

Figuur 1 Twee lagen systeem

bladnummer : - 1 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10

Twee watervoerende lagen met semi-doorlatende scheidings- en afdeklaag

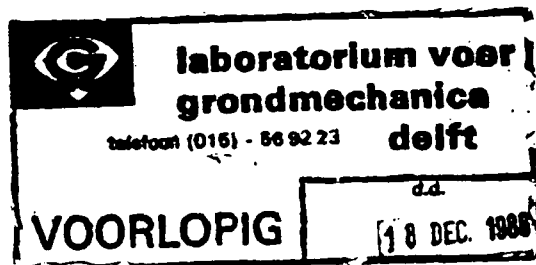
Tijdsafhankelijke grondwaterstroming onder dijken ten behoeve van een  
peilbuizennet langs nederlandse rivieren

Opgesteld in opdracht van:

Dienst Weg- en Waterbouwkunde  
begeleiding  
ir. J.B.A. Weijers

CO-285690/6

Grondmechanica Delft  
Wiskunde en Informatica Groep  
ir. F.P.H. Engering  
ir. A. Hjortnaes-Pedersen  
begeleiding  
dr ir F.B.J. Barends



Lijst met symbolen

$H_1(x,t)$	potentiaal in de watervoerende zandlaag 1
$H_2(x,t)$	potentiaal in de watervoerende zandlaag 2
$h_1(x,z,t)$	potentiaal in de semi-afgesloten deklaag 1
$h_2(x,z,t)$	potentiaal in de semi-afgesloten deklaag 2
$x,z$	de horizontale- en verticale plaatscoördinaat
$t$	tijd
$s$	Laplace transformatie parameter
$K_1, K_2$	permeabiliteit in watervoerende lagen
$K'_1, K'_2$	permeabiliteit in afdeklaag
$D_1, D_2$	dikte van de watervoerende lagen
$d_1, d_2$	dikte van de afdeklaag
$c_1, c_2$	consolidatie coëfficiënt in de watervoerende lagen
$c'_1, c'_2$	consolidatie coëfficiënt in de afdeklaag
$S_1, S_2$	bergingscoëfficiënt in de watervoerende lagen
$Q$	debiet
$q$	specifiek debiet
$q_{12}$	specifiek lekdebiet van afdeklaag 1 in watervoerende laag 2

$$\sinh(z) = (e^z - e^{-z})/2 = -\sinh(-z)$$

$$\cosh(z) = (e^z + e^{-z})/2 = \cosh(-z)$$

$$\coth(z) = \cosh(z)/\sinh(z)$$

$$\text{Laplace transformatie: } \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

bladnummer : - 3 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10



GRONDMECHANICA  
DELFT

## Inhoud

### Lijst met symbolen

Hoofdstuk 1	Inleiding
Hoofdstuk 2	Probleembeschrijving
Hoofdstuk 3	Laplace transformatie
Hoofdstuk 4	Oplossen stelsel differentiaal vergelijkingen
Hoofdstuk 5	Bepalen van de konstanten met behulp van de randvoorwaarden
5.1	Reele wortels
5.2	Complexe wortels
Hoofdstuk 6	Verschillende randvoorwaarden
6.1	Bron in de onderste watervoerende laag
6.2	Bron in beide watervoerende lagen
Hoofdstuk 7	Axiaal symmetrisch stromingsprobleem
7.1	Probleembeschrijving
7.2	Oplossen stelsel vergelijkingen
7.4.	Verifikatie met formules Huisman.

### Literatuur

bladnummer : - 4 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10



GRONDMECHANICA  
DELFT

## Hoofdstuk 1 Inleiding

In het kader van het onderzoek van een peilbuisennet langs de nederlandse rivieren, is er een studie uitgevoerd naar de effecten van een geïnstalleerde bron in een twee-lagen systeem; een watervoerende zandlaag en een afdekkende klei- of veenlaag [2],[3].

In dit rapport wordt aan de hand van bovengenoemde studie, de vergelijkingen beschreven van twee watervoerende zandlagen, gescheiden en afgedekt door consoliderende klei- of veenlagen (zie figuur 1). Het verkregen stelsel differentiaalvergelijkingen wordt Laplace getransformeerd en opgelost. De terug transformatie in de tijd moet dan gebeuren m.b.v. de direkte methode [2]. Aangetoond wordt dat de oplossing reële wortels heeft, zowel vlaksymmetrisch als axiaal symmetrisch.

Hoofdstuk 2 Probleembeschrijving

De geometrie van het probleem is beschreven in fig 1. Twee watervoerende zandlagen hebben doorlatendheden  $K_1$  en  $K_2$  [m/s], dikte  $D_1$  en  $D_2$  [m] en een bergingscoëfficiënt  $S_1$  en  $S_2$ . Het verband tussen de bergingscoëfficiënt  $S$  en de consolidatiecoëfficiënt van het zand  $c$  luidt :  $S = KD/c$ .

De consoliderende scheidings- en afdeklagen (klei en veen) hebben doorlatendheden  $K'_1$  en  $K'_2$  [m/s], dikte  $d_1$  en  $d_2$  [m] en consolidatiecoëfficiënt  $c'_1$  en  $c'_2$  [ $m_2/s$ ].

