

NATIONAAL LUCHT- EN RUIMTEVAARTLABORATORIUM

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY NLR

THE NETHERLANDS

NLR TR 84126 U

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK
BIBLIOTHEEK
Kluyverweg 1 - DELFT

METHODEN VOOR HET VERBETEREN VAN DYNAMISCHE MODELLEN VAN CONSTRUCTIES

DOOR

H.H. OTTENS

1 OKT. 1988



Reprints from this publication may be made on condition that full credit be given to the Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (National Aerospace Laboratory NLR) and the Author(s).

DOCUMENT CONTROL SHEET

| | | | | |
|---|--|-----------------------|--|-----------------|
| | ORIGINATOR'S REF. NLR TR 84126 U | | SECURITY CLASS. Unclassified | |
| ORIGINATOR National Aerospace Laboratory NLR Amsterdam, The Netherlands | | | | |
| TITLE Computational methods for the improvement of dynamic analytical models of aerospace structures (in Dutch) | | | | |
| PRESENTED AT | | | | |
| AUTHORS H.H. Ottens | | DATE 841102 | pp 34 | ref 8 |
| DESCRIPTORS Parameter identification Analysis Model response Optimization Dynamic models Matrix methods Dynamic structural analysis Stiffness matrix Vibration mode Finite element methods | | | | |
| ABSTRACT <p>A survey of computational methods to improve dynamic analytical models described in the literature is made. Both the matrix methods and the optimal correction method of the dynamic model using the measured modes are discussed.</p> | | | | |

NLR TR 84126 U

METHODEN VOOR HET VERBETEREN VAN DYNAMISCHE
MODELLEN VAN CONSTRUCTIES

door

H.H. Ottens

SAMENVATTING

Enkele methoden voor het verbeteren van wiskundige dynamische modellen van lucht- en ruimtevaart constructies zijn geïnteriseerd. Zowel methoden die wiskundige grootheden (matrices) als methoden die fysische grootheden verbeteren, worden besproken.

Dit onderzoek is uitgevoerd in opdracht van het Nederlands Instituut voor Vliegtuigontwikkeling en Ruimtevaart (NIVR) Contractno.: 1053

Hoofdafdeling: Constructies en Materialen

Opgesteld : HHO/^{H₂O}

Goedgekeurd : GB/

Afgesloten : 2-XI-1984

Ordernummer: 101.427

Typ. : MM

INDELING

| | Blz. |
|--|------|
| SYMBOLENLIJST | 4 |
| 1 INLEIDING | 7 |
| 2 ANALYTISCHE MODELLERING | 8 |
| 3 VERIFICATIE METHODEN | 9 |
| 4 MATRIX CORRECTIE METHODEN | 11 |
| 4.1 Algemeen | 11 |
| 4.2 Methode "Berman/Baruch" voor verbeteren van de massamatrix | 11 |
| 4.2.1 Vooronderstellingen | 11 |
| 4.2.2 Opzet van de methode | 11 |
| 4.2.3 Wiskundige uitwerking | 12 |
| 4.3 Methode "Berman/Baruch" voor verbeteren van de stijfheidsmatrix | 13 |
| 4.3.1 Vooronderstellingen | 13 |
| 4.3.2 Opzet van de methode | 14 |
| 4.3.3 Wiskundige uitwerking | 14 |
| 4.4 Methode "Chen" voor verbeteren van de massamatrix | 15 |
| 4.4.1 Vooronderstellingen | 15 |
| 4.4.2 Opzet van de methode | 15 |
| 4.4.3 Wiskundige uitwerking | 16 |
| 4.5 Methode "Chen" voor verbeteren van de stijfheidsmatrix | 17 |
| 4.5.1 Vooronderstellingen | 17 |
| 4.5.2 Opzet van de methode | 17 |
| 4.5.3 Wiskundige uitwerking | 18 |
| 5 PARAMETER CORRECTIE METHODEN | 19 |
| 5.1 Algemeen | 19 |

INDELING (vervolg)

| | Blz. |
|--|------|
| 5.2 Methode "Collins" voor het verbeteren van parameters | 20 |
| 5.2.1 Vooronderstellingen | 20 |
| 5.2.2 Opzet van de methode | 20 |
| 5.2.3 Wiskundige uitwerking | 21 |
| 5.3 Methode "Natke" voor het verbeteren van massa, dempings en stijfheids submatrices | 25 |
| 5.3.1 Vooronderstellingen | 25 |
| 5.3.2 Opzet van de methode | 25 |
| 5.3.3 Wiskundige uitwerking | 26 |
| 6 SLOTOPMERKINGEN | 33 |
| 7 REFERENTIES | 33 |

SYMBOLENLIJST

Getracht is een consistente notatie in het gehele rapport te gebruiken. Een aantal symbolen wordt lokaal in de tekst gedefinieerd en gebruikt en is niet in de onderstaande lijst opgenomen.

| | |
|---------------|---|
| $[]$ | matrix |
| $[]$ | diagonaalmatrix (alleen termen op de hoofddiagonaal) |
| $[]^T$ | getransponeerde matrix |
| $[]^{-1}$ | inversematrix |
| $\{ \}$ | vector |
| $\{ \}^T$ | getransponeerde vector |
| $\{ \}^*$ | toegevoegde complexe vector |
| $\ \ $ | norm gedefinieerd als de som van de kwadraten van de matrix elementen |
| $\cdot \cdot$ | één- en tweemaal differentiëren naar de tijd |
| indices | |
| $i j$ | hebben betrekking op de punten in de constructie |
| $r s$ | hebben betrekking op de trillingsvormen |
| boven indices | |
| A | analytische grootheid |
| C | gecorrigeerde grootheid |
| M | gemeten grootheid |

SYMBOLENLIJST (vervolg)

symbolen

[C] visceuse dempingsmatrix

[c], c_r gegeneraliseerde visceuse demping

E[] verwachtingswaarde (expected value)

{f} exciterende belasting

[I] eenheidsmatrix

[K] stijfheidsmatrix

[k], k_r gegeneraliseerde stijfheid

[M] massamatrix

[m], m_r gegeneraliseerde massa

{p} constructie parameters

{r} = {p} - {p^A}

{q}, q_r gegeneraliseerde coördinaten (amplitudes van trillingsvormen)

[Sxy] covariantiematrix van x en y

[sC] dempingsmatrix van een deelconstructie

[sK] stijfheidsmatrix van een deelconstructie

[sM] massamatrix van een deelconstructie

{x}, x_i oorspronkelijke vrijheidsgraden (verplaatsingen in punten van de constructie)

SYMBOLENLIJST (vervolg)

Griekse symbolen

β_r gegeneraliseerde visceuse demping $\beta_r = c_r / 2m_r \omega_r$

δ_{rs} $\delta_{rs} = 1$ als $r = s$, $\delta_{rs} = 0$ als $r \neq s$

$[\Lambda], \lambda_{rs}$ Lagrange multiplicatoren

$[\phi], \{\varphi\}_{r,ir}$ ongedempte trillingsvorm

$[\Omega], \omega_r$ eigenfrequentie

1 INLEIDING

Het dynamisch gedrag van ruimtevaartconstructies is bepalend voor de responsie op dynamische belastingen die vooral tijdens de lancering zullen optreden. Deze responsie kan tot maatgevende belastingsgevallen leiden. Het dynamisch gedrag van de constructie is van invloed op de prestaties van het standregelsysteem. Vooral bij grote, flexibele ruimtevaartconstructies moet deze invloed worden meegenomen.

Teneinde het dynamisch gedrag al in de ontwerpfase te kunnen beoordelen wordt van de constructie een analytisch model gemaakt. Zo'n model kan eenvoudig zijn, bijvoorbeeld opgebouwd uit enkele massa's en veren, of complex. In dit laatste geval zal een eindige elementenmethode worden gebruikt om het analytisch model te maken.

In een latere fase, als een eerste exemplaar of prototype van de ontworpen constructie gereed is, kan het analytisch model experimenteel geverifieerd worden. Meestal blijkt dat er verschillen optreden tussen de experimentele en de berekende resultaten. Het is belangrijk om deze verschillen goed te interpreteren. De verschillen kunnen veroorzaakt worden door meetfouten of door fouten in het analytisch model. Als dit laatste het geval is kan het noodzakelijk zijn het analytisch model te verbeteren, zonodig enkele ontwerpberoeeningen te herhalen en/of de standregelsystemen aan te passen.

