STUDIECENTRUM T. N. O.

VOOR SCHEEPSBOUW EN NAVIGATIE

SCHEEPSSNELHEID OP DE GEMETEN MIJL

DOOR

Ir. W. H. C. E. RÖSINGH
Hoofd-Ingenieur bij Wilton-Fijenoord

Overdruk uit „Schip en Werf" van 22 December 1950 No. 26 en 2 Februari 1951 No. 3
Uitgevers: Wyt - Rotterdam

SCHEEPSSNELHEID OP DE GEMETEN MIJL

DOOR

Ir. W. H. C. E. RÖSINGH
Hoofd-Ingenieur bij Wilton-Fijenoord

1. Algemene opmerkingen

Indien er op een gemeten mijl bv. aangegeven door bakens op het land een met de tijd variabele stroomsnelheid heerst en we maken een serie „runs", dan wordt voor elke „run" een andere schijnbare snelheid gevonden. Er is dan niet ineens te zeggen hoe groot de werkelijke scheepssnelheid is. Men behelpt zich dan voor de bepaling van deze snelheid met de klassieke methode der „means of means". Men bepaalt nl. eerst de gemiddelde snelheden der opeenvolgende „runs" en daarna weer de gemiddelden van deze gemiddelde snelheden totdat er tenslotte één gemiddelde overblijft welke men met de scheepssnelheid ten opzichte van het water identificeert.

Afgezien van het feit, dat de volgens deze methode berekende snelheid een beter resultaat levert dan het rekenkundig gemiddelde, kan deze methode onder bepaalde omstandigheden ook onjuiste resultaten opleveren.

Want neemt men bv. aan over 6 „runs" de 6 schijnbare snelheden V_1; V_2; ...... V_6 gevonden te hebben, dan wordt volgens dit rekenprocédé de scheepssnelheid V: (zie blz. 4).

$$V = \frac{V_1 + 5\,V_2 + 10\,V_3 + 10\,V_4 + 5\,V_5 + V_6}{32} \qquad (1,1)$$

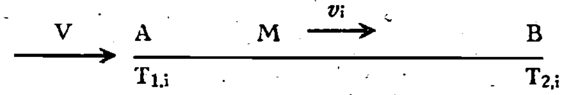
We herkennen in deze coëfficiënten de binomiaal coëfficiënten van Newton en merken op dat volgens (1,1) afgezien van de stroomsnelheden de invloed der metingen V_3 en V_4 10 maal zo groot is als die der eerste en laatste meting. Het is gebleken dat we volgens deze methode een verschillend resultaat kunnen krijgen afhankelijk van het feit of we de eerste „run" voor de stroom of tegen de stroom maken en dat het ook mogelijk is dat indien de tussenpozen tussen de „runs" verschillend zijn en voor een bekende stroomkromme bv. eens handig gekozen waren dat we dan een foutieve scheepssnelheid zouden kunnen berekenen. Daarbij kan bij een ander aantal „runs" weer een andere scheepssnelheid gevonden worden. Inderdaad zijn deze handigheden in de practijk al toegepast door bv. tussen de „runs" even ankerproeven te gaan doen totdat het tij voor een „run" gunstig gewijzigd was. Daarom is getracht een scherpere methode voor het bepalen der scheepssnelheid uit de gemeten tijden op de mijl te vinden, waarbij deze bezwaren niet optreden.

Onder par. 4 zullen we echter ook nagaan onder welke omstandigheden de „means of means" exact juist zijn.

Ogenschijnlijk lijkt het vreemd, dat het mogelijk is een scheepssnelheid te berekenen met proeven op stromend water, waarvan de stroomsnelheid onbekend is. We zullen echter zien dat zulks onder bepaalde beperkingen toch mogelijk is.

2. Bepaling der scheeps- en stroomsnelheid

Volgens bijgaande schets speelt de snelheidsproef zich tussen de punten A en B over een afstand van M mijl af met een stroomsnelheid v die afhankelijk van de tijd is.



V = scheepssnelheid in knopen
v_i = stroomsnelheid in knopen
T_{1i} = begintijd der i-e run
T_{2i} = eindtijd der i-e run
M = afstand tussen de bakens in nautische mijlen

De enige veronderstelling die wij maken is dat de stroomsnelheid uitgezet als functie van de tijd een glad strokende kromme geeft en natuurlijk ook dat er geen golven zijn en dat het windstil is.

We spreken hier opzettelijk niet over een continue functie omdat deze zeer fijne mathematische definitie nog veel te grillige krommen zou toelaten. In het geval van een zg. glad strokende kromme kunnen we dit functionaal verband ontwikkelen in een polynomium van t waarvan het aantal termen tot een redelijk aantal van zeg 5 is te beperken. Dit polynomium wordt dan bv.

$$v = p + q\,t + r\,t^2 + l\,t^3 + m\,t^4 \quad \ldots\ldots \quad (2,1)$$

Vaart het schip van A naar B dan legt de stroom in de tijd dat het schip tussen de bakens vaart een afstand $\triangle M_i$ af, nl.

$$\triangle M_i = \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} v\,dt = p(T_{2.i} - T_{1.i}) + \frac{1}{2}q(T^2_{2.i} - T^2_{1.i}) + \\ + \frac{1}{3}\,r(T^3_{2.i} - T^3_{1.i}) + \frac{1}{4}\,l(T^4_{2.i} - T^4_{1.i}) + \\ + \frac{1}{5}\,m(T^5_{2.i} - T^5_{1.i}) \quad \ldots\ldots \quad (2,2)$$

De scheepssnelheid is dan:

$$V = \frac{M - \triangle M_i}{T_{2.i} - T_{1.i}} \text{ of:}$$

$$V(T_{2.i} - T_{1.i}) - M \pm \triangle M_i = 0 \;:\; i = 1,2, \ldots, n$$

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ als „run" van } A \rightarrow B \\ - \text{ als „run" van } B \rightarrow A \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2,3)$$

Elke „run" geeft dus één in de onbekenden V; p; q; r; l, ...; lineaire vergelijking van het type (2,3) waarvan de bekende coëfficiënten uit (2,2) volgen. Indien de stroomsnelheid zich als een „m" graads polynomium van de tijd laat ontwikkelen, heeft elke vergelijking (2,3) in verband met (2,1), m + 2 onbekenden en we moeten dus voor het oplossen van de onbekenden uit deze verg. steeds 2 „runs" meer maken dan de graad van het polynomium, hetwelk gedurende het tijdsverloop van alle gemaakte „runs" het verband tussen stroomsnelheid en tijd voldoende kan benaderen.

Is dus bv. de stroom in het beschouwde tijdsinterval een 3e graads functie van de tijd dan zijn 5 „runs" voldoende en zijn uit een oogpunt van tijdsbesparing meerdere „runs" overbodig. Over het algemeen zal echter het stroomverloop over de paar uur die men voor de bepaling van één snelheid nodig heeft beter door een 4e graads kromme benaderd worden, zodat dan 6 „runs" noodzakelijk zijn.

3. Voorbeeld der berekeningsmethode

In het boek Weerstand en Voortstuwing geeft Ir. Koning een voorbeeld waarvan behalve de tijden der „runs" ook de scheepssnelheid en stroomsnelheden gegeven zijn. Door thans slechts gebruik te maken van de gegeven 6 begin- en eindtijden der 6 „runs" is in de bijlage de scheepssnelheid en stroomsnelheid berekend. Als eliminatiemethode is de methode van Gauss gebruikt. Opmerkelijk is de grotere nauwkeurigheid van het resultaat dan volgens de gegeven methode der „means of means", benevens de overeenkomst tussen de berekende stroomsnelheden en die welke in het voorbeeld werden aangenomen.

