

Verzameling vraagstukken
Elektrische Netwerken I

door

Ir. W. Buijze



1985 5109
3004 9680

Leeszaal

2



**Verzameling vraagstukken
Elektrische Netwerken I**

door

Ir. W. Buijze

1985 5189
3004 9680



VERENIGING
VOOR STUDIE- EN STUDIE
DELFT

BIBLIOTHEEK TU Delft
P 1985 5189



C

709530

8534

Verantwoording

De hoofdstukken I tot en met XV van dit vraagstukkenboekje geven oefenmateriaal voor het eerste-jaarscollege Elektrische Netwerken I voor elektrotechnische studenten aan de Technische Hogeschool te Delft.

Om dit boekje ook geschikt te maken voor het gebruik door de tweedejaarsstudenten in de technische natuurkunde bij het college Inleiding Wisselstroomtheorie, is hoofdstuk XVI toegevoegd. Dit hoofdstuk dat handelt over schakelverschijnselen zullen de tweede-jaarsstudenten in de elektrotechniek nodig hebben bij het college Elektrische Netwerken 2.

Een groot aantal vraagstukken is zodanig geprogrammeerd en van uitgewerkte voorbeelden voorzien, dat men zich in beginsel zelfstandig de stof kan eigen maken. Het is duidelijk, dat hierdoor van elk hoofdstuk slechts de laatste vraagstukken representatief zullen kunnen zijn voor hetgeen er van de student op het examen wordt verwacht. Hoewel het boekje bedoeld is voor de studie aan de Technische Hogeschool te Delft, zal het ook zeer goed kunnen worden gebruikt bij de studie aan een H. T. S.

Een enkel vraagstuk is afkomstig van ir. A. Henderson; ook de vorm waarin enkele begrippen geïntroduceerd worden, ontstond in samenwerking met hem.

Delft, maart 1970.

ir. W. Buijze

INHOUDSOPGAVE

	pag.
Notaties, symbolen en eenheden	5
1. Wetten van Kirchhoff. Netwerken met weerstanden	9
2. Eigenschappen van weerstand, spoel en condensator	26
3. Energie en vermogen	31
4. Komplexe getallen	33
5. Impedanties	39
6. Wijzerdiagrammen	47
7. Theorema van Thévenin. Theorema van Norton	53
8. Komplexe rekenwijze en functies van de tijd	63
9. Weerstandsloze tweepolen	72
10. Resonantie	76
11. Polaire figuren	84
12. Wederzijdse inductie en transformatoren	92
13. Fourier-analyse	98
14. Driefasen-systemen	104
15. Polen en nulpunten. Komplexe frequentie-vlak	116
16. Vrije trillingen en schakelverschijnselen	129
Tabel met laplace-transformaties	148
Antwoorden	149

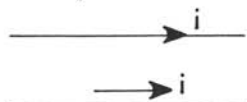
NOTATIES, SYMBOLEN EN EENHEDEN

(voorlopig overzicht)

Stroom

in ampere A

positieve stroomrichting of



gelijkstroom

I of i

momentele- (= ogenblikse) waarde

i of $i(t)$

maximale waarde = amplitude

$\hat{i}$ of $|I|$

effectieve waarde

$I_{\text{eff}} (= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I)$

gemiddelde waarde

I_{gem}

komplexe waarde

I waarbij $|I| = \hat{i}$

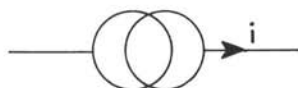
toegevoegd complexe waarde

I^*

nortonstroom

I_N

stroombron



Spanning (= potentiaalverschil) in volt

V

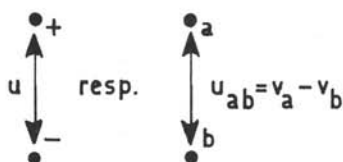
potentiaal

V

momentele waarde

v of $v(t)$

positieve polariteit



gelijkspanning

U of u

momentele waarde

u of $u(t)$

maximale waarde

$\hat{u}$ of $|U|$

effectieve waarde

U_{eff}

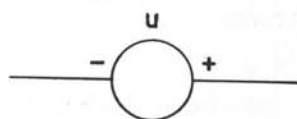
gemiddelde waarde

U_{gem}

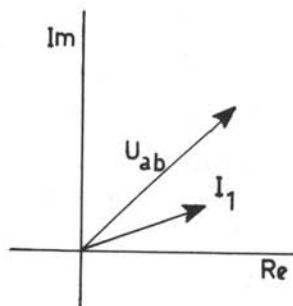
komplexe waarde
 toegevoegd complexe waarde
 theveninspanning

U waarbij $|U| = \hat{u}$
 U^*
 U_T

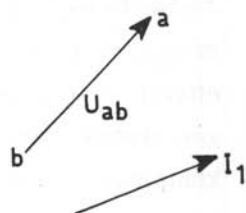
spanningsbron



komplexe vlak



wijzerdiagram



lading

q

coulomb

C

weerstand
 (resistantie)

R

ohm

Ω

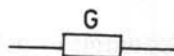


geleiding
 (conductantie)

G

siemens

S



spoel
 coëff.v.zelfind.

L

henry

H



condensator
 capaciteit

C

farad

F

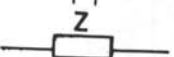


impedantie

Z

ohm

Ω

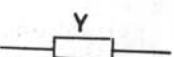


admittantie

Y

siemens

S



reaktantie

X

ohm

Ω

susceptantie

B

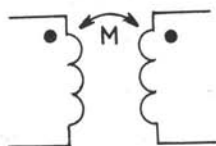
siemens

S

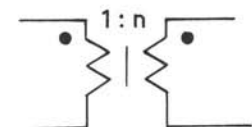
wederzijdse-(mutuele) inductie
coëff. v. wederz. ind. M

henry

H



ideale transformator met transformatieverhouding n

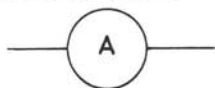


koppelcoëfficiënt of koppelingsfaktor
lekcoëfficiënt of spreidingsfaktor

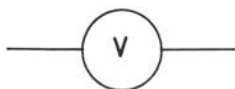
k (dim. loos)

σ (dim. loos)

stroommeter



spanningsmeter



schakelaar



Vermogen

in watt (of V.A)

W

ogenblikse-(momentele) waarde

p of $p(t)$

gemiddelde waarde reëel verm.

P

gem. waarde reaktief vermogen

Q

komplex vermogen

S $S = P + jQ$

toegevoegd complex vermogen

S^*

schijnbaarvermogen

$|S|$

Energie

W

in joule

J

tijdvariabele

t

in seconden

s

periode van een periodieke functie

T in

s

frequentie

f

in hertz

Hz

hoek

in radialen

rad

hoekfrequentie

ω

rad/s

resonantiehoekfrequentie	ω_0	rad/s
faseverschil	φ	rad
qualiteit	Q	(dimensieloos)
imaginair eenheidselement	j	
laplace-variabele	s	$\text{Re}(s) = \sigma \quad \text{Im}(s) = \omega$
komplexe frequentie	λ	(soms ook s)

Hoofdstuk I

WETTEN VAN KIRCHHOFF NETWERKEN MET WEERSTANDEN

- 1.1 Bereken I_3 , als

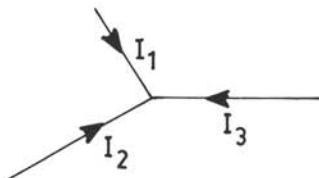
$$I_1 = 2 \text{ A en}$$

$$I_2 = 3 \text{ A.}$$

- Bereken I_3 , als

$$I_1 = -2 \text{ A en}$$

$$I_2 = 1 \text{ A.}$$



- 1.2 Bereken U_{ac} , als

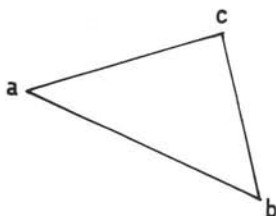
$$U_{ab} = 8 \text{ V en}$$

$$U_{bc} = 7 \text{ V.}$$

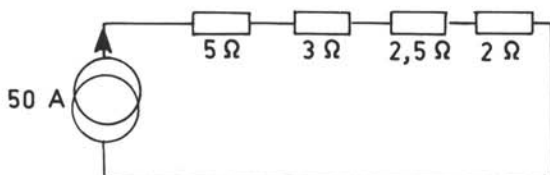
- Bereken U_{ac} , als

$$U_{ba} = 5 \text{ V en}$$

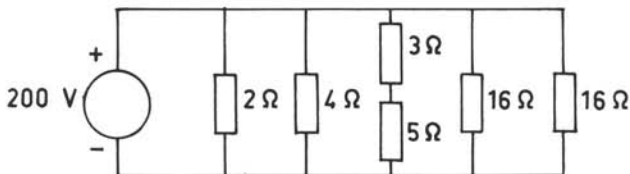
$$U_{bc} = 2 \text{ V.}$$



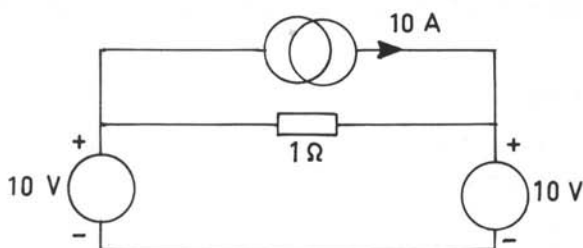
- 1.3 Bereken de spanning over de stroombron, het vermogen van de stroombron en het vermogen dat in elke weerstand wordt gedissipeerd. (in warmte omgezet)



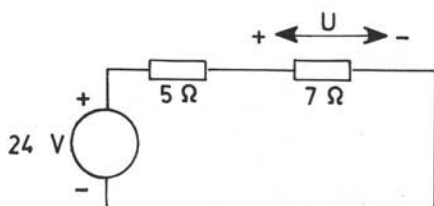
- 1.4 Bereken de stroomsterkte in de spanningsbron, het vermogen daarvan en het vermogen dat in elke weerstand wordt gedissipeerd.



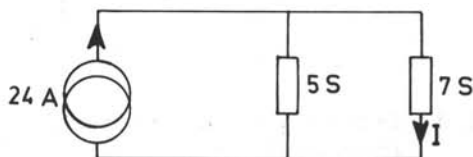
1.5 Bereken het vermogen geleverd door elk van de bronnen.



1.6 Bereken de spanning U .



1.7 Bereken de stroom I .

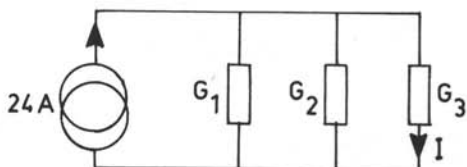


1.8 Bereken de stroom I .

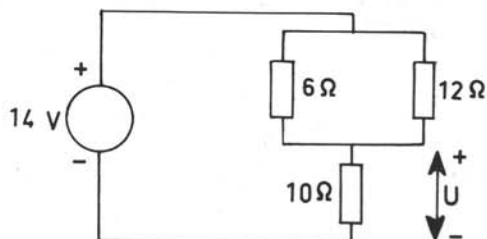
$$G_1 = 1 \text{ S}$$

$$G_2 = 2 \text{ S}$$

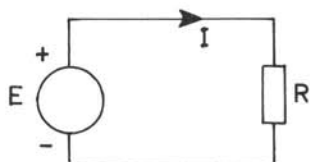
$$G_3 = 3 \text{ S}$$



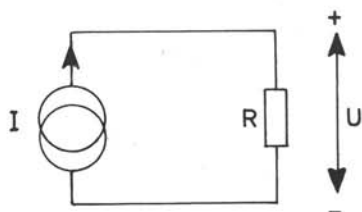
1.9 Bereken de spanning U .



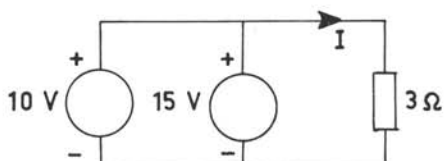
- 1.10 Wat gebeurt er met de stroomsterkte als men de weerstand steeds kleiner maakt en tot nul laat naderen?



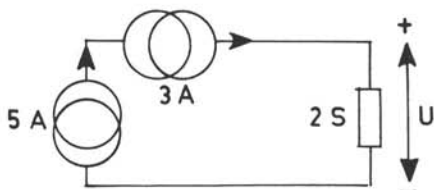
- 1.11 Wat gebeurt er met de spanning, als men de weerstand onbeperkt laat toenemen?



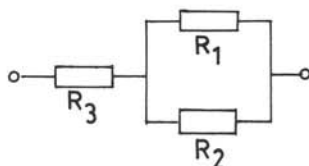
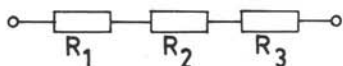
- 1.12 Bereken I.



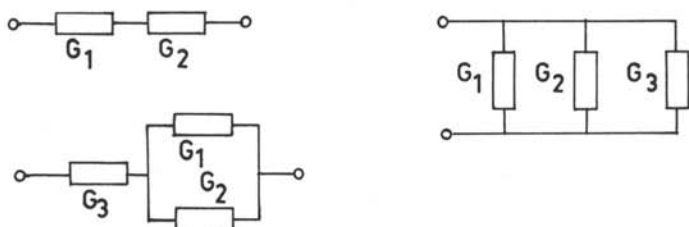
- 1.13 Bereken U.



- 1.14 Bereken de vervangings-weerstand (substitutie-weerstand) van de volgende tweepolen.



1.15 Bereken de vervangings-geleiding van de volgende tweepolen.



1.16 Bereken de vervangings-weerstand van twee seriegeschakelde weerstanden R_1 en R_2 als:

a) $R_1 = R_2 = 1 \ \Omega$

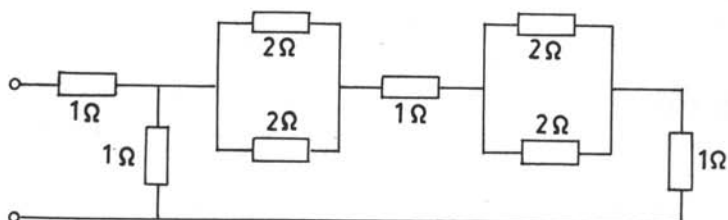
b) $R_1 = R_2 = 1 \text{ M}\Omega$

c) $R_1 = 0, R_2 \rightarrow \infty$

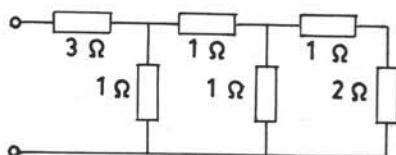
Wat is van deze tweepolen de vervangings-geleiding?

1.17 Bereken de vervangings-weerstand van de volgende tweepolen.

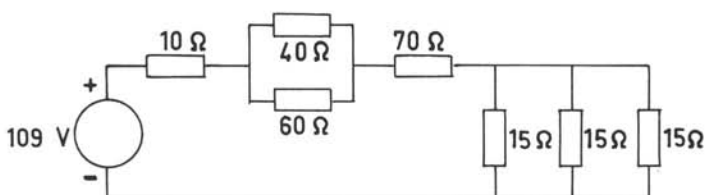
a)



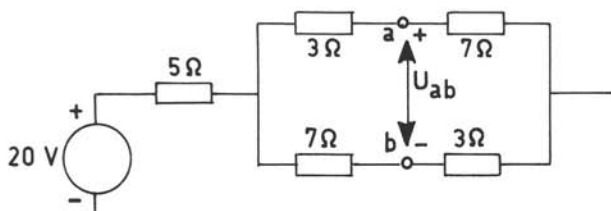
b)



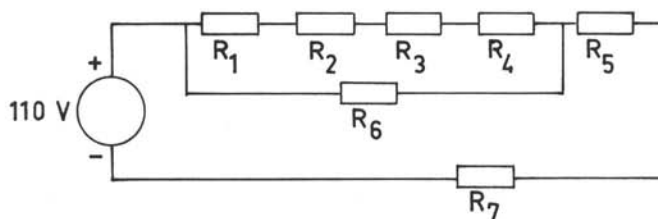
1.18 Bereken de stroomverdeling in het volgende netwerk.



1.19 Bereken de spanning U_{ab} .



1.20



R_1 , R_2 , R_3 en R_4 zijn gloeidraden van radiobuizen, die gemaakt zijn voor 6,3 V en 0,3 A.

R_5 is een gloeidraad gemaakt voor 6,3 V bij 0,45 A.

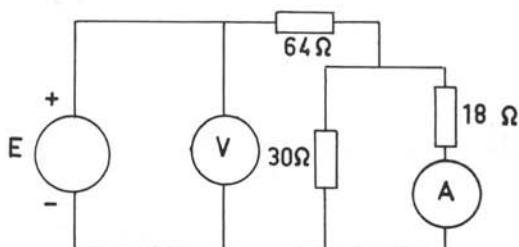
Bereken R_6 en R_7 . Bereken ook het vermogen van R_7 .

- 1.21 Twee weerstanden $R_1 = 6 \text{ ohm}$ en $R_2 = 14 \text{ ohm}$ zijn in serie geschakeld en aangesloten op een spanningsbron van 4 V. Een derde weerstand $R_3 = 3 \text{ ohm}$ wordt eerst parallel geschakeld aan R_1 en daarna aan R_2 . Toon aan, dat de stroom door R_1 in het eerste geval gelijk is aan de stroom door R_2 in het tweede geval.

- 1.22 Een batterij heeft een e.m.k.E. = 40 V en een $R_i = 3\frac{1}{3}$ ohm.

Een voltmeter heeft een weerstand van 380 ohm en een amperemeter heeft een weerstand van 2 ohm. Zij zijn met drie weerstanden opgenomen in de gegeven schakeling.

Wat wijzen beide meters aan?



- 1.23 Gegeven: $U = 40$ V

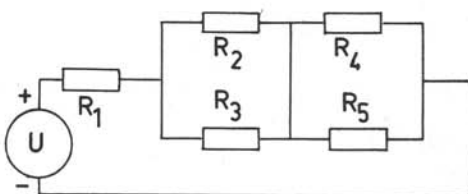
$$R_1 = 23 \text{ ohm}$$

$$R_2 = 8 \text{ ohm}$$

$$R_3 = 56 \text{ ohm}$$

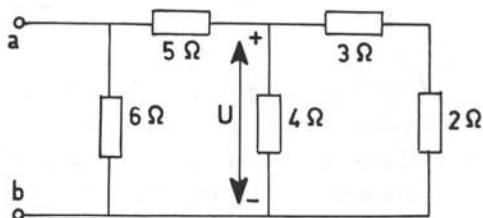
$$R_4 = 30 \text{ ohm}$$

$$R_5 = 15 \text{ ohm}$$



Gevraagd: Bereken het vermogen in alle weerstanden.

- 1.24 A. Gegeven: het schema

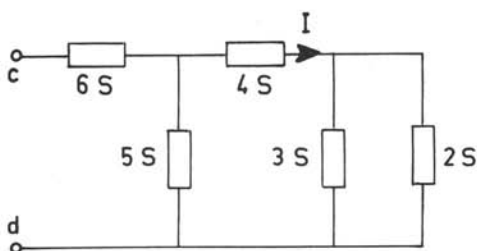


Men beschouwt de weerstand R_{ab} , die aan de klemmen a en b wordt waargenomen.

Gevraagd: a. Schrijf de waarde van R_{ab} in de vorm van een kettingbreuk.

b. Bepaal door gebruik te maken van spanningsdeling de spanning U , als op de klemmen a en b een spanningsbron $U_{ab} = 1$ V wordt aangesloten.

B. Gegeven: het schema



Men beschouwt de geleiding G_{cd} , die aan de klemmen c en d wordt waargenomen.

Gevraagd: c. Schrijf de waarde van G_{cd} in de vorm van een kettingbreuk.

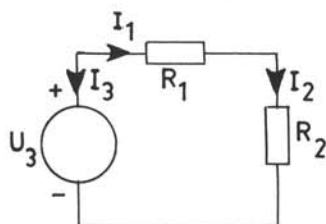
d. Bepaal door gebruik te maken van stroomdeling de stroom I , als op de klemmen c en d een stroombron met een sterkte van 1 A (gericht van d naar c) wordt aangesloten.

1.25 Gegeven: het schema

$$R_1 = 4 \Omega$$

$$R_2 = 3 \Omega$$

$$U_3 = 5 \text{ V}$$



Gevraagd:

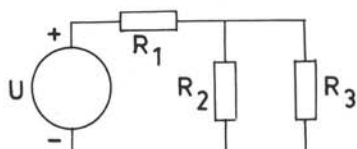
- Bereken I_n en U_n en verifieer het theorema van Tellegen voor I_n en U_n . ($n = 1, 2, 3$.)
- Men kiest vervolgens $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$ en $U = 5 \text{ V}$. Bereken voor de nieuwe situatie I_n^* en U_n^* . Verifieer dan het theorema van Tellegen voor de combinaties I_n met U_n^* en I_n^* met U_n .

1.26 Gegeven het schema

$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = R_3 = 2 \Omega$$

$$U = 10 \text{ V}$$



Gevraagd:

a. Bereken I_n en U_n . Verifieer het theorema van Tellegen.

b. Men verandert de schakeling nu zodanig dat:

$$R_1 = \frac{1}{3} \Omega, R_2 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega \text{ en } U = 1 \text{ V.}$$

Bereken I_n^f en U_n^f . Verifieer dan het theorema van Tellegen voor de combinaties 1) I_n^f en U_n^f

2) I_n en U_n^f

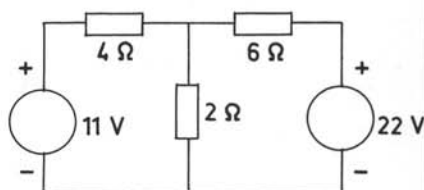
3) I_n^f en U_n

- 1.27 Bereken de stroomverdeling en bereken de vermogens van de energiebronnen met:

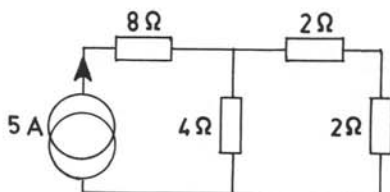
a. takstromen

b. maaströmen

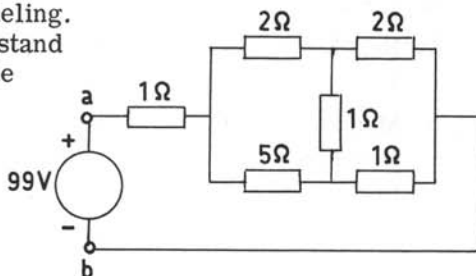
c. het superpositiebeginsel.



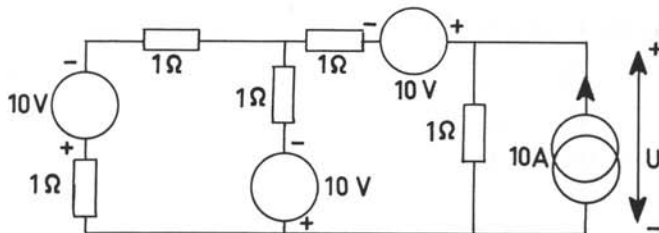
- 1.28 Bereken de stroomverdeling en het vermogen van de bron.



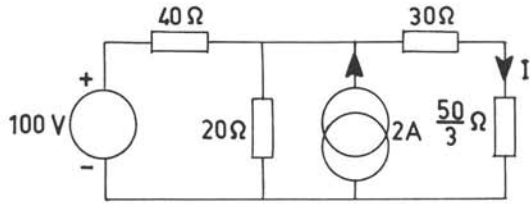
- 1.29 Bereken de stroomverdeling. Bepaal de vervangweerstand van de schakeling aan de klemmen a en b.



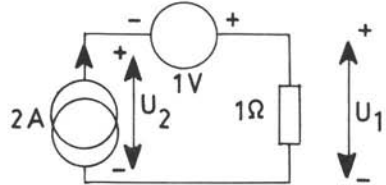
- 1.30 Bereken U .



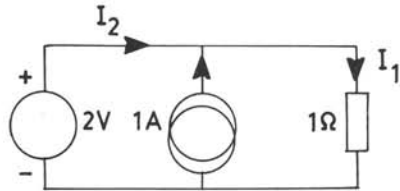
1.31 Bereken I .



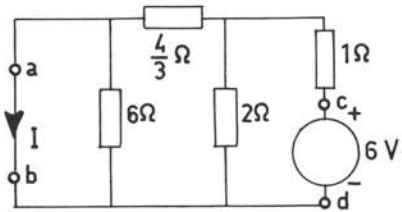
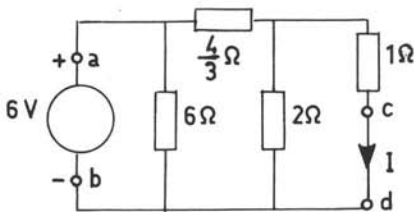
1.32 Bereken U_1 , U_2 en het vermogen van de stroombron.



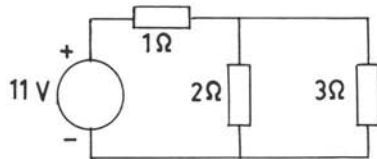
1.33 Bepaal met het superpositiebeginsel I_1 , I_2 en het vermogen van de spanningsbron.



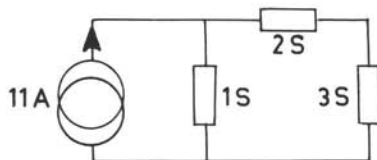
1.34 Bereken in beide gevallen de stroom I .



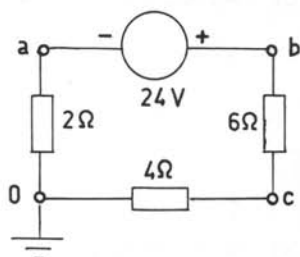
1.35 a. Bereken de stroom in de weerstand van 3Ω .



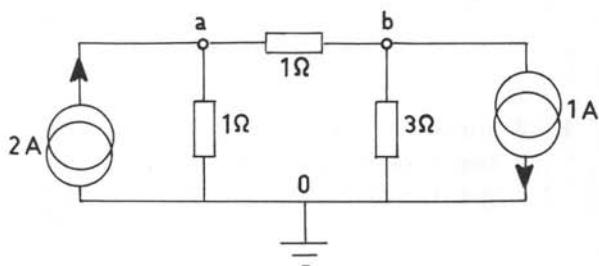
b. Bereken de spanning over de geleiding van $3S$.



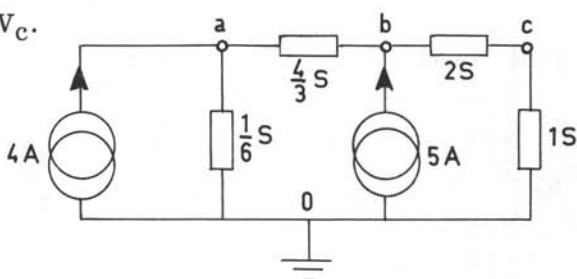
1. 36 Bepaal de knooppuntspotentialen.



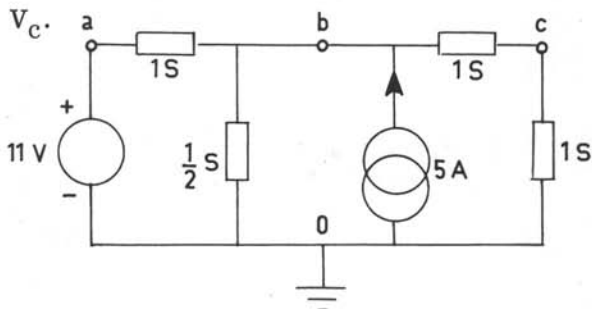
1. 37 Bepaal V_a en V_b .



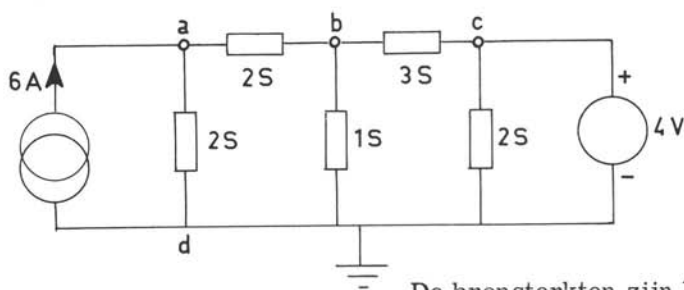
1. 38 Bepaal V_a , V_b en V_c .



1. 39 Bepaal V_a , V_b en V_c .



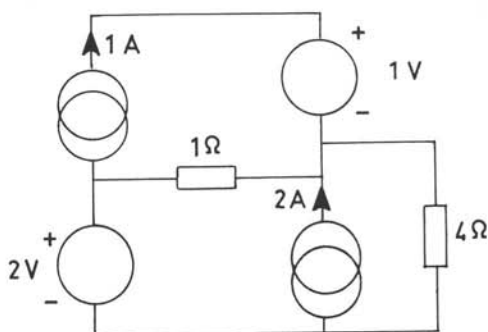
1.40 Gegeven: het schema.



De waarden van de geleidingen zijn vermeld in siemens.
De potentiaal van het punt d is 0 volt.

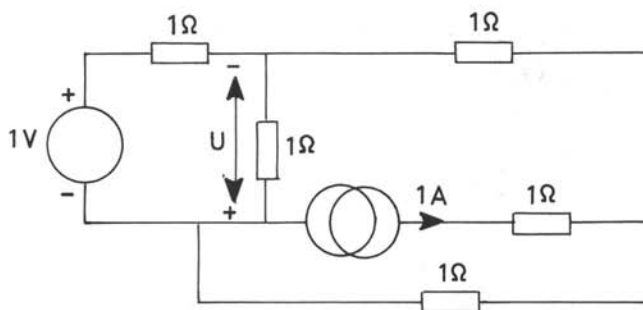
- Gevraagd: a. Bereken de potentialen van de knooppunten a, b en c.
b. Bereken het vermogen, dat door elk van de bronnen wordt afgegeven.
c. Bereken het vermogen, dat door elk van de geleidingen wordt opgenomen en tel deze vermogens op.

1.41 Gegeven: het schema.



- Gevraagd: a. Bereken het vermogen dat door elk van de stroombronnen wordt opgenomen.
b. Controleer de geldigheid van het theorema van Tellegen voor dit netwerk.

1.42 Gegeven: het schema



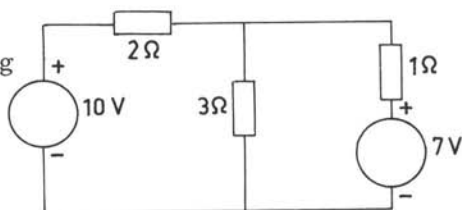
- Gevraagd: a. Bereken de spanning U , door gebruik te maken van de maasmethode.
- b. Geeft de stroombron vermogen af, of neemt deze vermogen op?
Motiveer Uw antwoord. Hoe groot is dit vermogen?
- c. Bereken opnieuw de spanning U , doch nu door gebruik te maken van het superpositiebeginsel.
- d. Indien U dit vraagstuk had willen oplossen volgens de knooppuntsmethode, hoeveel vergelijkingen zou men dan moeten oplossen. Licht Uw antwoord kort toe.

Voorbeelden

Opgave: I

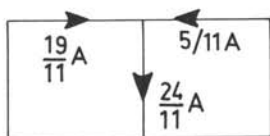
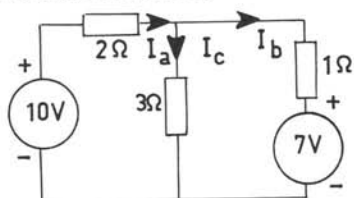
Gegeven: het schema

Gevraagd: de stroomverdeling



Oplossing.

A. Met takstromen.



B. Met maasstromen.

a. Kies maasstromen.

b. Pas de spanningswet van Kirchhoff toe op de mazen.

$$10 = I_1 \cdot (2+3) + I_2(3)$$

$$7 = I_1 \cdot (3) + I_2(1+3)$$

Hieruit volgt

$$I_1 = 19/11 \text{ A} \quad \text{en} \quad I_2 = 5/11 \text{ A}$$

De stroom in de weerstand van 2 ohm is I_1 .

De stroom in de weerstand van 1 ohm is I_2 .

De stroom in de weerstand van 3 ohm is $I_1 + I_2$.

Resultaat als boven.

- Kies willekeurige takstromen.
- Pas de stroomwet van Kirchhoff toe op de knooppunten.

$$I_a = I_b + I_c \quad (1)$$

- Pas de spanningswet van Kirchhoff toe langs twee gesloten paden in het netwerk.

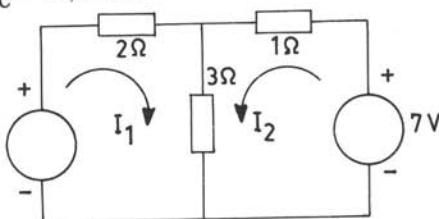
$$10 = I_a \cdot 2 + I_b \cdot 3 \quad (2)$$

$$7 = -I_b \cdot 1 + I_c \cdot 3 \quad (3)$$

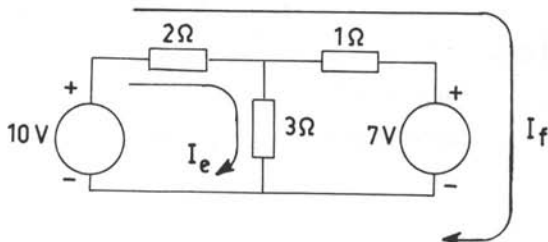
Uit (1), (2) en (3) volgt

$$I_a = 19/11 \text{ A} \quad I_b = -5/11 \text{ A}$$

$$I_c = 24/11 \text{ A}$$



C. Met lusstromen.



- Kies lusstromen langs een aantal "onafhankelijke" wegen door het netwerk
- Pas langs deze wegen de spanningswet van Kirchhoff toe.

$$10 = I_e \cdot (2+3) + I_f \cdot (2)$$

$$10 - 7 = I_e \cdot (2) + I_f \cdot (2+1)$$

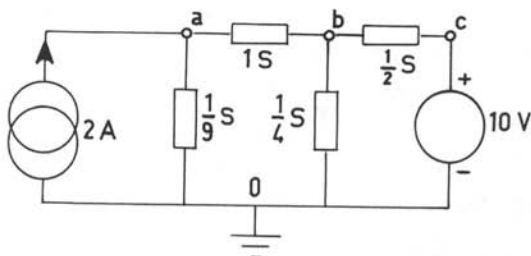
Hieruit volgt

$$I_e = \frac{24}{11} \text{ A} \quad \text{en} \quad I_f = -\frac{5}{11} \text{ A}.$$

Dit geeft dezelfde stroomverdeling als hiervoor.

Opgave II

Gegeven: het schema.
Gevraagd: bereken de knooppuntspotentialen.



Oplossing: Kies de knooppuntsmethode.

Kies een referentieknooppunt 0.

Pas de stroomwet van Kirchhoff toe op de knooppunten a, b en c.

Op knooppunt a. $2 = V_a \cdot (1 + \frac{1}{9}) - V_b \cdot (1) - V_c \cdot 0$ (1)

$0 = -V_a(1) + V_b \cdot (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - V_c \cdot (\frac{1}{2})$ (2)

Doordat het knooppunt c is aangesloten op de spanningsbron is direct te zeggen dat $V_c = 10 \text{ V}$. (3)

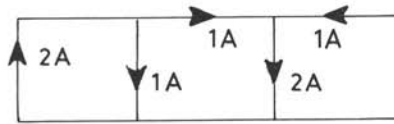
Uit de vergelijkingen (1), (2) en (3) valt te berekenen dat

$$V_a = 9 \text{ V} \quad \text{en} \quad V_b = 8 \text{ V}.$$

De stroom in de geleiding van 1 S is $(V_a - V_b) \cdot 1 = 1 \text{ A}$

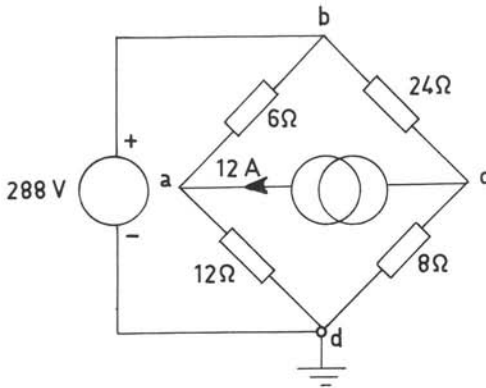
De stroom in de geleiding van $\frac{1}{2} \text{ S}$ is $(V_b - V_c) \cdot \frac{1}{2} = -1 \text{ A}$.

De stroom in de geleiding van $1/9 \text{ S}$ is $V_a \cdot 1/9 = 1 \text{ A}$.
 De stroom in de geleiding van $1/4 \text{ S}$ is $V_b \cdot 1/4 = 2 \text{ A}$.
 De stroomverdeling wordt dus als volgt:



Opgave III:

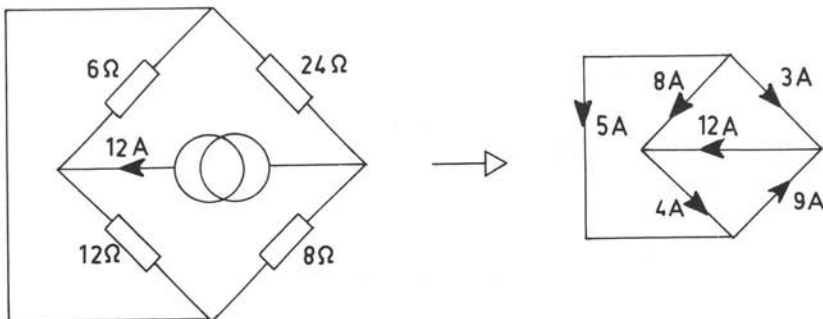
Gegeven:



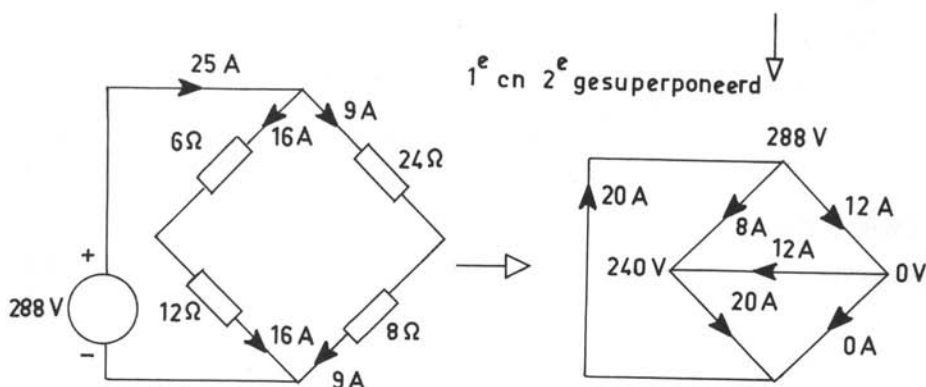
De bronsterkten zijn konstant.

- Gevraagd: a. Bereken de stromen in alle takken met behulp van het superpositiebeginsel (geen maasmethode gebruiken).
 b. Bereken de potentiaal van elk knooppunt, als de potentiaal van knooppunt d op nul volt wordt gesteld.

Oplossing: Bronnen achtereenvolgens passief maken. D. w. z.
 1e. Spanningsbron vervangen door een kortsluiting:



2^e. Stroombron vervangen door open klemmen:



Opgave IV:

Geldt het superpositiebeginsel voor een element gedefinieerd door

- $U = R \cdot I$,
- $U = R \cdot I^2$ en
- $u = L \frac{di}{dt}$?

Oplossing:

- Volgens het gegeven geldt $U_1 = R \cdot I_1$ en $U_2 = R \cdot I_2$.
Indien men kiest $I_3 = I_1 + I_2$ vindt men $U_3 = R(I_1 + I_2) = RI_1 + RI_2$.
Dus $U_3 = U_1 + U_2$. Het superpositiebeginsel geldt!
- Volgens het gegeven geldt $U_1 = R \cdot I_1^2$ en $U_2 = R \cdot I_2^2$.
Indien men kiest $I_3 = I_1 + I_2$ vindt men $U_3 = R(I_1 + I_2)^2$
 $U_3 = R \cdot I_1^2 + R \cdot I_2^2 + R \cdot 2 \cdot I_1 \cdot I_2$
 $U_3 = U_1 + U_2 + R \cdot 2 \cdot I_1 \cdot I_2$ dus $U_3 \neq U_1 + U_2$
Het superpositiebeginsel geldt niet. Het element is niet-lineair.

- $u_1 = L \frac{di}{dt} 1$, $u_2 = L \frac{di}{dt} 2$. Kiest men $i_3 = i_1 + i_2$ dan is

$$u_3 = L \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} = L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt}$$

$$u_3 = u_1 + u_2$$

Dit element is lineair en derhalve geldt het superpositiebeginsel.

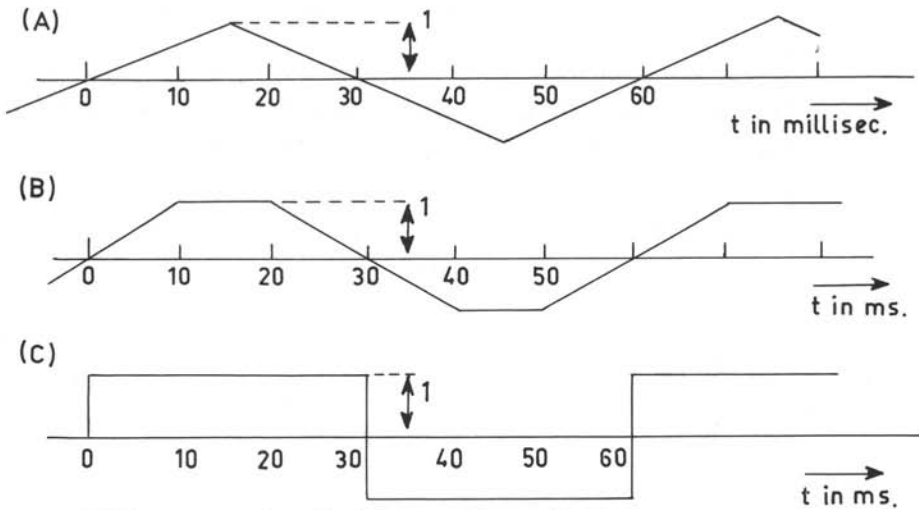
N.B. Nog iets algemener zou men deze bewijzen kunnen leveren door te stellen $I_3 = \alpha \cdot I_1 + \beta \cdot I_2$ waarin α en β willekeurig zijn doch van nul verschillen.