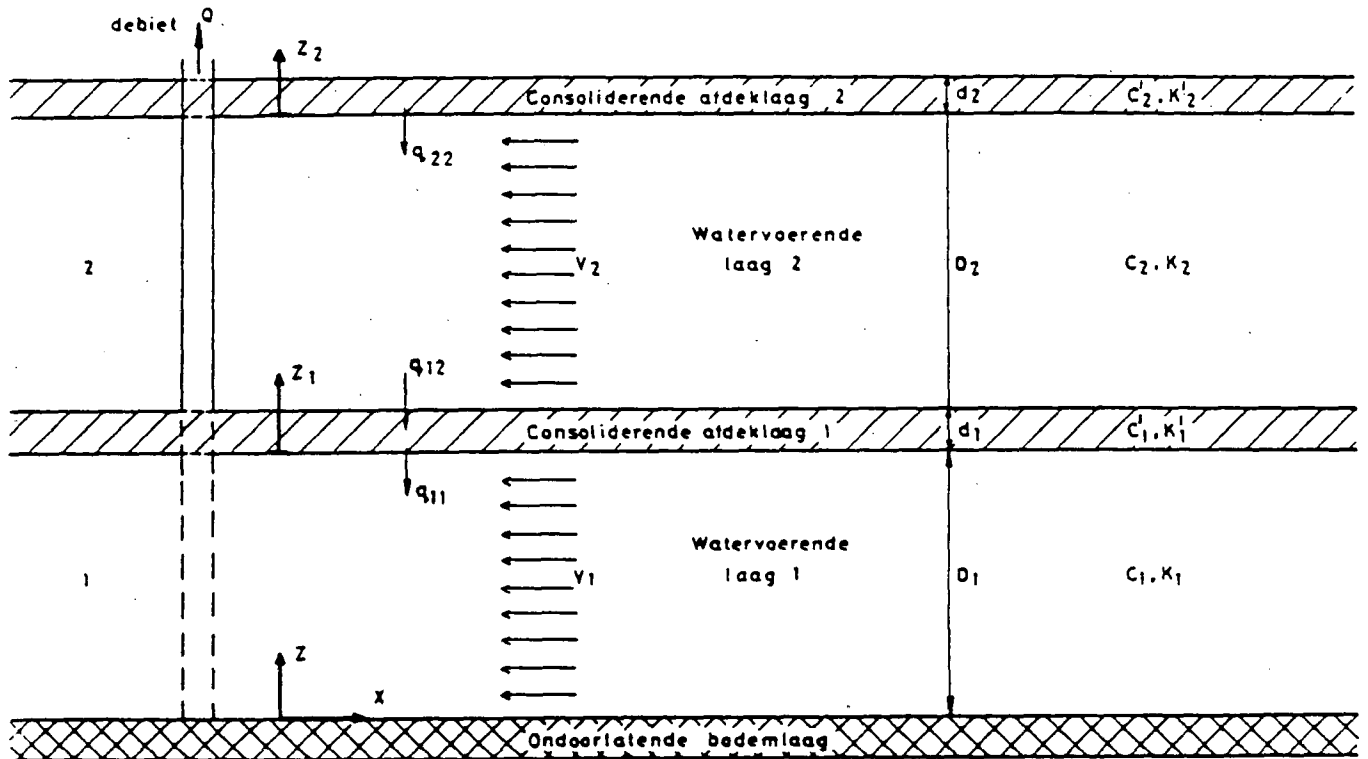


fig 1. Een bron in de bovenste zandlaag van een systeem met twee watervoerende lagen.

Allereerst wordt het stromingsprobleem beschouwd met een bron in de bovenste van de twee watervoerende zandlagen, waarbij de volgende aannamen zijn gedaan:

- Alleen verticale stroming in de afdeklagen
- Alleen horizontale stroming in de watervoerende zandlagen
- Het veld is homogeen
- Het stromingsgedrag is laminair

Voor de stroming in de watervoerende zandlaag 2 (met berging) kan de potentiaal  $H_2(x,t)$  beschreven worden met:

1-  $H_{2,xx} = H_{2,t}/c_2 + q_{22}/D_2K_2 - q_{12}/D_2K_2$  voor  $x, t \geq 0$

met als randvoorwaarden:

2-  $H_2(x, t) = H_{02}$  voor  $x=0, t>0$   
3-  $H_2(x, t) = 0$  voor  $x \geq 0, t=0$   
4-  $H_2(x, t) = 0$  voor  $t \geq 0, x \rightarrow \infty$

Langs de randen geldt voor het specifieke debiet :

5-  $q_{22} = -K_2^i h_{2,z_2}$  voor  $z_2=0, x, t \geq 0$   
6-  $q_{12} = -K_1 h_{1,z_1}$  voor  $z_1=d_1, x, t \geq 0$

De potentialen  $h_1(x, z, t)$  en  $h_2(x, z_2, t)$  in de afdek- en scheidingslaag moeten nog beschreven worden om vergelijking 1 te kunnen oplossen.

Voor het consolidatie effect in afdeklaag 2, kan de potentiaal  $h(x, z_2, t)$  beschreven worden met:

7-  $h_{2,z_2 z_2} = h_{2,t}/c_2^i$  voor  $x, z_2, t \geq 0$

met de randvoorwaarde :

8-  $h_2(x, z_2, t) = H_2(x, t)$  voor  $z_2=0, x, t \geq 0$   
9-  $h_2(x, z_2, t) = 0$  voor  $t=0, x, z_2 \geq 0$   
10-  $h_2(x, z_2, t) = 0$  voor  $z_2=d_2, x, t \geq 0$

Analoog geldt voor de afdeklaag 1:

11-  $h_{1,z_1 z_1} = h_{1,t}/c_1^i$  voor  $x, z_1, t \geq 0$

met de randvoorwaarde :