Dit systeem van berekening werkt dus beter dan de „means of means" en is onafhankelijk van eventueel ongelijke tijdsintervallen tussen de proeven. Het bezwaar is echter dat het rekenwerk veel groter is dan volgens de „means of means" gegeven in formule (1,1) hoewel dit met een rekenmachine

VOORBEELD* M = 1 MIJL.

i	V kn	$T_{2,i}-T_{1,i}$	T_i uur	T_i^2	T_i^3	T_i^4	T_i^5
1	12,00	0,08333	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
			0,08333	0,00694	0,00058	0,00005	0,00000
2	17,93	0,05577	0,50000	0,25000	0,12500	0,06250	0,03125
			0,55577	0,30888	0,17167	0,09541	0,05302
3	12,40	0,08065	1,16667	1,36112	1,58798	1,85264	2,16143
			1,24732	1,55581	1,94059	2,42054	3,01918
4	17,20	0,05814	1,58333	2,50693	3,96930	6,28472	9,95078
			1,64147	2,69442	4,42282	7,25992	11,91694
5	13,82	0,07236	2,25000	5,06250	11,39063	25,62891	57,66504
			2,32236	5,39336	12,52531	29,08829	67,55348
6	14,00	0,06757	2,86667	8,21780	23,55772	67,53221	193,59256
			2,93424	8,60976	25,26312	74,12804	217,50947

i	$T_{2,i}-T_{1,i}$	$\frac{T_{2,i}^2-T_{1,i}^2}{2}$	$\frac{T_{2,i}^3-T_{1,i}^3}{3}$	$\frac{T_{2,i}^4-T_{1,i}^4}{4}$	$\frac{T_{2,i}^5-T_{1,i}^5}{5}$
1	0,08333	0,00347	0,00019	0,00001	0,00000
2	0,05577	0,02944	0,01556	0,00823	0,00435
3	0,08065	0,09735	0,11754	0,14198	0,17155
4	0,05814	0,09375	0,15117	0,24380	0,39323
5	0,07236	0,16543	0,37823	0,86485	1,97769
6	0,06757	0,19598	0,56847	1,64896	4,78338

DE VERGELIJKINGEN WORDEN:

$$0{,}08333V - 1 - 0{,}08333p - 0{,}00347q - 0{,}00019r - 0{,}00001l = 0$$
$$0{,}05577V - 1 + 0{,}05577p + 0{,}02944q + 0{,}01556r + 0{,}00823l + 0{,}00435m = 0$$
$$0{,}08065V - 1 - 0{,}08065p - 0{,}09735q - 0{,}11754r - 0{,}14198l - 0{,}17155m = 0$$
$$0{,}05814V - 1 + 0{,}05814p + 0{,}09375q + 0{,}15117r + 0{,}24380l + 0{,}39323m = 0$$
$$0{,}07236V - 1 - 0{,}07236p - 0{,}16543q - 0{,}37823r - 0{,}86485l - 1{,}97769m = 0$$
$$0{,}06757V - 1 + 0{,}06757p + 0{,}19598q + 0{,}56847r + 1{,}64896l + 4{,}78338m = 0$$

OF ALGEMEEN:

$$a_0^r + a_1^r V + a_2^r p + a_3^r q + a_4^r r + a_5^r l = 0 \qquad r = 1 \to 6.$$

* ZIE „WEERSTAND EN VOORTSTUWING" BLZ. 328.

* OPLOSSING VAN DE VERGELIJKINGEN MET DE VERKORTE ELIMINATIEMETHODE VAN GAUSS.

	a_1^r	a_2^r	a_3^r	a_4^r	a_5^r	a_6^r	a_0^r
$a^1 = \mathrm{I}$	+0,08333	−0,08333	−0,00347	−0,00019	−0,00001	0,00000	−1,00000
a^2	+0,05577	+0,05577	+0,02944	+0,01556	+0,00823	+0,00435	−1,00000
a^3	+0,08065	−0,08065	−0,09735	−0,11754	−0,14198	−0,17155	−1,00000
a^4	+0,05814	+0,05814	+0,09375	+0,15117	+0,24380	+0,39323	−1,00000
a^5	+0,07236	−0,07236	−0,16543	−0,37823	−0,86485	−1,97769	−1,00000
a^6	+0,06757	+0,06757	+0,19598	+0,56847	+1,64896	+4,78338	−1,00000
$'a^2 = -\frac{0,05577}{0,08333} \cdot \mathrm{I}$		+0,05577	+0,00232	+0,00013	+0,00001	0,00000	+0,66926
$'a^3 = -\frac{0,08065}{0,08333} \cdot \mathrm{I}$		+0,08065	+0,00336	+0,00018	+0,00001	0,00000	+0,96784
$'a^4 = -\frac{0,05814}{0,08333} \cdot \mathrm{I}$		+0,05814	+0,00242	+0,00013	+0,00001	0,00000	+0,69771
$'a^5 = -\frac{0,07236}{0,08333} \cdot \mathrm{I}$		+0,07236	+0,00301	+0,00016	+0,00001	0,00000	+0,86835
$'a^6 = -\frac{0,06757}{0,08333} \cdot \mathrm{I}$		+0,06757	+0,00281	+0,00015	+0,00001	0,00000	+0,81087
$\Sigma a^2 = \mathrm{II}$		+0,11154	+0,03176	+0,01569	+0,00824	+0,00435	−0,33074
$''a^3 = -\frac{0}{0,11164} \cdot \mathrm{II}$			0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$''a^4 = -\frac{0,11628}{0,11154} \cdot \mathrm{II} = -1,04250 \cdot \mathrm{II}$			−0,03311	−0,01636	−0,00859	−0,00453	+0,34480
$''a^5 = -\frac{0}{0,11164} \cdot \mathrm{II}$			0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$''a^6 = -\frac{0,13514}{0,11154} \cdot \mathrm{II} = -1,21158 \cdot \mathrm{II}$			−0,03848	−0,01901	−0,00998	−0,00527	+0,40072
$\Sigma a^3 = \mathrm{III}$			−0,09399	−0,11736	−0,14197	−0,17155	−0,03216
$'''a^4 = +\frac{0,06306}{0,09399} \cdot \mathrm{III} = +0,67092 \cdot \mathrm{III}$				−0,07874	−0,09525	−0,11510	−0,02158
$'''a^5 = -\frac{0,16242}{0,09399} \cdot \mathrm{III} = -1,72806 \cdot \mathrm{III}$				+0,20281	+0,24533	+0,29645	+0,05557
$'''a^6 = +\frac{0,16031}{0,09399} \cdot \mathrm{III} = +1,70561 \cdot \mathrm{III}$				−0,20017	−0,24215	−0,29260	−0,05485
$\Sigma a^4 = \mathrm{IV}$				+0,05620	+0,13997	+0,27360	+0,02093
$^{IV}a^5 = +\frac{0,17526}{0,05620} \cdot \mathrm{IV} = +3,11851 \cdot \mathrm{IV}$					+0,43650	+0,85322	+0,06527
$^{IV}a^6 = -\frac{0,34944}{0,05620} \cdot \mathrm{IV} = -6,21779 \cdot \mathrm{IV}$					−0,87030	−1,70119	−0,13014
$\Sigma a^5 = \mathrm{V}$					−0,18301	−0,82802	−0,01081
$^{V}a^6 = +\frac{0,52664}{0,18301} \cdot \mathrm{V} = +2,87711 \cdot \mathrm{V}$						−2,38230	−0,03110
$\Sigma a^6 = \mathrm{VI}$						+0,40202	−0,00450

$$m = \frac{-0{,}00450}{-0{,}40202} = +\underline{0{,}01119}$$

$$l = \frac{-0{,}01081 - 0{,}82802 \cdot 0{,}01119}{+0{,}18301} = -\underline{0{,}10972}$$

$$r = \frac{+0{,}02093 + 0{,}2736 \cdot 0{,}01119 - 0{,}13997 \cdot 0{,}10972}{-0{,}05620} = -\underline{0{,}15356}$$

$$q = \frac{-0{,}03216 - 0{,}17155 \cdot 0{,}01119 + 0{,}14197 \cdot 0{,}10972 + 0{,}11736 \cdot 0{,}15356}{+0{,}09399} = -\underline{0{,}00511}$$

$$p = \frac{-0{,}33074 + 0{,}00435 \cdot 0{,}01119 - 0{,}00824 \cdot 0{,}10972 - 0{,}01569 \cdot 0{,}15356 - 0{,}03176 \cdot 0{,}00511}{-0{,}11154} = +\underline{2{,}99588}$$

$$V = \frac{-1 + 0{,}00001 \cdot 0{,}10972 + 0{,}00019 \cdot 0{,}15356 + 0{,}00347 \cdot 0{,}00511 - 0{,}08333 \cdot 2{,}99588}{-0{,}08333} = +\underline{14{,}99580}$$

* ZIE: HANDBUCH DER VERMESSUNGSKUNDE – W. JORDAN, BD. 1. 7e AUFL. STUTTGART, 1920.
RAHMENTRAGWERKE UND DURCHLAUFTRÄGER – R. GULDAN. JULIUS SPRINGER, WIEN, 1940.

voor vermenigvuldigen zeer bekort kan worden. Van persoonlijk inzicht zal het afhangen of men de methode van Gauss voor het oplossen der vergelijkingen gebruikt, of dat men van de eenvoudige algemeen bekende eliminatiemethode gebruik maakt. Deze laatste vraagt iets meer schrijfwerk maar is overzichtelijker.