Door het NIVR is zowel aan Fokker als aan het NLR opdracht gegeven een studie naar de in de literatuur voorgestelde methoden te verrichten. Door Kooi (Fokker afdeling Ruimtevaart) is een uitgebreid literatuur overzicht gemaakt (Ref. 1). Tevens zijn in referentie 1 de methoden beschreven die in dit rapport worden aangeduid met "matrix correctie methoden" (hoofdstuk 4). In dit rapport is gebruik gemaakt van het literatuur overzicht (Ref. 1) en is getracht de vooronderstellingen en de wiskundige opzet van een aantal methoden te beschrijven. Hierbij is enige overlapping met de studie van Fokker onvermijdelijk.

In een vervolgstudie zullen de beschreven methoden worden geëvalueerd en zullen er één of meer worden geselecteerd voor toepassing, waarbij een taakverdeling tussen Fokker en NLR zal worden gemaakt.

Voor het berekenen van het dynamisch gedrag wordt de constructie geschematiseerd. Het dynamisch gedrag is dan te beschrijven met een eindig aantal vrijheidsgraden $\{x\}$. Deze vrijheidsgraden zijn in het algemeen verplaatsingen of rotaties in punten van de constructie. Uitgaande van de massa, stijfheids en dempings eigenschappen van de constructie, kunnen vergelijkingen worden opgesteld waarmee de bewegingen van de constructie kunnen worden berekend. Deze bewegingsvergelijkingen hebben de volgende vorm:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C][\dot{x}] + [K]\{x\} = \{f\} \quad (2.1)$$

Hierin zijn $[M]$, $[C]$ en $[K]$ de massa, dempings- en stijfheidsmatrix en $\{f\}$ de vector met de exciterende belastingen.

Voor eenvoudige constructies kunnen de bewegingsvergelijkingen (2.1) met de hand worden opgesteld, bij gecompliceerde constructies zal een eindige elementen methode worden gebruikt. De matrix elementen hebben een vrij directe relatie met fysische grootheden in de constructie. Veranderingen van de massa of stijfheidseigenschappen in een beperkt deel van de constructie zal in een beperkt deel van de massa- of stijfheidsmatrix van invloed zijn.

De geschematiseerde constructie wordt het analytisch model genoemd. De bewegingsvergelijkingen (2.1) beschrijven volledig het dynamisch gedrag van het analytisch model. Om het model te verifiëren kan dan ook worden volstaan met het verifiëren van de bewegingsvergelijkingen (2.1).

Omdat het aantal vrijheidsgraden voor complexe constructies zeer groot kan zijn, is gezocht naar methoden om zinvolle responsieberekeningen te kunnen uitvoeren met een beperkte set vrijheidsgraden. De meest gebruikte methode is de "modal analysis". Als nieuwe vrijheidsgraden worden amplitudes, q_r , van trillingsvormen $\{\varphi\}_r$ gekozen. Door alleen die trillingsvormen te beschouwen die een eigenfrequentie in het te analyseren frequentie gebied hebben, wordt het aantal nieuwe vrijheidsgraden beperkt. Er is een eenduidig verband tussen de nieuwe vrijheidsgraden $\{q\}$ en de oude vrijheidsgraden $\{x\}$.

$$\{x\} = [\phi]\{q\} \quad [\phi] = [\{\varphi\}, \dots, \{\varphi\}_n] \quad (2.2)$$

Een uitgebreide beschouwing welke trillingsvormen gekozen kunnen worden

is gegeven in referentie [2].

De bewegingsvergelijkingen uitgedrukt in de nieuwe vrijheidsgraden zijn van de vorm

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = [\phi]^T\{f\} \quad (2.3)$$

Hierin zijn $[m]$, $[c]$ en $[k]$ de gegeneraliseerde massa-, dempings- en stijfheidsmatrix waarbij geldt dat $[m]$ en $[k]$ vaak en $[c]$ meestal diagonaal matrices zijn.

De elementen van de gegeneraliseerde matrices hebben niet een directe relatie met fysische grootheden en in de constructie. Veranderingen in massa of stijfheidseigenschappen in een beperkt deel van de constructie zal in de gehele gegeneraliseerde matrices van invloed zijn.

De bewegingsvergelijkingen (2.3) beschrijven volledig het dynamisch gedrag van de geschematiseerde constructie (het analytisch model) in het beschouwde frequentie interval. Om de responsie berekeningsresultaten te verifiëren kan worden volstaan met het verifiëren van de modal bewegingsvergelijkingen (2.3).

3 VERIFICATIE METHODEN

Het analytisch model kan geverifieerd en zonodig gecorrigeerd worden met behulp van metingen aan de constructie of aan delen van de constructie. Deze metingen kunnen uiteraard pas worden uitgevoerd nadat de constructie of het constructiedeel is vervaardigd.

De verificatie methoden zijn in twee hoofdgroepen te verdelen:

- de directe verificatie methode;
- de verificatie methode die gemeten modal gegevens gebruiken.

Bij de directe methoden worden grootheden gemeten die een directe relatie hebben met de matrix elementen uit de bewegingsvergelijkingen (2.1). Voor de verificatie van de massamatrix kan de massa van alle onderdelen van de constructie worden bepaald. De elementen van de stijfheidsmatrix of beter die van de inverse van de stijfheidsmatrix (de flexibiliteitsmatrix) kunnen met een statische proef worden bepaald. De i^{de} kolom uit de flexibiliteitsmatrix zijn de waarden van alle vrijheidsgraden (verplaatsingen of rotaties) wanneer de constructie wordt

belast met een kracht in de richting van de i^{de} vrijheidsgraad. Voor kleine constructies is deze directe methode goed uitvoerbaar, voor grote constructies is de methode echter omslachtig.

Bij de tweede soort verificatie methoden wordt gebruik gemaakt van gemeten modal gegevens (eigenfrequenties, trillingsvormen, gegeneraliseerde massa en demping) gemeten met een zogenaamde modal survey. Een overzicht van modal survey methoden wordt gegeven in referenties [2] en [3].

De verificatie kan op verschillende niveau's plaatsvinden.

- 1 De resultaten van de modal survey worden direct vergeleken met die van de modal analysis (vergelijking 2.3). De gegeneraliseerde matrices worden gecorrigeerd. Deze methode wordt de modal matrix correctie methode genoemd.
- 2 De resultaten van de modal survey worden gebruikt om de bewegingsvergelijkingen uitgedrukt in de oorspronkelijke vrijheidsgraden $\{x\}$ zodanig te corrigeren dat de modal gegevens van het gecorrigeerde systeem gelijk zijn aan de gemeten gegevens. Het corrigeren van de bewegingsvergelijkingen matrices gebeurt puur wiskundig en de modificaties zijn meestal niet fysisch te interpreteren. Deze methode wordt de matrix correctie methode genoemd.
- 3 De resultaten van de modal survey worden gebruikt om fysische grootheden van de constructie zodanig te corrigeren dat de modal gegevens van de gecorrigeerde constructie gelijk zijn aan de gemeten gegevens. Deze methode wordt de parameter correctie methode genoemd.

In dit rapport zullen een aantal methoden, gebaseerd op methode 2 en 3 (matrix correctie methode en parameter correctie methode), die in de literatuur zijn voorgesteld, worden besproken. Getracht zal worden de vooronderstellingen en de formuleringen van de diverse methoden te behandelen. Er zal niet een compleet literatuur overzicht worden gegeven omdat in diverse publicaties dezelfde methode wordt beschreven. Er wordt alleen naar literatuur verwezen die nodig is om de methode te kunnen begrijpen. Een compleet literatuuroverzicht is gemaakt door Kooi (Fokker) (Ref. 1).

4 MATRIX CORRECTIE METHODEN

4.1 Algemeen

Bij de matrix correctie methoden worden de matrices van de bewegingsvergelijkingen (2.1) zodanig gecorrigeerd dat de berekende modal gegevens in overeenstemming met de gemeten grootheden zijn. Vaak wordt slechts één matrix tegelijk gecorrigeerd.

