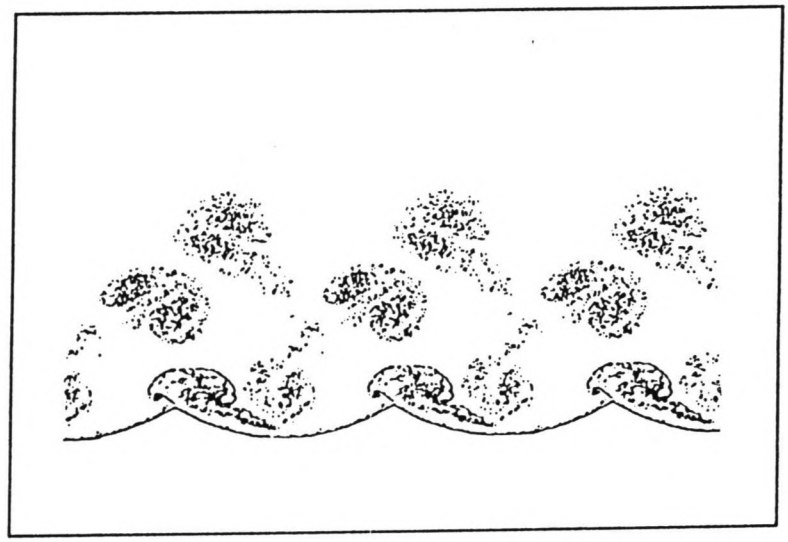
3117

NUMERIEKE SIMULATIE VAN WERVELAFSCHUDDING BIJ BODEMRIBBELS MET DE CLOUD-IN-CELL METHODE.



Technische Universiteit Delft

Vakgroep Waterbouwkunde

Sectie Vloeistofmechanica

R.C. Ris

Augustus 1992

TU Delft

Faculteit der Civiele Techniek

Technische Universiteit Delft

Uitgeleend aan:

Naam: Datum: Tel. no:

R.C. Ris

5.12

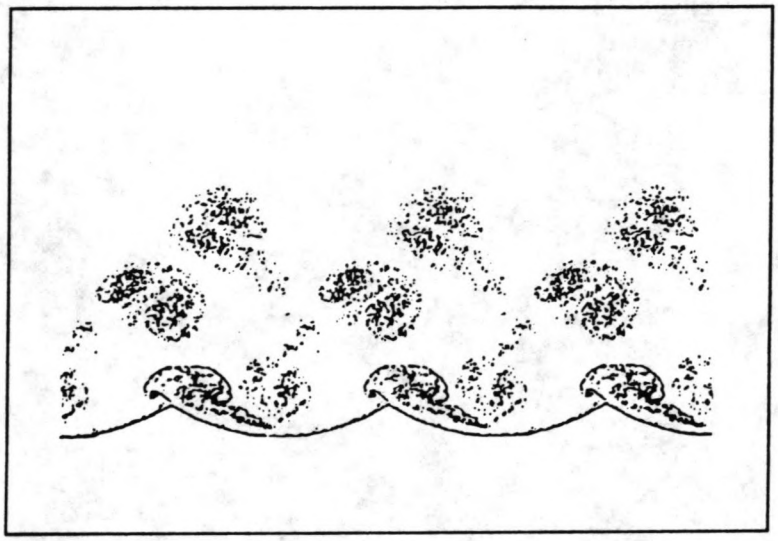
kamer 2.75

Numerieke simulatie van wervel-afschudding bij bodemribbels met de Cloud-in-cell methode.

Afstudeerrapport TU/e
aug '92

S.12
Sectie Vloeistofm.
kamer 2.75.

NUMERIEKE SIMULATIE VAN WERVELAFSCHUDDING BIJ BODEMRIBBELS MET DE CLOUD-IN-CELL METHODE.



Technische Universiteit Delft
Vakgroep Waterbouwkunde
Sectie Vloeistofmechanica

R.C. Ris

Augustus 1992

Numerieke simulatie van wervelafschudding bij bodemribbels met de Cloud-In-Cell methode.

Afstudeercommissie:

- Prof. dr. ir. J.A. Battjes
- Prof. dr. ir. G.S. Stelling
- Dr. ir. N. Booij

door:

- R.C. Ris

voor Eefje

Voorwoord

Dit rapport bevat het verslag van het afstudeeronderzoek naar de wervelbeweging boven bodemribbels. Het onderzoek is uitgevoerd aan de Technische Universiteit te Delft, bij de vakgroep waterbouwkunde, sectie vloeistofmechanica, van de faculteit der Civiele Techniek. Het onderzoek vond plaats onder begeleiding van prof. dr. ir. J.A. Battjes, prof. dr. ir. G.S. Stelling en dr. ir. N. Booij, die ik wil bedanken voor de adviezen die ze daarbij gegeven hebben.
Het programmeerwerk en de berekeningen zijn uitgevoerd op een HP-werkstation waarbij de nodige hulp van Daan Dunsbergen en Simon de Boer mij veel tijd heeft bespaard. Verder wil ik in het bijzonder mijn ouders bedanken die altijd achter mij hebben gestaan en mij al die jaren gesteund hebben.

Roeland Ris
Augustus 1992.

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord I

Inhoudsopgave II

Samenvatting III

1. **INLEIDING** 1

1.1 **Golf- en wervelbewegingen en sedimenttransport** 2

1.2 **Probleemstelling** 3

1.3 **Doelstelling** 4

1.4 **Aanpak** 4

2. **BEDDINGVORMEN EN BODEMRIBBELS** 6

2.1. **Bodemribbels onder golven** 6

2.1.1 Wiskundig model voor bodemribbels 8

2.2 **Ruwheid van de bodem** 10

2.3 **Beschrijving stroombeeld boven bodemribbels** 10

3. **BASISVERGELIJKINGEN VOOR DE WATERBEWEGING** 13

3.1 **Impulsvergelijking en continuïteitsvergelijking** 13

3.2 **Golfbeweging** 15

3.3. **Stroming over ribbels** 18

3.3.1 Rekendimensie en balansgebied 18

3.3.2 Stromingscondities bij de bodem 23

3.4. **Werveltheorie** 25

3.4.1 Enige begrippen over wervels 30

3.4.2 Karakteristieken van een wervel 32

3.4.3 Stroomfunctie en Poissonvergelijking 34

3.4.4 Snelheidsveld uit gegeven wervelsterkteveld 35

3.4.5 Bewegingsvergelijking voor wervelsterkte 37

3.4.5.1 Dimensieloze bewegingsvergelijking 39

4. NUMERIEKE OPLOSMETHODE VOOR POISSONVERGELIJKING EN BEWEGINGSVERGELIJKING VOOR DE WERVELSTERKTE 42

4.1. **Operator Splitting** 45

4.1.1 Convectie vergelijking 46

4.1.2 Diffusievergelijking 47

4.1.3 Nauwkeurigheid en convergentie 49

4.2. **Discretisatie wervelsterkteveld door puntwervels** 50

4.2.1 De Random Walk 51

4.2.2 Introductie circulatie in visceuze stroming 54

4.3 **Lagrangiaanse methode: de Vortex methode** 59

4.4. **Euleriaanse/Lagrangiaanse methode: de Vortex In Cell methode** 65

4.4.1 De Cloud In Cell methode 67

5. NUMERIEKE MODELLERING MET DE CLOUD IN CELL METHODE 71

5.1 **Balansgebied en celgrootte** 72

5.2 **Structuurschema en beschrijving subroutines** 73

6. RESULTATEN VAN DE SIMULATIES 86

6.1 **Testcase: horizontale plaat** 86

6.2. **Wervelafschudding bij bodemribbels** 88

6.2.1 Beschijving wervelstroming boven de bodemribbels 91

6.2.2 Verschillen tussen de uitgevoerde simulaties 94

6.2.3 Verificatie van het rekenmodel VORTEX 97

6.3 **Nauwkeurigheid van de simulaties** 99

7. CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN 101

7.1 **Conclusies** 101

7.2 **Aanbevelingen** 103

Bijlagen

A Literatuur

B Symbolenlijst

C Testcase : simulatie van wervelstructuur bij horizontale plaat

D Niet-visceuze stroming: $\Delta x = \Delta y = 2$ mm, ALTB* = 1 mm

E Visceuze stroming : $\Delta x = \Delta y = 2$ mm, ALTB* = 1 mm

F Niet-visceuze stroming: $\Delta x = \Delta y = 3$ mm, ALTB* = 1.5 mm

G Visceuze stroming : $\Delta x = \Delta y = 3$ mm, ALTB* = 1.5 mm

H Niet-visceuze stroming: $\Delta x = \Delta y = 1.5$ mm, ALTB* = 0.5 mm

I Niet-visceuze stroming: $\Delta x = \Delta y = 1.5$ mm, ALTB* = 1 mm

J Niet-visceuze stroming: resultaten simulatie van Longuet-Higgins (1981)

K Listing van het rekenprogramma VORTEX

L Listing van het plotprogramma VORTEX.PLT

* ALTB = **A**fstand **L**oslaatpunt tot **T**op van de **B**odemribbel

Samenvatting

In het kader van onderzoek naar het mechanisme van het opwoelen van sediment onder golven wordt in dit onderzoek een eerste aanzet gegeven voor een beschrijving van de waterbeweging ter plaatse van een bodemribbel met een deeltjesmodel. Het rapport bevat een overzicht van de theorie die de waterbeweging beschrijft, de Vortex methoden en in het kort wordt ingegaan op de vorm en de afmetingen van een bodemribbel. Enkele trefwoorden zijn: de Poisson-vergelijking, stroomsnelheid, deeltjessnelheid, wervelsterkte, circulatie, puntwervels, Operator Splitting, Random Walk en de Cloud In Cell methode.

Om inzicht te krijgen in het mechanisme van de stroming wordt de waterbeweging numeriek gesimuleerd met deeltjes met de Cloud In Cell methode. Met het ontwikkelde numerieke rekenprogramma VORTEX, geschreven in FORTRAN, kunnen op een eenvoudige wijze verschillende situaties worden doorgerekend door de invoerfile VORTEX.INV te wijzigen.
Aan een deeltje wordt in dit onderzoek circulatie, die ontstaat door het niet rotatievrij zijn van het snelheidsveld bij de top van de vormvaste bodemribbel, toegekend. Een grafische uitvoer met het programma VORTEX.PLT geeft de kenmerkende wervelstructuren gevormd door de werveldeeltjes te zien, die ontstaan door de overtrekkende stroom over de bodemribbel.

De numerieke uitvoer van het rekenprogramma is tot op heden enkel getest door de ontwikkeling en de grootte van de wervelstructuren te vergelijken met uitvoer van soortgelijke situaties ontleend aan de literatuur. De resultaten van de uitgevoerde simulaties komen goed overeen met de resultaten die zijn beschreven in deze literatuur. De grafische uitvoer geeft duidelijk inzicht in de ontwikkeling van de wervelstructuren.
Uitgaande van de ervaring die tijdens dit onderzoek is opgedaan, is het goed mogelijk om het model uit te breiden met sediment-transportformules zodat meer onderzoek kan worden gedaan naar de vorming van bodemribbels en het afschudden van wervels met hoge sedimentconcentraties.

1. INLEIDING

1.1 Golf- en wervelbewegingen en sedimenttransport

Bij een bepaalde invalshoek van de golven met de kust wordt een langsstroom evenwijdig aan de kust opgewekt. Deze langsstroom heeft de capaciteit om sediment te transporteren. Het sedimenttransport vindt plaats door enerzijds bodemtransport (rollend transport) en anderzijds zwevend transport (in suspensie zijnde deeltjes). De invloed van de waterbeweging door de golven op zandige bodems heeft tot gevolg dat deeltjes in suspensie worden gebracht door opwoeling. In combinatie met een langsstroom kan zo sediment getransporteerd worden langs de kust. Het opwoelen van sediment door de waterbeweging van de golven vindt voornamelijk plaats in de brandingszone oftewel daar waar de korte golven de bodem voelen en breken. De mate waarin sediment in suspensie wordt gebracht is afhankelijk van vele parameters zoals diepte, golfperiode, golflengte, schuifspannings-snelheid, beddingvorm en korreldiameter van het sediment. In het kader van de beschrijving van het sedimenttransport langs de kust is het zinvol om onderzoek te doen naar het mechanisme van het opwoelen van sediment onder invloed van golven.

Om dit mechanisme van opwoeling van sediment te onderzoeken is het van belang de waterbeweging ter plaatse van de bodem goed te beschrijven. Door de oscillerende beweging van het water over de bodem ontstaan bodemribbels. In deze ribbels worden wervels aangedreven die uit deze ribbels kunnen lopen. Deze ronddraaiende vloeistofpakketten hebben de eigenschap dat ze sediment mee kunnen nemen naar hoger gelegen lagen. Op dat moment kan het sediment dat in suspensie is door een langsstroom worden meegenomen. Dit opwoelen van sediment is van invloed op het totale sedimenttransport.

Een andere bijzondere eigenschap van wervels is dat bepaalde wervelpatronen zoals bijvoorbeeld dipolen en tripolen zich in een vloeistof kunnen verplaatsen en dat in deze wervelpatronen hogere snelheden aanwezig zijn dan in de omgeving. Dit heeft tot gevolg dat wanneer zo'n wervelpatroon op een wand loopt de schuifspanningssnelheid groter is dan die van de buitenstroming. Daardoor kunnen wervelbewegingen tot gevolg hebben dat meer sediment in suspensie wordt gebracht dan op grond van de buitenstroming zou worden verwacht.

In dit onderzoek wordt enkel een aanzet gegeven tot een beschrijving van de waterbeweging bij de bodem. De vergelijkingen die de waterbeweging beschrijven zijn uit de literatuur verkregen. Het mechanisme van de wervelafschudding wordt bepaald door de eigenschappen van de hoofdstroom, de viscositeit, turbulentie en de vorm van de bodemribbels. De hoofdstroom ter plaatse van de bodem wordt bepaald door de golven en is niet stationair. De periodieke hoofdstroom trekt over de bodemribbels en ondergaat significante veranderingen ter plaatse van de bodemribbels. Ter plaatse van de scherpe top van de bodemribbel worden door grote snelheidsgradiënten wervels gegenereerd, die periodiek loslaten aan de top. Verplaatsing en verspreiding van deze wervels in de bovenstroom worden bepaald door convectie en diffusie.

Analytische oplossingen van de vergelijkingen die de wervelbeweging beschrijven, zijn voor complexe geometrieën zoals een bodemribbel, niet zondermeer mogelijk. Daarom worden de vergelijkingen gediscretiseerd in tijd en ruimte en worden ze met behulp van een computer numeriek opgelost. Voor de beschrijving van de wervelstructuren wordt in dit onderzoek gebruik gemaakt van discrete puntwervels waarmee juist ter plaatse van de bodemribbel informatie wordt verkregen over het stromingspatroon. De beweging van deze discrete puntwervels wordt bepaald met de Cloud In Cell methode. Voor het numeriek oplossen van de gediscretiseerde vergelijkingen is het rekenprogramma VORTEX (bijlage K) ontwikkeld. Bepaald worden de stroomfunctie, het snelheidsveld, circulatie en positie van de discrete puntwervels.

Resultaten worden gegeven door een numerieke uitvoer en een grafische uitvoer op het beeldscherm met het ontwikkelde plotprogramma VORTEX.PLT (bijlage L). Na schematisatie van onder andere de bodemribbel worden de resultaten van de simulaties vergeleken met uit de literatuur bekende resulaten van soortgelijke experimenten en simulaties.

1.2 Probleemstelling

Om het opwoelen van sediment door een oscillerende waterbeweging te bepalen moet het snelheidsveld ter plaatse van de bodem worden bepaald. De meeste numerieke modellen geven resultaten in aangebrachte roosterpunten wat tot gevolg heeft dat op die plaatsen waar veel gebeurt weinig informatie wordt verkregen, tenzij een zeer fijn rooster wordt gebruikt.
Met een Vortex methode is het mogelijk om op die plaats waar men geïnteresseerd is in bijvoorbeeld de snelheden, deze te bepalen zonder een fijn rooster te hebben aangebracht. Met deze numerieke simulatietechniek echter is binnen de vakgroep waterbouwkunde, sectie vloeistofmechanica nog weinig ervaring opgedaan.
De probleemstelling is dan ook als volgt: Is het mogelijk om met een Vortex methode het proces van wervelafschudding bij bodemribbels onder golven te simuleren zodat enerzijds meer inzicht wordt verkregen in het complexe stromingspatroon van wervelstructuren, anderzijds voortgebouwd kan worden op deze methode en sedimenttransport aan het model kan worden gekoppeld ?

1.3 Doelstelling

Het ontwikkelen van een numeriek rekenprogramma dat gebaseerd is op een Vortex methode waarmee de waterbeweging, met name de wervelstructuren, gesimuleerd kan worden opdat inzicht wordt verkregen in het bewegingsmechanisme van deze waterbeweging. Het rekenprogramma moet universeel van opzet zijn zodat meerdere situaties eenvoudig doorgerekend kunnen worden, waarbij tevens aandacht dient te worden besteed aan de nauwkeurigheid van de berekeningen. Uit de resultaten van deze simulaties moeten snelheidsvelden, wervelsterktevelden en bodemschuifspanningen bepaald kunnen worden.

Verificatie van het numerieke rekenmodel geschiedt aan de hand van bestaande meetresultaten ontleend aan de literatuur.

1.4 Aanpak

Hieronder wordt in het kort een overzicht gegeven van de inhoud van de hoofdstukken. In de eerste vier hoofdstukken wordt de theorie behandeld die de waterbeweging ter plaatse van de bodemribbels beschrijft.

In *hoofdstuk 1* wordt een inleiding gegeven in het onderzoek naar de wervelbeweging ter plaatse van de bodem. Probleemstelling en doelstelling worden uiteengezet.

In *hoofdstuk 2* wordt ingegaan op de beddingvormen en de vorm en afmetingen van bodemribbels bij zandige bodems. Een wiskundige beschrijving van een bodemribbel wordt gegeven.

In *hoofdstuk 3* worden de impulsvergelijking en de continuïteitsvergelijking die de waterbeweging beschrijven, gegeven. Uitgaande van deze vergelijkingen worden vervolgens de golfbeweging en de orbitaalbeweging beschreven. De theorie van wervels, de wervelbeweging en enige veel voorkomende begrippen over wervels worden eveneens behandeld.

In *hoofdstuk 4* wordt een aantal numerieke oplosmethoden voor de vergelijkingen beschreven. Tevens wordt besproken op welke wijze het wervelsterkteveld wordt gediscretiseerd en diffusie in het discrete model wordt aangebracht met de Random Walk. Meer specifiek wordt ingegaan op de in dit onderzoek gebruikte oplosmethode: de Cloud In Cell methode.

In *hoofdstuk 5* wordt het in FORTRAN geschreven rekenprogramma VORTEX besproken. De structuur van het rekenprogramma, de ontwikkelde subroutines en de ontwikkelde numerieke uitdrukkingen voor de vergelijkingen worden gegeven, toegespitst op de Cloud In Cell methode.

In *hoofdstuk 6* worden de resultaten van de uitgevoerde simulaties besproken en wordt de wervelstroming boven de bodemribbel beschreven.
Het rekenmodel wordt geverifieerd door een aantal simulaties te vergelijken met een soortgelijke simulatie beschreven in de literatuur. De oorzaken van de verschillen tussen de simulaties, ontstaan door numerieke benaderingen, worden eveneens besproken.

In *hoofdstuk 7* worden conclusies getrokken en aanbevelingen gedaan.

2. BEDDINGVORMEN EN BODEMRIBBELS

Welke beddingvorm aanwezig is bij een zandige kust is afhankelijk van een scala aan parameters waaronder de grootte en richting van de stroming en de golven, de dichtheid, de diameter en de vorm van de korrel.

Een indicatie van de beddingvorm kan worden gevonden met het getal van Froude ($Fr = u/\sqrt{gd}$) en de diameter van de korrels. In dit onderzoek wordt enkel gekeken naar bodemribbels. De afmeting en de vorm van bodemribbels onder invloed van golven zijn globaal bekend (Reineck *et al.* 1973). Hieronder wordt een overzicht gegeven over bodemribbels onder golven. Aan de orde komen de vorm, afmetingen, een wiskundige beschrijving van de geometrie en de ruwheid van de bodemribbel. Tevens wordt in het kort als inleiding globaal de waterbeweging boven de bodemribbel beschreven.

2.1 Bodemribbels onder golven

In de praktijk is de vorm van een bodemribbel aan een dynamisch proces onderhevig. De vorm, positie en de afmetingen variëren continu, afhankelijk van de aanwezige stroming en de golfbeweging. Hoe de bodemribbels door stroming en golven worden gevormd, wordt in dit overzicht achterwege gelaten. Een bodemribbel wordt gekarakteriseerd door een aantal kenmerkende afmetingen. De belangrijkste hiervan zijn de ribbellengte (L_r), ribbelhoogte (H_r) waaruit een zogenaamde ribbelindex en de symmetrie-index (zie Tabel 2.1) zijn te berekenen. De ribbelindex is de verhouding L_r/H_r en de symmetrie-index geeft een indicatie over het verschil van de vorm aan de front- en de lijzijde van een bodemribbel. Bodemribbels onder een golfbeweging zijn symmetrisch of licht asymmetrisch.

