STROOMBEELD EN VERHANGEN BIJ GRONDWATERSTRO...

DOOR HALFONEINDIG MASSIEF.

C 71.032

technische adviescommissie voor de waterkeringen

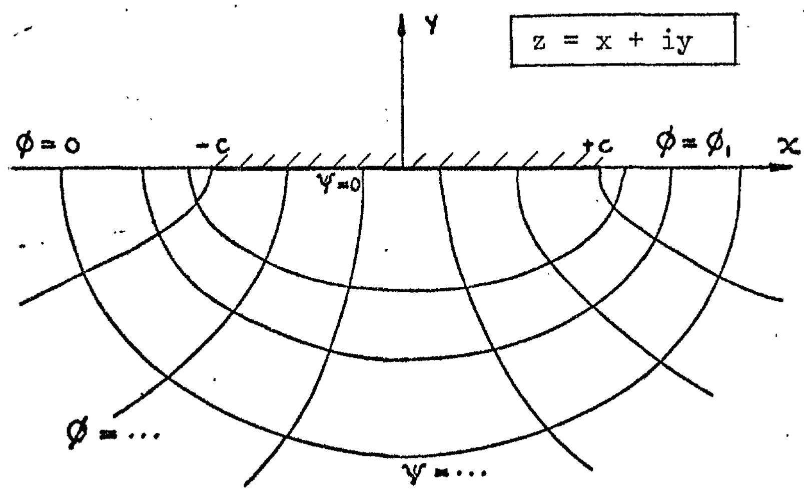
Stroombeeld en verhangen bij grondwaterstroming door halfoneindig massief

Nr. 71.032

CENTRUM VOOR ONDERZOEK
WATERKERINGEN

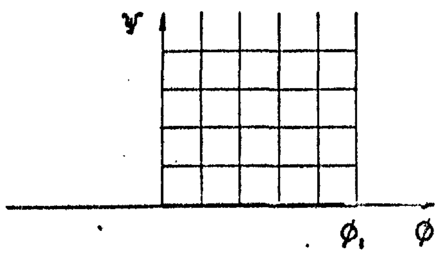
Stroombeeld en verhangen bij grondwaterstroming door halfoneindig massief

De waterkering zelf is ondoorlatend en heeft een breedte 2 c. De bovengrens van het doorlatende massief is een rechte lijn door de basis van de waterkering. Aan de ene zijde ($x < -c$) is de potentiaal $\phi = 0$, aan de andere zijde van de waterkering $\phi = \phi_1$ ($x > +c$)



$$\boxed{z = x + iy}$$

Dit moet uiteindelijk worden afgebeeld als:

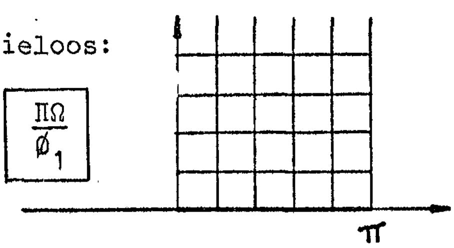


$$\boxed{\Omega = \phi + i\psi}$$

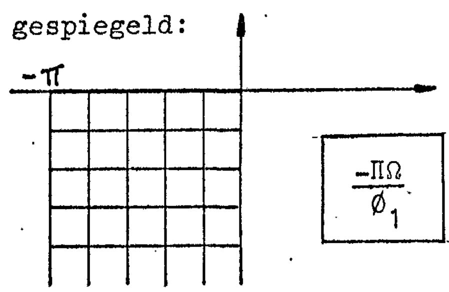
(potentiaallijnen en stroomlijnen recht)

dimensieloos:

$$\boxed{\frac{\Pi\Omega}{\phi_1}}$$

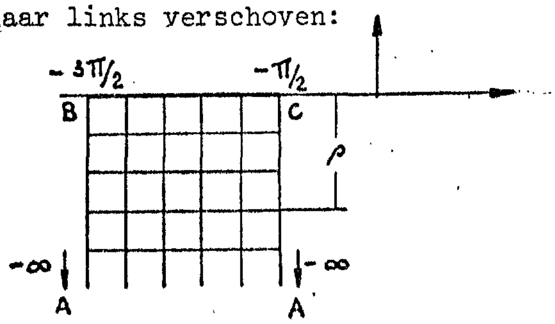


gespiegeld:



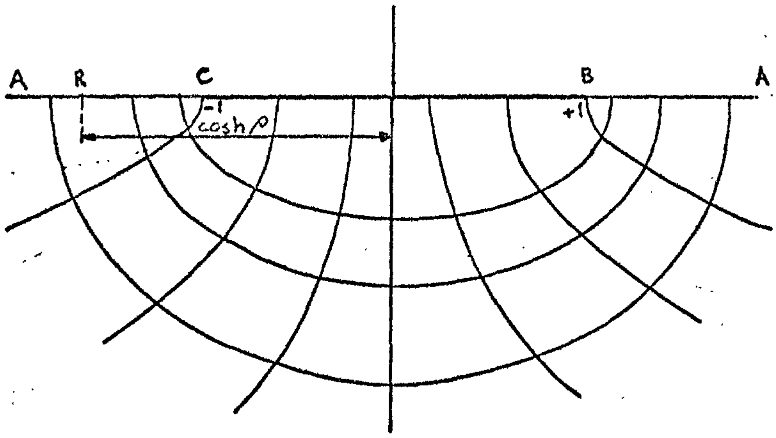
$$\boxed{\frac{-\Pi\Omega}{\phi_1}}$$

naar links verschoven:



$$\boxed{\Sigma = \frac{-\Pi\Omega}{\phi_1} - \frac{\Pi}{2}}$$

Strip afbeelden op halfoneindig vlak:



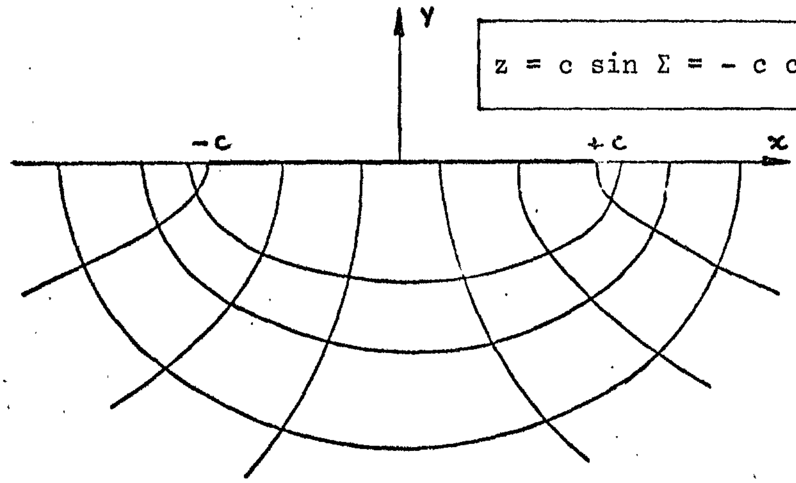
$$\sin \Sigma = -\sin\left(\frac{\Pi\Omega}{\phi_1} + \frac{\Pi}{2}\right) \qquad B \text{———} C \qquad \Sigma = \text{reeël} \rightarrow \sin \Sigma \text{ ook reeël}$$

$$= -\cos\left(\frac{\Pi\Omega}{\phi_1}\right) \qquad \text{punt R:} \qquad \Sigma = -\frac{\Pi}{2} - \rho i$$

$$-\sin\left(\frac{\Pi}{2} + \rho i\right) = -\cos\rho i = -\cosh\rho$$

Vermenigvuldig met c:

$$\boxed{z = c \sin \Sigma = -c \cos\left(\frac{\Pi\Omega}{\phi_1}\right)} \qquad (1)$$



Dit is de afbeelding waarnaar werd gezocht.

$$z = x + i\,y = -\,c \cos\left(\frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1} + i\,\frac{\Pi \psi}{\emptyset_1}\right)$$

$$= -\,c \left\{ \cos \frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1} \cosh \frac{\Pi \psi}{\emptyset_1} - i \sin \frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1} \sinh \frac{\Pi \psi}{\emptyset_1} \right\}$$

splitsen in reeël en imaginair deel:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\,c \cos \frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1} \cosh \frac{\Pi \psi}{\emptyset_1} \\ y &= +\,c \sin \frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1} \sinh \frac{\Pi \psi}{\emptyset_1} \end{aligned}} \qquad (2)$$

door $\emptyset$ of ψ te elimineren vinden we uit (2) vergelijkingen voor stroom- of potentiaallijnen:

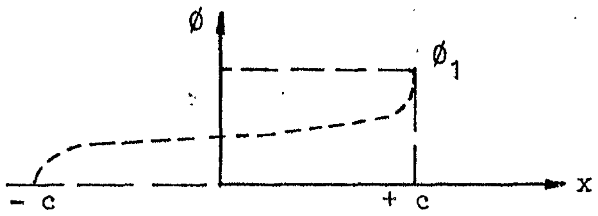
$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \left(\frac{\Pi \psi}{\emptyset_1}\right)} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \left(\frac{\Pi \psi}{\emptyset_1}\right)} = 1} \qquad (3)$$

voor bepaalde ψ is dit een ellips

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \left(\frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1}\right)} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \left(\frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1}\right)} = 1} \qquad (4)$$

voor bepaalde $\emptyset$ is dit een hyperbool

$$\text{randen: } \psi = 0 \text{ volgens } (2) \begin{cases} \boxed{x = -\,c \cos \frac{\Pi \emptyset}{\emptyset_1}} \longrightarrow \begin{cases} \emptyset = 0 \rightarrow x = -\,c \\ \emptyset = \emptyset_1 \rightarrow x = +\,c \end{cases} \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0 \\ \phi = \phi_1\end{array}\right\} \text{ volgens (2):} \quad \begin{array}{l} x = \pm c \cosh \dfrac{\Pi\psi}{\phi_1} \rightarrow \psi = \dfrac{\phi_1}{\Pi} \cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{c}\right) \\ y = 0 \end{array} \qquad (5)$$

symmetrie-as $x = 0$: $\quad \cosh \dfrac{\Pi\psi}{\phi_1} \neq 0$, dus $\cos \dfrac{\Pi\phi}{\phi_1} = 0$

$$\rightarrow \frac{\Pi\phi}{\phi_1} = \frac{\Pi}{2} \rightarrow \phi = \frac{\phi_1}{2}$$