Aangezien de stroomsnelheid ons over het algemeen niet bijzonder zal interesseren verkrijgt men de scheepssnelheid waarschijnlijk het eenvoudigste door de vijf onderste vergelijkingen van het voorbeeld met factoren te vermenigvuldigen die de coëfficiënten der onbekende m gelijk 1 maken. Na eliminatie van m herhaalt men deze bewerking voor de coëfficiënten van l, en gaat zo voort tot V gevonden is. Bij gebruik van een rekenmachine voor vermenigvuldigen werkt men volgens deze methode zeer eenvoudig en overzichtelijk, alleen met meer schrijfwerk dan met de methode volgens Gauss.

We merken nog op dat voor de berekening van de snelheid volgens deze methode, behalve de verstreken tijden voor elke „run" ook het begintijdstip van elke „run" bepaald moet worden. De methode der „means of means" heeft slechts de tijd nodig die gedurende elke afzonderlijke „run" verstreken is.

De oorzaak dat ook deze berekening nog een fout van 0,0042 kn geeft, die weliswaar in dit geval een factor 10 kleiner is dan volgens de „means of means", is dat deze stroomsnelheid blijkbaar nog niet voldoende nauwkeurig in de 4e graads kromme geanalyseerd kan worden. Het is nl. mogelijk een 4e graads kromme door 5 basispunten te doen gaan. Een 6e basispunt zal dan algemeen niet meer op deze kromme liggen.

Volgens het gerekende voorbeeld, zie blz. 5, blijken de berekende stroomsnelheden zich met zeer kleine verschillen tussen de gegeven waarden door te slingeren.

4. De methode volgens de „means of means"

We willen nu nagaan welke voorwaarden aan de gegevens voor de „means of means" zijn te stellen opdat een exact resultaat wordt verkregen en we stellen hiertoe even het berekeningsschema van deze methode op voor 6 „runs".

$V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5,\ V_6$

$$\frac{V_1+V_2}{2},\quad \frac{V_2+V_3}{2},\quad \frac{V_3+V_4}{2},\quad \frac{V_4+V_5}{2},\quad \frac{V_5+V_6}{2}$$

$$\frac{V_1+2V_2+V_3}{4},\quad \frac{V_2+2V_3+V_4}{4},\quad \frac{V_3+2V_4+V_5}{4},\quad \frac{V_4+2V_5+V_6}{4}$$

$$\frac{V_1+3V_2+3V_3+V_4}{8},\quad \frac{V_2+3V_3+3V_4+V_5}{8},\quad \frac{V_3+3V_4+3V_5+V_6}{8}$$

$$\frac{V_1+4V_2+6V_3+4V_4+V_5}{16},\quad \frac{V_2+4V_3+6V_4+4V_5+V_6}{16}$$

$$\frac{V_1+5V_2+10V_3+10V_4+5V_5+V_6}{32}$$

Hierin zijn dus V_1; V_2; .... V_n de schijnbare scheepssnelheden die men verkrijgt door de afstand tussen de bakens te delen door de tijden die per „run" gemaakt worden.

DE STROOMSNELHEDEN VOLGEN UIT DE VERGELIJKING:

$$v = p + qt + rt^2 + lt^3 + mt^4$$

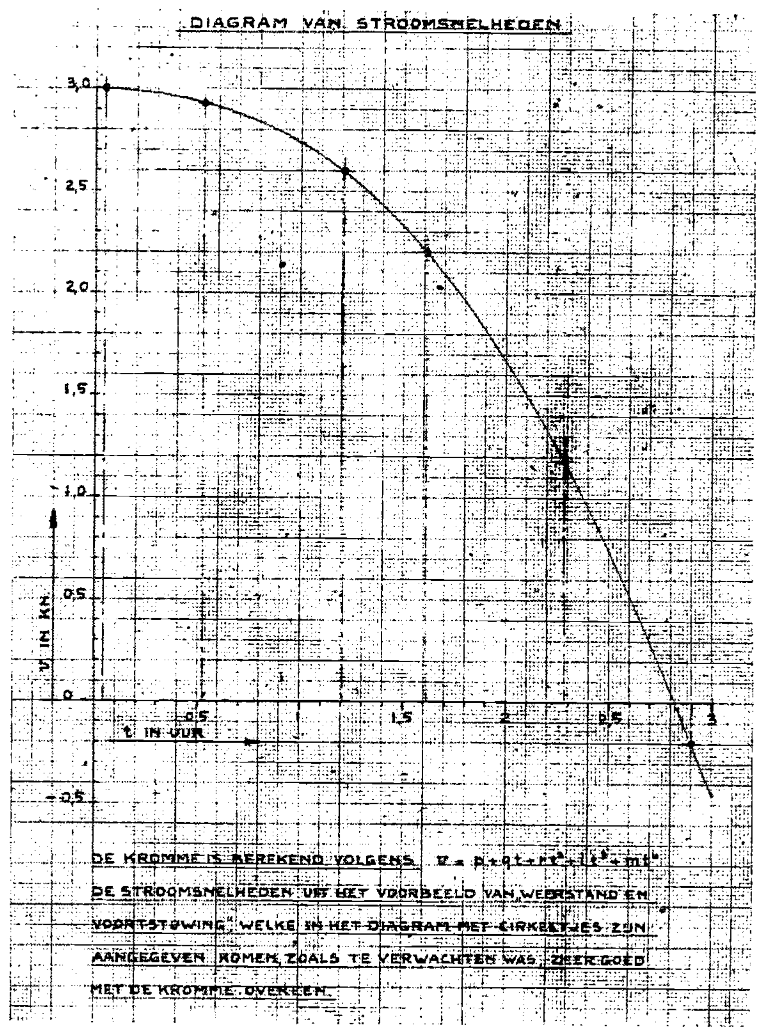
t	$p + qt + rt^2 + lt^3 + mt^4 = v$
0	2,9959 = 2,996 KN.
½	2,9959 − 0,0026 − 0,0384 − 0,0137 + 0,0007 = 2,942 "
1	2,9959 − 0,0051 − 0,1536 − 0,1097 + 0,0112 = 2,739 "
1½	2,9959 − 0,0077 − 0,3455 − 0,3703 + 0,0567 = 2,329 "
2	2,9959 − 0,0102 − 0,6142 − 0,8778 + 0,1790 = 1,673 "
2½	2,9959 − 0,0128 − 0,9598 − 1,7144 + 0,4371 = 0,746 "
3	2,9959 − 0,0153 − 1,3820 − 2,9624 + 0,9064 = −0,458 "

ALS STROOMSNELHEDEN VOOR DE TIJDSTIPPEN OP DE HELFT VAN DE TIJD VAN DE RUNS VINDEN WIJ DAN VOLGENS BIJGAAND DIAGRAM, UITGEZET VOLGENS DE CIJFERS VAN BOVENSTAANDE TABEL.:

RUN		t	v
1	$\frac{0,08333}{2}$ =	0,04167	3,00 KN
2	$\frac{0,50000 + 0,55577}{2}$ =	0,52789	2,94 "
3	$\frac{1,16667 + 1,24732}{2}$ =	1,20700	2,60 "
4	$\frac{1,58333 + 1,64147}{2}$ =	1,61240	2,21 "
5	$\frac{2,25000 + 2,32236}{2}$ =	2,28618	1,18 "
6	$\frac{2,86667 + 2,93424}{2}$ =	2,90046	−0,19 "

ALS WIJ DEZE STROOMSNELHEDEN UIT DE FORMULE BEREKENEN EN VERGELIJKEN MET DE STROOMSNELHEDEN UIT HET VOORBEELD VAN „W. EN V." DAN VOLGEN DE AFWIJKINGEN UIT DE VOLGENDE TABEL.:

RUN	v BEREKEND	v VOORBEELD*	VERSCHIL
1	2,9954 KN	3,00 KN	−0,0046 KN
2	2,9351 "	2,93 "	+0,0051 "
3	2,5970 "	2,60 "	−0,0030 "
4	2,2061 "	2,20 "	+0,0061 "
5	1,1778 "	1,18 "	−0,0022 "
6	−0,1927 "	−0,20 "	+0,0073 "



Algemeen vindt men dan dus voor de scheepssnelheid:

$$V = \frac{V_1 + \binom{n-1}{1} V_2 + \binom{n-1}{2} V_3 + \ldots\ldots + \binom{n-1}{n-2} V_{n-1} + V_n}{2^{n-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{i-1} V_i}{2^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4,1)$$

waarin de factor $\binom{n-1}{i-1}$ de binomiaal coëfficiënten voorstellen.