De ribbels worden van bovenaf bezien verder ingedeeld in een aantal specifieke vormen, te weten ribbels met respectievelijk een rechte, golvende en discontinue kruin (Reineck *et al.* 1973). De bodemribbels in dit onderzoek zijn vormvast, hebben een rechte kruin en worden in een twee-dimensionale ruimte weergegeven.

Ondanks de dynamische stromingscondities die verantwoordelijk zijn voor het in suspensie brengen van sediment ontstaat een evenwichtstoestand voor de bodemribbel. De bodemribbel is, ondanks zijn dynamische voorkomen, tamelijk vormvast voor wat betreft de afmetingen en de vorm.
Inman (zie Reineck *et al.* 1973) stelde vast dat bodemribbels bij zandige bodems aanwezig zijn wanneer de orbitaalsnelheid bij de bodem groter is dan ongeveer 0.07 m/s. Bij snelheden groter dan ongeveer 0.9 m/s zijn geen ribbels meer aanwezig. Beneden een zekere kritische grens neemt de hoogte van de ribbel toe naarmate de stroomsnelheid toeneemt. Daarboven neemt de hoogte van de ribbel af en de lengte van de ribbel toe. Bij een zelfde korreldiameter zijn de bodemribbels op diep water groter dan op ondiep water. In Tabel 2.1 volgt een overzicht van de mogelijke afmetingen en vormen van ribbels onder golven opdat een indicatie wordt verkregen van de afmetingen en de verhoudingen.

Ribbelvorm:	Afmetingen:	Ribbelindex (L_r/H_r):	Voorkomen:
Symmetrisch	L_r = 0.9 - 200 cm H_r = 0.3 - 22.5 cm	4 - 13 meestal 6 - 7	Recht en Vertakt
Asymmetrisch	L_r = 1.5 - 105 cm H_r = 0.3 - 19.5 cm	5 - 16 meestal 6 - 8	Recht en Vertakt

Tabel 2.1 Karakteristieken van zandribbels onder golven, naar Reineck *et al.* (1973). Hierin is L_r de ribbellengte en H_r de ribbelhoogte.

2.1.1 Wiskundig model voor bodemribbels

In het numerieke rekenmodel VORTEX, dat de wervelbeweging boven de bodemribbels simuleert, moet een geometrie voor een bodemribbel worden ingevoerd. De geometrie van de bodemribbel die in de simulaties wordt gebruikt, komt overeen met de geometrie van een bodemribbel die gebruikt is in soortgelijke simulaties die in de literatuur zijn beschreven (Ikeda *et al.* 1989; Longuet-Higgins 1981). Het numerieke rekenmodel wordt hiermee geverifieerd. De vergelijkingen die de bodemribbel beschrijven, worden hieronder weergegeven.

Bij onderzoek naar de snelheidsverdeling van waterdeeltjes boven een bodemribbel door een monochromatische sinusoïdale lopende golf, is de vorm van een bodemribbel bepaald (Ikeda *et al.* 1989). De bodemribbel uit dit onderzoek wordt beschreven door de volgende vergelijkingen (Ikeda *et al.* 1989; Longuet-Higgins 1981):

$$k_r(y - y_0) = \ln[\sec k_r(x - x_0)] \ , \qquad (2.1)$$

waarbij $k_r = (2\pi/P_r L_r)$ het golfgetal is van de bodemribbels, (x,y) zijn de horizontale en verticale coördinaten. Er moet gelden: $|k_r(x-x_0)| \leq \pi/P_r$ oftewel: $|x-x_0| \leq \frac{1}{2}L_r$. De begincoördinaten (x_0,y_0) worden gegeven door:

$$k_r y_0 = \ln[\cos(\frac{\pi}{P_r})] \quad , \quad k_r x_0 = 2(j - \frac{1}{2})P_r \ . \qquad (2.2)$$

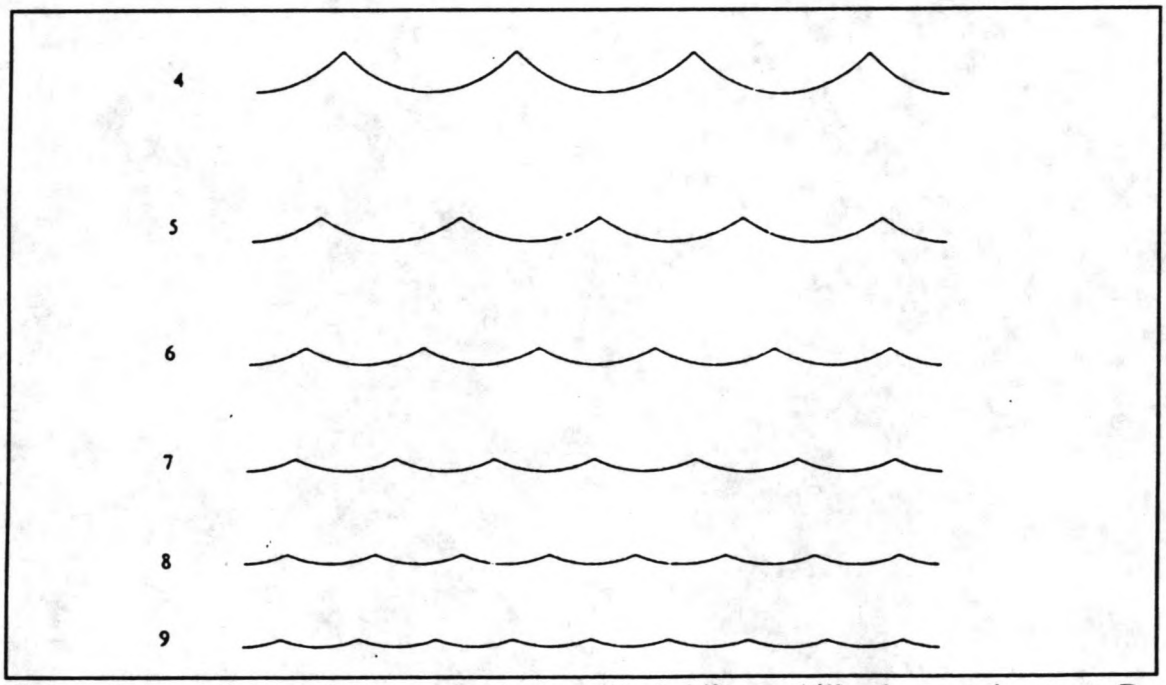
met $j = 1,2,\ldots,P_r$. De waarde van P_r bepaalt de vorm van het polygoon dat gebruikt wordt (zie Ikeda *et al.* 1989; Longuet-Higgins 1981). Het hiermee overeenkomstige ribbelprofiel is voor een aantal waarden van P_r gegeven in Figuur 2.1.

Voor de ribbelindex waarmee de verhouding (H_r/L_r) van de bodemribbel wordt vastgelegd, geldt:

$$\frac{H_r}{L_r} = \frac{\ln[\sec(\frac{\pi}{P_r})]}{(\frac{2\pi}{P_r})} \quad . \tag{2.3}$$

De tophoek (α_t) van de bodemribbel ligt vast via de relatie:

$$\alpha_t = (\pi - \frac{2\pi}{P_r}) \; . \tag{2.4}$$



Figuur 2.1 Geometrievorm van bodemribbel bij verschillende waarden voor P_r gegeven door vergelijking (2.1). Figuur ontleend aan Longuet-Higgins (1981).

Met de vergelijkingen (2.1, 2.2 en 2.3) wordt de geometrie van een bodemribbel volledig vastgelegd door de lengte (L_r) en polygoonwaarde (P_r).In de simulatie worden een polygoonwaarde P_r=5 en een bodemribbellengte L_r=0.126 m aangehouden, omdat deze waarden zijn gebruikt in de simulatie van Longuet-Higgins (1981). Hiermee wordt het numerieke rekenmodel geverifieerd. De tophoek (α_t) van de bodemribbel is bij deze waarden gelijk aan: $(\pi-2\pi/5)=3\pi/5=108°$.

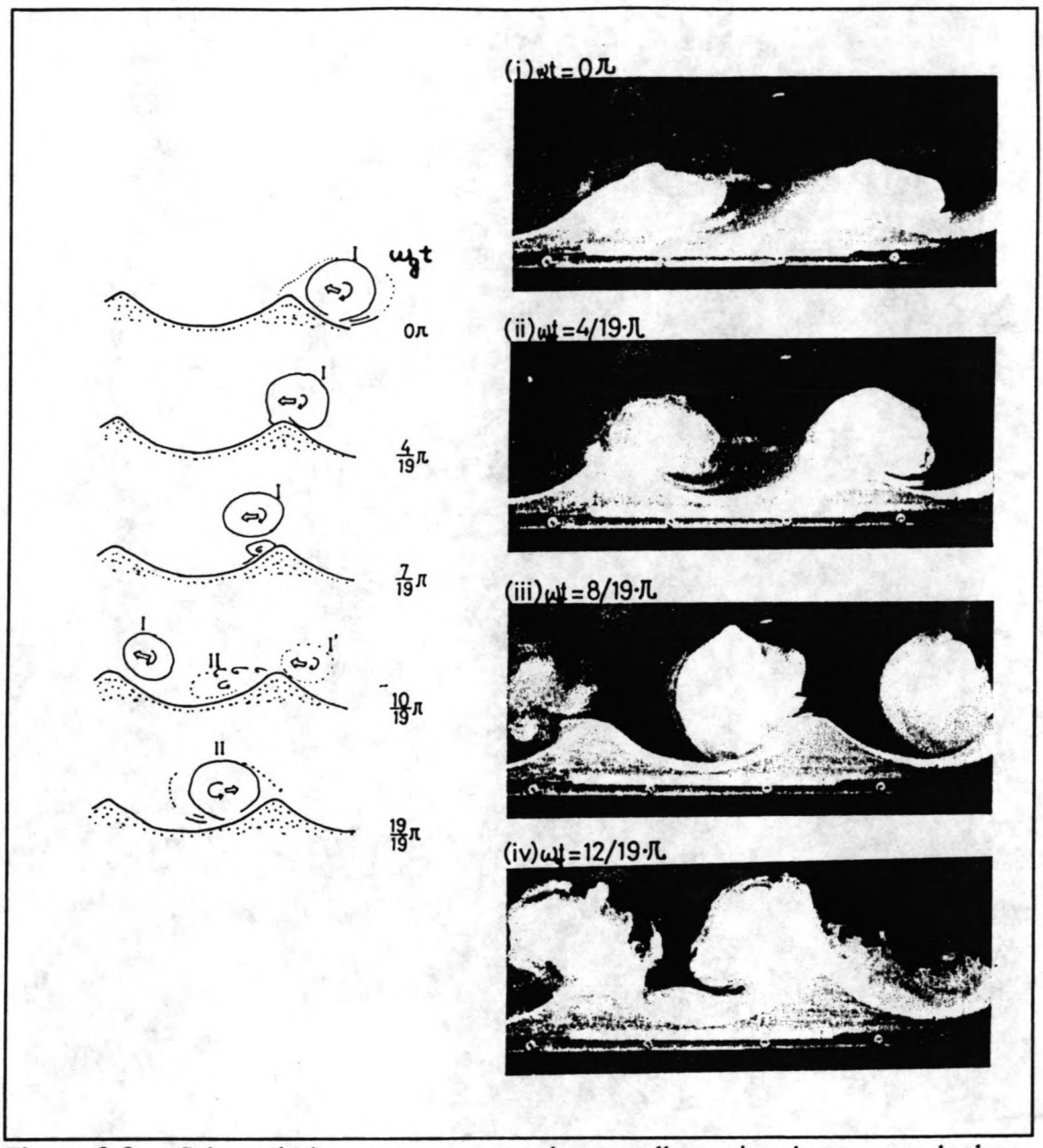
De steilheid van de ribbeltop is lokaal van de orde: $\cot(108°/2)=0.726=O(1)$. Dit impliceert dat de verhouding tussen de snelheden u en v ter plaatse van de ribbeltop lokaal van de orde: $u/v=O(1)$ is. Van deze relatie wordt bij het dimensieloos maken van vergelijkingen gebruik gemaakt (zie paragraaf 3.3.1).

2.2 Ruwheid van de bodem

De bodemruwheid bepaalt onder andere hoe grenslagen zich ontwikkelen in niet-stationaire stromingen en wat de dikten (δ) zijn van deze grenslagen in een oscillerende stroming. Microscopisch bezien wordt de wand van de bodemribbel in dit onderzoek als volkomen glad aangenomen. De stroming wordt echter door de numerieke discretisatie van de bodemribbel wel beïnvloed en als zodanig zal de stroming zich gaan gedragen alsof er een kunstmatige ruwheid aanwezig is. Om dit effect op de stroming zoveel mogelijk te beperken moeten de zijdelengten ($\Delta x, \Delta y$) van een cel in het rekenrooster voldoende klein zijn.
De bodemruwheid voor de stroming over de gehele waterdiepte is in een macroscopische beschouwing ongelijk aan nul. De ruwheid wordt dan bepaald door de afmetingen van de bodemribbels en de korrelgrootte van het sediment.

2.3 Beschrijving stroombeeld boven bodemribbels

In hoofdstuk 6 wordt de wervelstroming boven bodemribbels, verkregen uit de simulaties, uitvoerig besproken. Om een idee te krijgen hoe het mechanisme van de waterbeweging boven een bodemribbel onder de beweging van een golf globaal werkt, wordt het hieronder in het kort beschreven. In Figuur 2.2 worden de resultaten, verkregen uit experimenten die zijn beschreven door Sawamoto (1983), weergegeven van het stroombeeld waarbij sediment in suspensie wordt gebracht.



Figuur 2.2 Schematische weergave van de wervelbeweging boven een bodemribbel en een visualisatie van geordende wervels met sediment (foto's). Figuur ontleend aan Sawamoto (1983).

De oscillerende waterbeweging, die het gevolg is van een golf, over een bodemribbel wordt gekarakteriseerd door de ontwikkeling van geordende wervels aan beide kanten van de top van de ribbel (zie Figuur 2.2). Op rekentijdstip $\omega_g t = 0\pi$ bevindt zich een rechtsomdraaiende wervel boven het dal van de bodemribbel.

Door de interactie met sedimentdeeltjes aan de bodem worden sommige sedimentdeeltjes opgenomen in de wervel. Op $\omega_g t=4/19\pi$ is de stroming van richting veranderd en beweegt de wervel, met daarin sediment, over de top van de ribbel naar links.
Op $\omega_g t=7/19\pi$ laat deze wervel los van de bodemribbel en beweegt zich voort in de vloeistof. De afgeschudde wervel blijft kenmerkend geordend en beweegt met de hoofdstroom mee over de nieuwe wervel die aan de andere zijde van de bodemribbeltop wordt gegenereerd. De grove sedimentdeeltjes die zich in de afgeschudde wervel bevinden bezinken terwijl de fijne sedimentdeeltjes naar hogere vloeistoflagen worden getransporteerd. Na rekentijdstip $\omega_g t=19/19\pi$ herhaalt dit periodieke proces zich aan de andere zijde van de bodemribbel.

De vloeistof in de hierboven beschreven waterbeweging heeft een concentratie sediment ongelijk nul. Dit heeft tot gevolg dat de dichtheid (ρ) van de vloeistof niet meer constant is en de vergelijkingen die de waterbeweging beschrijven zeer complex worden. Aan de vergelijkingen voor de waterbeweging moeten dan de vergelijkingen die het transport van de sedimentdeeltjes beschrijven worden gekoppeld.

Aangezien dit onderzoek een eerste aanzet geeft tot de beschrijving van de waterbeweging met een deeltjesmodel, wordt uitgegaan van een vloeistof met een sedimentconcentratie gelijk nul. De koppeling van het opwoelen van sediment, uitgaande van de waterbeweging, wordt in dit onderzoek niet bekeken.

3. BASISVERGELIJKINGEN VOOR DE WATERBEWEGING

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de basisvergelijkingen, rand- en beginvoorwaarden waarmee de waterbeweging wordt beschreven. Ingegaan wordt op de golfbeweging, stroming ter plaatse van de bodemribbel en de wervelstroming. De nadruk ligt op de werveltheorie en de vergelijkingen die de beweging van wervels in een stromende vloeistof beschrijven. De afweging tussen een drie-dimensionale of twee-dimensionale rekenruimte wordt gemaakt.

3.1 Impulsvergelijking en continuïteitsvergelijking

De elementaire vloeistofbeweging wordt in dit hoofdstuk Euleriaans en in een cartesisch assenstelsel (x,y,z,t) beschreven (zie Figuur 3.1). De soortelijke massa (ρ) alsmede de dynamische viscositeit (η), van de vloeistof wordt constant in de tijd en in de ruimte verondersteld. De vloeistof is homogeen van samenstelling en onsamendrukbaar.

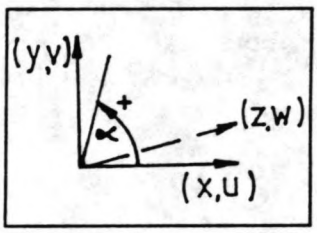


Fig. 3.1. Assenstelsel

De beweging van een vloeistof wordt beschreven met de impulsvergelijking en de continuïteitsvergelijking (Gustafson *et al.* 1991; Peyret *et al.* 1990):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = F_i \quad , \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad . \tag{3.2}$$

Hierin is u_i de snelheidscomponent, P de druk, δ_{ij} het Kroneckersymbool, τ_{ij} de schuifspanning en F_i een bronterm (aandrijvende kracht).

In bovenstaande is de Einstein-sommatieconventie gebruikt, dat wil zeggen als in een term een index herhaald wordt, dan moet over die index gesommeerd worden:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad . \tag{3.3}$$

Het verband tussen de visceuze spanningen en de vervorming van de vloeistof wordt gegeven door de volgende relatie (Booij 1986; Peyret *et al.* 1990; Vreugdenhil 1980):

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad . \tag{3.4}$$

Wanneer bovenstaande relatie wordt ingevuld in de vijfde term in het linkerlid van vergelijking (3.1) en wanneer gebruik wordt gemaakt van de continuïteit dan volgt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad . \tag{3.5}$$

Substitueren van vergelijking (3.5) in vergelijking (3.1) geeft de vergelijking van Navier-Stokes (Gustafson *et al.* 1990; Peyret *et al.* 1990):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g \delta_{i3} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = F_i \quad , \tag{3.6}$$

of in vectornotatie weergegeven:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P + g \delta_{i3} - \nu \nabla^2 \vec{u} = \vec{F} \quad . \tag{3.7}$$

De onbekenden in vergelijking (3.7) zijn de snelheidscomponenten en de druk. Deze kunnen worden bepaald aan de hand van de begin- en randvoorwaarden. Vergelijking (3.2) en de vergelijkingen (3.6) of (3.7) zijn de basisvergelijkingen waarmee de waterbeweging wordt beschreven. In de volgende paragrafen worden deze vergelijkingen gebruikt om andere vergelijkingen op te stellen voor meer specifieke situaties (golfbeweging, werveldynamica).

3.2 Golfbeweging

De lineaire theorie voor lopende golven op ondiep water is gebaseerd op een onsamendrukbare en homogene vloeistof. Wanneer de waterbeweging rotatievrij wordt verondersteld ($\nabla \times \vec{u} = 0$), kan een snelheidspotentiaal (ϕ) worden gedefinieerd zodanig dat hieraan voldaan wordt:

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad . \tag{3.8}$$

Substitutie van bovenstaande vergelijking in vergelijking (3.2) geeft de vergelijking van Laplace ($\nabla^2 \phi = 0$). In een twee-dimensionale ruimte worden de randvoorwaarden voor de Laplace-vergelijking opgelegd aan het wateroppervlak en de bodem. Substitutie van deze relatie voor de snelheidspotentiaal (ϕ) in de Navier-Stokes vergelijking geeft na enige wiskundige bewerkingen de vergelijkingen voor de randvoorwaarden voor de vergelijking van Laplace (Acheson 1990; Lamb 1932). Wanneer de oppervlakte-uitwijking (η) boven het gemiddelde wordt weergegeven door één enkele cosinuscomponent (eerste-orde Stokes golf) volgens:

$$\eta(x,t) = a \cos(\omega_g t - kx) \quad , \tag{3.9}$$

dan is de oplossing voor de snelheidspotentiaal (ϕ) van de Laplace vergelijking voor de aangenomen oppervlakte-uitwijking, met de oorsprong van het assenstelsel in het gemiddelde van de oppervlakte-uitwijking, gelijk aan:

$$\phi(x,y,t) = \frac{\omega_g a}{k} \frac{\cosh k(d+y)}{\sinh kd} \cos(\omega_g t - kx) \quad . \tag{3.10}$$

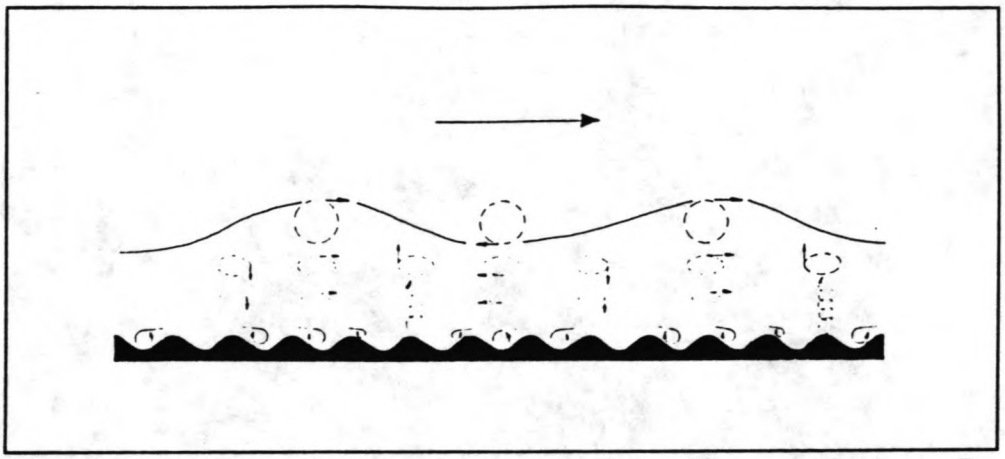
Door deze snelheidspotentiaal vervolgens te differentiëren naar x en y worden respectievelijk de orbitaalsnelheden in deze richtingen gevonden oftewel : $\vec{u} = \nabla \phi$.

