

SBW Hervalidatie piping

HP3. Gedrag van klei

Farshad Hesami
Cor Zwanenburg

Titel
SBW Hervalidatie piping
HP3. Gedrag van klei

Opdrachtgever	Project	Kenmerk	Pagina's
RWS Waterdienst	1200187-007	1200187-007-GEO-0001	29

Trefwoorden
Piping, stabiliteit erosiekanaal, stijfheid, vervorming, klei

Samenvatting

Centraal in dit rapport staat de stabiliteit van erosiekanaalen die ontstaan bij het pipingproces. De stabiliteit van erosiekanaalen is belangrijk bij het begrijpen van het pipingproces onder bestaande dijken en daarmee voor de toetsing van waterkeringen op piping. Indien de erosiekanaalen niet worden dicht gedrukt kan accumulatie van erosie bij opeenvolgende hoogwaterperioden optreden. Dit wordt in de huidige toetsing niet mee genomen. Indien tijdens het erosieproces de kanaaltjes dichtdrukken, wordt het piping proces beïnvloed. Onduidelijk is of dit een gunstig of ongunstig effect heeft.

Doel van het onderzoek is na te gaan of met behulp van berekeningen kan worden aangetoond dat erosiekanaaltjes die tijdens het piping proces onder dijken zijn ontstaan, door het dijklichaam in de loop van de tijd worden dichtgedrukt. Dit is van belang omdat nog niet duidelijk is wat de invloed van voorgaande hoogwaters op het pipingproces is.

In deze eerste aanzet voor het berekenen van de vervormingen rondom de erosiekanaalen is gekozen voor een kwalitatieve analyse aan de hand van een aantal oriënterende berekeningen. Aan de hand van de berekeningen kunnen geen definitieve conclusies worden getrokken. Wel kunnen er tendensen worden waargenomen. Op basis van de berekeningen mag worden verwacht dat de kleine erosie kanalen die aan het begin van het pipingproces ontstaan niet worden dichtgedrukt. De grote erosiekanaalen die aan het einde van het proces zich ontwikkelen zullen wel worden dichtgedrukt. De tijd die hier voor nodig is, is kort. Naar verwachting treden de vervormingen op direct na het optreden van piping tot 1 à 2 maanden na afloop. Hieruit volgt de verwachting dat tijdens het dichtdrukken van de erosiekanaalen het pipingproces niet beïnvloedt.

Op basis van deze resultaten kunnen praktijkproeven op dit punt gericht worden uitgevoerd. De resultaten dragen niet bij aan de toetsregel zelf. Ze kunnen wel goed bijdragen aan de discussie met de dijkbeheerders over de mechanismen die een rol spelen bij het pipingproces.

Om de resultaten van het onderzoek beter te onderbouwen wordt experimenteel onderzoek aansluitend aan de IJkdijkproef aanbevolen. Een beschrijving van en dergelijke proef opzet is gegeven in hoofdstuk 5.

Versie	Datum	Auteur	Paraaf	Review	Paraaf	Goedkeuring	Paraaf
02	2009-10-01	Ir. M. Hesami		Ir. J.G. Knoeff		Ing. A.T. Aantjes	
		Dr.ir. C. Zwanenburg					

Status
definitief

Titel

SBW Hervalidatie piping
HP3. Gedrag van klei

Opdrachtgever

RWS Waterdienst

Project

1200187-007

Kenmerk

1200187-007-GEO-0001

Pagina's

29

Inhoud

1 Inleiding	1
1.1 Achtergrond	1
1.2 SBW Hervalidatie Piping	1
1.3 Toelichting onderzoek gedrag van klei	3
1.4 Doel van het onderzoek naar gedrag van klei	4
1.5 Aansluiting onderzoek gedrag van klei bij andere onderdelen SBW piping	4
2 Aanpak	5
3 Berekeningen	7
3.1 Schematisatie	7
3.2 Grondeigenschappen	9
3.3 Resultaten	10
4 Analytische berekeningen	15
4.1 Uitgangspunten en randvoorwaarden	15
4.2 Berekeningsresultaten	16
5 Conclusies en Vervolg	19
5.1 Conclusies	19
5.2 Aanbevelingen	20
Bijlage(n)	
A Analytische oplossing Elastische ondersteunde ligger	23

1 Inleiding

1.1 Achtergrond

In het project Veiligheid Nederland in Kaart I kwam piping als een dominant faalmechanisme naar voren, hetgeen niet aansluit bij het beheerdersoordeel. Nader onderzoek naar de betrouwbaarheid van de resultaten van de pipinganalyses binnen VNK wees uit dat de kans op piping, bij een betere schematisatie, kleiner zou worden maar nog steeds groter is dan verwacht. Ook vanuit de historie zijn aanwijzingen dat het pipingmechanisme relevanter kan zijn dan tot nu toe gedacht. Het is niet uit te sluiten dat de kans op piping is onderschat en onveilige procedures rondom het schematiseren en voorschrijven van rekenmodellen zijn opgesteld. Aan de betrouwbaarheid van rekenmodellen wordt getwijfeld.

Teneinde de onzekerheden binnen de huidige piping toetsingsregels in beeld te krijgen en deze eventueel te verkleinen of elimineren is het onderzoeksspoor SBW Hervalidatie Piping opgestart.

1.2 SBW Hervalidatie Piping

In Nederland wordt voor aspecten rondom piping teruggegrepen naar het eind jaren negentig opgestelde Technisch Rapport Zandmeevoerende wellen van de TAW [1999]. In dit rapport wordt het pipingproces en bijbehorende rekenmodellen beschreven.

In een inventariserende studie die voor dit onderzoek in 2007 is uitgevoerd [Bruijn, Knoeff], is geconcludeerd dat er geen redenen zijn om aan te nemen dat de algemene procesbeschrijving van piping in het genoemde technische rapport onjuist is. In het geschematiseerde proces van het bezwijken van een dijk door piping zijn echter nog een aantal mechanismen die zeer globaal worden beschreven. Zo is bijvoorbeeld het ontstaan van kanaaltjes onder een dijk onomstreden. Dit proces is vele malen geconstateerd bij klein- en grootschalige proeven. De schematisatie van het proces van kanaalvorming is echter niet eenduidig vastgelegd en / of onvoldoende gevalideerd. Er is onvoldoende informatie over de wijze waarop de hooguit enkele centimeters brede en enkele millimeters diepe geultjes de grondwaterstroming beïnvloeden en hoe de waterdrukgradiënten om en nabij de geul samenhangen met het groeien ervan. Verbetering van de beschrijving hiervan leidt tot een beter inzetbaar en onderbouwd rekenmodel.

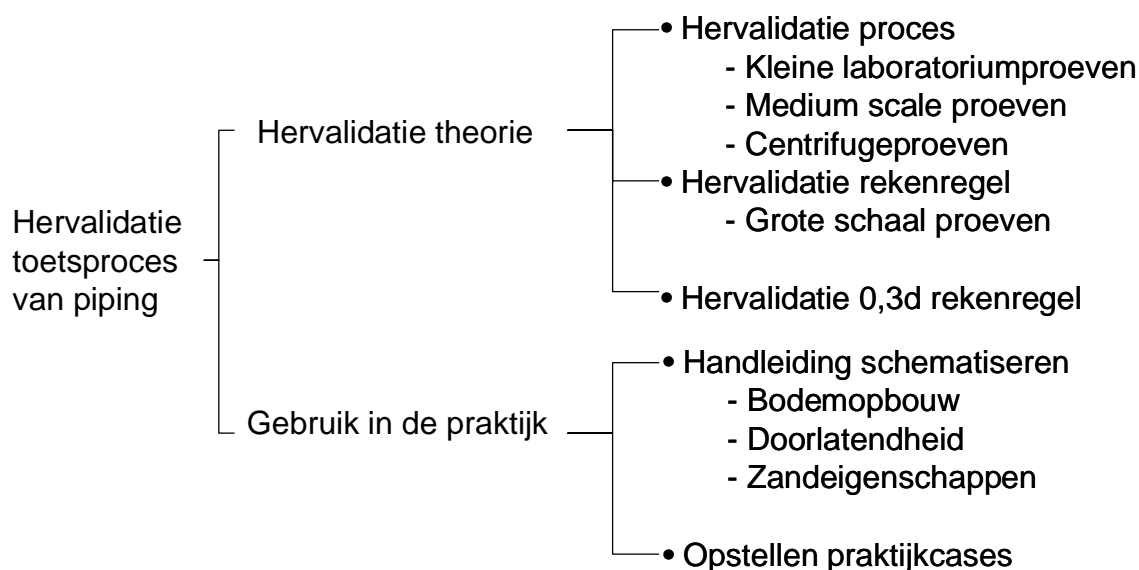
De meest gebruikte rekenregels om het risico op piping te bepalen zijn de regel van Bligh en de regel van Sellmeijer. De rekenregel van Bligh wordt internationaal het meest gebruikt.

De rekenregel van Bligh is gebaseerd op empirie, uit met name India, van bezweken en niet bezweken dammen. De rekenregel van Sellmeijer is gebaseerd op een mathematische beschrijving van de grondwaterstroming door het zandpakket en de pipe en de beschrijving van de stabiliteit van de zandkorrels in de pipe. De mathematische beschrijving is gefit aan enkele piping proeven die zijn uitgevoerd in de Deltagoot. Het pipingproces wordt in de rekenregel van Sellmeijer vanuit een meer complete modellering beschreven dan in de regel van Bligh.

Zoals elk rekenmodel is ook de rekenregel van Sellmeijer een mathematische schematisatie van de werkelijkheid. Voor een betrouwbaar resultaat van de regel van Sellmeijer dient de werkelijkheid op de juiste manier te worden geschematiseerd. Een praktische beschrijving van het geldigheidsgebied van de regel van Sellmeijer en de wijze waarop de werkelijkheid binnen dit geldigheidsgebied moet worden geschematiseerd ontbreekt in de literatuur.

De rekenregels van Bligh en Sellmeijer houden geen rekening met de verticale stroming en zandtransport door een kanaal in de afdeklaag. In de praktijk wordt hier pragmatisch mee omgegaan door het verval over de kering te reduceren met 0,3 keer de dikte van de afdeklaag, de zogenoemde 0,3 d rekenregel. Deze rekenregel is niet gevalideerd.