Indien dan geldt $U_3 = \alpha \cdot U_1 + \beta \cdot U_2$ is het netwerkelement lineair en mag het superpositiebeginsel worden toegepast. Ga dit na voor een element gedefinieerd door:

$$i = S \cdot \int_0^t u \cdot dt \quad .$$

Hoofdstuk II

EIGENSCHAPPEN VAN WEERSTAND, SPOEL EN CONDENSATOR



N.B. $u_{\max} = 1$ volt of $i_{\max} = 1$ ampère.

- 2.3
 - a. Door een spoel met $L = 0,1$ H loopt een stroom volgens fig.A. Teken op schaal u_L .
 - b. Doe hetzelfde, maar nu voor een stroom volgens fig. B.
 - c. Beschouw fig. C als een limietgeval van fig. B en ga na hoe u_L zou zijn.
- 2.2
 - a. Op een condensator met $C = 20 \mu F$ staat een spanning volgens fig. A. Teken op schaal i_C .
 - b. Doe hetzelfde, maar nu met een spanning volgens fig. B.
 - c. Beschouw fig. C als grensgeval van fig. A en ga na hoe of i_C zou zijn.
- 2.3

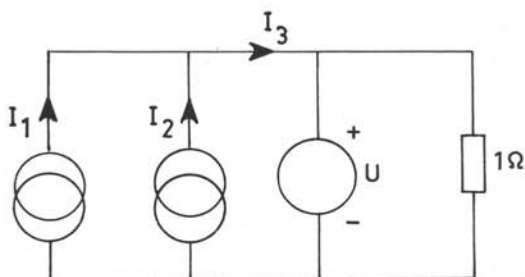
Door een weerstand van 2 ohm loopt een stroom volgens fig.A. Teken op schaal u_R .
Doe hetzelfde volgens fig. B en C.
- 2.4

Op een weerstand van 2 ohm staat een spanning volgens fig.A. Teken op schaal i_R .
Doe hetzelfde volgens fig. B en C.

- 2.5 Men stuurt door een condensator van $20\mu\text{F}$ een stroom volgens fig. C. Bepaal u_C .
- 2.6 Men sluit een poel van $0,1\text{ H}$ aan op een spanning volgens fig. C. Bepaal i_L . (Denk aan beginvoorwaarde = beginstroom.)
- 2.7 Men sluit een spoel van $0,1\text{ H}$ aan op een spanning van fig. A. Bepaal i_L .
- 2.8 Aan een spoel van $0,1\text{ H}$ voert men een stroom toe volgens $i = \sin(100 \cdot t)\text{ A}$.
Bereken u en schets i en u in één figuur.
- 2.9 Dezelfde vraag als 2.8, maar nu met:
 $i = 100 + 5 \sin(100 \cdot t)\text{ A}$.
- 2.10 Men voert door een weerstand van 10 ohm een stroom $i = \sin(100 \cdot t)\text{ A}$.
Teken in één figuur i en u .
- 2.11 Dezelfde vraag als 2.10 maar nu met
 $i = 2 + \sin(100 \cdot t)\text{ A}$.
- 2.12 Men sluit een condensator van $10\mu\text{F}$ aan op een spanning $u = 100 \cdot \sin(100 \cdot t)\text{ V}$.
Teken in één figuur i en u .
- 2.13 Dezelfde vraag als 2.12, maar nu met
 $u = 100 + 100 \cdot \sin(1000 \cdot t)\text{ V}$.
- 2.14 Door een condensator van $20\mu\text{F}$ vloeit een gelijkstroom van 1 mA .
Bepaal $u(t)$. $u(0) = 0$.
- 2.15 Door een serieschakeling van een $R = 10\text{ ohm}$ en een $L = 0,1\text{ H}$ stuurt men een stroom $i = \sin(100 \cdot t)\text{ A}$.
Bereken de totale spanning u_T en teken i en u_T in één figuur.
- 2.16 Dezelfde vraag als 2.15 voor $R = 10\text{ ohm}$ in serie met $C = 1\text{ mF}$.
- 2.17 Een spanning $u = -100 \sin(377 \cdot t)\text{ V}$ staat op een tweepool. Er loopt dan een stroom $i = 10 \cos(377 \cdot t)\text{ A}$. Van welke aard is de tweepool? Welke waarde bezit dit element?
- 2.18 Een spanning $u = 100\sqrt{2} \sin(377 \cdot t)\text{ V}$ staat over een weerstand van 10 ohm .

- Bepaal i .
- Wat is de frequentie van i en u ?
- Bepaal het momentele vermogen p .
- Met welke frequentie wisselt p ?

- 2.19 Gegeven: het schema van een schakeling met twee wisselstroombronnen en met één sinusvormige wisselspanningsbron.



De frequentie van alle bronsterkten is 50 Hz. Op het tijdstip $t = 0$ bereikt de sinusvormige stroom I_1 de maximale positieve waarde van 5 A.

Op het tijdstip $t = 0,005$ s bereikt de sinusvormige stroom I_2 de maximale positieve waarde van 12 A.

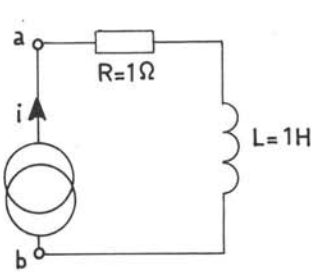
Gevraagd: a. Geef $i_1(t)$ en $i_2(t)$.

- Hoe groot is de amplitude van de stroom I_3 ?
- Hoe groot moet men de amplitude van U kiezen opdat de stroom door de spanningsbron voor alle tijd nul kan worden?
- Zal de stroom door de spanningsbron steeds nul zijn, als men aan U de onder 3.c. gevonden waarde geeft?
Licht Uw antwoord toe.

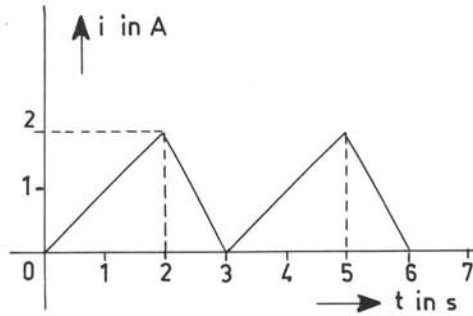
Gegeven: Men vervangt vervolgens de weerstand $1\ \Omega$ door een spoel van 1 H.

Gevraagd: e. Beantwoord nu dezelfde vraag als onder 3.c.

- 2.20 Gegeven: a. het schema 1
b. de grafiek van de stroombronsterkte $i = f(t)$;



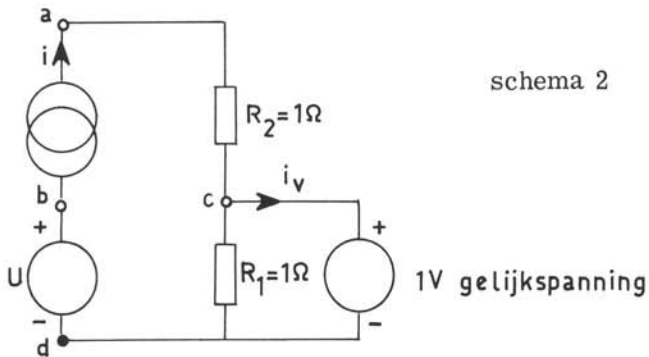
schema 1



grafiek

Gevraagd: a. Schets de spanning u_{ab} op schaal.
Kies een schaal, waarbij 1 cm correspondeert met 1 A, met 1 V en met 1 seconde.

Gegeven: c. het schema 2. U is een gelijkspanning.
d. de bovenstaande grafiek van de stroombronsterkte $i = f(t)$.



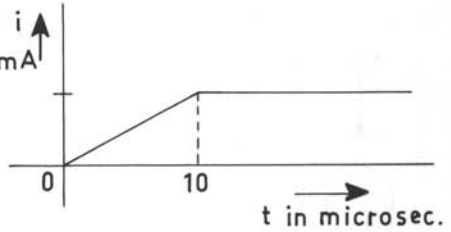
schema 2

Gevraagd: b. Schets de stroom i_V op schaal indien $U = 1$ V.
Kies weer een schaal, waarbij 1 cm correspondeert met 1 A en met 1 seconde.
c. Beantwoord dezelfde vraag als b, maar nu voor $U = 2$ V.

Voorbeelden

Opgave I:

Gegeven: $i = f(t)$ volgens figuur. $L = 5 \text{ mH}$. 1 mA



Gevraagd: Bepaal u_L .

Berekening:

Als $t < 0 \text{ s}$ is $i = 0$

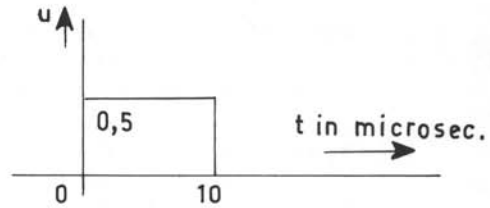
$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0 \text{ V.}$$

Als $t > 10^{-5} \text{ s}$ is $i = 10^{-3} \text{ A}$.

$$u_L = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d(10^{-3})}{dt} = 0 \text{ V.}$$

Als $0 < t < 10^{-5} \text{ s}$ is $i = 100 \cdot t \cdot \text{V}$

$$u_L = 5 \cdot 10^{-3} \frac{d(100 \cdot t)}{dt} = 0,5 \text{ V.}$$



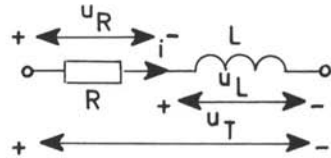
Opgave II:

Gegeven: de schakeling.

$R = 4 \text{ ohm}$,

$L = 2 \text{ mH}$,

$i = \sin(1000 \cdot t) \text{ A}$



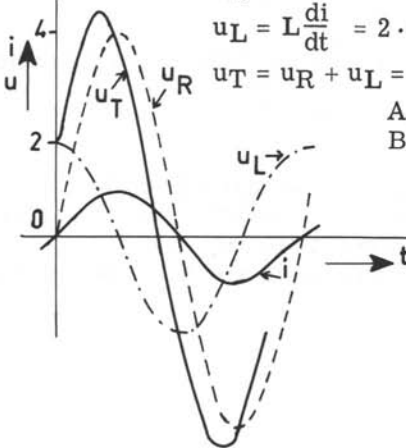
Gevraagd: Bereken u_T .

Teken in één figuur i , u_R , u_L en u_T

Berekening: $u_R = R \cdot i = 4 \cdot \sin(1000 \cdot t) \text{ V}$.

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 2 \cdot \cos(1000 \cdot t) \text{ V.}$$

$$u_T = u_R + u_L = 2\sqrt{5} \sin(1000 \cdot t + \varphi) \text{ V waar } \text{tg} \varphi = \frac{1}{2}$$



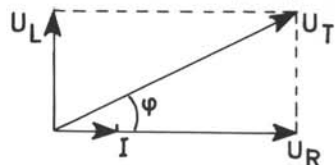
A. opm. u_T is φ rad in fase vóór op i .

B. opm. Men kan ook een indruk krijgen van de situatie door de spanningen en de stroom af te beelden als pijlen.

u_R is in fase met i .

u_L is $\pi/2$ rad in fase vóór op i .

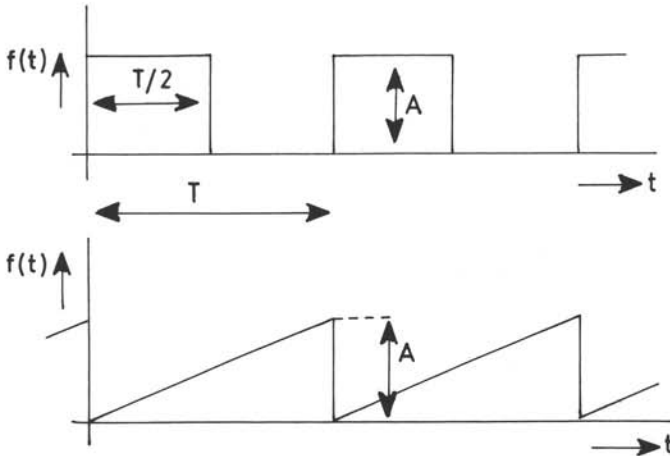
Met vectoriële optelling volgen u_T en φ .



Hoofdstuk III

ENERGIE EN VERMOGEN

- 3.1 Bereken het momentele vermogen p en het gemiddeld vermogen P , in de volgende gevallen.
- $i = 5 \text{ A}$, $u = 3 \text{ V}$.
 - $i = 5 \sin(\omega t) \text{ A}$, $u = 3 \sin(\omega t) \text{ V}$.
 - $i = 5 \sin(\omega t) \text{ A}$, $u = 3 \cos(\omega t) \text{ V}$.
 - $i = -5 \sin(\omega t) \text{ A}$, $u = 3 \cos(\omega t) \text{ V}$.
 - $i = 5 \sin(\omega t) \text{ A}$, $u = 3 \sin(\omega t + \varphi) \text{ V}$.
- 3.2 Met welke elementen zal men te maken hebben in de gevallen 3.1 b, c en d?
- 3.3 Een spanning $u = 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$ volt staat over een weerstand van 10Ω . Bereken de gedurende één periode, in die weerstand ontwikkelde warmte. Welke gelijkspanning zou in diezelfde tijd evenveel warmte hebben geleverd in die weerstand?
- 3.4 Dezelfde vraag als 3.3 maar nu met $R = 15 \Omega$ en $i = 2\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t) \text{ A}$
- 3.5 Welke gelijkstroom heeft hetzelfde warmteeffect als een wisselstroom met een topwaarde $i_{\text{max}} = 2\sqrt{2} \text{ A}$.
- 3.6 Bereken de effectieve waarde van de volgende periodieke grootheden:



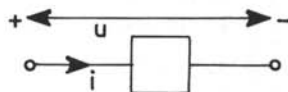
Voorbeelden

Opgave I:

Bereken het momentele vermogen en het gemiddeld vermogen als geldt

$$u = 220\sqrt{2} \cdot \sin(100\pi \cdot t) \text{ V}$$

$$\text{en } i = 10\sqrt{2} \cdot \sin(100\pi \cdot t + \pi/3) \text{ A.}$$



Oplossing:

$$p = u \cdot i = 4400 \cdot \sin(100\pi \cdot t) \cdot \sin(100\pi \cdot t + \pi/3) \text{ W.}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt \quad \text{met } \frac{2\pi}{T} = 100\pi \text{ volgt}$$

$$T = 1/50 \text{ s.}$$

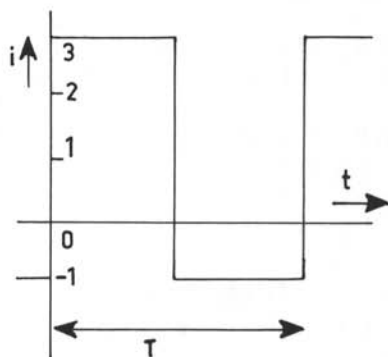
$$P = \frac{1}{1/50} \int_0^{1/50} 4400 \cdot \sin(100\pi \cdot t) \cdot \sin(100\pi \cdot t + \pi/3) dt$$

$$P = 1100 \text{ watt.}$$

$$\text{Kan ook met } P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\pi/3) \text{ of met } P = \frac{1}{2} |U| \cdot |I| \cdot \cos(\pi/3)$$

Opgave II:

Bereken I_{gem} en I_{eff} van de gegeven periodieke stroom.



Oplossing:

$$I_{\text{gem}} = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot dt.$$

$$I_{\text{gem}} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 3 \cdot dt + \int_{T/2}^T (-1) \cdot dt \right] = 1 \text{ A.}$$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 3^2 \cdot dt + \int_{T/2}^T (-1)^2 \cdot dt \right] = 5$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{5} \text{ A.}$$

Hoofdstuk IV

KOMPLEXE GETALLEN

4.1 Bereken:

$$(1 + j \cdot 3) + (3 + j \cdot 1)$$

$$(2 - j \cdot 4) + (3 + j \cdot 4)$$

$$(3 - j \cdot 2) + (-3 + j \cdot 1)$$

$$(4 + j \cdot 3) + (4 + j \cdot 3)^*$$

$$(1 + j \cdot 3) \cdot (3 + j \cdot 1)$$

$$(3 - j \cdot 2) \cdot (3 - j \cdot 2)^*$$

4.2 Schrijf in polaire vorm:

$$-4 + 3 \cdot j \qquad 8 + 15 \cdot j$$

$$-5 + 12 \cdot j \qquad 12 - 35 \cdot j$$

Schrijf deze complexe getallen ook in exponentiële vorm.

4.3 Rationaliseer:

$$\frac{1}{j - 1} \qquad \frac{8 + 6 \cdot j}{-3 - 1 \cdot j}$$

$$\frac{22 + 6 \cdot j}{3 + 2 \cdot j} \qquad \frac{174}{2 - 5 \cdot j}$$

4.4 Schrijf in polaire- en exponentiële vorm:

$$\frac{1 + j}{1 - j} \qquad \frac{174}{2 - 5 \cdot j}$$

$$\frac{1 + j}{\sqrt{3} + j}$$

4.5 Teken in het complexe vlak de complexe getallen:

a. $1 + 3 \cdot j$ $(1 + 3 \cdot j) \cdot j$

b. $2 + j$ $(2 + j) \cdot j$

4.6 Teken in het complexe vlak de complexe getallen:

a. $2 + 2 \cdot j$ $\frac{2 + 2 \cdot j}{j}$

b. $-3 + j$ $\frac{-3 + j}{j}$

Wat betekent delen door j ?

4.7 Schrijf in exponentiële vorm de getallen

a. j

b. $1/j$

4.8 Schets $f(t) = \cos(\omega t)$

$$f(t) = 4 \cos(\omega t)$$

$$f(t) = \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$f(t) = 4 \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$f(t) = e^t \cdot \cos(\omega t)$$

$$f(t) = e^{-t} \cdot \cos(\omega t)$$

4.9 Schets $f(t) = e^{\alpha t}$ voor $t > 0$ voor de gevallen

$$\alpha = 1, 0, -1, -2.$$

4.10 Schets het reële deel van:

$$f(t) = e^{j\omega t}$$

$$f(t) = 4 e^{j\omega t}$$

$$f(t) = e^{j(\omega t + \pi/4)}$$

$$f(t) = e^{j\omega t + \pi/4}$$

4.11 Schets het imaginaire deel van $f(t) = e^{j\omega t}$.

4.12 Schets het reële deel van $f(t) = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$,
voor $\sigma = 0, +1, -1$ en -2 .

4.13 Schets het reële deel van $f(t) = 2 \cdot e^{\lambda t}$,
voor $\lambda = +4j$ en voor $\lambda = -1 + 4j$

4.14 Schets het imaginaire deel van $f(t) = 2 \cdot e^{\lambda t}$ als
 $\lambda = -1 + 4j$

4.15 Schets het reële deel van $f(t) = 3 \cdot e^{\lambda(t + \pi/4)}$
als $\lambda = 4j$ en als $\lambda = -1 + 4j$

4.16 Van welke exponentiële funkties zijn de volgende funkties het reële deel?

- a. $f(t) = \cos(4t)$
- b. $f(t) = 3 \cos(4t)$
- c. $f(t) = 3 \cos(4t + \pi/4)$
- d. $f(t) = 3 \sin(4t)$
- e. $f(t) = e^{-t} \cdot \cos(4t)$
- f. $f(t) = 3e^{-t} \cdot \cos(4t)$
- g. $f(t) = 3e^{-t} \cdot \sin(4t)$
- h. $f(t) = 3$

4.17 Schrijf zonder haken. A en B zijn complexe konstanten

- a. $(A + B)^*$
- b. $(A^*)^*$
- c. $(A^*B)^*$
- d. $(\frac{A}{B})^*$

4.18 Ga na of de volgende betrekkingen gelden. A en B zijn complexe konstanten

- a. $A^* + B = B^* + A$
- b. $(A^B)^* = (A^*)B^*$
- c. $(|A|)^* = |A|$
- d. $\arg \{(A)^*\} = \arg \{(A)\}$

4.19 Wat is Uw opinie over onderstaande relaties

$\lambda = \sigma + j\omega$; σ en ω reëel, t is de tijd

- a. $(e^{\lambda t})^* = e^{\lambda^* t}$
- b. $e^{(\lambda t)^*} = e^{\lambda^* t}$
- c. $e^{(\lambda^* t)^*} = e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \text{d. } e^{j\omega t} \cdot e^{(j\omega t)^*} &= 1 \\ \text{e. } e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda^* t} &= e^{\{2\operatorname{Re}(\lambda)\}t} \end{aligned}$$

4.20 Toon aan dat geldt:

$$\text{a. } \frac{1}{2}(Ue^{\lambda t} + U^*e^{\lambda^* t}) = |U|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$\text{b. } UI^* + U^*I = 2|U||I| \cos(\varphi_U - \varphi_I)$$

$$\text{c. } \frac{d}{dt}(e^{\lambda^* t}) = \left\{ \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) \right\}^*$$

$$\text{d. } \left\{ \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda^* t}) \right\}^* = 2\sigma e^{2\sigma t}$$

Voorbeelden

Opgave I.

Bereken in de volgende gevallen Z .

a. $Z = (1 + 2j) + (2 + 1j)$

b. $Z = (1 + 2j) + (2 + 1j)^*$

c. $Z = (1 + 2j) \cdot (2 + 1j)$

d. $Z = (1 + 2j) \cdot (2 + 1j)^*$

Oplossing: $Z_a = 1 + 2 + 2j + 1j = 3 + 3j$

$$Z_b = (1 + 2j) + (2 - 1j) = 3 + 1j$$

$$Z_c = 2 + 1j + 4j - 2 = 5j$$

$$Z_d = (1 + 2j) \cdot (2 - 1j) = 2 - j + 4j + 2 = 4 + 3j$$

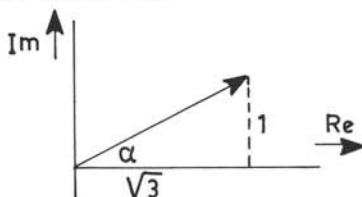
Opgave II.

Geef de polaire en de exponentiële vorm van:

a. $Z = \sqrt{3} + j$

b. $Z = 7 - 24j$

Oplossing: $|Z_a| = 2$



$$Z_a = 2 \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha) = 2 \cdot e^{j\alpha}$$

$$\text{waarin } \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ met } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \pi/6 \text{ rad}$$

$$|Z_b| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

$$Z_b = 25(\cos \beta + j \sin \beta) = 25 \cdot e^{j\beta}$$

$$\text{waarin } \beta = \arctan\left(-\frac{24}{7}\right) \text{ met } 0 > \beta > -\frac{\pi}{2}$$

Opgave III.

Rationaliseer

$$Z = \frac{1 + j}{1 - j}$$

Oplossing: $Z = \frac{(1 + j)}{(1 - j)} \cdot \frac{(1 + j)}{(1 + j)} = \frac{(1 + j)^2}{2} = \frac{2j}{2} = j$

Opgave IV.

Schets het reële deel van

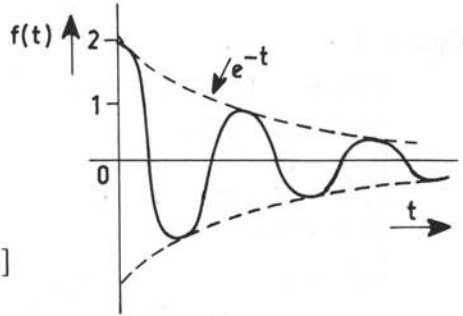
$$f(t) = 2 \cdot e^{(-1+j)t} \text{ voor } t > 0$$

Oplossing:

$$f(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot e^{jt}$$

$$= 2 \cdot e^{-t} [\cos(t) + j \sin(t)]$$

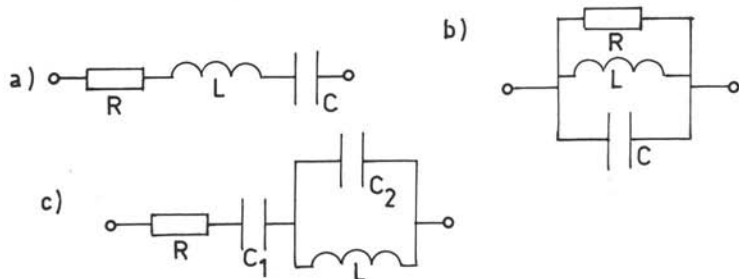
$$\operatorname{Re}[f(t)] = 2 \cdot e^{-t} \cos(t).$$



Hoofdstuk V

IMPEDANTIES

5.1



Bepaal de impedantie van bovenstaande schakelingen.

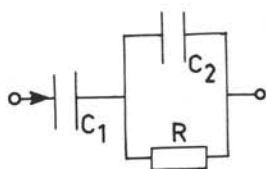
5.2 Toon aan, dat $|U_{C1}| = |U_R|$

$$C_1 = 0,1 \sqrt{2} \mu F$$

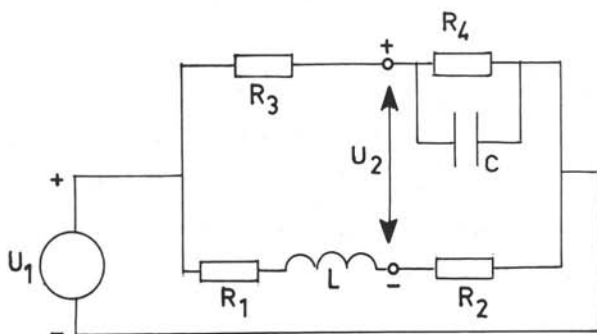
$$C_2 = 0,1 \mu F$$

$$R = 1000 \text{ ohm}$$

$$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$$

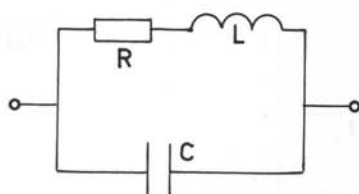


5.3 Welke betrekkingen bestaan er tussen de netwerkelementen als voor iedere frequentie U_2 nul is.



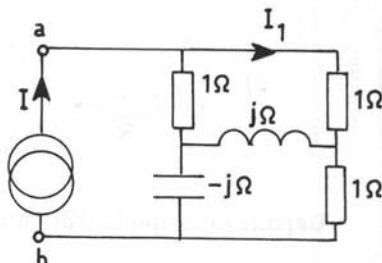
5.4 Toon aan, dat $|Z|$ onafhankelijk is van R als:

$$\omega^2 LC = \frac{1}{2}.$$



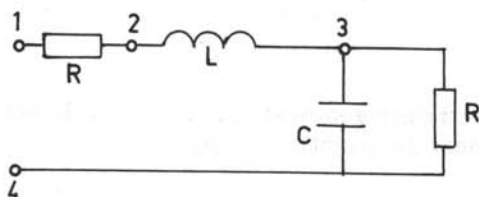
5.5

$$I = 1A(\text{reëel})$$



- Bereken de complexe stroom I_1 .
- Bereken de complexe spanning U_{ab} .
- Men wil de schakeling aan de klemmen a en b vervangen door twee in serie geschakelde elementen. Hoe moet men deze kiezen, opdat U_{ab} gelijk blijft?

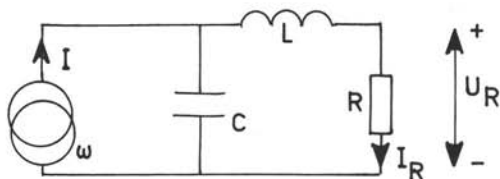
5.6



- Bereken Z_{14} .
- Voor welke waarde van ω is Z_{14} reëel?
- Bereken Z_{14} voor die ω welke onder b. werd gevonden.
- Hoe groot is het fase verschil tussen U_{14} en U_{23} als $R = 400 \Omega$, $C = 50 \mu F$, $L = 4 H$ en $\omega = 50 \text{ rad/s}$?
- Hoe gedraagt de tweepool zich bij zeer lage frequenties?
- Hoe gedraagt de tweepool zich bij zeer hoge frequenties?

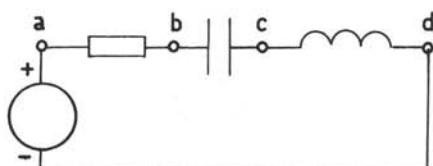
5.7 Gegeven: $u = U e^{j\omega t}$, waarin U een complexe spanning is.
Toon aan: $\frac{1}{2}(u + u^*) = |U| \cos(\omega t + \arg U)$

5.8



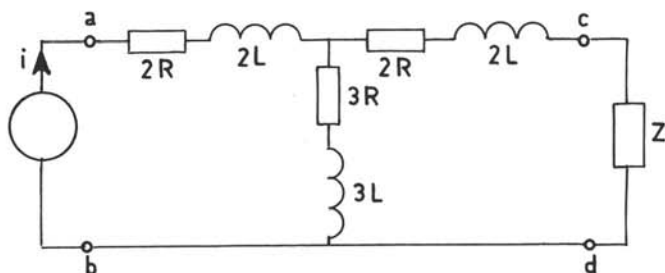
- Druk de (komplexe) stroomsterkte I_R uit in I , ω , L , R en C .
- Waaraan moet de radiaalfrequentie ω voldoen opdat U_R onafhankelijk zij van de grootte van R ? Hoe groot is dan U_R ?

- 5.9 $R = 12 \Omega$
 $C = \frac{2}{9} \text{ mF}$
 $L = 0,05 \text{ H}$



- Bereken de impedantie als $\omega = 500 \text{ rad/s}$.
- Bereken de stroomsterkte als $|U_{ac}| = 150 \text{ V}$.
- Bepaal dan $|U_{bd}|$.
- Welk vermogen levert de bron?

5.10



Men beschouwt de impedantie Z_{ab} van de schakeling rechts van de klemmen a en b.

- Druk Z_{ab} uit in Z , ω , L en R .
- De op de klemmen c en d aangesloten impedantie Z wordt nu zo gekozen dat $Z_{ab} = Z$. Druk Z uit in ω , L en R .

5.11 I en U hebben dezelfde fase,

$$I = 1 \text{ A}$$

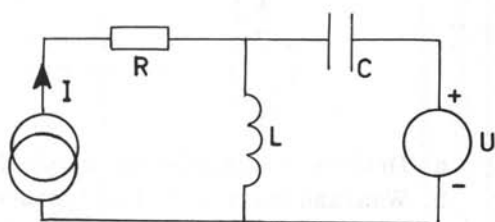
$$U = 1 \text{ V}$$

$$\omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$L = 1 \text{ mH}$$

$$R = 1 \Omega$$

$$C = 0,5 \text{ mF}$$

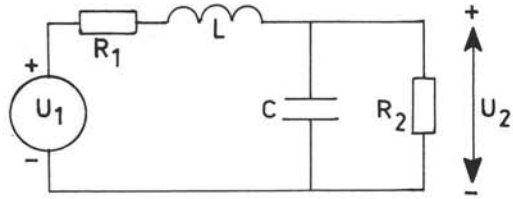


- Druk de (komplexe) stroomsterkte in de condensator uit in de gegevens.
- Hoe groot is het blind-vermogen (reactief-vermogen) dat de spanningsbron afgeeft?

Voorbeelden

Opgave I

Gegeven: het schema



- Gevraagd: a. Bepaal de complexe betrekking $\frac{U_2}{U_1}$, als $R_1 = R$ en $R_2 = 2R$.
- b. Geef de voorwaarde onder welke de spanningen U_1 en U_2 een hoek van $\frac{\pi}{4}$ radialen in fase verschillen.
- Ook hierbij geldt $R_1 = R$ en $R_2 = 2R$.

Uitwerking:

a.
$$U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot U_1$$

$$Z_1 = R + j\omega L$$

$$Z_2 = \frac{2R \cdot 1/j\omega C}{2R + 1/j\omega C}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{2R}{3R - 2\omega^2 LCR + j\omega(2R^2 C + L)} = \frac{T}{N}$$

b. $\frac{\pi}{4}$ fase verschil als $\arg(N) = \pm \frac{\pi}{4}$

Dit geeft

$$\frac{\omega(2R^2 \cdot C + L)}{R(3 - 2\omega^2 LC)} = \pm 1$$

Opgave II

Gegeven: $S = \frac{1}{2} U \cdot I^*$ $S = P + jQ$ met $P = \operatorname{Re}(\frac{1}{2} U \cdot I^*)$ en $Q = \operatorname{Im}(\frac{1}{2} U \cdot I^*)$

Gevraagd: a. Mag men zeggen $P = \frac{1}{2} |U| |I| \cos(\varphi)$, waarin φ het faseverschil is tussen de spanning U en de stroom I ?

b. Geldt $P = \operatorname{Re}(\frac{1}{2} U^* I)$?

c. Geldt $Q = \operatorname{Im}(\frac{1}{2} U^* I)$?

d. Ga na of geldt $P = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{Z}$

e. Ga na of geldt $P = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re}(Z^*)$

Uitwerking:

a. $U = |U| e^{j\alpha}$ en $I = |I| e^{j\beta}$ dus $S = \frac{1}{2} |U| |I| e^{j\varphi}$ ($\varphi = \alpha - \beta$)

$$S = \frac{1}{2} |U| |I| \{ \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \}$$

$$\operatorname{Re}(S) = \frac{1}{2} |U| |I| \cos(\varphi). \text{ De formule is juist.}$$

b. $U^* I = |U| |I| e^{-j\varphi} = |U| |I| \{ \cos(-\varphi) - j \sin(\varphi) \}$
omdat $\cos(-\varphi) = +\cos(\varphi)$ is deze formule juist.

c. Zie b. Omdat $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ geldt de formule niet.
Wel zou juist zijn $Q = -\operatorname{Im}(\frac{1}{2} U^* I)$

d. $I = \frac{U}{Z} \rightarrow I^* = \frac{U^*}{Z^*}$ dus $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{U U^*}{Z^*} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{|U|^2}{Z^*} \right]$

$$P = \frac{1}{2} |U|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z^*} \right]$$

$$P = \frac{1}{2} |U|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z^* \cdot Z} \right] = \frac{1}{2} |U|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{Z}{|Z|^2} \right]$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{|Z|} \operatorname{Re} \left[\frac{Z}{|Z|} \right]$$

$$P = \frac{1}{2} \left| \frac{U^2}{Z} \right| \operatorname{Re} \left[\frac{Z}{|Z|} \right]$$

omdat $Z \neq |Z|$ is de formule onjuist. Alleen als Z reëel is is $Z = |Z|$ en geldt deze vorm.

$$e. P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [U I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z I I^*] = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re}(Z)$$

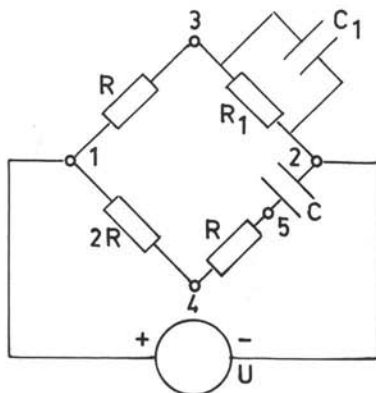
omdat $\operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Re}(Z^*)$ is de formule correct.

Opgave III

Gegeven: het schema.

De frequentie van de sinusvormige bronsterkte is ω rad/s.

De spanning $U_{34} = 0$.



Gevraagd: a. Druk R_1 en C_1 uit in R , C en in ω .

Men kiest nu verder $\omega = 1/RC$.

Gevraagd: b. Bepaal R_1 en C_1 .

- Teken een wijzerdiagram van alle spanningen in dit netwerk.
- Als men de spanningsbron U nu aansluit op de klemmen 3 en 4 in plaats van op de klemmen 1 en 2, en de netwerkelementen kiest als onder b. gevonden, bereken dan voor die situatie de spanning U_{12} .

Uitwerking:

Deze brugschakeling is gegeven door Wien en wordt wel gebruikt voor het meten van frequenties, als-ook in oscillatoren.

De brugvoorwaarde is:

$$a. R(R + \frac{1}{j\omega C}) = 2R \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \quad (1)$$

uitgewerkt:

$$R + \frac{R_1 C_1}{C} + j(\omega R R_1 C_1 - \frac{1}{\omega C}) = 2R_1$$

hieruit volgt:

$$R + \frac{R_1 C_1}{C} = 2R_1 \quad (2) \quad \text{en} \quad \omega^2 R R_1 C C_1 = 1 \quad (3)$$

$$R_1 = \frac{RC}{2C - C_1} \rightarrow \text{Substitutie in (3) geeft: } C_1 = \frac{2C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\text{Dit laatste weer gesubstitueerd in (2) geeft: } R_1 = \frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{2\omega^2 R C^2}$$

b. 1. met $\omega = \frac{1}{RC}$ volgt $C_1 = C$ en $R_1 = R$

$$2. |Z_c| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{RC} \cdot C} = R$$

Wij beschouwen de tak 1, 4, 5, 2. De stroom daarin stellen wij I.

U_{14} en U_{45} zijn in fase met I en U_{52} is $\frac{\pi}{2}$ rad. achter.

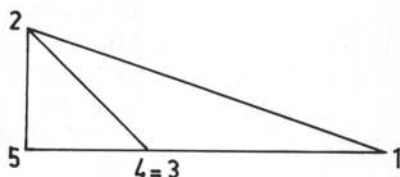
Uit de grootte van de impedanties volgt:

$$|U_{14}| = 2|U_{45}| = |U_{52}|.$$

Hiermee valt de volgende spannings-driehoek te tekenen.

Dit is tegelijk het complete wijzerdiagram omdat door het brugevenwicht

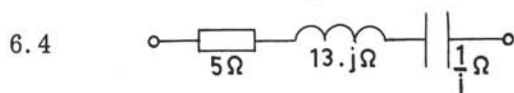
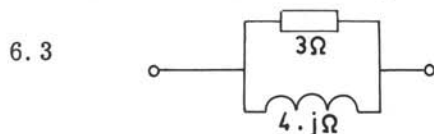
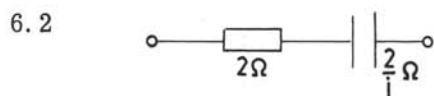
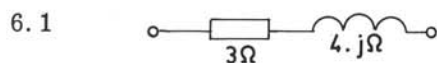
$$U_{34} = 0.$$



- c. Verplaatsing van de spanningsbron betekent dat toch dezelfde voorwaarde (1) sub. a. kan worden gegeven, zodat met b. 1 nu volgt dat $U_{12} = 0$.

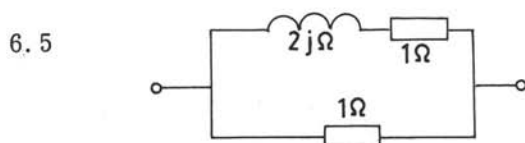
Hoofdstuk VI WIJZERDIAGRAMMEN

Geef de wijzerdiagrammen van de stromen en van de spanningen die in de volgende schakelingen optreden op schaal.

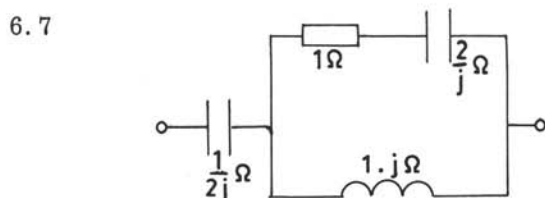
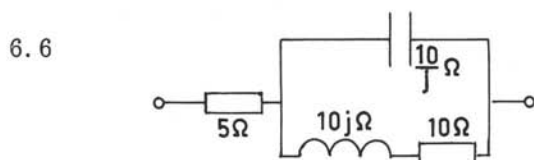


Idem als $Z_c = \frac{13}{j} \Omega$

en als $Z_c = \frac{25}{j} \Omega$

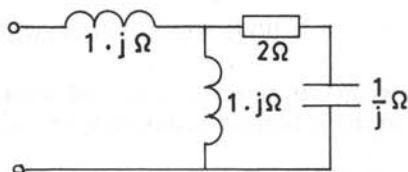


Gedraagt de twee-
pool zich inductief
of capacitief?

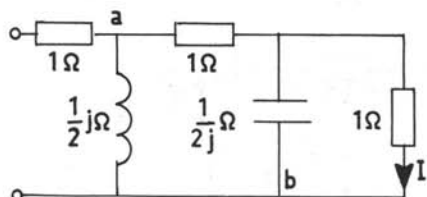


Gedraagt de twee-
pool zich inductief
of capacitief?

6.8



6.9



Bepaal de fasehoek tussen U_{ab} en I .