De orbitaalsnelheid van een waterdeeltje in horizontale- en verticale richting wordt beschreven door onderstaande vergelijkingen (Acheson 1990; Battjes 1990.a; Lamb 1932):

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \omega_g a \dfrac{\cosh k(d+y)}{\sinh kd} \sin(\omega_g t - kx) \\ v(x,y,t) = \omega_g a \dfrac{\sinh k(d+y)}{\sinh kd} \cos(\omega_g t - kx) \end{cases} . \qquad (3.11)$$

met $k = (2\pi/L)$. De snelheid van een waterdeeltje wordt gekarakteriseerd door de amplitude van de oppervlakte-uitwijking (a), golfhoeksnelheid (ω_g), golfgetal (k) en zijn positie (x,y). De waterdeeltjes beschrijven een ellipsvormige baan in ondiep water en een cirkelvormige baan in diep water. De grootte van de amplitude van de orbitaalbeweging dempt naar de bodem toe uit (zie Figuur 3.2). Ter plaatse van de bodem vindt de beweging van een waterdeeltje voornamelijk plaats in een horizontaal vlak. Afhankelijk van de golfhoeksnelheid en de amplitude van de snelheid stelt zich een quasi-stationaire stroming in gedurende een halve periode ter plaatse van de bodemribbel.

Of een sinusoïdale golf een interactie heeft met de bodem en deze 'voelt' (zie Figuur 3.2), is afhankelijk van d/L en kan worden bepaald met de vergelijkingen in (3.11). Ter plaatse van de bodem geldt y=-d. Invullen van y=-d in de teller van beide vergelijkingen in (3.11) geeft dat de term sinh(0) gelijk nul is en de term cosh(0) gelijk één is. Dit impliceert dat macroscopisch bezien, ter plaatse van de bodem de verticale orbitaalsnelheid v(x,-d,t) gelijk nul is en de horizontale orbitaalsnelheid u(x,-d,t) ten opzichte van de waarde aan het oppervlak wordt bepaald door de grootte van de dempings-term: sinh(kd)=sinh(2πd/L). Microscopisch bezien is de verticale snelheid (v) boven de bodemribbel ongelijk nul.



Figuur 3.2 Interactie tussen een lopende golf en de bodem. De waterdeeltjes bewegen in een ellipsvormige baan. Figuur ontleend aan Reineck *et al.* (1973).

De waterbeweging die bij de simulaties wordt ingevoerd en het gevolg is van de golfbeweging, is de waterbeweging die opgelegd is in soortgelijke simulaties ontleend aan de literatuur (Longuet-Higgins 1981). Het is in principe mogelijk om in het rekenmodel elke gewenste combinatie tussen de geometrie van de bodemribbel en de randvoorwaarde voor de waterbeweging, door te rekenen. Op deze wijze kan een indicatie worden verkregen over de invloed van de geometrie van de bodemribbel op de wervelstroming en de invloed van de randvoorwaarde voor de waterbeweging op de wervelstroming.

3.3. Stroming over bodemribbels

In deze paragraaf wordt ingegaan op de continuïteitsvergelijking (3.2) en de Navier-Stokes vergelijking (3.7) toegespitst op de stroming boven de bodemribbels. De rand- en beginvoorwaarden voor vergelijking (3.7) worden beschreven.
Simulatie van de wervelbeweging boven bodemribbels is mogelijk met de vergelijkingen (3.2) en (3.7) waarbij de wervelstructuren worden weergegeven door bijvoorbeeld snelheidsvectoren of stroomlijnen. Wanneer men in de ontwikkeling van de wervelstructuren geïnteresseerd is moet bij een rechtstreekse numerieke benadering een zeer fijn rekenrooster worden gebruikt waarop de differentiaalvergelijkingen door numerieke discretisatie worden opgelost. Lange rekentijden zijn veelal het gevolg.

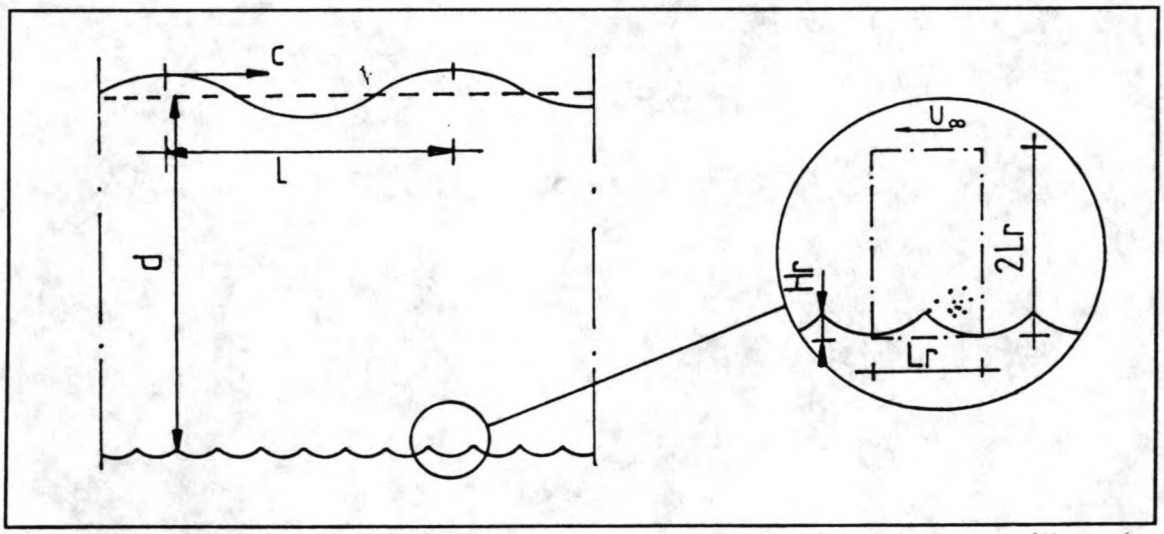
Een meer efficiënte methode om de wervelstructuren te simuleren zijn de Vortex methoden die in hoofdstuk 4 worden behandeld. Ondanks dat in dit onderzoek gebruik wordt gemaakt van een Vortex methode, worden toch in deze paragraaf de "traditionele" vergelijkingen gegeven om het inzicht in de stroming te vergroten en om aan te geven welke parameters van belang zijn.

3.3.1 Rekendimensie en balansgebied

De Navier-Stokes vergelijking en de continuïteitsvergelijking beschrijven de waterbeweging volledig in de drie-dimensionale ruimte (x, y, z) en in de tijd (t). Simulatie van de waterbeweging in een drie-dimensionale ruimte vergt veelal grote geheugencapaciteit van computers en lange rekentijden. De vereenvoudiging die wordt aangebracht in dit onderzoek is dat de vergelijkingen in een twee-dimensionale rekenruimte worden opgelost.

Een belangrijk voordeel hiervan is dat in een later stadium van het onderzoek, wanneer de rotatie wordt genomen van de Navier-Stokes vergelijkingen, termen uit deze vergelijking worden geëlimineerd doordat het inwendig product van deze termen gelijk aan nul is (zie paragraaf 3.4.5).

Het rekengebied dat in een simulatie wordt aangehouden wordt bepaald door het invloedsgebied van de afgeschudde wervels bij de top van de bodemribbel en de randvoorwaarden die volgen uit de orbitaalbeweging (zie Figuur 3.3). In Figuur (3.3) is duidelijk te zien dat voor de verhouding tussen de golflengte (L) en bodemribbellengte (L_r) geldt: $L/L_r \gg 1$ en voor de verhouding tussen de waterdiepte (d) en de ribbelhoogte (H_r): $d/H_r \gg 1$. Van deze relaties wordt bij de bepaling van de randvoorwaarden voor de snelheden gebruik gemaakt.



Figuur 3.3 Balansgebied in de omgeving van een bodemribbel onder oscillerende waterbeweging.

- De onderrand wordt gegeven door de geometrie van de bodemribbel. De randvoorwaarde aan de onderrand wordt geleverd door de bodemribbel die ondoorlatend is, met normaalrichting (n) en tangentiële-richting (s):

$u_n = 0$: snelheid in de richting van de normaal op de bodem is gelijk aan nul

$u_s = 0$: snelheid in de richting evenwijdig aan de bodem is gelijk aan nul (no-slip of kleef conditie) in een visceuze stroming.

- De positie van de bovenrand in het rekengebied is na een aantal testen te hebben uitgevoerd met het rekenprogramma VORTEX, arbitrair gekozen op $2L_r$ boven de onderrand. Deze positie komt redelijk overeen met de positie van de bovenrand in soortgelijke simulaties ontleend aan de literatuur (Longuet-Higgins 1981; Sawamoto 1980; Sawamoto *et al.* 1983). De randvoorwaarden aan de bovenrand van het rekenmodel worden bepaald door de orbitaalsnelheden (vergelijking 3.11) in x- en y-richting te vereenvoudigen tot:

$$u(x,t)\,|_{y=-d+2L_r} = u_\infty \sin(\frac{2\pi}{T_g}t) \quad , \tag{3.12}$$

$$v(x,t)\,|_{y=-d+2L_r} = v_\infty \cos(\frac{2\pi}{T_g}t) \quad . \tag{3.13}$$

met u_∞ en v_∞ de snelheidsamplituden in het buitengebied en T_g een golfperiode. Zolang op de bovenrand van het rekengebied geldt $v_\infty/u_\infty \ll 1$, wordt op deze bovenrand een randvoorwaarde $v_\infty=0$ m/s opgelegd. Het verder omhoogbrengen van de bovenrand in het rekengebied resulteert in een grotere verhouding tussen v_∞/u_∞ en dus een randvoorwaarde voor de verticale snelheid (vergelijking 3.13).

- Omdat de waterbeweging boven de bodemribbels L_r-periodiek is wordt in het rekengebied één bodemribbel beschouwd. Deze periodiciteit heeft tot gevolg dat er geen andere randvoorwaarden op de verticale randen behoeven te worden opgelegd. Er geldt dat de snelheden op de linkerrand gelijk zijn aan de snelheden op de rechterrand.

- De beginvoorwaarden worden geleverd door de snelheden in het rekengebied. Verondersteld wordt dat op $t=0$ de vloeistof in rust is: $u(x,y,t)=0$ en $v(x,y,t)=0$.

Hieronder wordt aangetoond dat, voor het in Figuur (3.3) beschouwde rekengebied, alle termen uit de Navier-Stokes vergelijking moeten worden meegenomen bij een rechtstreekse numerieke simulatie van de wervelbeweging.
Het getal van Reynolds (Re) wordt gedefinieerd als:

$$Re = \frac{u_\infty L_r}{\nu} \quad , \tag{3.14}$$

hierin is u_∞ de snelheid in het buitengebied, L_r de bodemribbellengte en ν de kinematische viscositeit. Schatting van de termen in de continuïteitsvergelijking geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{u}{L_r} + \frac{v}{H_r} \approx 0 \quad . \tag{3.15}$$

Doordat juist ter plaatse van de scherpe bodemribbeltop grote snelheidsgradiënten ontstaan die de stroming significant beïnvloeden, is bovenstaande uitdrukking niet geschikt om de orde van grootte van de termen uit de bewegingsvergelijking te schatten.

Een juiste schatting van de termen in de continuïteitsvergelijking wordt verkregen door een klein balansgebied te beschouwen ter plaatse van de bodemribbeltop. De lokale steilheid van de top van de ribbel is van de orde: $\cot(\frac{1}{2}\alpha_t)=O(1)$, met α_t de ingesloten hoek van de bodemribbeltop (zie paragraaf 2.1.1),zodat lokaal bij de top geldt:

$$\frac{u}{v} = \lambda \approx 1 \quad , \tag{3.16}$$

met λ een dimensieloze parameter.

Schatten van de termen in de Navier-Stokes vergelijking (3.6), met de bronterm (F_i) gelijk nul, en delen door (U^2/H_r) geeft na uitschrijven de bewegingsvergelijkingen in x- en y-richting (Booij 1986; Vreugdenhil 1980):

$$\begin{array}{ccccccccc} \dfrac{\partial u}{\partial t} & + & u\dfrac{\partial u}{\partial x} & + & v\dfrac{\partial u}{\partial y} & + & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} & - & \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ .... & & \lambda & & \lambda & & .... & & \dfrac{\lambda}{Re} \quad \dfrac{1}{\lambda\, Re} \end{array} , \qquad (3.17)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \dfrac{\partial v}{\partial t} & + & v\dfrac{\partial v}{\partial x} & + & u\dfrac{\partial v}{\partial y} & + & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} & - & \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -g\delta_{i3} \\ .... & & \lambda^3 & & \lambda & & .... & & \dfrac{\lambda^2}{Re} \quad \dfrac{1}{Re} \end{array} . \qquad (3.18)$$

De termen waarvoor geen schatting is gemaakt zijn stromingsafhankelijk.

Afhankelijk van het getal van Reynolds en de waarde van λ (≈ 1) zijn de convectietermen en de diffusietermen voor het beschouwde rekengebied niet zondermeer te verwaarlozen. De convectietermen (tweede en derde term in het linkerlid van (3.17) en (3.18)), zijn allemaal van dezelfde orde van grootte wanneer $\lambda = O(1)$. Ter plaatse van de bodem kan het getal van Reynolds een zo kleine waarde aannemen dat de diffusietermen een belangrijke bijdrage gaan leveren.

Voor een rechtstreekse numerieke simulatie van de wervelstroming in een visceuze vloeistof in een twee-dimensionale rekenruimte moeten alle termen uit de vergelijkingen (3.17) en (3.18) worden meegenomen. Dit heeft tot gevolg dat wanneer deze vergelijkingen worden opgelost met een Euleriaanse methode voor een nauwkeurige berekening veel roosterpunten benodigd zijn. Voor een simulatie is dus veel geheugencapaciteit benodigd en zijn door de niet-lineaire termen in de bewegingsvergelijking de rekentijden groot. Daarom wordt gebruik gemaakt van een Vortex methode om de wervelstroming boven de bodemribbel te simuleren.

3.3.2 Stromingscondities bij de bodem

Met name de verschillende grenslagen die ontstaan door de oscillerende waterbeweging en de viscositeit, in combinatie met de geometrie van de bodemribbel, bepalen de beweging van de waterdeeltjes ter plaatse van een bodemribbel.
Door de oscillerende stroming kunnen grenslagen instabiel worden en loslaten van de wand van de bodem en de scherpe bodemribbeltop. De grenslaag rolt met tussenstappen op tot een kleine wervels wanneer het getal van Reynolds een kritische waarde overschrijdt. De fysische parameters die dit instabiliteitsproces beschrijven zijn de snelheid (u_b), de grenslaagdikte (δ) en de frequentie (f) waarmee deze kleine wervels loslaten. Deze parameters vormen het dimensieloze getal van Strouhal: $Str = f\delta/u_b$.
Het getal van Strouhal voor een specifiek object in de stroming wordt niet meer significant beïnvloed door hoge waarden van het getal van Reynolds. De waarde van het getal van Strouhal is circa 0.1 voor stroming over zandribbels (Ikeda *et al.* 1989). Hiermee wordt een indicatie verkregen over de frequentie waarmee de kleine wervels loslaten, door:

$$f = 0.1 \frac{u_b}{\delta} \quad . \tag{3.19}$$

Deze kleine wervels tezamen vormen periodiek met de golfperiode (T_g) een grote wervel die het dal van de bodemribbel vult (zie Figuur 2.2) en bij omkering van de stroomrichting uit de bodemribbel loopt.
Doordat de kennis van oscillerende grenslagen over zandribbels nog gering is, wordt de dikte van de grenslaag (δ) ontleend aan de situatie: oscillerende stroming over een vlakke plaat.

De laminaire grenslaagdikte (δ) wordt bepaald door de viscositeit (ν) en de mate van ontwikkeling in een golfperiode en bedraagt (Ikeda *et al.* 1989):

$$\delta = \sqrt{\nu T_g} \quad . \tag{3.20}$$

Deze grenslaag, de binnengrenslaag of ook wel Stokes-grenslaag genoemd, wordt gevormd door een dun laagje waarin de snelheid van de waarde nul (no-slipconditie) naar een snelheid (u_b) buiten deze grenslaag gaat. De binnengrenslaag is belangrijk omdat hier het snelheidsveld ter plaatse van de wand en de top van de bodemribbel niet rotatievrij is en er kleine wervels worden gegenereerd.
Op de binnengrenslaag sluit de buitengrenslaag aan die onderverdeeld is in een wervelgrenslaag en een diffusiegrenslaag. De wervelgrenslaag, die zich net buiten de binnengrenslaag bevindt, wordt gekarakteriseerd door geordende wervels opgebouwd uit een aantal kleine wervels. Deze geordende wervels die loslaten van de top van een bodemribbel zijn regelmatig van vorm en zijn nog nauwelijks door diffusie veranderd. Boven de wervelgrenslaag bevindt zich de diffusie grenslaag waarin de geordende wervels sterk worden beïnvloed door het snelheidsveld in de buitenlaag. De voortbeweging van de wervels in de buitengrenslaag wordt bepaald door convectief en diffusief transport.

3.4 Werveltheorie

In onderstaande beschrijving wordt de werveltheorie vanuit een elementaire hoek beschreven. Voor meer uitgebreide informatie wordt verwezen naar Chorin (1972), Gustafson *et al.* (1991), Hoeijmakers (1989), Steketee (1973) en (1975), Wilders (1989).

Beschouw een klein vloeistofelement op één bepaald tijdstip. Als het centrum van het element $P(x_j)$ is, wordt de positie van een ander punt P' in het element als $P'(x_j + \delta x_j)$ aangeduid. Hierbij wordt aangenomen dat x_j $(j = 1,2,3)$ wordt vastgehouden terwijl δx_j varieert als P' de ruimte doorloopt. Het vloeistofelement wordt als zo klein beschouwd, dat δx_j infinitesemaal is. De snelheid in P is u_i $(i = 1,2,3)$ op het beschouwde tijdstip en de snelheid in het punt P' is u_i'. De snelheid in P' wordt dan beschreven door:

$$u_i'(P') = u_i(P) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j + ... \tag{3.21}$$

De Taylorreeks kan na de eerste term worden afgebroken omdat δx_j infinitesemaal is. De tweede term kan worden opgesplitst in een symmetrisch deel en een antisymmetrisch deel:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) . \tag{3.22}$$

Wanneer de werveltensor (ξ_{ij}) en de deformatiesnelheidstensor (ϵ_{ij}) worden ingevoerd zoals hieronder aangegeven:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad \text{en} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) , \tag{3.23}$$

dan wordt (3.21):

$$u_i'(P') = u_i(P) + \epsilon_{ij}\delta x_j - \xi_{ij}\delta x_j . \tag{3.24}$$

Bovenstaande vergelijking geeft weer dat de snelheid in een punt P' in de omgeving van P wordt bepaald door de som van een drietal termen.

De eerste term ($u_i(P)$) in het rechterlid geeft de translatie van een vloeistofelement weer met snelheid $u_i(P)$. De tweede term $\epsilon_{ij}\delta x_j$ stelt een deformatiebeweging voor. De derde term ($\xi_{ij}\delta x_j$) stelt een rotatiebeweging van het vloeistofelement voor. Het vloeistofelement draait als een vast lichaam met een hoeksnelheid (ξ_{ij}) bepaald door de wervelsterkte (ω_{ij}).

De deformatietensor kan opgesplitst worden in een isotroop deel $\epsilon\delta_{ij}$ en een deviator $\gamma_{ij}=\epsilon_{ij}-\epsilon\delta_{ij}$ (Booij 1979). Hiermee wordt (3.22):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon\delta_{ij} + \gamma_{ij} + \xi_{ij} \ . \qquad (3.25)$$

De eerste term in het rechterlid representeert de isotrope dilatatiesnelheid, de tweede term de afschuivingen langs verschillende assen en de derde term de rotatiebeweging om verschillende assen.

ad. eerste term ($\epsilon\delta_{ij}$)

Voor een onsamendrukbare vloeistof is $\epsilon=0$.

ad. tweede term (γ_{ij})

De afschuifbeweging, ook wel deformatiesnelheidstensor, is een (3 x 3)-matrix. De diagonaalelementen geven de reksnelheid minus het isotrope deel aan van een vloeistofelement in de tijd. De niet-diagonaaltermen geven de hoekveranderingen weer tussen twee oorspronkelijk loodrecht op elkaar staande lijnstukjes langs de hoofdassen. De afschuifbeweging die door de deviator γ_{ij} wordt gerepresenteerd houdt verband met de schuifspanningsdeviator r_{ij}.