12-  $h_1(x, z_1, t) = H_2(x, t)$  voor  $z_1=d_1, x, t \geq 0$   
13-  $h_1(x, z_1, t) = H_1(x, t)$  voor  $z_1=0, x, t \geq 0$   
14-  $h_1(x, z_1, t) = 0$  voor  $t=0, x \geq 0, 0 \leq z_1 \leq d_1$

Vergelijking (13) geeft het verband aan van de potentiaal in de afdeklaag 1 met de potentiaal in de watervoerende laag 1 .

bladnummer : - 7 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10

Voor de stroming in de watervoerende laag 1 kan de potentiaal  $H_1(x,t)$  beschreven worden met:

$$15- H_{1,xx} = H_{1,t}/c_1 + q_{11}/D_1K_1 \quad \text{voor } x,t \geq 0$$

met de randvoorwaarden:

$$16- H_{1,xx}(x,t) = 0 \quad \text{voor } t > 0, x = 0$$

$$17- H_1(x,t) = 0 \quad \text{voor } t = 0, x \geq 0$$

$$18- H_1(x,t) = 0 \quad \text{voor } t \geq 0, x \rightarrow \infty$$

Het lekdebiet is gedefinieerd met (zie vergelijking 6):

$$18a \quad q_{11} = -K_1 h_{1,z_1} \quad \text{voor } z_1 = 0, x, t \geq 0$$

Vergelijking (16) betekent dat er geen debiet is in  $x=0$ , op elk tijdstip (symmetrie rond  $x=0$ ). De vergelijkingen 1 t/m 18 vormen nu het stelsel differentiaal vergelijkingen waarmee het systeem is beschreven.



### Hoofdstuk 3 Laplace transformatie

De laplace transformatie van de potentialen ziet er als volgt uit:

$$19- \bar{H}_1(x,s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) H_1(x,t) dt$$

$$20- \bar{h}_1(x,z_1,s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) h_1(x,z_1,t) dt$$

$$21- \bar{H}_2(x,s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) H_2(x,t) dt$$

$$22- \bar{h}_2(x,z_2,s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) h_2(x,z_2,t) dt$$

De gevonden vergelijkingen uit het vorige hoofdstuk worden nu een voor een getransformeerd, om zo doende het stelsel differentiaal vergelijkingen te kunnen oplossen.

Vergelijking (1) wordt met de randvoorwaarde (3):

$$23- \bar{H}_{2,xx} = s\bar{H}_2/c_2 + \bar{q}_{22}/D_2k_2 - \bar{q}_{12}/D_2k_2$$

met de randvoorwaarden:

$$24- \bar{H}_2(x,s) = H_{02}/s \quad \text{voor } x=0$$

$$25- \bar{H}_2(x,s) = 0 \quad \text{voor } x \rightarrow \infty$$

waarbij

$$\bar{q}_{12} = -K_1 \bar{h}_{1,z_1} \quad \text{voor } z_1=d_1, \quad x>0$$

$$\bar{q}_{22} = -K_2 \bar{h}_{2,z_2} \quad \text{voor } z_2=0, \quad x>0$$

De potentiaal  $h_1$ , vergelijkingen (11)-(14), wordt:

$$26- \bar{h}_{1,z_1 z_1} = s\bar{h}_1/c_1 \quad \text{voor } x, z_1 \geq 0$$

met de randvoorwaarden:

$$27- \bar{h}_1(x,z_1,s) = \bar{H}_1(x,s) \quad \text{voor } z_1=0, \quad x \geq 0$$

$$28- \bar{h}_1(x,z_1,s) = \bar{H}_2(x,s) \quad \text{voor } z_1=d_1, \quad x \geq 0$$

De potentiaal  $h_2$ , met vergelijkingen (7)-(10), wordt:

$$29- \bar{h}_{2,z_2 z_2} = s\bar{h}_2/c_2 \quad \text{voor } x, z_2 \geq 0$$

met de randvoorwaarden:

$$30- \quad \bar{h}_2(x, z_2, s) = \bar{H}_2(x, s) \quad \text{voor} \quad z_2=0, x \geq 0$$

$$31- \quad h_2(x, z_2, s) = 0 \quad \text{voor} \quad z_2=d_2, x \geq 0$$

De differentiaal vergelijking (26) kan opgelost worden door te veronderstellen dat de oplossing te schrijven is als:

$$\bar{h}_1 = \exp(\lambda z_1)$$

Ingevuld levert dit de karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 = s/c_1^2 \quad \text{of:} \quad \lambda = \pm \sqrt{(s/c_1^2)}$$

De algemene oplossing luidt dan met  $g_1 = \sqrt{(s/c_1^2)}$ :

$$32- \quad \bar{h}_1 = A_1 \exp(z_1 g_1) + B_1 \exp(-z_1 g_1)$$

Randvoorwaarde (27) en (28) invullen in deze algemene oplossing levert twee vergelijkingen op, waaruit  $A_1$  en  $B_1$  opgelost kunnen worden:

$$A_1 = [\bar{H}_2(x, s) - \bar{H}_1(x, s) \exp(-d_1 g_1)] / 2 \sinh(d_1 g_1)$$

$$B_1 = [\bar{H}_1(x, s) \exp(d_1 g_1) - \bar{H}_2(x, s)] / 2 \sinh(d_1 g_1)$$

$A_1$  en  $B_1$  ingevuld in (32) levert:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(x, z_1, s) = & [\bar{H}_2(x, s) \exp(z_1 g_1) - \bar{H}_1(x, s) \exp(z_1 g_1 - d_1 g_1) \\ & + \bar{H}_1(x, s) \exp(d_1 g_1 - z_1 g_1) - \bar{H}_2(x, s) \exp(-z_1 g_1)] / 2 \sinh(d_1 g_1) \end{aligned}$$

ofwel:

$$33- \quad \bar{h}_1(x, z_1, s) = [\bar{H}_2(x, s) \sinh(z_1 g_1) - \bar{H}_1(x, s) \sinh((z_1 - d_1) g_1)] / \sinh(d_1 g_1)$$