6.10

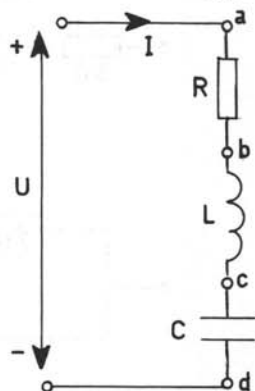
$$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$R = 20 \text{ ohm}$$

$$|U| = 25 \text{ volt}$$

$$|U_{ac}| = 52 \text{ volt}$$

$$|U_{bd}| = 15 \text{ volt}$$



- Bepaal de waarde van L en de waarden van C , waarbij aan de gegevens wordt voldaan.
- Bij welke radiaal frequenties zouden U en I in fase zijn? (resonantie)

6.11 Gegeven: Het schema

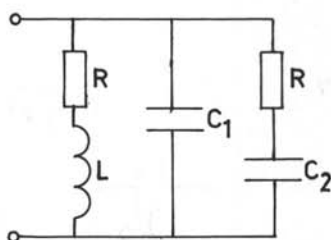
$$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$R = 2 \Omega$$

$$L = 0,2 \text{ mH}$$

$$C_1 = 50 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 33\frac{1}{3} \mu\text{F}$$



Men brengt op de klemmen van de gegeven tweepool een wisselspanning U aan, met een hoekfrequentie van ω rad/s.

Gevraagd:

- a. Construeer in één wijzerdiagram, op schaal, de stroom dóór en de spanning óver elk element dat in de schakeling voorkomt.
Kies én voor de stroomeenheid, én voor de spanningseenheid in dit diagram dezelfde lengteëenheid.
- b. Gedraagt de gegeven tweepool zich in dit geval inductief of capacitief?
Waarom?

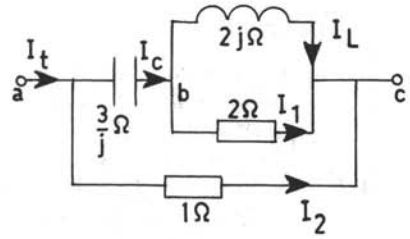
Voorbeelden

Opgave I

Teken het wijzerdiagram van stromen en spanningen.

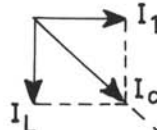
Oplossing:

- Teken in het schema alle takstromen.
- Benoem alle knooppunten.
- Kies een stroom of een spanning. Bijv. $I_1 \cdot U_{bc} = 2 \cdot I_1$

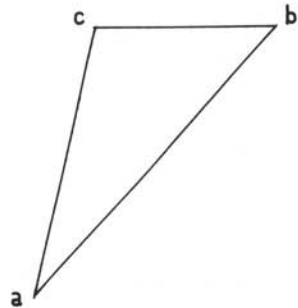
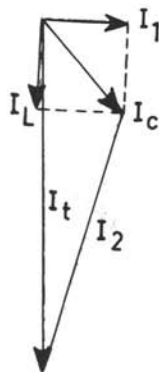
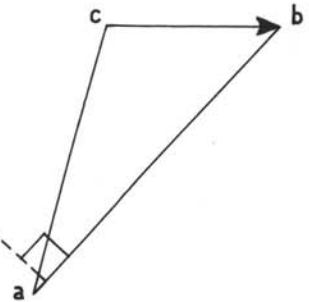


U_{bc} is in fase met I_1

- Uit U_{bc} volgt I_L . $U_{bc} = j\omega L \cdot I_L = j \cdot 2 \cdot I_L$. Teken I_L en daarmee I_c .



- Met I_c volgt U_{ab} .
- $U_{ac} = U_{ab} + U_{bc}$.
- Nu is $I_2 = U_{ac} \cdot \frac{1}{1}$ (in fase)



- h. Hiermee valt I_2 te tekenen. Verder is $I_t = I_c + I_2$.
Daarmee is het stroomdiagram te voltooien.

Conclusie: Uit vergelijking van het stroom- en spanningsdiagram blijkt dat de totale stroom I_t in fase vóór is op de totale spanning U_{ac} . Aan de klemmen gezien gedraagt de schakeling zich dus capacitief.

Opgave II

Gegeven: het schema.

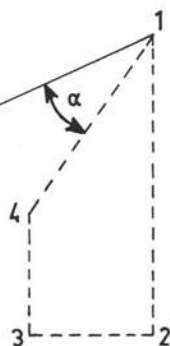
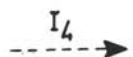
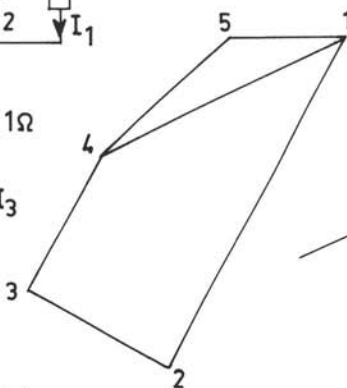
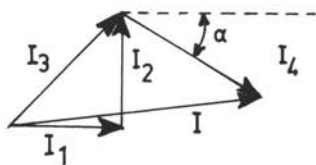
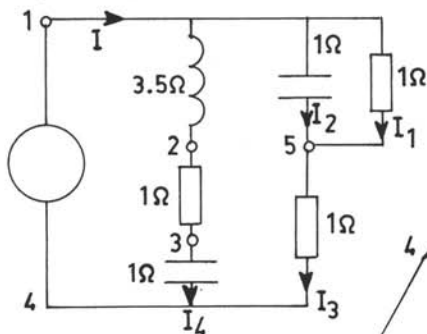
De bronsterkte is sinusvormig.
De drie weerstanden R zijn 1Ω .
De reactantie van L is $2,5\Omega$.
De reactantie van beide condensatoren is -1Ω .

Gevraagd:

- a. Teken de wijzerdiagrammen voor stromen en spanningen op schaal. Kies én voor de stroomeenheid én voor de spanningseenheid dezelfde lengte-eenheid.

- b. Bepaal door opmeting $\frac{|U_{52}|}{|U_{14}|}$

Oplossing:



Ga uit van I_1

Volgt U_{15} (in fase)

Volgt I_2 (90° vóór)

Volgt $I_3 = I_1 + I_2$

Volgt U_{54} (in fase met I_3).

Los van bovenstaande constructie uitgaan van I_4 (gestippeld). Dan volgen: U_{12} , U_{23} , U_{34} , U_{14} .

De aldus ontstane vierhoek moet over een hoek α worden gedraaid en zodanig vergroot worden, dat de gestippelde U_{14} samenvalt met de getrokken U_{14} .

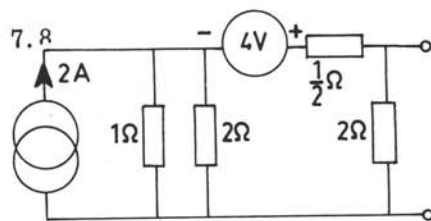
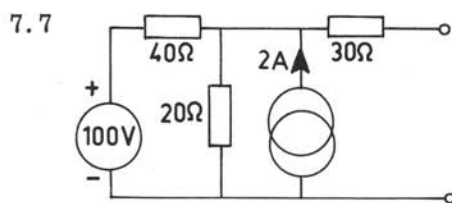
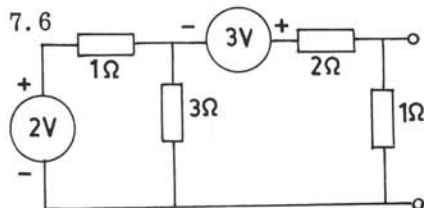
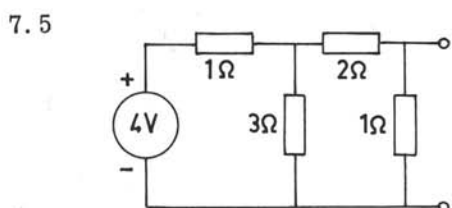
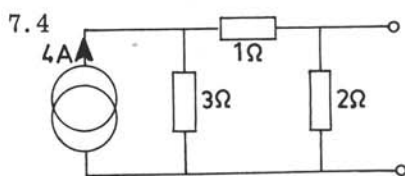
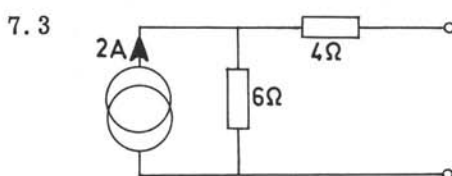
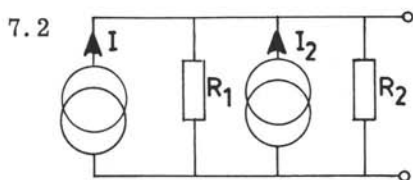
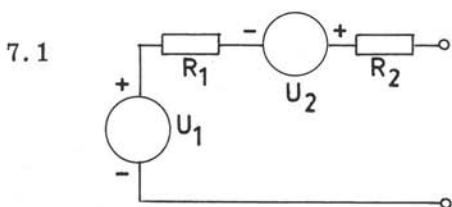
Ook I_4 moet aangepast worden. Tenslotte volgt I. Door opmeten blijkt:

$$\left| \frac{U_{52}}{U_{14}} \right| = 1,2$$

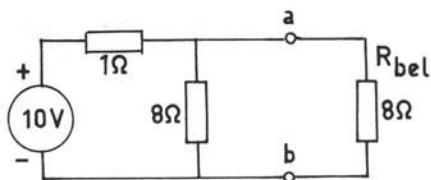
Hoofdstuk VII

THEOREMA VAN THÉVENIN. THEOREMA VAN NORTON

Bepaal het thévenin- en norton-equivalent van de volgende schakelingen



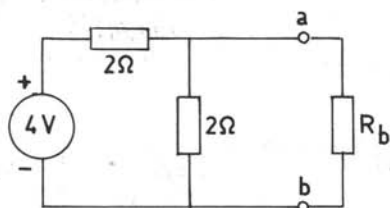
- 7.9 Bereken zonder gebruik te maken van het th.v. Thévenin
- het vermogen in de belasting van $8\ \Omega$.
 - het vermogen van de spanningsbron.



Bepaal vervolgens het thévenin-vervangschema links van de klemmen a en b. Bereken daarna nogmaals:

- het vermogen in de belasting.
- het vermogen van de spanningsbron.
- Verklaar de overeenkomst, resp. het verschil.

- 7.10 Bepaal het thévenin-equivalent van de schakeling links van de klemmen a en b. Bereken daarna de stroomsterkte en het vermogen in de belasting R_b , voor de gevallen dat:



$$R_b = 1/2 \Omega$$

$$R_b = 1 \Omega$$

$$R_b = 2 \Omega$$

$$R_b = 0 \Omega$$

$$R_b = \infty$$

- 7.11 Gegeven: het schema

$$R_1 = 30 \Omega$$

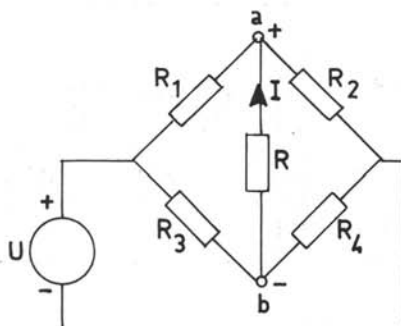
$$R_2 = 420 \Omega$$

$$R_3 = 20 \Omega$$

$$R_4 = 30 \Omega$$

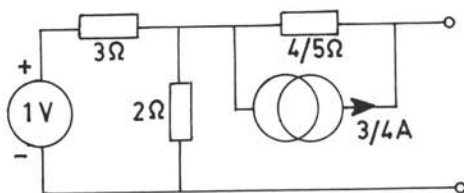
$$U = 90 \text{ volt}$$

gelijkspanning



- Gevraagd: a.
- Bereken door toepassen van het theorema van Thévenin de stroomsterkte I in de belasting R , voor het geval dat $R = 50 \Omega$.
 - Welk vermogen wordt dan in deze belasting ontwikkeld?
- b.
- Men verandert nu de belasting R . Hierdoor verandert het vermogen P in R . Bepaal P als functie van R .
 - Bewijs dat P een extreme waarde heeft als $R = 40 \Omega$.
 - Bewijs dat dit extreem een maximum is.

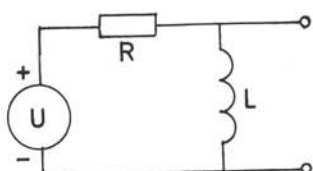
7.12



Bepaal het thévenin- en norton-vervangingsschema.

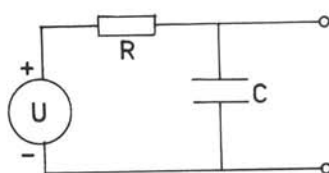
Bepaal van onderstaande schakelingen het thévenin-equivalent. Geef aan hoe men de belasting moet kiezen, opdat men van een vermogensaanpassing kan spreken.

7.13



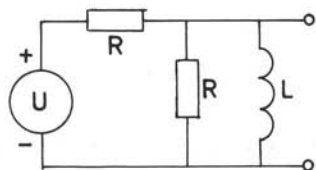
$$U = 1 \text{ V}, R = 10 \Omega, \omega L = 10 \Omega$$

7.14



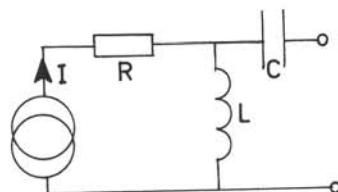
$$U = 1 \text{ V}, R = 10 \Omega, \omega C = \frac{1}{10} \text{ S}$$

7.15



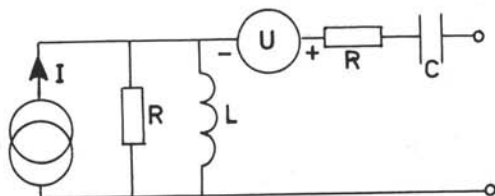
$$U = 10 \text{ V}, R = 10 \Omega, \omega L = 10 \Omega$$

7.16



$$I = 10 \text{ A}, R = R \Omega, \omega = 100 \text{ rad/s} \\ L = 1 \text{ H}, C = 2 \times 10^{-4} \text{ F}$$

7.17



$$R = 3 \Omega$$

$$C = \frac{1}{4} \times 10^{-4} \text{ F}$$

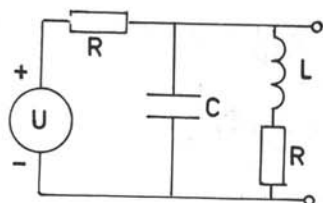
$$L = 0,4 \text{ mH}$$

$$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$I = 25 \text{ A}$$

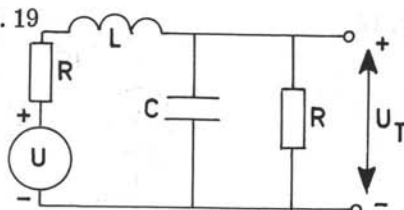
$$U = 12(1 + 2j) \text{ V}$$

7.18



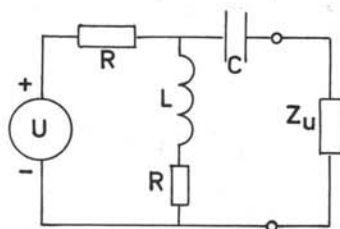
$$\begin{aligned}\omega &= 20.000 \text{ rad/s} & R &= 500 \Omega \\ L &= 25 \text{ mH} & U &= 50 \text{ V} \\ C &= 0,25 \mu\text{F}\end{aligned}$$

7.19



Onder welke voorwaarde verschillen U_T en U , $\pi/2$ rad in fase?

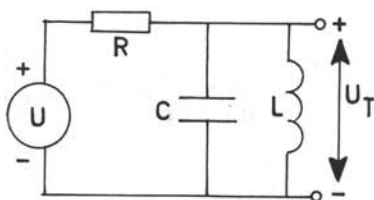
7.20



$$\begin{aligned}L &= 0,3 \text{ H}, & R &= 200 \Omega, & C &= 10 \mu\text{F}, \\ u(t) &= 50 \sin(1000t) \text{ V}.\end{aligned}$$

- Bereken $u_T(t)$.
- Hoe moet men de belasting Z_u kiezen om die op de schakeling aan te passen?

7.21

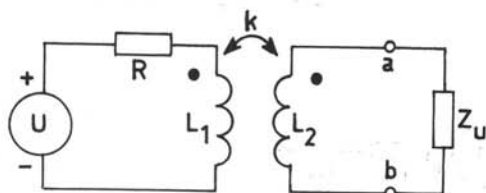


$$u(t) = 8 \cos(10t + \pi/4) \text{ V}$$

$$\begin{aligned}L &= 1 \text{ H}, \\ R &= 10 \Omega, \\ C &= \frac{1}{50} \text{ F}.\end{aligned}$$

- Bereken $u_T(t)$.
- Hoe moet de aangepaste belasting worden gedimensioneerd?

7.22



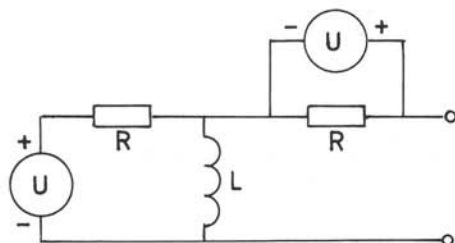
In bovenstaande schakeling is $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $R = 10 \Omega$, $L_1 = 10 \text{ H}$, $L_2 = 1,6 \text{ H}$ en $u = 100\sqrt{2} \cos(t + \pi/4)$ volt.

- Bepaal het thévenin-equivalent van het circuit links van de

klemmen a en b. Bereken de momentele waarde van de thévenin-spanning.

- b. Wat is de meest eenvoudige manier waarop Z_u kan zijn opgebouwd, opdat daarin van een maximaal vermogen sprake is. Geef de waarden van de daarbij gebruikte elementen.

7.23



Gegeven: het schema.

De spanningen U van de bronnen zijn gelijk naar grootte en naar fase.

Gevraagd: a. Bepaal het thévenin-equivalent van de gegeven schakeling.

- b. Men kiest nu $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $|U| = 3 \text{ V}$ en $\omega = 1000 \text{ rad/s}$.

Vervolgens sluit men op de klemmen van de schakeling aan, een condensator van 2 mF . Bereken van de stroom I_C door die condensator $|I_C|$.

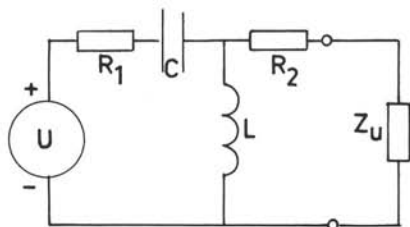
7.24 In de gegeven schakeling is

$$R_1 = 4 \Omega, R_2 = 3 \Omega$$

$$C = 50 \mu\text{F}, L = 0,2 \text{ mH}$$

$$\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

De effectieve waarde van de bronspanning is 4 volt.



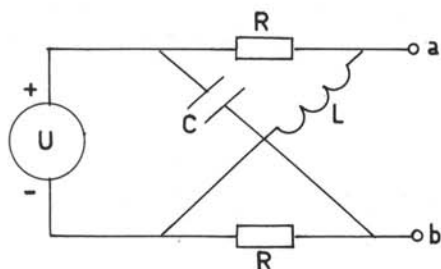
Gevraagd:

- a. Wat is de meest eenvoudige manier waarop men Z_u moet samenstellen opdat Z_u aan de schakeling is aangepast?
- b. Hoe groot is in dat geval de effectieve stroomsterkte in de belasting Z_u ?

7.25 Gegeven: het schema

De beide weerstanden zijn gelijk.

De hoek-frequentie van de bronspanning is ω .



Gevraagd: a. Druk de spanning U_{ab} uit in U , L , C , R en ω .

b. Indien nu voorts gegeven wordt: $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 2 \text{ F}$ en de bronsterkte $u(t) = 10 \cdot \sin(t) \text{ V}$, bereken dan $u_{ab}(t)$.

c. Bepaal het thévenin-equivalent van de schakeling links van de klemmen a en b.

d. Indien men op de klemmen a en b van de gegeven schakeling aansluit een serieschakeling van een weerstand van $7/10 \Omega$ en een condensator van 10 F , hoe groot is dan het gemiddelde vermogen P dat in deze belasting wordt ontwikkeld?

Voorbeelden

Opgave I.

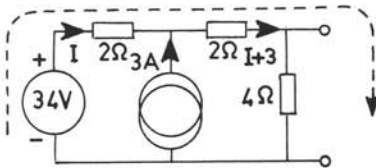
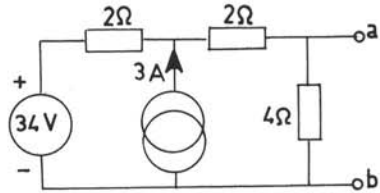
Bepaal het thévenin-equivalent van de gegeven schakeling.

Oplossing:

1e methode.

Bepaal de théveninspanning.

- a. Bepaal hiertoe de stroomverdeling. (b.v. met takstromen)
Pas de spanningsweg van Kirchhoff toe.



$$34 = 2 \cdot I + (I+3)(2+4)$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$$U_{ab} = (2+3) \cdot 4 = 20 \text{ V}$$

$$\underline{U_T = 20 \text{ V}}$$

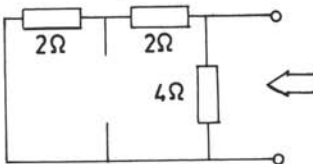
- b. Bepaal de inwendige weerstand van de schakeling ($= R_i$).

Maak hiertoe de bronsterkten nul. Dat wil zeggen:

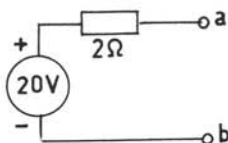
1. vervang de spanningsbron(nen) door een kortsluiting én
2. neem de stroombron(nen) weg.

De schakeling wordt dan als is getekend. De weerstand aan de klemmen a en b, is de théveninweerstand.

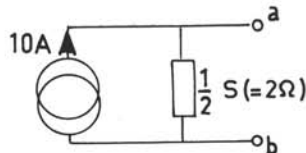
Hier is $\underline{R_i = 2 \Omega}$



De vervangschema's worden:



Thévenin



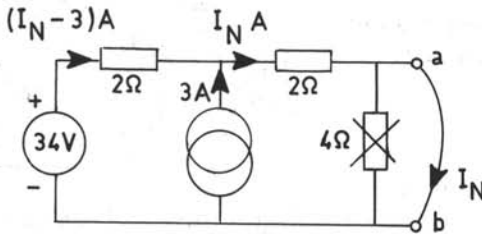
Norton

2e methode.

- a. Bepaal U_T b.v. als boven.
b. Sluit de klemmen a en b kort en bepaal de kortsluitstroom. Deze is I_N (= nortonstroom).

Uit het théveninvervangschema volgt direct dat:

$$R_i = \frac{U_T}{I_N}$$



$$34 = (I_N - 3)2 + I_N \cdot 2$$

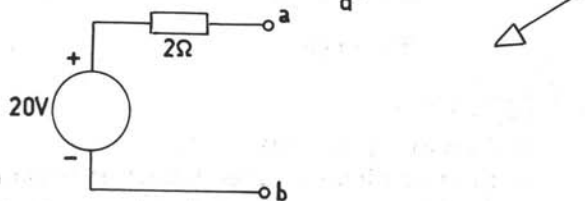
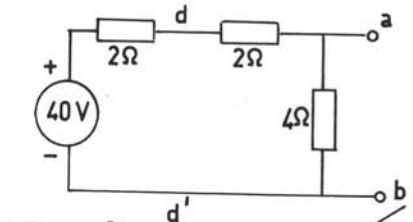
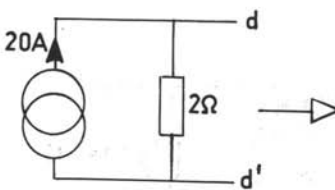
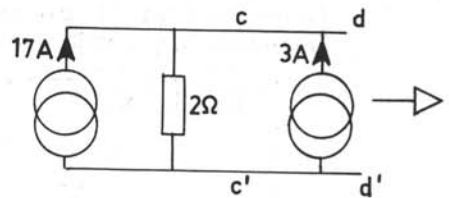
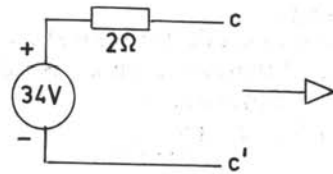
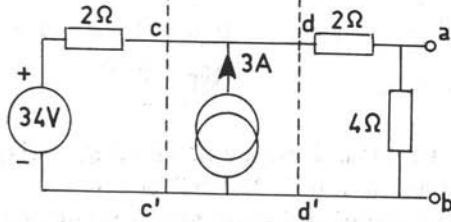
$$I_N = 10 \text{ A}$$

$$R_i = \frac{U_T}{I_N} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

Verder als boven.

3e methode.

Pas het theorema van Thévenin (of Norton) toe op telkens een deel van de gehele schakeling.

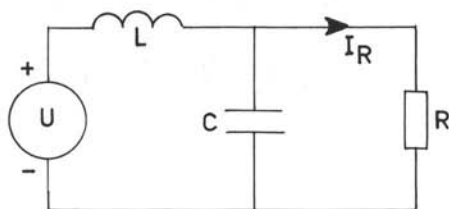


Nortonschema als boven.

Opgave II.

Gegeven: het schema.

De spanningsbronsterkte is $u(t) = |U| \cos(\omega t)$ V.



- Gevraagd: a. Bepaal onder welke voorwaarde de stroom I_R onafhankelijk is van de grootte van R.
 b. Bespreek dit resultaat door gebruik te maken van het theorema van Norton.
 c. Bepaal in het onder a. bedoelde geval
 1e. $i_R(t)$ en
 2e. het door de bron afgegeven vermogen P.

Uitwerking:

$$a. I_R = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \times \frac{U}{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}}$$

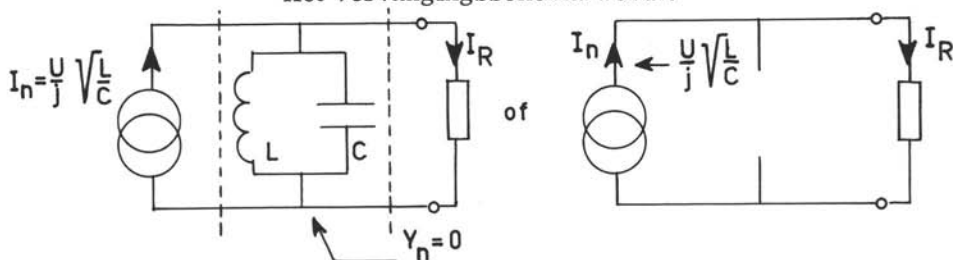
$$I_R = \frac{U}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

I_R is onafhankelijk van R als $(1 - \omega^2 LC) = 0$; dus
 als $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- b. De inwendige paralleladmittantie van het norton-equivalent van de schakeling links van de weerstand is

$$Y_n = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}. \quad \text{Bij } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ is } Y_n = 0.$$

Het vervangingschema wordt:



Bij $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ is de admittantie van L en C parallel nul en vloeit alle gronstroom door de weerstand.

I_R is dan onafhankelijk van R, steeds gelijk aan I_N .

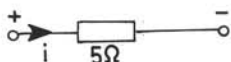
$$\begin{aligned} \text{c. 1e. } I_R = \frac{U}{j} &= \sqrt{\frac{C}{L}} ; i_R(t) = |U| \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= |U| \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \text{ A} \end{aligned}$$

$$\text{2e. } P \equiv P_R = \frac{1}{2} |I_R|^2 \quad R = \frac{1}{2} \frac{|U|^2 CR}{L}$$

Hoofdstuk VIII

KOMPLEXE REKENWIJZE EN FUNCTIES VAN DE TIJD

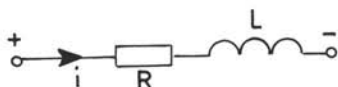
- 8.1 Op de klemmen van de volgende tweepolen staat een spanning u . Bepaal door toepassen van de complexe rekenwijze telkens $i(t)$.



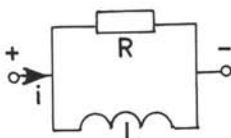
$$u(t) = 10 \cdot \cos(100 \cdot t) \text{ V}$$



$$u(t) = 10 \cdot \cos(100 \cdot t) \text{ V}$$



$$u(t) = |U| \cdot \cos(\omega t + \varphi) \text{ V}$$

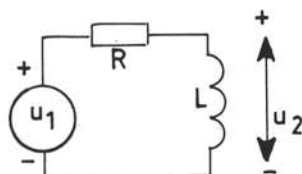


$$u(t) = |U| \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ V}$$

- 8.2 Bereken $u_2(t)$ voor de volgende gevallen.

a. $u_1(t) = |U| \cdot \sin(\omega t + \pi/4) \text{ V}$

b. $u_1(t) = |U| \cdot \cos(\omega t) + 2|U| \sin(\omega t) \text{ V}$



- 8.3 Voor een L-C-R-seriekring geldt:
 $\omega = 377 \text{ rad/s}$, $R = 20 \Omega$, $\omega L = 10 \Omega$ en $1/\omega C = 90 \Omega$.
 De stroomsterkte is:

$$i(t) = 2 \cdot \cos(\omega t - \pi/12) \text{ A.}$$

Bereken de totale spanning $u(t)$.

- 8.4 Gegeven:

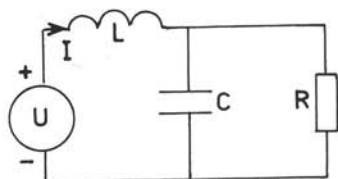
$$R = 0,25 \Omega$$

$$L = 0,04 \text{ H}$$

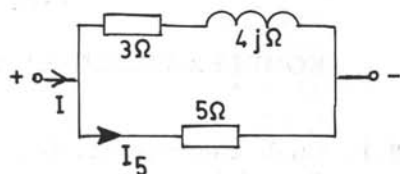
$$C = 1,50 \text{ F}$$

$$u(t) = 100 \cdot \sin(2t + \pi/6)$$

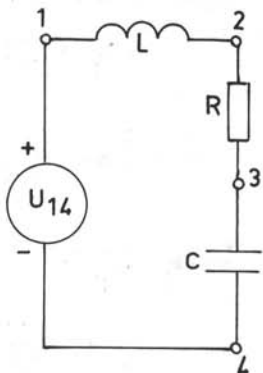
Bepaal $i(t)$.



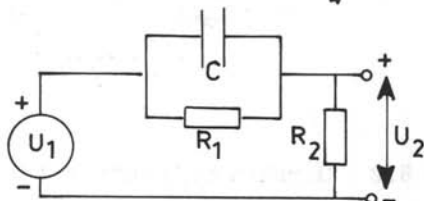
- 8.5 Bereken de faseverschuiving tussen I_5 en I .



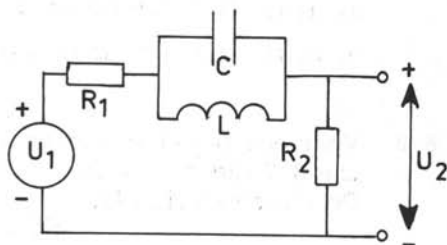
- 8.6 $R = 10\text{ k}\Omega$
 $C = 0,1\text{ }\mu\text{F}$
 $\omega = 1000\text{ rad/s}$
 $u_{34}(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \pi/4)\text{ V}$
 a. Bepaal via de complexe rekenwijze $u_{24}(t)$.
 b. Als nu verder nog gegeven wordt dat:
 $u_{14}(t) = 20 \cdot \cos(\omega t)\text{ V}$,
 Bepaal dan L .



- 8.7 $C = 0,025\text{ F}$
 $R_1 = 10\text{ }\Omega$
 $R_2 = 5\text{ }\Omega$
 $u_1(t) = 25 \cdot \cos(4t)\text{ V}$
 Bereken $u_2(t)$.



- 8.8 $R_1 = 400\text{ }\Omega$
 $R_2 = 600\text{ }\Omega$
 $C = 10^{-5}\text{ F}$
 $L = 10\text{ H}$
 Bepaal $u_2(t)$, als gegeven is dat:
 $u_1(t) = \sqrt{13} \cdot \sin(200 \cdot t)\text{ V}$



- 8.9 Dezelfde vraag als 8.8, maar nu met $\omega = 50\text{ rad/s}$.

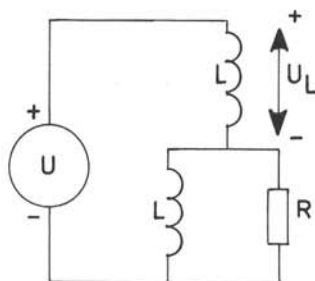
- 8.10 Dezelfde vraag als 8.8, maar nu met $\omega = 100\text{ rad/s}$.

8.11 Gegeven is dat:

$$u_L(t) = A \cdot \sin(\omega t) \text{ V}$$

$$\text{en dat } R = \omega L$$

Bepaal $u(t)$.



8.12 $R = R \Omega$

$$C = 10^{-5} \text{ F}$$

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

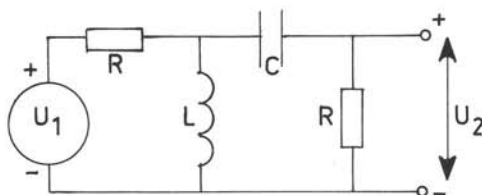
Gevraagd:

a. Onder welke voorwaarde zal u_2 een hoek van $\pi/2$ radialen in fase verschillen met u_1 ?

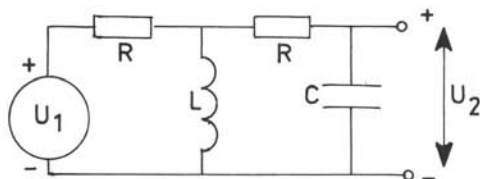
b. Als verder gegeven wordt dat:

$$R = 200 \Omega \text{ en } L = 0,1 \text{ H,}$$

$$\text{bereken dan } u_2(t) \text{ als } u_1(t) = \sqrt{58} \cdot \sin(1000 \cdot t) \text{ V}$$



8.13



a. Onder welke voorwaarde zal u_2 in fase zijn met u_1 ?

b. Als men kiest $R = 100 \Omega$, $L = 0,05 \text{ H}$, $C = 2,5 \mu\text{F}$ en $\omega = 5000 \text{ rad/s}$,

1. wordt dan voldaan aan de voorwaarde onder a. gevonden?

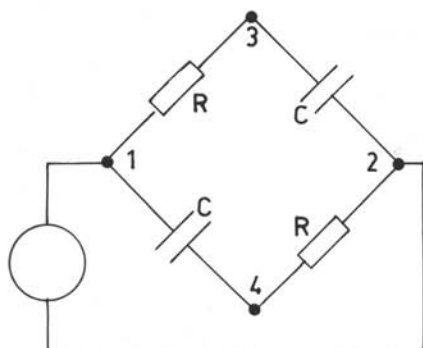
2. Bewijs dat dan geldt $\frac{U_2}{U_1} = \frac{10}{15 + 21 \cdot j}$

c. Als voorts gegeven wordt dat:

$$u_1(t) = 3 \cdot \sin(5000t + \varphi) \text{ met } \varphi = \arctan(7/5)$$

bereken dan $u_2(t)$.

8.14 Gegeven: het schema met twee gelijke weerstanden en twee gelijke condensatoren.



- Gevraagd: a. Bereken de complexe spanningsverhouding $H = \frac{U_{34}}{U_{12}}$.
De frekwentie van de bron is ω rad/s.
b. Bepaal onder welke voorwaarde U_{34} een hoek van 90° in fase verschilt met U_{12} .

Voorts wordt nu gegeven: $u_{12}(t) = \sin(t)$ V,
 $R = 1 \Omega$ en
 $C = 1$ F.

- Gevraagd: c. Teken het wijzerdiagram van alle spanningen.
d. Bepaal met behulp van Uw antwoord onder 1. c de spanning $u_{14}(t)$.
e. Tussen de klemmen 3 en 4 wordt nu een zodanige impedantie aangesloten, dat daarin een zo groot mogelijk vermogen wordt gedissipeerd. Bereken voor dit geval de stroom $i(t)$ in die belasting.

8.15 Gegeven: het schema,

$$L = 1 \text{ mH},$$

$$C = 1 \text{ mF},$$

$$R = 1 \Omega,$$

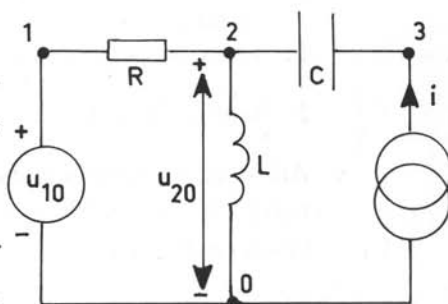
$$u_{10}(t) = \sin(1000t) \text{ V}$$

$$\text{en } i(t) = \cos(1000t) \text{ A}$$

Gevraagd: a. Bereken $u_{20}(t)$.

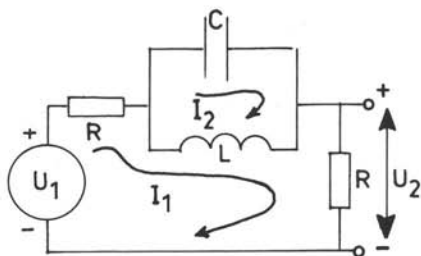
- b. Teken in één wijzerdiagram alle spanningen die in de schakeling voorkomen.

c. Bereken het gemiddelde vermogen P dat in de schakeling wordt gedissipeerd.



Voorbeelden

Opgave I.



$R = 500 \Omega$, $C = 1 \mu F$ en $\omega = 2000 \text{ rad/s}$.

- Bepaal de complexe verhouding $\frac{U_2}{U_1}$.
- Voor welke waarde van L zijn u_1 en u_2 in fase?
- Voor welke waarden van L verschillen u_1 en u_2 , $\pi/4$ rad in fase?
- Bepaal voor het geval dat $L = 1/8 \text{ H}$ en $u_1(t) = \sqrt{10} \cdot \sin(2000 \cdot t)$ volt, de momentele waarde van de spanning u_2 .

Oplossing: $U_1 = I_1(2R + j\omega L) - I_2 \cdot j\omega L$

a. $0 = -I_1 j\omega L + I_2(j\omega L + 1/j\omega C)$ hieruit

$$I_2 = I_1 \frac{j\omega L}{j\omega L + 1/j\omega C}$$

invullen levert:

$$U_1 = I_1 \left[(2R + j\omega L) + \frac{\omega^2 L^2}{j\omega L + 1/j\omega C} \right] \text{ met } U_2 = I_1 \cdot R \text{ volgt}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{(2R + j\omega L) + \frac{\omega^2 L^2}{j\omega L + 1/j\omega C}} \quad \text{invullen van de waarden levert}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 - 4L}{2(1 - 4L) + j \cdot 4L} \quad \left[= \frac{T}{N} \right]$$

- In fase als $\arg(T) - \arg(N) = 0$ d.w.z. $\arg(N) = 0$ of $L = 0$.
- $\pi/4$ rad faseverschil als $\arg(T) - \arg(N) = \pm \pi/4$, dus

$$\frac{4L}{2 \cdot (1 - 4L)} = \pm 1 \quad \text{dit levert } L = 1/6 \text{ H en } L = 1/2 \text{ H.}$$

d. Met $L = 1/8 \text{ H}$ is te schrijven $U_2 = \frac{1}{2+j} \cdot U_1$

$$|U_2| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot |U_1| = \sqrt{2} \text{ en } \arg(U_2) = \arg(U_1) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Hiermee valt tenslotte te schrijven:

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(2000 \cdot t - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)) \text{ volt.}$$

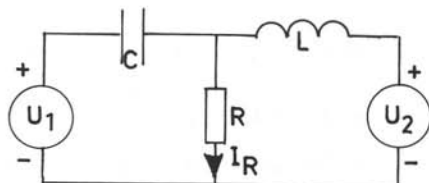
Opgave II.

Gegeven: het schema.

De momentele waarden van de bronspanningen zijn resp.

$$u_1 = \operatorname{Re}\{U_1 e^{j\omega t}\} \text{ en}$$

$$u_2 = \operatorname{Re}\{U_2 e^{j\omega t}\}.$$



Gevraagd: a. Bepaal de stroom I_R in de weerstand R door gebruik te maken van het superpositiebeginsel.

Druk I_R uit in U_1 , U_2 , C , L , R en ω .

b. Voorts wordt nu gegeven: $L = 1 \text{ H}$

$$C = 1 \text{ F}$$

$$R = 2 \Omega$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

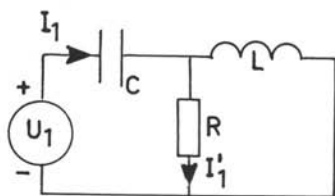
$$u_1(t) = 10 \cos(\omega t) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) \text{ V}$$

Bepaal $i_R(t)$.

c. Bereken het gemiddelde reële vermogen P , dat door de beide bronnen tezamen wordt afgegeven.

Uitwerking:



$$U_1 = I_1 \left(\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + j\omega L}{R + j\omega L} \right)$$

$$I_1 = \frac{U_1 \cdot j\omega C \cdot (R + j\omega L)}{-\omega^2 RCL + j\omega L + R}$$

$$I_1' = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot I_1 = \frac{-U_1 \omega^2 LC}{-\omega^2 RCL + j\omega L + R}$$

$$U_2 = I_2(j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR})$$

$$I_2 = \frac{U_2(1+j\omega RC)}{-\omega^2 RCL + j\omega L + R}$$

$$I_2' = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \cdot I_2 = \frac{I_2}{1+j\omega RC} =$$

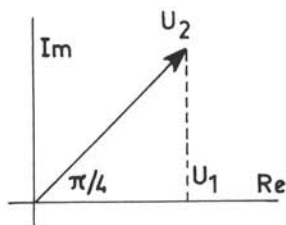
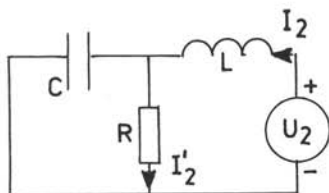
$$= \frac{U_2}{-\omega^2 RCL + j\omega L + R}$$

$$I_R = I_1' + I_2' = \frac{-U_1\omega^2 LC + U_2}{-\omega^2 RCL + j\omega L + R} = \frac{T}{N}$$

b. $U_1 = 10$ $U_2 = 10 + 10j$

$$I_R = \frac{(-10) + (10 + 10j)}{-2 + j + 2} = 10$$

$$i_R(t) = 10 \cos(t) \text{ A}$$



c. $P = P_R$ want $P_C = P_L = 0$

$$P_R = \frac{1}{2} |I|^2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot 2 = \underline{100 \text{ W}}$$

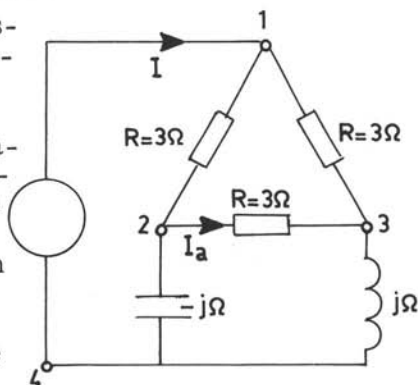
Opgave III.