Bij een Newtonse vloeistof geldt $r_{ij}=-2\nu\gamma_{ij}$. Stokes veronderstelde dat de spanningen p_{ij} in een vloeistof lineaire functies zijn van de deformatiesnelheden:

$$p_{ij} = -\ p\delta_{ij} + r_{ij} \qquad (3.26)$$

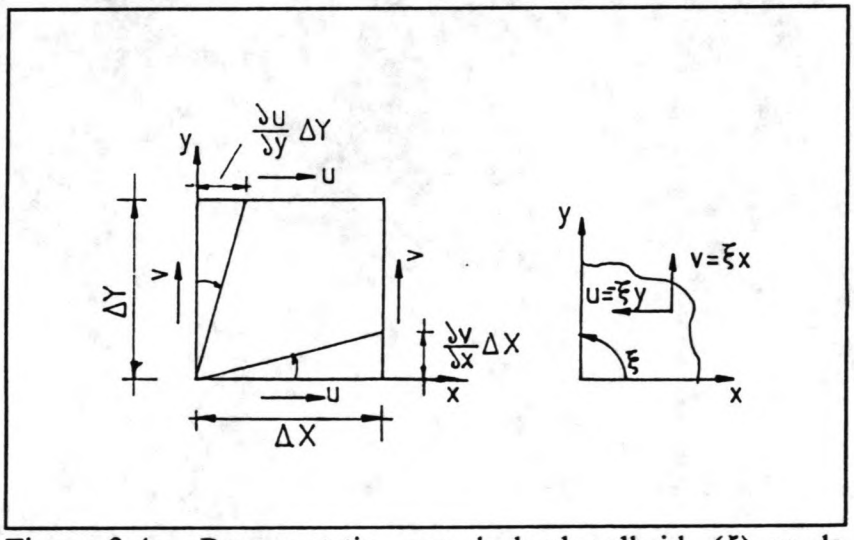
De term in het linkerlid is de spanningstensor. De eerste term in het rechterlid is de isotrope druktensor en de tweede term de deviatorspanning. In dit onderzoek wordt de invloed van de deformatiesnelheidstensor verwaarloosd. Voor meer informatie wordt verwezen naar Abbott *et al.* (1989) en Booij (1986).

ad. derde term (ξ_{ij})

De werveltensor (ξ_{ij}) geeft de hoeksnelheid weer van een roterend vloeistofelement (zie Acheson 1991; Battjes 1989.b; Steketee 1973,1975). De vorticiteit of wervelsterkte (ω_{ij}) is tweemaal zo groot als de werveltensor voor de hoeksnelheid (ξ_{ij}) (Acheson 1991; de Vries 1984):

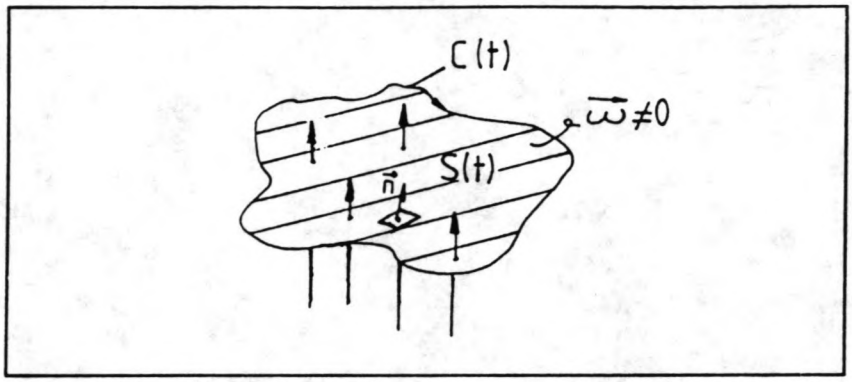
$$2\xi_{ij} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \omega_{ij} \tag{3.27}$$

De wervelsterkte ω_{ij} is een antisymmetrische tensor met drie onafhankelijke kentallen in een drie-dimensionale ruimte en representeert een rotatie om een as in een willekeurige stand in de ruimte. Wanneer een vector $\vec{\omega}$ met componenten $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ wordt ingevoerd dan wordt de wervelsterkte in vectornotatie: $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$. In een twee-dimensionale ruimte is er één onafhankelijk kental, hetgeen resulteert in: $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0,0,\omega_3) = (0,0,\omega)$. De wervelsterkte in een twee-dimensionale ruimte is een scalar. Voor een interpretatie van de hoeksnelheid en de wervelsterkte in een twee-dimensionale ruimte zie Figuur 3.4.



Figuur 3.4 Representatie van de hoeksnelheid (ξ) en de wervelsterkte (ω) van een element.

Doordat het wervelsterkteveld divergentievrij is, $\nabla\cdot\vec{\omega} = \nabla\cdot\nabla\times\vec{u} = 0$, kunnen diverse eigenschappen worden afgeleid. Beschouw daartoe een oppervlak S(t) tussen een enkelvoudig gesloten kromme C(t) met $\vec{n}$ de normaal op dit oppervlak (zie Figuur 3.5).



Figuur 3.5 Circulatie en flux van de wervelsterkte.

De circulatie (Γ) langs deze gesloten kromme C(t) in een stromingsveld wordt gedefinieerd als (zie Acheson 1990; Steketee 1973,1975 en Wilders 1989):

$$\Gamma(C) = \oint_{C(t)} \vec{u}\cdot d\vec{s} = \iint_{S(t)} \nabla\times\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S(t)} \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,dS \quad , \tag{3.28}$$

waarbij gebruik gemaakt is van het theorema van Stokes.
Bovenstaande vergelijking uitgeschreven voor een twee-dimensionale rekenruimte geeft:

$$\Gamma(C) = \oint_{C(t)} u\,dx + \oint_{C(t)} v\,dy = \iint_{S(t)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{S(t)} \omega\,dx\,dy \ . \tag{3.29}$$

De circulatiestelling van Kelvin (Prandtl *et al.* 1934), die geldig is mits de vloeistof niet visceus is, er een conservatief uitwendig krachtenveld aanwezig is en de vloeistof een constante dichtheid (ρ) heeft of de dichtheid (ρ) slechts afhankelijk is van de druk (p), houdt in dat wanneer de contour C(t) wordt meebewogen met de vloeistof, deze circulatie wordt behouden. Het bewijs van het behoud van circulatie wordt hieronder gegeven. Door uit te gaan van het theorema van Stokes:

$$\Gamma(C) = \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{s} \quad , \tag{3.30}$$

en deze vergelijking te differentiëren naar t volgt:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left[\oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{s}\right] = \oint_{C(t)}\left[\frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{s} + \vec{u} \cdot \frac{D}{Dt} d\vec{s}\right] = \oint_{C(t)}\left[\frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{s} + \vec{u} \cdot d\left(\frac{D\vec{s}}{Dt}\right)\right] =$$

$$= \oint_{C(t)} [\vec{a} \cdot d\vec{s} + \vec{u} \cdot d\vec{u}] = \oint_{C(t)} \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad , \tag{3.31}$$

aangezien:

$$\oint_{(C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{u} = \left[\frac{u^2}{2}\right]_e^e = 0 \quad , \tag{3.32}$$

met e een punt op de gesloten kromme C(t) in Figuur (3.5). In vergelijking (3.31) is $\vec{a}$ het versnellingsveld. Voor een homogene, niet-visceuze vloeistof en een conservatief krachtenveld is het versnellingsveld rotatievrij en geldt dus:

$$\frac{D\,\Gamma(C)}{Dt} = 0 \qquad \text{en} \qquad \frac{D\,\vec{\omega}}{Dt} = 0 \quad . \tag{3.33}$$

Een vloeistof die initieel geen circulatie of wervelsterkte bezit, zal dit op een later tijdstip ook niet bezitten. Circulatie of wervelsterkte in een vloeistof ontstaat door wrijving (viscositeit) of door een afwijking van het conservatief krachtenveld. De circulatie verplaatst zich met de locaal heersende snelheid.

Bij grenslaagstromingen en op het moment dat singulariteiten zich in het stroomveld bevinden, zoals de bodemribbeltop, is het snelheidsveld niet meer rotatievrij. In ieder willekeurig punt in de omgeving kan dan de circulatie of wervelsterkte worden berekend die wordt toegevoegd aan het stroomveld vanuit de binnengrenslaag. Circulatie die eenmaal aan een vloeistof is toegevoegd kan vervolgens verder in deze vloeistof binnendringen. Dit wordt gekarakteriseerd door de verplaatsing van een wervel met een bepaalde wervelsterkte in een vloeistof.

Geconcludeerd kan worden voor een rotatievrij versnellingsveld dat:

1. Een wrijvingsloze (niet-visceuze vloeistof), onsamendrukbare stroming die op een bepaald moment rotatievrij is, zal altijd rotatievrij blijven.
2. Circulatie wordt met de stroming meegevoerd. Wanneer de circulatie langs een contour van nul verschilt, omvat de contour een wervelbuis. Voor een contour die wordt meegevoerd in een niet-visceuze vloeistof door de stroming blijft de circulatie constant.
3. In bovenstaande theorie wordt geen antwoord gegeven op de vraag hoe wervels ontstaan. In bovenstaande wijze van formulering moet in een vloeistofstroom van wrijvingsloze media de wervel altijd discreet (via de rand) in de vloeistof worden aangebracht.

3.4.1 Enige begrippen over wervels

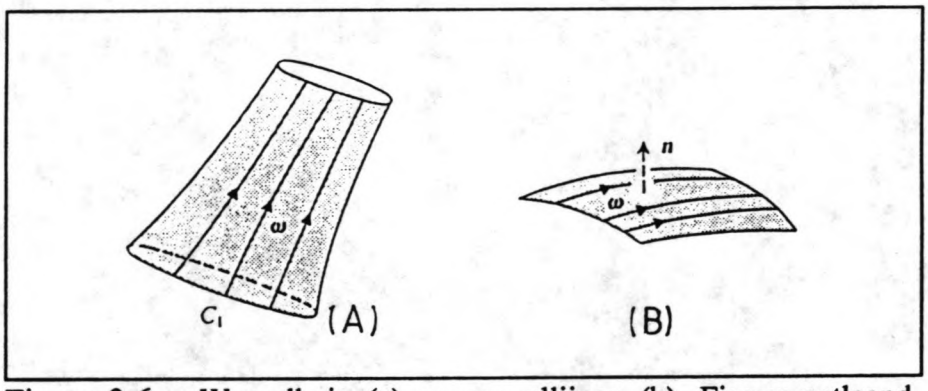
Afhankelijk van de stromingscondities en geometrie kunnen veschillende soorten wervelstructuren ontstaan. Iedere wervelstructuur heeft zijn eigen karakteristieke eigenschappen. Hieronder worden enige definities gegeven van veelvoorkomende begrippen:

- Een **wervel** is een eindig volume wervelende vloeistof ($\vec{\omega} \neq 0$) begrensd door wervelvrije vloeistof of door vaste wanden.

• De **wervellijnen** zijn lijnen in een wervelveld zodanig dat in elk punt van deze lijn de richting van de wervelvector wordt gegeven door de raaklijn in dat punt (zie Figuur 3.6). De vergelijking voor een wervellijn is:

$$\vec{\omega} \times d\vec{s} = 0 \quad . \tag{3.34}$$

• Een **wervelbuis** ontstaat als door een gesloten kromme op een bepaald tijdstip in ieder punt op deze kromme de wervellijn wordt getekend (zie Figuur 3.6). Het oppervlak van een wervelbuis bestaat dus uit wervellijnen. De snelheid waarmee een willekeurig gevormde wervelbuis zich beweegt, kan worden berekend met de formule van Biot en Savart (Steketee 1973; Wilders 1989). Voor meer informatie over wervelbuizen in een drie-dimensionale rekenruimte wordt verwezen naar Hoeijmakers (1989), Lamb (1932) en Gustafson *et al.* (1991).



Figuur 3.6 Wervelbuis (a) en wervellijnen (b). Figuur ontleend aan Acheson (1990).

• De **sterkte van de wervelbuis** is de circulatie (Γ) langs een gesloten kromme die een wervelbuis omvat:

$$\Gamma(c) = \int_{S(t)} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = \text{constant} \quad . \tag{3.35}$$

• Een **werveldraad** is een wervelbuis omgeven door rotatievrije vloeistof.

• Een **lijnwervel** of is een werveldraad met infinitesimale dwarsafmetingen en een eindige sterkte voor de circulatie.

Bovenstaande begrippen zijn van toepassing op verschillende wervelstructuren die in de fysica voorkomen:

- Von Kármán wervelstraat (Acheson 1990, p.181, Goldstein 1965, Vol. I, p. 36)
- Rankine Wervel (Acheson 1990, Roberson *et al.* 1990, p.134, Goldstein 1965, Vol. I, p.88)
- Hill's bolvormige wervels (Acheson 1990, p.175)
- Hoefijzerwervels (Bouwmeester 1989, p.146)
- Haarspeldwervels (Groesen 1992, p. 27-28).

De meeste wervelvoorkomens zijn een driedimensionaal verschijnsel wat te vergelijken is met turbulentie. Toch is het mogelijk om in een twee-dimensionale ruimte met bijvoorbeeld een Rankine wervel simulaties te verrichten naar een feitelijk drie-dimensionaal proces zoals in de volgende hoofdstukken duidelijk zal worden gemaakt. Een wervel heeft een aantal karakteristieke eigenschappen die in de volgende paragraaf worden besproken.

3.4.2 Karakteristieken van een wervel

Een vloeistofstroming in een twee-dimensionale ruimte waarvan de stroomlijnen concentrische cirkels zijn, wordt een wervel genoemd. In de literatuur wordt een wervel beschreven door een tweetal geschematiseerde werveltypen (zie Acheson 1990; Roberson *et al.* 1990):

- een gedwongen wervel
- een vrije of potentiaal wervel

Bij de gedwongen wervel neemt de snelheid lineair toe met de straal (r) vanuit het centrum ($r = 0$) van de wervel ($u_\theta = \Omega.r$). Bij een vrije wervel wordt de snelheid (u_θ) in een punt gelegen op afstand r, met r de straal, bepaald door: ($u_\theta = \Omega a^2_w/r$), met Ω een constante voor de wervelsterkte en a_w een parameter die de radius van de kern van een wervel bepaalt.

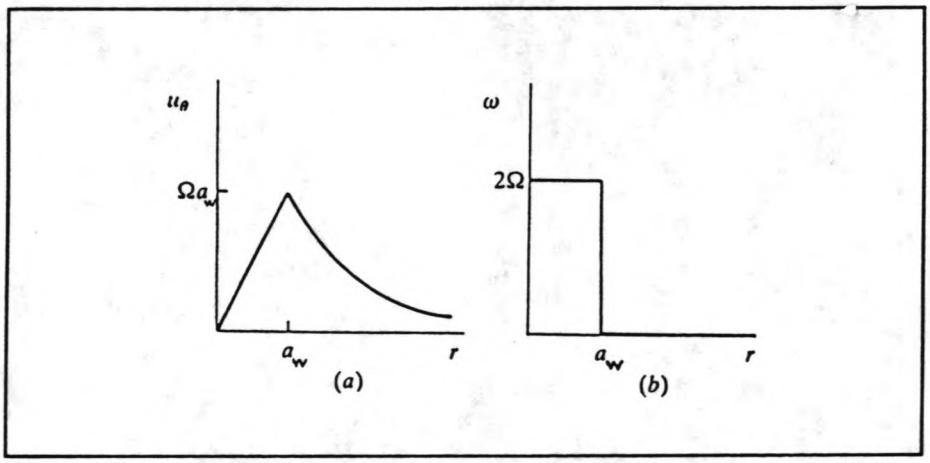
Deze snelheidsverdeling impliceert dat de snelheid toeneemt naar het centrum van de wervel. In het centrum (r=0) is in theorie een singulariteit aanwezig voor de snelheid: de zogenaamde "zelf"-snelheid ($u_\theta \to \infty$) van een wervel. In de natuur is de snelheid in het centrum van de wervel begrensd.

Een combinatie van bovenstaande werveltypen (zie Figuur 3.7) kan worden weergegeven door de volgende vergelijkingen:

$$u_\theta = \begin{cases} \Omega r & r < a_w \\ \dfrac{\Omega a_w^2}{r} & r > a_w \end{cases} , \tag{3.36}$$

$$u_r = u_z = 0 . \tag{3.37}$$

Vergelijking (3.36) beschrijft het snelheidsveld van de Rankine wervel. Deze wervels worden gekarakteriseerd door een wervelkern (a_w) waarin de wervelsterkte is geconcentreerd, terwijl buiten deze kern de stroming wezenlijk rotatievrij is. De wervelsterkte (ω) in het twee dimensionale vlak bedraagt 2Ω (Acheson 1990).
In de wervelkern is de snelheid evenredig met straal r (gedwongen wervel), de stroming in de kern draait derhalve alsof dit een roterend star lichaam is. Voor een overzicht van de snelheidsverdeling (u_θ) en de wervelsterkte (ω) in een Rankine wervel, zie onderstaande Figuur 3.7.



Figuur 3.7 Snelheidsverdeling en wervelsterkte in een Rankine wervel. Figuur ontleend aan Acheson (1990).

3.4.3 Stroomfunctie en Poissonvergelijking

Omdat de stroming divergentievrij is: $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (continuïteitsvergelijking), is de snelheid uit te drukken als de rotatie van een andere functie, bijvoorbeeld (ψ). Er geldt dan ($\vec{u} \triangle \nabla \times \psi$). Uitschrijven van deze relatie geeft de snelheden (u,v):

$$u = +\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \text{en} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad . \tag{3.38}$$

Deze ψ, de stroomfunctie genaamd, is een scalar en constant langs een stroomlijn. Substitutie van vergelijking (3.38) in de definitie voor de wervelsterkte ($\omega = \nabla \times \vec{u}$) geeft de vergelijking van Poisson (Acheson 1990; Lamb 1932; Steketee 1973):

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \ . \tag{3.39}$$

Wanneer ω ongelijk is aan nul dan geeft (3.39) de stroomfunctie weer in een niet rotatievrije stroming. De oplossing van deze vergelijking bij een gegeven wervelsterkteveld (ω) voor een stroming waarin geen vaste wanden aanwezig zijn en de vloeistof in rust is in het oneindige, wordt gegeven door een integraalvergelijking waarbij gebruik is gemaakt van de potentiaaltheorie (zie Gustafson *et al.* 1990; Hoeijmakers 1989; Lamb 1932):

$$\psi(x,y,t)|_\alpha = \iint L(x,y)|_{\alpha,\beta}\, \omega(x_\beta, y_\beta)\, dx_\beta\, dy_\beta \quad , \tag{3.40}$$

met:

$$L(x,y)|_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{2\pi} \ln |r| \quad , \tag{3.41}$$

$$r = \sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2} \ . \tag{3.42}$$

Hierin is ψ de stroomfunctie in het punt (x_α, y_α) op tijdstip t_α, $\omega(x_\beta, y_\beta)$ de wervelsterkte in het punt (x_β, y_β) en $(dx_\beta\, dy_\beta)$ het oppervlak van het element.

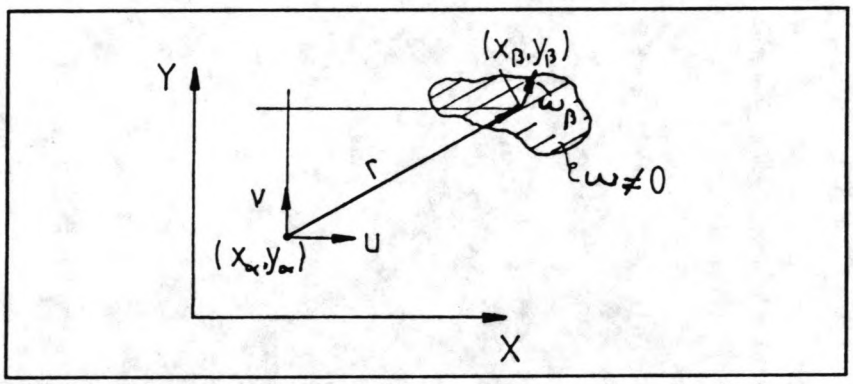
3.4.4 Snelheidsveld uit gegeven wervelsterkteveld

Uitgaande van de oplossing voor ψ (vergelijking 3.40) kunnen de snelheden (u,v) in het punt (x_α,y_α), geïnduceerd door de wervelsterkte (ω_β) in het punt (x_β,y_β) door middel van (3.38) worden bepaald (zie Gustafson *et al.* 1991; Lamb 1932; Steketee 1973; Peyret *et al.* 1990):

$$\vec{u}(x,y,t)|_\alpha = \iint K(x,y)|_{\alpha,\beta}\,\omega(x_\beta,y_\beta)dx_\beta dy_\beta \ , \tag{3.43}$$

met:

$$K(x,y)|_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-(y_\alpha - y_\beta)}{r^2}\ ,\ \frac{(x_\alpha - x_\beta)}{r^2}\right) \ . \tag{3.44}$$



Figuur 3.8 Bepaling snelheden in punt (x_α,y_α) geïnduceerd door (ω_β) in het punt (x_β,y_β).