Het SBW onderzoek probeert de onzekerheden rondom de theorie en de toepassing van de rekenregel van Sellmeijer te verkleinen. In Figuur 1.1 zijn de belangrijkste deelonderzoeken uit het SBW Hervalidatie piping programma aangegeven.



Figuur 1.1 Opbouw SBW Hervalidatie piping

Voor de hervalidatie van het proces zijn inmiddels kleine schaalproeven, medium schaalproeven en centrifugeproeven uitgevoerd. In de kleine-schaalproeven is de invloed van verschillende parameters op het pipingproces onderzocht. Uit deze proeven bleek dat de relatie met de d_{70} , zoals opgenomen in de rekenregel van Sellmeijer niet wordt gevonden in deze proeven. Sellmeijer geeft een toename van het kritiek verhang bij een grotere korreldiameter. In de kleine-schaalproeven werd deze invloed niet of nauwelijks gevonden. Verder bleek de relatieve dichtheid van het zand van invloed op het type proces en op de grootte van het verhang. De invloed van de lengteschaal werd goed voorspeld door de regel van Sellmeijer.

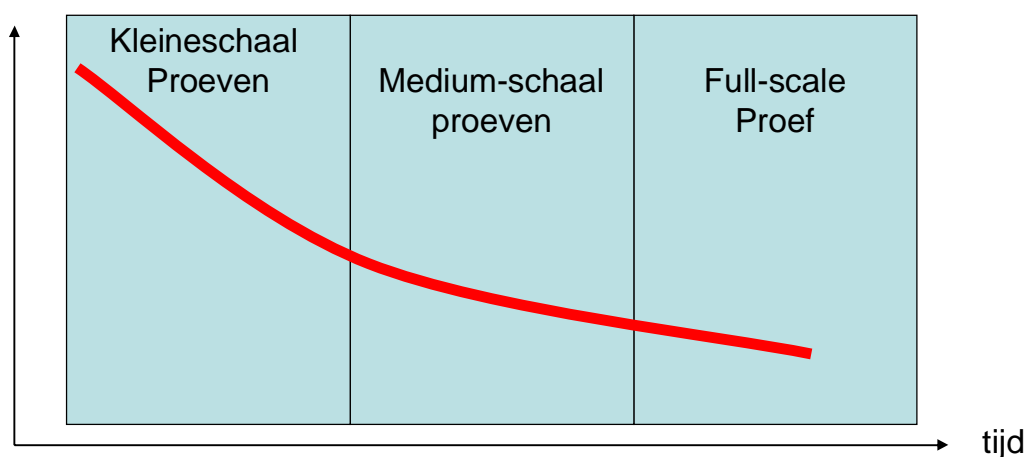
Met behulp van een multivariate analyse, uitgevoerd op deze proefresultaten, wordt een voorstel gedaan voor aanpassing van de rekenregel.

Validatie van deze regel voor redelijk vastgepakt zand ($50% < R_d < 80%$, voor losser en vaster gepakt zand lijken op basis van de kleine-schaalproeven andere mechanismen te spelen) zou plaats kunnen vinden in een full-scale proef (zie Figuur 1.2). Hierbij wordt gedacht aan een proefopstelling in de IJkdijk. Het is echter niet mogelijk om de gevonden resultaten volledig te verifiëren in een full-scale proef. Het aantal proeven dat uitgevoerd kan worden op full-scale is beperkt, omdat dit soort proeven hoge kosten met zich meebrengen.

Het is daarom noodzakelijk om een tussenstap te maken, waarin het schaafeffect bestudeerd kan worden en waarin de gevonden verschijnselen bevestigd worden, om tot een meer

betrouwbare aanpassing van de rekenregel te komen. Dit is de aanleiding geweest tot het uitvoeren van medium-schaalproeven.

onzekerheid



Figuur 1.2 Relatie experimentele onderzoeken SBW Hervalidatie Piping

1.3 Toelichting onderzoek gedrag van klei

Piping bij waterkeringen kan ontstaan als in een zandlaag onder de waterkering een dusdanige grondwaterstroming ontstaat dat zich in de zandlaag erosie ontwikkelt. Onder een cohesieve laag kunnen dan holle ruimten ontstaan. Bij doorgaande erosie worden de ruimten groter en kan bezwijken van de waterkering optreden. Belangrijk hierbij is dat de holle ruimten onder een cohesieve laag ontstaan. Immers in het midden van de zandlaag is een dergelijke holle ruimte niet stabiel. Direct bij het ontstaan zouden bovenliggende korrels het gat opvullen.

Bij het beschrijven van piping is de ontwikkeling van het erosieproces een belangrijk aspect. In de klassieke beschrijving van piping begint het erosieproces aan de benedenstroomse kant, de binnenteen van de waterkering. Vervolgens ontwikkelt zich een erosiekanaaltje in de bovenstroomse richting. Bij relatief lage waterstanden kan het begin van piping al ontstaan, echter dit begin zal weer tot rust komen tot een verdere stijging van de buitenwaterstand een vervolg aan de ontwikkeling van de erosiekanaaltjes geeft. Dit proces kan doorgaan tot er een kritisch verhang wordt bereikt waarna het erosieproces zichzelf versterkt. Het erosieproces is niet meer te stoppen en het erosiekanaal ontwikkelt zich verder tot deze aan de bovenstroomse zijde van de waterkering uitkomt. Er is nu direct contact met het buitenwater. Erosie neemt verder toe tot de waterkering volledig wordt ondergraven en bezwijkt. In dit proces is de afstand waarover een erosiekanaal zich moet ontwikkelen om contact te maken tussen de beneden- en bovenstroomse zijde een belangrijke parameter.

Het eerste begin van piping is in het veld herkenbaar als het ontstaan van zandmeevoerende wellen. Zandmeevoerende wellen zijn een welbekend fenomeen bij rivier en zeedijken. Als bij hoge rivierwaterstanden zandmeevoerende wellen worden aangetroffen, betekent dit dat er zich onder de waterkering erosiekanaaltjes hebben ontwikkeld.

In de pipingproeven die tot nu toe zijn uitgevoerd, waarin het piping proces werd gevisualiseerd, is het dijlichaam vervangen door een glazenplaat. Onder de plaat ontwikkelde het netwerk van erosiekanaaltjes zich en kon met behulp van video worden vastgelegd. Deze

kijkproeven leverde veel inzicht op in het ontstaan en ontwikkelen van het pipingproces. Echter de proeven leverden ook nieuwe onderzoeksvragen op. Een van de nieuwe vragen betreft de mogelijkheid van het dichtdrukken van erosiekanalen door het dijklichaam. Als erosiekanalen worden dichtgedrukt door het vervormen van het dijksmateriaal zal dit dichtdrukken het erosieproces beïnvloeden. Op voorhand zijn er twee mogelijke processen waarop de het dichtdrukken van erosiekanaaltjes het piping proces beïnvloedt.

Het eerste mogelijke proces betreft het dichtdrukken van erosiekanalen in de periode na een hoogwater. Bij het beoordelen van een waterkering op de weerstand tegen piping wordt uitgegaan van een beginsituatie, dus de waterkering wordt getoetst alsof piping voor het eerst optreedt. Echter van specifieke locaties is bekend dat er zich regelmatig, bij hoge waterstanden, zandmeevoerende wellen voordoen. Met enige regelmaat ontstaan er dus erosiekanaaltjes onder de waterkering. Hierdoor zou het mogelijk kunnen zijn dat bij het optreden van een bepaalde waterstand nog erosiekanaaltjes van een vorig hoogwater aanwezig zijn. Als dit het geval is, zou de afstand tussen de boven- en benedenstroomse zijde, de kwellingte, zijn verkort. Accumulatie van erosieprocessen van opeenvolgende pipingmomenten zou dan tot bezwijken kunnen leiden bij een lagere waterstand of kortere duur van optreden dan de analyses voorspellen. Omdat toetsing, thans, geen rekening houdt met accumulatie van erosie processen zou de toetsing van waterkeringen op piping gevoelige locaties onveilig kunnen zijn.

Het tweede mogelijke proces is het dichtdrukken van de kanaaltjes tijdens het ontwikkelen van het erosieproces. Als tijdens het erosieproces de kanaaltjes worden dichtgedrukt zal met enige regelmaat of het kanaaltje zicht opnieuw moeten ontwikkelen of wordt het meanderen van de erosiekanalen versterkt.

Om meer inzicht te krijgen in de mogelijkheid dat het dijksmateriaal dusdanig vervormt dat erosiekanaaltjes dicht worden gedrukt en de tijd die daarvoor nodig is, zijn een aantal eindige elementen berekeningen en analytische berekeningen uitgevoerd. De berekeningen en de bijbehorende conclusies zijn gerapporteerd in de navolgende hoofdstukken.

1.4 Doel van het onderzoek naar gedrag van klei

Doel van het onderzoek is na te gaan of met behulp van berekeningen kan worden aangetoond dat erosiekanaaltjes die tijdens het piping proces onder dijken zijn ontstaan, door het dijklichaam in de loop van de tijd worden dichtgedrukt.

In het simuleren van de vervormingen rondom een potentieel erosiegat spelen veel factoren een rol. Binnen dit complexe proces wordt in dit rapport gezocht naar een kwalitatieve beschouwing; er wordt een uitspraak gedaan over de aannemelijkheid van het wel of niet dichtdrukken van een erosiekanaal.

1.5 Aansluiting onderzoek gedrag van klei bij andere onderdelen SBW piping

Figuur 1.1 toont de opzet van het SBW onderzoek piping. Het onderzoek naar het gedrag van klei vormt hier een onderdeel van. De resultaten van het onderzoek naar het gedrag van klei hebben betrekking op de wijze waarop met name het begin van piping geschematiseerd moet worden en leveren een bijdrage voor het begrijpen van de praktijkcases.