Gegeven: Het schema met de aangegeven waarde voor de impedantie van de elementen.

Men kan gebruik maken van transformatie van driehoek- naar ster-schakeling.

Gevraagd: a. Teken het wijzerdiagram van alle spanningen op schaal en een wijzerdiagram van de stromen I en I_a op schaal.

b. Bepaal de faseverschuiving tussen de spanning U_{14} en de stroom I_a .



c. Als vervolgens gegeven wordt:

$$u_{14}(t) = 2\sqrt{2} \cos(1000t) \text{ V},$$

bereken dan $u_{34}(t)$.

Uitwerking:

De driehoekschakeling tussen de klemmen 1, 2 en 3 kan worden omgezet in een stersschakeling van drie weerstanden van elk 1 ohm. Dit levert het gemodificeerde schema op.

- a. Ga bij het tekenen van wijzerdiagram van de stromen uit van b.v. I_1 . Hiermee volgen in het spanningswijzerdiagram de spanningen U_{S3} (in fase met I_1) en U_{34} ($\pi/2$ rad. in fase voor op I_1). Hiermee is de spanning U_{S4} bepaald.

Uit de impedanties in tak S-2-4

volgt dat I_2 , $\pi/4$ rad voor is

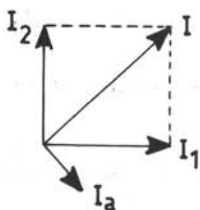
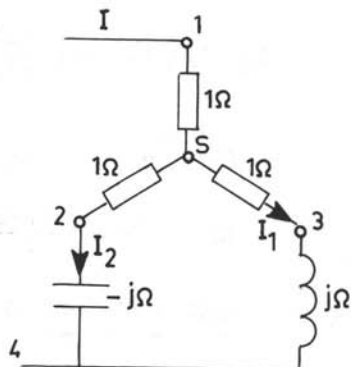
t.o.v. U_{S4} en dezelfde modulus

heeft als I_1 . I_2 staat dus lood-

recht op I_1 . Uit I_2 volgen U_{S2}

en U_{24} . Optellen van I_1 en I_2 geeft I . De spanning $U_{1S} = I_1 \cdot 1$.

Tekent men nu U_{1S} in het spanningsdiagram, dan is de ligging van alle spanningen bekend.



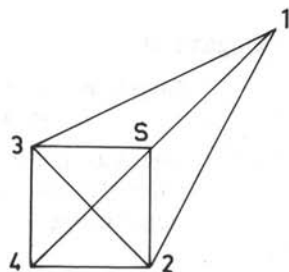
$$I_a = \frac{U_{23}}{3}$$

I_a is in fase met U_{23} en kan dus in het stroomdiagram worden ingetekend.

- b. De fase verschuiving tussen U_{14} en I_a is $\pi/2$ rad. Zie schets. I_a is in fase áchter bij U_{14} .

- c. U_{34} is $\pi/4$ rad. in fase vóór op U_{14} . Uit het spanningsdiagram kan men aflezen $|U_{34}| = 1$. Dientengevolge kan men zeggen:

$$u_{34}(t) = \cos(1000t + \pi/4) \text{ V}$$



Hoofdstuk IX

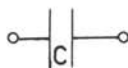
WEERSTANDSLOZE TWEEPOLEN

9.1 Schets de reactantie van de volgende tweepolen als functie van de hoekfrequentie:

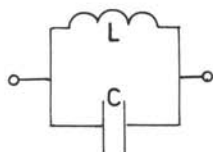
a)



b)



c)



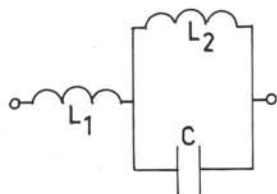
$$L = 1 \text{ mH} \quad C = 10^{-7} \text{ F}$$

d)



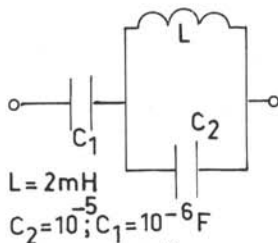
$$L = 1 \text{ mH} \quad C = 10^{-7} \text{ F}$$

e)



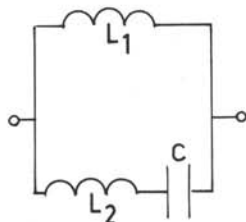
$$L_1 = \frac{1}{150} \text{ H} \quad L_2 = \frac{1}{50} \text{ H} \\ C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

f)

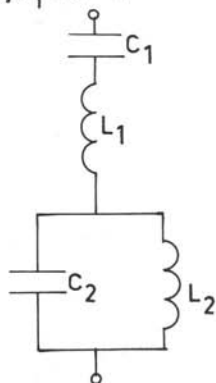


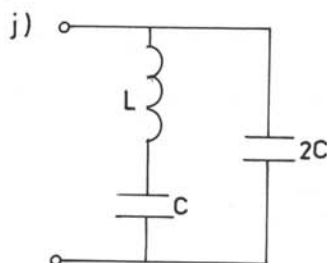
$$L = 2 \text{ mH} \\ C_2 = 10^{-5} \text{ F}; C_1 = 10^{-6} \text{ F}$$

g)



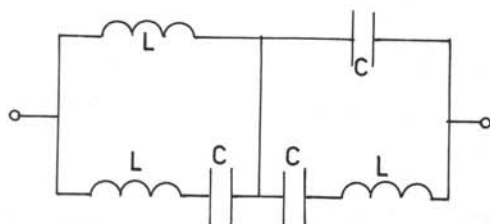
h)





9.2 Schets de susceptantie B van de laatste twee gevallen als functie van ω .

9.3



Bereken de reactantie van deze tweepool en teken $X(\omega) = f(\omega)$.

9.4 a. Bepaal de uitdrukking voor de reactantie X_1 van de gegeven tweepool.

b. Als verder gegeven is dat:

$$L = 10 \text{ mH}, \quad C_1 = 5 \mu\text{F} \text{ en}$$

$$C_2 = 4 \mu\text{F},$$

bereken dan de hoekfrequenties waarvoor X_1 de waarden nul en oneindig aanneemt.

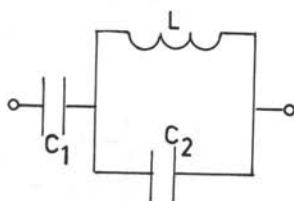
c. Schets $X_1 = f(\omega)$.

d. Van een reactantie X_2 is gegeven dat deze:

1e. nul wordt voor die waarden van ω waarvoor X_1 oneindig is.

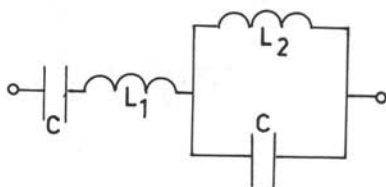
2e. oneindig is voor die ω waarvoor X_1 nul wordt.

Bedenk een schakeling voor X_2 . (Men noemt dit een duale schakeling).



9.5 $L_1 = 2 \text{ mH},$
 $L_2 = 1 \text{ mH},$
 $C = 10^{-5} \text{ F}.$

Beantwoord dezelfde vragen als onder 9.4.

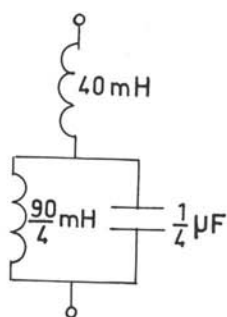


- 9.6 Tussen de impedantie $Z_1 = j \cdot X_1$ van de gegeven tweepool en de impedantie van een onbekende tweepool (Z_2) bestaat de relatie:

$$Z_1 Z_2 = R^2 \quad (R = 300 \, \Omega)$$

Schets in één figuur het verloop van beide reactanties als functie van ω .

Bedenk een schakeling voor Z_2 .



Voorbeeld

Opgave:

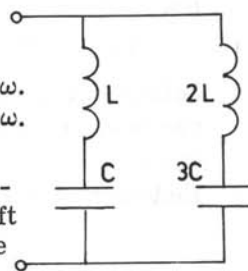
Gegeven: het schema

Gevraagd: a. Bepaal $X(\omega)$

b. Schets $X(\omega)$ als functie van ω .

c. Schets $B(\omega)$ als functie van ω .

d. Geef een schema voor een schakeling waarvan de reactantie hetzelfde verloop heeft als de susceptantie B van de gegeven schakeling.



Oplossing:

$$a. \quad jX_1 = \frac{(j\omega L + 1/j\omega C)(2j\omega L + 1/3j\omega C)}{3j\omega L + 1/j\omega C + 1/3j\omega C}$$

omwerken geeft

$$X_1 = - \frac{(1 - \omega^2 LC)(1 - 6\omega^2 LC)}{\omega C(4 - 9\omega^2 LC)}$$

b. polen bij $\omega_1 = 0$

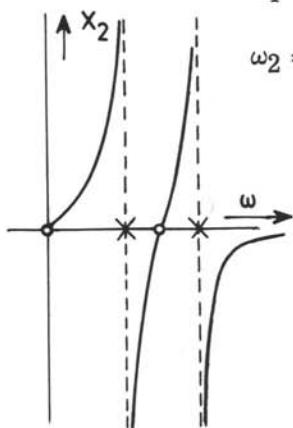
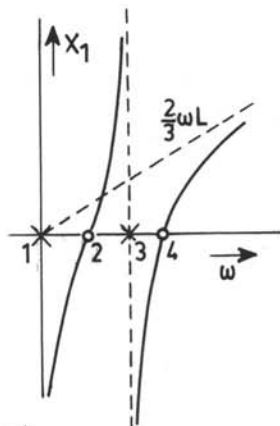
$$\omega = \infty$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{par.res})$$

nulpunten bij

$$\omega_4 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{serieres.})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{6LC}} \approx 0,4 \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{serieres.})$$



De polen en de nulpunten wisselen elkaar af op de ω -as. Dit is in overeenstemming met het theorema van Foster. Volgens dit theorema is steeds $X(\omega)$ stijgend. Met andere woorden,

$$\frac{dX_1(\omega)}{d\omega} \geq 0.$$

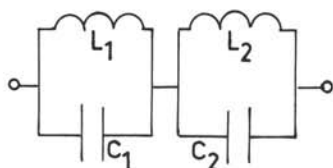
Verder valt op te merken dat

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X_1(\omega) = \frac{2}{3} \omega L.$$

Hiermee is de grafiek te tekenen. De asymptoot $\frac{2}{3} \omega L$ is ook aan de schakeling te zien. Bij $\omega = \infty$ vormen de C's een kortsluiting en gedraagt de schakeling zich als een spoel L parallel aan $2L$. (Dus als $\frac{2}{3} L$)

- c. $Z = jX$ en $Y = jB$ terwijl $Z = 1/Y$.

Polen worden nulpunten en omgekeerd. Zie schets.



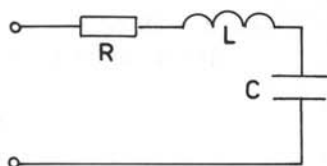
- d. Bij ω_2 en ω_4 nu polen. D.w.z. parallelresonantie. Bij ω_3 nu nulpunt, dus seriëresonantie. Bij $\omega_1 = 0$ heeft Z_2 geen impedantie, evenmin bij $\omega = \infty$. Dit leidt tot het schema voor Z_2 .

Hoofdstuk X

RENONANTIE

- 10.1 $R = 20 \Omega$
 $L = 0,5 \text{ H}$
 $C = 40 \mu\text{F}$

Bij welke frequentie is de stroomsterkte maximaal?
Bij welke frequenties is de stroomsterkte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal zo groot als i_{max} ?
Hoe groot is de bandbreedte?



- 0.2 Een L-C-R-seriekring is aangesloten op een wisselspanningsbron met konstante bronsterkte van 200 V en met variabele frequentie.

$$R = 50 \Omega, L = 1 \text{ H en } C = \frac{16}{3} \cdot 10^{-4} \text{ F}.$$

De energiebron levert dan 200 watt.
Wat zijn de beide mogelijke frequenties?

- 10.3 Op een R-C-L-seriekring staat een spanning U.
- Bereken de spanning U_C over de condensator.
 - Voor welke waarde van de hoekfrequentie is $|U_C|$ maximaal? Men spreekt in dat geval van "amplitude"-resonantie.
 - Bewijs dat dan geldt:

$$|U_C|_{\text{max}} = \frac{|U| \cdot Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{waarin } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- d. Bewijs dat als U en I in fase zijn geldt:

$$|U_C| = |U| \cdot Q$$

Men spreekt in dit geval van "fase"-resonantie.

- 10.4 In een L-C-R-seriekring geldt:

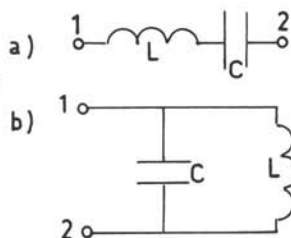
$$R = 100 \Omega, L = 10 \text{ H en } C = 1 \text{ mF}.$$

De spanning op de hele kring is U.

- a. Voor welke waarde van de hoekfrequentie is $|U_C|$ maximaal?
Hoe groot is dat maximum?

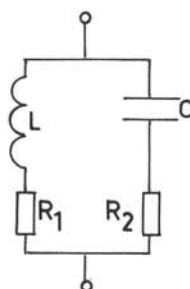
- b. Hoe groot is $|U_C|$ voor $\omega = 0$; $\omega = 10 \text{ rad/s}$ en $\omega = \infty$?
 c. Schets $|U_C|$ als functie van ω .

- 10.5 Gegeven het schema a).
 Voor welke ω is de schakeling in resonantie en hoe groot is Z_{12} dan ?
 Dezelfde vragen, maar nu voor schema b).



- 10.6 Gegeven het schema.
 Bewijs dat de resonantiehoekfrequentie gegeven wordt door:

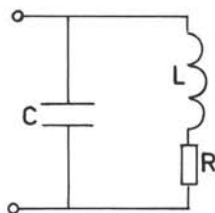
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{CR_1^2 - L}{CR_2^2 - L}}$$



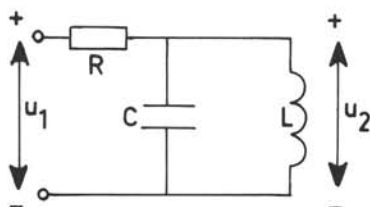
- 10.7 Gegeven het schema.
 Bewijs dat geldt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left[1 - \frac{R^2 C}{L} \right]}$$

Bij welke betrekking tussen L , C en R treedt geen resonantie meer op?



- 10.8 Gegeven het schema.
 $u_{1\text{max}} = |U_1| = 1 \text{ volt}$.
 Men beschouwt de spanningsoverdracht $\frac{U_2}{U_1}$ bij veranderlijke radiaalfrequentie ω .
 Gevraagd:



- a. Beredeneer zonder berekening het verloop van $|U_2|$ als functie van de radiaalfrequentie. Geef een schets van dit verloop.
 b. Geef de uitdrukking voor de complexe waarde van de spanning U_2 .

- c. 1. Onder welke voorwaarde bereikt $|U_2|$ een maximale waarde? Hoe groot is deze waarde?
2. Als verder gegeven wordt: $C = 10\mu\text{F}$ en $\omega = 5000 \text{ rad/s}$, bereken dan de waarde van L , waarvoor voldaan wordt aan de voorwaarde onder c. 1.
3. Men stelt nu voorts nog de eis, dat als $\omega = 4500 \text{ rad/s}$ moet gelden $|U_2| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ volt. Hoe groot moet men hier-toe R kiezen?

Voorbeelden

Opgave I.

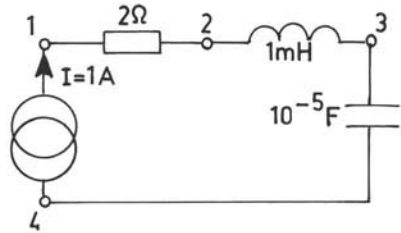
Gegeven: het schema.

Gevraagd:

- Bereken de hoekfrequentie waarbij resonantie optreedt.
- Teken het wijzerdiagram van de spanningen als

$$1^0 \omega < \omega_0, \quad 2^0 \omega > \omega_0, \quad 3^0 \omega = \omega_0.$$

- Bepaal U_{14} . Voer daarbij in de verstemming en de kringkwaliteit.
- Geef in het complexe vlak aan hoe U_{14} afhangt van v .
- Teken $|U_{14}| = f(v)$, $|Y_{14}| = f(v)$ en $\arg(U_{14}) = f(v)$.
- Bereken de bandbreedte B.



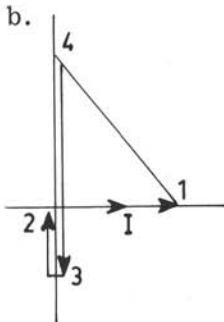
Oplossing:

- $Z = R + j\omega L + 1/j\omega C$. $U_{14} = I \cdot Z$

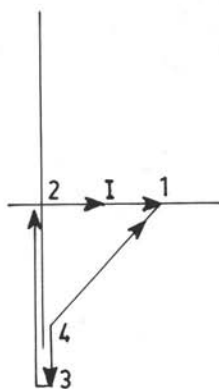
U_{14} en I in fase als Z reëel, dus als $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Hier is $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$, $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1600 \text{ Hz}$

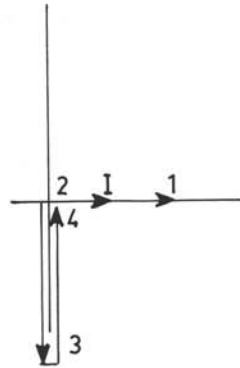
b.



als $\omega < \omega_0$
 $\omega L < 1/\omega C$
 U_{14} in fase achter
 bij I . (capacitief)



als $\omega > \omega_0$
 $\omega L > 1/\omega C$
 U_{14} in fase voor
 bij I . (inductief)



als $\omega = \omega_0$
 $\omega L = 1/\omega C$
 U_{14} in fase met
 I . ("ohmse" keten)

$$c. Z = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j\sqrt{\frac{1}{C}}(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}) = R + j\sqrt{\frac{L}{C}}(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})$$

$$\text{stel } Q_S = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ en } v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad Z = R(1 + jQ_S \cdot v)$$

- d. $U_{14} = IZ$ hier is $Q = 5$ (Q is dimensieloos) $U_{14} = 2(1 + 5j)$
 U_{14} bestaat uit een constant reëel deel (2) en een variabel imaginair deel (10v). Dit leidt tot de volgende figuur I.

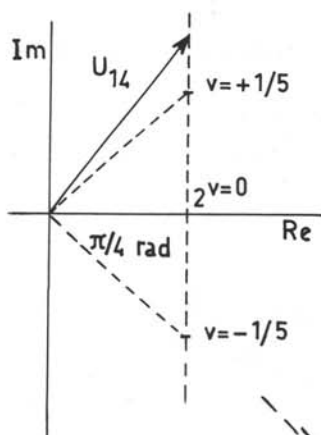


fig. I.

- e. Uit I volgen II en III

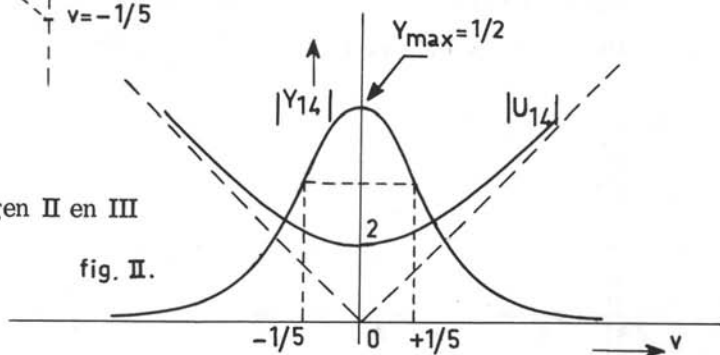


fig. II.

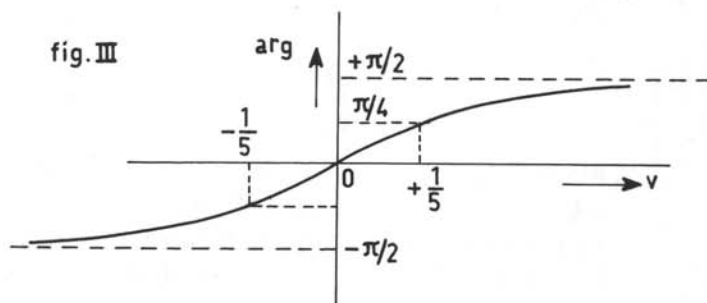


fig. III

f. De bandbreedte B wordt bepaald door de punten waarvoor geldt $Q \cdot v = \pm \frac{1}{5}$. Daar is dan ook $|Y| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot Y_{\max}$.

1^o methode: $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = +\frac{1}{5}$ levert $\omega_1 \approx 11050 \text{ rad/s}$, $f_1 \approx 1760 \text{ Hz}$
 $v = -\frac{1}{5}$ levert $\omega_2 \approx 9050 \text{ rad/s}$, $f_2 \approx 1440 \text{ Hz}$

$$B = f_1 - f_2 = 1760 - 1440 = 320 \text{ Hz.}$$

2^o methode: Voor redelijke waarden van Q geldt dat $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

$$\text{Dus } f_1 - f_2 = f_0/Q \rightarrow B = f_0/Q \approx 1600/5 \approx 320 \text{ Hz.}$$

Opgave II.

Gevraagd:

Schets uitgaande van de resultaten van vraagstuk 10.3 de functie $|U_C| = f(\omega)$ voor de L-C-R-seriekring met $L = 10 \text{ H}$, $C = 10^{-3} \text{ F}$ en $U = 1 \text{ V}$, voor de volgende gevallen:

a. $R = 50 \Omega$ b. $R = 100 \Omega$ c. $R = 100\sqrt{2} \Omega$ d. $R = 200 \Omega$

Oplossing:

In alle gevallen is $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10 \text{ rad/s}$. (faseresonantie)

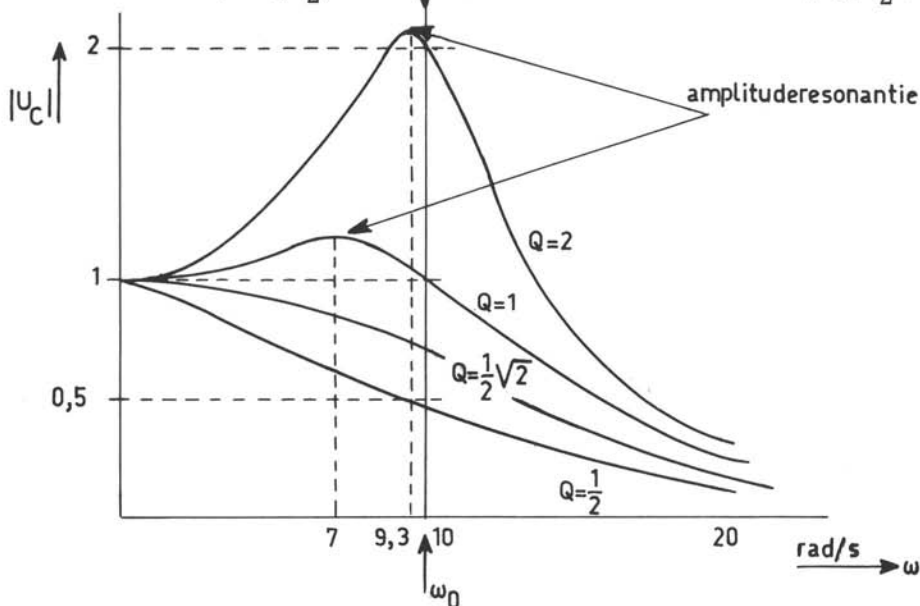
In alle gevallen geldt dat als: $\omega \rightarrow \infty$, $|U_C| \rightarrow 0$
 $\omega \rightarrow 0$, $|U_C| \rightarrow 1 \text{ V}$

a. $R = 50 \Omega$, $Q = 2$, $\omega_{\max} \approx 9,3 \text{ rad/s}$, $|U_C|_{\max} = 2,07 \text{ V}$, $|U_0| = 2 \text{ V}$

b. $R = 100 \Omega$, $Q = 1$, $\omega_{\max} \approx 7 \text{ rad/s}$, $|U_C|_{\max} = 1,15 \text{ V}$, $|U_0| = 1 \text{ V}$

c. $R = 100\sqrt{2} \Omega$, $Q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\omega_{\max} \approx 0 \text{ rad/s}$, $|U_C|_{\max} = 1 \text{ V}$, $|U_0| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ V}$

d. $R = 200 \Omega$, $Q = \frac{1}{2}$, $|U_0| = \frac{1}{2} \text{ V}$



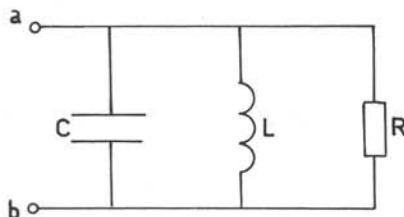
Men ziet, dat als de kringkwaliteit Q toeneemt:

- de resonantiepiek steeds meer geprononceerd wordt.
- de fase- en amplitude-resonantiefrequenties steeds minder gaan verschillen.
- de "bandbreedte" kleiner wordt.

Opgave III.

Gegeven: het schema van een trillingskring.

De resonantie-frequentie is $\omega_0 = 2\pi f_0$.



Gevraagd: a. Geef de admittantie $Y(\omega)$ van de schakeling gezien aan de klemmen a en b.

Schrijf deze Y ook in een zodanige vorm, dat U gebruik maakt van de verstemming v en de Q_0 , de kringkwaliteit bij fase-resonantie.

- De bandgrenzen zijn ω_1 en ω_2 en kunnen worden gevonden uit de betrekking $v Q_0 = \pm 1$.
Leid hiermee een betrekking af voor de relatieve bandbreedte

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0}$$

- Hoe gedraagt de schakeling zich bij zeer hoge frequenties?

Hoe is het gedrag bij zeer lage frequenties?

- De kring moet nu aan de volgende eisen voldoen:

1. bij een frequentie van $2 \cdot 10^6$ Hz is $|Y| \approx 1$ S,

2. bij een frequentie van 10^7 Hz is $|Y| \approx 5$ S,

verder moet gelden

3. bij een frequentie van 200 Hz is $|Y| \approx \frac{1}{40}$ S,

4. bij een frequentie van 100 Hz is $|Y| \approx \frac{1}{20}$ S.

Bepaal uit deze gegevens L en C en f_0 .

- Tenslotte eist men, dat de relatieve bandbreedte 0,02 is.

Bepaal R .

Oplossing:

a. $Y = \frac{1}{R} + j\omega C + 1/j\omega L$ en $Y = \frac{1}{R} (1 + jQv)$ met $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \text{ en } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b. $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm 1/Q$. Neem $\omega_1 > \omega_0$ dan $+1/Q$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q} - 1 = 0 \text{ dus } \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{+1/Q + \sqrt{1/Q^2 + 4}}{2}$$

$$\text{evenzo } \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{-1/Q + \sqrt{1/Q^2 + 4}}{2}$$

$$\text{Hiermee volgt } \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = 1/Q.$$

c. Bij hoge frequenties gedraagt de schakeling zich capacitief.
 $|Y|$ is dan ongeveer evenredig met ω .

Bij lage frequenties gedraagt de schakeling zich inductief.
 $|Y|$ is dan ongeveer evenredig met $1/\omega$.

d. Volgens de gegevens d. 1 en d. 2 is de schakeling hier capacitief.

$$\text{Dus } |Y_C| = \omega C \quad 1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot C \quad C = 1/4\pi \mu F.$$

Volgens de gegevens d. 3 en d. 4 is het gedrag hier inductief.

$$\text{Dus } |Y_L| = 1/\omega L \quad 1/40 = 1/2\pi \cdot 200 \cdot L \quad L = 1/10\pi H.$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad L \text{ en } C \text{ invullen geeft } f_0 = 10^3 \sqrt{10} \text{ Hz.}$$

e. $Q = 1/0,02 = 50$ en $R\sqrt{\frac{C}{L}} = 50$. Met L en C vinden wij
 $R = 10^4 \sqrt{10} \text{ ohm.}$

Hoofdstuk XI

POLAIRE FIGUREN

- 11.1 Teken in het complexe vlak de polaire figuren van de volgende complexe functies (ρ = reële parameter).
- $f = 1 + j \cdot 2\rho$
 - $f = \frac{1}{1 + j \cdot 2\rho}$
 - $f = \frac{1 + j \cdot 2\rho}{1 - j \cdot \rho}$
 - $f = \frac{1 + j\rho}{1 - j\rho}$
 - $f = j + (1 + j)\rho$
- 11.2 Als $f = a + b\rho$, toon dan aan dat $1/f$ in het complexe vlak een cirkel voorstelt die door de oorsprong gaat.
- 11.3 Als $f = \frac{a + b\rho}{c + d\rho}$, wanneer zal deze cirkel door de oorsprong gaan?
- 11.4 Als $f(\rho) = \frac{a + b\rho}{c + d\rho}$ een cirkel voorstelt die door 0 gaat, wat is dan de polaire figuur van $1/f(\rho)$?
- 11.5 Bewijs dat $f(z) = \frac{a + bz}{c + dz}$ een cirkel voorstelt in het complexe vlak als de variabele $z = z(\rho)$ een cirkel voorstelt. z is complex en ρ is reëel.
- 11.6 Bewijs dat als Z in het complexe vlak een cirkel voorstelt met de oorsprong als middelpunt, dat dan $1/Z$ een daarmee concentrische cirkel is.
- 11.7 Teken in het complexe vlak, voor $0 \leq \omega < \infty$.
- $Z = R + j\omega L$
 - $Y = \frac{1}{R + j\omega L}$
 - $Z = R + 1/j\omega C$
 - $Y = \frac{1}{R + 1/j\omega C}$

11.8 Teken in het complexe vlak voor $0 \leq R \leq \infty$

a. $Z = R + j\omega L$

b. $Y = \frac{1}{R + j\omega L}$

11.9 Een L, een C en een R staan in serie geschakeld op een spanning U. Stel $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ en $Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

a. Teken in het complexe vlak $Z(\nu)$

b. Teken in het complexe vlak $1/Z(\nu)$

c. Teken in het complexe vlak $I(\nu)$

11.10 Een $L = 4 \text{ mH}$, een $C = 20 \mu\text{F}$ en een R staan in serie op een wisselspanning $U = 10 \text{ volt}$, waarvan $\omega = 5000 \text{ rad/s}$.

a. Teken in het complexe vlak $I(R)$ voor $0 \leq R \leq \infty$

b. Teken in het complexe vlak ook $Z(R)$.

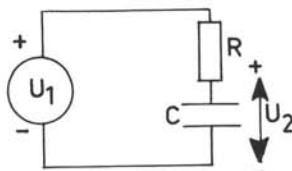
11.11 Hetzelfde vraagstuk als 11.10 maar nu met:

$$L = 2 \text{ mH en } C = 10 \mu\text{F}.$$

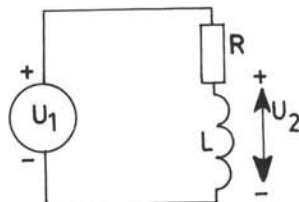
11.12 Idem als 11.10 maar nu met $L = 2 \text{ mH}$ en $C = 20 \mu\text{F}$.
Wat betekent dit geval?

11.13 Bepaal $f(\omega) = U_2/U_1$

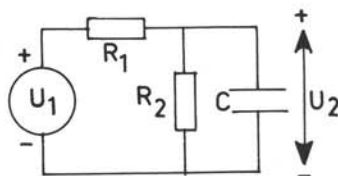
Als verder gegeven wordt dat $C = 1 \mu\text{F}$ en $R = 1000 \Omega$, teken dan $f(\omega)$.



11.14 Dezelfde vraag voor deze schakeling, maar nu met $R = 1 \text{ k}\Omega$ en $L = 10 \text{ mH}$.

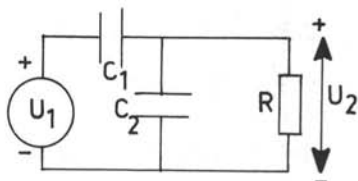


11.15 Bereken de complexe verhouding U_2/U_1 en schets de polaire figuur voor veranderlijke ω .

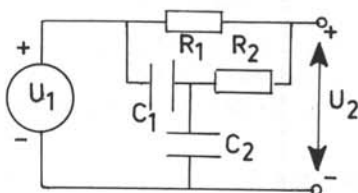


11.16 Doe voor figuur 11.15 hetzelfde met de verhouding U_1/U_2 .

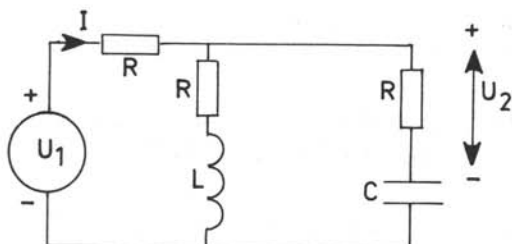
- 11.17 Bepaal de polaire figuur U_2/U_1 als functie van ω .



- 11.18 Gegeven het schema.
Bepaal $f(\omega) = U_2/U_1$.
Bepaal $f(x) = U_2/U_1$ met $R_1 = R_2 = R$ met $C_1 = C_2 = C$ en $x = \omega RC$. Schets de m.p. van $f(x)$.



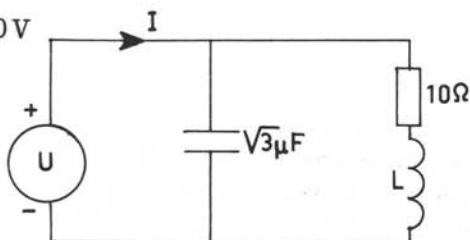
- 11.19



In bovenstaande schakeling heeft de harmonisch van de tijd afhankelijke spanning u_1 een constante hoekfrequentie ω . C is variabel.

- Voor welke waarden van C zijn de spanning U_1 en de stroom I met elkaar in fase?
- Bepaal de complexe verhouding $f = U_2/U_1$ als functie van C .
- Nu is $\omega = 10^4$ rad/s, $R = 1000 \Omega$ en $L = 0,1$ H. Geef in het complexe vlak de meetkundige plaats van f , als functie van C .

- 11.20 $|U| = 80$ V

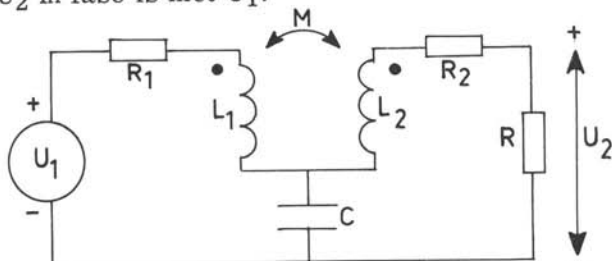


Gegeven: het schema. ω is constant en $25 \cdot 10^3$ rad/s.

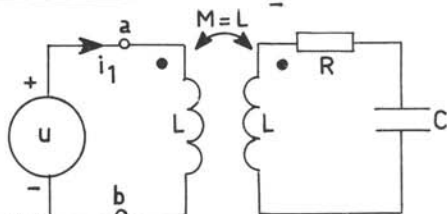
- Geef in het complexe vlak aan hoe I verandert als L alle positieve waarden doorloopt.

- b. Bij welke waarden van L treedt resonantie op?
 Hoe groot is dan de stroomsterkte?
 c. Wat is de kleinste waarde die $|I|$ kan aannemen?

11.21 Gevraagd wordt de voorwaarde voor C aan te geven waaronder U_2 in fase is met U_1 .



11.22 Gegeven: het schema.
 De wederzijdse inductie M is gelijk aan de zelf-inductie L van de spoelen.



Gevraagd:

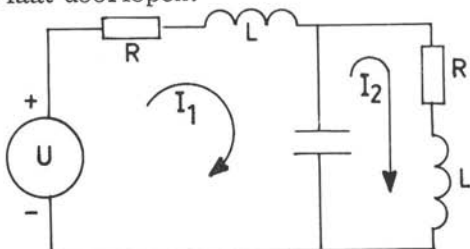
- a. Bereken de impedantie rechts van de klemmen a en b.
 b. Onder welke voorwaarde is de impedantie Z_{ab} in fase-resonantie?
 c. Verder wordt nu gegeven: $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$,
 $L = 20 \text{ mH}$,
 $R = 100 \Omega$ en
 $C = \text{variabel}$.

Geef in het complexe vlak aan hoe Z_{ab} verandert als men C alle reële waarden laat doorlopen.

11.23 Gegeven: het schema.

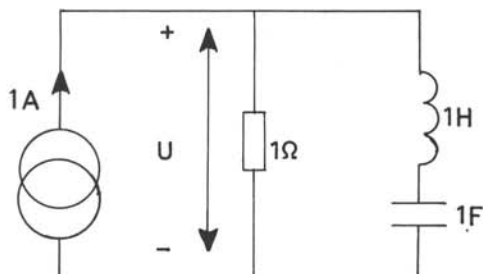
$$\begin{aligned}\omega &= 10^4 \text{ rad/s} \\ L &= 10 \text{ mH} \\ R &= 200 \Omega \\ U &= 100 \text{ V}\end{aligned}$$

Gevraagd:



- a. Bepaal I_2 als functie van C .
 b. Voor welke waarde van C is I_2 een hoek van $\pi/2$ radialen in fase verschoven ten opzichte van U ? Hoe groot is $|I_2|$ dan?
 c. Teken de polaire figuur van $I_2(C)$ met een schaal voor C in μF .

11.24 Gegeven: het schema



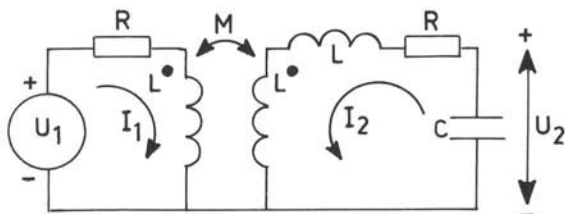
De hoekfrequentie ω van de sinusvormige bronsterkte is variabel. De bronsterkte is constant en is 1 A.

- Gevraagd: a. Bepaal de spanning U als functie van de grootte v , waarbij gedefinieerd is $v = \omega - \frac{1}{\omega}$.
Geef de polaire figuur van U als functie van v .
- b. Schets $|U|$ en $\arg\{U\}$ als functie van v .
- c. Schets vervolgens $|U|$ en $\arg\{U\}$ als functie van ω .
- d. Indien bij dezelfde frekwenties (als onder c) de waarde van $|U|$ tienmaal zo groot zou moeten zijn als onder c, welke waarde moet men dan kiezen voor de grootte van de weerstand, de spoel en de condensator?
- e. Indien met dezelfde waarde van $|U|$ (als onder c) zou moeten vinden bij frekwenties die tienmaal zo groot zouden moeten zijn als onder c, welke waarden moet men dan kiezen voor de grootte van de weerstand, de spoel en de condensator?

Voorbeelden

Opgave I.

Gegeven: het schema
C is variabel
 ω is constant



Gevraagd: Bepaal de complexe verhouding $\frac{U_2}{U_1} = f(C)$.

Teken de polaire figuur $f(C)$ als bekend is dat
 $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$, $L = 0,01 \text{ H}$, $M = 0,005 \text{ H}$ en $R = 50 \Omega$.

Oplossing: Kies maasstromen.

1. $U_1 = I_1(R + j\omega L) + I_2 j\omega M$
2. $0 = I_1 j\omega M + I_2(R + j \cdot 2\omega L + 1/j\omega C)$
- 2'. $I_1 = - \frac{R + j \cdot 2\omega L + 1/j\omega C}{j\omega M} \times I_2$

Substitutie in 1 levert na enig omwerken:

$$I_2 = \frac{-j\omega M U_1}{R^2 + L/C - 2\omega^2 L^2 + \omega^2 M^2 + j \cdot 3\omega LR + R/j\omega C}$$

Nu is $U_2 = -I_2 \cdot 1/j\omega C$. Hiermee volgt,

$$f(C) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{(L - jR/\omega) + (R^2 - 2\omega^2 L^2 + \omega^2 M^2 + j \cdot 3\omega LR) \cdot C}$$

Dit is bij veranderlijke C een cirkel.

Invullen van de getalswaarden en invoerend $C' = 10^6 \cdot C$

levert $f(C) = \frac{1}{(2 - j) + (-3 + 3j)C'}$

hierin C' in μF .

Een cirkel is bepaald door drie punten.

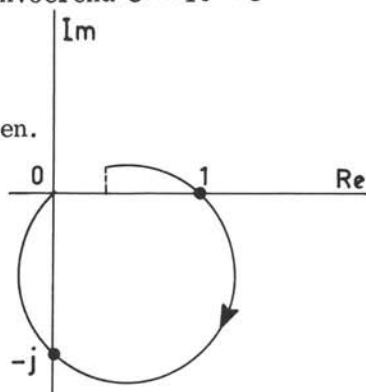
$$f(0) = \frac{1}{2-j} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j$$

$$f(\infty) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

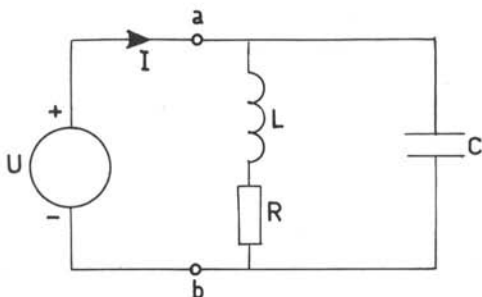
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -j$$

Hiermee is de cirkel te tekenen.



