpha}}{2m+2} \cos(2m+2)\theta - \frac{3a_3}{2m+4} e^{-(2m+4)\alpha} \cos(2m+4)\theta \right\} \right] \quad (5.2.22)$$

$$m=1, 2, \dots$$

(5.2.4) krijgt nu de gedaante:

$$\begin{aligned} & \left[\psi_0(\alpha=0, \theta) - \psi_0(\alpha=0, \frac{\pi}{2}) \right] \cos \sigma t + \left[\psi_s(0, \theta) - \psi_s(0, \frac{\pi}{2}) \right] \sin \sigma t + \\ & \cos \sigma t \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} \left[-\cos(2m+1)\theta - \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{2m} + \frac{a_1 \cos(2m+2)\theta}{2m+2} - \frac{3a_3 \cos(2m+4)\theta}{2m+4} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{\zeta_0 (-1)^{m+1}}{1+a_1+a_3} \left(\frac{1}{2m} - \frac{a_1}{2m+2} - \frac{3a_3}{2m+4} \right) \right] + \sin \sigma t \sum_{m=1}^{\infty} Q_{2m} \left[-\cos(2m+1)\theta - \right. \\ & \left. - \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{2m} + \frac{a_1 \cos(2m+2)\theta}{2m+2} - \frac{3a_3 \cos(2m+4)\theta}{2m+4} \right\} - \frac{\zeta_0 (-1)^{m+1}}{1+a_1+a_3} \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{1}{2m} - \frac{a_1}{2m+2} - \frac{3a_3}{2m+4} \right) \right] = \left(\frac{\sigma \pi}{8 \eta} \right) \frac{dx}{dt} M \left\{ (1-a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \right\} \quad (5.2.23) \end{aligned}$$

We kunnen nu op de gebruikelijke wijze $\frac{dx}{dt}$ elimineren. We zullen echter hier in overeenstemming met de door Tasai in zijn publicatie gevolgde methode voor $\frac{dx}{dt}$ een uitdrukking van de vorm (5.2.7) substitueren (zie opmerking aan het slot van §4.2). Definieren we:

$$x = x_a \cos(\sigma t + \gamma)$$

dan is:

$$\frac{dx}{dt} = -x_a \sigma \sin(\sigma t + \gamma) \quad (5.2.24)$$

Het rechterlid van (5.2.23) kan nu geschreven worden als:

$$\left(\frac{\sigma \pi}{gb}\right) \frac{dx}{dt} M \left\{ (1-a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \right\} = h(\theta) (P_0 \cos \sigma t + Q_0 \sin \sigma t) \quad (5.2.25)$$

waarbij:

$$h(\theta) = \frac{\left\{ (1-a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \right\}}{1+a_1+a_3} \quad (5.2.26)$$

$$P_0 = -\frac{\pi x_a}{b} \zeta_0 \sin \gamma; \quad Q_0 = -\frac{\pi x_a}{b} \zeta_0 \cos \gamma.$$

zodat we na gelijkstellen van coëfficiënten van $\cos \sigma t$ en $\sin \sigma t$ voor het systeem van vergelijkingen, waaruit we P_{2m} en Q_{2m} moeten bepalen, krijgen:

$$\begin{aligned} \psi_0(0, \theta) - \psi_0(0, \frac{\pi}{2}) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(\theta) P_{2m} \\ \psi_s(0, \theta) - \psi_s(0, \frac{\pi}{2}) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(\theta) Q_{2m} \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

waarbij:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= h(\theta) \\ f_{2m}(\theta) &= \cos(2m+1)\theta + \frac{\zeta_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\cos 2m\theta}{2m} + \frac{a_1 \cos(2m+2)\theta}{2m+2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3a_3 \cos(2m+4)\theta}{2m+4} \right\} + \frac{\zeta_0 (-1)^{m+1}}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{1}{2m} - \frac{a_1}{2m+2} - \frac{3a_3}{2m+4} \right\} \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

$m=1, 2, \dots$

Uit (5.2.25) volgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gb}{\pi \sigma Br} \left\{ P_0 \cos \sigma t + Q_0 \sin \sigma t \right\} \quad (5.2.29)$$

zodat:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{gb}{\pi Br} \left\{ Q_0 \cos \sigma t - P_0 \sin \sigma t \right\} \quad -5.10-$$

Voer de kracht op de cilinder in de x-richting krijgen we volgens (5.2.14):

$$F = 2 \rho Br \left(\frac{g b}{\pi} \right) \left\{ N_0 \sin \sigma t - M_0 \cos \sigma t \right\} \quad (5.2.30)$$

waarbij:

$$N_0 = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_0(0, \theta) \frac{(1-a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} d\theta - \frac{3a_3}{1+a_1+a_3} \cdot \frac{\pi}{4} P_2 -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} \frac{\varphi_0(-1)^{m-1}}{(1+a_1+a_3)^2} \left[\left\{ \frac{1}{4m^2-1} - \frac{a_1}{(2m+2)^2-1} - \frac{3a_3}{(2m+4)^2-1} \right\} (1-a_1) + \right.$$

$$\left. + 3a_3 \left\{ \frac{-1}{4m^2-9} + \frac{a_1}{(2m+2)^2-9} + \frac{3a_3}{(2m+4)^2-9} \right\} \right]$$