We wijzen er even op dat de berekening van de snelheid volgens de „means of means" met form: (4,1) veel vlugger gaat dan volgens het schema. Want voor het genoemde voorbeeld berekenen we voor n = 6 vinden we:

$$\left.\begin{array}{rl} V_1 = & 12{,}00 \text{ kn} \\ 5\ V_2 = & 89{,}65\ \text{,,} \\ 10\ V_3 = & 124{,}00\ \text{,,} \\ 10\ V_4 = & 172{,}00\ \text{,,} \\ 5\ V_5 = & 69{,}10\ \text{,,} \\ V_6 = & 14{,}80\ \text{,,} \end{array}\right\}$$

Zie blz. 567 bovenste tabel links, 2e kolom voor de snelheden V_i

$$481{,}55 \text{ kn en dus is } V = \frac{481{,}55}{32} = 15{,}048 \text{ kn}$$

De schijnbare snelheid V_i is:

$$V_i = V \pm v_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4,2)$$

Indien men (4,1) verkort opschrijft en daarin (4,2) substitueert, krijgt men:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{i-1} \{V + (-1)^i v_i\}}{2^{n-1}} = V \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^{n-1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} \binom{n-1}{i-1} v_i; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4,3)$$

Aangezien men bv. door proberen direct ziet dat het eerste Σ-teken achter het tweede gelijk-teken 1 als som heeft, vordert het exact uitkomen der methode der „means of means" dus slechts dat de tweede som verdwijnt, dus dat:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n-1}{i-1} v_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4,4)$$

of uitgeschreven bv. voor n = 6

$$-v_1 + \binom{5}{1} v_2 - \binom{5}{2} v_3 + \binom{5}{3} v_4 - \binom{5}{4} v_5 + v_6 =$$

$$= -v_1 + 5\,v_2 - 10\,v_3 + 10\,v_4 - 5\,v_5 + v_6 = 0$$

Noodzakelijk en voldoende voor het exact uitkomen der methode der „means of means" is dus dat de reeks volgens form (4,4) nul tot som heeft. Bij deze uitspraak zijn beperkingen omtrent de volgorde en het tijdstip der „runs" benevens beperkingen omtrent het functionaal verband tussen de stroomsnelheid en de tijd overbodig.

Meer in het bijzonder blijkt de methode der „means of means" de stroomsnelheid te elimineren indien deze wordt toegepast op gelijke tijdsintervallen indien de graad van het polynomium waarin de stroomsnelheid zich als functie der tijd laat ontwikkelen 2 lager is dan het aantal „runs". Noemen we het tijdsverschil tussen het begin van twee opeenvolgende „runs" δ dan is volgens (2,1) de gemiddelde stroomsnelheid der 1e run:

$$v_i = p + q\{t + (i-1)\,\delta\} + r\{t + (i-1)\,\delta\}^2 +$$
$$+ l\{t + (i-1)\,\delta\}^3 + m\{t + (i-1)\,\delta\}^4 \quad \ldots \quad (4,5)$$

Onder genoemde beperkingen en substitutie van (4,5) in (4,4) laat zich de juistheid dezer opmerking het eenvoudigst aantonen door bv. deze sommen voor n = 6 op te schrijven en de zo ontstane kolommen te sommeren nl.:

$$
\begin{array}{rcl}
-\ v_1 & = & -\ p - q\,t - r\,t^2 - l\,t^3 - m\,t^4 \\
+\ 5v_2 & = & +\ 5p + 5q(t+\delta) + 5r(t+\delta)^2 + 5l(t+\delta)^3 + 5m(t+\delta)^4 \\
-10v_3 & = & -10p - 10q(t+2\delta) - 10r(t+2\delta)^2 - 10l(t+2\delta)^3 - 10m(t+2\delta)^4 \\
+10v_4 & = & +10p + 10q(t+3\delta) + 10r(t+3\delta)^2 + 10l(t+3\delta)^3 + 10m(t+3\delta)^4 \\
-\ 5v_5 & = & -\ 5p - 5q(t+4\delta) - 5r(t+4\delta)^2 - 5l(t+4\delta)^3 - 5m(t+4\delta)^4 \\
+\ v_6 & = & +\ p + q(t+5\delta) + r(t+5\delta)^2 + l(t+5\delta)^3 + m(t+5\delta)^4 \\
\hline
\sum_1^6 & = & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0
\end{array}
$$

In dit geval verdwijnt de genoemde som blijkbaar.

Zodra echter de graad van het polynomium niet juist 2 of meer lager is dan het aantal „runs" blijft er een rest over en levert de „means of means" niet meer exact de snelheid, terwijl de tijdsintervallen toch nauwkeurig gelijk kunnen zijn.

We nemen nu eens aan, dat we 5 „runs" bij gelijke tijdsintervallen hebben genomen en de stroomsnelheid voldoende benaderd kan worden door een 3e graad kromme. Het zal dan ondanks de voorgaande beschouwing toch nog even vreemd aandoen, dat dan met de „means of means" dezelfde en exact juiste scheepssnelheid gevonden wordt, of men de eerste „run" vóór of tegen de stroom neemt. In het eerste geval vaart men 3 maal vóór en 2 maal tegen de stroom, in het laatste geval 3 maal tegen en 2 maal vóór en toch wordt daardoor de volgens de „means of means" berekende scheepssnelheid niet beïnvloed.

Het volgende voorbeeld van een lineair stroomverloop met de tijd en gelijke tijdsintervallen bevestigt de opmerking.

Scheepssnelheid 15 kn., eerste „run" tegen de stroom.

„Run" No.	Stroomsnelh. in kn.	Schijnbare scheepssnelh. in kn.				
1	5	10				
			14,5			
2	4	19		15,0		
			15,5		15,0	
3	3	12		15,0		$\boxed{15,0}$
			14,5		15,0	
4	2	17		15,0		
			15,5			
5	1	14				

$$\frac{72}{5} = 14,4 \text{ kn.}$$

Scheepssnelheid 15 kn., eerste „run" vóór de stroom.

„Run" No.	Stroomsnelh. in kn.	Schijnbare scheepssnelh. in kn.				
1	5	20				
			15,5			
2	4	11		15,0		
			14,5		15,0	
3	3	18		15,0		$\boxed{15,0}$
			15,5		15,0	
4	2	13		15,0		
			14,5			
5	1	16				

$$\frac{78}{5} = 15,6 \text{ kn.}$$

Zeer tegen de verwachting in wordt dus volgens beide methoden exact de juiste snelheid gevonden, terwijl de gemiddelde snelheid één maal 0,6 kn te weinig en in het andere geval 0,6 kn te veel snelheid geeft.

5. Toepassing der methode bij onderling verschillende scheepssnelheden

In het voorgaande is er van uitgegaan één bepaalde constante scheepssnelheid te bepalen uit een serie metingen op de gemeten mijl bij variërende stroomsnelheid.

De heer J. Gerritsma, assistent aan de afdeling Scheepsbouwkunde der Technische Hoogeschool, merkt op, dat het aangegeven systeem ook van toepassing is op twee verschillende scheepssnelheden, en dat bv. bij 8 runs vóór 2 verschillende scheepssnelheden de stroomkromme bepaald kan worden door een 5e-graads polynomium.

Men kan echter, indien men dit systeem wil betrekken op verschillende snelheden, formule (2.3) algemener als volgt schrijven:

$$V_j\,(T_{2.i} - T_{1.i}) - M - (-1)^i \triangle M_i = 0; \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (5.1)$$

en zodoende in principe alle metingen van een proeftocht in één berekenings-systeem betrekken, waaruit de stroom-kromme en de scheepssnelheidskromme is te berekenen.

Is nu „g" de graad van het polynomium, dan bestaat het verband:

$$g = i - j - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.2)$$

Is bv. $i = 8$ en $j = 2$, dan is de graad van het polynomium inderdaad 5. Maar wij hebben dan ook 8 lineaire vergelijkingen met evenveel onbekenden.

Men zou ook bv. voor 6 verschillende snelheden per snelheid 2 runs kunnen maken, dus $i = 12$; $j = 6$ en dus zou de graad van het polynomium eveneens 5 zijn en had men tegelijk de gehele snelheidskromme van het schip, evenwel met 12 vergelijkingen.

Ook een aantal andere combinaties is mogelijk, bv.

j	i	
1	1, 2, 3, 4	waaruit weer voor „g" volgt
2	5, 6, 7	$g = 10 - 4 - 1 = 5$
3	8, 9	
4	10	

Men moet zich echter de toename van het rekenwerk niet ontveinzen bij het stijgen van het aantal vergelijkingen.

Indien „n" het aantal onbekenden is, is het aantal getallen in de kolommen van de rechter tabel van blz. 4.