Opgave II.

Gegeven: het schema,
L is variabel.



- Gevraagd: a. Leid af de voorwaarde, onder welke de kring gezien aan de klemmen a en b in faseresonantie is.
- b. Aan welke voorwaarde moet zijn voldaan opdat slechts voor reële waarden van L faseresonantie bestaat?
- c. Onder welke conditie zal slechts voor één waarde van L faseresonantie optreden?
Geef voor dit geval een uitdrukking voor L en geef ook een uitdrukking voor I.
- d. Schets voor het geval dat $\omega L = \frac{1}{2R}$ de polaire figuur van Y_{ab} voor veranderlijke L.
Bespreek de ligging van de polaire figuur voor $\omega C < \frac{1}{2R}$ in verband met vraag b.
- e. Gegeven wordt nu:
- de resonantiefrequentie is $f_0 = 10^5$ Hz.
 - $C = \frac{1}{2} \mu\text{F}$.
- Gevraagd: Dimensioneer de schakeling zodanig, dat voldaan wordt aan de voorwaarde onder c.

Oplossing:

$$a. Y_{ab} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}{R + j\omega L}$$

$$Y_{ab} \text{ is reëel als } \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} = \frac{\omega L}{R}$$

$$b. 1^e \omega = 0, \text{ triviaal.}$$

$$2^e \omega \neq 0 \rightarrow \omega^2 L^2 C - L + R^2 C = 0 \quad \text{dus:}$$

$$L_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\omega^2 R^2 C^2}}{2\omega^2 C}$$

$$L \text{ reëel als } 1 - 4\omega^2 R^2 C^2 \geq 0.$$

- c. Er zijn twee samenvallende wortels als

$$4\omega^2 R^2 C^2 = 1$$

$$R = \frac{1}{2\omega C} \text{ en } L = \frac{1}{2\omega^2 C} \left(= \frac{1}{\omega R} \right).$$

Hierbij hoort

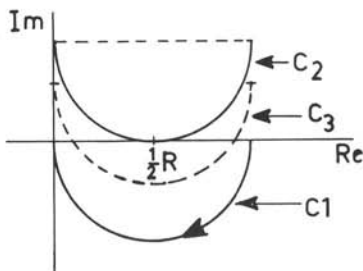
$$Y_{ab} = \frac{1 - \omega^2 \frac{1}{2\omega^2 C} \cdot C + j \cdot \omega \cdot \frac{1}{2\omega C} \cdot C}{\frac{1}{2\omega C} + j\omega \frac{1}{2\omega^2 C}} = \omega C = \frac{1}{2R}$$

$$I = \omega C U$$

d. $Y_{ab} = j \cdot \frac{1}{2R} + \frac{1}{R + j\omega L}.$

1. De tweede term geeft de halve cirkel C_1 (Zie figuur). Toevoegen van de constante imaginaire grootheid $j \cdot \frac{1}{2R}$ levert de cirkel C_2 .

2. Indien $\omega C < \frac{1}{2R}$ krijgt men de cirkel C_3 die twee verschillende reële snijpunten met de reële as heeft. Dit verklaart de twee waarden voor L , die onder b werden gevonden.



e. $R = \frac{1}{2\omega C}$ gegevens invullen levert $R = \frac{5}{\pi} \Omega$.

$$L = \frac{1}{\omega R} \text{ gegevens invullen levert } L = \frac{1}{40.000 \pi^2} \text{ H.}$$

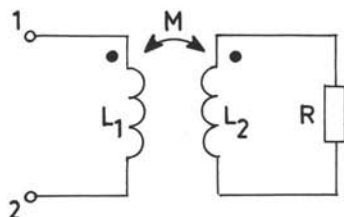
$$L \approx \frac{1}{400} \text{ mH.}$$

Hoofdstuk XII

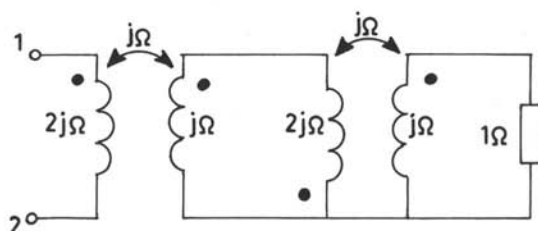
WEDERZIJDSE INDUCTIE EN TRANSFORMATOREN

- 12.1 De coëfficiënt van wederzijdse-(mutuele)inductie van twee identieke spoelen wordt als volgt bepaald.
Men schakelt de beide spoelen in serie en meet dan 150 mH.
Vervolgens verwisselt men de aansluitingen van een van de spoelen en meet dan 50 mH.
a. Bereken M
b. Bereken L
c. bereken k .

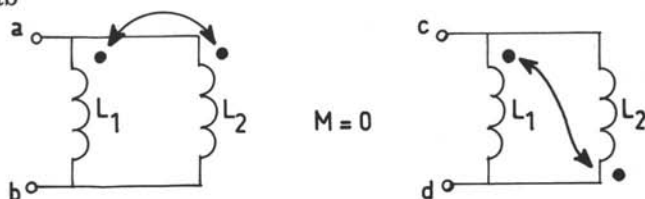
- 12.2 Bereken Z_{12} .



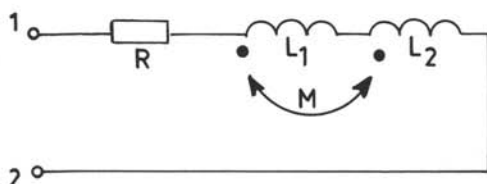
- 12.3 Bereken Z_{12} .



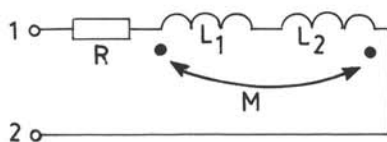
- 12.4 Bereken Z_{ab}
en Z_{cd} .



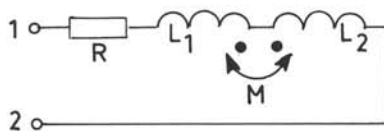
- 12.5 a. Bepaal Z_{12} .



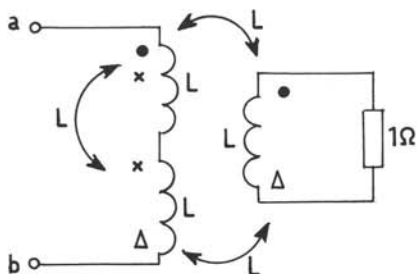
b. Idem



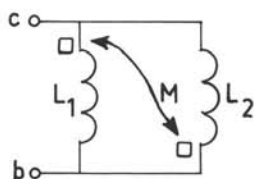
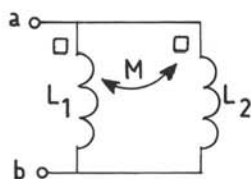
c. Idem



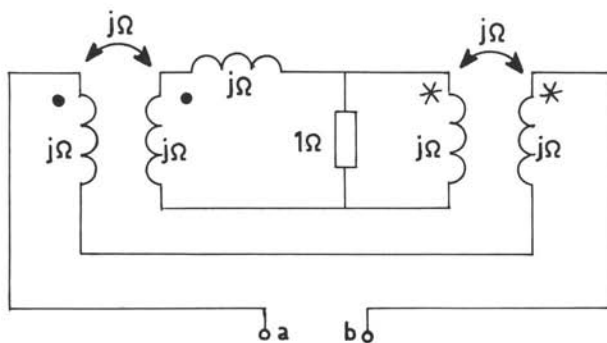
12.6 Bepaal Z_{ab} .



12.7 Bepaal Z_{ab}
en Z_{cd} .

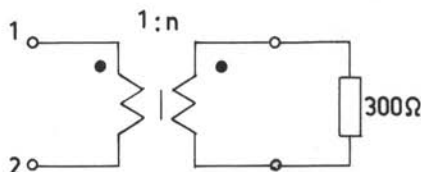


12.8



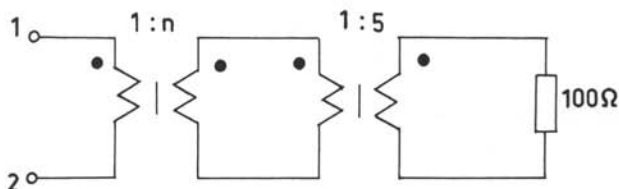
Bereken de ingangsimpedantie Z_{ab} .

12.9 $U_{12} = 9 \text{ V}$



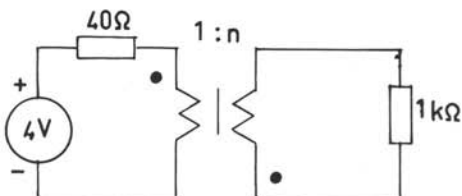
Het in de schakeling gedissipeerde gemiddeld vermogen is 13,5 watt.
Bereken n .

12.10



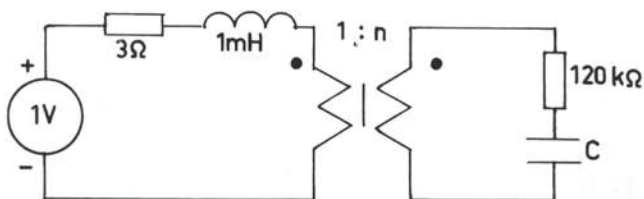
Aan de ingang van de schakeling meet men $Z_{12} = 1 \Omega$.
Bereken n .

12.11



Bereken n als gegeven is dat door gebruik te maken van de transformator vermogensaanpassing werd verkregen.
Bereken het in de gehele schakeling gedissipeerde vermogen.

12.12

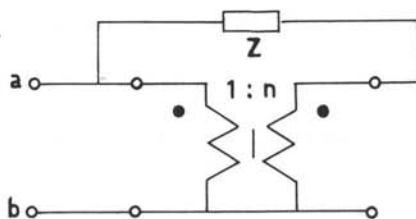


$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$.

Dimensioneer de schakeling zodanig dat in de belasting een maximaal vermogen beschikbaar is.

12.13

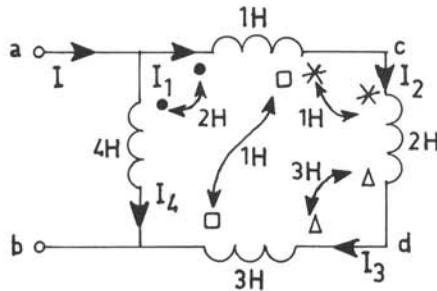
Gevraagd: Geef een uitdrukking voor de impedantie van de schakeling gezien aan de klemmen a en b.



Voorbeelden

Opgave I.

Bepaal Z_{ab} .



- Oplossing: 1. Kies positieve stroomrichtingen in elk van de spoelen.
 2. Kies spanningspolariteit bij elke spoel in overeenstemming met de gekozen positieve stroomrichting.
 3. Pas de spanningswet van Kirchhoff toe.

Voor de spanning U_{ab} geldt:

$$1. U_{ab} = 4j\omega I_4 + 2j\omega I_1$$

Opmerking: men kiest voor het teken van de door I_1 geïnduceerde spanning + omdat in beide spoelen de stroom bij het merkteken binnenkomt.

Op dezelfde wijze schrijft men voor U_{ac} :

$$2. U_{ac} = j\omega I_1 - j\omega I_2 + j\omega I_3 + 2j\omega I_4$$

Opmerking: het minteken ontstaat, doordat de stroom I_2 de spoel van 2H bij het merkteken binnenkomt en de stroom I_1 de spoel van 1H bij het overeenkomstige merkteken verlaat, terwijl dit b.v. voor de stroom I_3 in de spoel van 3H met de stroom I_1 in de spoel van 1H niet het geval is.

Evenzo valt af te leiden:

$$3. U_{cd} = 2j\omega I_2 - j\omega I_1 - 3j\omega I_3 \text{ en}$$

$$4. U_{db} = 3j\omega I_3 + j\omega I_1 - 3j\omega I_2$$

Nu is $I_1 = I_2 = I_3$ en geldt $U_{ab} = U_{ac} + U_{cd} + U_{db}$.

Met deze vergelijkingen volgt: $U_{ab} = 4j\omega I_4 + 2j\omega I_1$
 en $U_{ab} = 2j\omega I_4$.

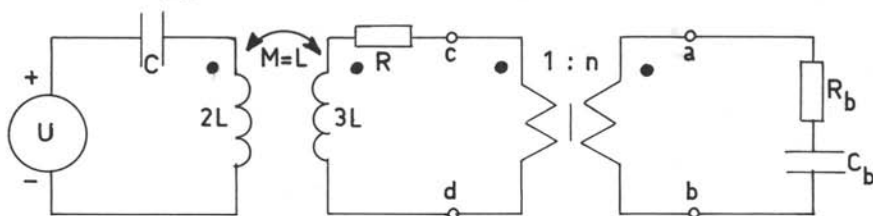
Hiermee volgt: $I = I_1 + I_4 = 0$

$$Y_{ab} = 0$$

dus: $Z_{ab} = \infty$

Opgave II.

Gegeven: het schema. De bron heeft een complexe frequentie. De coëfficiënt van wederzijdse inductie M is gelijk aan L .



Gevraagd: a. Men beschouwt de schakeling links van de klemmen a en b.

Bepaal het thévenin-equivalent van deze schakeling, uitgedrukt in L , C , R , U , n en λ .

b. Voorts wordt nu gegeven: $L = 1 \text{ H}$,
 $C = 1 \text{ F}$,
 $R = 1 \Omega$,
 $\lambda = j\omega$ met $\omega = 1/\text{rad/s}$,
 $n = 10$,
 $|U| = 1 \text{ V}$.

Geef het thévenin-equivalent voor deze gegevens.

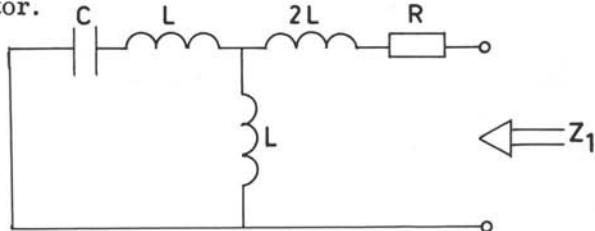
Gegeven: Men sluit op de klemmen a en b van de onder b) gevonden théveningenerator een belasting aan, die bestaat uit een weerstand R_b in serie met een condensator

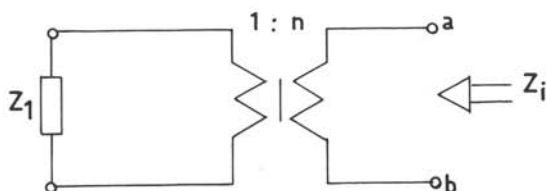
$$C_b = \frac{1}{150} \text{ F}.$$

Gevraagd: c. Bepaal het gemiddelde reële vermogen P , dat in die belasting wordt ontwikkeld.

d. Voor welke waarde van R_b is P maximaal?

Uitwerking: Gebruik b.v. een vervangingsschema van de transformator.





$$a. \quad Z_1 = R + 2\lambda L + \frac{\lambda L(\lambda L + 1/\lambda C)}{2\lambda L + 1/\lambda C} = R + \frac{\lambda L(5\lambda^2 LC + 3)}{2\lambda^2 LC + 1}$$

$$Z_i = n^2 Z_1 \quad \underline{Z_i = n^2 R + \frac{n^2 \lambda L(5\lambda^2 LC + 3)}{2\lambda^2 LC + 1}}$$

Als I_S van ideale trafo = 0 dan is $I_p = 0$. Voor linker maas geldt:

$$U = I(2\lambda L + 1/\lambda C)$$

$$U_S = I \cdot \lambda L$$

$$U_S = \frac{U \cdot \lambda L}{2\lambda L + 1/\lambda C} = \frac{U \cdot \lambda^2 LC}{2\lambda^2 LC + 1}$$

$$U_T = n U_S = \underline{\frac{n \cdot U \cdot \lambda^2 LC}{2\lambda^2 LC + 1}}$$

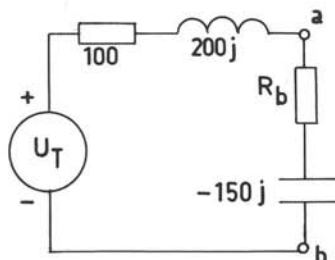
b. Gegevens invullen levert $U_T = 10 \quad Z_i = 100 + 200 j$.

$$c. \quad I = \frac{U_T}{(100 + R_b) + 50 j}$$

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 \cdot R_b = \frac{|U_T|^2 \cdot R_b}{2\{(100 + R_b)^2 + 50^2\}}$$

$$d. \quad \frac{\partial P}{\partial R_b} = 0 \quad \underline{R_b = 50\sqrt{5} \, \Omega = 112 \, \Omega}$$

$$P = 0,117 \text{ W}$$

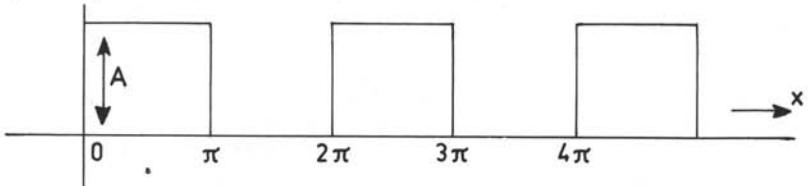


Hoofdstuk XIII

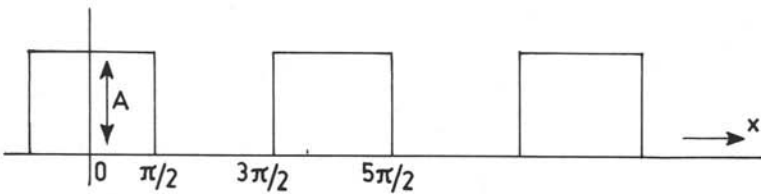
FOURIER-ANALYSE

Bepaal de fourier-reeksen van de volgende oneindig voortlopende periodieke functies.

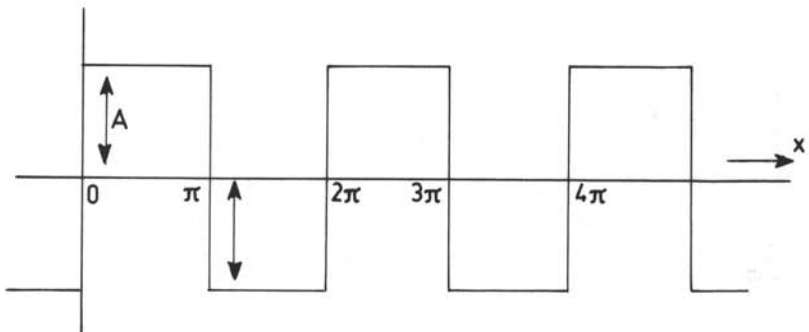
13.1



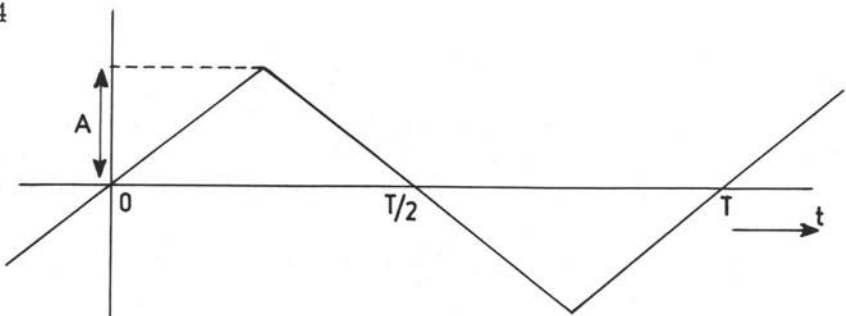
13.2



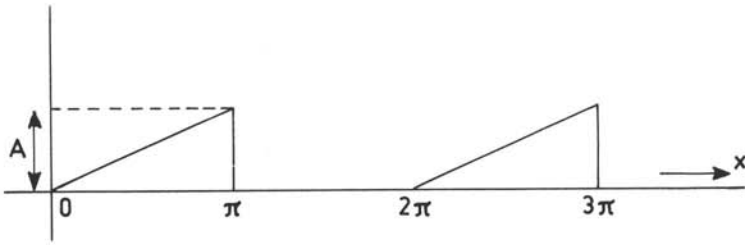
13.3



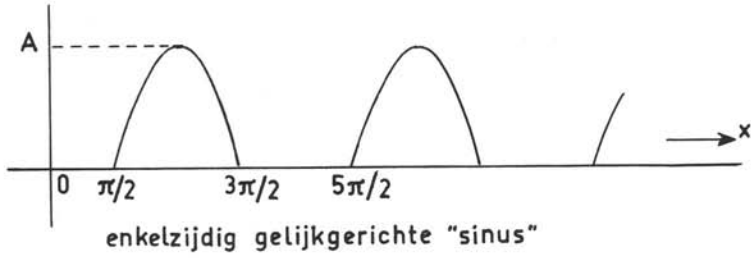
13.4



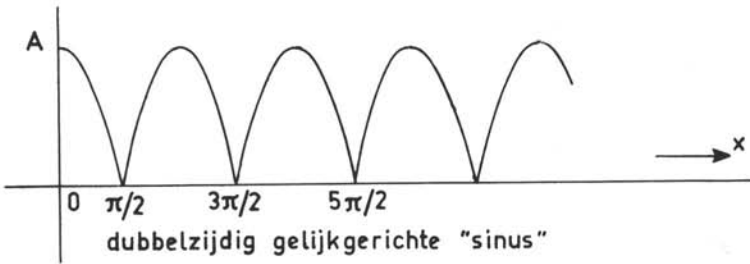
13.5



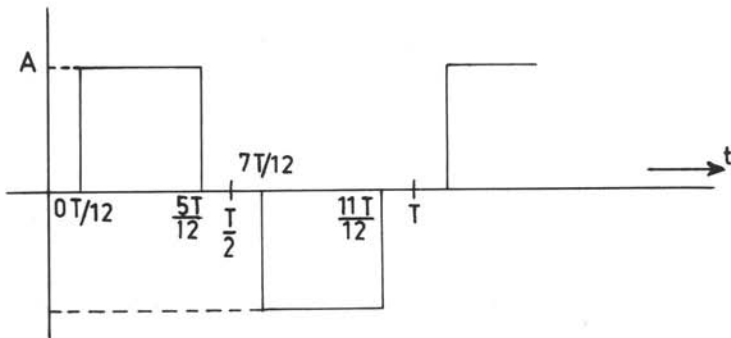
13.6



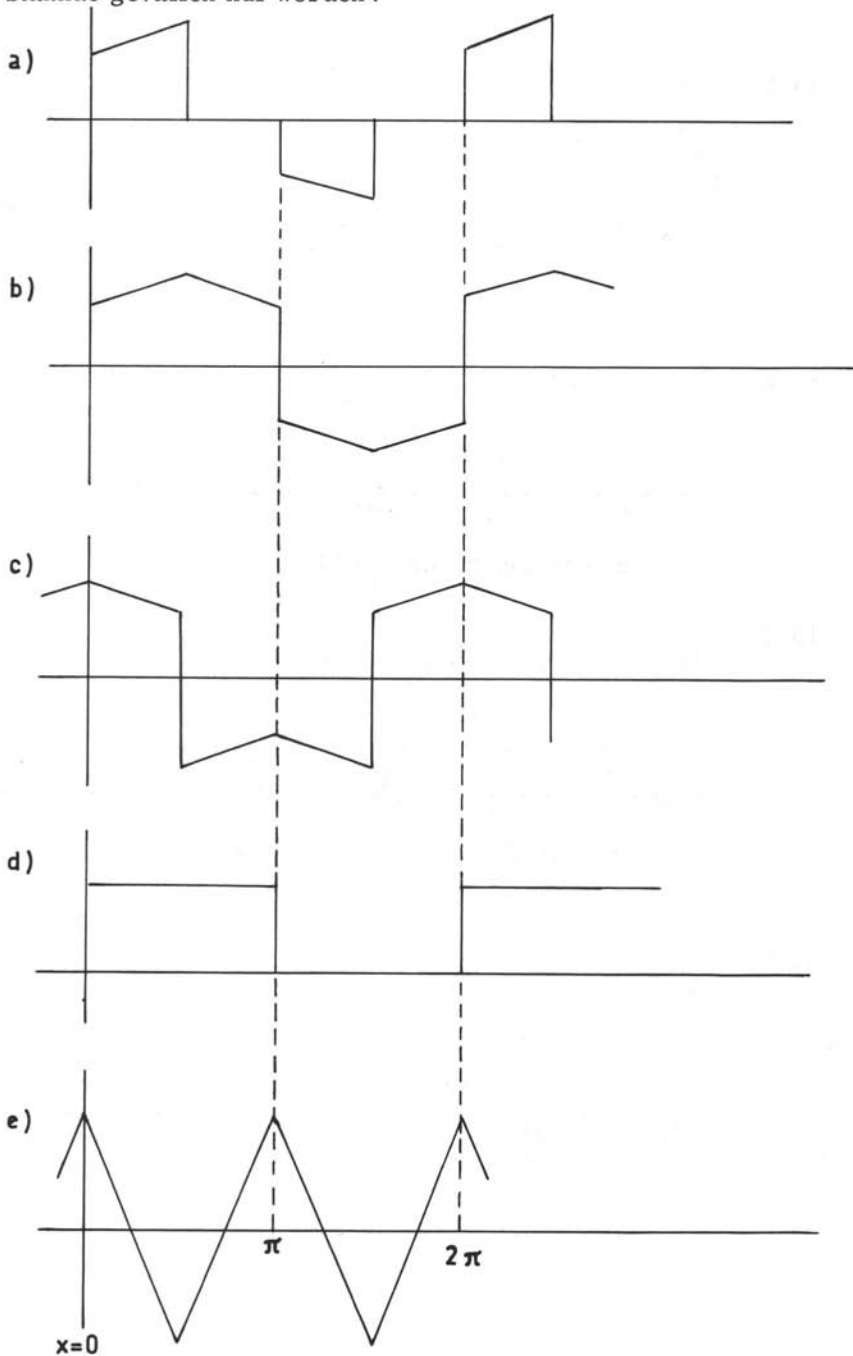
13.7



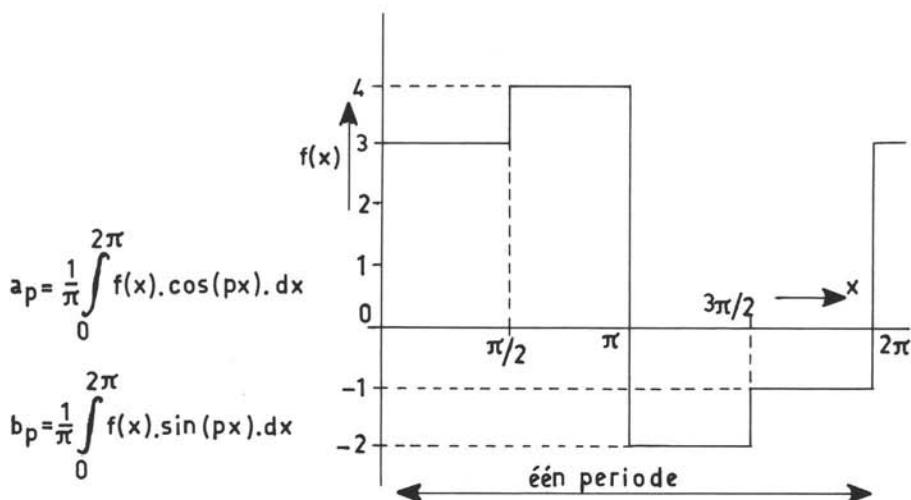
13.8



13.9 Welke coëfficiënten uit de reeks van Fourier zullen in onderstaande gevallen nul worden?

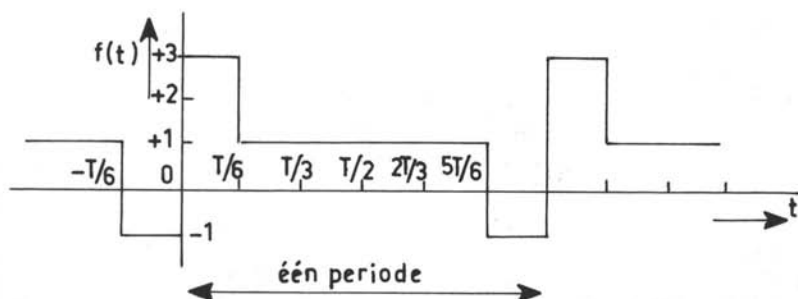


13.10 Gegeven: een periodieke functie $f(x)$ volgens de figuur.



- Gevraagd: a. Bepaal zonder berekening van de integraal de b_0 -component van de fourierreeks van deze periodieke functie.
- b. Bepaal uit symmetrie-overwegingen welke termen in deze reeks zullen voorkomen.
- c. Geef de fourierreeks tot en met de vierde term.

Voorbeeld



Opgave.

Gegeven: Een periodieke functie $f(t)$ volgens de figuur.
Van de fourier-reeks van een periodieke functie $f(t)$ is gegeven:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_1 t)$$

$$\text{waarin: } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega_1 \cdot t) dt \text{ en } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- Gevraagd: a. Bepaal zonder berekening van de integraal de "gelijk-stroom"-component $\frac{1}{2}a_0$ van de fourierreeks van deze periodieke functie.
- b. Bepaal uit symmetrie-overwegingen welke termen in deze reeks zullen voorkomen.
- c. Geef de fourierreeks tot en met de vierde harmonische.

Oplossing:

- a. De functie heeft als gemiddelde waarde 1; dus $\frac{1}{2}a_0 = 1$
- b. Men kiest de lijn $f(t) = 1$ als nieuwe abscis. Rond deze nieuwe abscis bestaat radiale (of oneven) symmetrie. Geen andere symmetrieën. Dus alleen sinustermen. Alleen b-termen.
- c. $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(n\omega_1 t) dt$. Men moet integreren over één hele periode {met $g(t) = f(t) - 1$ } b.v. van $-\frac{T}{6}$ tot $\frac{5T}{6}$.

Tussen $-\frac{T}{6}$ en 0 is $g(t) = -2$

Tussen 0 en $\frac{T}{6}$ is $g(t) = +2$

Tussen $\frac{T}{6}$ en $\frac{5T}{6}$ is $g(t) = 0$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/6}^0 -2 \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt + \int_0^{T/6} 2 \cdot \sin(n \cdot \omega_1 t) dt \right]$$

hieruit volgt met $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$$b_n = \frac{4}{\pi n} \left\{ 1 - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right\}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi \cdot 1}$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{2}$$

$$b_3 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{3}$$

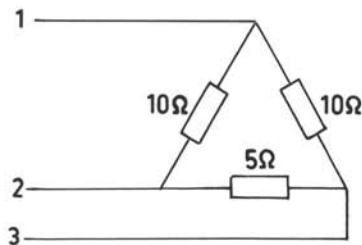
$$b_4 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{4}$$

$$f(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 2t\right) + \frac{4}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 3t\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 4t\right) + \dots \right]$$

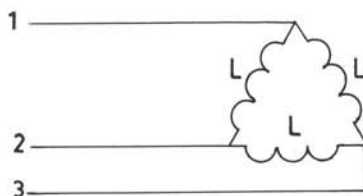
Hoofdstuk XIV

DRIEFASEN-SYSTEMEN

- 14.1 De fasenspanning van een draaistroomgenerator is $220\sqrt{2}$ V. Wat is de lijnspanning als de drie generatorspoelen worden geschakeld
- in driehoek (Δ)
 - in ster (Y)
- Hoe groot is de stroomsterkte in het onder a. bedoelde circuit? Teken het wijzerdiagram van beide gevallen.
- 14.2 Drie weerstanden van $10\ \Omega$ zijn in ster geschakeld en aangesloten op een driefasen-systeem met een lijnspanning van $380\sqrt{2}$ V.
- Teken de wijzerdiagrammen voor alle stromen en spanningen.
 - Bereken het totale vermogen.
- 14.3 Als vraagstuk 14.2, maar nu met de weerstanden in Δ .
- 14.4 Hoe kunnen de zes spanningen van een draaistroomgenerator door complexe getallen worden weergegeven?
- 14.5 Gegeven: Een driefasennet met een lijnspanning van $380\sqrt{2}$ V, met een asymmetrische Δ -belasting volgens schema.
- Gevraagd: a. Teken het wijzerdiagram van de spanningen en teken het wijzerdiagram van de optredende lijn- en fasestromen.
- Bereken het vermogen van de belasting.

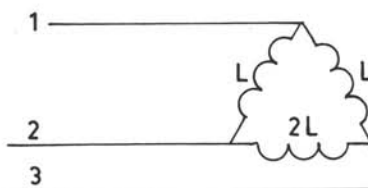


- 14.6 Gegeven: Een driefasennet met een lijnspanning van $380\sqrt{2}$ V, 50 Hz, waarop een symmetrische Δ -belasting van spoelen met $L = 1/100\ \pi$ H is aangesloten.



Gevraagd: Teken een wijzerdiagram van de spanningen en een wijzerdiagram van de lijn- en fasestromen.
Bereken het vermogen van de belasting.

- 14.7 Dezelfde vraag als 14.6, maar nu met een asymmetrische Δ -belasting van spoelen. $X_L = 1 \Omega$.



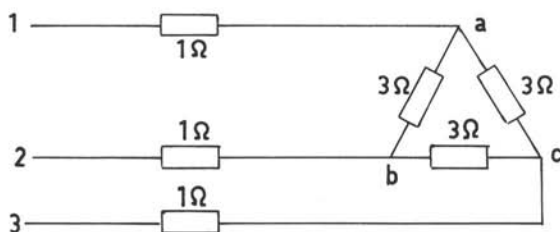
- 14.8 Gegeven: het schema. Alle impedanties zijn weerstanden. De lijnspanning is $380\sqrt{2} \text{ V}$.

Bereken de lijnstromen en het vermogen.

(Aanwijzing: er zijn twee manieren:

1e maak gebruik van de symmetrie,

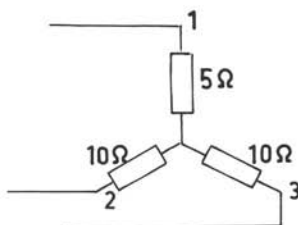
2e pas Δ -Y transf. toe.



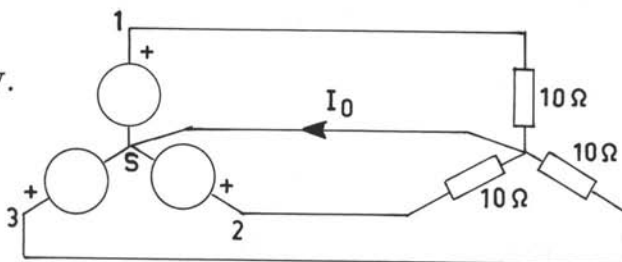
- 14.9 Gegeven: het schema
 $U_1 = 380\sqrt{2} \text{ V}$

Gevraagd:

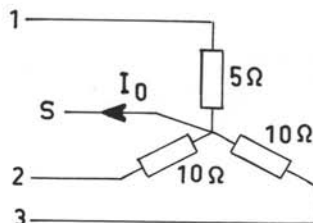
- Teken de complete wijzerdiagrammen voor alle spanningen en stromen. Bereken daartoe de ligging van het sterpunt.
- Bereken het totale vermogen.



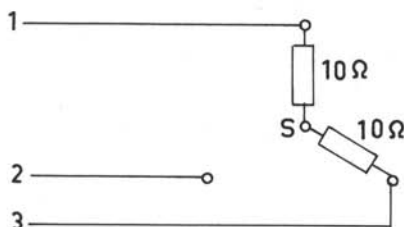
- 14.10 Gegeven:
het schema
 $U_1 = 220\sqrt{2} \text{ V}$.
Bereken I_0 .



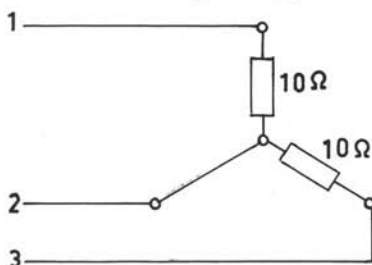
- 14.11 Dezelfde vraag als 14.10,
maar nu voor een asymme-
trische sterbelasting.



- 14.12 Gegeven: een driefasennet met asymmetrische belasting
volgens het schema. $U_1 = 380\sqrt{2} \text{ V}$.
Gevraagd: a. Bepaal de plaats van het sterpunt in het wijzer-
diagram van de spanningen.
b. Bereken het vermogen.

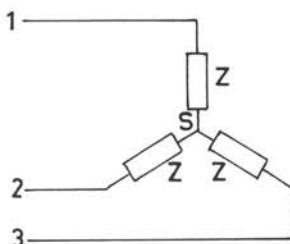


- 14.13 Dezelfde vraag als 14.12, maar nu met een belasting volgens
dit schema. Teken ook het wijzerdiagram van de stromen.

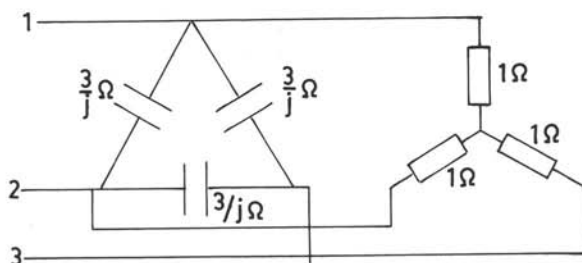


14.14 Gegeven: een symmetrische sterbelasting van een driefasennet met impedanties $Z = 1 + j \cdot 1$. $U_1 = 380\sqrt{2}$ V.

Gevraagd: Schets een wijzerdiagram van de spanningen en een wijzerdiagram van de stromen.

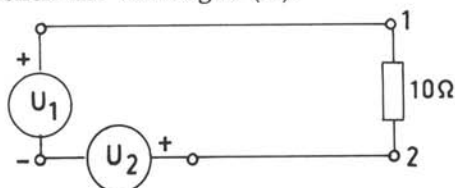


14.15 Dezelfde vraag als 14.14. Bereken ook het vermogen (P).



14.16 Gegeven: Een tweefasensysteem volgens het schema, dat belast wordt met 10Ω . $U_1 = U_2 e^{j\pi/2}$ $|U_2| = 220\sqrt{2}$ V.

Gevraagd: a. Geef een diagram van de fase- en lijnspanning.
b. Bereken het vermogen (P).

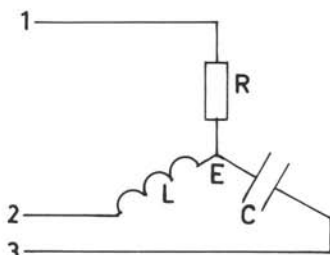


14.17 Gegeven: het schema. De eff. waarde van de lijnspanning is 380 V.

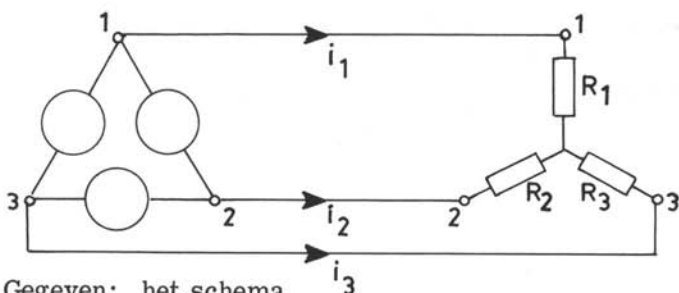
$$R = X_L = X_C = 1 \Omega.$$

Gevraagd: Bepaal de ligging van het sterpunt E in het wijzerdiagram van de spanningen.

Bereken het vermogen P. Teken $u_{12} = f(t)$ en $u_{1E} = g(t)$ in één grafiek.



14.18



Gegeven: het schema

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$R_2 = R_3 = 20 \Omega$$

$$|U_{12}| = |U_{23}| = |U_{31}| = 380 \text{ V (eff.)}$$

Gevraagd: a. Geef de spanningen U_{12} , U_{23} en U_{31} door complexe getallen weer.

b. Bereken van de stromen i_1 , i_2 en i_3 de waarden $|I_1|$, $|I_2|$ en $|I_3|$.

c. Bereken het in de schakeling gedissipeerde gemiddelde vermogen P (reële vermogen).

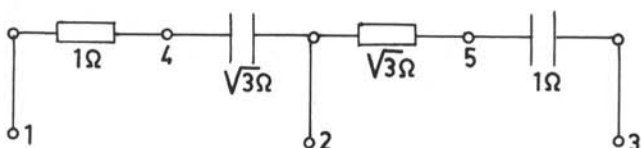
14.19 Gegeven: het schema

De effectieve waarde van de lijnspanningen is 220 V.

Gevraagd: Toon aan door berekening en door tekenen op schaal van de verschillende spanningswijzers, dat

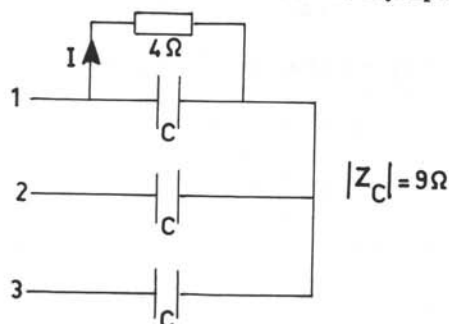
a. $|U_{45}| = 330 \text{ V}$ voor de fasevolgorde 123,

b. $|U_{45}| = 0 \text{ V}$ voor de fasevolgorde 321.