De volgende methoden worden hierna besproken in meer detail.

- methode "Berman/Baruch";
 - referenties [4] en [5];
 - correctie van massamatrix en stijfheidsmatrix;
 - meting van eigenfrequenties en ongedempte trillingsvormen;
- methode "Chen";
 - referentie [6];
 - correctie van massa- en stijfheidsmatrix;
 - meting van eigenfrequenties en ongedempte trillingsvormen.

4.2 Methode "Berman/Baruch" voor verbeteren van de massamatrix

4.2.1 Vooronderstellingen

De volgende vooronderstellingen zijn gemaakt.

- Van de constructie is een analytische massamatrix, $[M^A]$, bekend. Deze matrix beschrijft kwalitatief goed de massa van de constructie.
- Van de constructie zijn een aantal eigenfrequenties ω_r^M , en de bijbehorende reële trillingsvormen $\{\varphi_r^M\}$ gemeten. Indien de trillingsvormen niet in alle benodigde punten van de constructie zijn gemeten kunnen de ontbrekende gedeelten gereconstrueerd worden met behulp van de analytische massa en stijfheidsmatrix.
- De gemeten grootheden hebben geen meetfouten.

4.2.2 Opzet van de methode

Bij deze methode wordt gezocht naar een massamatrix $[M^C]$ die zoveel mogelijk lijkt op de analytische massamatrix $[M^A]$ maar met als nevenconditie dat de gemeten trillingsvormen $\{\varphi_r\}$ orthogonaal zijn met betrekking tot $[M^C]$.

4.2.3 Wiskundige uitwerking

De gemeten trillingsvormen $\{\varphi^M\}_r$ worden zo genormeerd dat geldt

$$\{\varphi^M\}_r^T [M^A] \{\varphi^M\}_r = 1$$

De trillingsvormen zullen in het algemeen niet orthogonaal zijn met betrekking tot $[M^A]$. Dus geldt

$$\{\varphi^M\}_s^T [M^A] \{\varphi^M\}_r \neq 0$$

Er wordt een matrix $[m]$ gedefinieerd als

$$[m] = [\phi^M]^T [M^A] [\phi^M] \text{ met } [\phi^M] = [\{\varphi^M\}_1, \dots, \{\varphi^M\}_n]$$

De matrix $[m]$ heeft dus énen op de hoofddiagonaal.

Het verschil tussen de gezochte massamatrix $[M^C]$ en de analytische massamatrix $[M^A]$ wordt uitgedrukt met behulp van de volgende norm

$$\varepsilon = \left| | [M^A]^{-1/2} ([M^C] - [M^A]) [M^A]^{-1/2} | \right|$$

Gevraagd wordt nu het minimum van ε te bepalen met als nevenconditie

$$[\phi^M]^T [M^C] [\phi^M] = [I] \quad ([I] \text{ is de eenheidsmatrix})$$

Het vraagstuk wordt hergeformuleerd met behulp van multiplicatoren van Lagrange, λ_{rs} , tot het zoeken van het minimum van Ψ .

$$\Psi = \varepsilon + \sum_r \sum_s \lambda_{rs} (\{\varphi^M\}_r^T ([M^C] - [M^A]) \{\varphi^M\}_s - 1 + m_{rs})$$

Differentiatie van Ψ met betrekking tot de elementen van $[M^C]$ en het nulstellen daarvan geeft

$$2[M^A]^{-1} ([M^C] - [M^A]) [M^A]^{-1} + [\phi^M] [\Lambda] [\phi^M]^T = 0$$

of

$$[M^C] = [M^A] - \frac{1}{2} [M^A] [\phi^M] [\Lambda] [\phi^M]^T [M^A]$$

Er geldt de orthogonaliteits betrekking

$$[\phi^M]^T [M^C] [\phi^M] = [I]$$

Dus volgt

$$[\phi^M]^T [M^A] [\phi^M] - \frac{1}{2} [\phi^M]^T [M^A] [\phi^M] [\Lambda] [\phi^M]^T [M^A] [\phi^M] = [I]$$

of

$$[m] - \frac{1}{2} [m] [\Lambda] [m] = [I]$$

en dus volgt voor de multiplicatorenmatrix $[\Lambda]$

$$[\Lambda] = - 2 [m]^{-1} ([I] - [m]) [m]^{-1}$$

Uiteindelijk volgt dan voor de verbeterde massamatrix $[M^C]$,

$$[M^C] = [M^A] + [M^A] [\phi^M] [m]^{-1} ([I] - [m]) [m]^{-1} [\phi^M]^T [M^A].$$

4.3 Methode "Berman/Baruch" voor het verbeteren van de stijfheidsmatrix

4.3.1 Vooronderstellingen

De volgende vooronderstellingen zijn gemaakt:

- Van de constructie is een analytische stijfheidsmatrix, $[K^A]$ bekend. Deze matrix beschrijft kwalitatief goed de stijfheidsverdeling van de constructie.
- Van de constructie is een massamatrix $[M^C]$ bekend. Deze matrix $[M^C]$ kan verkregen zijn door een verbeteringsprocedure (zie 4.2) of kan de analytische massamatrix zijn indien wordt verondersteld dat deze goed genoeg is.
- Van de constructie zijn een aantal eigenfrequenties, ω_r^M , en de bijbehorende reële trillingsvormen $\{\phi_r^M\}$ gemeten.
- De trillingsvormen zijn orthogonaal met betrekking tot $[M^C]$ en zodanig genormeerd dat geldt $\{\phi_r^M\}_r^T [M^C] \{\phi_r^M\}_r = 1$.
- De gemeten grootheden hebben geen meetfouten.

4.3.2 Opzet van de methode

Bij deze methode wordt gezocht naar een stijfheidsmatrix $[K^C]$ die zoveel mogelijk lijkt op de analytische stijfheidsmatrix $[K^A]$ maar met de nevencondities dat de stijfheidsmatrix $[K^C]$ voldoet aan het eigenwaarde probleem ($[K^C][\phi^M] - [\Omega^{2M}][M^C][\phi^M] = 0$), dat de trillingsvormen orthogonaal zijn met betrekking tot $[K^C]$ en dat $[K^C]$ symmetrisch is.

4.3.3 Wiskundige uitwerking

Het verschil tussen de gezochte stijfheidsmatrix $[K^C]$ en de analytische stijfheidsmatrix $[K^A]$ wordt uitgedrukt met behulp van de volgende norm

$$\varepsilon = || [M^C]^{-1/2} ([K^C] - [K^A]) [M^C]^{-1/2} ||$$

Gevraagd wordt nu het minimum van ε te bepalen met als nevencondities

$$[K^C][\phi^M] - [\Omega^{2M}][M^C][\phi^M] = 0$$

$$[\phi^M]^T [K^C][\phi^M] - [\Omega^{2M}] = 0$$

$$[K^C] - [K^C]^T = 0$$

Het vraagstuk wordt geformuleerd met behulp van multiplicatoren van Lagrange, $\lambda_{a_{rs}}$, $\lambda_{b_{rs}}$ en $\lambda_{c_{rs}}$ tot het zoeken van het minimum van Ψ

$$\begin{aligned} \Psi = \varepsilon + \sum_r \sum_s \{ \lambda_{a_{rs}} ([K^C][\phi^M] - [\Omega^{2M}][M^C][\phi^M]) + \\ + \lambda_{b_{rs}} ([\phi^M]^T [K^C][\phi^M] - [\Omega^{2M}]) + \lambda_{c_{rs}} ([K^C] - [K^C]^T) \} \end{aligned}$$

Differentiatie van Ψ naar de elementen van $[K^C]$ en het nulstellen daarvan geeft

$$\begin{aligned} 2[M^C]^{-1} ([K^C] - [K^A]) [M^C]^{-1} + [\Lambda_a][\phi^M]^T + [\phi^M][\Lambda_b][\phi^M]^T + \\ + [\Lambda_c] - [\Lambda_c]^T = 0 \end{aligned}$$

of

$$[K^C] = [K^A] - \frac{1}{2}[M^C]([\Lambda_a][\phi^M]^T + [\phi^M][\Lambda_b][\phi^M]^T + [\Lambda_c] - [\Lambda_c]^T)[M^C]$$