Om uiteindelijk vergelijking (23) te kunnen oplossen moet  $q_{1,2}$  met  $z_1 = d_1$  (6) opgelost worden. Differentiatie van (33) naar  $z_1$  geeft:

$$34- \quad \bar{h}_1(x, z_1, s)_{, z_1} = g_1 [\bar{H}_2(x, s) \cosh(z_1 g_1) - \bar{H}_1(x, s) \cosh((z_1 - d_1) g_1)] / \sinh(d_1 g_1)$$

voor  $z_1 = d_1$  wordt dit:

$$35- \quad \bar{h}_1(x, d_1, s)_{,z_1} = g_1 [\bar{H}_2(x, s) \coth(d_1 g_1) - H_1(x, s) / \sinh(d_1 g_1)]$$

Substitutie van (35) in (6) geeft het specifieke debiet langs  $z_1 = d_1$ :

$$36- \quad \bar{q}_1 = -K_1 g_1 [H_2(x, s) \coth(d_1 g_1) - H_1(x, s) / \sinh(d_1 g_1)]$$

Op identieke wijze wordt nu de potentiaal  $h_2$  afgeleid, waarmee dan  $q_{22}$  bepaald kan worden. Uit (29) volgt met  $g_2 = \sqrt{(s/c_2^2)}$ :

$$37- \quad \bar{h}_2(x, z_2, s) = A_2 \exp(z_2 g_2) + B_2 \exp(-z_2 g_2)$$

Met de randvoorwaarden (30) en (31) kunnen de konstante  $A_2$  en  $B_2$  opgelost worden; ingevuld in (37) levert dit:

$$38- \quad \bar{h}_2(x, z_2, s) = \bar{H}_2(x, s) \sinh(d_2 g_2 - z_2 g_2) / \sinh(d_2 g_2)$$

Het specifieke debiet  $q_2$  langs de rand  $z_2 = 0$  kan nu bepaald worden.

$$39- \quad \bar{h}_2_{,z_2} = -g_2 \bar{H}_2(x, s) \cosh(d_2 g_2 - z_2 g_2) / \sinh(d_2 / g_2)$$

Voor  $z_2 = 0$  wordt dit:

$$40- \quad \bar{h}_2_{,z_2} = -g_2 \bar{H}_2(x, s) \coth(d_2 g_2)$$

en het lekdebiet wordt:

$$41- \quad \bar{q}_2 = K_2 g_2 \bar{H}_2(x, s) \coth(d_2 g_2)$$

Invullen van (36) en (41) in (23) levert nu:

$$42- \quad \bar{H}_2_{,xx} = \bar{H}_2(x, s) [s/c_2 + \coth(d_2 g_2) K_2 g_2 / D_2 K_2 + \coth(d_1 g_1) K_1 g_1 / D_2 K_2] \\
 - \bar{H}_1(x, s) [K_1 g_1 / (D_2 K_2 \sinh(d_1 g_1))]$$

ofwel anders opgescreven:

$$43- \quad \bar{H}_2(x, s)_{,xx} = \bar{H}_2(x, s) f_{22} - \bar{H}_1(x, s) f_{21}$$

Een zelfde soort afleiding wordt er nu gegeven voor de potentiaal in de watervoerende laag 1. Vergelijking (15), (19) en (17) geeft weer:

$$44- \quad \bar{H}_1(x,s)_{,xx} = \bar{H}_1(x,s) s/c_1 + \bar{q}_{11}/D_1K_1$$

met de randvoorwaarden:

$$45- \quad \bar{H}_1(x,s) = 0 \quad \text{voor } x=0$$

$$46- \quad \bar{H}_1(x,s) = 0 \quad \text{voor } x \rightarrow \infty$$

Vergelijking (44) kan opgelost worden als  $q_{11}$  bekend is. Vergelijking (26) beschrijft de Laplace getransformeerde van  $h_1(x,z,t)$ . De randvoorwaarden zijn beschreven in (27) en (28). De oplossing (34) hiervan kan nu gebruikt worden voor  $q_{11}$  bij  $z_1=0$ . Vergelijking (34) geeft met  $z_1=0$ :

$$47- \quad \bar{h}_1(x,0,s)_{,z_1} = g_1[\bar{H}_2(x,s) - \bar{H}_1(x,s)\cosh(d_1g_1)]/\sinh(d_1g_1)$$

Ingevuld in  $q_{11}$  geeft:

$$48- \quad \bar{q}_{11} = -K_1g_1[\bar{H}_2(x,s)/\sinh(d_1g_1) - \bar{H}_1(x,s)\coth(d_1g_1)]$$

Invullen van (48) in (44) geeft:

$$49- \quad \bar{H}_1(x,s)_{,xx} = \bar{H}_1(x,s)[s/c_1 + K_1g_1\coth(d_1g_1)/D_1K_1] \\ - \bar{H}_2(x,s)[K_1g_1/(D_1K_1\sinh(d_1g_1))]$$