14.20 Gegeven: het schema.

De effectieve waarde van de lijnspanning is 220 V.

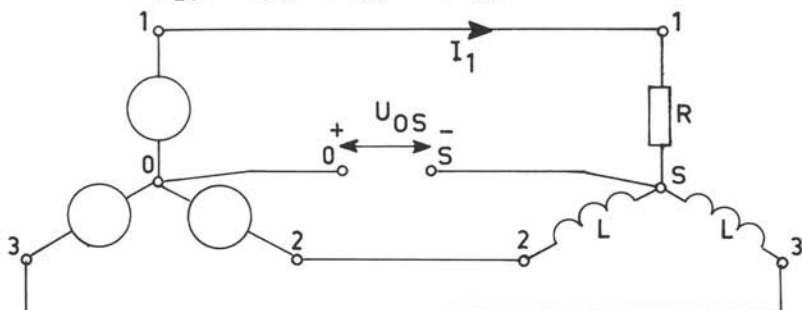


Gevraagd: Bepaal door gebruik te maken van het theorema van Thévenin de effectieve waarde van de stroom I.

14.21 Gegeven: Het schema.

De beide zelfinducties zijn gelijk en $Z_L = j \cdot 1 \Omega$.
 $R = 1 \Omega$.

U_{10} , U_{20} en U_{30} zijn de bronnen van een symmetrisch driefasen-wissel-spanningsstelsel met $|U_{10}| = |U_{20}| = |U_{30}|$ en $|U_{12}| = 360 \text{ V}$.



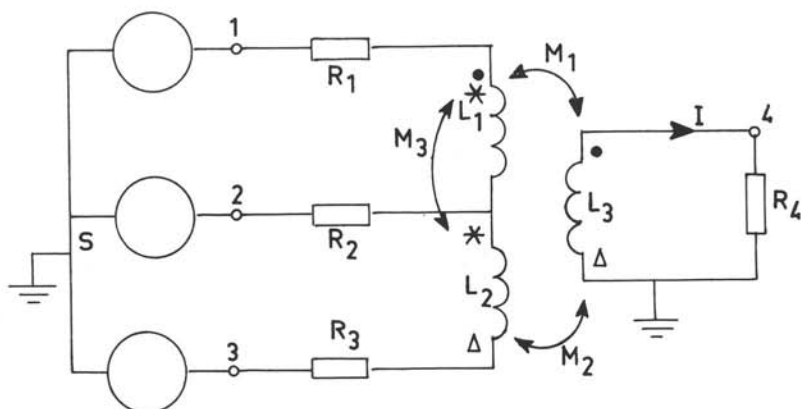
Gevraagd: a. Bereken de complexe stroom I_1 .

b. Bereken U_{OS}

c. Bepaal het Thévenin-equivalent van de schakeling, gezien aan de klemmen O en S.

d. Men sluit vervolgens de klemmen O en S kort. Bepaal van de kortsluitstroom I_k die dan gaat lopen, de grootte van $|I_k|$.

14.22 Gegeven: het schema.



$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega,$$

$$R_4 = 2 \Omega,$$

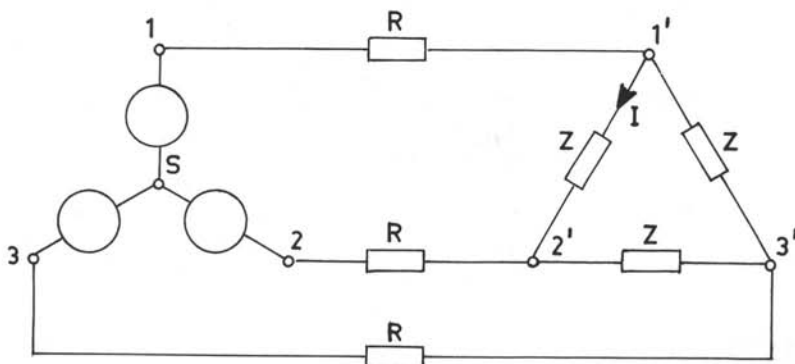
$$\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, L_1 = L_2 = L_3 = M_1 = M_2 = 1 \text{ H}, M_3 = 0.$$

De bronspanningen vormen een symmetrisch drie-fasen-systeem met de fasevolgorde 321.

Gevraagd: a. Bewijs dat geldt $I = \frac{(1+j)U_{13}}{6}$

- Geef een uitdrukking voor het vermogen in de weerstand R_4 .
- Teken in het wijzerdiagram van de spanningen de ligging van het knooppunt 4.
- In hoeverre zou U_w antwoord onder c. veranderen indien van de spoel L_3 de wikkelzin zou zijn veranderd? Dat wil zeggen indien de stip daar niet bóven, maar ónder zou zijn geplaatst.

14.23 Gegeven: het schema.



$$u_{1S}(t) = 20 \sin(\omega t) \text{ V},$$

$$u_{2S}(t) = +50 \cos(\omega t) \text{ V en}$$

$$u_{3S}(t) = -20\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}.$$

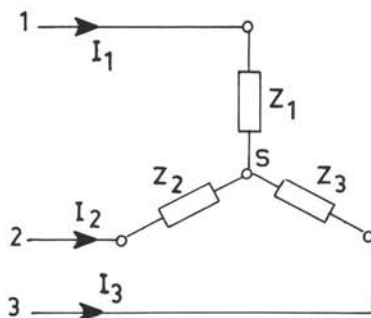
De drie weerstanden R zijn elk 1Ω .

De drie impedanties Z zijn, bij de hoekfrequentie ω , elk $(2+2j)\Omega$.

Gevraagd: a. Indien men in het complexe vlak de spanning $U_{1S} = 20j$ kiest, geef dan U_{2S} en U_{3S} .

- Wat is de fasevolgorde van de bronsterkten?
- Besprek door gebruik te maken van het superpositie-beginsel, de invloed van de bronsterkte U_{3S} op de stroomsterkte I .
- Bereken het gemiddelde reële vermogen P in de impedantie tussen de knooppunten $1'$ en $2'$.

14.24 A. Gegeven: het schema.



Gevraagd: a. Bewijs, dat voor het in de sterschakeling gedissipeerde vermogen geldt,

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ U_{12} I_1^* + U_{32} I_3^* \}.$$

B. Gegeven: hetzelfde schema als onder A.

$Z_1 = 1 \Omega$, $Z_2 = j \Omega$ en $Z_3 = 3 \Omega$.

De sterschakeling is aangesloten op spanningsbronnen, die een symmetrisch driefasensysteem vormen. De fasevolgorde is 1 2 3. $|U_{12}| = 100 \text{ V}$. Kies U_{12} reëel.

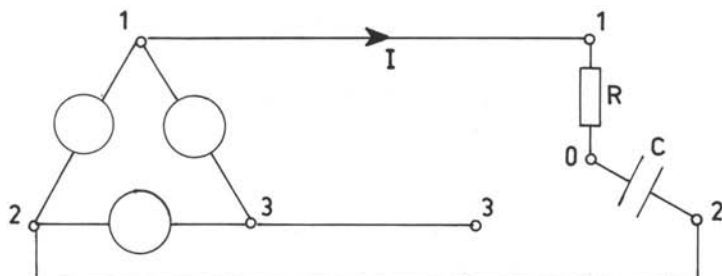
Gevraagd: b. Bereken door gebruik te maken van het theorema van Thévenin de complexe stroomsterkte I_2 in de impedantie Z_2 .

c. Geef in het wijzerdiagram van de spanningen de ligging van het sterpunt S aan.

Voorbeelden

Opgave I.

Gegeven: het schema.



De in Δ geschakelde spanningsbronnen hebben dezelfde hoekfrequentie ω en dezelfde bronsterkte $|U|$ van $380\sqrt{2}$ volt maximale waarde. De spanningsbronnen vormen een symmetrisch drie-fasen-systeem, waarvan de spanningen $\frac{2\pi}{3}$ radialen met elkaar in fase verschillen.

$R = 10$ ohm.

$Z_C = 10/j$ ohm. (Z_C is de impedantie van C bij de radiaalfrequentie ω .) Verder is nog gegeven dat U_{12} is $2\pi/3$ rad. voor ten opzichte van de spanning U_{23} , welke weer $2\pi/3$ rad. vóór is t.o.v. U_{31} . Dat wil zeggen: de fasevolgorde is 1 2 3.

- Gevraagd: 1. Bepaal $|U_{10}|$ en $|U_{20}|$.
 2. Bepaal $|I|$.
 3. Teken het wijzerdiagram van de spanningen op schaal en geef daarin duidelijk U_{30} aan. Bepaal $|U_{30}|$.
 4. Bereken $u_{30}(t)$ als gegeven wordt:
 $u_{12}(t) = 380\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ V.

Oplossing:

- a. fasevolgorde 1 2 3.

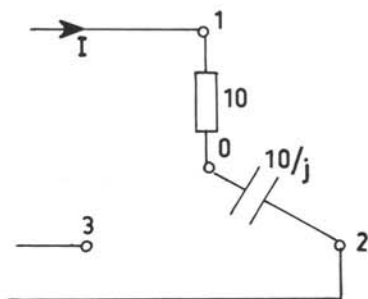
$$U_{12} = U_{10} + U_{02}$$

$$|U_{10}| = |U_{02}| = 10 |I|$$

I is $\pi/4$ rad vóór op U_{12} .

$$|U_{10}| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 380\sqrt{2} = 380 \text{ V.}$$

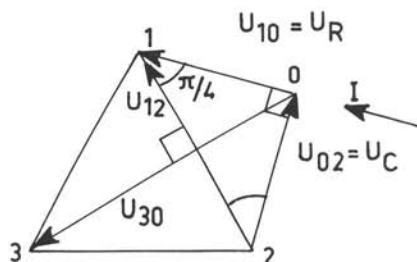
$$I = 38 \text{ A.}$$



$$|U_{30}| = 380\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 380\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 190\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = 725 \text{ V.}$$

hiermee volgt voor de momentele waarde:

$$u_{30}(t) = 725 \sin(\omega t + \pi/2) = 725 \cos(\omega t) \text{ volt.}$$



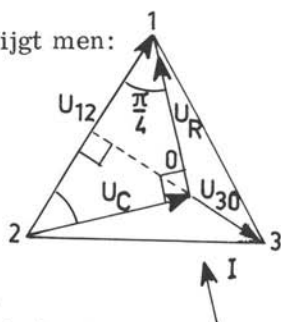
b. Indien de fasevolgorde nu 3 2 1 zou zijn krijgt men:

$$U_{12} = U_{10} + U_{02}$$

ook hier

$$I = 38 \text{ A en } I \text{ is}$$

$\pi/4$ vóór op U_{12}

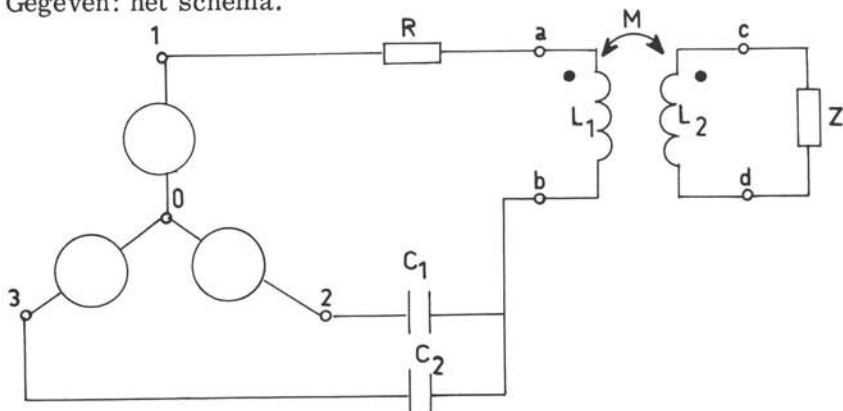


$$|U_{30}| = 380\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 380\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 196 \text{ volt.}$$

$$\text{nu is } u_{30}(t) = 196 \sin(\omega t - \pi/2) = -196 \cos(\omega t) \text{ volt.}$$

Opgave II.

Gegeven: het schema.



De in ster geschakelde spanningsbronnen vormen een symmetrisch driefasen-systeem met $|U_{10}| = |U_{20}| = |U_{30}| = 220 \text{ V}$.

De fasevolgorde is 1, 2, 3.

$R = 1 \Omega$, $Z_{C1} = Z_{C2} = -j \cdot 1 \Omega$, $Z_{L1} = j \cdot 2 \Omega$, $Z_{L2} = j \cdot 1 \Omega$ en $M = L_2$.

- Gevraagd: a. Bepaal het thévenin-equivalent van de schakeling links van de klemmen a en b.
 b. Bepaal het thévenin-equivalent van de schakeling links van de klemmen c en d.
 c. Bepaal Z zodanig dat daarin een maximaal gemiddeld vermogen (reëel vermogen) P wordt gedissipeerd.
 d. Bereken P.

Oplossing:

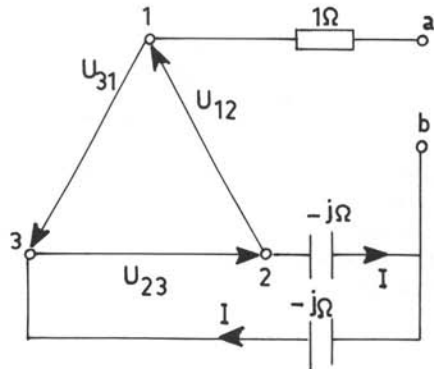
a. $U_{23} = I \{-2j\}$

$$I = j \cdot \frac{U_{23}}{2}$$

$$U_{2b} = I \cdot (-j)$$

$$U_{2b} = \frac{U_{23}}{2}$$

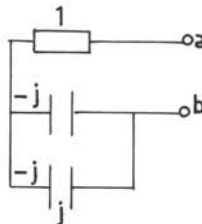
Nu is $U_{ab} = U_{12} + U_{2b}$



$$U_{23} = 380 \quad U_{12} = -190 + j \cdot 190\sqrt{3}, \quad U_{ab} = -190 + j \cdot 190\sqrt{3} + 190$$

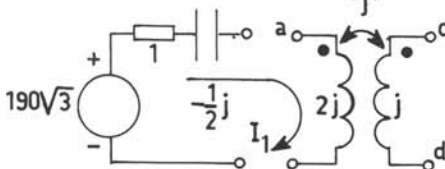
$$U_{th} = U_{ab} = \underline{j \cdot 190\sqrt{3}}$$

a)



$$Z_i = 1 + \frac{1}{2j}$$

b)



Het thévenin-equivalent is

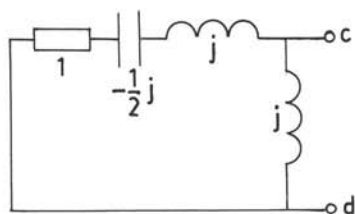
$$190\sqrt{3} = I_1 \left(1 + \frac{3}{2}j\right)$$

$$I_1 = \frac{380\sqrt{3}}{2 + 3j}$$

c)

$$U_T = U_{cd} = I_1 \cdot j = \frac{380j\sqrt{3}}{2 + 3j}$$

$$|U_{cd}| = 182,5 \text{ volt}$$

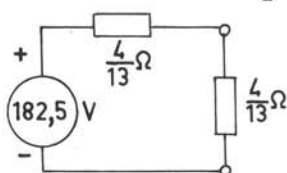
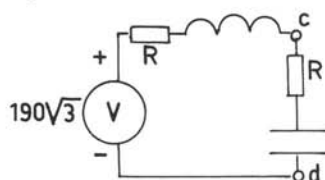


$$Z_i = \frac{j(1 + \frac{1}{2}j)}{j + 1 + \frac{1}{2}j} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13} \cdot j$$



$$Z_u = Z_i^* = \frac{4}{13} - \frac{7}{13} j.$$

d)



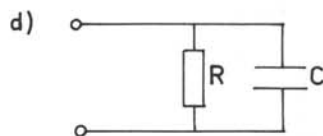
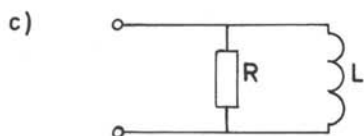
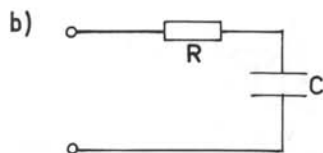
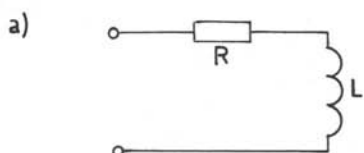
$$P = \frac{U^2}{8R} = \frac{(182,5)^2}{8 \cdot \frac{4}{13}}$$

$$P = 13500 \text{ W}$$

Hoofdstuk XV

POLEN EN NULPUNTEN. KOMPLEXE- FREQUENTIEVLAK

- 15.1 Geef in het complexe frequentie-vlak aan, de polen en de nulpunten van de ingangsimpedantie $Z(\lambda)$ van de volgende schakelingen. Bepaal hieruit grafisch het verloop van $|Z(\lambda)|$ als functie van de radiaalfrequentie ω .

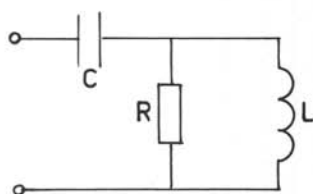


- 15.2 Geef in het complexe frequentie-vlak aan de polen en de nulpunten van de ingangsimpedantie van de volgende schakeling. Bepaal grafisch $|Z(2j)|$

$$R = 1 \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = 1 \text{ F.}$$



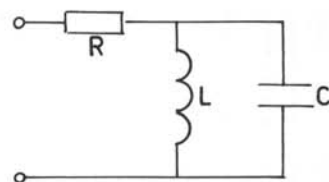
- 15.3 Dezelfde vraag als 15.2 maar voor deze schakeling en voor

$$\lambda = 1 \cdot j$$

$$R = 1 \Omega$$

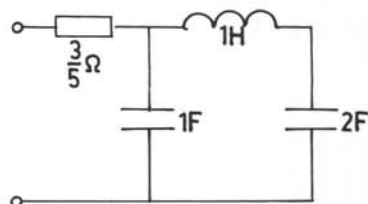
$$L = 2 \text{ H}$$

$$C = 2 \text{ F.}$$



- 15.4 Geef in het complexe frequentie-vlak aan de polen en de nulpunten van de ingangsimpedantie van de gegeven schakeling.

Bepaal grafisch $|Z(\lambda)|$ en de fasehoek bij $\lambda = 1 \cdot j$.



15.5 Bepaal grafisch de modulus $|H(\lambda)|$ en de fasehoek van de volgende systeemfuncties als functie van de reële radiaalfrequentie ω .

a. $H(\lambda) = \frac{1}{\lambda + 1}$

d. $H(\lambda) = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}$

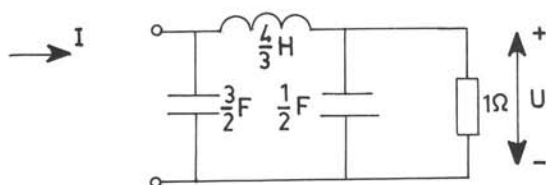
b. $H(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 1)^2}$

e. $H(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$

c. $H(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}$

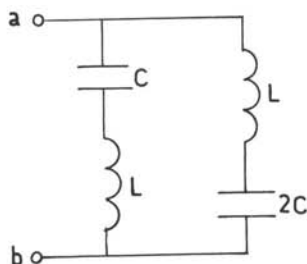
f. $H(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

15.6



Bepaal de overdrachtsfunctie $Z(\lambda) = \frac{U}{I}$ van het gegeven netwerk en bereken de ligging van de polen en de nulpunten van $Z(\lambda)$.

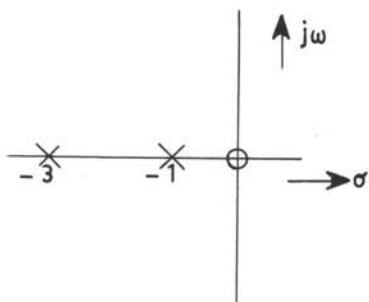
15.7 Gegeven: het schema van een zuiver reactieve schakeling. De spoelen zijn gelijk; de capaciteit van de ene condensator is tweemaal zo groot als van de andere.



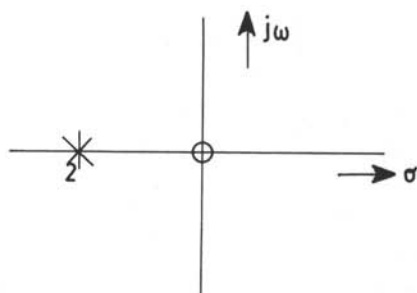
- Gevraagd: a. Bepaal de impedantie $Z_{ab}(\lambda)$ als functie van λ en teken in het complexe frequentie-vlak de polen en de nulpunten van $Z_{ab}(\lambda)$.
 b. Teken de reactantie $X_{ab}(\omega)$ als functie van ω voor $\omega \geq 0$.
 c. Teken $\arg\{X_{ab}(\omega)\}$ als functie van ω .

15.8 Schets van de gegeven gevallen $|Z|$ als functie van ω .

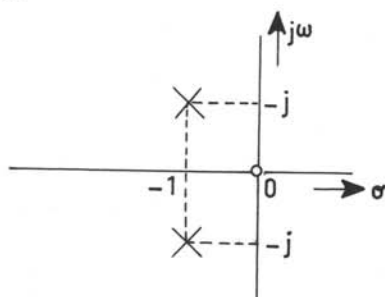
a.



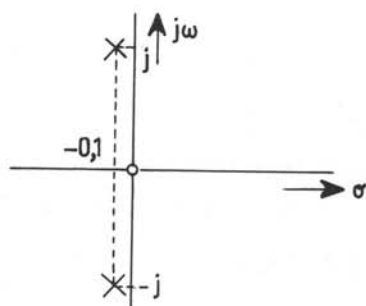
b.



c.



d.



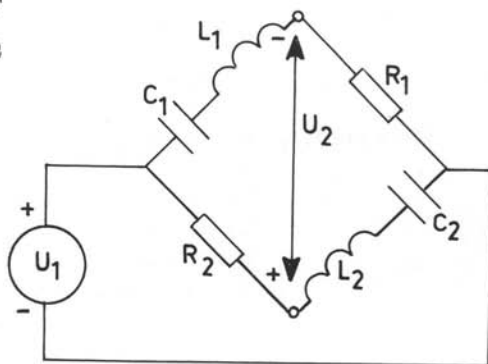
15.9 Dimensioneer een LCR-parallelkring zodanig dat van de impedantie geldt $|Z| = 0,1\sqrt{5}$ voor $\lambda = j$ terwijl de polen en de nulpunten van Z liggen als in fig. 15.8 a.

15.10 Gegeven: het schema.

$$L_1 = L_2 = 1 \text{ H}$$

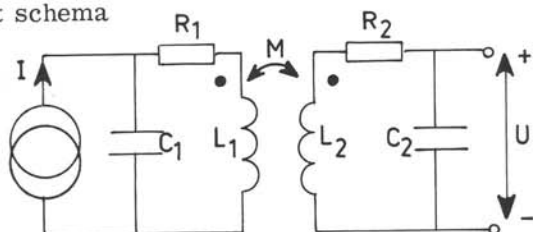
$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \text{ F}$$

$$R_1 = R_2 = 1 \Omega$$



- Gevraagd: a. Bepaal de overdrachtsfunctie $\frac{U_2}{U_1}$ als functie van de complexe frequentie λ .
- b. Geef de ligging van de polen en de nulpunten van deze functie in het complexe-frequentie-vlak (λ -vlak) aan.
- c. Schets in een grafiek het verloop van de modulus van deze overdrachtsfunctie als functie van de reële frequentie ω .
- d. Schets in een grafiek het verloop van het argument van deze overdrachtsfunctie als functie van de reële frequentie ω .
- e. Hoe groot is de faseverschuiving tussen U_2 en U_1 als de hoekfrequentie ω oneindig groot is?

15.11 Gegeven: het schema



Gevraagd:

- a. Druk de overdrachtsimpedantie $H(\lambda) = \frac{U(\lambda)}{I(\lambda)}$ uit in de complexe grootte λ . $\lambda = \sigma + j\omega$.

Vervolgens wordt gesteld:

$$C_1 = C_2 = 100 \text{ pF} = 10^{-10} \text{ F.}$$

$$L_1 = L_2 = 10 \text{ mH} = 10^{-2} \text{ H.}$$

$$M = 4 \text{ mH.}$$

Gevraagd:

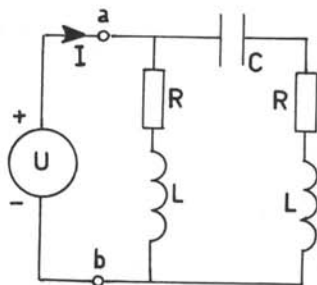
- b. Bereken voor het geval $R_1 = R_2 = 0 \text{ ohm}$ de polen en de nulpunten van $H(\lambda)$.
Schets in het complexe λ -vlak de ligging van de polen en de nulpunten van $H(\lambda)$.
- c. Schets $|H(\lambda)| = f(\omega)$ voor $R_1 = R_2 = 0 \text{ ohm}$.
- d. Schets globaal $|H(\lambda)| = f(\omega)$ voor $R_1 = R_2 \neq 0 \text{ ohm}$.

15.12 Gegeven: het schema.

De grootte van de beide weerstanden is klein ten opzichte van de impedantie van de spoelen en de condensator.

Gevraagd:

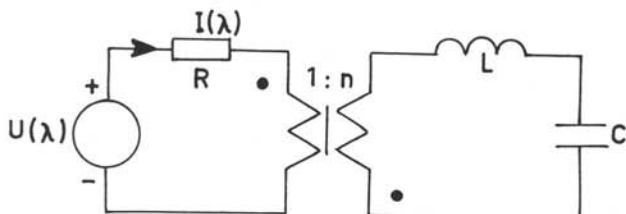
- Men beschouwt de impedantie $Z(\omega)$ van de schakeling rechts van de klemmen a en b.
Men verwaarloost daarbij de beide weerstanden R; dus $Z(\omega) = j \cdot X(\omega)$.
- Geef voor dit geval in een globale schets (zonder berekening) aan, het verloop van het imaginaire deel van $I(\omega)$ als functie van ω . Licht Uw antwoord kort toe.
- Schets (zonder berekening) in een afzonderlijk figuur $|I(\omega)|$ als functie van ω .
- Men verwaarloost nu de beide weerstanden niet meer. Geef in een globale schets (zonder berekening) aan, het verloop van $|I(\omega)|$ als functie van ω . Licht Uw antwoord kort toe.



Teneinde inzicht te krijgen in het gedrag van de schakeling maakt men gebruik van de ligging van de polen en de nulpunten in het complexe λ -vlak.

- Bepaal de admittantie $Y(\lambda) \left[= \frac{1}{Z(\lambda)} \right]$ van de schakeling rechts van de klemmen a en b, uitgedrukt in L, C, R en de complexe frequentie λ .
- Als voorts wordt gegeven: $R = 10$
 $L = 1 \text{ mH}$ en
 $C = 10 \mu\text{F}$,
geef dan in het complexe λ -vlak aan (op schaal) de ligging van de polen en de nulpunten van $Y(\lambda)$.

15.13 Gegeven: het schema.



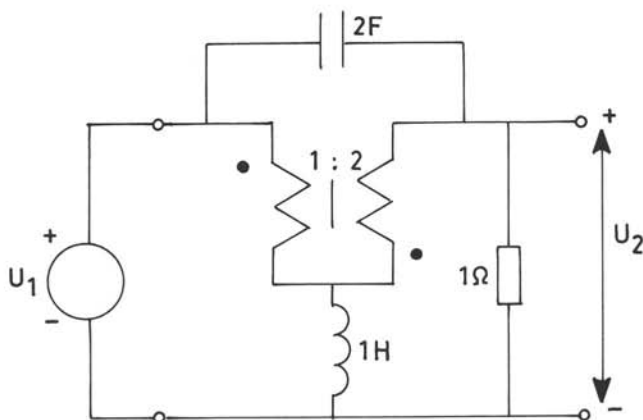
De complexe frequentie van de bronspanning $U(\lambda)$ is λ .

Gevraagd: a. Geef een uitdrukking voor de stroom $I(\lambda)$.

Vervolgens wordt nu gegeven: $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ en $R = 1 \Omega$. De bronsterkte is 1 V .

- Gevraagd: b. Voor welke waarde van de transformatieverhouding n heeft de functie $I(\lambda)$, in het complexe frequentievlak samenvallende polen?
- c. Kies nu $n = 1$. Teken in het complexe frequentievlak de ligging van de polen en de nulpunten van $I(\lambda)$.
Geef een fysische interpretatie van de polen.
Schets $|I(j\omega)|$ als functie van ω .
- d. Voor welke waarde van ω zijn de bronspanning U en de stroom I door de weerstand in fase?

15.14 Gegeven: het schema. De transformator is ideaal.
De complexe frequentie is λ .



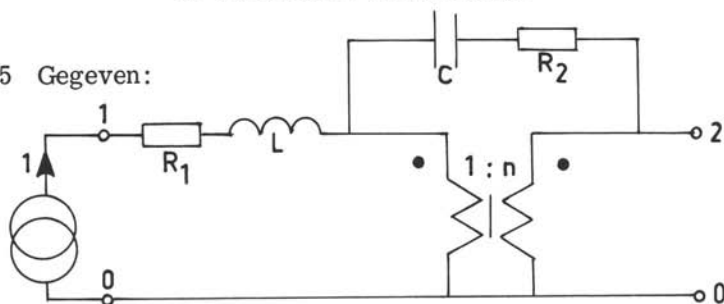
Gevraagd: a. Bepaal de spanningsoverdrachtsverhouding

$$H(\lambda) = \frac{U_2}{U_1}$$

als functie van λ .

- b. Schets met behulp van het polen- en nulpuntenbeeld het verloop van $|H(j\omega)|$ als functie van ω .
- c. Schets $\arg\{H(j\omega)\}$ als functie van ω .
- d. Bereken de bandbreedte.

15.15 Gegeven:



$R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $L = 1 H$, $C = 1 F$, de complexe frequentie is λ . De transformatieverhouding is n . Zie vraagstuk 12.13.

Gevraagd: a. Bepaal de spanningsverhouding

$$H(\lambda) = \frac{U_{20}}{U_{10}}, \text{ als functie van } n \text{ en van } \lambda.$$

- b. Kies vervolgens $n = 2$ en bepaal grafisch $|H(\lambda)|$ voor $\lambda = j$.
- c. Schets met $n = 2$, $|H(j\omega)|$ en $\arg\{H(j\omega)\}$ als functie van de frequentie ω .

Voorbeelden

Opgave I.

Gegeven: het schema.

$$R_1 = R$$

$$R_2 = 2R$$

$$C_1 = C$$

$$C_2 = 2C$$

Gevraagd:

a. Druk $H(\lambda) = \frac{U_2}{U_1}$ uit in R , C en de complexe frequentie $\lambda = \sigma + j\omega$

Vervolgens wordt gegeven:

$$R = 5 \cdot 10^4 \Omega$$

$$C = 2\frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \text{ F.}$$

Gevraagd:

b. Bepaal de polen en de nulpunten van $H(\lambda)$.

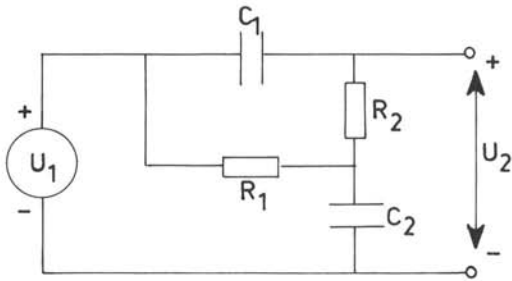
Teken op schaal de ligging hiervan in het complexe vlak.

c. Bepaal grafisch de modulus en het argument van $H(j\omega)$ voor $\omega = 4,25 \text{ rad/s}$.

d. Bereken de limiet van $H(j\omega)$ voor $\omega \rightarrow 0$.

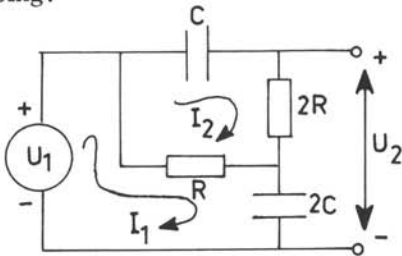
Bereken de limiet van $H(j\omega)$ voor $\omega \rightarrow \infty$.

Geef hiervan een fysische verklaring.



Oplossing:

I. a.



$$U_1 = I_1 \left(R + \frac{1}{2\lambda C} \right) - I_2 R \quad (1)$$

$$0 = -I_1 R + I_2 \left(3R + \frac{1}{\lambda C} \right) \quad (2)$$

$$U_2 = I_1 \frac{1}{2\lambda C} + I_2 \cdot 2R \quad (3)$$

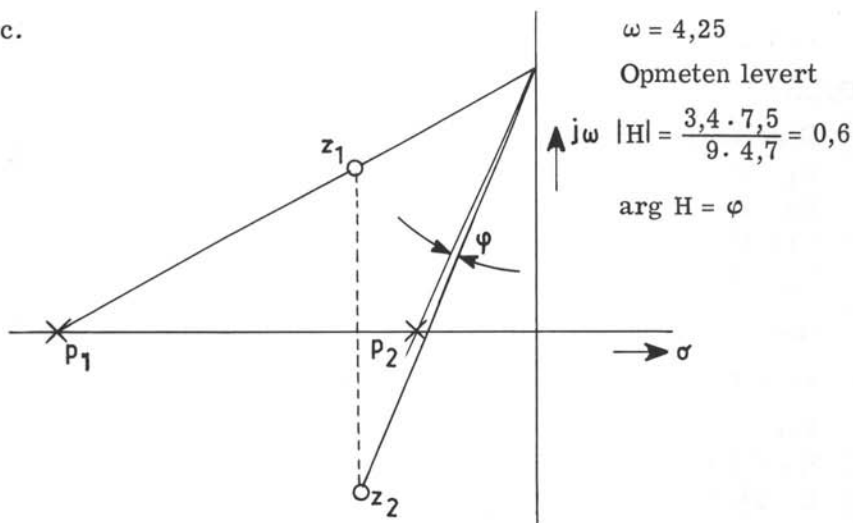
$$\text{Hieruit volgt } H = \frac{U_2}{U_1} = \frac{4\lambda^2 R^2 C^2 + 3\lambda RC + 1}{4\lambda^2 R^2 C^2 + 5\lambda RC + 1}$$

$$\text{invullen der waarden levert } H = \frac{\lambda^2 + 6\lambda + 16}{\lambda^2 + 10\lambda + 16}$$

b. polen $p_1 = -8$ $p_2 = -2$

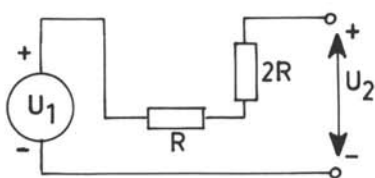
$$\text{nulpunten } z_1 = -3 + j\sqrt{7} \quad z_2 = -3 - j\sqrt{7}$$

c.

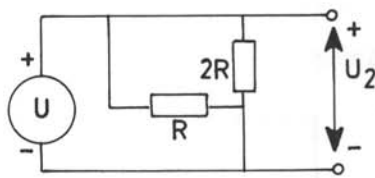


$$d. H(j\omega) = \frac{16 - \omega^2 + 6j\omega}{16 - \omega^2 + 10j\omega}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1$$



lage frequentie: $U_2 = U_1$



hoge frequentie: $U_2 = U_1$

Opgave II.

A. Gegeven: het schema.

$$L_2 = L_3, L_1 = M$$

$$L_2 = 2L_1 \text{ en } C_2 = 2C_1$$

$$\text{Stel: } L_1 = L$$

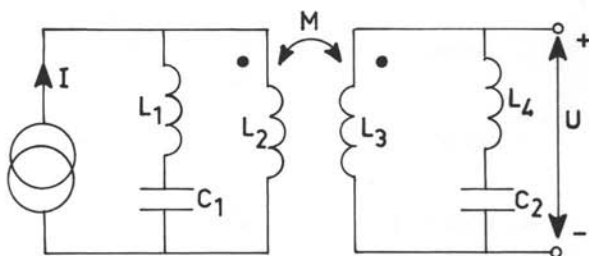
$$L_2 = 2L$$

$$L_3 = 2L$$

$$M = L$$

$$C_1 = C$$

$$C_2 = 2C$$



- Gevraagd: a. Druk de overdrachtsfunctie $H(\lambda) = \frac{U}{I}$ uit in L , C , L_4 en de komplexe frequentie λ ($= \sigma + j\omega$)
- b. Voor welke waarde van L_4 heeft de functie $H(\lambda)$ twee paren samenvallende nulpunten?
Geef hiervan een fysische verklaring.

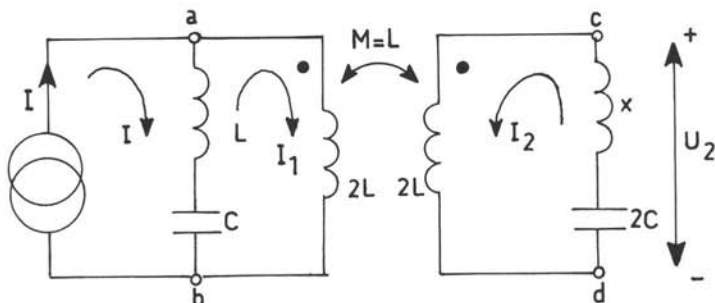
B. Gegeven: Een overdrachtsfunctie $G(\lambda)$.

$$G(\lambda) = \frac{\lambda L \cdot (\lambda^2 LC + 1)^2}{13\lambda^4 L^2 C^2 + 8\lambda^2 LC + 1}$$

- Gevraagd: a. Bepaal de polen en de nulpunten van $G(\lambda)$ en geef de ligging daarvan aan in het complexe frequentievlak. (λ -vlak).
- b. Schets in een grafiek het verloop van het argument van deze overdrachtsfunctie $G(\lambda)$ als functie van de reële frequentie ω .

Oplossing:

II. A. a.



$$1. I_1(3\lambda L + \frac{1}{\lambda C}) + I_2 \cdot \lambda L - I \cdot (\lambda L + \frac{1}{\lambda C}) = 0$$

$$2. I_1 \cdot \lambda L + I_2 \cdot (\lambda x + 2\lambda L + \frac{1}{2\lambda C}) = 0$$

$$3. U_2 = -I_2(\lambda x + \frac{1}{2\lambda C}). \quad \text{Uit 1, 2 en 3 volgt}$$

$$H(\lambda) = \frac{U_2}{I} = \frac{\lambda L(\lambda^2 LC + 1)(2\lambda^2 xC + 1)}{6\lambda^4 LxC^2 + 10\lambda^4 L^2 C^2 + 7\lambda^2 LC + 2\lambda^2 xC + 1}$$

b. nulp. bij $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \pm j \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en $\lambda_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2xC}}$

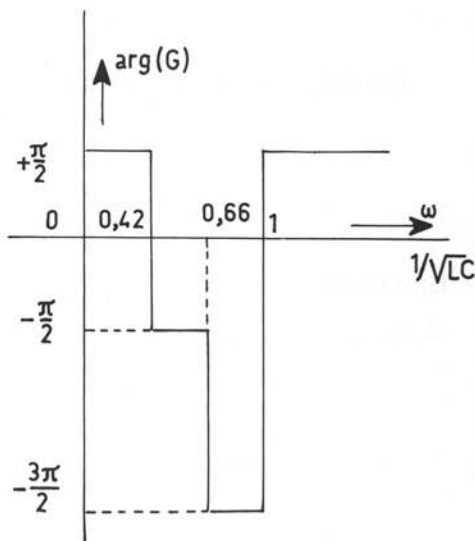
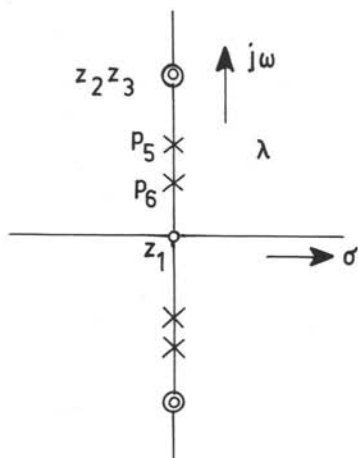
$\lambda_2 = \lambda_3$ als $x = \frac{1}{2}L$. Bij λ_2 is door resonantie van L en C in serie $U_{ab} = 0$. Dus ook $U_2 = 0$. Nulpunt.

Bij λ_3 is door resonantie van x en $2C$ in serie $U_{cd} = U_2 = 0$. Nulpunt.

Door de keuze $x = \frac{1}{2}L$ kan men beide resonantiepunten laten samenvallen.

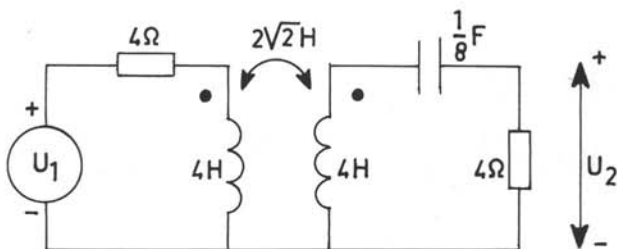
B. a. nulpunten voor $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \pm j \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$

polen $\lambda_4 = \infty$, $\lambda_5 = \pm j \cdot 0,66 \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\lambda_6 = \pm j \cdot 0,42 \frac{1}{\sqrt{LC}}$



Opgave III.

Gegeven: het schema.