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2 + (n + 1)\,n$$

Dus voor:

n =	is het aantal getallen
4	49
5	84
6	132
7	195
8	275
9	374
10	494
11	637
12	805

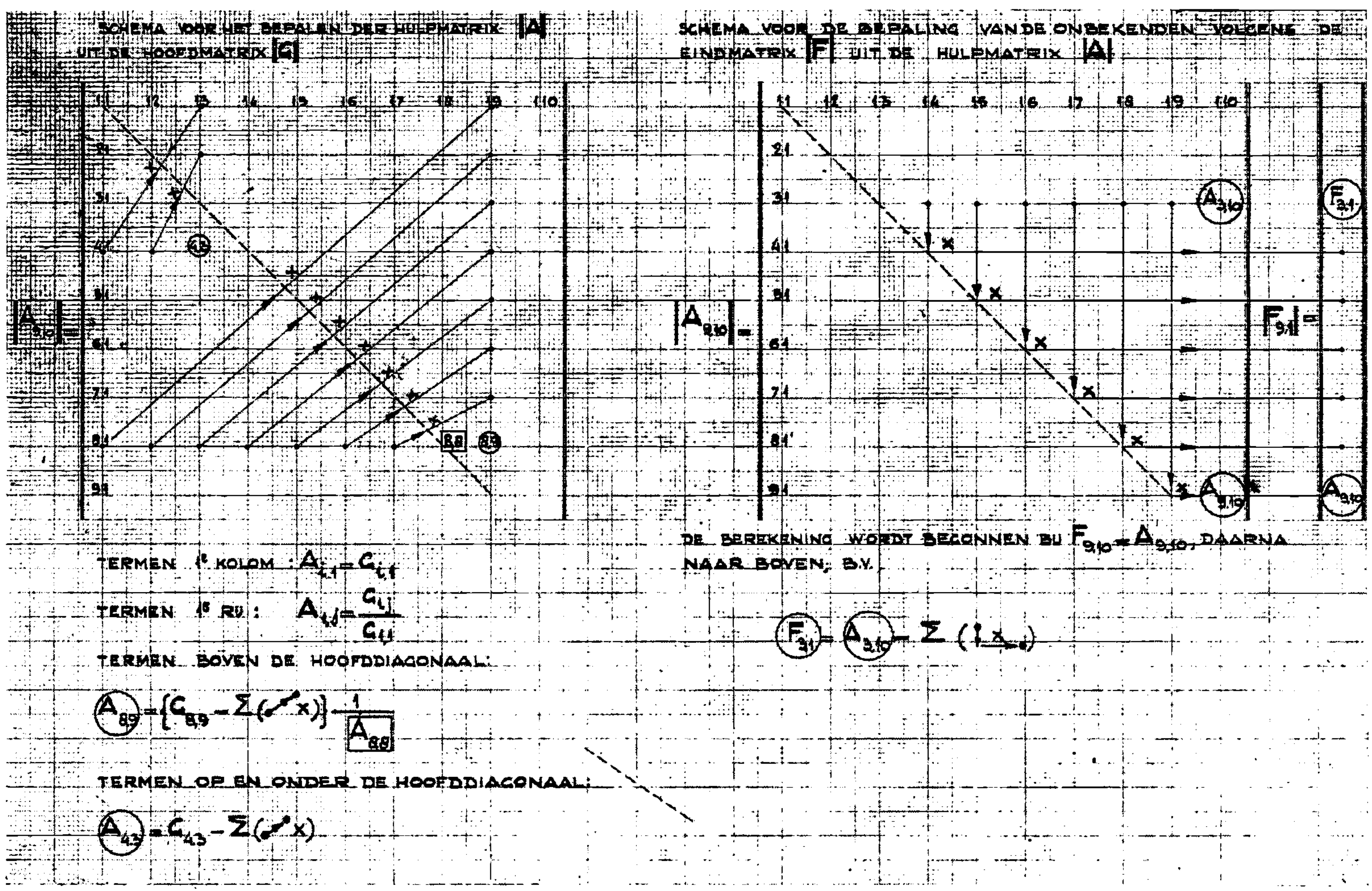
Indien men dus het aantal vergelijkingen van 6 tot 8 laat stijgen, wordt het rekenwerk meer dan tweemaal zo groot, en daarmee de mogelijkheid van fouten maken. Men zal dus zo zuinig mogelijk met het aantal vergelijkingen zijn.

Voor het geval dat het gaat om de contrôle van een sleepkromme, zou het de moeite lonen eens te proberen eens met 12 runs het gehele snelheidsverloop te bepalen, mits men tenminste niet opziet tegen het vrij grote rekenwerk om 12 onbekenden uit 12 vergelijkingen zonder fouten op te lossen. Het rekenwerk hiervoor zal echter circa 7 × de tijd vorderen van de vorige berekeningstabel.

6. Een eenvoudige methode voor het oplossen van „n" lineaire vergelijkingen met „n" onbekenden

Dit vraagstuk, hetwelk nog steeds zoveel moeilijkheden geeft en toch zo dikwijls voorkomt, bv. bij sterkteberekening, waarschijnlijkheidsberekening, het berekenen van krommen die aan een zeker aantal voorwaarden voldoen en vele anderen, duikt ook thans hier weer op bij de bepaling der scheepssnelheid op de gemeten mijl.

Na beëindiging van het rekenwerk voor het gegeven voorbeeld kwam ik in aanraking met de buitengewoon handige en overzichtelijke methode van Prof. Prescott D. Crout, hoog-



leraar in de wiskunde aan het „Massachusetts Institute of Technology", Cambridge. Zijn publicatie „Short method for Evaluating Determinants and Solving Systems of Linear Equations with Real or Complex Coefficients", is openbaar gemaakt op „the summer meeting 1941 of the American Institute of Electrical Engineers".

Deze methode is belangrijk korter dan de verfijnde methode van Gauss, die op haar beurt weer beter is dan de bekende methode met determinanten.

Zonder op de bewijsvoering te willen ingaan, dewelke in genoemde publicatie is gegeven, zullen we toch de resultaten even aangeven benevens een overzichtelijk schema van de bewerkingsmethode.

Prof. Prescott D. Crout gaat uit van de hoofdmatrix $\|G_{ij}\|$ der bekende coëfficiënten van de gegeven vergelijking en vervormt deze door zekere bewerkingen tot een hulpmatrix $\|A_{ij}\|$, waaruit de oplossing der onbekenden volgt in de vorm van een éénkolommige eindmatrix $\|F_{i1}\|$. Gegeven zijn dus bv. de volgende „n" vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} G_{11}\,x_1 + G_{12}\,x_2 + G_{13}\,x_3 + \ldots + G_{1.n}\,x_n = G_{1.n+1} \\ G_{21}\,x_1 + G_{22}\,x_2 + G_{23}\,x_3 + \ldots + G_{2.n}\,x_n = G_{2.n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{n.1}\,x_1 + G_{n.2}\,x_2 + G_{n.3}\,x_3 + \ldots + G_{n.n}\,x_n = G_{n.n+1} \end{array}\right\} \quad (6{,}1)$$

Samengevat in één formule worden deze „n" vergelijkingen:

$$\left.\sum_{j=1}^{n} G_{ij}\,x_j = G_{i.n+1}; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n; \right\} (6.1)$$

Deze bekende coëfficiënten G_{ij} worden voor $i = 1, 2, \ldots, 5$; $j = 1, 2, \ldots, 5$ op de volgende wijze in een tabel opgeschreven, die men matrix noemt. In deze matrix is het symbool, G, hetwelk eigenlijk steeds herhaald moet worden, ter wille van de overzichtelijkheid weggelaten en er boven geschreven, terwijl in de tabel alleen de indices zijn opgeschreven. De hoofdmatrix $\|G_{5.6}\|$, de hulpmatrix $\|A_{5.6}\|$ en de eindmatrix $\|F_{5.1}\|$ zien er dan als volgt uit:

$$\|G_{5.6}\| \qquad\qquad\qquad \|A_{5.6}\| \qquad\qquad\qquad \|F_{5.1}\|$$

$$\left\|\begin{array}{cccccc} 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}6 \\ 2{,}1 & 2{,}2 & 2{,}3 & 2{,}4 & 2{,}5 & 2{,}6 \\ 3{,}1 & 3{,}2 & 3{,}3 & 3{,}4 & 3{,}5 & 3{,}6 \\ 4{,}1 & 4{,}2 & 4{,}3 & 4{,}4 & 4{,}5 & 4{,}6 \\ 5{,}1 & 5{,}2 & 5{,}3 & 5{,}4 & 5{,}5 & 5{,}6 \end{array}\right\| ; \quad \left\|\begin{array}{cccccc} 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}6 \\ 2{,}1 & 2{,}2 & 2{,}3 & 2{,}4 & 2{,}5 & 2{,}6 \\ 3{,}1 & 3{,}2 & 3{,}3 & 3{,}4 & 3{,}5 & 3{,}6 \\ 4{,}1 & 4{,}2 & 4{,}3 & 4{,}4 & 4{,}5 & 4{,}6 \\ 5{,}1 & 5{,}2 & 5{,}3 & 5{,}4 & 5{,}5 & 5{,}6 \end{array}\right\| ; \quad \left\|\begin{array}{c} 1{,}1 \\ 2{,}1 \\ 3{,}1 \\ 4{,}1 \\ 5{,}1 \end{array}\right\|$$

Aangezien deze hoofdmatrix de coëfficiënten der vergelijkingen (6.1) bevat is het evident dat men van deze matrix o.a. de rijen en ook de kolommen mag verwisselen, de rijen met constanten vermenigvuldigen en een of andere lineaire combinatie van rijen bij een andere rij mag optellen, daar toch hierdoor het oplossen der vergelijkingen niet wordt beïnvloed.