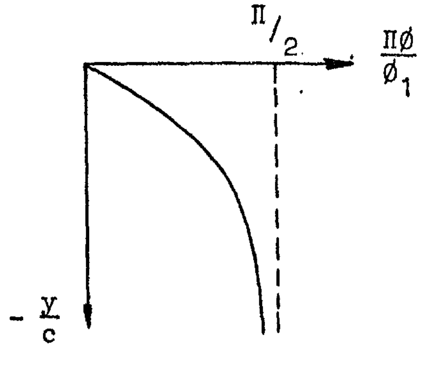
loodrecht onder de teen:

$$x = -c \rightarrow \text{formule (4):} \quad \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)} = 1$$

$$\frac{y^2}{c^2 \sin^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)} - 1 = \frac{\sin^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)}{\cos^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)}$$

$$y = -c \, \frac{\sin^2\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)}{\cos\left(\frac{\Pi\phi}{\phi_1}\right)} \qquad (6)$$

$$0 < \frac{\Pi\phi}{\phi_1} < \frac{\Pi}{2}$$



De verhangen in x- en y-richting zijn:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ I_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = +\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

Deze kunnen ook worden samengenomen in een complexe functie:

$$\begin{aligned} w &= I_x - i\, I_y \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ &\qquad\qquad = -\frac{d\Omega}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\rightarrow \quad w = -\frac{d\Omega}{dz}$$

Het verband tussen Ω en z was:

$$(1) \quad z = -c \cos\left(\frac{\Pi\Omega}{\phi_1}\right) \qquad \text{dus:}$$

$$\frac{dz}{d\Omega} = +\frac{\Pi c}{\phi_1}\sin\left(\frac{\Pi\Omega}{\phi_1}\right)$$

$$\rightarrow w = \frac{-\phi_1}{\Pi c \sin\left(\frac{\Pi\Omega}{\phi_1}\right)} \qquad (7)$$

Langs de rand $\emptyset = 0$ $(y = 0;\ x \leqslant -c)$ geldt:

$$\sin\left(\frac{\Pi\Omega}{\emptyset_1}\right) = \sin\left(\frac{i\psi\Pi}{\emptyset_1}\right) = i\ \sinh\left(\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}\right)$$

dus door in te vullen in (7):

$$w = I_x - iI_y = -\frac{\emptyset_1}{\Pi c.i\ \sinh\left(\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}\right)}$$

$$= \frac{i\emptyset_1}{\Pi c.\ \sinh\left(\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}\right)}$$

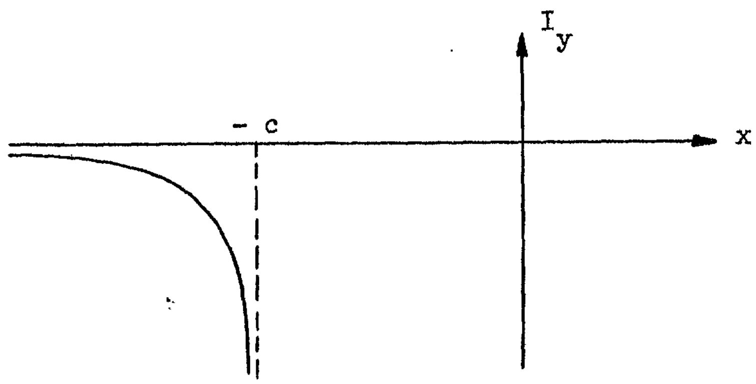
$$\rightarrow\ I_y = \frac{-\emptyset_1}{\Pi c\ \sinh\left(\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}\right)}$$

ψ hing langs deze rand als volgt van x af:

$$(5) \qquad x = -c \cosh\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}$$

$$\sinh^2\left(\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}\right) = \cosh^2\left(\frac{\Pi\psi}{\emptyset_1}\right) - 1 = \frac{x^2}{c^2} - 1 = \frac{x^2 - c^2}{c^2}$$

$$\text{dus}\ \boxed{I_y = \frac{-\emptyset_1}{\Pi c\sqrt{\frac{x^2 - c^2}{c^2}}} = -\frac{\emptyset_1}{\Pi c}\sqrt{\frac{c^2}{x^2 - c^2}}} \qquad (8)$$



De Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen werd door de Minister van Verkeer en Waterstaat ingesteld.
De commissie adviseert de minister omtrent alle technisch-wetenschappelijke aspecten die van belang kunnen zijn voor een doelmatige constructie en het onderhoud van waterkeringen dan wel voor de veiligheid van door waterkeringen beschermde gebieden.

ontwerp: studio 67 rijkswaterstaat

206686F