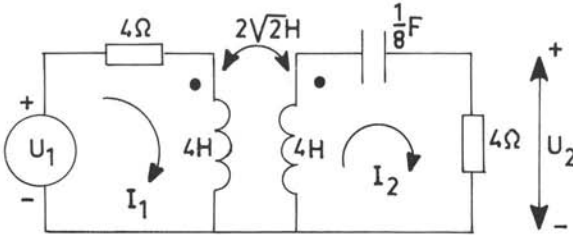
Gevraagd: a. Bepaal de overdrachtsfunctie,

$$H(\lambda) = \frac{U_2(\lambda)}{U_1(\lambda)}.$$

- b. Tot welke waarde nadert $H(\lambda)$ als λ nadert tot de waarde -2 ?
 Met welk verschijnsel heeft men hier te maken?
- c. Teken in het complexe λ -vlak de polen en de nulpunten van $H(\lambda)$.
- d. Schets $|H(j\omega)|$ als functie van ω ,
 Bepaal $\arg\{H(2j)\}$.

Oplossing.

III.



$$\begin{aligned} a. \quad U_1 &= 4(1 + \lambda) I_1 - 2\sqrt{2}\lambda I_2 \\ 0 &= -2\sqrt{2}\lambda I_1 + (4 + 4\lambda + \frac{8}{\lambda}) I_2 \end{aligned}$$

eliminatie van I_1 geeft, met $U_2 = 4I_2$

$$H(\lambda) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{2} \lambda^2}{\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4}$$

- b. $\lambda = -2$ blijkt een wortel te zijn van de noemer.
 Als $\lambda \rightarrow -2$ dan $H(\lambda) \rightarrow \infty$. Men heeft hier te maken met
 complexe resonantie: een eigenfrequentie van het net-
 werk valt samen met de bronfrequentie.

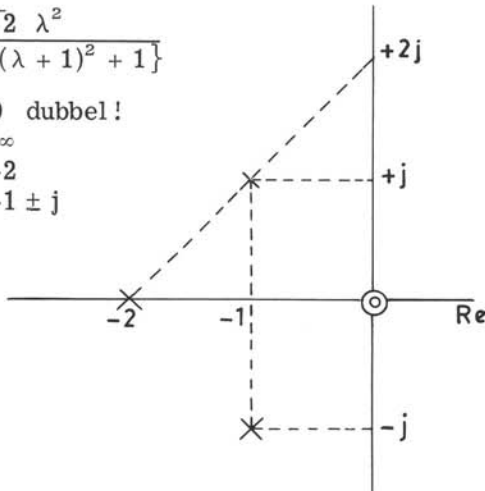
$$c. \quad H(\lambda) = \frac{\sqrt{2} \lambda^2}{(\lambda + 2) \{(\lambda + 1)^2 + 1\}}$$

nulpunten: $\lambda = 0$ dubbel!

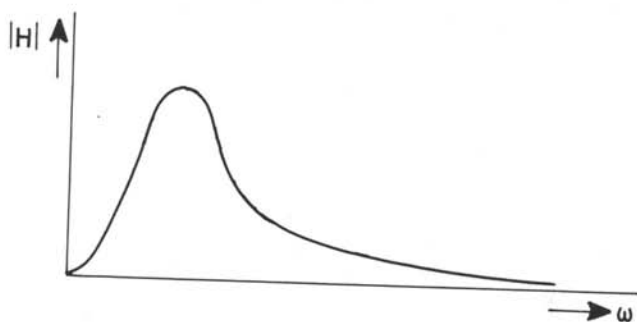
$$\lambda = \infty$$

polen: $\lambda = -2$

$$\lambda = -1 \pm j$$



d.

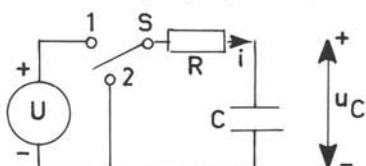


$$\arg \{ H(+j\omega) \} = 2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{tg}(\alpha) = 3$$

VRIJE TRILLINGEN EN SCHAKELVERSCHIJNSELEN

Opm.: Indien onderstaande vraagstukken worden opgelost volgens de methode van Laplace kunnen de met een * aangegeven vragen worden overgeslagen.

- 16.1 Nadat S een oneindig lange tijd heeft gestaan in stand 1 zet men deze om naar stand 2. Bepaal $u_C(t)$ en $i(t)$ voor $t > 0$. U is een gelijkspanning.

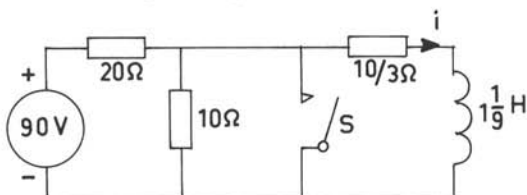


Schets u_C en i voor $t > 0$.

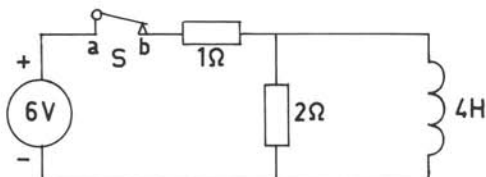
Nadat de vrije trilling is weggedempt, schakelt men terug naar stand 1. Bepaal opnieuw u_C en i en schets deze voor $t > 0$.

- 16.2 Beantwoord dezelfde vragen als hiervoor, maar nu met een spoel L in plaats van met een condensator. Nu dus voor i en u_L .

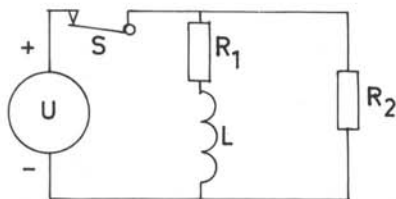
- 16.3 De schakelaar S is voortdurend open geweest en wordt gesloten op $t = 0$. U is 90 V gelijkspanning. Bereken i als $t = 1/3$ s.



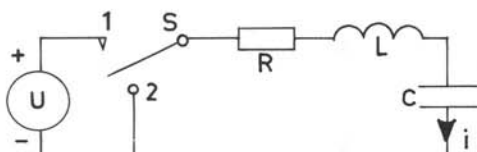
- 16.4 S is steeds gesloten geweest en wordt op $t = 0$ geopend. Bereken de spanning u_{ab} over S voor $t > 0$. U = 6 V gelijkspanning.



- 16.5 S is steeds gesloten geweest en wordt als $t = 0$ geopend. Bereken de stroomsterkte in het circuit voor $t > 0$. U is een gelijkspanning.



16.6



Een LCR-seriekring is steeds aangesloten geweest op een gelijkspanningsbron met $U = 2 \text{ V}$. $L = 1 \text{ H}$, $C = \frac{1}{2} \text{ F}$ en $R = 3 \Omega$.

Merk op dat $Q < \frac{1}{2}$.

Op het tijdstip $t = 0 \text{ s}$ zet men S om, van stand 1 naar stand 2. Bepaal de lading $q(t)$ op de condensator en de stroom $i(t)$ in de keten voor $t > 0$. Schets q en i als functie van de tijd.

- 16.7 In vraag 16.6. was de kringkwaliteit kleiner dan $\frac{1}{2}$; de daar gevonden oplossing noemt men een aperiodische vrije trilling. Kiezen wij nu $U = 2 \text{ V}$ met $L = \frac{1}{4} \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ en $R = 1 \Omega$, dan blijkt $Q = \frac{1}{2}$. Men spreekt in dit geval van een grensgeval tussen een aperiodische en een periodische oplossing. Beantwoord dezelfde vragen als onder 16.6. maar nu voor dit grensgeval.
- 16.8 Kiezen wij tenslotte $U = 1010 \text{ V}$ met $L = 1 \text{ H}$, $C = \frac{1}{101} \text{ F}$ en $R = 2 \Omega$, dan blijkt $Q > \frac{1}{2}$ en spreekt men van een periodische vrije trilling. Beantwoord dezelfde vragen als onder 16.6. maar nu voor dit periodische geval.
- 16.9 Men kiest dezelfde schakeling als onder vraagstuk 16.6. De grootte van de elementen alsook de bronsterkte zijn dezelfde. Alleen in dit geval heeft de schakelaar voortdurend gestaan in

stand 2. en wordt nu op het tijdstip $t = 0$ omgezet naar stand 1. Beantwoord dezelfde vragen als onder 16.6.

16.10 $R = 2/3 \text{ M}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $U = 60 \text{ V}$ gelijkspanning.

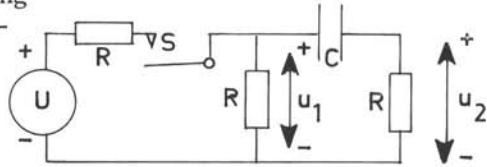
In de gegeven schakeling is C voor $t < 0$ ongeladen.

Op het tijdstip $t = 0$ wordt S gesloten.

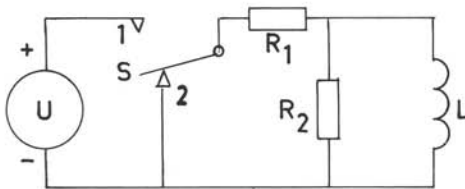
Op het tijdstip $t = t_1$ wordt S weer geopend.

Bepaal de uitdrukking voor u_1 en u_2 als functie van de tijd voor $0 < t < t_1$. Doe hetzelfde voor $t > t_1 = 1 \text{ s}$.

Schets u_1 en u_2 als functie van de tijd.



16.11



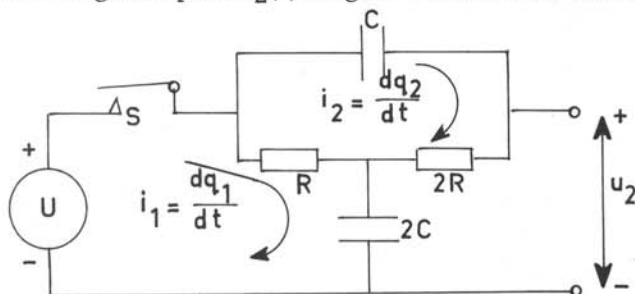
In de gegeven schakeling is $R_1 = R_2 = R$. Nadat de schakelaar S een oneindig lange tijd in stand 2 gestaan heeft, wordt deze op $t = 0$ omgezet naar stand 1. U is een gelijkspanning.

- Bereken de stroomsterkten in R_1 en L als functie van de tijd.
- Vervolgens wordt S op het tijdstip $t = t_1$ in een oneindig korte tijd van stand 1 omgezet naar stand 2. Bepaal de uitdrukking voor de stroomsterkte in L voor $t > t_1$.
- Schets het verloop van de stroomsterkte in R_1 en in L voor $t \geq 0^+$ voor het geval dat:
 $U = 60 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R = 30 \Omega$, $L = 0,3 \text{ H}$ en $t_1 = 20 \text{ milliseconde}$.
- Geef de uitdrukking voor de energie in R_1 en R_2 tezamen gedissipeerd, gedurende het tijdsinterval gelegen tussen t_1 en $t = \infty$.
- Hoe zou het antwoord onder d. hebben geluid, indien de schakelaar S op het tijdstip t_1 niet in een oneindig korte tijd zou zijn omgezet, maar die stand 2 pas (b.v. 1 seconde) later zou hebben bereikt?

16.12 In de onderstaande schakeling wordt S op het tijdstip $t = 0$ gesloten. Op $t = 0^-$ geldt: $q_1 = q_2 = 0$.

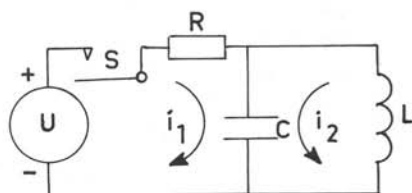
$U = 10 \text{ V}$ gelijkspanning, $R = 50 \text{ k}\Omega$ en $C = 2,5 \mu\text{F}$.

Gevraagd: Bepaal $u_2(t)$ en geef daarvan een schets.



16.13 Gegeven: het schema

$$\begin{aligned} R &= 5 \Omega \\ L &= 2 \text{ mH} \\ C &= 15 \mu\text{F} \\ U &= 10 \text{ V (g.sp.)} \end{aligned}$$



Op het tijdstip $t = 0$ is de schakelaar S gedurende een oneindig lange tijd geopend geweest. Op dat tijdstip is C spanningsloos en L stroomloos. Men sluit S op $t = 0$.

Gevraagd: a. Bereken $i_2(t)$ voor $0^+ < t < +\infty$

b. Schets $i_2(t)$. Hoe loopt de raaklijn aan de kromme voor $t = 0^+$?

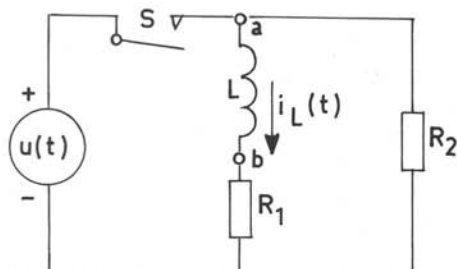
16.14 Gegeven: het schema

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = 3 \Omega \\ L &= 4 \text{ mH} \end{aligned}$$

$$u(t) = 5 \cdot \cos(1000t) \text{ V}$$

S staat open en de keten is stroomloos.

Op het tijdstip $t_1 = 0$ wordt S gesloten.



Gevraagd:

a. Bereken de stroomsterkte in de spoel als functie van de tijd.

- Bepaal de grootte en de zin van de spanning tussen de punten a en b onmiddellijk ná het sluiten van S.
- Nadat zich in de keten de blijvende toestand heeft ingesteld, opent men S op het tijdstip t_2 . Dit gebeurt op een moment, waarop $i_L(t)$ de maximale positieve waarde heeft. Bereken de grootte en de zin van de spanning tussen de punten a en b onmiddellijk ná het openen van S.
- Schets in één figuur het verloop van $i_{R_2}(t)$ in de weerstand R_2 in het interval gelegen tussen 4 milliseconde voor en 4 milliseconde ná het tijdstip t_2 waarop S werd geopend. (N.B. Neem voor de tijdas als schaal $1 \text{ ms} = 2 \text{ cm}$)

16.15 Gegeven:

het schema

$R = 10 \text{ k}\Omega$

$U_1 = 40 \text{ V (g.s.)}$

$U_2 = 10 \text{ V (g.s.)}$

$C = 100 \mu\text{F}$

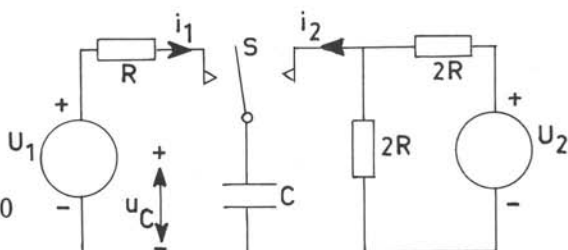
Op het tijdstip $t = 0$ wordt de schakelaar in stand 1 geplaatst.

C bevatte aanvankelijk géén lading. Na $t_1 = \ln(2)$ seconde wordt S omgezet naar stand 2.

Gevraagd:

a. Schets $u_C(t)$, $i_1(t)$ en $i_2(t)$.

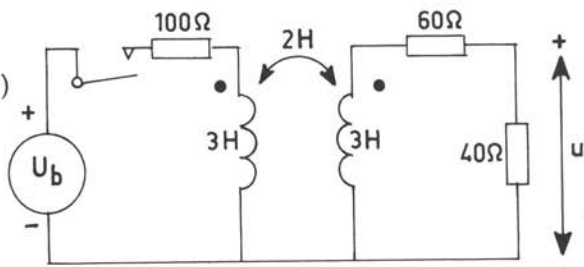
b. Op welk moment geldt dat $i_2(t) = 0$?



16.16 Gegeven:

het schema

$U_b = 200 \text{ V (g.s.)}$



Op het tijdstip $t = 0$ wordt de schakelaar gesloten, nadat deze een oneindig lange tijd geopend is geweest.

Gevraagd:

a. Bepaal $u(t)$.

b. Schets het verloop van $u(t)$.

16.17 Gegeven: het schema

U is een gelijkspanningsbron

I is een gelijkstroombron

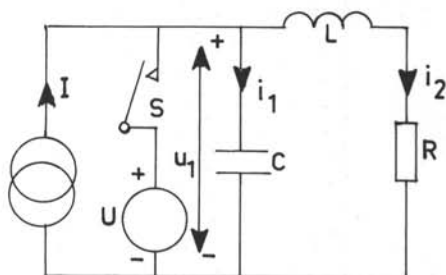
$$U = 3 \text{ V}$$

$$I = 5 \text{ A}$$

$$L = \frac{1}{2} \text{ H}$$

$$C = \frac{1}{5} \text{ F}$$

$$R = 1 \Omega$$



De schakelaar S heeft een oneindig lange tijd in de getekende stand gestaan.

Op $t = 0$ wordt S geopend.

Gevraagd:

- Bepaal u_1 en i_2 voor $t < 0$.
- *Bepaal u_1 en i_2 op $t = 0^+$.
- *Bepaal de karakteristieke vergelijking en bereken de wortels daarvan.
- Bereken $u_1 = f(t)$ voor $t \geq 0$.

16.18 Gegeven: het schema

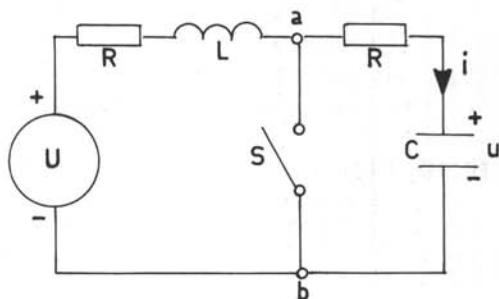
$$R = 10 \text{ ohm},$$

$$L = 1 \text{ mH},$$

$$C = 10 \mu\text{F} \text{ en}$$

$$U = 20 \text{ V (g.s.)}$$

De schakelaar S is steeds gesloten geweest en wordt op het tijdstip $t = 0$ seconde geopend.

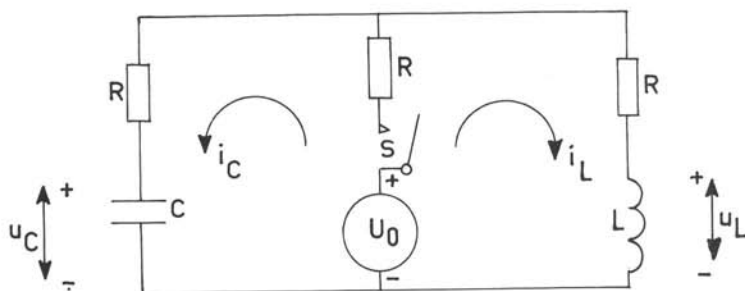


Gevraagd:

- *Bereken de grootte van de spanning tussen de punten a en b op het tijdstip $t = 0^+$ seconde, onmiddellijk ná het openen van de schakelaar S .
- *Op het tijdstip $t = 10^{-4}$ seconde wordt S weer gesloten. Bepaal de grootte van de stroom door S , op het tijdstip onmiddellijk ná het sluiten van S . Hierbij is gegeven dat vlak vóór het sluiten van S , $i = \frac{2}{e}$ ampère, en $u = 20(1 - \frac{1}{e})$ volt.
Hierin is e het grondtal van de natuurlijke logarithme.
- *Toon aan dat de in b . gegeven waarden van i en van u , de juiste waarden zijn.

16.19 Gegeven: het schema

De weerstanden zijn gelijk. U_0 is een gelijkspanning.



De schakelaar S is steeds geopend geweest voor $t < 0$ seconde. Op het tijdstip $t = 0$ seconde wordt S gesloten.

Gevraagd:

- *a. Bepaal de stroomsterkten $i_C(0^+)$ en $i_L(0^+)$, dus op het tijdstip $t = 0^+$ seconde, vlak nádat S werd gesloten.
- *b. Bepaal $u_C(0^+)$ en $u_L(0^+)$.

Vervolgens wordt nu gegeven: $L = R^2 \cdot C$.

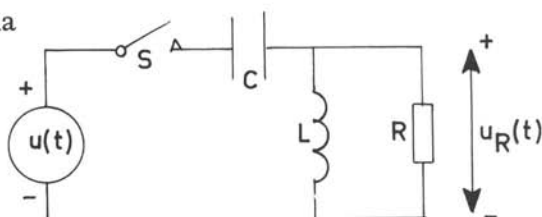
- c. Bepaal $i_L(t)$ en $i_C(t)$ voor $t > 0$ seconde.
- d. Bepaal de stroom door de schakelaar S voor $t > 0$ seconde als functie van de tijd.
- e. Schets in één figuur $i_L(t)$, $i_C(t)$ en de stroom door S als $f(t)$ voor $t > 0$ seconde.

16.20 Gegeven: het schema

$$R = \frac{1}{2} \Omega,$$

$$L = \frac{1}{2} \text{ H},$$

$$C = \frac{1}{2} \text{ F}.$$



$$u(t) = \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$

Voor $t < 0$ is de condensator spanningsloos en de spoel is stroomloos. Op het tijdstip $t = 0$ wordt S gesloten.

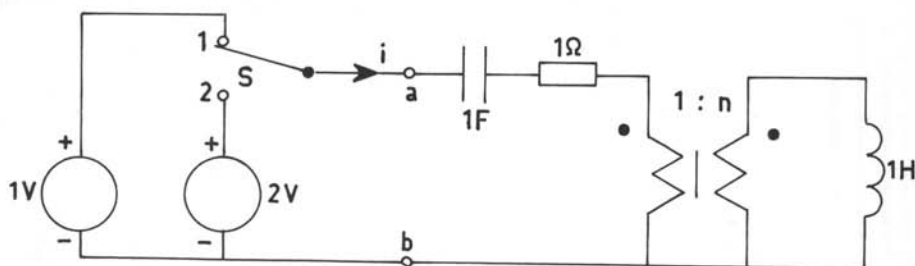
Gevraagd:

- a. Geef de laplacetransformatie van de functie

$$u(t) \varepsilon(t) = \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon(t).$$

- b. Geef de uitdrukking voor de spanning $U_R(s)$.
- c. Geef de uitdrukking voor de spanning $u_R(t) \varepsilon(t)$.

16.21 Gegeven: het schema.



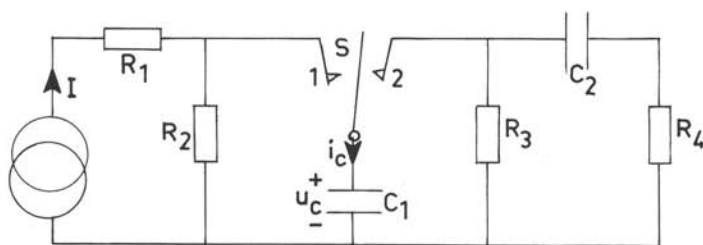
De schakelaar S heeft oneindig lang gestaan in stand 1 en wordt in oneindig korte tijd op het tijdstip $t = 0$ omgezet naar stand 2.

De transformatie-verhouding $n \neq 0$.

- Gevraagd: *a. Geef de karakteristieke vergelijking voor de vrije trillingen in het netwerk, dat ontstaat nadat S is omgezet.
- *b. Voor welke waarden van de transformatie-verhouding n heeft deze karakteristieke vergelijking samenvallende wortels?
- *c. Bepaal $i(t)$ voor $t > 0^-$ bij de onder b. gevonden waarden voor de transformatie-verhouding.
- *d. Indien nu in het gegeven schema, tussen de punten a en b, een condensator van 1 F opgenomen zou zijn geweest, bespreek dan in hoeverre Uw antwoord onder c. hierdoor zou zijn veranderd.

Voorbeelden

16.1



Gegeven: het schema

$$\begin{aligned} \text{In dit schema is: } C_1 &= C_2 = C \\ R_1 &= R_3 = 2R \\ R_2 &= R \\ R_4 &= 3R \end{aligned}$$

De schakelaar S heeft steeds in de getekende tussenstand gestaan en C_1 is ongeladen. I is een gelijkstroom. Op een zeker tijdstip wordt S gezet in stand 1.

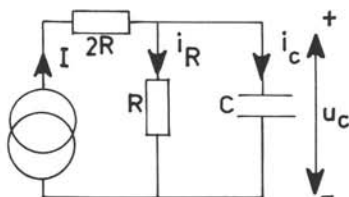
Gevraagd:

- Geef $u_C = f(t)$ ná het inschakelen van S , uitgedrukt in R , C en I .
- Na enige tijd heeft de condensator C_1 lading gekregen. Noem de condensatorspanning u_C op dat moment dan U_0 . Op dit tijdstip wordt S omgezet van stand 1 naar stand 2. Geef de uitdrukking voor i_C onmiddellijk ná het omzetten van S .
- Leid de differentiaal-vergelijking af, die het gedrag bepaalt van u_C als functie van de tijd, ná het omzetten van S .
- Voorts wordt nu gegeven: $R = 10^4 \Omega$
 $C = 1 \mu F$
 $U_0 = 5 \text{ volt}$

Los de onder c. gevonden differentiaal-vergelijking voor u_C op.

Uitwerking:

a.



$$I = i_R + i_C \quad (1)$$

$$u_C = i_R \cdot R \quad (2)$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (3)$$

Uit 1, 2 en 3 volgt

$$IR = u_C = RC \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{homogene verg. } RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad RC\lambda + 1 = 0 \quad \lambda = \frac{-1}{RC}$$

Bijzondere integraal = blijvende toestand. $u_C(\infty) = I \cdot R$
 Algemene oplossing:

$$u_C = A e^{-t/RC} + I \cdot R$$

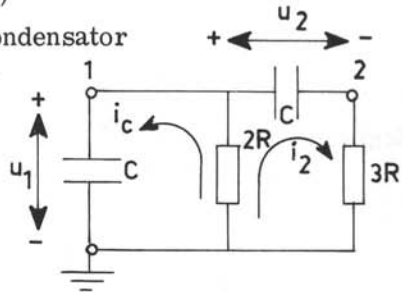
op $t = 0^+$ seconde is $u_C(0^+) = 0$. Dit geeft

$$u_C = IR(1 - e^{-t/RC})$$

- b. Na omschakelen is de tweede condensator aanvankelijk ongeladen ($u_2 = 0$).

$$R_s = \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \frac{6}{5} R$$

$$i_C = -\frac{U_0}{\frac{6}{5}R} \rightarrow i_C = -\frac{5U_0}{6R}$$



- c. 1e methode: maasmethode

$$(4) u_1 = -i_C \cdot 2R - i_2 \cdot 2R$$

$$(5) i_C = +C \frac{du_C}{dt} \quad \text{Uit 4 en 5} \quad i_2 = -\frac{u_1}{2R} - C \frac{du_1}{dt} \quad 5'$$

$$(6) i_C \cdot 2R + i_2 \cdot 5R + u_2 = 0 \quad \text{Uit 5, 5' en 6 volgt}$$

$$(6') u_2 = 3RC \frac{du_1}{dt} + \frac{5}{2} u_1$$

$$(7) i_2 = +C \frac{du_2}{dt}$$

Uit 6' en 7 volgt na differentiëren:

$$(8) i_2 = 3RC^2 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{5}{2} C \frac{du_1}{dt}$$

Uit 5' en 8 volgt

$$(9) 6R^2 C^2 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + 7RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0 \quad RC = 1/100 \text{ s}$$

- d. Gegevens invullen $6\lambda^2 + 700\lambda + 10^4 = 0$

$$\lambda_1 = -100 \quad \lambda_2 = -\frac{100}{6} \quad \text{bijz. int} = 0$$

$$u_1 = A e^{-100t} + B e^{-\frac{100t}{6}} \quad u_1 = u_C$$

$$\text{Nu is } u_1(0^+) = 5 \text{ V} \quad \text{en} \quad i_C(0^+) = -\frac{5}{12} \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$\text{Dit geeft } u_C(t) = 4 e^{-100t} + e^{-\frac{100t}{6}} \text{ volt}$$

2e methode: knooppuntsmethode

$$\begin{aligned} V_1(2\lambda C + \frac{1}{2R}) - V_2 \cdot \lambda C &= 0 \\ -V_1 \cdot \lambda C + V_2(\lambda C + \frac{1}{3R}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} 2\lambda C + \frac{1}{2R} & -\lambda C \\ -\lambda C & \lambda C + \frac{1}{3R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = IJV = 0$$

De karakteristieke vergelijking volgt hieruit met $\det(IJ) \equiv 0$

$$6\lambda^2 R^2 C^2 + 7\lambda RC + 1 = 0$$

Zie verder de vorige methode.

16.2 Gegeven: het schema

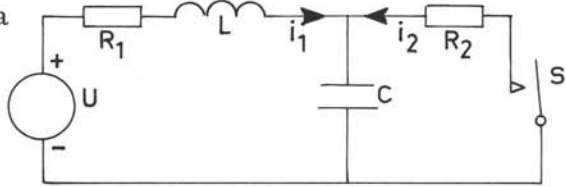
$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 1 \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = 1 \text{ F}$$

$$U = 4 \text{ V g.sp.}$$



De schakelaar S heeft ∞ lange tijd open gestaan en wordt op het tijdstip $t = 0$ gesloten.

Gevraagd:

- *a. Bepaal de karakteristieke vergelijking voor de vrije trillingen in dit netwerk na het sluiten van S.
- *b. Hoe groot is $i_2(0^+)$?
- c. Bepaal $i_1(t)$ voor $t > 0$
- d. Schets $i_1(t)$ voor $t > 0$. Neem langs de tijdas een schaal, waarin één seconde wordt voorgesteld door een lijnstuk van 1 cm.

Uitwerking.

$$\begin{aligned} *a. \quad i_1(1 + \lambda + 1/\lambda) + i_2 1/\lambda &= 0 \\ i_1 1/\lambda + i_2(1 + 1/\lambda) &= 0 \quad \text{bronnen passief!} \\ \begin{vmatrix} 1 + \lambda + 1/\lambda & 1/\lambda \\ 1/\lambda & 1 + 1/\lambda \end{vmatrix} &= 0, \text{ dus: } \underline{\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0}, \text{ of } \lambda = -1 \pm j \end{aligned}$$

$$b. \quad i_1(0^+) = 0, \quad \underline{i_2(0^+) = -4 \text{ A}} \text{ omdat } u_C(0^+) = 4 \text{ V.}$$

$$*c. \quad \text{Particuliere oplossing} = \text{blijvende toestand} \rightarrow i_1(\infty) = 2 \text{ A.}$$

Algemene oplossing:

$$i_1 = Ae^{(-1+j)t} + A^*e^{(-1-j)t} + 2$$

$$\text{met } i_1(0^+) = 0 \text{ volgt } A + A^* = -2 \text{ dus } \text{Re}\{A\} = \text{Re}\{A^*\} = -1$$

$$\text{Nu is } 4 = i_1 + \frac{di_1}{dt} + u_C \quad \left. \begin{array}{l} \\ u_C = -i_2 \end{array} \right\} \rightarrow i_2 = i_1 + \frac{di_1}{dt} - 4$$

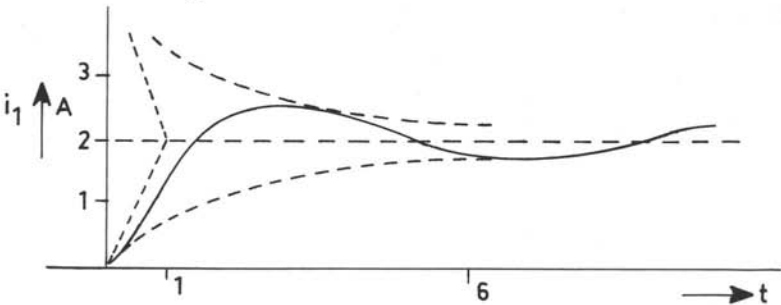
$$i_2 = A e^{(-1+j)t} + A^* e^{(-1-j)t} + 2 + (-1+j)A e^{(-1+j)t} + (-1-j)A^* e^{(-1-j)t} - 4$$

$$\text{Dus } A = -1+j \text{ en } A^* = -1-j \text{ met } i_2(0^+) = -4 \text{ volgt } j(A - A^*) = -2$$

$$\text{Hiermee volgt: } i_1 = (-1+j)e^{(-1+j)t} + (-1-j)e^{(-1-j)t} + 2$$

$$\text{Met Euler : } i_1 = 2 - 2[\cos(t) + \sin(t)]e^{-t} = 2 - 2\sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})e^{-t}$$

$$\text{d. } \omega = 1 \text{ rad/s, } \frac{2\pi}{T} = 1 \text{ dus } T = 2\pi \approx 6,3 \text{ s.}$$



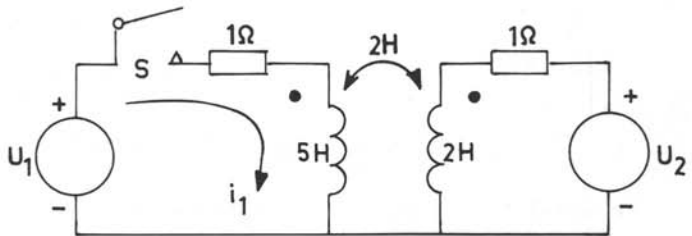
$$\text{e. Met Laplace: } \frac{4}{s} = I(s) + sI(s) + \frac{1}{s}I_C(s) + \frac{4}{s} \rightarrow I_C(s) = -s(s+1)I(s)$$

$$\text{Langs de buitenlus: } \frac{4}{s} = I(s) + sI(s) + (I(s) - I_C(s)). \text{ Dit geeft:}$$

$$I(s) = \frac{4}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - \frac{2}{(s+1)^2 + 1} \quad \text{zodat}$$

$$i(t) = 2 - 2[\cos(t) + \sin(t)]e^{-t}.$$

16.3 Gegeven: het schema.



$$U_1 = 5 \text{ V gelijkspanning,}$$

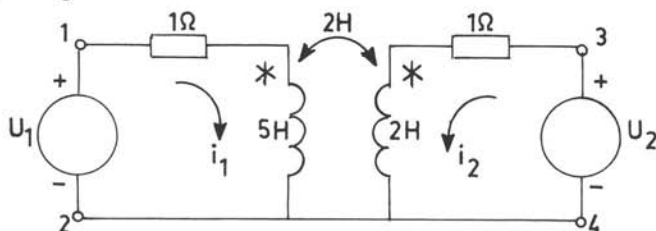
$$U_2 = 1 \text{ V gelijkspanning.}$$

Voor $t < 0$ is de schakelaar S steeds geopend geweest.
Op het tijdstip $t = 0$ wordt de schakelaar omgezet.

Gevraagd:

- *a. Geef de karakteristieke vergelijking voor de vrije trillingen in dit netwerk.
- *b. Bepaal $i_1(t)$ voor $t > 0$ als gegeven wordt dat $\left\{ \frac{di_1(t)}{dt} \right\}_{t=0^+} = \frac{5}{3} \frac{A}{s}$.
- *c. Stel dat $U_2 = 2V$ was in plaats van $U_2 = 1V$.
Bespreek in hoeverre U_w antwoord onder a. en b. hierdoor zou zijn veranderd.
- d. Bepaal $i_1(t)$ voor $t > 0$, zonder van het gegeven onder b. gebruik te maken, of bewijs dat $\left\{ \frac{di_1(t)}{dt} \right\}_{t=0^+} = \frac{5}{3}$.

Uitwerking.



$$\begin{aligned} *a. \quad U_1 &= (1 + 5\lambda)I_1 + 2\lambda I_2 \\ U_2 &= 2\lambda I_1 + (1 + 2\lambda)I_2 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 1 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

of $U = ZI$. Indien $U = 0$ zijn er alleen van 0 verschillende oplossingen voor I als Z singulier is.

$$\text{Dus } \det Z = 0, \rightarrow (1 + 5\lambda)(1 + 2\lambda) - 4\lambda^2 = 0$$

$$6\lambda^2 + 7\lambda + 1 = 0$$

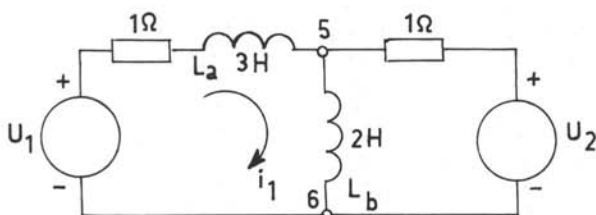
$$*b. \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{6} \text{ zodat } i_1(t) = A e^{-t} + B e^{-t/6} + P.0.$$

Kies voor de particuliere oplossing de blijvende toestand $i_1(\infty) = 5A$.

$$i_1(t) = A e^{-t} + B e^{-t/6} + 5$$

Met een vervangingsschema voor de gekoppelde spoelen krijgen wij het volgende equivalente netwerk

$i_1(0^+) = 0$. omdat $L_a = 3 \neq 0$ is i.v.m. de continuïteit van de spoelstroom $i_1(0^+) = 0$.



Gegeven is dat $\left\{ \frac{di_1}{dt} \right\}_{t=0^+} = \frac{5}{3} \frac{A}{s}$.

Met $i_1(0^+) = 0$ vinden wij $0 = A + B + 5$ (1)

$\frac{di_1}{dt} = -A e^{-t} - \frac{B}{6} e^{-t/6}$. Met het gegevene vinden wij dan

$$\frac{5}{3} = -A + \frac{B}{6} \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $A = -1$ en $B = -4$, zodat

$$i_1(t) = -e^{-t} - 4e^{-t/6} + 5 \text{ A}.$$

- c. 1. op a. heeft de verandering geen invloed omdat U_1 en U_2 beide gelijk nul worden gesteld.
2. op grond van het superpositiebeginsel is i_1 het resultaat van 1e een stroom i_1' als $U_2 = 0$ en
2e een stroom i_1'' als $U_1 = 0$.

Nu is $i_1' \equiv 0$ voor alle t omdat met U_2 niet wordt geschakeld en L_b een kortsluiting betekent voor elke gelijkstroom veroorzaakt door U_2 . De verandering van de grootte van U_2 heeft dus evenmin invloed op het antwoord op vraag b.

*d. 1e methode.

Uit het vervangingsschema volgt dat $U_{56}(0^+) = 0$ en omdat $i_1(0^-) = i_1(0^+) = 0$ is $U_{56}(0^+) = 0$.

op het tijdstip $t = 0^+$ staat dus de volle bronspanning U_1 over de spoel van $3H$.

$$\text{Nu is } u_1 = L \frac{di_1}{dt}, \quad U_1(0^+) = L \left\{ \frac{di_1}{dt} \right\}_{t=0^+}$$

$$5 = 3 \left\{ \frac{di_1}{dt} \right\}_{t=0^+} \quad \text{dus}$$

$$\left\{ \frac{di_1}{dt} \right\}_{t=0^+} = \frac{5}{3} \frac{A}{s}.$$

d. 2e methode

$$i_1 = A e^{-t} + B e^{-t/6} + 5, \quad i_1(0^+) = 0 \text{ dus } A + B + 5 = 0 \text{ zodat}$$

$$i_1 = A e^{-t} - (A+5) e^{-t/6} + 5$$

Voor de stroom i_2 geldt $i_2(\infty) = 1$ dus

$$i_2 = C e^{-t} + D e^{-t/6} + 1, \quad i_2(0^+) = 1 \text{ dus } C + D = 0 \text{ zodat}$$

$$i_2 = C e^{-t} - C e^{-t/6} + 1.$$

Nu geldt voor de rechter-maas

$$2 \frac{di_1}{dt} + i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} = 1 \quad \text{voor alle tijd}$$

Dus

$$-2A e^{-t} + \frac{1}{3}(A+5)e^{-t/6} + C e^{-t} - C e^{-t/6} + 1 - 2C e^{-t} + \frac{1}{3}C e^{-t/6} \equiv 1$$

$$-(2A+C)e^{-t} + \frac{1}{3}(A+5-2C)e^{-t/6} \equiv 0.$$

$$2A + C = 0 \text{ en } A - 2C = -5 \rightarrow C = 2 \text{ en } A = -1$$

$$i_1(t) = -e^{-t} - 4e^{-t/6} + 5.$$

d. 3e methode: methode volgens Laplace

$$i_2(0^-) = 1 \text{ A.}$$

$$\text{Voor de linkermaas geldt: } \frac{5}{s} = (1+5s)I_1 + 2sI_2 - 2$$

$$\text{Rechts geldt: } \frac{1}{s} = 2sI_1 + (1+2s)I_2 - 2$$

Eliminatie van I_2 uit deze vergelijkingen levert

$$I_1(s) = \frac{5(1+2s)}{s(6s+1)(s+1)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{6s+1} + \frac{C}{s+1}$$

Met breuksplitsen volgt $A = 5$, $B = -24$ en $C = -1$.

De bepaling van A , B en C kan ook geschieden volgens de methode van Heaviside. Voorbeeld voor de bepaling van B :

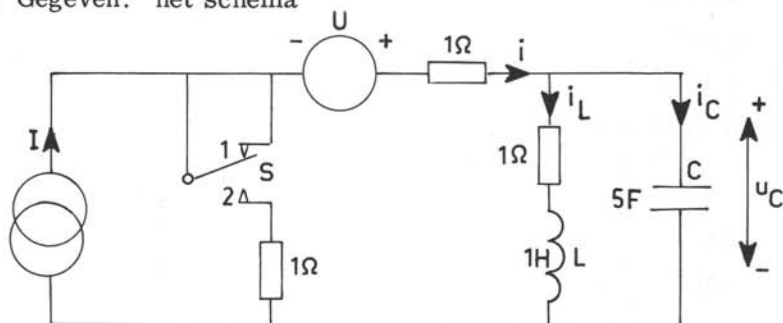
$$\frac{5(1+2s)}{s(s+1)} \equiv \frac{A(6s+1)}{s} + B + \frac{C(6s+1)}{(s+1)}$$

$$\text{Indien nu } s \rightarrow -\frac{1}{6} \text{ dan } \frac{5(1-2/6)}{-1/6(-1/6+1)} \equiv 0 + B + 0 \quad B = -24 \text{ evenzo } A \text{ en } C.$$

$$I_1(s) = \frac{5}{s} - \frac{24}{6s+1} - \frac{1}{s+1} \quad i_1(t) = 5 - 4e^{-t/6} - e^{-t} \text{ A}$$

- Indien $U_2 = 2\text{ V}$ heeft dit geen invloed op $i_1(t)$. Dit volgt uit
1. toepassing van het superpositiebeginsel, of
 2. door de hele berekening opnieuw op te zetten.