Dit zijn nl. alle bewerkingen die bij de algemeen bekende eliminatiemethode ook worden toegepast, en die de basis zijn voor de omvorming der hoofdmatrix en de hulpmatrix, hetgeen tevens de hoofdzaak is voor het te verrichten rekenwerk.

De vervorming van de hoofdmatrix in de hulpmatrix geschiedt volgens de formules:

$$A_{ii} = G_{ii} - \sum_{k=1}^{k=i-1} A_{ik}\,A_{ki} \ldots\ldots \quad (6.2)$$

als $i \geqq j$ d.w.z. onder of op de hoofddiagonaal:

$$A_{ij} = G_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} A_{ik}\,A_{kj}; \ldots\ldots \quad (6.3)$$

$$A_{ij} = \{G_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} A_{ik}\,A_{kj}\}\,\frac{1}{A_{ii}} \ldots\ldots \quad (6.4)$$

als $i < j$ d.w.z. boven de hoofddiagonaal.

Indien voor (6.2), (6.3) en (6.4) de grens onder het Σ-teken groter wordt dan boven is Σ gelijk nul.

We zullen nu deze op het eerste gezicht ingewikkeld uitziende vergelijking beschouwen teneinde ons het daarin vervatte rekenvoorschrift eigen te maken en er een schema van op te stellen hetwelk zeer eenvoudig zal blijken te zijn.

Ten eerste valt op dat volgens (6.3) de gehele eerste kolom van $\|A\|$ gelijk is aan die van $\|G\|$ want dan is $i \geqq j$ en het Σ-teken vervalt, daar de grens onder $k = 1$ groter dan $j - 1 = 1 - 1 = 0$ dus: $A_{ij} = G_{ij}$; $i = 1, 2, 3, \ldots$; $j = 1$; dus bv. $A_{11} = G_{11}$; $A_{21} = G_{21}$; $A_{31} = G_{31}$; .... etc. Daarna schrijven we de eerste rij van $\|A\|$ op boven de hoofddiagonaal daar $A_{11} = G_{11}$ reeds bepaald is.

Volgens (6.4) verdwijnt voor deze termen het Σ-teken want de ondergrens 1 is groter dan de bovengrens $i - 1 = 1 - 1 = 0$ en dus is:

$$A_{ij} = \frac{G_{ij}}{G_{ii}};\ i = 1;\ j = 1, 2, 3, \ldots;\ \text{of}\ A_{12} = \frac{G_{12}}{A_{11}};\ A_{13} = \frac{G_{13}}{A_{11}};$$

$$A_{14} = \frac{G_{14}}{A_{11}};\ \text{etc.}$$

We bepalen nu de termen der 2e rij:

$$A_{21} = G_{21};\ A_{22} = G_{22} - A_{21}\,A_{12};\ A_{23} = \{G_{23} - A_{21}\,A_{13}\}\,\frac{1}{A_{22}};$$

$$A_{24} = \{G_{24} - A_{21}\,A_{14}\}\,\frac{1}{A_{22}};\ \text{etc., en vervolgens de derde}$$

rij van A:

$$A_{31} = G_{31};\ A_{32} = G_{32} - A_{31}\,A_{12};\ A_{33} = G_{33} - A_{31}\,A_{13} -$$
$$- A_{32}\,A_{23};\ A_{34} = \{G_{34} - A_{31}\,A_{14} - A_{32}\,A_{24}\}\,\frac{1}{A_{33}};\ \text{etc.}$$

Tenslotte nog de 5e rij van A:

$$A_{51} = G_{51};\ A_{52} = G_{52} - A_{51}\,A_{12};\ A_{53} = G_{53} - A_{51}\,A_{13} -$$
$$- A_{52}\,A_{23};$$
$$A_{54} = G_{54} - A_{51}\,A_{14} - A_{52}\,A_{24} - A_{53}\,A_{34};\ A_{55} = G_{55} - A_{51}\,A_{15} - A_{52}\,A_{25} - A_{53}\,A_{35} - A_{54}\,A_{45}.$$

Dit zijn alle bewerkingen die zonder inspanning uitgevoerd kunnen worden op een hand-, half- of vol-automatische rekenmachine.

De oplossing der onbekende $\|F_{i1}\|$ is nu uit de matrix $\|A\|$ te bepalen volgens het rekenvoorschrift:

$$F_{i1} = A_{i.n+1} - \sum_{k=i+1}^{k=n} A_{ik}\,F_{k1};\ \ldots\ldots \qquad (6.5)$$

Indien de ondergrens van het Σ-teken groter is dan de bovengrens verdwijnt het Σ-teken weer.

De oplossing van 5 onbekenden uit 5 vergelijkingen wordt dan bv. te beginnen met laatste onbekende:

$$F_{51} = A_{56}$$
$$F_{41} = A_{46} - A_{45}\,F_{51}$$
$$F_{31} = A_{36} - A_{34}\,F_{41} - A_{35}\,F_{51}$$
$$F_{21} = A_{26} - A_{23}\,F_{31} - A_{24}\,F_{41} - A_{25}\,F_{51}$$
$$F_{11} = A_{16} - A_{12}\,F_{21} - A_{13}\,F_{31} - A_{14}\,F_{41} - A_{15}\,F_{51}$$

Ook deze bewerkingen zijn zonder moeite op de rekenmachine uit te voeren.

Stelt men slechts belang in één der onbekenden dan zorgt men natuurlijk dat de coëfficiënten dezer onbekende in de vóórlaatste kolom der hoofdmatrix komen te staan, aangezien men dan de berekeningen volgens (6.5[1]) niet behoeft uit te voeren.

Een aanschouwelijk beeld van het bewerkingsvoorschrift voor het oplossen van q vergelijkingen met q onbekenden blijkt uit de fig. Deze methode werkt volgens dit schema bijzonder eenvoudig bij het gebruik van een hand-, half- of vol-automatische rekenmachine.

Het volgende voorbeeld van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden kan als men zich het schema eigen heeft gemaakt, met de contrôle in circa 1 uur berekend worden. De gegeven vergelijkingen zijn:

$\|G_{4.5}\|$ *Hoofdmatrix*

$$\|G_{4.5}\| = \left\|\begin{matrix} 12{,}1719 & 27{,}3941 & 1{,}9827 & 7{,}3757 & 6{,}6355 \\ 8{,}1163 & 23{,}3385 & 9{,}8397 & 4{,}9474 & 6{,}1304 \\ 3{,}0706 & 13{,}5434 & 15{,}5973 & 7{,}5172 & 4{,}6921 \\ 3{,}0581 & 3{,}1510 & 6{,}9841 & 13{,}1984 & 2{,}5393 \end{matrix}\right\|;$$

$\|A_{4.5}\|$ *Hulpmatrix*

$$\|A_{4.5}\| = \left\|\begin{matrix} 12{,}1719 & 2{,}25060 & 0{,}16289 & 0{,}60596 & 0{,}54515 \\ 8{,}1163 & 5{,}07196 & 1{,}67935 & 0{,}00577 & 0{,}33632 \\ 3{,}0706 & 6{,}63271 & 3{,}95849 & 1{,}41930 & 0{,}19893 \\ 3{,}0581 & -3{,}73156 & 12{,}75256 & -6{,}73295 & 0{,}06085 \end{matrix}\right\|;$$

Eindmatrix
Resultaat

$\|F_{4.1}\|$
0,15928
0,14692
0,11257
0,06085

De steeds noodzakelijke contrôle door substitutie der berekende onbekenden in de gegeven vergelijkingen voor de bekende termen G_{15}, $G_{2.5}$, $G_{3.5}$ en $G_{4.5}$.

	bekende termen			fout in eenheden der 5e decimaal
G_{15}	= 6,63548	i.p.v.	6,6355	− 2
G_{25}	= 6,13036		6,1304	− 4
G_{35}	= 4,69209		4,6921	− 1
G_{45}	= 2,53936		2,5393	+ 6

Het enige schrijfwerk hetgeen bij deze methode gebeuren moet indien de coëfficiënten $\|G\|$ bekend verondersteld worden zijn de cijfers van $\|A\|$ en $\|F\|$. Dit is dus wel bijzonder weinig en veel minder dan de verkorte methode van Gauss, volgens welke het voorbeeld der scheeps- en stroomsnelheid werd berekend.