Met de nevencondities kan dit worden geschreven als

$$[K^C] = [K^A] - ([K^A][\phi^M][\phi^M]^T[M^C] + [M^C][\phi^M]^T[\phi^M][K^A]) + \\ + [M^C][\phi^M]([\phi^M]^T[K^A][\phi^M] + [\Omega^{2M}])[\phi^M]^T[M^C]$$

of afgekort

$$[K^C] = [K^A] + [\Delta] + [\Delta]^T$$

met

$$[\Delta] = ([I] - \frac{1}{2}[M^C][\phi^M][\phi^M]^T)([M^C][\phi^M][\Omega^{2M}] - [K^A][\phi^M])[\phi^M]^T[M^C]$$

4.4 Methode "Chen" voor verbeteren van de massamatrix

4.4.1 Vooronderstellingen

- Van de constructie is een analytische massamatrix $[M^A]$ bekend. Deze massamatrix beschrijft kwalitatief goed de massaverdeling van de constructie.
- Van de constructie zijn een aantal analytische trillingsvormen $\{\varphi^A\}_r$ bepaald.
- Van de constructie zijn een aantal eigenfrequenties, ω_r , en bijbehorende ongedempte trillingsvormen, $\{\varphi\}_r$, gemeten.
- De gemeten grootheden hebben geen meetfouten.

4.4.2 Opzet van de methode

Bij deze methode wordt gezocht naar een perturbatie $[\Delta M]$ van de analytische massamatrix $[M^A]$. Verondersteld wordt dat de gemeten trillingsvormen $\{\varphi^M\}_r$ lijken op de analytische trillingsvormen $\{\varphi^A\}_r$ zodat het verschil $\{\Delta\varphi\}_r$ klein is. De perturbatie massamatrix $[\Delta M]$ wordt nu bepaald door de eisen dat de gemeten trillingsvormen orthonormaal zijn met betrekking tot de nieuwe massamatrix $([M^A] + [\Delta M])$.

4.4.3 Wiskundige uitwerking

De gemeten trillingsvormen $\{\varphi^M\}_r$ worden geschreven als de som van de analytische trillingsvormen $\{\varphi^A\}_r$ en een perturbatie $\{\Delta\varphi\}_r$

$$\{\varphi^M\}_r = \{\varphi^A\}_r + \{\Delta\varphi\}_r$$

De gezochte massamatrix $[M^C]$ wordt geschreven als de som van de analytische massamatrix $[M^A]$ en een perturbatie $[\Delta M]$. Verondersteld wordt dat $\{\Delta\varphi\}_r$ en $[\Delta M]$ klein zijn.

De analytische trillingsvormen zijn zodanig genormeerd dat geldt

$$\{\varphi^A\}_r^T [M^A] \{\varphi^A\}_r = 1$$

Geëist wordt nu dat de gemeten trillingsvormen orthonormaal zijn met betrekking tot de gezochte massamatrix

$$[\varphi^M]^T [M^C] [\varphi^M] = [I]$$

$$([\varphi^A]^T + [\Delta\varphi]^T) ([M^A] + [\Delta M]) ([\varphi^A] + [\Delta\varphi]) = [I]$$

$$[\varphi^A]^T [M^A] [\varphi^A] + [\varphi^A]^T [M^A] [\Delta\varphi] + [\Delta\varphi]^T [M^A] [\varphi^A] + [\varphi^A]^T [\Delta M] [\varphi^A] = [I]$$

Waarbij de hogere orde termen zijn verwaarloosd.

Per definitie is

$$[\varphi^A]^T [M^A] [\varphi^A] = [I]$$

verder geldt

$$[\Delta\varphi] = [\varphi^M] - [\varphi^A]$$

Substitutie hiervan geeft

$$[I] + [\varphi^A]^T [M^A] ([\varphi^M] - [\varphi^A]) + ([\varphi^M]^T - [\varphi^A]^T) [M^A] [\varphi^A] + [\varphi^A]^T [\Delta M] [\varphi^A] = [I]$$

Zodat voor $[\Delta M]$ volgt

$$[\phi^A]^T [\Delta M] [\phi^A] = 2[I] - [\phi^A]^T [M^A] [\phi^M] - [\phi^M]^T [M^A] [\phi^A]$$

Voor en na vermenigvuldiging van het rechterlid met $[\phi^A]^T [M^A] [\phi^A]$, wat gelijk is aan $[I]$, en delen van de vergelijking door $[\phi^A]^T$ en $[\phi^A]$ geeft

$$[\Delta M] = [M^A] [\phi^A] (2[I] - [\phi^A]^T [M^A] [\phi^M] - [\phi^M]^T [M^A] [\phi^A]) [\phi^A]^T [M^A]$$

en

$$[M^C] = [M^A] + [\Delta M]$$

4.5 Methode "Chen" voor het verbeteren van de stijfheidsmatrix

4.5.1 Vooronderstellingen

- Van de constructie is een analytische stijfheidsmatrix $[K^A]$ bekend. Deze stijfheidsmatrix beschrijft kwalitatief goed de stijfheidsverdeling van de constructie.
- Van de constructie zijn een aantal analytische eigenfrequenties ω_r^A en trillingsvormen $\{\phi^A\}_r$ bepaald.
- Van de constructie zijn een aantal eigenfrequenties ω_r^M en trillingsvormen $\{\phi^M\}_r$ gemeten.
- De gemeten grootheden hebben geen meetfouten.

4.5.2 Opzet van de methode

Bij deze methode wordt gezocht naar een perturbatie $[\Delta K]$ van de analytische stijfheidsmatrix $[K^A]$. Verondersteld wordt dat de gemeten trillingsvormen $\{\phi^M\}_r$ weinig, zeg $\{\Delta\phi\}_r$, afwijken van de analytisch bepaalde trillingsvormen $\{\phi^A\}_r$. Evenzo dat de gemeten eigenfrequenties ω_r^M weinig, zeg $\Delta\omega_r$, afwijken van de analytische frequenties ω_r^A . De perturbatie stijfheidsmatrix $[\Delta K]$ wordt nu zo bepaald dat de gemeten trillingsvormen orthogonaal zijn met betrekking tot de nieuwe stijfheidsmatrix $[K^C] = ([K^A] + [\Delta K])$.

4.5.3 Wiskundige uitwerking

De gemeten eigenfrequenties en trillingsvormen, ω_r^M en $\{\varphi^M\}_r$ worden geschreven als de som van de analytische waarden en een perturbatie

$$\omega_r^M = \omega_r^A + \Delta\omega_r$$

$$\{\varphi^M\}_r = \{\varphi^A\}_r + \{\Delta\varphi\}_r$$

De gezochte stijfheidsmatrix $[K^C]$ wordt geschreven als de som van de analytische matrix $[K^A]$ en een perturbatie $[\Delta K]$. Verondersteld wordt dat de $\Delta\omega_r$, $\{\Delta\varphi\}_r$ en $[\Delta K]$ klein zijn.

De analytische trillingsvormen zijn zodanig genormeerd dat geldt

$$[\phi^A]^T [M^A] [\phi^A] = [I]$$

of ook

$$[\phi^A]^T [K^A] [\phi^A] = [\Omega^2]^A$$

Geëist wordt nu dat de gemeten trillingsvormen orthogonaal zijn met betrekking tot de gezochte stijfheidsmatrix $[K^C]$ en dat geldt

$$[\phi^M]^T [K^C] [\phi^M] = [\Omega^2]^M$$

$$([\phi^A]^T + [\Delta\phi]^T) ([K^A] + [\Delta K]) ([\phi^A] + [\Delta\phi]) = ([\Omega^A] + [\Delta\Omega])^2$$

$$\begin{aligned} [\phi^A]^T [K^A] [\phi^A] + [\phi^A]^T [K^A] [\Delta\phi] + [\Delta\phi]^T [K^A] [\phi^A] + \\ + [\phi^A]^T [\Delta K] [\phi^A] = [\Omega^2]^A + 2[\Omega^A] [\Delta\Omega] \end{aligned}$$

waarbij hogere orde termen zijn verwaarloosd.