M_0 wordt verkregen door in bovenstaande vorm φ_0 te vervangen door φ_s en P_{2m} door Q_{2m} . Uit (5.2.29) en (5.2.30) kunnen we op de gebruikelijke wijze de toegevoegde massa en demping afleiden:

$$M_S = 2 \rho Br^2 \frac{N_0 P_0 + M_0 Q_0}{P_0^2 + Q_0^2} \quad (5.2.31)$$

$$N_S = 2 \rho \sigma Br^2 \frac{M_0 P_0 - N_0 Q_0}{P_0^2 + Q_0^2}$$

Door substitutie van (5.2.10) en (4.3.2) in (5.2.17) waarbij in de uitdrukking voor $M(1, \theta)$ en $N(1, \theta)$ voor φ_{2m} (5.2.21) gesubstitueerd moet worden, krijgen we voor het moment op de cilinder t.g.v. het verzetten:

$$M_{RS} = \frac{4 \rho Br^2 g b}{\pi} \left\{ X_R \sin \sigma t - Y_R \cos \sigma t \right\} \quad (5.2.32)$$

waarbij:

$$X_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi_s(0, \theta)}{(1+a_1+a_3)^2} \left\{ a_1(1+a_3) \sin 2\theta - 2a_3 \sin 4\theta \right\} d\theta +$$

$$+ \frac{\pi \varphi_0(a_1 P_2 - a_3 P_4)}{8(1+a_1+a_3)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{2m}(-1)^{m+1}}{(1+a_1+a_3)^2} \left\{ \frac{2a_1(1+a_3)}{(2m+1)^2-4} + \frac{8a_3}{(2m+1)^2-16} \right\}$$

I_R wordt verkregen door in bovenstaande uitdrukking φ_0 door φ_s en P_{2m} door Q_{2m} te vervangen. Het traagheidsmoment en dempingsmoment t.g.v. de verzetbeweging van de cilinder volgen nu uit (5.2.29), (5.2.32) en

(5.2.19):

$$I_{RS} = 4\rho Br^3 \frac{P_0 X_R + Q_0 Y_R}{P_0^2 + Q_0^2}$$

(5.2.33)

$$N_{RS} = 4\rho Br^3 \frac{P_0 Y_R - Q_0 X_R}{P_0^2 + Q_0^2}$$

5.3. Toegevoegd traagheidsmoment en demping bij slingeren; verzetkracht t.g.v. slingeren.

De randconditie op de cilinder, wanneer de cilinder harmonisch slingert om de oorsprong volgens $\psi = \psi_a \cos(\sqrt{\sigma} t + \gamma)$, wordt (Fig. 5.3.1):

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = R \frac{d\psi}{dt} \sin \varphi = R \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dR}{ds} \quad (5.3.1)$$

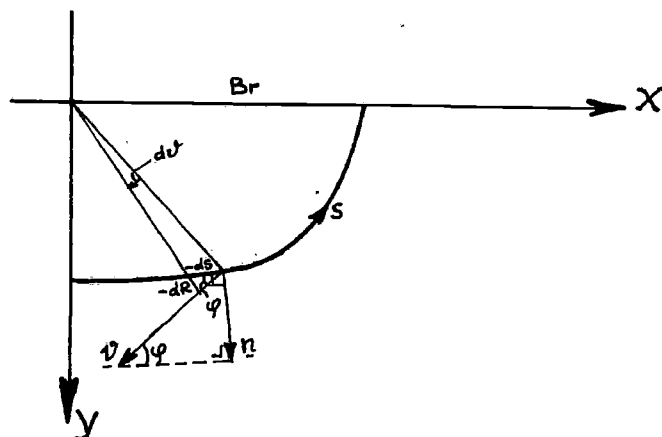


Fig. 5.3.1.