2 Aanpak

Er spelen een groot aantal fenomenen een rol in de beantwoording van de vraag of een erosiekanaal onder een waterkering open blijft staan of wordt dichtgedrukt. De grootte van het gat is daar een van. Hoe breder het gat hoe makkelijker de boven liggende kleilaag doorhangt en het gat dicht drukt. Daarnaast geldt dat een dieper gat langer openblijft. De grootte van het gat is ook bepalend voor de spanningsspreiding rondom het gat, dat vervolgens weer mede bepalend is voor de mogelijkheid van het dichtdrukken daarvan. De dikte van de kleilaag speelt naar verwachting ook een rol. Aan de teen van de waterkering zal deze relatief beperkt zijn en zal toenemen in de richting van de kruin van de waterkering. Vervolgens zijn de eigenschappen van de klei met name stijfheid en volume gewicht belangrijk. Daarnaast zijn de berekeningsmethoden en toegepaste grondmodellen van invloed. Tot slot spelen fenomenen als consolidatie en kruip een rol in de tijd die nodig is voor het dichtdrukken van het gat.

In het vorige hoofdstuk is aangegeven dat er wordt uitgegaan van een kwalitatieve analyse. Hiervoor wordt een fictieve situatie zo eenvoudig mogelijk geschematiseerd. De exacte schematisatie is in hoofdstuk 3 respectievelijk 5 besproken. Er zijn eindige elementen berekeningen uitgevoerd waarin een gat onder de kleilaag is gesimuleerd. In de eindige elementen berekeningen zijn aspecten als spanningsspreiding rond het gat, plastisch vervormen en consolidatie in beschouwing genomen. Het aspect kruip is buiten beschouwing gelaten. Om indruk te krijgen van de invloed van verschillende aspecten is een aantal variaties doorgerekend. Er is gevarieerd met de dikte van de kleilaag, de grootte van het gat, de stijfheid van de klei en het toegepaste materiaalmodel.

Aandachtspunt bij de eindige elementen berekeningen is de grootte van het gat. De kanalen die in eerder experimenteel onderzoek zijn waargenomen zijn relatief klein. De breedte is beperkt van een aantal millimeters tot ruim een centimeter. De diepte is veelal in de orde grootte van enkele korreldiameters. Dergelijke kleine afmetingen, in relatie tot de dikte van de bovenliggende kleilaag is lastig te modelleren. Om numerieke problemen te voorkomen is bij voorbaat gekozen uit te gaan van een iets groter gat. Dit groter gat is representatief voor de eindfase van piping waarin een doorbraak is ontstaan en het erosiekanaal zich verder uitbreid. Verwacht mag worden dat een dergelijk gat zich met name in de omgeving van het wel zich voordoen.

Naast de eindige elementen berekeningen zijn ook analytische beschouwingen uitgevoerd. De analytische beschouwingen vergen een aanzienlijke versimpeling van het probleem. Echter omdat de analytische beschouwingen een geheel andere benadering hebben dan de eindige elementen berekeningen kunnen ze de resultaten van de eindige elementen berekeningen aanvullen. In de analytische beschouwing zijn de erosiekanaalen gemodelleerd als een reductie van de ondersteuning van de kleilaag. Een reductie van ondersteuning over een zekere lengte staat representatief voor een web van erosiekanaaltjes in het bewuste traject.

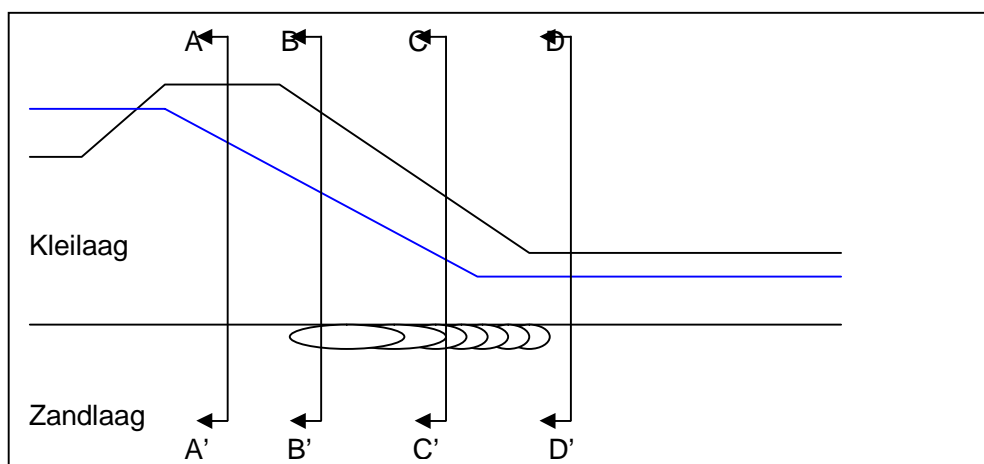
Uit de berekeningen die met een verschillende invalshoek zijn uitgevoerd volgt een beeld over de mogelijkheid van het indrukken van de erosiekanaaltjes door het boven gelegen dijklichaam. Dit beeld wordt gebruikt om een antwoord te formuleren op de onderzoeksvragen en tevens om het formuleren van experimenteel onderzoek dat aansluitend op de IJkdijk-piping proef kan worden uitgevoerd.

3 Berekeningen

3.1 Schematisatie

Voor het uitvoeren van de berekeningen zijn 4 dwarsdoorsneden uitgekozen elk met een toenemende kleidikte. Deze 4 doorsneden zijn representatief voor een erosiekanaal dat steeds verder van het uittredepunt is gegroeid. De toenemende kleidikte in de opeenvolgende doorsneden geven dan het steeds hoger worden van het dijklichaam weer. In de opeenvolgende dwarsprofielen is dan ook een steeds hoger wordende grondwaterstand aangenomen.

Figuur 1 toont de gehanteerde schematisatie. Voor een willekeurig dijklichaam zijn 4 dwarsprofielen gedefinieerd. De dwarsprofielen zijn aangeduid met A tot en met D. Het verschil tussen de dwarsprofielen is de dikte in bovenliggende kleilaag. Tevens is er een verloop in grondwaterstand aangehouden. Ter plaatse van de kruin van het dijklichaam wordt een hogere grondwaterstand aangehouden dan aan de teen van het dijklichaam. Met de toenemende laagdikte nemen ook de spanningen rondom het gat toe. Tabel 1 geeft de belangrijkste hoofdafmetingen van de dwarsprofielen. In alle gevallen is voor de zandlaag een dikte van 7 m aangehouden.



Figuur 1 schematisatie dijklichaam.

Om de berekeningen zo eenvoudig mogelijk te houden is er voor gekozen de stijghoogte in de zandlaag gelijk te houden aan een stijghoogte die hoort bij de grondwaterstand in de kleilaag.

In het gat is eveneens een waterdruk aangehouden die overeenkomt met de grondwaterstand. In het gat is dus geen overdruk als gevolg van waterstroming of contact met hoge buitenwaterstand aangehouden. Een dergelijke situatie geeft de condities na een hoogwater. Opgemerkt wordt dat in de opeenvolgende berekeningen een steeds hogere grondwaterstand in rekening wordt gebracht. Hierdoor is voor de opeenvolgende berekeningen een steeds hogere waterspanning in de zandlaag en in het gat in rekening gebracht.

In de serie berekeningen is gekozen met een breed gat van 30 cm en een minder breed gat van 16 cm. De erosiekanalen die zijn aangetroffen bij de eerder uitgevoerde pipingproeven

tot dusver zijn aangetroffen zijn aanzienlijk kleiner, in de orde van 1 à 2 cm. In deze serie berekeningen, die worden beschouwd als oriënterende berekeningen, is uitgegaan van de breedtes van 30 en 16 cm. Hiermee worden mogelijke numerieke problemen voorkomen.

De eerste serie berekeningen is uitgevoerd met het Mohr Coulomb model. De overige serie berekeningen zijn uitgevoerd met het Hardening Soil Model. Het belangrijkste verschil tussen beiden methoden is de wijze waarop met plasticiteit van de grond wordt omgegaan. Berekeningen laten dan ook het verschil in berekende vervormingen langs het gat zien.

De berekeningen worden uitgevoerd in drie stappen. In de eerste stap wordt het eigen gewicht geactiveerd. In de tweede stap wordt het gat aangebracht. Deze stap wordt ongedraineerd uitgevoerd en levert de ongedraineerde vervormingen op die direct bij het ontstaan van het gat optreden. Vervolgens wordt in de derde stap een consolidatie berekening uitgevoerd. Bij het begin van de elke rekenstap worden de verplaatsingen op 0 gezet.

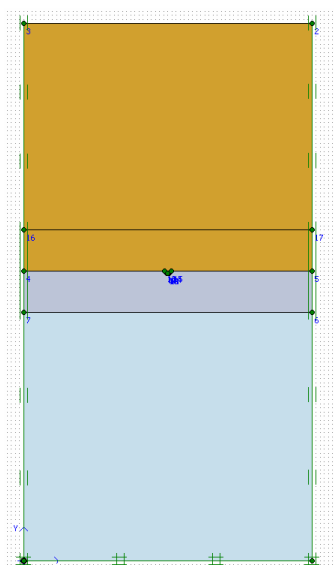
Doorsnede	Kleidikte [m]	Hoogte gws* [m]	Verticale korrelspanning** [kN/m ²]
A	6	3,00	74,19
B	4	2,00	49,34
C	2	1,15	23,41
D	1	0,70	10,64

Tabel 1 Schematisatie

* hoogte grondwaterstand ten opzichte van bovenkant gat (= onderzijde kleilaag)

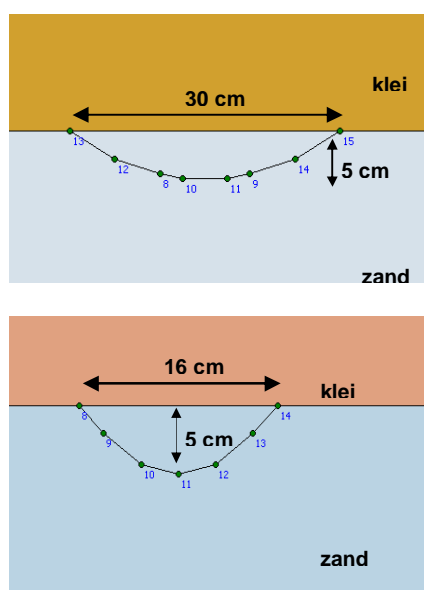
** oorspronkelijke verticale korrelspanning ter hoogte van bovenzijde gat voordat deze is geactiveerd.

Onder de kleilaag wordt het erosiekanaal gesimuleerd door middel van een gat direct onder de kleilaag. Figuur 2 toont de dwarsdoorsnede ter plaatse van A-A'. Het dijklichaam bestaat hier uit 6 m klei en een 7 m dikke zandlaag.