Uitschrijven van (3.43) geeft de snelheden (u,v) in het punt (x_α,y_α):

$$u(x,y,t)|_\alpha = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{(y_\alpha - y_\beta)\,\omega(x_\beta,y_\beta)}{r^2}dx_\beta dy_\beta \ , \tag{3.45}$$

$$v(x,y,t)|_\alpha = +\frac{1}{2\pi}\iint \frac{(x_\alpha - x_\beta)\,\omega(x_\beta,y_\beta)}{r^2}dx_\beta dy_\beta \ . \tag{3.46}$$

Wanneer de integratie over de oppervlakte (dx_β, dy_β) van het element met wervelsterkte $\omega(x_\beta, y_\beta)$ wordt uitgevoerd:

$$\int_{S(t)} \omega \, dx_\beta \, dy_\beta = \Gamma(C) = \Gamma \quad , \tag{3.47}$$

dan wordt, met de circulatie (Γ) geconcentreerd in de oorsprong $(x_\beta=0, y_\beta=0)$, gesproken over een **puntwervel**.

De vergelijkingen (3.40), (3.45) en (3.46) gaan met vergelijking (3.47) over in:

$$\begin{cases} \psi(x,y,t) = \dfrac{-\Gamma \ln|r|}{2\pi} \\[2ex] u(x,y,t) = -\dfrac{\Gamma y_\alpha}{2\pi |r|^2} \\[2ex] v(x,y,t) = \dfrac{\Gamma x_\alpha}{2\pi |r|^2} \end{cases} \quad . \tag{3.48}$$

Hierin is $r = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$ de afstand tot de betreffende puntwervel in de oorsprong. De uitdrukkingen in vergelijking (3.48) staan bekend als de wet van Biot-Savart. Wanneer $(r \to 0)$ wordt de matrix $K(x,y)$, welke de relatie tussen de stroomfunctie en de snelheid beschrijft, singulier. In hoofdstuk 4 wordt beschreven op welke wijze deze singulariteit kan worden omzeild. Een puntwervel waarvan de singulariteit in het snelheidsveld is opgeheven wordt een **discrete wervel** genoemd.

Bovenstaande theorie voor de snelheden is afgeleid voor de situatie dat de snelheid in het oneindige gelijk aan nul is en dat er geen vaste wanden in de stroming aanwezig zijn. Wanneer dit wel het geval is moeten voor de totale snelheden (u,v) in een punt de snelheden uit de potentiaaltheorie (u_h, v_h) nog opgeteld worden bij de snelheden verkregen uit het wervelsterkteveld:

$$\vec{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \qquad \text{en} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad . \tag{3.49}$$

In termen van de totale stroomfunctie (ψ_p) betekent dit:

$$\psi_p = \psi_h + \psi + \psi_\infty \tag{3.50}$$

met ψ_h de oplossing van de Laplacevergelijking ($\nabla^2\phi=0$) met de randvoorwaarden op de randen, ψ de oplossing van de Poissonvergelijking met wervelsterkte in een oneindige ruimte en ψ_∞ stroomfunctie behorend bij de uniforme snelheid (u_∞, v_∞) in het buitengebied.

3.4.5 Bewegingsvergelijking voor de wervelsterkte

De wervelsterkte (ω) beweegt met de vloeistofdeeltjes mee. De beweging van de wervelsterkte wordt bepaald door de locale stroomsnelheid, die weer wordt bepaald door de verdeling van de elementen met wervelsterkte volgens de vergelijking (3.43) en een eventuele bijdrage van de rotatievrije stroming.
De bewegingsvergelijking van de wervelsterkte in vectornotatie in een vloeistof in een drie-dimensionale rekenruimte wordt verkregen door de rotatie te nemen over de Navier-Stokes vergelijking (3.7) (zie Gustafson *et al.* 1991; Booij 1990; Peyret *et al.* 1990):

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u} = \nabla\times\vec{F} + \nu\nabla^2\vec{\omega} \quad , \tag{3.51}$$

met $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ de wervelsterkte en $\vec{F}$ een bronterm. De drukterm (P) en de versnelling (g) worden uit vergelijking (3.7) geëlimineerd. Voor een conservatief uitwendig krachtenveld geldt: $\nabla\times\vec{F}=0$.

In dat geval beschrijft vergelijking (3.51) dat de meebewegende afgeleide van een wervelsterkteveld (zie Acheson 1990; Gustafson 1991; Hoeijmakers 1989; Wilders 1989):

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\omega} \quad , \tag{3.52}$$

de som is van twee termen: de wervelsterkte strekking: $(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u}$ en de wervelsterkte diffusie $\nu\nabla^2\vec{\omega}$.

In het speciale geval van een twee-dimensionale stroming, staat $\vec{\omega}$ loodrecht op het vlak van de stroming. Hierdoor is het inwendig product gelijk nul en verdwijnt de term $(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u}$, die de strekking van de wervels beschrijft, uit vergelijking (3.51). Zoals beschreven in paragraaf 3.4 heeft de wervelsterktevector $\vec{\omega}$ slechts één onafhankelijk kental in een twee-dimensionale ruimte zodat geldt: $\vec{\omega} = \omega_3 = \omega$, met ω een scalar. De bewegingsvergelijking (3.51) voor de wervelsterkte in een twee-dimensionale ruimte reduceert dan tot:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu\nabla^2\omega \quad . \tag{3.53}$$

Uitschrijven van deze bewegingsvergelijking geeft:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) . \tag{3.54}$$

In hoofdstuk 4 wordt ingegaan op welke wijze de wervelsterkte (ω) wordt gediscretiseerd en welke methoden beschikbaar zijn om bovenstaande bewegingsvergelijking op te lossen. Tevens wordt ingegaan op welke manier wervelsterkte in het discrete model wordt geïntroduceerd.

3.4.5.1 Dimensieloze bewegingsvergelijking

In turbulente stromingen is de moleculaire viscositeit (ν_m) te verwaarlozen ten opzichte van de turbulente kinematische viscositeit (ν_t). Om een indruk te krijgen over het karakter van de stroming (graad van turbulentie) wordt het dimensieloze getal van Reynolds (zie vergelijking (3.13)) geïntroduceerd en wordt de bewegingsvergelijking (3.54) dimensieloos gemaakt.
Beschouw daartoe de bewegingsvergelijking voor de wervelsterkte in een tweedimensionale rekenruimte voor een onsamendrukbare vloeistof:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\,\omega = \nu \nabla^2 \omega \,, \tag{3.55}$$

met:

$$\nu = \nu_m + \nu_t \qquad \text{en} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} . \tag{3.55.a}$$

Voer de volgende transformaties uit (zie Peyret *et al.* 1990):

$$\tilde{x} = \frac{x}{L_r} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{L_r} \quad , \quad \tilde{t} = \frac{tU}{L_r} . \tag{3.56}$$

Voor de snelheden in x-richting en y-richting:

$$\tilde{u}(\tilde{x}(x,t),\tilde{y}(y,t),\tilde{t}(t)) = \frac{u(x,y,t)}{U} \tag{3.56.a}$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}(x,t),\tilde{y}(y,t),\tilde{t}(t)) = \frac{v(x,y,t)}{U} . \tag{3.56.b}$$

De transformatie voor de wervelsterkte (= scalar) is als volgt:

$$\tilde{\omega}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) = \frac{\omega(x,y,t)L_r}{U} \quad . \tag{3.56.c}$$

Wanneer bovenstaande transformaties worden toegepast op vergelijking (3.55) dan volgt na enige wiskundige bewerkingen de dimensieloze bewegingsvergelijking voor de wervelsterkte:

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\tilde{y}} = \frac{\nu}{L_r U}\left(\frac{\partial^2\tilde{\omega}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{\omega}}{\partial\tilde{y}^2}\right) = \frac{1}{Re}\nabla^2\tilde{\omega} \quad . \tag{3.57}$$

Stel vervolgens:

$$x = \tilde{x} \quad , \quad y = \tilde{y} \quad , \quad t = \tilde{t} \quad , \quad \omega = \tilde{\omega} \quad , \tag{3.58}$$

waarmee vergelijking (3.57) overgaat in:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\nu}{L_r U}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{Re}\nabla^2\omega \quad . \tag{3.59}$$

In de dimensieloze vorm wordt de lengte van de bodemribbel (L_r) en de snelheid ($U = u_b$) in het buitengebied gebruikt (Sawamoto 1980). In dit onderzoek wordt een aantal simulatieberekeningen uitgevoerd met zowel een visceuze als niet visceuze vloeistof. De visceuze stroming wordt doorgerekend met een constante viscositeit. De waarde van de turbulente viscositeit (ν_t) die bij een bepaalde stroming behoort, kan worden afgeschat door (Booij 1986):

$$\nu_t = \kappa u_* \delta \quad . \tag{3.60}$$

Hierin is δ de dikte van de binnengrenslaag, κ de constante van Kármán en u_* de bodemschuifspannings-snelheid.

De dikte van de binnengrenslaag is bepaald door vergelijking (3.20). De waarde voor u_* kan worden afgeschat (Booij 1986):

$$u_* = \frac{u_\infty}{15} \quad . \tag{3.61}$$

Op deze manier wordt een indicatie verkregen over de grootte van de kinematische viscositeit ($\nu = \nu_t$) die in het numerieke rekenmodel dient te worden ingevoerd en de orde van grootte van de diffusie term ten opzichte van de convectie term.

4. NUMERIEKE OPLOSMETHODEN VOOR POISSON-VERGELIJKING EN BEWEGINGSVERGELIJKING VOOR DE WERVELSTERKTE

In paragraaf 3.4 zijn de vergelijkingen voor de wervelsterkte in een onsamendrukbare, homogene vloeistof en een conservatief krachtenveld beschreven. Tevens zijn enige begrippen over de werveldynamica geïntroduceerd die het gevolg zijn van het niet rotatievrij zijn van de stroming ($\omega \neq 0$). De vergelijkingen, in termen van wervelsterkte (ω), die de waterbeweging in een twee-dimensionale rekenruimte beschrijven:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = -\omega \\ \dfrac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \end{cases} \quad \text{met} \quad \begin{cases} \omega = \nabla \times \vec{u} \\ \vec{u} = \nabla \times \psi \end{cases}, \tag{4.1}$$

kunnen voor complexe geometrieën, zoals een bodemribbel, niet meer analytisch worden opgelost. Daarom worden de vergelijkingen in tijd en ruimte gediscretiseerd en numeriek met een computer opgelost. In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de meest gebruikte numerieke oplosmethoden voor de hierboven beschreven vergelijkingen. Een onderscheid dat wordt gemaakt bij de wijze van oplosmethoden is dat de vergelijkingen kunnen worden opgelost in een vast balansgebied (Euleriaans) of dat vloeistofdeeltjes met circulatie (discrete werveldeeltjes) op hun baan worden gevolgd (Lagrangiaans). Een combinatie van de Euleriaanse- en Lagrangiaanse-oplosmethode is eveneens mogelijk.

Bij het numeriek oplossen van de bewegingsvergelijking (3.54) voor de wervelsterkte wordt veelal gebruik gemaakt van Operator Splitting. Hierbij worden de vergelijkingen die het convectieve transport en het diffusieve transport representeren, afzonderlijk opgelost voor een tijdstap (Δt), waarna beide oplosssingen gesuperponeerd worden.

Hieronder volgt een kort overzicht van een drietal mogelijke numerieke oplosmethoden:

- **Euleriaanse methode:** bij deze methode wordt een rekenrooster over het rekengebied aangebracht waarop de vergelijkingen (4.1) volledig door eindige differentie-methoden worden opgelost. De nauwkeurigheid van de berekening hangt af van de wijze van numerieke benadering waarbij rekening dient te worden gehouden met stabiliteit, consistentie en convergentie (Vreugdenhil 1980). In de literatuur (zie onder andere Peyret *et al.* 1990, p. 182-213) worden vele mogelijke differentieschema's gegeven voor de vergelijkingen die het convectieve- en diffusieve transport beschrijven. Nadelen van een Euleriaanse methode zijn dat voor een nauwkeurige berekening een zeer fijn rekenrooster moet worden aangebracht hetgeen resulteert in lange rekentijden en dat stabiliteit van de berekening niet altijd gegarandeerd is. Een voordeel van de methode is dat de wervelsterkte eenvoudig via de rand in het rekengebied kan worden geïntroduceerd. In dit onderzoek wordt niet verder ingegaan op de Euleriaanse methode.

- **Lagrangiaanse methode:** het wervelsterkteveld wordt bij een Lagrangiaanse methode gerepresenteerd door een eindig aantal wervel-elementen, zoals puntwervels of discrete wervels. De snelheid die deze wervel-elementen op elkaar induceren wordt bepaald zodat de beweging van deze elementen kan worden gevolgd. De stroomfunctie (ψ) en de nieuwe posities van de wervel-elementen volgen uit de vergelijkingen (3.40) en (3.43). Een belangrijke aanname is dat wordt verondersteld dat de beweging van de wervel-elementen de beweging van het echte wervelsterkteveld benadert. Dit is het basisprincipe van de **Vortex** methode. Een voordeel van deze methode is dat juist over dat gebied in de stroming waar wervelsterkte aanwezig is informatie wordt verkregen en dat de berekening een grote nauwkeurigheid heeft. Nadelen van deze methode zijn dat de vergelijkingen wanneer twee werveldeeltjes te dicht bij elkaar komen singulier worden, randvoorwaarden moeilijk zijn aan te brengen en dat de rekentijden van de orde (N^2) zijn met N het aantal deeltjes in het rekengebied.

Wanneer de singulariteit wordt omzeild door de circulatie in de kern van een werveldeeltje te vermenigvuldigen met een verdelingsfunctie wordt gesproken over de **Discrete Vortex Methode**.
Omdat de Vortex methode de basis is voor de Euleriaanse/Lagrangiaanse oplosmethode, wordt deze methode in paragraaf 4.2 besproken. In de praktijk wordt een aantal varianten van de Vortex methode gebruikt. Deze zijn veelal drie-dimensionaal en enkel geschikt voor zeer specifieke situaties (Gustafson *et al.* 1990; Laan 1981) zij worden hier niet behandeld.

- **Euleriaanse/Lagrangiaanse methode:** bij deze methode, de zogenaamde **Vortex In Cell** methode, wordt de Poissonvergelijking (3.39) Euleriaans en de bewegingsvergelijking (3.54) Lagrangiaans opgelost. Het wervelsterkteveld wordt gerepresenteerd door puntwervels die **niet direct** snelheden op elkaar induceren. Over het rekengebied wordt een rekenrooster aangebracht waarop de Poissonvergelijking door een numerieke differentiemethode wordt opgelost. Doordat de coëfficiëntenmatrix die de hoekpunten van een rekenmolecuul bevat, constant is en er snelle Poisson-solvers zijn, is het oplossen van de Poissonvergelijking relatief eenvoudig. De wervelsterkte in de roosterpunten wordt verkregen door de circulatie van de puntwervels die in een rekencel zitten, gewogen her te verdelen naar de omliggende roosterpunten. Evenals bij de Vortex methode wordt juist over dat gebied in de stroming waar wervelsterkte aanwezig is, informatie verkregen.
In dit onderzoek wordt gebruik gemaakt van de Vortex In Cell methode om de wervelbeweging boven de bodemribbel te simuleren. In paragraaf 4.3 wordt nader ingegaan op deze Vortex In Cell methode.

4.1 Operator Splitting

De baan van een werveldeeltje in een visceuze vloeistof wordt beschreven door vergelijking (3.54) en wordt bepaald door twee termen: de convectie term en de diffusie term. Wanneer $\vec{r}(\alpha,t)$ de positie van een werveldeeltje weergeeft op tijdstip (t) uitgaande van zijn beginpositie (α) dan wordt de baan van het deeltje gegeven door:

$$\frac{d\vec{r}(\alpha,t)}{dt} = \vec{u}(\vec{r}(\alpha,t),t) \qquad \text{met} \quad \begin{cases} \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \alpha = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\vec{r}(\alpha,0) = \alpha \ . \tag{4.3}$$

Door mee te bewegen met een werveldeeltje volgens (4.2) kan de convectie term worden ontkoppeld van de diffusie term en kunnen de ontstane vergelijkingen afzonderlijk worden opgelost (zie Baker 1979; Chorin 1972; Gustafson *et al.* 1991; Den Toonder 1991; Van der Vegt 1985). De totale oplossing voor de wervelsterkte-vergelijking (3.54) wordt verkregen door achtereenvolgens het niet visceuze deel (de Euler-vergelijking):

$$\frac{\partial \omega^E}{\partial t} + u\frac{\partial \omega^E}{\partial x} + v\frac{\partial \omega^E}{\partial y} = 0 \ , \tag{4.4}$$

gevolgd door het visceuze deel:

$$\frac{\partial \omega^D}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^D \ . \tag{4.5}$$

op te lossen voor een tijdstap (Δt) en de afzonderlijke oplossingen te sommeren na deze tijdstap. De convectie vergelijking representeert de meebewegende afgeleide van een werveldeeltje in een niet-visceuze vloeistof, waarvoor geldt: $D\omega/Dt=0$.

De oplossing van de convectie vergelijking wordt verkregen door de eerste-orde vergelijking (4.2) te integreren (zie paragraaf 4.1.1).

De diffusievergelijking beschrijft de verpreiding van wervelsterkte in ruimte en tijd in een visceuze vloeistof in een continuum model. Er is een analogie aanwezig tussen de diffusievergelijking en de kansrekening. Uitgaande van deze analogie worden in het discrete model, wanneer het wervelsterkteveld wordt weergegeven door een aantal discrete werveldeeltjes, de verplaatsingen van de deeltjes beschreven door een Random Walk (zie paragraaf 4.2.1).Hiermee wordt de diffusie gesimuleerd.

4.1.1 Convectie vergelijking

Uitgaande van de Euler-vergelijking (4.4) voor de wervelsterkte wordt de nieuwe positie van een werveldeeltje verkregen door de volgende eerste-orde differentiaal-vergelijking te integreren (Gustafson *et al.* 1991):

$$\frac{d\vec{r}(\alpha,t)}{dt} = \vec{u}(\vec{r}(\alpha,t),t) = \nabla\times\psi(\vec{r},t) \quad . \tag{4.6}$$

De stroomfunctie (ψ) volgt uit het oplossen van de Poissonvergelijking (3.39). De beginvoorwaarde voor vergelijking (4.6) wordt gegeven door de beginpositie van de werveldeeltjes:

$$\omega(\vec{r}(\alpha,t_0),t_0) \quad . \tag{4.7}$$

Bij het oplossen van (4.6) is gebruik gemaakt van behoud van wervelsterkte ($D\omega/Dt=0$) in een niet-visceuze vloeistof, hetgeen impliceert:

$$\omega(\vec{r}(\alpha,t),t) = \omega(\vec{r}(\alpha,t_0),t_0) \quad . \tag{4.8}$$

4.1.2 Diffusievergelijking

De diffusie term zorgt voor de verspreiding van de wervelsterkte in de tijd en ruimte. Analytische oplossingen van de diffusievergelijking voor de wervelsterkte in een continuum model in een oneindige ruimte waarin zich geen wanden bevinden zijn bekend. Deze oplossingen van de diffusievergelijkingen in een één-dimensionale en twee-dimensionale rekenruimte worden in deze paragraaf gegeven.

Wanneer het wervelsterkteveld wordt gerepresenteerd door een eindig aantal discrete werveldeeltjes zoals puntwervels (zie paragraaf 4.2), dan kan de verplaatsing van deze deeltjes in het discrete model worden beschreven door de Random Walk waarmee de diffusie wordt gesimuleerd. Hier wordt gebruik gemaakt van de analogie die bestaat tussen de analytische oplossing in het continuum model en de vergelijkingen die een Gaussische kansverdeling beschrijven voor een oneindig aantal discrete deeltjes. In paragraaf 4.2.1 wordt meer uitvoerig ingegaan op deze analogie.

Hieronder wordt eerst de analytische oplossingen gegeven van de diffusievergelijking voor een één- en tweedimensionale ruimte. Beschouw de volgende diffusievergelijking met constante diffusiviteit ν:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) , \tag{4.9}$$

met beginvoorwaarde:

$$\omega(x,0) = \omega_0 f_\delta(x) , \tag{4.9.a}$$

waarin f_δ de Dirac Delta-functie en randvoorwaarden:

$$\omega(\pm\infty,t) = 0 \quad . \tag{4.9.b}$$

Deze vergelijking beschrijft de verspreiding door diffusie van wervelsterkte (ω) over een ruimte (x), in de tijd.