Per definitie geldt

$$[\phi^A]^T [K^A] [\phi^A] = [\Omega^2]^A$$

$$[\Delta\phi] = [\phi^M] - [\phi^A], \quad [\Delta\Omega] = [\Omega^M] - [\Omega^A]$$

Substitutie hiervan geeft

$$\begin{aligned} [\Omega^{2A}] + [\phi^A]^T [K^A] ([\phi^M] - [\phi^A]) + ([\phi^M]^T - [\phi^A]^T) [K^A] [\phi^A] + \\ + [\phi^A]^T [\Delta M] [\phi^A] = [\Omega^{2A}] + 2[\Omega^A]([\Omega^M] - [\Omega^A]) \end{aligned}$$

zodat volgt

$$[\phi^A]^T [\Delta K] [\phi^A] = 2[\Omega^A][\Omega^M] - [\phi^A]^T [K^A] [\phi^M] - [\phi^M]^T [K^A] [\phi^A]$$

Voor en na vermenigvuldiging van het rechterlid met $[\phi^A]^T [M^A] [\phi^A]$, wat gelijk is aan $[I]$, en delen van de vergelijking door $[\phi^A]^T$ en $[\phi^A]$ geeft

$$[\Delta K] = [K^A] [\phi^A] (2[\Omega^A][\Omega^M] - [\phi^A]^T [K^A] [\phi^M] - [\phi^M]^T [K^A] [\phi^A]) [\phi^A]^T [K^A]$$

met

$$[K^C] = [K^A] + [\Delta K]$$

5 PARAMETER CORRECTIE METHODEN

5.1 Algemeen

Bij de parameter correctie methoden worden parameters van de constructie (bijvoorbeeld massa- of stijfheidsgegevens) zodanig gecorrigeerd dat de modal gegevens berekend met het verbeterd analytisch model beter in overeenstemming zijn met de gemeten grootheden.

De volgende methoden worden besproken:

- De methode "Collins".
 - referentie [7];
 - correctie van de van te voren geselecteerde constructie parameters;
 - meting van eigenfrequenties en ongedempte trillingsvormen.
- De methode "Natke".
 - referentie [8];
 - correctie van sub matrices, representatief voor de massa, demping of stijfheid van een deel van de constructie;

- meting van eigenfrequenties, ongedempte trillingsvormen, gegeneraliseerde massa gegeneraliseerde demping. Soms wordt ook gemeten de exciterende belastingen en het 90° uit fase deel van de trillingsvormen.

De methode Natke is geen echte parameter correctie methode, maar een soort tussenvorm tussen de matrix correctie methode en parameter correctie methode. Als de te corrigeren deelconstructies zeer klein worden gekozen dan staat de methode dicht bij de parameter correctie methode.

5.2 Methode "Collins" voor het verbeteren van parameters

5.2.1 Vooronderstellingen

- Van de constructie bestaat een adequaat wiskundig model voor het beschrijven van het dynamisch gedrag. In de wiskundige modellering komen een aantal parameters voor.
- Van te voren kan worden aangegeven welke parameters verbeterd moeten worden. Van deze parameters is bekend wat de waarde is gemiddeld over een aantal gelijke constructies. Tevens is bekend wat de spreiding van de parameterwaarde is.
- Voor de gemiddelde parameterwaarde is een analytische massamatrix $[M^A]$ en stijfheidsmatrix $[K^A]$ bekend.
- Van de constructie zijn de eigenfrequenties en trillingsvormen gemeten. Tevens kan worden aangegeven hoe groot de meetfouten zijn.

5.2.2 Opzet van de methode

Bij deze methode worden verbeterde waarden van te voren geselecteerde constructie parameters gezocht. Hierbij wordt uitgegaan van de gemiddelde waarden van de parameters en van gemeten eigenfrequenties en trillingsvormen.

Aangenomen wordt dat de verbeterde parameterwaarden in de buurt liggen van de gemiddelde waarden zodat geldt dat eigenfrequenties en trillingsvormen berekend met de verbeterde parameters gelijk zijn aan die welke zijn berekend met de gemiddelde parameters plus een lineaire functie van het verschil in parameterwaarden.

5.2.3 Wiskundige uitwerking

Van de constructie is een analytisch model bekend. Er geldt dan

$$([K^A] - \omega_r^{2A} [M^A]) \{\varphi^A\}_r = 0$$

Verondersteld wordt dat deze vergelijking geldt voor de gemiddelde waarden van de constructie parameters $\{p^A\}$. De gemeten eigenfrequenties en trillingsvormen zijn als eerste benadering te schrijven als

$$\begin{Bmatrix} \{\omega^{2M}\} \\ \{\varphi^M\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\omega^{2A}\} \\ \{\varphi^A\} \end{Bmatrix} + [T] (\{p^C\} - \{p^A\})$$

waarin

$$\{\omega^{2A}\} = \begin{Bmatrix} \omega_1^{2A} \\ \omega_2^{2A} \\ \vdots \\ \omega_n^{2A} \end{Bmatrix} \quad \{\varphi^A\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi^A\}_1 \\ \{\varphi^A\}_2 \\ \vdots \\ \{\varphi^A\}_n \end{Bmatrix}$$

$$[T] = [B][A]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega^{2A}}{\partial K^A} & \frac{\partial \omega^{2A}}{\partial M^A} \\ \frac{\partial \varphi^A}{\partial K^A} & \frac{\partial \varphi^A}{\partial M^A} \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial K^A}{\partial p^A} \\ \frac{\partial M^A}{\partial p^A} \end{bmatrix}$$

De submatrices $\frac{\partial \omega^2}{\partial K}$, $\frac{\partial \omega^2}{\partial M}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial K}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial M}$ zijn de partiële afgeleiden van de berekende frequenties en trillingsvormen naar alle elementen van de analytische massa en stijfheidsmatrix $[M^A]$ en $[K^A]$.

Als voorbeeld is

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_1^2}{\partial K_{11}} & \frac{\partial \omega_1^2}{\partial K_{12}} & \frac{\partial \omega_1^2}{\partial K_{13}} & \dots & \frac{\partial \omega_1^2}{\partial K_{nn}} \\ \frac{\partial \omega_2^2}{\partial K_{11}} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial \omega_n^2}{\partial K_{1i}} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \omega_n^2}{\partial K_{nn}} \end{bmatrix}$$

en

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial p_1} & \frac{\partial K_{11}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial K_{11}}{\partial p_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial K_{nn}}{\partial p_1} & \dots & \dots & \frac{\partial K_{nn}}{\partial p_m} \end{bmatrix}$$

De afgeleiden van de eigenfrequenties naar de massa- en stijfheidsmatrix elementen zijn

$$\frac{\partial \omega_r^{2A}}{\partial M_{ij}^A} = - \omega_r^{2A} \frac{\varphi_{ir}^A \varphi_{ir}^A}{m_r^A}$$

$$\frac{\partial \omega_r^{2A}}{\partial K_{ij}^A} = \frac{\varphi_{ir}^A \varphi_{ir}^A}{m_r^A}$$

waarin φ_{ir} het i^{de} element van de r^{de} trillingsvorm is en m_r de gegeneraliseerde massa behorend bij de r^{de} trillingsvorm.

De afgeleiden van de trillingsvormen naar de massa en stijfheidsmatrix elementen zijn

$$\frac{\partial \varphi_{ir}}{\partial M_{jk}} = \sum_s \left(\frac{(\delta_{rs} - 1) \omega_r^2 \varphi_{is} \varphi_{js} \varphi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega_s^2} - \frac{\varphi_{is} \varphi_{js} \varphi_{kr}}{2} \delta_{rs} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi_{ir}}{\partial K_{jk}} = \sum_s \frac{\varphi_{is} \varphi_{js} \varphi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega_s^2} (1 - \delta_{rs})$$

Als de meetfouten worden gegeven met $\{\epsilon\}$ dan kan worden geschreven

$$\{y\} = [T]\{r\} + \{\epsilon\}$$

met

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{\omega^{2M}\} - \{\omega^{2A}\} \\ \{\varphi^M\} - \{\varphi^A\} \end{Bmatrix}$$

$$\{r\} = \{\{p\} - \{p^A\}\}$$

Aangenomen wordt dat het gemiddelde van de parameterwaarden $\{p\}$ gelijk is aan $\{p^A\}$ zodat

$$\{\mu_r\} = E[\{p\} - \{p^A\}] = \{0\}$$

en dat de covariantie matrix $[S_{rr}]$

$$[S_{rr}] = E[(\{p\} - \{p^A\})(\{p\} - \{p^A\})^T]$$

kan worden opgegeven. De covariantie matrix is een maat voor de spreiding in de gekozen parameter $\{p^A\}$.