Of anders geschreven:

$$50- \quad \bar{H}_1(x,s)_{,xx} = \bar{H}_1(x,s)f_{11} - \bar{H}_2(x,s)f_{12}$$

Samengevat, luiden nu de twee differentiaal vergelijkingen die het systeem beschrijven;

$$51- \quad \bar{H}_1(x,s)_{,xx} = \bar{H}_1(x,s)f_{11} - \bar{H}_2(x,s)f_{12}$$

$$52- \quad \bar{H}_2(x,s)_{,xx} = \bar{H}_2(x,s)f_{22} - \bar{H}_1(x,s)f_{21}$$

$$53- \quad \bar{H}_2(x,s) = H_{02}/s \quad \text{voor } x=0$$

bladnummer : - 12 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10



GRONDMECHANICA  
DELFT

- 54-  $\bar{H}_1(x,s)_{,x} = 0$  voor  $x=0$
- 55-  $\bar{H}_2(x,s) = 0$  voor  $x \rightarrow \infty$
- 56-  $\bar{H}_1(x,s) = 0$  voor  $x \rightarrow \infty$
- 57-  $f_{22} = s/c_2 + \coth(d_2 g_2) K_2' g_2 / D_2 K_2 + \coth(d_1 g_1) K_1' g_1 / D_2 K_2$
- 58-  $f_{11} = s/c_1 + \coth(d_1 g_1) K_1' g_1 / D_1 K_1$
- 59-  $f_{21} = K_1' g_1 / (D_2 k_2 \sinh(d_1 g_1))$  met  $g_1 = \sqrt{s/c_1}$
- 60-  $f_{12} = K_1' g_1 / (D_1 k_1 \sinh(d_1 g_1))$  met  $g_2 = \sqrt{s/c_2}$

#### Hoofdstuk 4 Oplossen stelsel differentiaal vergelijkingen

Het stelsel differentiaal vergelijkingen (51) en (52) kan nu vereenvoudigd worden door  $H_2(x,s)$  te elimineren. Vergelijking (51) wordt hiermee:

$$61- \bar{H}_1(x,s)_{,xxxx} - (f_{11}+f_{22})\bar{H}_1(x,s)_{,xx} - (f_{21}f_{12}-f_{22}f_{11})\bar{H}_1(x,s) = 0$$

Of anders geschreven:

$$62- \bar{H}_1(x,s)_{,xxxx} - F_1\bar{H}_1(x,s)_{,xx} - F_2\bar{H}_1(x,s) = 0$$

met:

$$63- F_1 = f_{11} + f_{22}$$

$$64- F_2 = f_{21}f_{12} - f_{22}f_{11}$$

Omgekeerd krijgen we door  $H(x,s)$  te elimineren:

$$65- \bar{H}_2(x,s)_{,xxxx} - F_1\bar{H}_2(x,s)_{,xx} - F_2\bar{H}_2(x,s) = 0$$

De beide vergelijkingen (62) en (65) hebben dezelfde vorm en dus dezelfde algemene oplossingen. De karakteristieke vergelijking van (62) en (65) ziet er als volgt uit:

$$66- \lambda^4 - F_1\lambda^2 - F_2 = 0$$

of anders geschreven:

$$67- (\lambda^2 - f_{22})(\lambda^2 - f_{11}) = f_{21}f_{12}$$

De discriminant van van vergelijking (66) in  $\lambda^2$  is:

$$D = F_1^2 + 4F_2 = (f_{22} + f_{11})^2 + 4(f_{12}f_{21} - f_{22}f_{11})$$

$$68- D = (f_{22} - f_{11})^2 + 4f_{12}f_{21}$$

Uit (57) t/m (60) blijkt dat de discriminant  $D$  positief is, en dus kan voor  $\lambda^2$  geschreven worden:

$$69- \lambda^2 = (F_1 + \sqrt{D})/2 \quad \text{of} \quad \lambda^2 = (F_1 - \sqrt{D})/2$$

De eerste uitdrukking is altijd positief, terwijl voor de tweede uitdrukking niet duidelijk is of deze positief of negatief is.

Stel:  $F_1 \geq \sqrt{D}$

$$70- \lambda_1 = \sqrt{(F_1 + \sqrt{D})/2} \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -\lambda_1$$

$$71- \lambda_3 = \sqrt{(F_1 - \sqrt{D})/2} \quad \text{en} \quad \lambda_4 = -\lambda_3$$

Als  $F_1 < \sqrt{D}$  dan zijn  $\lambda_3$  en  $\lambda_4$  zuiver complex:

$$72- \lambda_3 = -\lambda_4 = i\sqrt{(F_1 - \sqrt{D})/2}$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking (61) voor de getransformeerde potentiaal in laag 1 luidt:

$$73- \bar{H}_1(x,s) = G_1 \exp(\lambda_1 x) + G_2 \exp(\lambda_2 x) + G_3 \exp(\lambda_3 x) + G_4 \exp(\lambda_4 x)$$

waarin  $G_1, G_2, G_3$  en  $G_4$  konstanten zijn. Voor de getransformeerde potentiaal in de tweede permeabele laag geldt:

$$74- \bar{H}_2(x,s) = J_1 \exp(\lambda_1 x) + J_2 \exp(\lambda_2 x) + J_3 \exp(\lambda_3 x) + J_4 \exp(\lambda_4 x)$$

waarin  $J_1, J_2, J_3$  en  $J_4$  konstanten zijn.