Deze vermindering van schrijfwerk vindt echter wel ten dele zijn oorzaak in het gebruik van een rekenmachine, die immers een vermenigvuldiging met een optelling van het resultaat daarvan bij een ander getal automatisch uitvoert, hetgeen zowel geldt voor een hand-, als automatische machine.

Met deze eenvoudige methode van Prof. Prescott D. Crout is een veel voorkomende moeilijkheid bij het practisch rekenen tot oplossing gebracht.

Een eenvoudige methode, voorgesteld door de heer C. van Vlijmen, om enerzijds de ontoelaatbare onnauwkeurigheid van de „means of means" te ontgaan, anderzijds het werk van de rekenmethode te vermijden is de volgende:

De gemeten snelheden op de mijl worden uitgezet als functie van de tijd op de tijdstippen op de helft van de tijd van de runs. Nodig hierbij is dus dat, evenals voor de rekenmethode, ook de begin- of eindtijden der runs nauwkeurig worden genoteerd.

De tijd wordt horizontaal uitgezet, de snelheid verticaal. Er worden twee diagrammen getekend, elk op een afzonderlijk blad doorschijnend papier. In het ene diagram worden de snelheden van de opvarende runs naar boven uitgezet, in het andere de snelheden van de afvarende runs naar onder. Wanneer nu de beide diagrammen op elkaar gelegd worden met de overeenkomstige verdeellijnen voor de tijd op elkaar, komen de punten van de snelheden opvarend op het ene blad tussen de punten van de snelheden afvarend op het andere blad en is het vrij eenvoudig de bladen in hoogteligging ten opzichte van elkaar in een zodanige stand te schuiven, dat alle punten samen een zo glad mogelijk strokende kromme vormen. De lijn midden tussen de bases van beide diagrammen geeft dan de scheepssnelheid en de kromme ten opzichte van deze lijn geeft het verloop van de stroomsnelheid als functie van de tijd.

De grafische methode komt in principe op hetzelfde neer als de rekenkundige methode. Daar wordt het polynomium voor de stroomsnelheid niet meer nummeriek, maar grafisch bepaald. Deze methode, die ook rekening houdt met de begin- en eindtijden der runs, bleek voor het gegeven voorbeeld nauwkeuriger en physisch veel doorzichtiger te zijn dan die der „means of means". De nauwkeurigheid wordt geschat op ca. 0,02 kn.

Liggen de meetpunten niet zo mooi regelmatig als in het gegeven voorbeeld, dan zal deze methode iets meer afhankelijk zijn van het persoonlijk inzicht omtrent de te stroken stroomkromme dan bij de rekenkundige methode.

Het reken- en tekenwerk is echter veel minder. Dit is een voordeel, dat grafische methoden steeds op rekenkundige voorhebben. Indien een grote nauwkeurigheid niet noodzakelijk is, kan deze methode zondermeer aanbevolen worden. In belangrijke gevallen zal men goed doen ook de rekenkundige methode uit te voeren.

De grafische methode is echter niet bij machte de twee snelheden te bepalen als b.v. 3 runs met één en 3 runs met een andere snelheid worden genomen, evenmin als men dat met de „means of means" kan doen. Bij de rekenkundige methode kan echter zelfs elke run met een andere snelheid gevaren worden, terwijl het rekenprocédé dan toch zowel de stroomkromme als de apk-snelheidskromme levert, zodat wel gezegd mag worden, dat de draagwijdte dezer methode veel groter is dan de grafische, zij het dan ook ten koste van meer rekenwerk. Men zal echter met minder runs op de gemeten mijl kunnen volstaan, waardoor vooral voor grotere schepen door verkorting der voor de proeftocht benodigde tijd het mindere rekenwerk zeker verantwoord is.

Bepaling van 2 snelheden uit 2 x 4 runs op de gemeten mijl (zie Schip en Werf 22-12-50 en 2-2-51)

$5{,}01 \hat{=} 0$

i	V kn.	$T_{21}-T_{11}$	T_1 uur	T_1^2	T_1^3	T_1^4	T_1^5	T_1^6
1	14,118	0,07083	0,00000 0,07083	0,00000 0,00502	0,00000 0,00036	0,00000 0,00003	0,00000 0,00000	0,00000 0,00000
2	13,483	0,07417	0,68333 0,75750	0,46694 0,57380	0,31907 0,43466	0,21803 0,32925	0,14899 0,24941	0,10181 0,18893
3	14,286	0,07000	1,35000 1,42000	1,82250 2,01640	2,46038 2,86329	3,32151 4,06587	4,48403 5,77353	6,05344 8,19842
4	13,333	0,07500	2,06667 2,14167	4,27112 4,58675	8,82701 9,82330	18,24251 21,03828	37,70123 45,05705	77,91598 96,49733
5	17,308	0,05778	2,81667 2,87445	7,93363 8,26246	22,34639 23,75003	62,94238 68,26827	177,28791 196,23373	499,36151 564,06396
6	16,476	0,06056	3,43333 3,49389	11,78775 12,20727	40,47124 42,65086	138,95112 149,01755	477,06498 520,65110	1637,90726 1819,09767
7	17,308	0,05778	3,98333 4,04111	15,86692 16,33057	63,20310 65,99363	251,75876 266,68740	1002,83798 1077,71312	3994,63469 4355,15678
8	16,744	0,05972	4,61667 4,67639	21,31364 21,86862	98,39786 102,26610	454,27045 478,23617	2097,21653 2236,41805	9682,15881 10458,36277

i	$T_{2i} - T_{1i}$	$\frac{T_{2i}^2 - T_{1i}^2}{2}$	$\frac{T_{2i}^3 - T_{1i}^3}{3}$	$\frac{T_{2i}^4 - T_{1i}^4}{4}$	$\frac{T_{2i}^5 - T_{1}^5}{5}$	$\frac{T_{2i}^6 - T_{1i}^6}{6}$
1	0,07083	0,00251	0,00012	0,00001	0,00000	0,00000
2	0,07417	0,05343	0,03853	0,02781	0,08008	0,01452
3	0,07000	0,09695	0,13430	0,18609	0,25790	0,35790
4	0,07500	0,15782	0,33210	0,69894	1,47116	3,09689
5	0,05778	0,16442	0,46788	1,33147	3,78916	10,78374
6	0,06056	0,20976	0,72654	2,51661	8,71723	30,19840
7	0,05778	0,23183	0,93018	3,73217	14,97503	60,08701
8	0,05972	0,27749	1,28941	5,99143	27,84030	129,36731

Stroomsnelheid:

$$V = p + qt + rt^2 + lt^3 + mt^4 + nt^5$$

Vergelijkingen:

$V_1 (T_{2i} - T_{1i}) - N \pm N_i = 0$ $\qquad i = 1, 2, 3, 4 \qquad N = 1$

$V_2 (T_{2i} - T_{1i}) - N \pm N_i = 0$ $\qquad i = 5, 6, 7, 8$

+ 0,07083	V_1 + 0,00000 V_2 + 0,07083	p + 0,00251	q + 0,00012	r + 0,00001	l + 0,00000	m + 0,00000	n = 1
+ 0,07417	V_1 + 0,00000 V_2 + 0,07417	p − 0,05343	q − 0,03853	r − 0,02781	l − 0,08008	m − 0,01452	n = 1
+ 0,07000	V_1 + 0,00000 V_2 + 0,07000	p + 0,09695	q + 0,13430	r + 0,18609	+ 0,25790	m + 0,35790	n = 1
+ 0,07500	V_1 + 0,00000 V_2 − 0,07500	p − 0,15782	q − 0,33210	r − 0,69894	− 1,47116	m − 3,09689	n = 1
+ 0,00000	V_1 + 0,05778 V_2 + 0,05778	p + 0,16442	q + 0,46788	r + 1,33147	+ 3,78916	m +10,78374	n = 1
+ 0,00000	V_1 + 0,06056 V_2 − 0,06056	p − 0,20976	q − 0,72654	r − 2,51661	− 8,71723	m −30,19840	n = 1
+ 0,00000	V_1 + 0,05778 V_2 + 0,05778	p + 0,23183	q + 0,93018	r + 3,73217	+14,97503	m +60,08701	n = 1
+ 0,00000	V_1 + 0,05972 V_2 − 0,05972	p − 0,27749	q − 1,28941	r − 5,99143	−27,84030	m −129,36731	n = 1

… dat zich nullen op de
hoofddiagonaal bevinden van de hulp matrix.
Immers voor de termen boven de hoofddiagonaal moet door A_{11} gedeeld worden. Zonder verwisseling zou $A_{22} = 0$ worden.