Figuur 2 dwarsdoorsnede A-A'

Figuur 3 toont de aangenomen geometrie van het gat. Er is onderscheid gemaakt tussen een breed gat, figuur 3a en een smal gat, figuur 3b.



Figuur 3 geometrie erosiekanaal, a) breed gat, b) smal gat

Belangrijk bij het schematiseren van het gat is de helling van de randen van het gat. Deze dient flauwer te zijn dan de hoek van inwendige wrijving van de zandlaag. Immers bij een steiler talud ontstaan er problemen met de stabiliteit van de randen van het gat, terwijl onderwerp van onderzoek de verticale vervormingen van de bovenzijde van het gat is.

De eindige elementen berekeningen zijn uitgevoerd met het computerprogramma PLAXIS versie 8.6.0.

3.2 Grondeigenschappen

In de onderstaande tabel zijn de toegepaste materiaaleigenschappen gegeven. Voor de eerste oriënterende berekeningen is het Mohr Coulomb model toegepast. In een latere verfijning is het Hardening Soil Model toegepast. Het betreft hier een fictieve situatie. De grondeigenschappen zijn dan ook gekozen. De keuze is gebaseerd op K0-CRS proeven uitgevoerd op stijve klei. Tabel 2 en 3 tonen de toegepaste waarden.

Hardening Soil model		Klei lage E	Klei hoge E	zand
type		Undrained	Undrained	Drained
γ_n	[kN/m ³]	18,4	18,4	20
γ_d	[kN/m ³]	16,4	16,4	19
k_x	[m/d]	0,01	0,01	5
k_y	[m/d]	0,01	0,01	5
E_{50}^{ref}	[kN/m ²]	1200	2400	38000
E_{oed}^{ref}	[kN/m ²]	600	1200	38000
E_{ur}	[kN/m ²]	11638	186330	17160
m	[-]	1	1	0,5
c_{ref}	[kN/m ²]	3	3	1
φ	[°]	20	20	35
ν	[-]	0,33	0,33	0,3

Tabel 2 toegepaste materiaal eigenschappen Hardening Soil Model.

Mohr Coulomb model		Klei _{lage E}	Zand
type		Undrained	drained
γ_n	[kN/m ³]	18,4	20
γ_d	[kN/m ³]	16,4	19
k_x	[m/d]	0,01	5
k_y	[m/d]	0,01	5
E_{oed}	[kN/m ²]	600	38000
m	[-]	1	1
c_{ref}	[kN/m ²]	3	1
φ	[°]	20	35
ν	[-]	0,33	0,3

Tabel 3 toegepaste materiaal eigenschappen Mohr Coulomb model

3.3 Resultaten

Zoals in paragraaf 3.1 aangegeven is een groot aantal berekeningen uitgevoerd. In totaal zijn 5 varianten gecombineerd met vier laagdikten klei. Tabel 4 geeft een toelichting op de vijf varianten die elk weer zijn gecombineerd met verschillende kleilaagdikten. De variatieaanduiding uit tabel 4 is ook gebruikt in tabel 5 en figuren 4 tot en met 8.

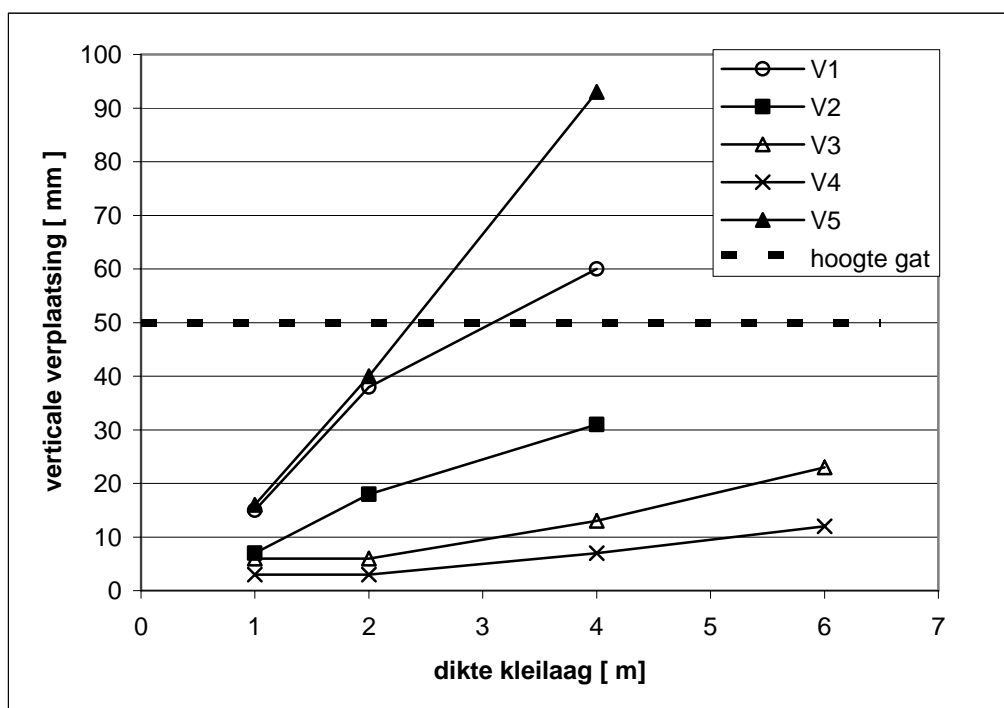
variatie	beschrijving
V1	Hardening soil model bij een groot gat en kleilaag met een lage E-waarde
V2	Hardening soil model bij een groot gat en kleilaag met een hoge E-waarde
V3	Hardening soil model bij een klein gat en kleilaag met een lage E-waarde
V4	Hardening soil model bij een klein gat en kleilaag met een hoge E-waarde
V5	Mohr Coulomb model bij een groot gat en kleilaag met een lage E-waarde

Tabel 4 berekende varianten

Tabel 5 presenteert de berekende vervormingen. Voor elke kleilaagdikte is de verticale verplaatsing in het midden van het gat gepresenteerd. De 2^e, 5^e, 8^e en 11^e kolom geven de ongedraineerde vervormingen. Dit zijn de vervormingen die direct optreden als het gat zich aanzienlijk sneller ontwikkelt dan dat consolidatie verloopt. De 3^e, 6^e, 9^e en 12^e kolom geven de vervormingen die zich tijdens consolidatie ontwikkelen. De 4^e, 7^e, 10^e en 13^e kolom geven tenslotte de totaal te verwachten vervormingen weer. Dit is de som van de ongedraineerde vervormingen en de vervormingen die zich tijdens de consolidatiefase erbij ontwikkelen.

variant	1 m klei			2 m klei			4 m klei			6 m klei		
	ong	cons	totaal	ong	cons	totaal	ong	cons	totaal	ong	cons	totaal
V1	4	11	15	5	33	38	5	55	60	5	>> [*]	>> [*]
V2	2	5	7	3	15	18	3	28	31	3	>> [*]	>> [*]
V3	2	4	6	2	4	6	3	10	13	2	21	23
V4	1	2	3	1	2	3	2	5	7	1	11	12
V5	6	10	16	14	26	40	30	61	91	44	>> [*]	>> [*]

Tabel 5 berekende totale vervormingen [mm], ong = ongedraineerde vervormingen, cons = vervormingen die optreden tijdens de consolidatiefase. >>^{*} = berekende vervorming vele malen groter dan 50 mm.



Figuur 4 Berekeningsresultaten, totale verticale verplaatsingen ter hoogte van het midden van het gat.

Voor de berekeningsvarianten met een bovenlaag met 6 m en een groot gat worden extreem grote vervormingen berekend. Deze grote vervormingen duiden op bezwijken van de grond boven het gat. De berekende waarden zijn niet opgenomen in tabel 5 en figuur 4. Echter de berekeningsresultaten tonen dat voor die gevallen het gat wordt dichtgedrukt.

Figuur 4 toont de berekeningsresultaten. De deformatie die op de verticale as van figuur 4 is uitgezet geeft de verticale verplaatsing ter plaatse van het midden van de bovenzijde van het gat. Opgemerkt wordt dat het gat een hoogte heeft van 50 mm. Berekeningsresultaten waarin een verplaatsing groter dan 50 mm is uitgerekend geven de omstandigheden weer waar het gat wordt dichtgedrukt. Bij kleinere vervormingen blijft het gat openstaan. Berekende vervormingen groter dan 50 mm zijn onrealistisch, het gat is immers dicht gedrukt.

Figuur 4 laat zien dat het stijfheidsverschil dat in rekening is gebracht minder invloed heeft dan de in rekening gebrachte variatie in gatgrootte. Conform verwachting leidt een kleiner gat tot kleinere vervormingen. Eveneens volgens verwachting leidt een stijvere klei tot kleinere vervormingen. Uit de berekeningen volgt dat bij de toegepaste sterkte- en stijfheidsparameters het gat met breedte van 16 cm niet dicht gedrukt wordt. Dit geldt voor beide sets van stijfheidseigenschappen. Het gat van 30 cm wordt bij de grotere kleilaagdikten, ca 3 respectievelijk 6 m, dicht gedrukt. Bij de lagere kleilaagdikten blijft het gat openstaan. Hieruit volgt dat het relatief kleine gat open blijft staan, zowel onder de berm als onder het dijklichaam. Een breed gat blijft alleen onder de berm openstaan.