Invullen van (73) en (74) in de oorspronkelijke tweede orde differentiaal vergelijking (52) geeft:

$$\begin{aligned} G_1 \lambda_1^2 \exp(\lambda_1 x) + G_2 \lambda_2^2 \exp(\lambda_2 x) + G_3 \lambda_3^2 \exp(\lambda_3 x) + G_4 \lambda_4^2 \exp(\lambda_4 x) = \\ f_{11} [G_1 \exp(\lambda_1 x) + G_2 \exp(\lambda_2 x) + G_3 \exp(\lambda_3 x) + G_4 \exp(\lambda_4 x)] - \\ f_{12} [J_1 \exp(\lambda_1 x) + J_2 \exp(\lambda_2 x) + J_3 \exp(\lambda_3 x) + J_4 \exp(\lambda_4 x)] \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor alle  $x$  met (70) en (71) geldt:

$$75- J_1 = -G_1(\lambda_1^2 - f_{11})/f_{12}$$

$$76- J_2 = -G_1(\lambda_2^2 - f_{11})/f_{12} = -G_1(\lambda_1^2 - f_{11})/f_{12}$$

$$77- J_3 = -G_1(\lambda_3^2 - f_{11})/f_{12}$$

$$78- \quad J_4 = -G_1(\lambda_4^2 - f_{11})/f_{12} = -G_1(\lambda_3^2 - f_{11})/f_{12}$$

Uit (67) volgt, of door (73) en (74) in (51) in te vullen dat ook geldt :

$$79- \quad J_1 = -G_1 f_{21}/(\lambda_1^2 - f_{22}) \quad \text{etc.}$$

De algemene oplossing van (51) en (52) is nu:

$$80- \quad \bar{H}_1(x,s) = G_1 \exp(\lambda_1 x) + G_2 \exp(-\lambda_1 x) + G_3 \exp(\lambda_3 x) + G_4 \exp(-\lambda_3 x)$$

$$81- \quad \bar{H}_2(x,s) = -\exp(\lambda_1 x) G_1 (\lambda_1^2 - f_{11})/f_{12} - \exp(-\lambda_1 x) G_2 (\lambda_1^2 - f_{11})/f_{12} \\ - \exp(\lambda_3 x) G_3 (\lambda_3^2 - f_{11})/f_{12} - \exp(-\lambda_3 x) G_4 (\lambda_3^2 - f_{11})/f_{12}$$

Om de konstante  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  en  $G_4$  te kunnen bepalen, moeten de vier randvoorwaarden (53) t/m (56) ingevuld worden in (80), (81). Daarvoor is het echter noodzakelijk onderscheid te gaan maken of  $\lambda_{3,4}$  reële of complexe wortels heeft.



Hoofdstuk 5 Bepaling van de konstanten m.b.v. de randvoorwaarden

5.1 Reele wortels

Om de konstante  $G_1, G_2, G_3$  en  $G_4$  te kunnen bepalen wordt eerst verondersteld dat vergelijking (69) reele wortels heeft. Randvoorwaarde (56), met  $\lambda_1 > 0$  en  $\lambda_3 > 0$  :

$$\bar{H}_1(x,s) = G_1 \exp(\lambda_1 x) + G_3 \exp(\lambda_3 x) = 0 \quad \text{voor } x \rightarrow \infty$$

Hieruit volgt

$$82- \quad G_1 = G_3 = 0$$

Randvoorwaarde (53):

$$83- \quad \bar{H}_2(x,s) = - (G_1 + G_2)(\lambda_1^2 - f_{11})/f_{12} \\ - (G_3 + G_4)(\lambda_3^2 - f_{11})/f_{12} = H_{02}/s \quad \text{voor } x=0$$

Randvoorwaarde (54):

$$84- \quad \bar{H}_1(x,s)_{,x} = G_1 \lambda_1 - G_2 \lambda_2 + G_3 \lambda_3 - G_4 \lambda_3 = 0 \quad \text{voor } x=0$$

Vergelijkingen (82) en (84) geven:

$$85- \quad G_2 \lambda_1 + G_4 \lambda_3 = 0$$

Vergelijkingen (82) en (83) geven:

$$86- \quad G_2 (\lambda_1^2 - f_{11}) + G_4 (\lambda_3^2 - f_{11}) = - f_{12} H_{02}/s$$

Met de twee vergelijkingen (85) en (86) kunnen de konstanten  $G_2$  en  $G_4$  opgelost worden

$$G_2 = \frac{\lambda_3 f_{12} H_{02}}{s[(\lambda_3^2 - f_{11})\lambda_1 - \lambda_3(\lambda_1^2 - f_{11})]} = \frac{\lambda_3 f_{12} H_{02}}{s(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 \lambda_1 + f_{11})}$$

$$G_4 = \frac{-\lambda_1 f_{12} H_{02}}{s[(\lambda_3^2 - f_{11})\lambda_1 - \lambda_3(\lambda_1^2 - f_{11})]} = \frac{-\lambda_1 f_{12} H_{02}}{s(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 \lambda_1 + f_{11})}$$

De oplossing van de getransformeerde potentialen in de watervoerende lagen is:

$$87- \quad \bar{H}_1(x,s) = \frac{H_{02} f_{12}}{s(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 \lambda_1 + f_{11})} [\lambda_3 \exp(-\lambda_1 x) - \lambda_1 \exp(-\lambda_3 x)]$$

$$88- \quad \bar{H}_2(x,s) = \frac{H_{02}}{s(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 \lambda_1 + f_{11} b)} \cdot \\ [-(\lambda_1^2 - f_{11})\lambda_3 \exp(-\lambda_1 x) + (\lambda_3^2 - f_{11})\lambda_1 \exp(-\lambda_3 x)]$$

met:

$$\lambda_1 = \sqrt{((F_1 + \sqrt{D}))/2}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{((F_1 - \sqrt{D}))/2} \quad \text{met } F_1 > \sqrt{D}$$

$$g_1 = \sqrt{(s/c_1^2)}$$

$$g_2 = \sqrt{(s/c_2^2)}$$

en verder met (72) krijgen we:

$$89- \quad D = [g_1^2 - g_2^2 - K_2' g_2 \coth(d_2 g_2)/D_2 K_2 \\ - K_1' g_1 \coth(d_1 g_1)(D_1 K_1 - D_2 K_2)/D_1 K_1 D_2 K_2]^2 \\ + 4(K_1' g_1)^2 / (D_1 K_1 D_2 K_2 [\sinh(d_1 g_1)]^2)$$

$$90- \quad F_1 = g_1^2 + g_2^2 + K_1' g_1 \coth(d_1 g_1)/D_1 K_1 + K_2' g_2 \coth(d_2 g_2)/D_2 K_2 \\ + K_1' g_1 \coth(d_1 g_1)/D_2 K_2$$