φ is de hoek tussen de raaklijn en de snelheid langs het oppervlak, ψ de slingerhoek (positief met de wijzers van het uurwerk) en R de voerstraal van de punten op het oppervlak. Met (4.2.9) wordt (5.3.1):

$$-\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{d\psi}{dt} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{2} (x^2(1, \theta) + y^2(1, \theta)) \right\} \quad (5.3.2)$$

zodat na integratie:

$$\psi(1, \theta) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \left\{ x^2(1, \theta) + y^2(1, \theta) \right\} + C(t) \quad (5.3.3)$$

Substitutie van $\theta = \frac{\pi}{2}$ geeft:

$$C(t) = \psi(1, \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) Br^2,$$

zodat:

$$\psi(1,0) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt} \left\{ x^2(1,0) + y^2(1,0) - Br^2 \right\} \quad (5.3.4)$$

Voor de verandering zullen we nu $\frac{d\psi}{dt}$ niet elimineren maar hiervoor $\frac{d\psi}{dt} = -\psi_a \sigma \sin(\sigma t + \gamma)$ substitueren (zie opmerking aan het slot van §4.2), zodat:

$$\psi(1,0) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \psi_a \sigma \sin(\sigma t + \gamma) \left\{ x^2(1,0) + y^2(1,0) - Br^2 \right\}$$

of:

$$\frac{\pi \sigma}{gb} \left\{ \psi(1,0) - \psi(1, \frac{\pi}{2}) \right\} = \frac{\pi \sigma}{gb} \frac{1}{2} \psi_a \sigma \left\{ x^2(1,0) + y^2(1,0) - Br^2 \right\} \sin(\sigma t + \gamma) \quad (5.3.5)$$

Het rechterlid van bovenstaande vorm schrijven we als:

$$g(\theta) (P_0 \cos \sigma t + Q_0 \sin \sigma t)$$

waarbij:

$$g(\theta) = \frac{x^2(1,0) + y^2(1,0) - Br^2}{Br^2}$$

$$P_0 = \frac{\pi \psi_a \sigma K Br^2}{2b} \sin \gamma \quad (5.3.6)$$

$$Q_0 = \frac{\pi \psi_a \sigma K Br^2}{2b} \cos \gamma$$

Substitutie van (5.1.13) in (5.3.5) en gelijkstellen van coëfficiënten van $\cos \sigma t$ en $\sin \sigma t$ geeft ons het stelsel vergelijkingen voor P_{2m} en Q_{2m} :

$$\begin{aligned} \psi_0(1,0) - \psi_0(1, \frac{\pi}{2}) &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m} f_{2m}(\theta) \\ \psi_{2m}(1,0) - \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) &= \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} f_{2m}(\theta) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

waarbij:

$$f_0 = g(\theta) = \frac{x^2(1,0) + y^2(1,0) - Br^2}{Br^2}$$

$$f_{2m} = \psi_{2m}(1, \frac{\pi}{2}) - \psi_{2m}(1,0), \quad m \neq 0$$

Uit (5.3.6) volgt:

$$\sqrt{P_o^2 + Q_o^2} = \frac{\pi \nu_a^2 K Br^2}{2b},$$

zodat voor de verhouding: $\frac{\text{golfamplitude in oneindig}}{\text{amplitude oscillatie van de cilinder}} :$

$$\frac{b}{\nu_a^2} = \frac{\pi K Br^2}{2\sqrt{P_o^2 + Q_o^2}} \quad (5.3.8)$$

Het hydrodynamisch moment (van de cilinder op de vloeistof), wordt:

$$M_R = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta}) d\theta$$

zodat:

$$M_R = \frac{2\rho g b Br^2}{\pi} \left\{ X_R \sin \sigma t - Y_R \cos \sigma t \right\} \quad (5.3.9)$$

waarbij X_R en Y_R op dezelfde manier gedefinieerd zijn als in 5.2 voor het verzetten. We kunnen $\frac{d\nu}{dt} = -\nu_a \sigma \sin(\sigma t + \gamma)$ m.b.v. (5.3.6) schrijven als:

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \nu_a \sigma (\sin \sigma t \cos \gamma + \cos \sigma t \sin \gamma) \\ &= \frac{2bK}{\pi \sigma Br^2} (-Q_o \sin \sigma t - P_o \cos \sigma t) \end{aligned}$$

De versnelling wordt:

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} = \frac{2bK}{\pi Br^2} (-Q_o \cos \sigma t + P_o \sin \sigma t)$$

We ontbinden M_R nu in een component in fase met de snelheid en een component in fase met de versnelling. Uit (5.3.9) en (5.3.10) volgt:

$$\begin{aligned} M_R &= \frac{2\rho g b Br^2}{\pi} \frac{Y_R Q_o + P_o X_R}{P_o^2 + Q_o^2} (-Q_o \cos \sigma t + P_o \sin \sigma t) + \\ &\quad \frac{2\rho g b Br^2}{\pi} \frac{-Q_o X_R + P_o Y_R}{P_o^2 + Q_o^2} (-Q_o \sin \sigma t - P_o \cos \sigma t) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

M.b.v. (5.3.10) schrijven we (5.3.11) als:

$$M_R = \rho Br^4 \frac{Y_R Q_o + P_o X_R}{P_o^2 + Q_o^2} \ddot{\nu} + \rho \sigma Br^4 \frac{P_o Y_R - Q_o X_R}{P_o^2 + Q_o^2} \dot{\nu} \quad (5.3.12)$$