G 89 Hoofdmatrix

+ 0,07083	+ 0,07083	+ 0,00251	+ 0,00012	+ 0,00000	+ 0,00001	+ 0,00000	0,00000	+ 1,00000
+ 0,07417	− 0,07417	− 0,05343	− 0,03853	+ 0,00000	− 0,02781	− 0,02008	− 0,01452	+ 1,00000
+ 0,07000	+ 0,07000	+ 0,09695	+ 0,13430	+ 0,00000	+ 0,18609	+ 0,25790	+ 0,35750	+ 1,00000
+ 0,07500	− 0,07500	− 0,15782	− 0,33210	+ 0,00000	− 0,69894	− 1,47116	− 3,09689	+ 1,00000
+ 0,00000	+ 0,05778	+ 0,16442	+ 0,46788	+ 0,05778	+ 1,33147	+ 3,78916	+10,78374	+ 1,00000
+ 0,00000	− 0,06056	− 0,20976	− 0,72654	+ 0,06056	− 2,51661	− 8,71723	−30,19840	+ 1,00000
+ 0,00000	+ 0,05778	+ 0,23183	+ 0,93018	+ 0,05778	+ 3,73217	+14,97503	+60,08701	+ 1,00000
+ 0,00000	− 0,05972	− 0,27749	− 1,28941	+ 0,05972	− 5,99143	−27,84030	−129,36731	+ 1,00000

A 89 Hulpmatrix

+ 0,07083	+ 1,00000	+ 0,03544	+ 0,00169	+ 0,00000	+ 0,00014	+ 0,00000	+ 0,00000	+ 14,11831
+ 0,07417	− 0,14894	+ 0,37791	+ 0,26059	+ 0,00000	+ 0,18754	+ 0,13536	+ 0,09788	+ 0,31788
+ 0,07000	+ 0,00000	+ 0,09447	+ 1,42036	+ 0,00000	+ 1,96973	+ 2,72997	+ 3,78427	+ 0,12406
+ 0,07500	− 0,15000	+ 0,40639	− 0,87036	+ 0,00000	+ 1,69045	+ 2,94164	+ 5,30826	+ 0,07079
+ 0,00000	+ 0,05778	+ 0,16244	+ 0,22210	+ 0,05778	+10,82070	+46,46140	+155,49325	+ 16,36829
+ 0,00000	− 0,06056	− 0,18687	− 0,44534	+ 0,06056	− 2,03964	+ 4,75699	+ 17,91395	− 0,04054
+ 0,00000	+ 0,05778	+ 0,20999	+ 0,61686	+ 0,05778	+ 1,63972	+ 2,09469	+ 8,42797	+ 0,01558
+ 0,00000	− 0,05972	− 0,25492	− 0,91177	+ 0,05972	− 4,58301	− 5,42753	− 5,00005	− 0,00728

Eindmatrix F 81

− 0,00728
+ 0,07694
− 0,27613
+16,91346
+ 0,34989
− 0,01150
+ 0,27313
+13,84504

dus $n = -0,00728$
$m = +0,07694$
$l = -0,27613$
$\boxed{V_2 = +16,91346}$
$r = +0,34989$
$q = -0,01150$
$p = +0,27313$
$\boxed{V_1 = +13,84504}$

Stroomsnelheid

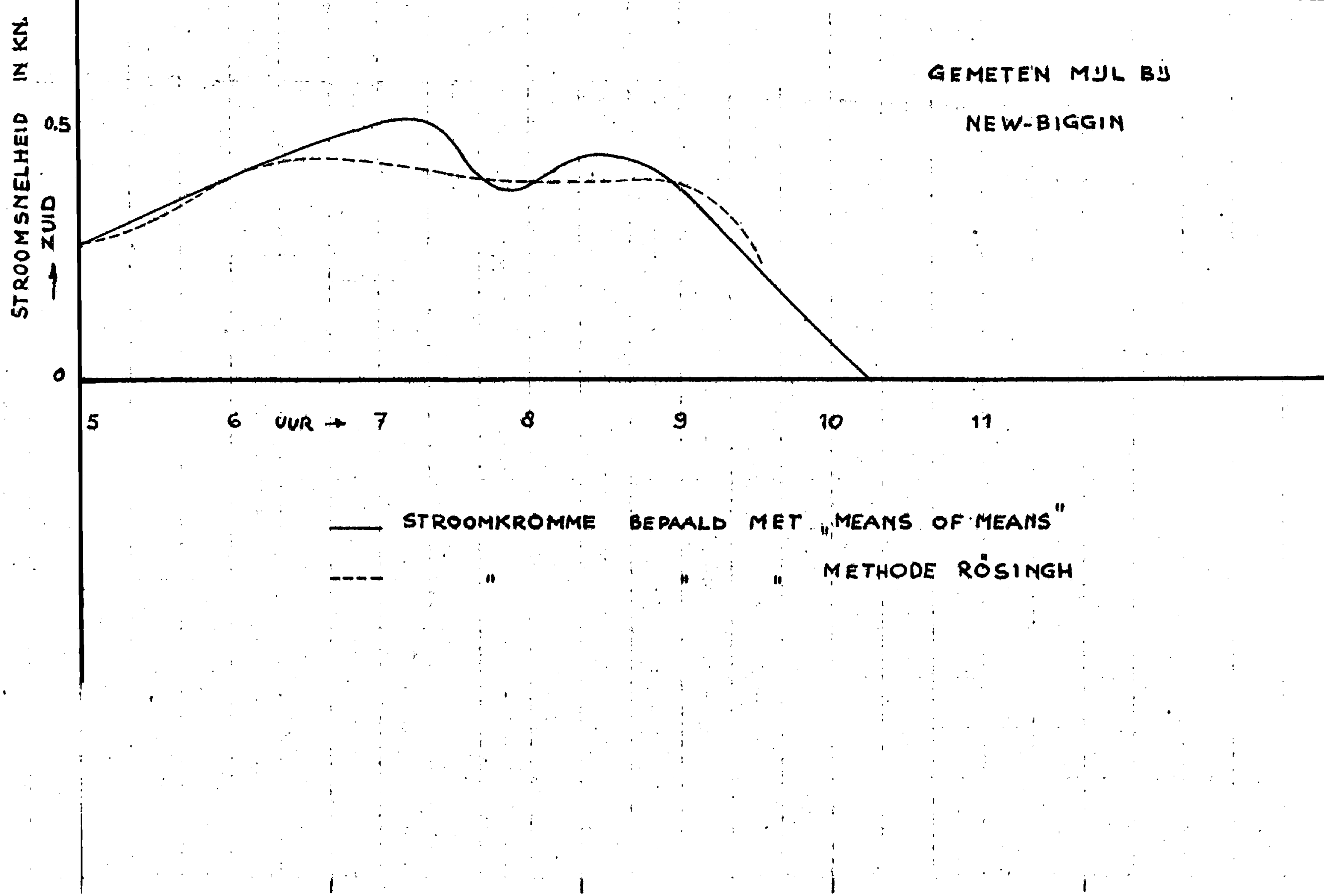
t	V in km
0,0	+ 0,27313
0,5	+ 0,32491
1,0	+ 0,40505
1,5	+ 0,44542
2,0	+ 0,43873
2,5	+ 0,41119
3,0	+ 0,39523
3,5	+ 0,40218
4,0	+ 0,39497
4,5	+ 0,26086

De proeftochtresultaten zijn door Wageningen geanalyseerd met de methode van de "means of means".

Hiermee werd gevonden $V_1 = 13,85$ km.
$V_2 = 16,93$ km.

wat merkwaardig goed overeenstemt met de door ons gevonden snelheden: $V_1 = 13,85$ km.
$V_2 = 16,91$ km.

Daar de omstandigheden tijdens de proeftocht verre van ideaal waren, zijn de proeftochtresultaten niet met behulp van andere methoden geanalyseerd.



GEMETEN MIJL BIJ
NEW-BIGGIN
STROOMSNELHEID IN KN.
0.5
→ ZUID
0
5
6
UUR → 7
8
9
10
11
— STROOMKROMME BEPAALD MET „MEANS OF MEANS"
---- " " " METHODE RÖSINGH