16.4 Gegeven: het schema



Alle weerstanden zijn $1\ \Omega$, $L = 1\text{ H}$ en $C = 5\text{ F}$.

De sterkte van de gelijkstroombron I is 1 A .

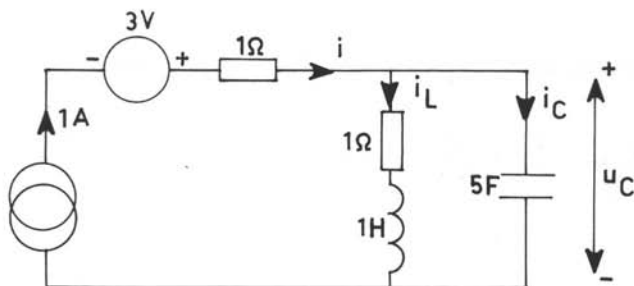
De sterkte van de gelijkspanningsbron U is 3 V .

De schakelaar S heeft oneindig lange tijd in de getekende stand 1 gestaan. Op het tijdstip $t = 0$ wordt S in oneindig korte tijd omgezet naar stand 2.

Gevraagd:

- Bereken $i_L(0^-)$ en $u_C(0^-)$; dus op het tijdstip 0^- vlak na het omzetten van S .
- *b. Toon aan: $i_C(0^+) = \frac{1}{2}\text{ A}$; dus op het tijdstip vlak na het omzetten van S .
- *c. Bereken $u_C(\infty)$; dus een oneindig lange tijd na het omzetten van S .
- *d. Bepaal de wortels van de karakteristieke vergelijking voor de vrije trillingen in het netwerk dat ontstaat nadat S is omgezet.
- e. Bepaal $u_C(t)$ voor $t > 0$.

Uitwerking:

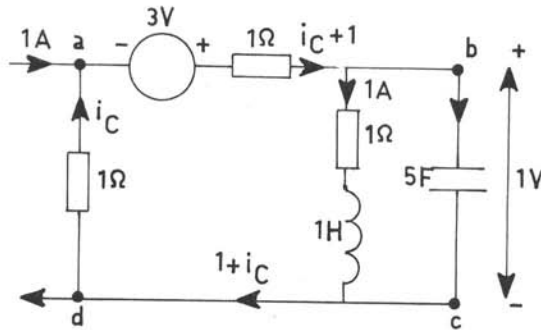


a. $i(0^-) = \underline{1A}$

$i_L(0^-) = 1A$

$u_C(0^-) = \underline{1V}$

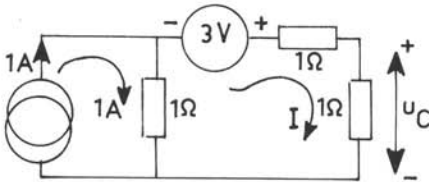
- b. Na omschakelen op $t = 0^+$



Toepassing spw. v. Kirchhoff op circuit a b c d a en rekening houdend met de continuïteitseisen levert:

$$3 = 1 + i_C + 1 + i_C \rightarrow 2i_C = 1 \rightarrow i_C(0^+) = \underline{\frac{1}{2}A}$$

- c. In de blijvende toestand ($t = \infty$) is de vrije trilling volledig weggedempt en blijven alleen gelijkstroom en -spanning over.



$$3 = 3I - 1 \rightarrow I = \underline{\frac{4}{3}A}$$

$$U_C(\infty) = \underline{\frac{4}{3}V}$$

- d. 1. Vrije trillingen bestaan als zonder stroom in het netwerk tóch een eindige spanning U bestaat. Dus $Y = 0$.

$$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \lambda} + 5\lambda = \frac{10\lambda^2 + 11\lambda + 3}{2(1 + \lambda)}$$

of

$$2. (3 + \lambda)I_1 - (1 + \lambda)I_2 = 0$$

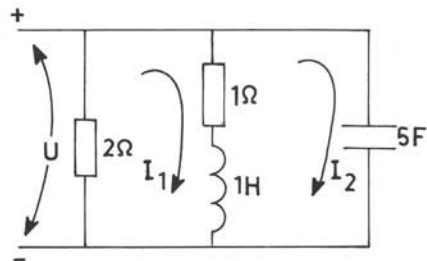
$$-(1 + \lambda)I_1 + (1 + \lambda + \frac{1}{5\lambda})I_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 + \lambda & -1 - \lambda \\ -1 - \lambda & 1 + \lambda + \frac{1}{5\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

$$10\lambda^2 + 11\lambda + 3 = 0$$

$$(5\lambda + 3)(2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \underline{-\frac{1}{2}} \quad \lambda_2 = \underline{-\frac{3}{5}}$$



e. Alg. oplossing.

$$u_c(t) = A e^{-\frac{1}{2}t} + B e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{4}{3}$$

$$u_c(0^+) = 1 \quad 1 = A + B + \frac{4}{3} \quad A + B = -\frac{1}{3}$$

$$i_c(0^+) = \frac{1}{2} \quad i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

$$i_c(t) = 5 \left\{ -\frac{1}{2}A e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{3}{5}B e^{-\frac{3}{5}t} \right\}$$

$$i_c(0^+) = \left(-\frac{5}{2}A - 3B \right) = \frac{1}{2}$$

$$+5A + 6B = -1$$

$$6A + 6B = -2 \quad A + B = -\frac{1}{3}$$

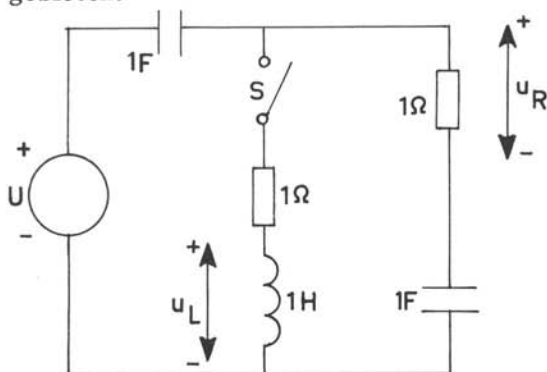
$$A = -1 \quad B = +\frac{2}{3}$$

$$u_c(t) = -e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{4}{3} \text{ volt}$$

16.5 Gegeven: het schema

U is een gelijkspanningsbron van 10 volt.

De schakelaar S heeft een oneindig lange tijd in de getekende stand gestaan en wordt op het tijdstip $t = 0$ gesloten.



Gevraagd: a. Bepaal $u_R(t)$ voor $t > 0$.

b. Hoe groot is u_L op het tijdstip $t = 0^+$, dus vlak na het omzetten van S ?

Uitwerking volgens Laplace.

a. Beginvoorwaarden

$$u_{C_1}(0^-) = 5 \text{ V}$$

$$u_{C_2}(0^-) = 5 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Met Kirchhoff volgt:

$$\frac{10}{s} = (1 + s + \frac{1}{s})I_1 + \frac{5}{s} - (1 + s)I_2$$

en

$$0 = -(1 + s)I_1 + (2 + s + \frac{1}{s})I_2 + \frac{5}{s}.$$

Eliminatie van I_1 geeft:

$$I_2 = -\frac{5}{(s+1)^3} = -\frac{5}{\{s - (-1)\}^3}$$

Uit de laplace-tabel volgt

$$\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \rightarrow \frac{t^n}{n!} e^{at} \epsilon(t).$$

Dit levert hier $i_2(t) = -5 \frac{t^2}{2!} e^{-t} \epsilon(t)$

$$u_R(t) = -\frac{5}{2} t^2 e^{-t} \epsilon(t).$$

b. 1e. Fysisch is in te zien: $i_L(0^+) = 0$, dus $u_{ab}(0^+) = 0$.

$$u_{dc}(0^+) = 5 \text{ V en } i_{C_2}(0^+) = 0 \text{ dus } u_{ad}(0^+) = 0$$

$$u_L(0^+) = u_{bc}(0^+) = u_{ac}(0^+) = u_{dc}(0^+) = 5 \text{ V}.$$

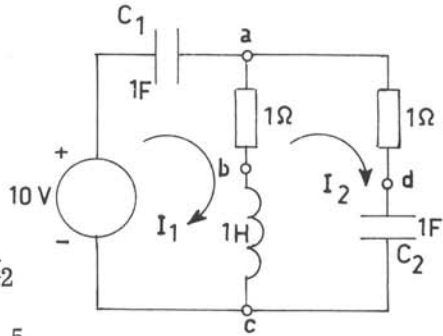
2e. Met Laplace kan men vinden:

$$I_1 = \frac{5}{(s+1)^2} \rightarrow i_1(t) = 5te^{-t}$$

$$i_L(t) = i_1(t) - i_2(t) = 5te^{-t} + \frac{5}{2}t^2 e^{-t} \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 5e^{-t} - \frac{5}{2}t^2 e^{-t}$$

$$u_L(0^+) = 5 \text{ V}$$



LAPLACE-TRANSFORMATIES

$$f(t)\epsilon(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \exp(-st)f(t) dt$$

Tabel

$f(t)\exp(-at)\epsilon(t) \Leftrightarrow F(s+a)$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$f(t-a)\epsilon(t-a) \Leftrightarrow F(s)\exp(-as)$	
$\frac{df(t)}{dt} \epsilon(t) \Leftrightarrow s F(s) - f(0^-)$	
$a f(t) \Leftrightarrow a F(s)$	
$\epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\delta(t, \Delta) \Leftrightarrow \{1 - \exp(-s\Delta)\}/s\Delta$	
$\delta(t) \Leftrightarrow 1$	
$\frac{t^n}{n!} \epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re}(s) > 0$
$\exp(-at)\epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$\sin(\omega t)\epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)\epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$

ANTWOORDEN

1.1 $-5A, 1A$

1.2 $+15V, -3V$

1.3 $625V \quad 31,25kW \quad 12,5kW$
 $7,5kW \quad 6,25kW \quad 5kW$

1.4 $200A \quad 40kW \quad 20kW \quad 10kW$
 $15/8kW \quad 25/8kW \quad 2,5kW$

1.5 $0W \quad 100W \quad -100W$

1.6 $14V$

1.7 $14A$

1.8 $12A$

1.9 $10V$

1.10 $I \rightarrow \infty$

1.11 $U \rightarrow \infty$

1.12 schakeling onmogelijk

1.13 idem als 1.12

1.14 $R_1 + R_2 + R_3 \quad R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

1.15 $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad G_1 + G_2 + G_3$

$\frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$

1.16 $2\Omega \quad \frac{1}{2}S$
 $2M\Omega \quad \frac{1}{2} \text{micro } S$
 $\infty \quad 0S$

1.17 a. $1,8\Omega$ b. $40/11\Omega$

1.18 $109\Omega \quad 1A \quad 2/5, 3/5, 1/3A$

1.19 $+4V$

1.20 $168\Omega \quad 174,4\Omega \quad 35,3W$

1.22 $38V \quad 0,3A$

1.23 $23W \quad 6,1W \quad 0,88W$
 $6,6W \quad 3,3W$

1.24 a. $R_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3 + \frac{1}{1/2}}}}} \Omega$

b. $R = \frac{20}{9}; U = \frac{\frac{20}{9}}{5 + \frac{20}{9}} \times 1 = \frac{4}{13}V$

c. Zie antwoord onder a.

$R_{ab} \rightarrow G_{cd}$ en $\Omega \rightarrow S$

d. Zie antwoord onder b. $\rightarrow \frac{4}{13}A$

1.27 $1, \quad 5/2$ en $7/2A$
 $11W \quad 55W$

1.28 $2,5A \quad 250W$

1.29 $21A \quad 13A$
 $8A \quad 18A \quad R = \frac{99}{31}\Omega$

1.30 $6,25V$

1.31 $1A$

1.32 $2V \quad 1V \quad 2W$

1.33 $I_1 = 2A \quad I_2 = 1A \quad 2W$

1.34 in beide gevallen $2A$
 reciprociteitsbeginsel

1.35 a. $2A$ b. $2V$

1.36 $V_a = -4V \quad V_b = +20V \quad V_c = +8V$

1.37 $V_a = 1V \quad V_b = 0V$

1.38 $12V \quad 10,5V \quad 7V$

1.39 $11V \quad 8V \quad 4V$

1.40 $V_a = 3V \quad V_b = 3V \quad V_c = 4V$
 $P_I = 18W \quad P_U = 44W \quad 62W$

1.41 $-3W, -8W$

1.42 a. $-\frac{3}{5}V$, b. $\frac{9}{5}W$, d. 3

- 2.1 a. $\hat{u} = 100/15V$
 b. onderbroken kanteel,
 $\hat{u} = 10V$
 c. steeds hogere spanningsspieken (stootfunctie)
 Oppervlak is constant.
- 2.2 a. kanteel $\hat{i} = 4/3mA$
 b. onderbroken kanteel
 c. impulsfunctie.
- 2.5 zigzaglijn
- 2.6 zigzaglijn $I_{max} = 0,3A$
- 2.7 klokvorm
- 2.8 $u = 10 \cos(100 \cdot t) V$
- 2.9 $u = 50 \cos(100 \cdot t) V$
- 2.14 $u = 50 \cdot t V$
- 2.15 $10 \sin(100t) + 10 \cos(100t)$
- 2.16 $10 \sin(100t) - 10 \cos(100t)$
 + konstante
- 2.17 $10/377 H$
- 2.18 $10\sqrt{2} \sin(377t) A$; 60 Hz;
 $2000 \sin^2(377t) W$; 120 Hz.
- 2.19 a. $5 \cos(100 \pi t)$, $12 \sin(100 \pi t)$
 b. 13 A
 c. 13 V
 e. $1300 \pi V$
- 3.1 15 W
 $15 \sin^2(\omega t) W$ 7,5 W
 $7,5 \sin(2\omega t) W$ 0 W
 $-7,5 \sin(2\omega t) W$ 0 W
 $7,5 \cos(\varphi)$ W
- 3.2 R, L, C.
- 3.3 10 T J; 10 V
- 3.4 60 T J; 2 A
- 3.5 2 A
- 3.6 $\frac{1}{2} \cdot A \cdot \sqrt{2}$ $\frac{1}{3} \cdot A \cdot \sqrt{3}$
- 4.16 a. e^{j4t}
 b. $3e^{j4t}$
 c. $3e^{j(4t + \pi/4)}$
 d. $3e^{j(4t - \pi/2)}$
 e. $e^{(-1+4j)t}$
 f. $3e^{(-1+4j)t}$
 g. $3e^{(-1+4j)t - j\pi/2}$
 h. $3e^{j(0)t}$
- 4.17 $A^* + B^*$, A, AB^* , $\frac{A^*}{B^*}$
- 4.18 juist: b en c
 onjuist a en d.
- 4.19 juist a, c, d en e
 onjuist b.

$$5.3 \quad L = R_1 R_4 C \text{ en } R_1 R_4 = R_2 R_3$$

$$5.5 \quad \text{a. } \frac{1}{5}(3-j) \quad \text{b. } \frac{1}{5}(4-3j) \quad \text{c. } Z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j.$$

$$5.6 \quad \text{a. } Z = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\text{b. } \omega = 0 \quad \text{en} \quad \omega = \sqrt{\frac{R^2 C - L}{R^2 C^2 L}}$$

$$\text{c. } 2R \quad \text{en} \quad R + \frac{L}{RC}$$

$$\text{d. } \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$5.8 \quad \text{a. } \frac{I}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \quad \text{b. } \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{en} \quad U_R = \frac{I}{j\omega C}$$

$$5.9 \quad 12 + 16j, \quad 10A, \quad 160V, \quad 600W.$$

$$5.10 \quad \text{a. } Z_{ab} = 2(R + j\omega L) + \frac{3(R + j\omega L)[2(R + j\omega L) + Z]}{5(R + j\omega L) + Z}$$

$$\text{b. } Z = 4(R + j\omega L)$$

$$5.11 \quad \text{a. } 1 + j \quad \text{b. } -\frac{1}{2} \text{ wattreactief}$$

$$6.10 \quad \text{a. } L = 4,8 \text{ mH}, \quad C_1 = 1,6 \mu F, \quad C_2 = 3 \mu F$$

$$\text{b. } \omega_1 = 11420 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 8300 \text{ rad/s}$$

$$7.1 \quad U_T = U_1 + U_2 \quad R_i = R_1 + R_2 \quad I_N = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2}$$

$$7.2 \quad I_N = I_1 + I_2 \quad G_i = G_1 + G_2 \quad U_T = \frac{I_1 + I_2}{G_1 + G_2}$$

$$7.3 \quad U_T = 12 \text{ V} \quad I_N = 1,2 \text{ A} \quad R_i = 10 \Omega$$

$$7.4 \quad U_T = 4 \text{ V} \quad I_N = 3 \text{ A} \quad R_i = 4/3 \Omega$$

$$7.5 \quad 4/5 \text{ V} \quad 11/15 \Omega$$

$$7.6 \quad 6/5 \text{ V} \quad 11/15 \Omega$$

$$7.7 \quad 60 \text{ V} \quad R_i = 130/3 \Omega \text{ en } I_N = 18/13 \text{ A.}$$

$$7.8 \quad 64/19 \text{ V} \quad 14/19 \Omega \text{ en } I_N = 32/7 \text{ A.}$$

$$7.9 \quad 8 \text{ W} \quad 20 \text{ W} \quad 8 \text{ W} \quad 8\frac{8}{9} \text{ W.}$$

De equivalentie geldt alleen uitwendig. Zie bewijs theorema.

$$7.10 \quad U_T = 2 \text{ V} \quad R_i = 1 \, \Omega \quad \begin{matrix} 4/3 \text{ A}, & 1 \text{ A}, & 2/3 \text{ A}, & 2 \text{ A}, & 0 \text{ A}. \\ 8/9 \text{ W}, & 1 \text{ W}, & 8/9 \text{ W}, & 0 \text{ W}, & 0 \text{ W}. \end{matrix}$$

$$7.11 \quad -\frac{1}{3} \text{ A}, \quad \frac{50}{9} \text{ W}$$

$$7.12 \quad 1 \text{ V} \quad 2 \, \Omega \quad 1/2 \text{ A}$$

$$7.13 \quad U_T = \frac{j}{1+j} \quad Z_i = 5 + 5j \quad Z_u = 5 - 5j$$

$$7.14 \quad U_T = \frac{1}{1+j} \quad 5 - 5j \quad 5 + 5j$$

$$7.15 \quad U_T = \frac{10j}{1+2j} \quad Z_i = \frac{10j}{1+2j} \quad Z_u = 4 - 2j \text{ capacitief.}$$

$$7.16 \quad U_T = j \cdot 10^3 \text{ V} \quad Z_i = 50 \, j \quad Z_u = -50j$$

$$7.17 \quad 60(1+j) \text{ V} \quad \frac{123}{25} - \frac{64}{25} j$$

$$7.18 \quad 4(3-4j) \quad 40(3-4j)$$

$$7.19 \quad U_T = \frac{U \cdot R}{2R - \omega^2 LCR + j\omega(L+R^2C)} \quad \text{als } C = \frac{2}{\omega^2 L} \text{ F}$$

$$7.20 \quad u_T = 36 \sin(1000t + \varphi) \text{ V}, \quad \varphi = \arctan(6/17) \quad Z_u = 4(34 + 13j)$$

$$7.21 \quad u_T = 4\sqrt{2} \cos(10t) \text{ V}, \quad R_u = 5 \, \Omega \quad L_u = \frac{1}{2} \text{ H}$$

$$7.22 \quad u_T = -20\sqrt{2} \sin(t) \text{ V}, \quad Z_i = \frac{2}{5}(1+3j) \quad R_u = 2/5 \, \Omega \quad C_u = 5/6 \text{ F}$$

$$7.23 \quad U_T = \frac{3}{2}(3+j), \quad Z_i = \frac{1}{2}(1+j), \quad |I| = 3\sqrt{10} \text{ A}$$

$$7.24 \quad R_u = \frac{139}{25} \, \Omega \quad C_u = \frac{25}{104} \cdot 10^{-4} \text{ F} \quad |I| = \frac{40}{39} \text{ A}$$

$$7.25 \quad \text{a. } \frac{Uj\omega L}{R+j\omega L} - \frac{Uj\omega RC}{1+j\omega RC}, \quad \text{b. } \sqrt{10} \sin(t+\varphi), \quad \varphi = \arctan(-\frac{1}{3})$$

$$\text{c. } 0,7 + 0,1j$$

$$\text{d. } 25/14 \text{ W}$$

$$8.1 \quad \text{a. } 2 \cos(100t), \quad \text{b. } \sin(100t),$$

$$\text{c. } \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi - \arctg \omega L/R)$$

$$\text{d. } |U|/R \sin(\omega t) - |U| \omega L \cdot \cos(\omega t)$$

- 8.2 $\frac{\omega L |U|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + 3/4 \pi - \arctg \omega L/R)$
- 8.3 $40\sqrt{17} \cos(377t - \pi/12 + \arctg -4) = 40\sqrt{17} \sin(377t)$
- 8.4 $600 \sin(2t + \alpha) \quad \alpha = 44^\circ$
- 8.5 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$
- 8.6 $20 \sin(1000t), 20 \text{ H.}$
- 8.7 $5\sqrt{5} \cos(4t + \alpha) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$
- 8.8 $\frac{9}{5} \sin(200t + \alpha) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$
- 8.9 idem $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$
- 8.10 0 volt - parallelresonantie.
- 8.11 $\frac{A\sqrt{10}}{2} \sin(\omega t - \alpha) \quad \operatorname{tg} \alpha = -1/3$
- 8.12 $L = 1/20 \text{ H}, 2\sqrt{2} \sin(1000t + \alpha) \quad \operatorname{tg} \alpha = 5/2$
- 8.13 $\omega^2 = \frac{1}{2LC}, \text{ nee, } \frac{10}{\sqrt{74}} \sin(5000t)$
- 8.14 a. $\frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}$, b. $\omega RC = 1$, d. $\frac{1}{2}\sqrt{2} \sin(t - \frac{\pi}{4})$, e. $-\frac{1}{2} \cos(t)$.
- 8.15 a. $\cos(1000t)$, c. 1 W.
- 9.1 c. $p \cdot 10^5 \text{ rad/s}$
d. $z \cdot 10^5 \text{ rad/s}$
e. $p_1 \cdot 5000 \text{ rad/s}, p_2 \infty, z_1 \cdot 0 \text{ rad/s}, z_2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$
f. polen 0 en $\approx 2,2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$
nulpunten ∞ en $\approx 2,1 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$
j. polen 0 en $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}LC}}$ nulpunten bij $1/\sqrt{LC}$ en bij ∞
- 9.3 nulpunten $z_1 \cdot 1 \quad x \cdot 1/\sqrt{LC}$
 $z_2 \cdot \sqrt{0,27} \quad x \cdot 1/\sqrt{LC}$
 $z_3 \cdot \sqrt{3,37} \quad x \cdot 1/\sqrt{LC}$
polen $p_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad x \cdot 1/\sqrt{LC}$
 $p_2 \cdot \sqrt{2} \quad x \cdot 1/\sqrt{LC}$
 $p_3 \cdot 0$

$$9.4 \quad \begin{array}{l} \text{nulpunten } z_1 \ 10^4/3 \text{ rad/s} \\ \phantom{\text{nulpunten }} z_2 \ \infty \end{array}$$

$$\text{polen} \quad \begin{array}{l} p_1 \ 0 \\ p_2 \ 10^4/2 \text{ rad/s} \end{array}$$

$$9.6 \quad \begin{array}{l} \text{polen } \frac{4}{3} \times 10^4 \text{ rad/s en } \infty \\ \text{nulpunten } 0 \text{ en } \frac{5}{3} \times 10^4 \text{ rad/s} \end{array}$$

$$10.1 \quad 223 \text{ rad/s} = 35 \text{ Hz. als } Qv = \pm 1, \quad 243 \text{ en } 203 \text{ rad/s.} \\ \Delta \omega = 40 \text{ rad/s. } B = 6,4 \text{ Hz.}$$

$$10.2 \quad 2\sqrt{2} \text{ A. } 75 \text{ en } 25 \text{ rad/s.}$$

$$10.3 \quad \text{a. } \frac{U}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \quad \text{b. } \omega^2 = \omega_0^2(1 - 1/2 Q^2) \text{ met } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$10.5 \quad \begin{array}{ll} \omega_0 = 1/\sqrt{LC} & Z = 0 \text{ serieresonantie} \\ \omega_0 = 1/\sqrt{LC} & Z = \infty \text{ parallelresonantie.} \end{array}$$

$$10.7 \quad R^2 C \geq L$$

$$10.8 \quad \text{b. } \frac{j\omega LU_1}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \quad \text{c. } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 1, \quad L = 4 \text{ mH} \quad R \approx 95 \Omega$$

$$11.13 \quad \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$11.14 \quad \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$11.15 \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}$$

$$11.17 \quad \frac{j\omega C_1 R}{1 + j\omega(C_1 + C_2)R}$$

$$11.18 \quad f(x) = \frac{1 + j \cdot 3x}{1 + j \cdot 4x}$$

$$11.19 \quad C = 1/\omega^2 L \text{ en } C = L/R^2, \quad \frac{(1+j)C^t}{0,1 - 0,2j + (3+2j)C^t}; \quad C^t \text{ is } C \text{ in } \mu\text{F}$$

$$11.20 \quad I = 80(j \cdot 25 \cdot 10^{-3} \sqrt{3} + \frac{1}{10 + j \cdot 25 \cdot 10^3 L}) \\ 1^\circ. \frac{10}{25\sqrt{3}} \text{ mH} \quad 2^\circ. \frac{30}{25\sqrt{3}} \text{ mH} \quad (2\sqrt{7} - 4) \text{ A.} \\ 6 \text{ A} \quad 2 \text{ A}$$

$$11.21 \quad C = \frac{2M - L_1 - L_2}{R_1(R + R_2) + \omega^2(M^2 - L_1 L_2)}$$

$$11.24 \quad d. 10 \Omega; 10 H; 0,1 F \quad c. 1 \Omega; 0,1 H; 0,1 F.$$

$$12.1 \quad M = 25 \text{ mH} \quad L = 50 \text{ mH} \quad \text{en} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$12.2 \quad Z_{12} = \frac{\omega^2 M^2 - \omega^2 L_1 L_2 + j\omega L_1 R}{R + j\omega L_2}$$

$$12.3 \quad Z_{12} = \frac{1}{13} \cdot (1 + 21j)$$

$$12.4 \quad j\omega \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \text{ tweede schakeling dito.}$$

$$12.5 \quad a. R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

$$b. R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

$$c. \text{ als b.}$$

$$12.6 \quad \frac{j \cdot 4\omega L}{1 + j\omega L}$$

$$12.7 \quad j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad \text{en} \quad j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

$$12.8 \quad Z_{12} = 1/13 + 8j/13$$

$$12.9 \quad n = 10$$

$$12.10 \quad n = 2$$

$$12.11 \quad n = 5 \quad P = 1/10 \text{ watt.}$$

$$12.12 \quad n = 200 \quad \text{en} \quad C = 250 \text{ pF.}$$

$$12.13 \quad \frac{Z}{(n-1)^2}$$

$$13.1 \quad \frac{A}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi} (\sin x + 1/3 \sin 3x + 1/5 \sin 5x + \dots) \right]$$

$$13.2 \quad \frac{A}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi} (\cos x - 1/3 \cos 3x + 1/5 \cos 5x - \dots) \right]$$

$$13.3 \quad \frac{4A}{\pi} (\sin x + 1/3 \sin 3x + 1/5 \sin 5x + \dots)$$

- 13.4 $\frac{8A}{\pi^2} (\sin\omega_1 t - 1/3^2 \sin 3\omega_1 t + 1/5^2 \sin 5\omega_1 t - \dots)$ met $\omega_1 = 2\pi/T$
- 13.5 $A/4 - 2A/\pi^2 (1/1^2 \cos x + 1/3^2 \cos 3x + 1/5^2 \cos 5x + \dots) +$
 $+ A/\pi (\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + 1/3 \sin 3x - 1/4 \sin 4x \dots)$
- 13.6 $2A/\pi (\frac{1}{2} - \pi/4 \cos x + 1/1 \cdot 3 \cos 2x - 1/3 \cdot 5 \cos 4x + 1/5 \cdot 7 \cos 6x \dots)$
- 13.7 $2A/\pi (1 + 2/1 \cdot 3 \cos 2x - 2/3 \cdot 5 \cos 4x + 2/5 \cdot 7 \cos 6x - \dots)$
- 13.8 $\frac{2A\sqrt{3}}{\pi} [\sin x - 1/5 \sin 5x - 1/7 \sin 7x + 1/11 \sin 11x \dots]$
- 14.1 a. 220 V, 0 A b. 380 V.
- 14.2 b. 14,5 kW
- 14.3 43,5 kW
- 14.4 $|U_1|$; $|U_1| (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot j\sqrt{3})$; $|U_1| (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot j\sqrt{3})$
- $j\frac{1}{3} \sqrt{3} |U_1|$; $\frac{1}{2} |U_1| (1 - \frac{1}{3} j \sqrt{3})$; $\frac{1}{2} |U_1| (-1 - \frac{1}{3} j \sqrt{3})$
- 14.5 58 kW.
- 14.6 0 W.
- 14.7 0 W.
- 14.8 110 A 72,5 kW.
- 14.9 a. $|I_1| = 33 \text{ A}$ $|I_2| = |I_3| = 25 \text{ A}$
b. 18 kW.
- 14.10 0 A
- 14.11 12,7 A
- 14.12 b. 7,22 kW.
- 14.13 b. 28,9 kW.
- 14.14 als $|U_1| = 380 \text{ V}$ $P = 72,6 \text{ kW}$.
- 14.16 $|U_{12}| = 311 \text{ V}$ $P = 9,7 \text{ kW}$.
- 14.17 145 kW
- 14.18 b.v. $-190 + 190j\sqrt{3}$; $+190 + 190j\sqrt{3}$; 380; $\frac{19}{2}\sqrt{3}$; $\frac{19}{4}\sqrt{7}$; $\frac{19}{4}\sqrt{7}$; 9025 W.
- 14.20 25,4 kW.

$$14.21 \text{ a. } \frac{3 \cdot 360j}{(2+j)\sqrt{3}}, \text{ b. } 24\sqrt{3}(3+j), \text{ c. } Z_T = \frac{j}{2+j}, \text{ d. } I_K = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 360$$

$$14.22 \text{ b. } \frac{1}{18} |U_{13}|^2 W$$

$$14.23 \text{ a. } -50 \text{ en } 20 - 20j, \text{ b. } 321, \text{ c. geen invloed. d. } 100 W$$

$$14.24 \text{ B. b. } -55,8 + 45,6j.$$

$$15.1 \text{ a. } \lambda_Z = -\frac{R}{L} \text{ b. } \lambda_Z = -\frac{1}{RC} \text{ c. } \lambda_Z = 0, \lambda_P = -\frac{R}{L} \text{ d. } \lambda_P = -1/RC$$

$$\lambda_P = \infty \quad \lambda_P = 0$$

$$15.2 \quad \lambda_{P1} = -1, \lambda_{P2} = 0 \quad \lambda_{Z1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \quad |Z| = 0,8$$

$$15.3 \quad \lambda_{P1,2} = \pm \frac{1}{2} j\sqrt{2} \quad \lambda_{Z1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} j\sqrt{3} \quad |Z| = 1,2$$

$$15.4 \quad |Z| = 1,17 \quad \arg Z \approx \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$15.6 \quad \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+1)}, \lambda_{P1} = -1, \lambda_{P2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}, \lambda_Z = \infty (3x)$$

$$15.7 \quad \frac{(\lambda^2 LC + 1)(2\lambda^2 LC + 1)}{\lambda C(4\lambda^2 LC + 3)}$$

$$15.9 \quad C = 1 F, L = \frac{1}{3} H \text{ en } R = \frac{1}{4} \Omega$$

$$15.10 \text{ a. } \frac{\lambda^2 - \lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda + 2} \text{ b. } \lambda_{Z1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{7}, \lambda_{P1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{7}.$$

$$\text{c. modulus} = 1 \text{ (constant) c. } 2\pi \text{ rad.}$$

$$15.11 \quad \frac{\lambda M}{(1 + \lambda R_2 C_2 + \lambda^2 L_2 C_2)(1 + \lambda R_1 C_1 + \lambda^2 L_1 C_1) - \lambda^4 C_1 C_2 M}$$

$$15.12 \text{ c. } \frac{1}{R + \lambda L} + \frac{1}{R + \lambda L + \frac{1}{\lambda C}} \quad \text{d. } \lambda_{Z1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j \quad (x10^4)$$

$$\lambda_{P1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{3} \quad (x10^4)$$

$$\lambda_{P3} = -1 \quad (x10^4)$$

$$15.13 \text{ Bb. } \frac{n^2 \lambda}{\lambda^2 + n^2 \lambda + 1}, n = \pm \sqrt{2} \quad \text{c. } \lambda_Z = 0, \lambda_{P1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De polen geven de vrije trillingen v/h netwerk d. $\omega = 1 \text{ rad/s}$

$$15.14 \quad a. \frac{6\lambda - 2}{6\lambda + 1} \quad d. B = \frac{1}{6}\sqrt{2} \text{ rad/s of } 0,0375 \text{ Hz}$$

$$15.15 \quad H(\lambda) = \frac{n(\lambda + 1)}{(n-1)^2 \lambda^2 + \{(n-1)^2 + 1\} \lambda + 1}$$

$$16.1 \quad i = -\frac{U}{R} e^{-t/RC}, u_C = U e^{-t/RC}, i = \frac{U}{R} e^{-t/RC} \quad \text{en} \\ u_C = U \{1 - e^{-t/RC}\}.$$

$$16.2 \quad i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}, u_1 = -U e^{-\frac{R}{L}t}, i = \frac{U}{R} \{1 - e^{-\frac{R}{L}t}\} \quad \text{en } u_L = U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

$$16.3 \quad i = \frac{3}{e}.$$

$$16.4 \quad u_S = 6 + 12e^{-t/2}, u_S(0^+) = 18 \text{ V}.$$

$$16.5 \quad i = \frac{U}{R_1} \cdot e^{-(R_1+R_2)t/L}.$$

$$16.6 \quad q(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad \text{en } i(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-t}.$$

$$16.7 \quad q(t) = 2(1+2t)e^{-2t} \quad \text{en } i(t) = -8te^{-2t}.$$

$$16.8 \quad q(t) = e^{-t} \{10 \cos(10t) + \sin(10t)\} \quad \text{en } i(t) = -101e^{-t} \sin(10t).$$

$$16.9 \quad q(t) = e^{-2t} - 2e^{-t} + 1 \quad \text{en } i = 2e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

$$16.10 \quad i_2 = 30 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-t}, u_1 = 20e^{-t} \quad \text{en } u_2 = 30 - 10e^{-t}.$$

$$16.11 \quad a. i_{R1} = \frac{U}{2R} \{2 - e^{-Rt/L}\}, i_L = \frac{U}{R} \{1 - e^{-Rt/2L}\}$$

$$b. i_L = \frac{U}{R} \{1 - e^{-Rt1/2L}\} e^{-Rt/2L}.$$

$$d. \frac{1}{2}L \cdot \frac{U^2}{R^2} \cdot \{1 - e^{-Rt1/2L}\}^2, e. \text{ idem als d.}$$

$$16.12 \quad 10 - \frac{20}{3} \{e^{-2t} - e^{-8t}\}.$$

$$16.13 \quad i_2 = -2 - e^{-10^4 t} + 3e^{-10^4 t/3}, \text{ raaklijn horizontaal.}$$

$$16.14 \text{ a. } i_L = \cos\{1000t - \arctan(\frac{4}{3})\} - \frac{3}{5} e^{-750t}$$

$$\text{b. } +5 \text{ V,}$$

$$\text{c. } -6 \text{ V.}$$

$$16.15 \text{ } u_C = 20 \text{ V, } i_1(t_1) = 2 \text{ mA}$$

$$i_2(t) = \frac{1}{4} \{1 - 3e^{-(t-t_1)}\} \text{ mA, } i_2(t_2) = 0 \text{ als } t_2 = \ln(6).$$

$$16.16 \text{ } 40\{e^{-20t} - e^{-100t}\}.$$

$$16.17 \text{ a. } 3 \text{ V en } 3 \text{ A, b. } 3 \text{ V en } 3 \text{ A (continuïteit)}$$

$$\text{c. } \lambda^2 LC + \lambda RC + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 3j.$$

$$\text{d. } u_1(t) = 5 - \frac{2}{3} e^{-t} \{3 \cos(3t) - 4 \sin(3t)\}.$$

$$16.18 \text{ a. } u_{ab} = 20 \text{ V}$$

$$\text{b. } i_S(0^+) = 2 \text{ A.}$$

$$16.19 \text{ a. } i_C = \frac{U_0}{2R} \text{ en } i_L = 0 \text{ op } t = 0^+$$

$$\text{b. } u_C = 0 \text{ en } u_L = \frac{U_0}{2} \text{ op } t = 0^+$$

$$\text{c. } i_L(t) = \frac{U_0}{2R} \{1 - e^{-\frac{R}{L}t}\}, \quad i_C(t) = \frac{U_0}{2R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\text{d. } i = \frac{U_0}{2R} = \text{constant.}$$

$$16.20 \text{ a. } \frac{s+2}{s^2+4}, \text{ b. } \frac{s^2}{(s^2+4)(s+2)}, \text{ c. } \frac{1}{2} [\cos(2t) - \sin(2t) + e^{-2t}]$$

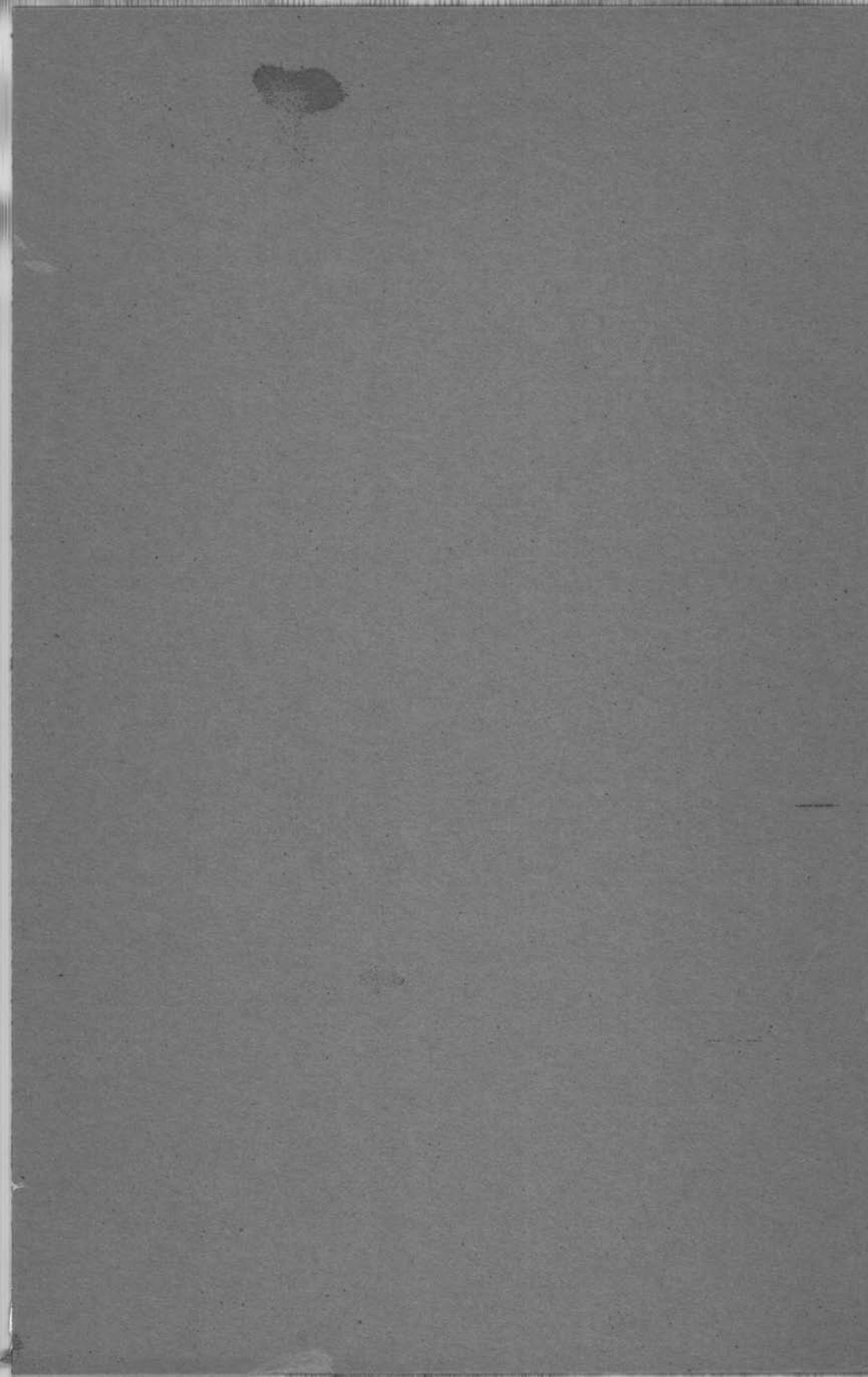
$$16.21 \text{ a. } \lambda^2 + n^2 \lambda + n^2 = 0$$

$$\text{b. } n = \pm 2$$

$$\text{c. } i(t) = 4t e^{-2t} \quad (t > 0)$$

$$\text{d. } i(0^-) = 0, i(0) = \infty, i(0^+) = 0, i(t) = 4t e^{-2t} \quad (t > 0)$$





3
3004
9680