Op het tijdstip $t=0$ is alle wervelsterkte geconcentreerd in het punt $x=0$ en $y=0$ en de nieuwe wervelsterkte wordt bepaald op $t>0$.
Bovenstaande diffusievergelijking (4.9) heeft als oplossing (Battjes 1989.b; den Toonder 1991):

$$\omega(x,t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2\nu t}}\right)^2\right] . \tag{4.10}$$

Compleet analoog voor een twee-dimensionale rekenruimte:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right), \tag{4.11}$$

met beginvoorwaarde:

$$\omega(x,0) = \omega_0 f_\delta(x-x')f_\delta(y-y') , \tag{4.11.a}$$

met f_δ de Dirac Delta-functie en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \omega(\pm\infty,0,t) = 0 \\ \omega(0,\pm\infty,t) = 0 , \end{cases} \tag{4.11.b}$$

heeft vergelijking 5.15 als oplossing:

$$\omega(x,y,t) = \frac{\omega_0}{4\pi\nu t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2\nu t}}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{\sqrt{2\nu t}}\right)^2\right)\right] . \tag{4.12}$$

Uitgaande van deze analytische oplossingen (4.10) en (4.12) respectievelijk in een één- en twee-dimensionale ruimte wordt in paragraaf 4.2.1 de analogie gepresenteerd tussen de oplossingen met de kansrekening wanneer het wervelsterkteveld (ω_0) wordt gediscretiseerd.

4.1.3 Nauwkeurigheid en convergentie

Bij de simulatie van de wervelbeweging ontstaan fouten door de kern van een discreet werveldeeltje als niet deformeerbaar te beschouwen. In werkelijkheid vervormt zo'n vloeistof-element. Gustafson *et al.* (1990) geeft aan hoe de nauwkeurigheid kan worden getest door te controleren of bepaalde grootheden behouden blijven gedurende de berekening. Een belangrijke voorwaarde hiervoor is dat het snelheidveld voldoende glad is.

In een twee-dimensionale oneindige ruimte waarin geen wanden aanwezig zijn, gelden de volgende behoudswetten:

$$\begin{cases} \int_{C(t)} \omega \, dS = \text{constant} \\ \int_{C(t)} x \cdot \omega \, dS = \text{constant} \\ \int_{C(t)} y \cdot \omega \, dS = \text{constant} \end{cases} , \qquad (4.13)$$

De eerste term geeft aan dat totale hoeveelheid wervelsterkte constant moet zijn, de laatste twee uitdrukkingen houden verband met het behoud van impuls in x-richting en y-richting in de vloeistof. C(t) is de oppervlakte van het beschouwde gebied zoals weergegeven in Figuur 3.5.

Wanneer de vergelijkingen numeriek worden opgelost geldt nog een aantal convergentiecriteria. Deze convergentie-criteria vallen buiten dit onderzoek. Voor meer informatie wordt verwezen naar Gustafson *et al.* (1991).

4.2 Discretisatie wervelsterkteveld door puntwervels

Om de vergelijkingen die de wervelbeweging beschrijven volgens een Lagrangiaanse of Euleriaanse/Lagrangiaanse methode numeriek op te lossen moet het wervelsterkteveld worden gediscretiseerd. De meest eenvoudige methode om het wervelsterkteveld te discretiseren is om het weer te geven door een eindig aantal puntwervels (Gustafson *et al.* 1991). Beschouw een twee-dimensionale rekenruimte en de radiaal symmetrische functie $f_\delta(\vec{r})$ zodanig dat (Acheson 1990; Gustafson *et al.* 1991):

$$\int_{R^2} f_\delta(\vec{r})\,d\vec{r} = 1 \quad . \tag{4.14}$$

Definieer vervolgens:

$$f_\delta(\vec{r}) = f_\delta(x,y) = \frac{1}{\delta_d^{\,2}} f\left(\frac{x}{\delta_d}, \frac{y}{\delta_d}\right) . \tag{4.15}$$

Wanneer $\delta_d \to 0$ dan benadert de $f_\delta(x,y)$ de Dirac Delta-functie.
Het wervelsterkteveld (ω) wordt vervolgens weergegeven door N puntwervels op plaatsen $\vec{r}_i$ en sterkte Γ_i (Den Toonder 1991; Van der Vegt 1989):

$$\omega(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i f_\delta(|\vec{r}-\vec{r}_i(t)|) \quad , \tag{4.16}$$

met:

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \quad . \tag{4.17}$$

Hierbij wordt verondersteld dat de puntwervels het echte wervelsterkteveld benaderen. In de volgende paragraaf wordt uitgaande van deze discretisatie de Random Walk, die de diffusie beschrijft in een discreet model via de verplaatsing van een puntwervel, beschreven. In paragraaf 4.2.2 worden op basis van deze discretisatie via het theorema van Stokes (vergelijking (3.29)) vergelijkingen afgeleid voor de circulatie (Γ_i) die aan een puntwervel wordt toegekend.

In de paragrafen (4.3) en (4.4) wordt ingegaan op simulatie van de wervelbeweging met puntwervels met respectievelijk de **Vortex** methode en de **Vortex In Cell** methode.

4.2.1 De Random Walk

Nu bepaald is op welke wijze het wervelsterkteveld (ω) wordt gediscretiseerd is het mogelijk om de analogie die aanwezig is tussen de oplossingen van de diffusievergelijking in het continuum model en de Gaussische kansverdeling in een discreet model te beschrijven. De verspreiding van wervelsterkte in een continuum model wordt in het discrete model weergegeven door een stochastische verplaatsing van de puntwervels, beschreven door de Random Walk. Een groot voordeel van deze beschrijving met de Random Walk is dat op een computer eenvoudig stochastische parameters kunnen worden gegenereerd, zodat de diffusievergelijkingen niet numeriek behoeven te worden opgelost, hetgeen de rekentijd reduceert. Hieronder wordt in het kort het principe van de Random Walk weergegeven. Voor meer uitgebreide informatie wordt verwezen naar Feller (1950) en Gusafson *et al.* (1991).

Veronderstel dat een discreet deeltje zich beweegt langs een rechte weg en veronderstel dat de beweging wordt beschreven door het volgende experiment: Op het tijdstip 0,1,2,3...wordt een munt gegooid. Wanneer kop (kp) boven ligt beweegt het deeltje zich met stap Δz naar voren. Komt kruis (ks) boven dan beweegt het deeltje Δz naar achteren.

Stel $Pr\{kp\}=w_p$ en $Pr\{ks\}=w_q=1-w_p$ zodat voor elk ogenblik de volgende stochastische variabele is gedefinieerd:

$$W_i(\hat{w}) = \begin{cases} +\Delta z & \text{als} \quad \hat{w} = kp \\ -\Delta z & \text{als} \quad \hat{w} = ks \end{cases} , \tag{4.18}$$

zodat:

$$Pr\{W_i(\hat{w})\} = +\Delta z = w_p \quad , \quad Pr\{W_i(\hat{w})\} = -\Delta z = w_q \quad . \tag{4.19}$$

Wanneer x_m de positie van een deeltje is na een aantal tijdstappen (m) en wordt uitgegaan van een startpositie in de oorsprong, dan is de positie van dat deeltje bepaald door:

$$x_m = \sum_{i=0}^{m-1} W_i \quad , \quad m = 1,2,.... \tag{4.20}$$

Hierin is x_m een som van discrete, onafhankelijke stochastische variabelen, waarvan de realisatie wordt weergegeven door $\pm q\Delta z, (q=0,1,...)$.De variantie van dit proces is: $\sigma^2 = m(\sigma_w)^2 = m(\Delta z)^2 = (\Delta z)^2 t/\Delta t$, waarin $t/\Delta t$ het aantal tijdstappen (m) is. Via een aantal wiskundige bewerkingen kan worden aangetoond (Feller 1950; Den Toonder 1991) dat in de limiet, $\Delta z \to 0$ en $\Delta t \to 0$, het proces van de Random Walk een Gaussische kansdichtheid heeft met een gemiddelde van $E(x_t)=0$ en een variantie van (σ^2):

$$p(x_t,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_t^2}{\sigma^2}\right) \tag{4.21}$$

Deze kansdichtheidfunctie in een één-dimensionale ruimte komt overeen met de oplossing van vergelijking (4.10) wanneer voor $\sigma^2 = 2\nu t$ wordt genomen. Deze overeenkomst kan worden gebruikt voor de simulatie van het diffusieproces in één dimensie. Voor een twee-dimensionale rekenruimte is het bewijs analoog aan dat van de één dimensionale rekendimensie.

Stel dat op $t=0$ alle wervelsterkte in de oorsprong (x_0,y_0) wordt gerepresenteerd door N discrete werveldeeltjes, met hun positie in de oorsprong, met elke deeltje een wervelsterkte van ω_0/N.

Vervolgens bewegen de discrete werveldeeltjes zich, onafhankelijk van elkaar, volgens een Random Walk, hetgeen impliceert dat elk discreet deeltje zich beweegt over een afstand $+\Delta z$ of $-\Delta z$ met een kans $w_p = w_q = ½$ (Dercksen *et al.* 1989; Den Toonder 1991).

Gebruikmakend van de variantie van de analytische oplossing ($\sigma^2 = 2\nu\Delta t$) en de variantie van de Random Walk ($\sigma^2 = (\Delta z^2 t)/\Delta t$) volgt dat de absolute verplaatsingen van een discreet deeltje in een twee-dimensionale ruimte, met een keuze voor de onafhankelijke richtingen $\Delta x = \Delta z$ en $\Delta y = \Delta z$, worden gegeven door:

$$\sigma^2 = 2\nu t = \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} t \quad \Rightarrow \quad \Delta z = \sqrt{2\nu\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta x = \sqrt{2\nu\Delta t} \\ \Delta y = \sqrt{2\nu\Delta t} \end{cases} . \qquad (4.22)$$

Omdat elk discreet werveldeeltje een hoeveelheid wervelsterkte bezit (ω_0/N), wordt de verspreiding van de wervelsterkte in tijd en ruimte gesimuleerd met de Random Walk zolang het aantal werveldeeltjes (N) groot genoeg is, oftewel de tijdstap Δt klein genoeg wordt genomen, immers $N = t/\Delta t$. De verplaatsing in x- en y-richting van een discreet werveldeeltje is bepaald door een absolute verplaatsing van respectievelijk Δx en Δy (vergelijking 4.22) te vermenigvuldigen met een Gaussisch-verdeelde stochast (vergelijking 4.21). Deze kan via een aantal bewerkingen op de computer worden verkregen.

De RANDOM-generator op de computer genereert getallen met een uniforme kansverdeling op $[0, +1]$ en een uniforme kansdichtheid $p(x_t) = 1$ voor $\{0 \le x_t \le 1\}$ (met gemiddelde $E(x_t) = 1/2$ en variantie $\sigma^2 = 1/12$) waaruit de twee uniform-verdeelde stochasten N^1 en N^2 getrokken worden. Omzetten van de uniforme verdeling in een Gaussische verdeling met variantie $\sigma^2 = 1$ en gemiddelde $E(x_t) = 0$ geeft de onafhankelijke Gaussisch-verdeelde stochasten $W^{(x)}(t)$, $W^{(y)}(t)$ in x- en y-richting (Gustafson *et al.* 1991):

$$\begin{cases} W^{(x)}(t) = \cos(2\pi N^{(1)}) \cdot \sqrt{(-2\log(N^{(2)}))} \\ W^{(y)}(t) = \sin(2\pi N^{(1)}) \cdot \sqrt{(-2\log(N^{(2)}))} \end{cases} . \qquad (4.23)$$

De beschrijving van de baan van een deeltje met de Random Walk is gebaseerd op een constante viscositeit in ruimte en tijd. Wanneer de viscositeit in de ruimte en de tijd varieert dan is de beschrijving met de Random walk niet meer voldoende en moet worden overgegaan op stochastische differentiaalvergelijkingen -de zogenaamde Fokker Planck-vergelijkingen- (Den Toonder 1991).
In de literatuur wordt veelal gebruik gemaakt van de "Modified Random Walk" (zie Chorin 1972, p.787; Den Toonder 1991, p.20-21). Een vereiste hierbij is dat de tijdstap (Δt) constant is gedurende de berekening zodat het aantal deeltjes (N) wordt gegeven door ($t/\Delta t$). Wanneer dit het geval is kan de diffuse verplaatsing direct worden bepaald uit een Gaussische verdeling. In dit onderzoek echter wordt de tijdstap (Δt) bepaald door de maximale snelheid van de deeltjes op tijdstip (t). Δt is dus variabel gedurende het rekenproces zodat geen gebruik kan worden gemaakt van de "Modified Random Walk".

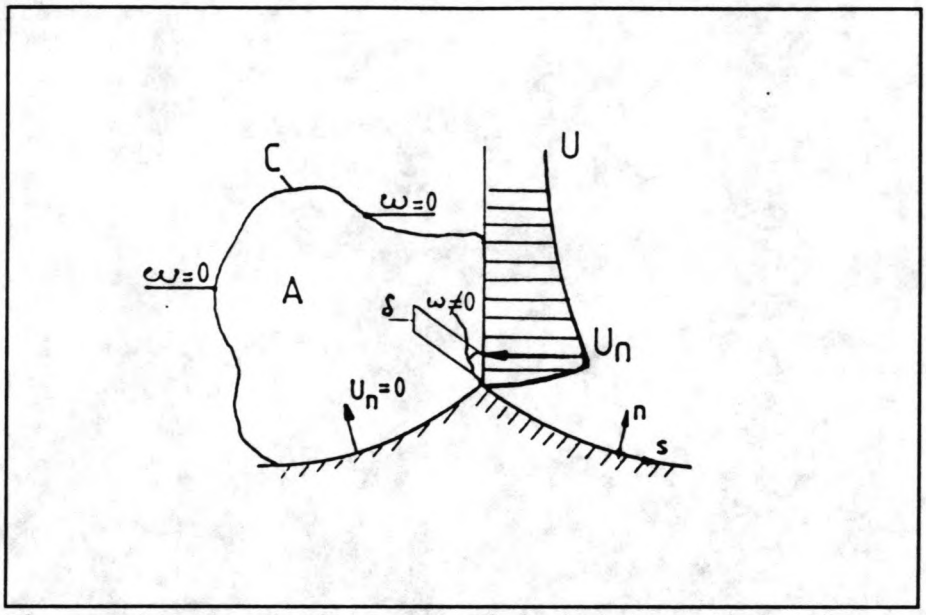
4.2.2 Introductie circulatie in visceuze stroming

De in paragraaf (4.1.2) gegeven oplossingen van de diffusievergelijkingen gelden voor een visceuze vloeistof in een oneindige ruimte zonder vaste wanden. Wanneer een vaste wand in een visceuze stroming aanwezig is moet de normaalsnelheid (u_n) en de tangentiële snelheid (u_s) gelijk aan nul zijn op deze ondoorlatende wand, oftewel:

- $u_n = 0 \rightarrow \partial\psi/\partial s = 0$, oftewel: ψ = constant langs de wand
- $u_s = 0 \rightarrow \partial\psi/\partial n = 0$.

De normaalsnelheid is nul te maken door met een integraalmethode een potentiaalstroming aan te brengen. Het nul maken van de tangentiële snelheid (u_s) representeert een essentieel fysisch proces van de introductie van circulatie. Onder de invloed van de viscositeit wordt een binnengrenslaag gevormd waarin de snelheid varieert van $u_s=0$ aan de wand tot $u_s=u_b$ van de hoofdstroom buiten de grenslaag. Door deze visceuze effecten ter plaatse van een ondoorlatende wand met een willekeurige oriëntatie in de ruimte geldt: $\partial u_s/\partial n \neq 0$ en $\partial u_n/\partial s = 0$.

Hieronder wordt beschreven op welke wijze de hoeveelheid circulatie (Γ), die per eenheid van tijd in de stroming moet worden geïntroduceerd, wordt bepaald. Er wordt een niet visceuze en initieel rotatievrije stationaire stroming beschouwd. In het balansgebied (A) (zie Figuur 4.1), omsloten door een randcontour (C), wordt op een karakteristieke plaats op deze randcontour circulatie gegenereerd.



Figuur 4.1 Introductie van circulatie in balansgebied (A) omsloten door randcontour (C).

Substitutie van de continuïteitsvergelijking ($\nabla\cdot\vec{u}=0$) in de Euler-vergelijking ($D\omega/Dt=0$) geeft de volgende behoudswet voor de wervelsterkte in een tweedimensionale ruimte:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla\cdot(\omega\vec{u}) = 0 \quad . \tag{4.24}$$

Integratie van de wervelsterkte (ω) over het balansgebied (A) geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint \omega\, dA + \iint \nabla\cdot(\omega\vec{u})\, dA = 0 \quad , \tag{4.24.a}$$

waarin $\iint \omega\, dA$ in de eerste term gelijk is aan de circulatie (Γ) (vergelijking 3.29) en de tweede term via het theorema van Stokes kan worden geschreven als $\oint \vec{n}\cdot\omega\vec{u}\, ds$.

Wanneer de normaal (n) op de randcontour (C) in het gebied (A) naar binnen wordt aangenomen, gaat vergelijking (4.24.a) over in:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \oint \omega u_n \, ds \quad , \tag{4.24.b}$$

hierin is u_n de naar binnen gerichte normaalsnelheid op de contour (C). De eerste term geeft de verandering weer van de voorraad van circulatie langs C en de tweede term geeft het transport weer van wervelsterkte (ω) over C. Op de gladde ondoorlatende wand van de bodemribbel in Figuur 4.1 geldt de randvoorwaarde: $u_n=0$. Op de gehele randcontour geldt $\omega=0$, met uitzondering van een stuk randcontour ter plaatse van de top van de bodemribbel waar het snelheidsveld over een dikte (δ) van de grenslaag niet rotatievrij is ($\omega \neq 0$). Over dit stukje van de randcontour stroomt wervelsterkte het balansgebied (A) binnen, waardoor Γ_c varieert.

De wervelsterkte (ω) in vergelijking (4.24.b) is gelijk is aan $\partial u_s / \partial n$, aangezien $\partial u_n / \partial s$ bij benadering gelijk nul is. Substitutie van ω in vergelijking (4.24.b) geeft:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \int_0^{\delta} u_n \left(\frac{\partial u_s}{\partial n}\right) dn \quad . \tag{4.25}$$

Hierin geeft de term $u_n(\partial u_s / \partial n)$ de flux weer van wervelsterkte binnen de grenslaag (δ). Indien de randcontour (C) de grenslaag loodrecht doorsnijdt geldt: $u_s=u_n$. Hiermee wordt vergelijking (4.25) na integratie over de grenslaagdikte (δ) (Prandtl *et al.* 1934):

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \int_0^{\delta} u_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial n}\right) dn = \tfrac{1}{2} u_b^2 \quad , \tag{4.25.a}$$

waarin u_b de snelheid is net buiten de binnengrenslaag.

Integratie van vergelijking (4.25.a) naar t levert:

$$\Gamma = \int_0^{t'} \tfrac{1}{2} u_b^2 \, dt \quad , \tag{4.25.b}$$

waarbij Γ de hoeveelheid circulatie is die van t=0 tot t=t' moet worden geïntroduceerd. Numeriek wordt deze circulatie (Γ) gerepresenteerd door de som van de circulaties van een aantal discrete werveldeeltjes: $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i$. De circulatie ($\Gamma_i$) die aan de opeenvolgende discrete werveldeeltjes wordt toegekend, is daarmee bepaald (Longuet-Higgins 1981):

$$\Gamma_i = \int_{t=t_{i-1}}^{t=t_i} \tfrac{1}{2} u_b^2 \, dt \approx \tfrac{1}{2} u_b^2 \, \Delta t \quad , \tag{4.25.c}$$

waarbij de integraal wordt genomen over de tijd die verstreken is na het loslaten van het voorafgaande werveldeeltje.
In het discrete model betekent dit dat na het loslaten van een discreet werveldeeltje in het introductiepunt op een tijdstip t_{i-1}, er een nieuw werveldeeltje wordt geïntroduceerd op tijdstip (t_i) met een circulatie: $\Gamma_i = \tfrac{1}{2} u_b^2 \Delta t$, met $\Delta t = t_i - t_{i-1}$. De positie van het introductiepunt is afhankelijk van de stromingssituatie.

Wanneer in de stroming lichamen met scherpe hoeken voorkomen is de positie waar de wervellaag loslaat bekend. De wervelsterkte wordt dan geïntroduceerd in de omgeving van dit loslaatpunt. De positie van dit loslaatpunt dient empirisch te worden bepaald in de meeste gevallen. Bij de bepaling van de positie moet ten alle tijden worden voldaan aan de Kutta-voorwaarde. Deze houdt in dat er van een omstroomd lichaam wervelsterkte wordt afgescheiden en dat deze wervelsterkte van het lichaam af wordt getransporteerd. Dit houdt in dat er geen stroming om de hoekpunten plaats mag vinden. Wanneer niet aan de Kutta-voorwaarde wordt voldaan moet het loslaatpunt dichter bij de wand worden genomen of moet er een discrete wervel worden bijgeplaatst.

Wanneer de positie van het loslaatpunt niet goed bekend is, kan de methode van Chorin worden toegepast (Gustafson *et al.* 1991). Bij deze methode wordt de snelheid ter plaatse van de rand bepaald. Wanneer niet aan de no-slip conditie wordt voldaan worden er discrete wervels geïntroduceerd zodanig dat door de terugstroming veroorzaakt door deze discrete wervels, aan de randvoorwaarde ($u_s=0$) wordt voldaan.