Verder wordt aangenomen dat het gemiddelde van de meetfouten $E[\{\epsilon\}] = 0$ en de covariantie matrix gegeven is $[S_{\epsilon\epsilon}]$.

Dan geldt dat het gemiddelde van $\{y\}$ is

$$E[\{y\}] = \{0\}$$

en de covariantie $[S_{yy}]$ is

$$[S_{yy}] = E[\{y\}\{y\}^T] = [T][S_{rr}][T]^T + [S_{\epsilon\epsilon}]$$

De covariantie [Syr] is

$$[Syr] = E[\{y\}\{r\}^T] = [T][Srr]$$

uitgaande dat $[S\epsilon r] = E[\{\epsilon\}\{r\}^T] = 0$ omdat $\{\epsilon\}$ en $\{r\}$ niet gecorreleerd zijn.

Gezocht wordt nu naar een verbeterde waarde van $\{r\}$, aangegeven met $\{r^C\}$, waarbij de variantie van $\{r\}$ en $\{r^C\}$ minimaal is.

Voor $\{r^C\}$ wordt geschreven

$$\{r^C\} = [G]\{y\}$$

De vraag is nu:

voor welke $[G]$ is de variantie $[Q] = E[(\{r^C\} - \{r\})(\{r^C\} - \{r\})^T]$ minimaal.

Voor $[Q]$ is te schrijven

$$\begin{aligned} [Q] &= E[(\{G\}\{y\} - \{r\})(\{G\}\{y\} - \{r\})^T] = \\ &= [G][Syy][G]^T - [G][Syr] - [Syr]^T[G]^T + [Srr] \end{aligned}$$

Het nulstellen van de variatie van $[Q]$ met betrekking tot $[G]$ geeft

$$[\delta G]([Syy][G]^T - [Syr]) + ([G][Syy]^T - [Syr]^T)[\delta G]^T = 0$$

Dus

$$[G] = [Syr]^T [Syy]^{-1}$$

en

$$\{r^C\} = [Syr]^T [Syy]^{-1} \{y\}$$

en dus

$$\{p^C\} = \{p^A\} + [Srr][T]^T ([T][Srr][T]^T + [S\epsilon\epsilon])^{-1} \times \begin{Bmatrix} \{\omega^{2M}\} & - \{\omega^{2A}\} \\ \{\varphi^M\} & - \{\varphi^A\} \end{Bmatrix}$$

5.3 Methode "Natke" voor het verbeteren van massa, dempings en stijfheids submatrices

5.3.1 Vooronderstelling

- Van de constructie is een analytische massa-, dempings- en stijfheidsmatrix bekend.
- In de constructie kunnen delen worden aangegeven waarin òf de massa, òf de demping òf de stijfheid òf de combinatie hiervan onzeker zijn en in aanmerking komen voor verbetering. De verbetering kan alleen maar zijn dat de submatrices behorend bij het onzekere constructie-deel met een factor vermenigvuldigd wordt.
- Van de constructie zijn gemeten de eigenfrequenties ω_r^M , de ongedempte trillingsvormen $\{\varphi^M\}_r$, de gegeneraliseerde massa m_r^M en demping β_r^M . Soms is ook gemeten de belasting die aangezet moet worden om de constructie in een ongedempte trillingsvorm te laten bewegen (appropriate excitation vector) $\{f^M\}_r$ en het 90° uit fase deel van de trillingsvorm $\{\varphi_{90}^M\}_r$. Het 90° uit fase deel kan alleen aanwezig zijn als de constructie niet goed wordt geëxciteerd.
- De gemeten grootheden hebben meetfouten, die meegenomen moeten worden.

5.3.2 Opzet van de methode

De methode gaat er van uit dat in de constructie delen kunnen worden aangewezen die onnauwkeurig geschematiseerd zijn. De gecorrigeerde matrices $[M^C]$, $[C^C]$ en $[K^C]$ worden opgebouwd uit submatrices van de nauwkeurige constructiedelen en submatrices van onnauwkeurige constructiedelen vermenigvuldigd met een nader te bepalen factor

$$[M^C] = [sM^A]_0 + a_k [sM^A]_k$$

$$[C^C] = [sC^A]_0 + b_k [sC^A]_k$$

$$[K^C] = [sK^A]_0 + c_k [sK^A]_k$$

De factoren a_k , b_k en c_k worden bepaald door het verschil tussen gemeten en berekende grootheden te minimaliseren.

Er zijn 3 methoden voorgesteld afhankelijk welke grootheden gemeten zijn. Deze methoden zijn

A Gemeten is ω_r^M , $\{\varphi^M\}_r$, $\{\varphi_{90}^M\}_r$, $\{f^M\}_r$, m_r^M , β_r^M .

De volgende verschil grootheden worden gebruikt in het minimalisatie proces

- belasting (appropriate excitation vector);
- gegeneraliseerde massa;
- gegeneraliseerde demping.

B Gemeten is ω_r^M , $\{\varphi^M\}_r$, $\{f^M\}_r$, m_r^M , β_r^M .

De volgende verschil grootheden worden gebruikt voor de massa- en stijfheidsmatrix correcties

- ongedempte bewegings vergelijkingen;
- gegeneraliseerde massa.

Voor de dempings matrix correcties

- belasting;
- gegeneraliseerde demping.

C Gemeten is ω_r^M , $\{\varphi^M\}_r$, m_r^M , β_r^M .

De volgende verschil grootheden worden gebruikt

- ongedempte bewegings vergelijkingen;
- gegeneraliseerde massa;
- gegeneraliseerde demping.

5.3.3. Wiskundige uitwerking

De 3 methoden gaan uit van de volgende basisvergelijkingen bij harmonische excitatie

$$(-\omega^2[M]+j\omega[C]+[K])\{\hat{x}\} = \{\hat{f}\}$$

Indien $\{f\}_r$ een appropriate excitatie vector is voor de r^{de} trillingsvorm $\{\varphi\}_r$ geldt

$$(-\omega_r^2[M]+[K])\{\varphi\}_r = \{0\}$$

$$-\omega_r[C]\{\varphi\}_r = \{f\}_r$$

De gegeneraliseerde grootheden zijn gedefinieerd als

$$m_r = \{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_r$$

$$2\beta_r = \{\varphi\}_r^T [C] \{\varphi\}_r / \omega_r m_r$$

De matrices in de basisvergelijkingen zijn opgebouwd gedacht uit de volgende submatrices

$$[M^C] = [sM^A]_0 + a_k [sM^A]_k$$

$$[C^C] = [sC^A]_0 + b_k [sC^A]_k$$

$$[K^C] = [sK^A]_0 + c_k [sK^A]_k$$

waarin a_k , b_k en c_k nader te bepalen factoren zijn.

Methode A

Bij deze methode is gemeten ω_r^M , $\{\varphi^M\}_r$, $\{\varphi_{90}^M\}_r$, $\{f^M\}_r$, m_r^M , β_r^M . De factoren a_k , b_k en c_k worden bepaald door de verschillen tussen berekende en gemeten waarden van de excitatie belasting, gegeneraliseerde massa en gegeneraliseerde demping te minimaliseren.