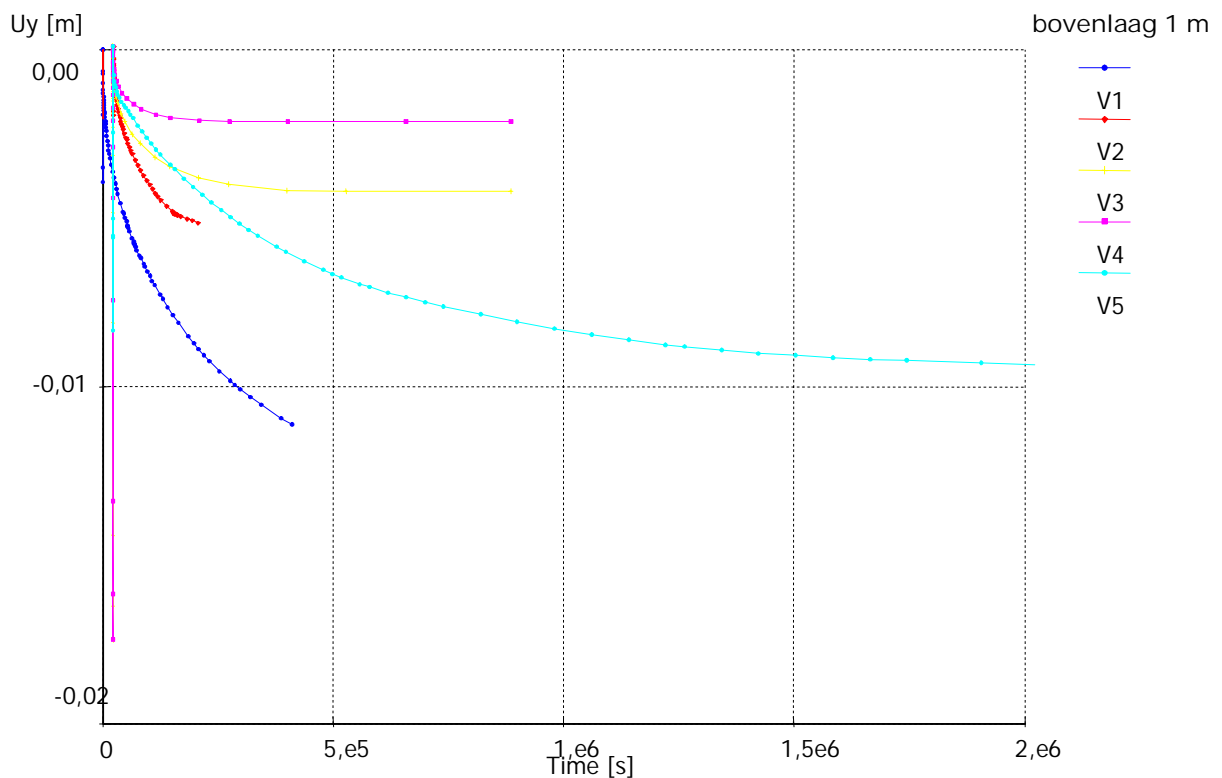
De figuren 5 tot en met 8 tonen het verloop van de verplaatsingen tijdens de consolidatiefase. De figuren tonen dat de varianten V3 en V4 relatief snel hun eindwaarde hebben bereikt. Dit gebeurt na $1 \text{ à } 2 \times 10^5 \text{ s}$, ca 1 à 2 etmalen. Voor de varianten met de relatief slappe klei met 2 respectievelijk 4 m bovenlaag, lopen de berekende consolidatieperiode op tot ca $2 \text{ à } 4 \times 10^6$

s, 23 à 46 dagen. De consolidatie berekeningen zijn beëindigd bij het bereiken van een minimaal resterende wateroverspanning van 0,01 kPa.

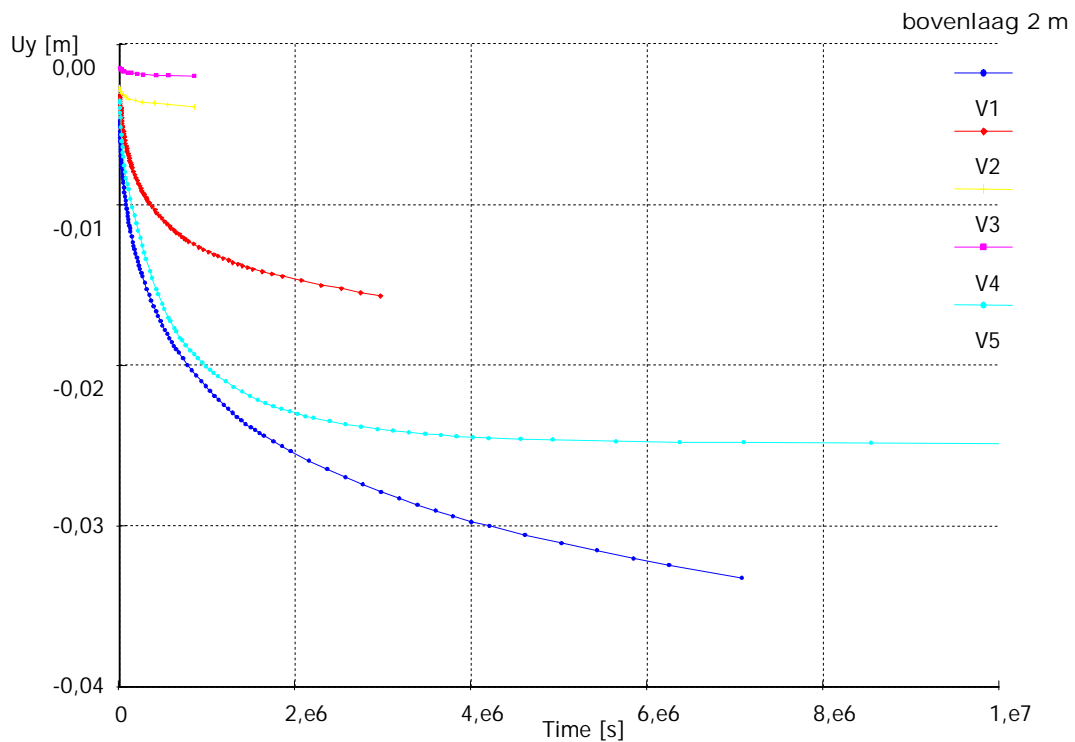
Om lange rekentijden te beperken zijn varianten V1 en V2 in figuur 5 en V1 en V5 uit figuur 8 voortijdig afgebroken.

Ondanks de lage doorlatendheid van het kleimateriaal verloopt het consolidatieproces snel. Bij het ongedraineerd aanbrengen van het gat ontstaan er waterunderspanningen in de klei in de directe omgeving van het gat. Het gat is in de berekeningen beschouwd als een drainerende rand. De consolidatielengte is kort. Deze factoren leiden tot een relatief snel consolidatieverloop.

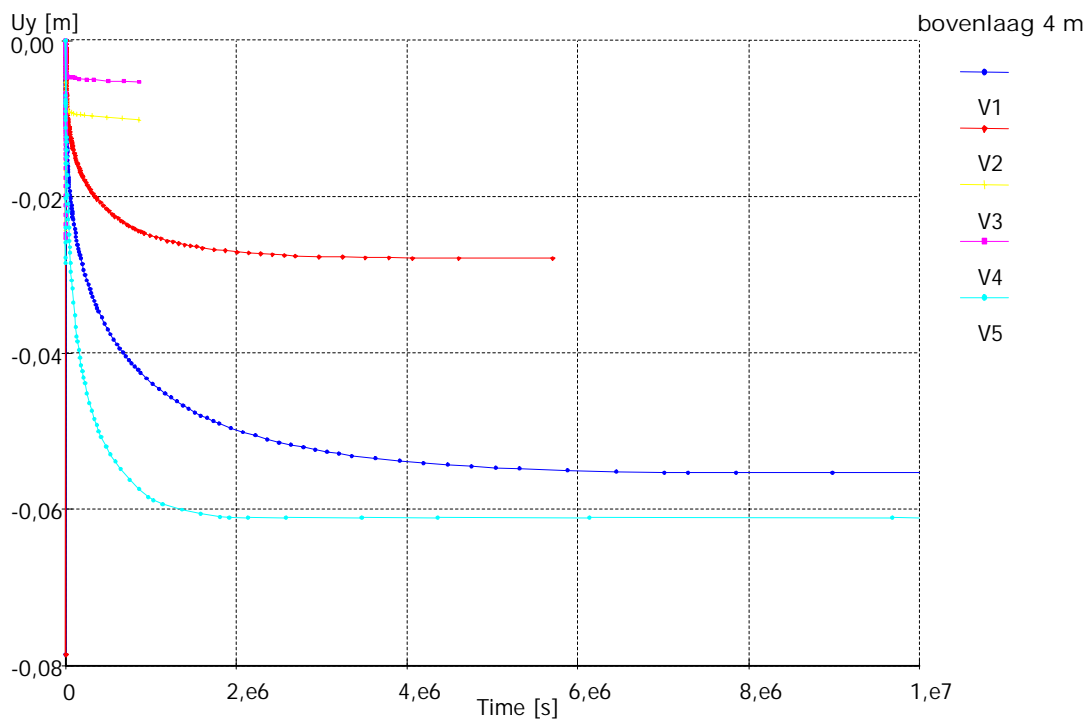
Voor de stijve klei wordt de maximale vervorming in een periode van ca een etmaal bereikt. Voor de stijve kleien mag worden verwacht dat de vervormingen nog tijdens het optreden van het pipingproces worden bereikt. Voor de slappe kleien is een consolidatieperiode van 1 à 2 maanden gevonden. Dit betekent dat de maximale vervormingen worden bereikt kort na het optreden van het pipingproces.