Door de oplossing (87) en (88) in te vullen in de differentiaal vergelijking (51) en (52) en de randvoorwaarden (53) t/m (56) in de oplossing, kunnen er nog twee laatste controles worden uitgevoerd. Het blijkt allemaal te kloppen.

De potentialen  $\bar{h}_1(x,z,s)$  en  $\bar{h}_2(x,z,s)$  beschreven in vergelijking (33) en (38), zijn nu ook volledig beschreven m.b.v vergelijking (87) t/m (90).

Er rest nog slechts de terug transformatie m.b.v de directe methode door substitutie van  $s = 1/(2t)$  (zie [2])

## 5.1 Complexe wortels

Anders wordt de oplossing als blijkt dat vergelijking (69) een zuiver complexe wortel heeft (72). Algemeen kunnen we opschrijven dat de karakteristieke vergelijking er dan als volgt uit ziet:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = a \quad \text{en} \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = ib$$

De algemene oplossing voor de getransformeerde potentiaal in de watervoerende lagen heeft dan de volgende gedaante:

$$91- \quad \bar{H}_1 = G_1 e^{ax} + G_2 e^{-ax} + G_3 e^{ibx} + G_4 e^{-ibx}$$

$$92- \quad \bar{H}_2 = -G_1 A e^{ax} - G_2 A e^{-ax} - G_3 B e^{ibx} - G_4 B e^{-ibx}$$

$$\text{met} \quad A = (a^2 - f_{11})/f_{12} \quad \text{en} \quad B = (b^2 - f_{11})/f_{12}$$

Of anders geschreven:

$$93- \quad \bar{H}_1 = G_1 e^{ax} + G_2 e^{-ax} + (G_3 + G_4) \cos bx + i(G_3 - G_4) \sin bx$$

$$94- \quad \bar{H}_2 = -G_1 A e^{ax} - G_2 A e^{-ax} - (G_3 + G_4) B \cos bx - i(G_3 - G_4) B \sin bx$$

Uit bovenstaande blijkt dat  $G_3$  en  $G_4$  elkaars complex toegevoegde zijn, aangezien  $(G_3 + G_4)$  en  $i(G_3 - G_4)$  beide reëel zijn.

$$\text{Stel} \quad G_3 = p + iq \quad \text{en dus} \quad G_4 = p - iq$$

$$\text{ofwel:} \quad i(G_3 - G_4) = -2q \quad \text{en} \quad G_3 + G_4 = 2p$$

$$\text{Wetende dat} \quad p \cos \alpha + q \sin \alpha = \sqrt{(p^2 + q^2)} \cos(\alpha - \theta) \quad \text{met} \quad \theta = \text{atan}(q/p)$$

krijgen we voor de potentialen  $\bar{H}_1$  en  $\bar{H}_2$ :

$$\bar{H}_1 = G_1 e^{ax} + G_2 e^{-ax} + 2\sqrt{(p^2 + q^2)} \cos(bx - \theta)$$

$$\bar{H}_2 = -G_1 A e^{ax} - G_2 A e^{-ax} - 2B\sqrt{(p^2 + q^2)} \cos(bx - \theta)$$

bladnummer : - 19 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10



GRONDMECHANICA  
DELFT

Invullen van de randvoorwaarde (55) en (56) met de limiet voor  $x$  naar oneindig volgt dat:

$$G_1 = p = q = 0$$

Randvoorwaarde (54):

$$\bar{H}_1(x,s)_{,x} = aG_2 e^{ax} \quad \text{voor } x = 0$$

geeft aan dat:  $G_2 = 0$

De randvoorwaarden (53) t/m (56) met de konditie (72) dat de karakteristieke vergelijking twee reële en twee zuiver complexe wortels heeft, heeft tot resultaat dat alleen de nuloplossing voldoet.

## Hoofdstuk 6 Verschillende randvoorwaarden.

Bij de probleem beschrijving in hoofdstuk 2 is als randvoorwaarde aangenomen dat er een bron met een konstante potentiaal aanwezig is in de bovenste watervoerende zandlaag en dat de stroming in de andere watervoerende zandlaag symmetrisch is t.o.v. van de z-as (vergelijking (16)).

In dit hoofdstuk worden nog twee andere mogelijkheden bekeken. Ten eerste wordt de bovengenoemde randvoorwaarden voor beide lagen omgedraaid, d.w.z. dat verondersteld wordt dat de bron met konstante potentiaal in de onderste watervoerende laag zit. Ten tweede dat in beide watervoerende lagen een bron aanwezig is met ieder een ander konstante potentiaal.