Deze verschillen zijn

$$\{v_1\}_r = \{f^M\}_r - \{f^C\}_r$$

$$v_{2r} = m_r^M - m_r^C$$

$$v_{3r} = \beta_r^M - \beta_r^C$$

met

$$\{f^C\}_r = (-\omega_r^{2M} [M^C] + j\omega_r^M [C^C] + [K^C]) (\{\varphi_{90}^M\}_r + j\{\varphi^M\}_r)$$

$$m_r^C = \{\varphi^M\}_r^T [M^C] \{\varphi^M\}_r$$

$$\beta_r^C = \{\varphi^M\}_r^T [C^C] \{\varphi^M\}_r / 2\omega_r^M m_r^M$$

Er wordt nu een vector $\{v\}$ gedefinieerd

$$\{v\}^T = \{\{v_1\}_1^T, \{v_1\}_2^T \dots \{v_1\}_n^T, v_{21}, \dots, v_{2n}, v_{31}, \dots, v_{3n}\}$$

Het minimum van $\{v\}$ wordt bepaald met behulp van de kleinste kwadraten methode waarbij de elementen van $\{v\}$ nog een weegfunctie meekrijgen.

De minimalisering volgt uit

$$\min(\{v\}^{*T} [G] \{v\}^T)$$

met $\{v\}^*$ is de toegevoegde complexe vector van $\{v\}$ en $[G]$ is een weegmatrix waarvoor de inverse van de covariantie matrix $[S_{\epsilon\epsilon}]$ van de bijbehorende meetfouten is genomen.

Het minimum volgt dan uit het nulstellen van de afgeleiden van de minimalisering functie met betrekking tot a_k, b_k en c_k .

$$\text{Re}(D\{v\}^{*T} [G] \{v\}) = 0$$

met

$$D\{v\} = - \left[\frac{\partial \{v\}}{\partial a_1}, \frac{\partial \{v\}}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial \{v\}}{\partial c_n} \right]$$

Voor $\{v\}$ kan geschreven worden

$$\{v\} = \{d\} - D\{v\} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{Bmatrix}$$

Voor $\{a\}, \{b\}$ en $\{c\}$ wordt nu gevonden

$$\begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = (D\{v\}^T [G] D\{v\})^{-1} (D\{v\}^T [G] \{d\})$$

Er geldt nu

$$\frac{\partial \{v\}}{\partial a_k} = \left\{ \begin{array}{c} + \omega_r^M [sM^A]_k (\{\varphi_{90}^M\}_r + j\{\varphi^M\}_r) \\ - \{\varphi^M\}_r^T [sM^A]_k \{\varphi^M\}_r \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial \{v\}}{\partial b_k} = \left\{ \begin{array}{c} -j\omega_r^M [sC^A]_k (\{\varphi_{90}^M\}_r + j\{\varphi^M\}_r) \\ 0 \\ -\{\varphi^M\}_r^T [sC^A]_k \{\varphi^M\}_r / 2\omega_r^M m_r^M \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial \{v\}}{\partial c_k} = \left\{ \begin{array}{c} -[sK^A]_k (\{\varphi_{90}^M\}_r + \{\varphi^M\}_r) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\{d\} = \left\{ \begin{array}{c} \{f^M\}_r - (-\omega_r^2 [sM^A]_0 + j\omega_r^M [sC^A]_0 + [K^A]_0) (\{\varphi_{90}^M\}_r + j\{\varphi^M\}_r) \\ m_r^M - \{\varphi^M\}_r^T [sM^A]_0 \{\varphi^M\}_r \\ \beta_r^M - \{\varphi^M\}_r^T [sC^A]_0 \{\varphi^M\}_r / 2\omega_r^M m_r^M \end{array} \right\}$$

Hierin is r de rij-index.

Methode B

Bij deze methode is gemeten ω_r^M , $\{\varphi^M\}_r$, $\{f^M\}_r$, m_r^M , β_r^M .

De factoren a_k , b_k en c_k worden nu bepaald door de verschillen tussen berekende en gemeten waarden van de excitatie belasting, de gegeneraliseerde massa en demping. Deze verschillen zijn gelijk aan die bij methode A behalve de belastingsvector. Hiervoor wordt nu gekozen

$$\{v_1\}_r = \{\varphi^M\}_r^T (\{f^M\}_r + \omega_r^M [B^C] \{\varphi^M\}_r)$$

Er wordt een vector $\{v_4\}_r$ gedefinieerd als

$$\{v_4\}_r = (-\omega_r^M [M^C] + [K^C]) \{\varphi^M\}_r$$

Deze vector is alleen nul als de niet gemeten grootheid $\{\varphi_{90}^M\}_r$ nul is.

Het blijkt nu dat de factoren a_k en c_k alleen in v_{2r} en $\{v_4\}_r$ en b_k alleen in $\{v_1\}_r$ en v_{3r} voorkomen. Hiermee kan het probleem gesplitst worden en twee minimaliserings vraagstukken worden opgesteld.

Gedefinieerd wordt

$$\{v_a\}^T = \{\{v_4\}_1^T, \dots, \{v_4\}_n^T, v_{21}, \dots, v_{2n}\}$$

$$\{v_b\}^T = \{\{v_1\}_1^T, \dots, \{v_1\}_n^T, v_{31}, \dots, v_{3n}\}$$

$$D\{v_a\} = - \left[\frac{\partial \{v_a\}}{\partial a_1} \dots \frac{\partial \{v_a\}}{\partial a_n}, \frac{\partial \{v_a\}}{\partial c_1} \dots \frac{\partial \{v_a\}}{\partial c_n} \right]$$

$$D\{v_b\} = - \left[\frac{\partial \{v_b\}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial \{v_b\}}{\partial b_n} \right]$$

De minimum voorwaarden zijn

$$\text{Re}[D\{v_a\}^{*T} [G_a] \{v_a\}] = 0$$

$$\text{Re}[D\{v_b\}^{*T} [G_b] \{v_b\}] = 0$$

Hierin zijn $[G_a]$ en $[G_b]$ weegmatrices vergelijkbaar met $[G]$ uit methode A.

Voor $\{v_a\}$ en $\{v_b\}$ kan worden geschreven

$$\{v_a\} = \{d_a\} - D\{v_a\} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{c\} \end{Bmatrix}$$

$$\{v_b\} = \{d_b\} - D\{v_b\} \{b\}$$

Er volgt dan voor {a}, {b} en {c}

$$\begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = (D\{v_a\}^T [G_a] D\{v_a\})^{-1} (D\{v_a\}^T [G_a] \{d_a\})$$

$$\{b\} = (D\{v_b\}^T [G_b] D\{v_b\})^{-1} (D\{v_b\}^T [G_b] \{d_b\})$$

Er geldt nu

$$\frac{\partial \{v_a\}}{\partial a_k} = \begin{Bmatrix} -\omega_r^M [sM^A]_k \{\varphi^M\}_r \\ -\{\varphi^M\}_r [sM^A]_k \{\varphi^M\}_r \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \{v_a\}}{\partial c_k} = \begin{Bmatrix} [sK^A]_k \{\varphi^M\}_r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{d_a\} = \begin{Bmatrix} (-\omega_r^M [sM^A]_0 + [sK^A]_0) \{\varphi^M\}_r \\ m_r^M - \{\varphi^M\}_r^T [sM^A]_0 \{\varphi^M\}_r \end{Bmatrix}$$

en

$$\frac{\partial \{v_b\}}{\partial b_k} = \begin{Bmatrix} \omega_r^M \{\varphi^M\}_r^T [sB^A]_k \{\varphi^M\}_r \\ -\{\varphi^M\}_r^T [sB^A]_k \{\varphi^M\}_r / 2\omega_r^M m_r^M \end{Bmatrix}$$

$$\{d_b\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi^M\}_r^T \{f^M\}_r + \omega_r^M \{\varphi^M\}_r^T [sB]_0 \{\varphi^M\}_r \\ \beta_r^M - \{\varphi^M\}_r^T [sB]_0 \{\varphi^M\}_r / 2\omega_r^M m_r^M \end{Bmatrix}$$

met r als rij index.

Methode C

Bij deze methode is gemeten ω_r^M , $\{\varphi^M\}_r$, m_r^M en β_r^M .

De factoren a_k , b_k en c_k worden bepaald op dezelfde wijze als bij methode B, echter met weglating van de vector $\{v_1\}_r$.