Het toegevoegde traagheidsmoment wordt nu:

$$I_R = \int \rho Br^4 \frac{P_o X_R + Y_o Q_o}{P_o^2 + Q_o^2}$$

en de demping:

$$N_R = \int \rho Br^4 \frac{P_o Y_R - Q_o X_R}{P_o^2 + Q_o^2}$$

De verzetkracht op de cilinder t.g.v. het slingeren berekenen we met:

$$F_{SR} = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \sin \alpha \, d\alpha \quad (5.3.14)$$

Substitutie van (5.2.13) geeft:

$$F_{SR} = -2 Br \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p(1, \theta) V(\theta)}{g} d\theta \quad (5.3.15)$$

Substitutie van (5.2.10) geeft:

$$F_{SR} = \frac{2Br\rho gb}{\pi} (M_o \cos \sigma t - N_o \sin \sigma t) \quad (5.3.16)$$

waarbij:

$$M_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(1, \theta) \frac{V(\theta)}{g} d\theta \quad \text{en} \quad N_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(1, \theta) \frac{V(\theta)}{g} d\theta$$

We ontbinden (5.3.16) m.b.v. (5.3.10) volgens:

$$F_{SR} = - \rho Br^3 \frac{M_o Q_o + N_o P_o}{P_o^2 + Q_o^2} \ddot{z} - \rho Br^3 \sigma \frac{M_o P_o - N_o Q_o}{P_o^2 + Q_o^2} \dot{z} \quad (5.3.17)$$

De verzethoek t.g.v. slingeren komt in de gekoppelde bewegingsvergelijking voor verzetten voor in de vorm:

$$F_{SR} = M_{SR} \left(-\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + N_{SR} \left(-\frac{dz}{dt} \right) \quad (5.3.8)$$

Vergelijken van (5.3.17) en (5.3.18) geeft voor de toegevoegde massa en demping voor verzetten t.g.v. slingeren:

$$M_{SR} = \int Br^3 \frac{M_{\theta\theta} P_{\theta\theta} + N_{\theta\theta} P_{\theta\theta}}{P_{\theta\theta}^2 + Q_{\theta\theta}^2} \quad (5.3.19)$$

$$N_{SR} = \int Br^3 \sigma \frac{M_{\theta\theta} P_{\theta\theta} - N_{\theta\theta} Q_{\theta\theta}}{P_{\theta\theta}^2 + Q_{\theta\theta}^2}$$

Verder kunnen we door gelijkstellen van de door de golven uitgestraalde energie en de door de cilinder verrichte arbeid nog verifiëren, dat:

$$P_{\theta\theta} Y_R - Q_{\theta\theta} X_R = \frac{\pi^2}{8} \quad (5.3.20)$$

Tasai heeft in [11] bovenstaande berekeningen uitgevoerd voor een Lewis-doorsnede. Zijn resultaten kunnen uit bovenstaande formules worden afgeleid door voor ϕ_{2m} en ψ_{2m} resp. (5.2.21) en (5.2.22) te substitueren.

Literatuur.

1. Fil'chakeva, V.P.
"Conformal Mapping of Exterior Regions by the Method of Trigonometric Interpolation".
Prikladnaia Mekhanika, Vol. 1, No. 3, 1965.
Translation by R.D. Cooper, Report No. 143, Laboratorium voor Scheepsbouwkunde, Technische Hogeschool-Delft.
2. Havelock, T.H.
"Some Cases of Wave Motion Due to a Submerged Obstacle".
Proceedings of the Royal Society, A, Vol. 93; of the Collected Papers of Sir Thomas Havelock on Hydrodynamics; O.N.R./ACR-103.
3. Havelock, T.H.
"The Method of Images in Some Problems of Surface Waves",
Proceedings of the Royal Society, A, Vol. 115; of the Collected Papers of Sir Thomas Havelock on Hydrodynamics; O.N.R./ACR-103.
4. Kellog, O.D.
"Foundations of Potential Theory".
Frederick Ungar Publishing Company - New York.
5. Lamb, H.
"Hydrodynamics".
Dover Publications - New York.
6. Milne - Thomson, L.M.
"Theoretical Hydrodynamics".
Mac Millan & Co., Ltd. - London.
7. Porter, W.R.
"Pressure Distribution, Added Mass and Damping Coefficients for Cylinders Oscillating in a Free Surface".
University of California, Institute of Engineering Research, Series 82, 1960.
8. Prandtl, L. and Tietjens, O.G.
"Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics".
"Applied Hydro- and Aeromechanics".
Dover Publications, - New York.
9. Stoker, J.J.
"Water Waves".
Interscience publishers, Inc. - New York.