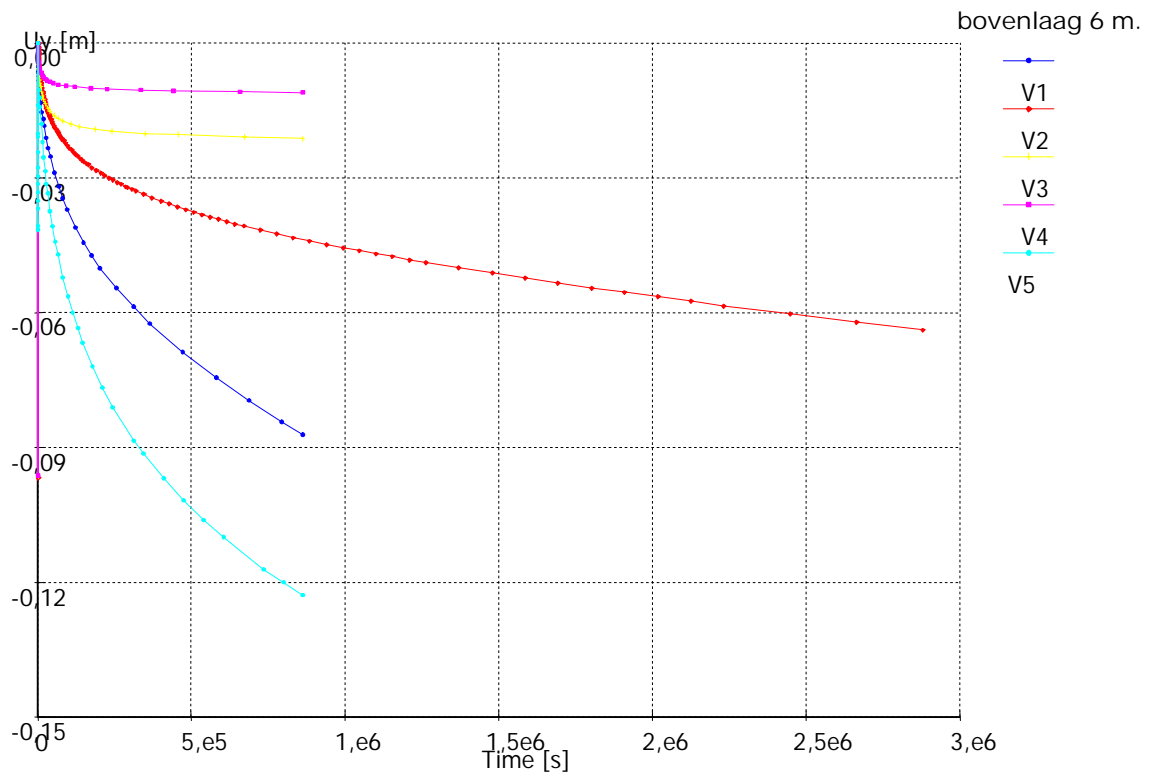
Figuur 5 Berekende tijd zettingsverloop, verticale verplaatsingen tijdens de consolidatiefase in het midden van het gat bij een 1 m dikke bovenlaag



Figuur 6 Berekende tijd zettingsverloop, verticale verplaatsingen tijdens de consolidatiefase in het midden van het gat bij een 2 m dikke bovenlaag



Figuur 7 Berekende tijd zettingsverloop, verticale verplaatsingen tijdens de consolidatiefase in het midden van het gat bij een 4 m dikke bovenlaag



Figuur 8 Berekende tijd zettingsverloop, verticale verplaatsingen tijdens de consolidatiefase in het midden van het gat bij een 6 m dikke bovenlaag

4 Analytische berekeningen

4.1 Uitgangspunten en randvoorwaarden

Aan de hand van de eindige elementen berekeningen die gerapporteerd zijn in de voorgaande hoofdstuk kan op een kwalitatieve manier een uitspraak worden gedaan over de mogelijkheid van het dichtdrukken van een pipingkanaal. Om nog wat meer inzicht te krijgen is naast de aanpak met eindige elementen berekeningen ook een analytische analyse uitgevoerd. Uitgangspunt van deze analyse is een elastisch ondersteunde buiglijger.

In de benadering is een relatief dunne en lang uitgestrekte kleilaag als een buiglijger beschouwd. Dit houdt in dat alleen de doorbuiging van de kleilaag is berekend en niet de vervorming van de kleilaag zelf. In de analyse is hier een kleidikte van 1 m aangenomen. Een dergelijke kleilaag kan een berm voorstellen achter een dijklichaam, waarbij de lengte van de kleilaag, oneindig lang, evenwijdig aan het dijklichaam is gekozen. Belangrijk in de analytische beschouwing is de elastische ondersteuning van de grond onder de buiglijger. In dit geval wordt de elastische ondersteuning geleverd door de zandlaag die onder de kleilaag is gelegen. Daar waar de piping kanaaltjes zich ontwikkelen zal de elastische ondersteuning afnemen. In de eindige elementen berekeningen is een enkel relatief groot gat gesimuleerd. Aan de hand van de uitgevoerde kijkproeven kan worden gesteld dat dit kan overeenkomen met de eindfase van het pipingproces waarin een doorbraak is ontstaan en de erosie zich concentreert in een van de hoofdgeulen. In eerdere fasen van piping echter resulteert het erosieproces in een vertakking van een groot aantal kleine geulen. De breedte van de in de kijkproeven waargenomen geulen variëren van millimeters tot ruim een centimeter. De diepte van de geulen is enkele millimeters. Om dit patroon van geultjes in de rekening te brengen is in de analytische beschouwing over een bepaalde breedte de elastische ondersteuning gereduceerd. In de uitgangsberekening is voor deze breedte 1 m gekozen. Dit wil zeggen dat er voor een breedte van 1 m een patroon van geultjes is ontstaan zodanig dat de elastische ondersteuning binnen die afstand van 1 m is gereduceerd. Onduidelijk is hoe groot deze reductie is. Om hier gevoel voor te krijgen is een parameterstudie uitgevoerd waarbij de ondersteuning is gereduceerd oplopend vanaf 0% tot 90 %. Oplopende reductie modelleert hierbij een toename van aantal geultjes en / of het groter worden van de geultjes. Daarnaast is gevarieerd met de breedte waarover de reductie is toegepast.

De afleiding van de analytische oplossing voor het buiglijger probleem is opgenomen in bijlage A. Hierbij is gebruik gemaakt Bouma (1989)

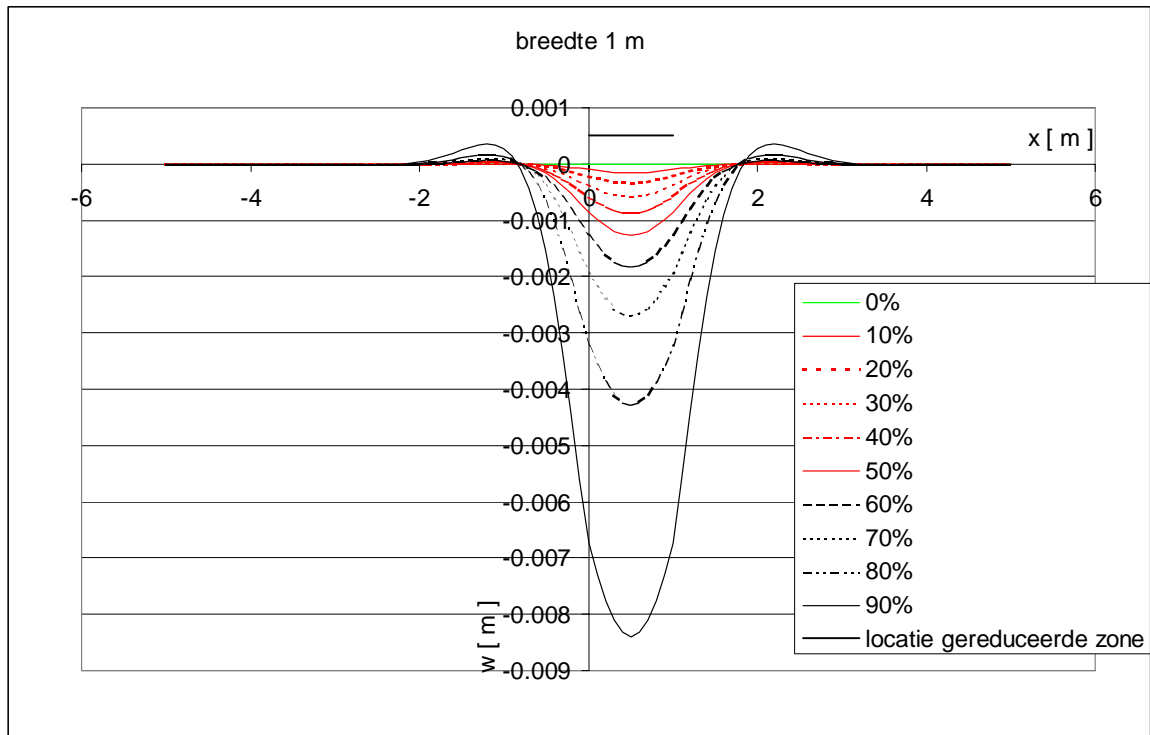
De analytische oplossing geeft het verloop van de zakkingen van de buiglijger onder eigen gewicht. Het gaat hier om elastische vervormingen die instantaan optreden. De analytische oplossing houdt geen rekening met plastisch vervormen, bezwijken en tijdafhankelijke processen zoals consolidatie en kruip. De uniforme zakking, dus buiten het deel met gereduceerde ondersteuning is in mindering gebracht op de berekende zettingen, zodat alleen de vervormingen als gevolg van de verminderde ondersteuning is berekend.

De volgende eigenschappen zijn in rekening gebracht:

Dikte kleilaag, h	1 m
Volumiek gewicht kleilaag, γ	16,4 kN/m ³
Stijfheid klei, E	1200 kN/m ²
Beddingsconstante zand, k	10 000 kN/m ²

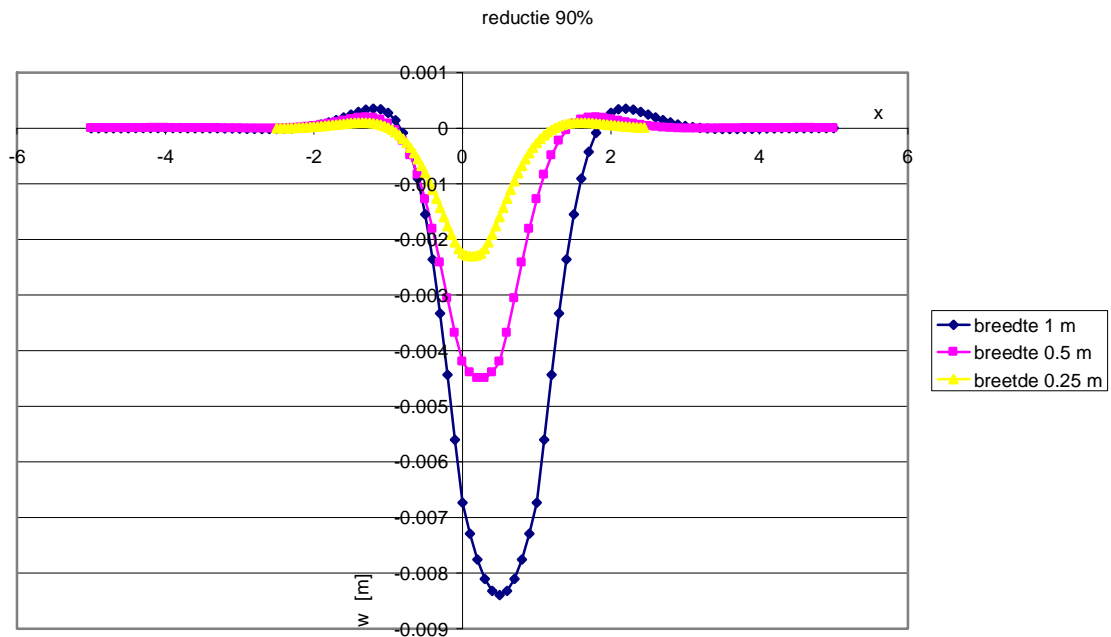
4.2 Berekeningsresultaten

Bijlage A presenteert de analytische oplossing. Deze is gevisualiseerd in de figuren 9 tot en met 11. Elk van de figuren geeft de resultaten weer van een variatie in parameters.