### 6.1 Bron in de onderste watervoerende laag

Wanneer de bron in de onderste watervoerende laag zit, dan veranderen de randvoorwaarden (2) en (16). De afleiding van de vergelijkingen blijft identiek, alleen de konstante  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , en  $G_4$  in hoofdstuk 5 moeten opnieuw bepaald worden. Randvoorwaarde (2) en (16) worden respectievelijk:

$$95- \quad H_2(x,t)_{,x} = 0 \quad \text{voor } x=0, t>0$$

$$96- \quad H_1(x,t) = H_{01} \quad \text{voor } x=0, t>0$$

De Laplace transformatie van de randvoorwaarden (24) en (45) wordt nu:

$$97- \quad \bar{H}_2(x,s)_{,x} = 0 \quad \text{voor } x=0$$

$$98- \quad \bar{H}_1(x,s) = H_{01}/s \quad \text{voor } x=0$$

De randvoorwaarde (55) en (56) blijven ongewijzigd. Dit betekent voor de algemene oplossing (80) en (81), dat  $G_1 = G_3 = 0$ .

Vergelijking (81) in (97) ingevuld levert:

$$99- \quad G_2 \lambda_1 (\lambda_1^2 - f_{11}) / f_{12} + G_4 \lambda_3 (\lambda_3^2 - f_{11}) / f_{12} = 0$$

Vergelijking (80) in (98) ingevuld levert:

$$100- \quad G_2 + G_4 = H_{01}/s$$

Vergelijking (99) en (100) vormen een stelsel van twee vergelijkingen en twee onbekenden  $G_2$  en  $G_4$ , en heeft als oplossing:

$$101- G_4 = H_{01}/s \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 - f_{11})}{\lambda_1(\lambda_1^2 - f_{11}) - \lambda_3(\lambda_3^2 - f_{11})}$$

$$102- G_2 = -H_{01}/s \frac{\lambda_3(\lambda_3^2 - f_{11})}{\lambda_1(\lambda_1^2 - f_{11}) - \lambda_3(\lambda_3^2 - f_{11})}$$

Invullen van  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  en  $G_4$  in vergelijkingen (80) en (81) geeft de oplossing van de getransformeerde potentialen in beide watervoerende lagen.

## 6.2 Bron in beide watervoerende lagen

Wanneer in de beide watervoerende lagen een bron met een verschillende konstante potentiaal aanwezig is, veranderen randvoorwaarden (2) en (16) in:

$$103- H_1(x,t) = H_{01} \quad \text{voor } x=0, t>0$$

$$104- H_2(x,t) = H_{02} \quad \text{voor } x=0, t>0$$

De Laplace transformatie voor beide randvoorwaarden wordt nu:

$$105- \bar{H}_1(x,s) = H_{01}/s \quad \text{voor } x=0$$

$$106- \bar{H}_2(x,s) = H_{02}/s \quad \text{voor } x=0$$

De randvoorwaarde (55) en (56) blijven ongewijzigd, en zorgen ervoor dat voor de algemene oplossing (80) en (81) geldt  $G_1 = G_3 = 0$ . Vergelijkingen (80) en (81) ingevuld in (105) en (106) geven twee vergelijkingen en twee onbekenden ( $G_2$  en  $G_4$ )

$$G_2(\lambda_1^2 - f_{11}) + G_4(\lambda_3^2 - f_{11}) = -f_{12}H_{02}/s$$

$$G_2 + G_4 = H_{01}/s$$

opgelost geeft dit:

$$107- G_2 = [H_{01}(\lambda_3^2 - f_{11}) + H_{02}f_{12}]/[s(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)]$$

$$108- G_u = -[H_{01}(\lambda_1^2 - f_{11}) + H_{02}f_{12}]/[s(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)]$$

Invullen van  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  en  $G_u$  in vergelijking (80) en (81) geeft weer de getransformeerde potentialen in de watervoerende lagen.

Nul stellen van  $H_{02}$  in vergelijking (107) en (108) levert niet direct de oplossing van  $G_1$  en  $G_u$  van (101) en (102) op. De randvoorwaarde (97) of (16) is daar de oorzaak van. Interessant is nog wel om te zien hoe deze konditie er nu uit ziet met bovenstaande oplossing. Invullen van (107) en (108) in (80) en (81) en differentieren naar  $x$  levert, in  $x=0$  :

$$109- \bar{H}_1(0,s)_{,x} = [-H_{02}f_{12} - H_{01}(\lambda_1\lambda_3 - f_{11})]/(s(\lambda_3 - \lambda_1))$$

$$110- \bar{H}_2(0,s)_{,x} = H_{01}(\lambda_3^2 - f_{11})(\lambda_1^2 - f_{11})/[sf_{12}(\lambda_3 + \lambda_1)] + \\ H_{02}[\lambda_1(\lambda_1^2 - f_{11}) - \lambda_3(\lambda_3^2 - f_{11})]/[s(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)]$$

Geen van beide termen is gelijk aan nul. Wordt aan een van beide termen echter deze konditie opgelegd, dan volgt hieruit rechtstreeks een verband tussen  $H_{01}$  en  $H_{02}$ .

bladnummer : - 23 -  
ons kenmerk: CO-285690/6  
datum : 1986-12-10

Literatuurlijst

- 1- Elements of vibration analysis, Leonard Meirovitch
- 2- Verslag bijeenkomsten LGM-DWW 1985,  
tijdsafhankelijke grondwaterstroming onder dijken t.b.v. een  
peilbuizennet langs nederlandse rivieren, CO-279350 ,1985  
M.Vlaar en F.B.J.Barends
- 3- Uitloop effect bij hoogwater onder dijken,  
tijdsafhankelijke grondwaterstroming onder dijken t.b.v. een  
peilbuizennet langs de nederlandse rivieren, CO-285690 ,1986  
Dr.ir.F.B.J.Barends