Het aanbrengen van de discrete wervels geschiedt door de rand op te delen in een aantal intervallen met in elk interval per tijdstap een werveldeeltje. Deze methode is zeer geschikt bij hoge waarden van het getal van Reynolds.

4.3 Lagrangiaanse methode: de Vortex methode

Wanneer het wervelsterkteveld wordt gerepresenteerd door puntwervels volgens vergelijking (4.16) dan volgt het snelheidsveld bij de **Vortex methode** uit de snelheden die de puntwervels op elkaar induceren. De nieuwe posities van de puntwervels wordt gevonden door N eerste-orde differentiaalvergelijkingen te integreren, gebruikmakend van de wet van Biot-Savart (Dercksen *et al.* 1989; Steketee 1973; Van der Vegt 1989):

$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = u(\vec{r}_j,t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{\Gamma_i(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^2} \quad . \tag{4.26}$$

Eventueel moet voor de totale snelheid van de puntwervels hier nog de rotatievrije bijdrage uit de hoofdstroom (u_∞,v_∞) bij worden opgeteld.

Wanneer veel puntwervels in het rekengebied worden geïntroduceerd, komen de puntwervels dicht bij elkaar te liggen en induceren zij hoge snelheden op elkaar door het singuliere karakter van de vergelijkingen. Doordat het snelheidsveld singulier wordt wanneer twee puntwervels dicht bij elkaar komen, ontstaan chaotische bewegingen (Gustafson *et al.* 1991). De representatie van het wervelsterkteveld door puntwervels bij een Vortex methode zonder aandacht te besteden aan deze singulariteiten, is dus niet juist.

Er zijn diverse manieren om deze singulariteit te omzeilen waarvan de belangrijkste hieronder worden besproken.

Longuet-Higgins (1981) laat twee puntwervels die elkaar te dicht naderen, samengaan tot één puntwervel volgens de hieronder beschreven procedure:

- Wanneer de afstand tussen twee puntwervels:

$$|\Delta r| < (\delta_i + \delta_j) \quad , \tag{4.27}$$

met:

$$\Delta r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} \delta_i = \sqrt{\epsilon(t - t_i)} \\ \delta_j = \sqrt{\epsilon(t - t_j)} \end{cases} , \tag{4.28}$$

met Δr de onderlinge afstand tussen twee puntwervels en (δ_i, δ_j) een maat voor het invloedsgebied van een puntwervel bepaald door de "cluster" viscositeit (ϵ) en het tijdstip (t) na het tijdstip (t_i) van loslaten, dan wordt van deze twee puntwervels één puntwervel gemaakt. De "cluster"viscositeit (ϵ) komt ongeveer overeen met de moleculaire viscositeit (ν_m) van de vloeistof.

De circulatie van de nieuwe puntwervel is gelijk aan de som van de circulaties (Longuet-Higgins 1981):

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_i + \Gamma_j \quad . \tag{4.29}$$

De positie van de nieuwe puntwervel wordt bepaald door de verhouding tussen de circulatie van (Γ_i, Γ_j) en Γ_{ij} en die verhouding over te halen naar de plaatsverschilvector tussen de twee puntwervels (Γ_i, Γ_j). De nieuwe "leeftijd" van de puntwervel (Γ_{ij}), waarmee zijn invloedsgebied (δ_i) weer is bepaald, is als volgt:

$$t_{ij} = t_i + t_j - t \quad . \tag{4.30}$$

Op deze eenvoudige manier wordt de singulariteit opgeheven, wanneer twee puntwervels te dicht bij elkaar komen. Door de waarde van de "cluster" viscositeit (ϵ) te variëren kan een indruk worden verkregen over de invloed van het samenvoegen van puntwervels die elkaar te dicht naderen op de wervelbeweging op grote schaal.

• Een andere mogelijkheid is om de circulatie bij de puntwervels door een verdelingsfunctie (f_σ) te verdelen over een zeker gebied in de kern met straal (δ_{cl}) (de "cutoff length") (Chorin 1973; Gustafson *et al.* 1991). Zulke werveldeeltjes worden **discrete wervels** genoemd en de methode de **Discrete Vortex Methode**. Via deze methode wordt het snelheidsveld van twee elkaar naderende werveldeeltjes eindig. De stroomfunctie voor een discrete wervel met een kern met straal (δ_{cl}) wordt in het algemeen weergegeven door:

$$\begin{cases} \psi = -\dfrac{\Gamma_i}{2\pi}\ln|\vec{r}| & |\vec{r}| \geq \delta_{cl} \\ \psi = -\dfrac{\Gamma_i}{2\pi}\dfrac{|\vec{r}|}{\delta_{cl}} & |\vec{r}| < \delta_{cl} \end{cases} \quad . \tag{4.31}$$

De waarde die aan de "cutoff length" (δ_{cl}) moet worden toegekend is niet eenduidig bepaald en wordt bepaald door de orde van nauwkeurigheid van het rekenproces. Bij een nauwkeurigheid van $O(\Delta x^2)$ wordt de waarde voor δ_{cl} veelal $\max(\sqrt{\Delta x}, \sqrt{\Delta y})$ genomen (Gustafson *et al.* 1991).

In de literatuur (Gustafson *et al.* 1991; Peyret *et al.* 1990) worden verschillende soorten verdelingsfuncties oftewel "smoothing functions" beschreven. In het algemeen geldt bij de Vortex Methoden dat de simulatie van de wervelbeweging op grote schaal onafhankelijk is van de beweging op kleine schaal, zodat de soort verdeling niet zo belangrijk is. De verdelingsfunctie (f_σ) die de verdeling van de circulatie in de kern bepaalt, moet evenals de Dirac Delta-functie, voldoen aan:

$$\int_{R^2} f_\sigma(\vec{r})\,d\vec{r} = 1 \quad . \tag{4.32}$$

De representatie van het wervelsterkteveld door N discrete wervels gaat hiermee over in (Chorin 1973; Gustafson *et al.* 1991; Den Toonder 1991; Van der Vegt 1989):

$$\omega(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i f_\sigma(\vec{r}-\vec{r}_i(t)) \quad . \tag{4.33}$$

Chorin (1973) (zie ook Gustafson *et al.* 1991) gebruikte de volgende verdelingsfunctie:

$$f_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\,\delta_{cl}\,|\vec{r}\,|} \tag{4.34}$$

Deze verdeling is singulier in de oorsprong zodat wordt gesteld $f_\sigma(0)=0$. Een effect van deze verdelingsfunctie is dat twee werveldeeltjes die dicht bij elkaar zitten toch nog hoge snelheden op elkaar induceren.

Milinazzo en Saffman (zie Gustafson *et al.* 1991; Peyret *et al.* 1990) gebruikten de volgende verdelingsfunctie voor de circulatie binnen de kern ($0 \le r \le \delta_{cl}$) waarmee de verdeling continu wordt binnen de kern:

$$f_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\,\delta_{cl}^2} \quad . \tag{4.35}$$

Een mogelijke Gaussische verdelingsfunctie (f_σ) in een twee-dimensionale rekenruimte is als volgt (Gustafson *et al.* 1991; Van der Vegt *et al.* 1985):

$$f_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{\pi\,\delta_{cl}} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|^2}{\delta_{cl}}\right), \tag{4.36}$$

met:

$$\delta_{cl} = c\,h^q \qquad q \in (0,1) \tag{4.36.a}$$

Hierin is h de ruimtelijke stapgrootte (Δx, Δy), q een parameter die vrij gekozen kan worden en c een parameter met een zodanige eenheid dat δ de eenheid van lengte heeft.

Wanneer een Gaussische functie wordt toegepast ontstaan de zogenaamde "vortex-blobs". De vergelijking (4.36) voor de wervelkern is dan op een term na gelijk aan de analytische oplossing van de diffusievergelijking (4.12) in een continuum model zodat dan precies de diffusievergelijking voor zo'n wervel wordt opgelost. Van deze analogie wordt gebruik gemaakt om visceuze effecten te simuleren. In de literatuur wordt nog een groot aantal andere verdelingsfuncties beschreven. Voor meer gedetailleerde informatie over deze verdelingsfuncties wordt verwezen naar Gustafson *et al.* (1991), p. 36-41.

Nu bepaald is op welke wijze de singulariteit kan worden omzeild, kan de nieuwe positie van een discreet werveldeeltje in een niet visceuze vloeistof worden bepaald door de volgende eerste orde differentiaalvergelijking te integreren:

$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{u}(\vec{r}_j, t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(\vec{r}-\vec{r}_j) \\ +\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(\vec{r}-\vec{r}_j) \end{pmatrix}, \qquad (4.37)$$

waarbij de stroomfunctie (ψ) afhankelijk is van de verdelingsfunctie die gebruikt wordt.

Wanneer de circulatie in de kern van een wervel wordt beschreven door een verdelingsfunctie (f_σ) dan is het niet mogelijk een eenduidige relatie voor de nieuwe posities van de discrete wervels aan te geven.
Om echter toch een idee te krijgen op welke wijze de vergelijkingen numeriek worden opgelost wordt hieronder de numerieke oplosmethode van de vergelijkingen besproken, waarbij het wervelsterkteveld wordt gerepresenteerd door puntwervels.

De stroomfunctie (ψ) is dan bepaald door:

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i}^{N} \Gamma_i \ln|\vec{r}-\vec{r}_i| \quad , \tag{4.38}$$

met in elk punt (x_i, y_i) een puntwervel met een circulatie:

$$\Gamma_i = \tfrac{1}{2}\Delta t(\Delta u_+^2 - \Delta u_-^2) \quad . \tag{4.39}$$

Hierin zijn u_+ en u_- de snelheden bijvoorbeeld aan weerskanten van een grenslaag die aanwezig is bij het einde van een plaat (zie Bijlage C) of bijvoorbeeld de snelheden buiten de binnengrenslaag (u_b) en op de wand ($u_s=0$) (zie vergelijking (4.25) en Figuur 4.1).

De nieuwe stochastische positie van een puntwervel in een visceuze vloeistof wordt verkregen door achtereenvolgens vergelijking (4.37) te integreren die het convectieve transport representeert, gevolgd door een stochastische verplaatsing beschreven door de Random Walk die het diffusie transport representeert:

$$\begin{cases} \hat{x}_j(t+\Delta t) = \hat{x}_j(t) + \Delta t\left\{-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\substack{i\\ i\neq j}}^{N} \dfrac{\Gamma_i(y_j-y_i)}{r_{i,j}^2}\right\} + \sqrt{2\nu\Delta t}\, W^{(x)}(t) \\ \hat{y}_j(t+\Delta t) = \hat{y}_j(t) + \Delta t\left\{+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\substack{i\\ i\neq j}}^{N} \dfrac{\Gamma_i(x_j-x_i)}{r_{i,j}^2}\right\} + \sqrt{2\nu\Delta t}\, W^{(y)}(t) \end{cases} \tag{4.40}$$

met:

$$r_{i,j}^2 = (x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2 \quad . \tag{4.41}$$

Hierin zijn $W^{(x)}(t)$ en $W^{(y)}(t)$ de stochastische variabelen, Gaussisch verdeeld op $[-\infty, +\infty]$, gemiddelde $E(x_t)=0$ en variantie $\sigma^2=1$.

Een nadeel van de Vortexmethode is dat bij N werveldeeltjes, (N^2) bewerking nodig zijn. Grote capaciteit van computers is veelal benodigd om een simulatie uit te voeren met deze methode waarbij de rekentijden volgens de literatuur (Gustafson *et al.* 1991; Peyret *et al.* 1990) enorm kunnen oplopen.

Het aanbrengen van de randvoorwaarden en het bepalen van de circulatie ter plaatse van het loslaatpunt van de bodemribbel is zonder wiskundige transformaties van de geometrie niet zondermeer mogelijk (Ikeda *et al.* 1989; Longuet-Higgins 1981).
Omdat binnen de sectie Vloeistofmechanica nog weinig ervaring is opgedaan met deeltjesmodellen wordt voor een andere oplosmethode gekozen welke afgeleid is van de Vortex methode. Gebruik wordt gemaakt van een Vortex In Cell methode waarbij de randvoorwaarden makkelijker zijn te modelleren en de rekentijden sterk worden gereduceerd.

4.4 Euleriaanse/Lagrangiaanse methode: de Vortex In Cell methode

Bij de Vortex In Cell methoden wordt uitgegaan van het volgende principe: het wervelsterkteveld wordt gerepresenteerd door puntwervels die elkaar niet rechtstreeks beïnvloeden, zoals dat bij de Vortex methode wel het geval is. Elk werveldeeltje zit in een **cel** van het rekenrooster dat is aangebracht in het stromingsgebied. Op dit rooster wordt de Poisson-vergelijking (3.39) opgelost waarna met de verkregen stroomfunctie (ψ) de snelheden in de roosterpunten via (3.38) worden berekend. Door de snelheden vanuit de roosterpunten gewogen over te halen naar een puntwervel in een cel, is de snelheid van een puntwervel en dus zijn positie na een tijdstap (Δt) bepaald.

Bij de Vortex In Cell Methode kan het wervelsterkteveld worden weergegeven door puntwervels zonder dat de vergelijking (4.26) singulier wordt. Immers de werveldeeltjes induceren indirect via de stroomfunctie (ψ) in de roosterpunten een snelheid op elkaar. Dit heeft als voordeel dat complexe verdelingsfuncties niet behoeven te worden gebruikt.

Een tweetal Vortex In Cell methoden die worden beschreven in de literatuur zijn:

- Nearest Grid Point methode
- Cloud In Cell methode.

In de Nearest Grid Point methode wordt de circulatie van een puntwervel die zich in een cel bevindt volledig toegekend aan het dichtstbijzijnde roosterpunt. Deze methode is daardoor minder nauwkeurig dan de Cloud In Cell methode. De N.G.P.-methode is een snelle rekenmethode en is geschikt voor die berekeningen waarbij geen grote nauwkeurigheid wordt vereist. Bij de Cloud In Cell methode daarentegen wordt de circulatie van een discrete puntwervel die zich in een cel bevindt via een gewogen herverdeling naar de roosterpunten overgebracht. Dit heeft tot gevolg dat de verstoringen initieel worden uitgemiddeld.

Een aantal voordelen van de Vortex In Cell methode is dat de rekentijd ten opzichte van de Vortex methode met een factor 20 wordt gereduceerd voor bepaalde situaties (afhankelijk van het aantal roosterpunten en het aantal discrete werveldeeltjes) (zie Peyret *et al.* 1990), geen wiskundige transformaties behoeven te worden uitgevoerd voor het modelgebied en de Poisson-vergelijking op een rooster wordt opgelost zodat de circulatie eenvoudig kan worden bepaald ter plaatse van het loslaatpunt.
De rekentijd bij de Vortex In Cell methoden is van de orde (N+MlogM) waarbij N het aantal discrete werveldeeltjes is en M het aantal roosterpunten. Deze voordelen ten opzichte van de Vortex methode hebben ertoe geleid dat gekozen is om de wervelbeweging boven de bodemribbel te simuleren met de Cloud In Cell methode.

4.4.1 De Cloud In Cell methode

Over het modelgebied wordt een rekenrooster aangebracht met elementen met zijden (Δx,Δy) waarop de vergelijking van Poisson wordt opgelost. De onbekenden in de roosterpunten zijn de stroomfunctie ($\psi_{i,j}$) en de wervelsterkte ($\omega_{i,j}$). De wervelsterkte ($\omega_{i,j}$) in de roosterpunten wordt bepaald door de sterkten en de posities van de puntwervels die zich in een cel bevinden.
De nieuwe positie van een puntwervel in een niet-visceuze vloeistof wordt wederom verkregen door de volgende eerste-orde differentiaalvergelijking te integreren:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{dt} = u(x_n,y_n) \\ \dfrac{dy_n}{dt} = v(x_n,y_n) \end{cases} \tag{4.42}$$

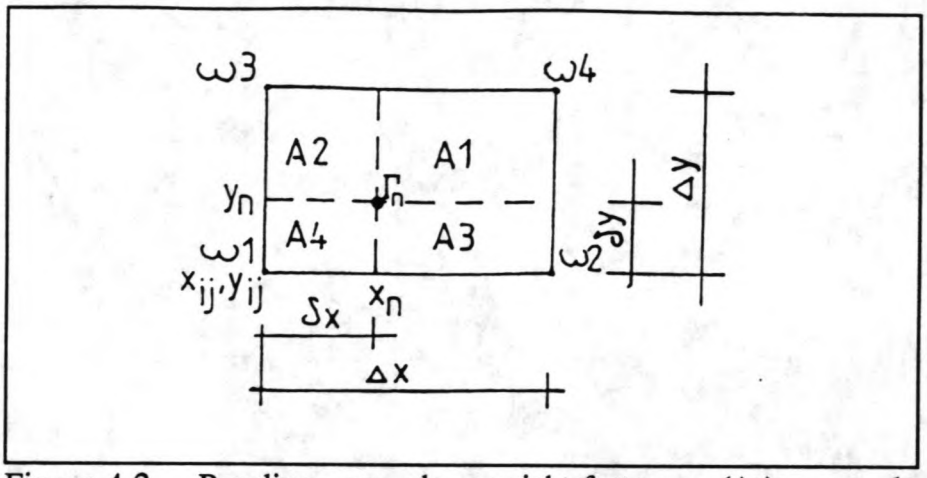
De wervelsterkte ($\omega_{i,j}$, $\omega_{i+1,j}$, $\omega_{i+1,j+1}$, $\omega_{i,j+1}$) in de hoekpunten van een roostercel wordt vervolgens verkregen door de circulatie (Γ_n) van een puntwervel die zich in de cel bevindt (x_n,y_n) gewogen her te verdelen naar vier deel-circulaties volgens: $\Gamma_k=(\Gamma_n A_k)/\ \Delta x\Delta y$,en deze deel-circulaties per eenheid van celgrootte ($\Delta x\Delta y$) aan de omliggende roosterpunten toe te kennen (zie Figuur 4.2). De gebruikte gewichtsfactoren voor de herverdeling van de circulatie naar de roosterhoekpunten in één cel zijn, met:

$$\begin{cases} \delta x = x_n - x_{i,j} \\ \delta y = y_n - y_{i,j} \end{cases} , \tag{4.43}$$

als volgt:

$$\begin{cases} A_1 = w_{i,j} = (\Delta x-\delta x)(\Delta y-\delta y) \\ A_2 = w_{i+1,j} = \delta x(\Delta y-\delta y) \\ A_3 = w_{i,j+1} = (\Delta x-\delta x)\delta y \\ A_4 = w_{i+1,j+1} = \delta x\delta y \end{cases} \tag{4.44}$$

Hierin zijn A_k de ingesloten oppervlakten door een puntwervel binnen een cel.



Figuur 4.2 Bepaling van de gewichtsfactoren (A_k) voor de Cloud In Cell methode.

De gewogen wervelsterkte in een roosterpunt gaat daarmee over in (Baker 1979; Peyret *et al.* 1990):

$$\omega(k) = \frac{A_k \Gamma_n}{(\Delta x\ \Delta y)^2} \qquad \text{met } k = 1,2,3,4 \quad . \tag{4.45}$$

Hierin zijn A_k de gewichtsfactoren, Γ_n representeert de circulatie van een puntwervel die zich in de cel bevindt en $\omega(k)$ is de wervelsterkte in de hoekpunten van de cel. In paragraaf 4.2.2 is afgeleid dat de circulatie die aan een puntwervel moet worden toegekend, gelijk is aan $\frac{1}{2}(u_b)^2\Delta t$ (zie vergelijking 4.25.c). Door de wijze van numerieke benadering wordt deze relatie niet gebruikt, omdat de grootte en de positie van u_b in het numerieke model niet eenduidig zijn bepaald. Per tijdstap (Δt) wordt één puntwervel losgelaten. De circulatie (Γ_n) die aan een puntwervel wordt toegekend, wordt bepaald door vergelijking (3.29) te discretiseren en uit te gaan van een bekende positie van het loslaatpunt:

$$\Gamma_n = \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta y}\right)\sqrt{(u_{gem}\Delta y \Delta t)^2 + (v_{gem}\Delta x \Delta t)^2} \quad , \tag{4.46}$$

met $\Delta x, \Delta y$ de zijdelengten van een cel en $\Delta u, \Delta v$ het verschil in snelheid over één cel, Δt de tijdstap en (u_{gem}, v_{gem}) de gemiddelde stroomsnelheid in het loslaatpunt. De eerste term in het rechterlid representeert de wervelsterkte (ω) en de tweede term representeert een factor die, uitgaande van de snelheden en de celgrootte, de wervelsterkte per Δt bepaalt. De circulatie blijft behouden ($D\Gamma_n/Dt=0$).

De Poisson-vergelijking (3.39) wordt middels een eindige-differentie methode op een rechthoekig rooster opgelost. Discretisatie van deze vergelijking met centrale differenties (Baker 1979; Peyret 1990) met een vijfpunts rekenmolecuul geeft:

$$\begin{cases} \dfrac{(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j})}{\Delta x^2} + \dfrac{(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1})}{\Delta y^2} = -\omega_{i,j} \\ \text{voor } 1 \le i \le N_x \ , \ 1 \le j \le N_y \end{cases} \tag{4.47}$$

De randvoorwaarden voor de stroomfunctie (ψ) zijn probleemafhankelijk. In het algemeen kunnen de volgende randvoorwaarden voor de stroomfunctie (ψ) worden opgelegd:

- bij een ondoorlatende rand geldt : $\psi =$ constant
- bij een instroomrand is de waarde voor $\psi(n)$ bepaald door integratie over de rand: $\Delta\psi(n) = u_s \, \Delta n$
- bij een uitstroomrand kan als randvoorwaarde worden opgelegd dat de stroomlijnen loodrecht ($\perp$) aansluiten op de rand: $\partial\psi / \partial s = 0$
- bij periodiciteit van het model geldt: $\psi_{1,j} = \psi_{Nx,j}$ of $\psi_{i,1} = \psi_{i,Ny}$.