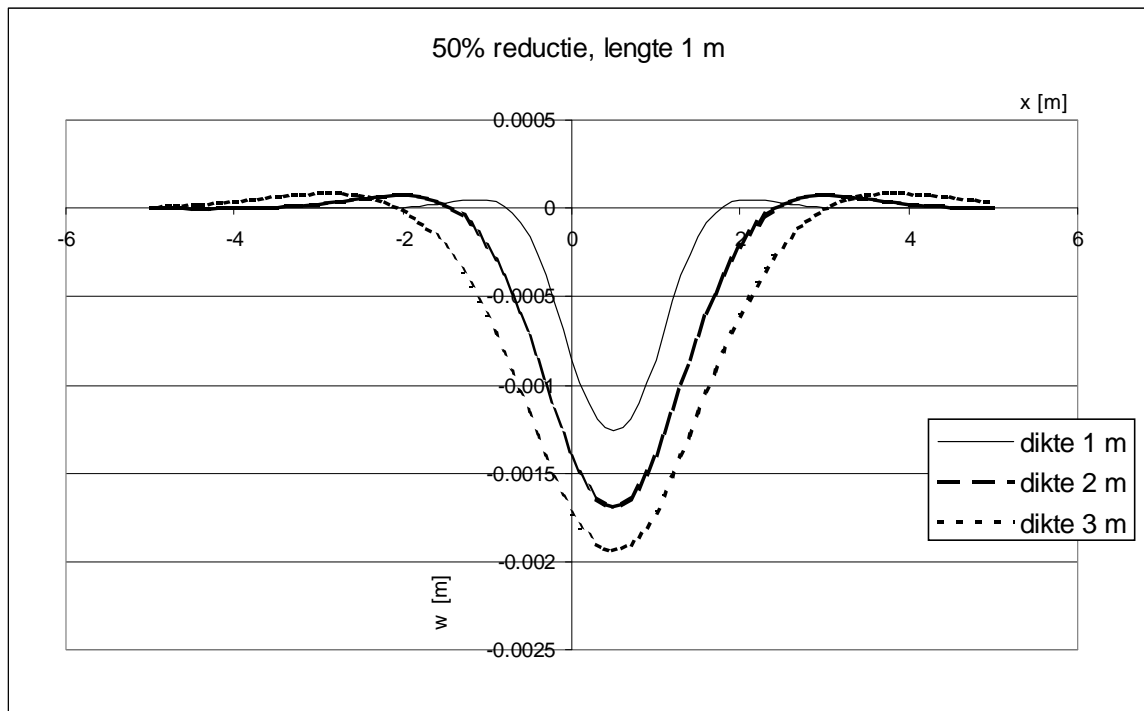
Figuur 4.1 Netto verplaatsing, w , in [m] van een 1 m dikke kleilaag bij 1 m brede zone waarin ondersteuning is gereduceerd.

Figuur 9 toont de berekende verplaatsingen bij een reductiezone van 1 m. Zoals te verwachten neemt de verplaatsing toe bij een toenemende reductie van ondersteuning. Vanaf een reductie van 50% wordt de maximale verplaatsing groter dan 1 mm. De diepte van de erosiegeultjes is slechts enkele korreldiameters groot. Bij een D_{50} gelijk aan $300 \mu\text{m}$ zal een erosiekanaaltje 1 mm, 3 maal D_{50} , diep kunnen zijn. In andere woorden vanaf een reductie van 50% mag, op basis van deze analyse, worden verwacht dat geultjes worden dichtgedrukt. Hoewel er nog geen duidelijke relatie is aan te geven tussen het aantal en de grootte van de erosiekanalen enerzijds en de reductie in ondersteuning anderzijds, lijkt een reductie van 50%, over een breedte van 1 m, te duiden op een ver ontwikkeld erosiepatroon. Met andere woorden bij aanvang van het erosieproces zullen de kanaaltjes openblijven staan. Pas vanaf een bepaalde ontwikkeling van het proces worden kanaaltjes geheel of gedeeltelijk te worden dicht gedrukt.



Figuur 10 Verplaatsing, w , in [m] voor verschillende zonebreedtes waarin de ondersteuning met 90% is gereduceerd.

Figuur 10 toont de invloed van de breedte van de reductiezone. Bij een kleinere breedte van de reductiezone nemen de maximale verplaatsingen af. Dus naar mate het erosieproces zich meer concentreert op een locatie en de breedte van de waaier van kanaaltjes klein blijft nemen de verplaatsingen af. Uit de parameter variatie blijkt een bijna lineair verband tussen de breedte van de reductiezone en de maximale verplaatsing. Bij een halvering van de breedte blijkt de maximale verplaatsing te halveren.



Figuur 11 Verplaatsing, w , in [m] bij verschillende laagdikten bij 50 % reductie over 1 m lengte

Figuur 11 toont de invloed van de dikte van de kleilaag op de berekende verplaatsingen. Door een toenemende laagdikte neemt de buigstijfheid toe, wat zou leiden tot geringere verplaatsingen. Echter, bij toenemende laagdikte neemt ook het eigen gewicht van de laag toe waardoor de verplaatsingen toenemen. Uit de berekeningen volgt dat het groter worden van het gewicht een grotere invloed heeft dan het vergroten van de buigstijfheid bij het toenemen van de laagdikte. Overigens blijft de invloed van de laagdikte gering. Bij een toename in laagdikte van 1 naar 3 m nemen de maximale verplaatsing toe van 1,26 mm naar 1,94 mm.

Bij het groter worden van de laagdikte neemt de verplaatsingen toe. Bij grotere laagdikten zullen de erosiekanaaltjes eerder worden dichtgedrukt.

5 Conclusies en Vervolg

5.1 Conclusies

Centraal in dit rapport staat de stabiliteit van erosiekanalen die ontstaan bij het piping proces. De stabiliteit van erosie kanalen is belangrijk bij het begrijpen van het pipingproces onder bestaande dijken. Immers indien de erosiekanalen worden dichtgedrukt in de periode tussen twee hoogwaterstanden start het pipingproces bij elk hoog water opnieuw. Indien in de tussenliggende periode het erosiekanaal niet wordt dichtgedrukt zou door accumulatie van erosie tijdens verschillende hoogwaterstanden de stabiliteit van de waterkering bij een relatief laag hoog water in gevaar kunnen komen. Dit levert een onveilige situatie op. Indien tijdens het optreden van het pipingproces de kanaaltjes worden dichtgedrukt, dus niet in de periode tussen twee hoogwaterstanden, maar tijdens het hoogwater, zal dit de ontwikkeling van het pipingproces beïnvloeden. In dat geval zal in de opzet van experimentele proeven, zoals de IJkdijk – piping proef, hier rekening mee moeten worden gehouden.

Het is niet eenvoudig alle processen rondom de zeer kleine erosiekanalen in rekening te brengen. In deze eerste aanzet voor het berekenen van de vervormingen rondom de erosiekanalen is gekozen voor een kwalitatieve analyse aan de hand van een aantal oriënterende berekeningen. Met behulp van eindige elementen berekeningen zijn vervormingen rondom een enkel gat berekend. Met analytische modellen is de doorbuiging van een kleilaag bij een lokaal gereduceerde ondersteuning berekend. Een lokaal gereduceerde ondersteuning modelleert een brede waaier van kleine erosiekanaaltjes.

Uit de analytische berekeningen wordt het volgende geconcludeerd:

- Een enkel erosiekanaaltje, breedte enkele millimeters tot een centimeter en een diepte van enkele millimeters blijft open staan.
- Een grote vertakking van vele kanaaltjes naast elkaar worden dichtgedrukt als de ondersteuning van de kleilaag door de aanwezigheid van de kanaaltjes tot 50% of meer is gereduceerd.
- Momenteel is onduidelijk hoe een reductie van 50% of meer zich verhoudt tot het aantal en grootte van de kanaaltjes per oppervlak. Echter, in de beginfase van piping ontstaan enkele erosiekanalen die in de loop van de tijd ontwikkelen tot een waaier van kanaaltjes. Hieruit volgt dat dichtdrukken van kanaaltjes alleen in een later stadium, bij het ontstaan van waaiers van kanaaltjes, verwacht mag worden.

In de eindige elementen berekeningen is de stabiliteit van een enkel gat beschouwd. Het betrof hier een relatief breed gat van 30 respectievelijk 16 cm. Een dergelijk groot gat kan worden beschouwd als een eindfase van het piping proces waarin een erosiekanaal contact heeft gemaakt tussen de boven- en benedenstroomse zijde. De stroming concentreert zich dan, wat leidt tot een dergelijk relatief groot gat. Uit de eindige elementen berekeningen wordt het volgende geconcludeerd:

- Bij de gehanteerde uitgangspunten bleek dat het gat met een breedte van 16 cm, open blijft terwijl het gat met breedte van 30 cm onder het dijklichaam wordt dichtgedrukt.
- De gehanteerde gatbreedte en het model waarmee het gedrag van de klei wordt gemodelleerd hebben de grootste invloed op de berekende vervormingen.

- De stijfheid van de klei en de kleilaagdikte hebben een beperkte invloed op de berekende vervormingen, bij het relatief kleine gat.
- Consolidatie rond het gat verloopt snel. Uit de berekeningen volgen consolidatie perioden van 1 à 2 dagen bij het relatief kleine gat tot 1 à 2 maanden bij het relatief grote gat.
- Afhankelijk van de stijfheid en doorlatendheid van de kleilaag rondom het gat treden de vervormingen tijdens het pipingproces of in de dagen daarna op.