Voor de factoren a_k , b_k en c_k volgt dan

$$\begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = (D\{v_a\}^T [G_a] D\{v_a\})^{-1} (D\{v_a\}^T [G_a] \{d_a\})$$

$$\{b\} = (D\{v_b\}^T [G_b] D\{v_b\})^{-1} (D\{v_b\}^T [G_b] \{d_b\})$$

met

$$\{v_a\}^T = \{\{v_4\}_1^T, \dots, \{v_4\}_n^T, v_{21}, \dots, v_{2n}\}$$

$$\{v_b\}^T = \{v_{31}, \dots, v_{3n}\}$$

$$D\{v_a\} = - \left[\frac{\partial \{v_a\}}{\partial a_1} \dots \frac{\partial \{v_a\}}{\partial a_n}, \frac{\partial \{v_a\}}{\partial c_1} \dots \frac{\partial \{v_a\}}{\partial c_n} \right]$$

$$D\{v_b\} = - \left[\frac{\partial \{v_b\}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial \{v_b\}}{\partial b_n} \right]$$

$$\frac{\partial \{v_a\}}{\partial a_k} = \begin{Bmatrix} -\omega_r^M [sM^A]_k \{\varphi^M\}_r \\ -\{\varphi^M\}_r^T [sM^A]_k \{\varphi^M\}_r \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \{v_a\}}{\partial c_k} = \begin{Bmatrix} [sK^A]_k \{\varphi^M\}_r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{d_a\} = \begin{Bmatrix} (-\omega_r^M [sM^A]_0 + [sK^A]_0) \{\varphi^M\}_r \\ m_r^M - \{\varphi^M\}_r^T [sM^A]_0 \{\varphi^M\}_r \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \{v_b\}}{\partial b_k} = \{-\{\varphi\}_r^M [sB^A]_k \{\varphi\}_r^M / 2\omega_r^M m_r^M\}$$

$$\{d_b\} = \{\beta_r^M - \{\varphi\}_r^M [sB^A]_0 \{\varphi\}_r^M / 2\omega_r^M m_r^M\}$$

met r als rij index.

6 SLOTOPMERKINGEN

Een aantal in de literatuur voorgestelde methoden voor het verbeteren van het analytisch dynamisch model van een constructie is besproken. Geprobeerd is de fysische en wiskundige achtergronden van de methoden te belichten.

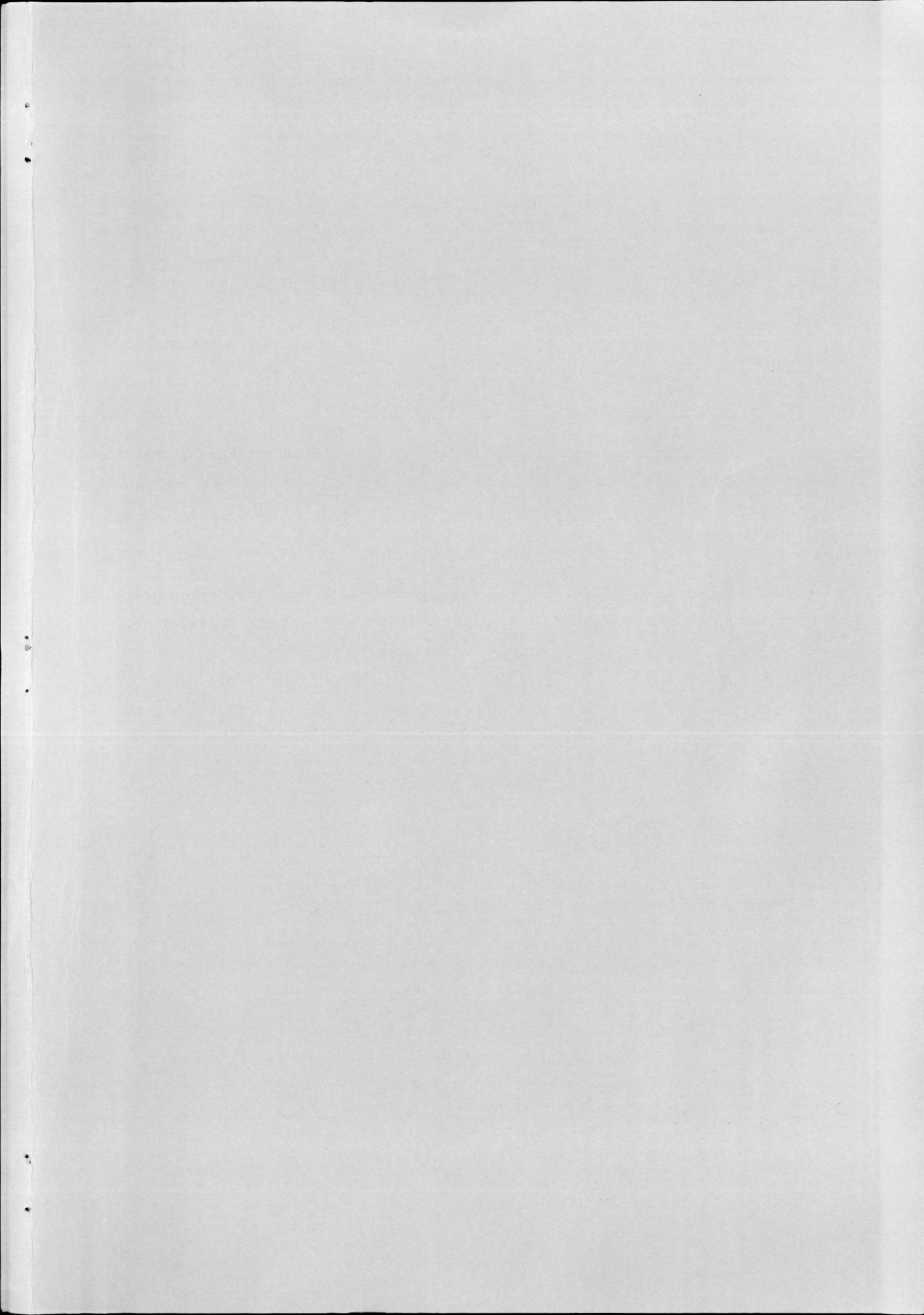
Er is nog geen evaluatie van de methoden gegeven omdat dit pas goed aan de hand van een aantal concrete gevallen zal kunnen worden gedaan. Hiervoor is echter noodzakelijk dat de methoden geprogrammeerd worden aansluitend op een eindig elementen programme (bijvoorbeeld NASTRAN).

In een vervolgstudie zal aan de evaluatie van de methoden aandacht worden besteed.

7 REFERENTIES

1. Kooi, B.W. Modal Survey: overzicht van methoden voor aktualisatie van mathematische modellen.
Fokker rapport TR R 84-112
2. Ottens, H.H. Model survey: overzicht van in de literatuur voorgestelde methoden.
NLR rapport NLR TR 83144 L, dec. 1983
3. Ottens, H.H. Modal survey: inventarisatie van beschikbare meetopstellingen bij Fokker en NLR.
NLR rapport NLR TR 84023 L, febr. 1984

4. Berman, A.,
Wei, F.S. Automated dynamic analytical model improvement.
NASA Contractor Report 3452, July 1981
5. Baruch, M. Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes.
AIAA Journal Vol. 20, No. 11, 1982
6. Chen, J.C., Kuo, C.P.,
Garba, J.A. Direct structural parameter identification by model testing.
AIAA paper 83-0812, 1983
7. Collins, J.D.,
Hart, G.C.,
Hasselman, T.K.,
Kennedy, B. Statistical identification of structures
AIAA Journal Vol. 12, No. 2, Febr. 1974
8. Natke, H.G. Deliberations on the improvement of the computational model with measured eigenmagnitudes.
Roum Sci Techn. Méc. Appl. Tome 28,
No. 2, Bucarest 1983



**NATIONAAL LUCHT- EN
RUIMTEVAARTLABORATORIUM**

Anthony Fokkerweg 2, 1059 CM AMSTERDAM
Postbus 90502 , 1006 BM AMSTERDAM
Tel. (020) 5113113 - telex 11118 (nlraa nl)
Telegram-adres: Windtunnel Amsterdam