Het beeld dat uit beide analyses ontstaat, is dat de relatief kleine erosiekanaaltjes die bij het begin van het pipingproces zich ontwikkelen open blijven staan. Bij de eindfase van piping ontstaan grotere gaten. Deze zullen met name bij de wellen te vinden zijn. Afhankelijk van de geometrie en de grondeigenschappen zullen deze gaten in de periode kort na het optreden van piping wel of niet worden dichtgedrukt. Hieruit volgt de verwachting dat tijdens het optreden piping het dichtdrukken van de kanaaltjes door het dijklichaam niet optreedt en daarmee het proces ook niet beïnvloed.

Opgemerkt wordt dat kruip niet in de modellering van het grondgedrag is meegenomen.

Het belang van het onderzoek voor het SBW project ligt in het beter begrijpen van het pipingproces. Bij de discussie over de vraag hoe het pipingproces onder een bestaande dijklichaam moet worden geschematiseerd komt regelmatig de vraag naar voren wat de invloed voor voorgaande hoogwaters op het pipingproces is. Hoewel deze vraag nog lang niet beantwoord is, is er wel een eerste aanzet toe gegeven. Met deze begripsvorming kunnen we op dit punt gerichter praktijkproeven uitvoeren om sneller tot een concreet toepasbaar resultaat te komen. De resultaten dragen niet bij aan de toetregel zelf. Ze kunnen wel goed bijdragen aan de discussie met de dijkbeheerders over de mechanismen die een rol spelen bij het pipingproces.

5.2 Aanbevelingen

Paragraaf 1.3 omschrijft het doel van het onderzoek als het vaststellen van de mogelijkheid dat erosiekanalen worden dichtgedrukt. Uit de berekeningen volgt dat niet eenduidig kan worden vastgesteld dat de kanaaltjes worden dichtgedrukt of open blijven staan. Het wel of niet dichtdrukken van de erosiekanalen is per situatie verschillend en afhankelijk van de grootte van het gat, stijfheid van de klei en kleilaagdikte.

Aansluitend op deze oriënterende berekeningen zijn vervolgstappen mogelijk om meer inzicht te krijgen in het dichtdrukken van de erosiekanalen. Gerelateerd aan de IJkdijk-pipingproef worden de volgende vervolgstappen worden voorgesteld:

- Analyse van relevante afmetingen van het erosiekanaal. In de oriënterende berekeningen zijn aannamen gedaan omtrent de in rekening gebrachte kanaalgroottes. Uit de berekeningen volgt dat de grootte van het aangenomen gat, als model voor het erosiekanaal, een grote invloed op de berekeningsresultaten heeft. Met een nadere inventarisatie van de relevante groottes kan het onderzoek beter gericht worden op de voor stabiliteit van een dijklichaam relevante problemen.
- Eindige elementen berekeningen uitvoeren voor concrete situaties. Hierbij kan gedacht worden aan de voorspelling van de IJkdijkproef of een concrete situatie waar regelmatig piping optreedt. Hierbij kan zowel de afmetingen dijklichaam, waterspanningsverloop als grondeigenschappen worden bepaald.

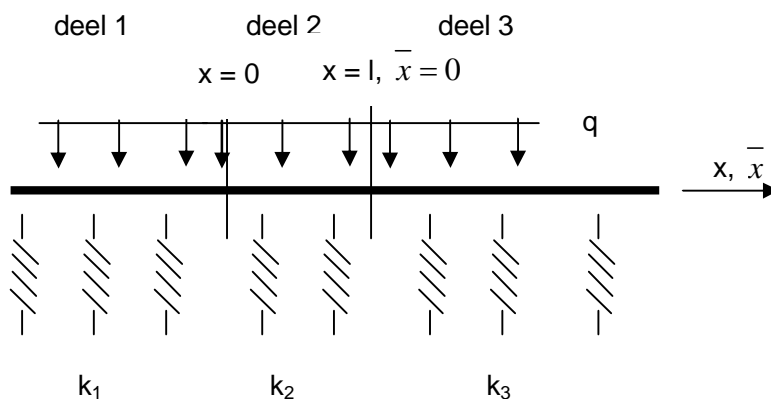
- Experimenteel onderzoek. In de IJkdijk-pipingproef worden piping onder een waterkering opgewekt. Na afloop van de proef kan onder dijksectie die niet tot bezwijken zijn gebracht worden getracht de vorm van de kanaaltjes vast te leggen. Een mogelijkheid om dit te doen is door na afloop van de proef vanuit de wel een hars-soort of een ander uithardende vloeistof te injecteren. Na uitharden heeft het hars de vorm van de erosiekanalen aangenomen. Door vervolgens heel voorzichtig het dijklichaam te ontgraven kan de vorm van het erosiekanaal worden vastgesteld aan de hand van de vorm van het uitgeharde harslichaam. Aan de hand van de vorm kan vervolgens worden vastgesteld of de erosiekanalen (gedeeltelijk) zijn dichtgedrukt.

Literatuurlijst

Bouman A.L. (1989) *Mechanica van constructies, elasto-statica van slanke structuren* Delftse UitgeversMaatschappij, ISBN 90 6562 1148 cip

A Analytische oplossing Elastische ondersteunde ligger

De analytische beschouwing uit hoofdstuk 4 is gebaseerd op een elastisch ondersteunde ligger. Om de analytische oplossing te vinden voor het probleem is de ligger opgedeeld in drie delen. In het eerste en laatste deel is de volledige ondersteuning aanwezig. In het middendeel is een afwijkende reductie aanwezig, zie figuur A.1.



Figuur A1, Definitie schets elastisch ondersteunde ligger

De algemene differentiaal vergelijking voor een elastisch ondersteunde ligger is:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q$$

Waarin:

EI	= buigstijfheid
w	= verplaatsing
k	= beddingsconstante
q	= verdeelde belasting, hier eigen gewicht

De algemene oplossing voor het probleem, Bouma (1989), is:

$$w = e^{\beta x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)) + \frac{q}{k}$$

$$4\beta^4 = \frac{k}{EI}$$

Waarin A, B, C en D integratie constanten zijn die met behulp van de randvoorwaarden moeten worden opgelost.

Omdat voor het eerste deel geldt dat de verplaatsingen een eindige waarde hebben voor $x \rightarrow -\infty$ volgt dat de tweede term van de algemene oplossing voor deel 1 komt te vervallen, $C = D = 0$. Hetzelfde geldt voor deel 3 als $\bar{x} \rightarrow \infty$, dan geldt $A = B = 0$.

Voor de drie delen van de buiglijger kan de verplaatsingen worden gesteld, na hernoemen van de integratie constanten:

$$w_1 = e^{\beta_1 x} (C_1 \cos(\beta_1 x) + C_2 \sin(\beta_1 x)) + \frac{q}{k_1}$$

$$w_2 = e^{\beta_2 x} (C_3 \cos(\beta_2 x) + C_4 \sin(\beta_2 x)) + e^{-\beta_2 x} (C_5 \cos(\beta_2 x) + C_6 \sin(\beta_2 x)) + \frac{q}{k_2}$$

$$w_3 = e^{-\beta_3 \bar{x}} (C_7 \cos(\beta_3 \bar{x}) + C_8 \sin(\beta_3 \bar{x})) + \frac{q}{k_3}$$

Het bovenstaande stelsel vergelijkingen kent 8 onbekenden die kunnen worden opgelost aan de hand van acht randvoorwaarden. De acht benodigde randvoorwaarden worden gevonden in de overgang van deel 1 naar deel 2 en van deel 2 naar deel 3.

Op de overgang van deel 1 naar deel 2 en van deel 2 naar deel 3 geldt:

$$\begin{array}{ll} w_1(0) = w_2(0) & w_2(l) = w_3(0) \\ \frac{dw_1(0)}{dx} = \frac{dw_2(0)}{dx} & \frac{dw_2(l)}{dx} = \frac{dw_3(0)}{dx} \\ \frac{d^2 w_1(0)}{dx^2} = \frac{d^2 w_2(0)}{dx^2} & \frac{d^2 w_2(l)}{dx^2} = \frac{d^2 w_3(0)}{dx^2} \\ \frac{d^3 w_1(0)}{dx^3} = \frac{d^3 w_2(0)}{dx^3} & \frac{d^3 w_2(l)}{dx^3} = \frac{d^3 w_3(0)}{dx^3} \end{array}$$

Uit de bovenstaande 8 randvoorwaarden zijn 8 onbekenden opgelost. Hiervoor zijn zowel handberekeningen als het computerprogramma MAPLE6 gebruikt beide ter controle van elkaar. De volgende uitdrukkingen voor de integratieconstanten zijn gevonden:

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{b(\sin(\beta l)^2 - 1 - \sin(\beta l)\cos(\beta l)) + a(e^{\beta l}\cos(\beta l) + e^{\beta l}\sin(\beta l))}{e^{\beta l}(\cos(\beta l) + \sin(\beta l))}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{b\sin(\beta l)}{e^{\beta l}}$$

$$C_3 = -\frac{1}{2} \frac{b(-\sin(\beta l)^2 + 1 + \sin(\beta l)\cos(\beta l))}{e^{\beta l}(\cos(\beta l) + \sin(\beta l))}$$

$$C_4 = -\frac{1}{2} \frac{b\sin(\beta l)}{e^{\beta l}}$$

$$C_5 = -\frac{1}{2}a$$

$$C_6 = 0$$

$$C_7 = -\frac{1}{2} \frac{-b\cos(\beta l) + b\cos(\beta l)^2\sin(\beta l) + b\sin(\beta l)^3 + e^{-\beta l}\cos(\beta l)^2a + e^{-\beta l}a\cos(\beta l)\sin(\beta l) - 2b\sin(\beta l)}{\cos(\beta l) + \sin(\beta l)}$$

$$C_8 = \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta l)(b\cos(\beta l)^2 + b\sin(\beta l)^2 - b + ae^{-\beta l}\cos(\beta l) + ae^{-\beta l}\sin(\beta l))}{\cos(\beta l) + \sin(\beta l)}$$

$$a = q\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right), \quad b = q\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}\right)$$