De snelheden in de roosterpunten worden vervolgens berekend met centrale differenties over de berekende stroomfunctie (ψ) in de roosterpunten:

$$\begin{cases} u_{i,j} = \dfrac{+(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})}{2\Delta y} \\ v_{i,j} = \dfrac{-(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2\Delta x} \end{cases} \tag{4.48}$$

Het terughalen van de snelheid uit de roosterpunten naar een puntwervel in het punt (x_n,y_n) vindt plaats door bi-lineaire interpolatie:

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^{4} u(k) A_k}{\Delta x \Delta y} \quad \text{en} \quad v_n = \frac{\sum_{k=1}^{4} v(k) A_k}{\Delta x \Delta y} \quad . \tag{4.49}$$

Op dit punt aangekomen is de snelheid van een puntwervel (u_n, v_n) in het rekengebied bekend en dus zijn nieuwe positie door convectief transport na een tijdstap (Δt).

De nieuwe stochastische positie van een puntwervel in een visceuze vloeistof wordt dan:

$$\begin{cases} \hat{x}_n(t+\Delta t) = \hat{x}_n(t) + u_n \Delta t + \sqrt{2 \nu \Delta t}\, W^{(x)}(t) \\ \hat{y}_n(t+\Delta t) = \hat{y}_n(t) + v_n \Delta t + \sqrt{2 \nu \Delta t}\, W^{(y)}(t) \end{cases} \quad . \tag{4.50}$$

De eerste term in het rechterlid geeft de beginpositie weer, de tweede term geeft de convectieve verplaatsing weer die volgt door vergelijking (4.42) te integreren en de derde term is de verplaatsing door de Random Walk, voor de simulatie van diffusie. Op dit punt aangekomen kan de circulatie van een puntwervel met vergelijking (4.45) weer gewogen herverdeeld worden naar de roosterpunten, afhankelijk van de positie van een puntwervel in een cel en kan de hier boven beschreven procedure worden herhaald voor een nieuwe tijdstap (Δt).

In hoofdstuk 5 wordt ingegaan op het rekenprogramma dat ontwikkeld is om de gediscretiseerde vergelijkingen van de Cloud In Cell methode op te lossen en de wervelafschudding bij de bodemribbels in een oscillerende stroming te simuleren met puntwervels.

5. NUMERIEKE MODELLERING MET DE CLOUD IN CELL METHODE

In de voorgaande hoofdstukken zijn de vergelijkingen, rand- en beginvoorwaarden gepresenteerd waarmee de wervelbeweging kan worden beschreven. Uitgaande van dit overzicht wordt in dit hoofdstuk specifiek ingegaan op de numerieke modellering van de wervelbeweging met de C.I.C.-methode.

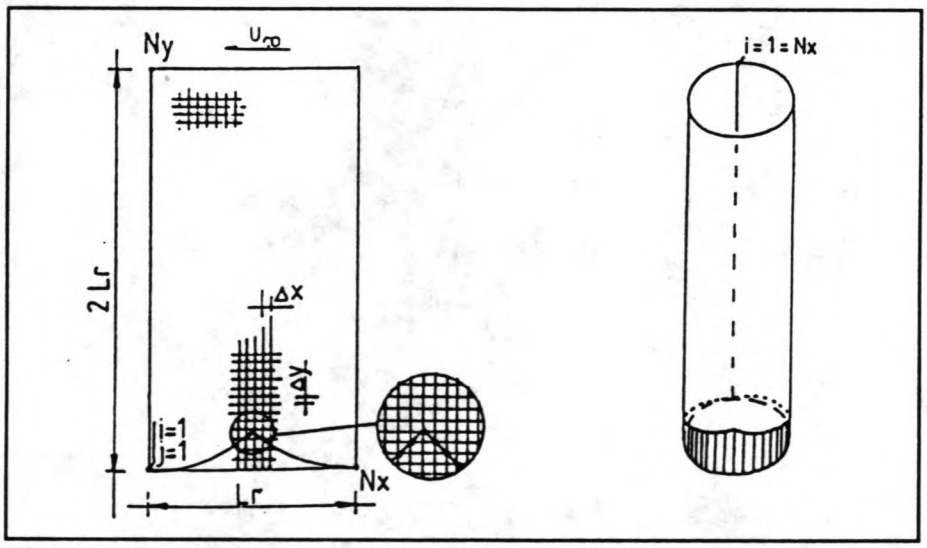
Voor de numerieke simulatie is een computerprogramma in FORTRAN ontwikkeld. De programmeertaal FORTRAN is zeer geschikt om berekeningen uit te voeren op werkstations (HP en de SUN) en supercomputers (CONVEX), zonder al te veel problemen met de compilatie. Het hoofdprogramma beschrijft de simulatie van de wervelbeweging. De resultaten worden weggeschreven naar datafiles. Deze datafiles bevatten uitvoerwaarden die nodig zijn om een plotprogramma VORTEX.PLT, eveneens in FORTRAN geschreven, aan te sturen om de ontwikkeling en beweging van de wervelstructuren grafisch te simuleren. In tabel 5.1 wordt een soort structuurdiagram van het programma gepresenteerd. Uitgaande van deze opzet worden de subroutines die zijn geschreven behandeld.

Gedurende het programmeren en het uittesten van het programma bleek al snel dat de theorie niet altijd gemakkelijk te vertalen is naar een discrete formulering. Met name de bepaling van de circulatie ter plaatse van de top van de bodemribbel, het aantal puntwervels dat per tijdstap (Δt) wordt losgelaten, de positie van het loslaatpunt en de bepaling van de snelheid van een discreet werveldeeltje leverden problemen op.
In paragraaf 5.2 wordt ingegaan op deze problemen en worden de veranderingen en aanpassingen in de numerieke benaderingen die zijn aangebracht besproken.

5.1 Balansgebied en celgrootte

Uitgaande van de grafische uitvoer op bijlage J, ontleend aan Longuet-Higgins (1981), is vastgesteld dat de waterbeweging met de lengte van één bodemribbel (L_r) periodiek is. De lengte van het numerieke rekengebied in x-richting wordt gelijk gesteld aan de lengte van één bodemribbel (L_r). De afmeting van het rekengebied in y-richting dient een zodanige waarde te hebben dat de beweging van de kenmerkende wervelstructuren duidelijk kan worden gesimuleerd en dat de invloed van de wervelsterkte op de randvoorwaarde voor ψ op de bovenrand in voldoende mate wordt beperkt. Na een aantal testen te hebben uitgevoerd met het rekenprogramma VORTEX, is vastgesteld dat de hoogte van het rekengebied tenminste $2L_r$ dient te zijn.

De grootte van een rekencel kan in principe vrij worden gekozen in het rekenprogramma en wordt enkel bepaald door het gewenste aantal knooppunten in x-richting en y-richting. De geometrie van de bodemribbel wordt discreet in het model ingevoerd. Het balansgebied dat in de berekeningen wordt gebruikt is als in Figuur 5.1.



Figuur 5.1 Balansgebied van het numerieke rekenmodel en ruimtelijke periodiciteit van het rekenmodel.

5.2 Structuurschema en beschrijving subroutines

Het ontwikkelde rekenprogramma VORTEX is opgebouwd uit een hoofdprogramma dat een aantal subroutines aanroept. Om het programma overzichtelijk te houden, is gekozen voor een zo eenvoudig mogelijke opbouw hetgeen heeft geresulteerd in het volgende geschematiseerde structuurschema, waarin de subroutines zijn aangegeven met hoofdletters en in de rechter kolom een korte uitleg wordt gegeven over de functie van de desbetreffende subroutine:

	doe zolang als: rekentijd (t) < maximale rekentijd (Tmax)
INVOER	Invoer van parameters via invoerfile VORTEX.INV
NESWM	Toekennen coëfficiënten rekenmolecuul
SOL2D	Oplossen van de Poisson-vergelijking
SOLVEL	Snelheden in roosterpunten met centrale differenties
TIJDST	Maximale tijdstap, bovengrens bepaald door het getal van Courant (Cr < ½)
INITOM	Bepaling circulatie in omgeving van loslaatpunt, waarde toe te kennen aan discrete puntwervel
VELCEL	Snelheid van deeltje met eerste orde benadering
HERVER	Snelheid van deeltje met tweede orde benadering
STOCH	Trekking stochast met uniforme- of Gaussische verdeling
UPDATE	Nieuwe positie van een deeltje na tijdstap, bepaald door oude positie, convectie en diffusie
PERIOD	Herpositionering van werveldeeltjes die over de rand van modelgebied gaan (model is l_r-periodiek
CLUST	Twee werveldeeltjes die elkaar te dicht naderen met tegengestelde waarde voor circulatie worden samengevoegd tot één werveldeeltje
HEROME	Gewogen herverdeling van circulatie naar de roosterpunten
RESULT	Wegschrijven naar datafile van numerieke uitvoer
-EINDE-	van de berekening.

Tabel 5.1 Overzicht van de structuur van het rekenprogramma.

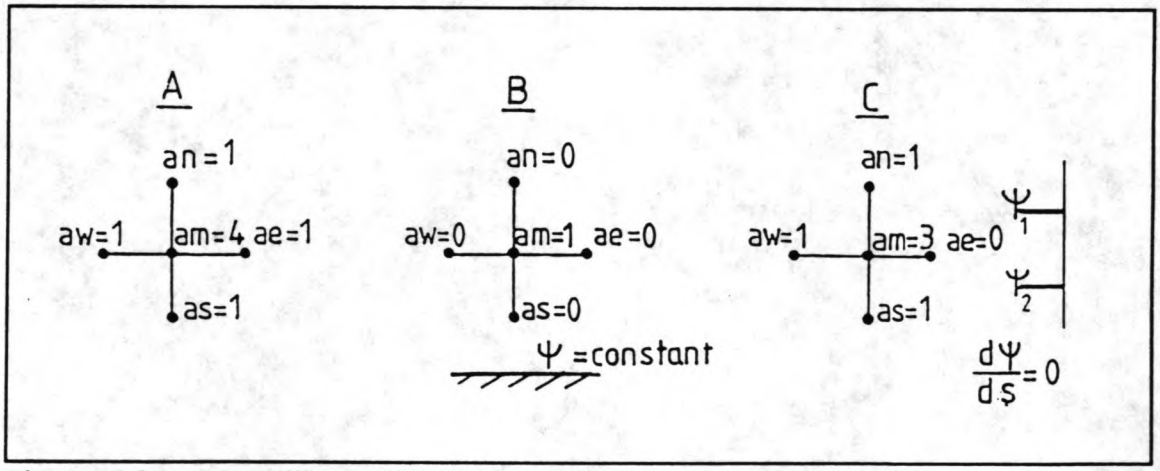
In deze paragraaf wordt vervolgens ingegaan op de werking van de subroutines en de wijze waarop de vergelijkingen zijn gediscretiseerd zodat zij numeriek kunnen worden opgelost.

• In de subroutine INVOER worden de parameters die benodigd zijn om een berekening uit te voeren, uit een datafile gelezen.

• In de subroutine NESWM worden de coëfficiënten ingelezen voor de hoekpunten van een vijfpunts rekenmolecuul. De twee-dimensionale matrix wordt opgerold tot een één-dimensionale matrix (=vector) met voor de teller van de knoopunten:

$$I\_J = i + (j - 1)\, N_x \;, \qquad (5.1)$$

met i de teller in x-richting, j de teller in y-richting en N_x het aantal roosterpunten in x-richting. In het rekenprogramma wordt aan alle variabelen die een vector vormen deze teller meegegeven. Om echter een duidelijk overzicht te behouden van de numerieke benaderingen wordt hierna een variabele (bijvoorbeeld Q) aangeduid met zijn teller in x- en y-richting ($Q_{i,j}$).
Afhankelijk van de positie van een rekenmolecuul in het rekengebied, krijgt elk punt op een rekenmolecuul een coëfficiënt toegekend (zie Figuur 5.2).



Figuur 5.2 Mogelijke coëfficiënten voor de punten op een vijfpunts rekenmolecuul: a) intern punt, b) ondoorlatende rand, c) uitstroomrand.

Ieder rekenmolecuul krijgt in eerste instantie die coëfficiënten toegekend die behoren bij een rekenmolecuul van een intern punt. Afhankelijk van de randvoorwaarden worden de coëfficiënten voor de rekenmoleculen die zich op de randen bevinden gecorrigeerd.

De boven- en onderrand van het rekengebied bij de bodemribbel hebben de coëfficiënten als bij een ondoorlatende rand (b). De linker- en rechterrand hebben, doordat het rekengebied l_r-periodiek is, de coëfficiënten als bij een intern punt (a) (zie vergelijking 5.3). Bij de testcase (zie Bijlage C) zijn de coëfficiënten voor een rekenmolecuul aan de rechterrand als bij een vrije uitstroomrand (c).

De randvoorwaarde voor de onderrand, die gevormd wordt door de contour van de bodemribbel, luidt $\psi=0$ en de randvoorwaarde voor de bovenrand:

$$\psi_{i,N_y} = (N_y - 1)\Delta y\, u_\infty \cos\left(\frac{2\pi t}{T_g} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad i=1,2,\ldots,N_x \quad . \qquad (5.2)$$

Hierin is N_y het aantal roosterpunten in y-richting, Δy de celgrootte in y-richting. De faseverschuiving van $(\pi/2)$ impliceert dat op $t=0$ s de vloeistof in rust is.
Periodiciteit van het rekenmodel geeft voor de randvoorwaarden op de verticale randen:

$$\psi_{1,j} = \psi_{N_x,j} \qquad j=1,2,\ldots,N_y \quad . \qquad (5.3)$$

• In de subroutine <u>SOL2D</u> wordt de gediscretiseerde Poissonvergelijking (4.47), schematisch weergegeven door $(A.\psi=-\omega)$ met A de matrix met coëfficiënten van de rekenmoleculen, ψ de onbekende vector van de stroomfunctie en ω de bekende vector van de wervelsterkte, opgelost door middel van een "Alternating Direction Elimination" methode.
Convergentie naar een eindwaarde met deze iteratiemethode wordt voor de meeste gevallen verkregen bij een aantal iteratiestappen van tenminste 150. Bij de iteratieprocedure moet een herverdelingswaarde FACIT ($0.5 \leq$ FACIT ≤ 1) worden opgegeven. Deze herverdelingswaarde bepaalt in welke mate na een iteratiestap de nieuw berekende waarden van de vector voor de stroomfunctie (ψ), als beginvoorwaarde dient bij de volgende iteratiestap. Een hoge waarde van FACIT resulteert in een hoge stabiliteit van het iteratieproces maar een langzame convergentie en vice versa.

Uit testen is gebleken dat een FACIT-waarde kleiner dan 0.9 leidt tot instabiliteit bij de gegeven matrix (A) waarin de geometrie van de bodemribbel is opgenomen.

• SOLVEL bepaalt via centrale differenties, vergelijking (4.48), de snelheden ($u_{i,j}$, $v_{i,j}$) in de roosterpunten uit de stroomfunctie-waarden verkregen uit **SOL2D**.

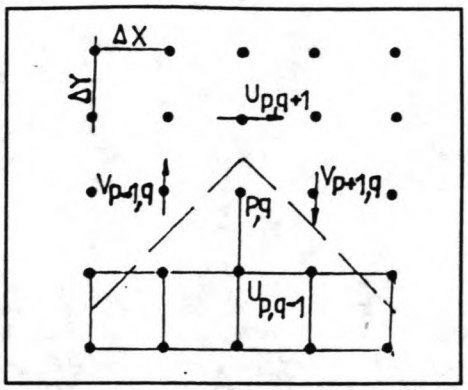
• In TIJDST wordt de maximale tijdstap bepaald. De grootte van de maximale tijdstap wordt bepaald door het getal van Courant (C_r) met $\Delta x = \Delta y$, via de relatie:

$$\begin{cases} C_r = \dfrac{u_{i,N_y}\,\Delta t}{\Delta x} & n \geq 0 \text{ en } u_{i,N_y} > MAX(u_{i,j}) \\ C_r = \dfrac{MAX(u_n, v_n)\,\Delta t}{\Delta x} & n > 0 \text{ en } \begin{cases} u_n > MAX(u_{i,j}) \\ v_n > MAX(v_{i,j}) \end{cases} \end{cases} \tag{5.4}$$

Met n de teller van een puntwervel, (u_n,v_n) de snelheden van een puntwervel, $u_{i,Ny}$ de horizontale snelheid aan de bovenrand en ($u_{i,j}$, $v_{i,j}$) de snelheden in de roosterpunten. Om de nieuwe positie van de puntwervels te bepalen moet voor subroutine VELCEL gelden dat het getal van Courant kleiner is dan ½ (zie Figuur 5.6). Na een aantal tijdstappen (circa 25Δt) echter, wanneer het aantal puntwervels nog klein is en de snelheden (u_n,v_n) van de puntwervels gering zijn, wordt uitgegaan van de eerste relatie in bovenstaande vergelijking (5.4). Direct toepassen van de tweede relatie voor t< circa 25Δt heeft tot gevolg dat een zeer grote tijdstap (Δt) wordt verkregen waardoor werveldeeltjes over de ondoorlatende rand (van de bodemribbel) kunnen gaan.

• In de subroutine INITOM wordt de circulatie bepaald die wordt toegekend aan een puntwervel in het loslaatpunt. Door de numerieke benadering wordt de circulatie ($\Gamma_i = ½(u_b)^2\Delta t$) die aan een puntwervel wordt toegekend op een andere wijze bepaald dan in paragraaf 4.2.2 wordt beschreven. De reden hiervan is dat de positie van u_b in het numerieke model niet eenduidig bepaald is, omdat geen goede schatting is te maken van de grenslaagdikte (δ). Daarom wordt in eerste instantie de circulatie bepaald door vergelijking (3.29) te discretiseren. Hieronder wordt de numerieke procedure voor de bepaling van de circulatie beschreven.

Per tijdstap (Δt) wordt één puntwervel losgelaten. De circulatie (Γ_n) die initieel aan een puntwervel wordt toegekend, werd in eerste instantie bepaald door de rotatie te nemen over het snelheidsveld in het loslaatpunt (zie Figuur 5.3) en deze waarde te vermenigvuldigen met een oppervlakte die berekend wordt uit het aantal puntwervels dat per eenheid van (Δx,Δy) binnen één cel wordt losgelaten:



Figuur 5.3 Introductie circulatie in loslaatpunt.

$$\Gamma_n = \left(\frac{v_{p+1,q} - v_{p-1,q}}{2\Delta x} - \frac{u_{p,q+1} - u_{p,q-1}}{2\Delta y} \right) \sqrt{(u_{p,q+1}\,\Delta t\,\Delta y)^2 + (v_{p,q+1}\,\Delta t\,\Delta x)^2}\,. \qquad (5.5)$$

Hierin zijn p en q de indices van het roosterpunt van de top van de bodemribbel. De eerste factor in het rechterlid geeft de wervelsterkte (ω) weer. Met de tweede factor wordt het aantal puntwervels vastgelegd in één cel.

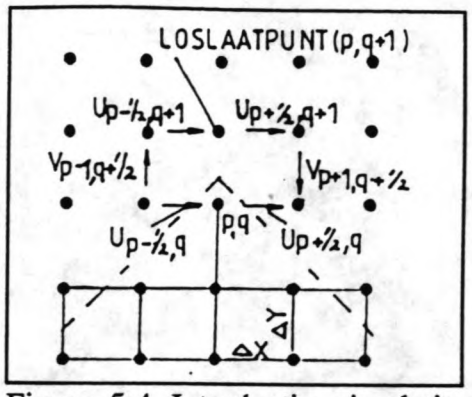
Na enige testberekeningen werd duidelijk dat bovenstaande relatie niet nauwkeurig genoeg is omdat juist de snelheden $u_{p,q+1}$, $v_{p+1,q}$ en $v_{p-1,q}$ door de wijze van numerieke modellering sterk door de rand worden beïnvloed. De snelheid $u_{p,q-1}$ was per definitie gelijk aan 0 m/s omdat dit punt zich in de bodemribbel bevindt. De circulatie volgens vergelijking (5.5) varieert sterk met de celgrootte omdat het snelheidveld minder "glad" verloopt bij een relatief grote cel.

Onderzocht is of de circulatie ter plaatse van het loslaatpunt meer nauwkeurig kan worden berekend op tijdstip t, wanneer wordt uitgegaan van de volgende relatie:

$$\sum_{n=1}^{N} \Gamma_n = \int_{C(t)} (u\,dx + v\,dy) \quad , \qquad (5.6)$$

waarbij de contour C(t) de top van de bodemribbel insluit (zie Figuur 5.4).
Voor één bepaalde situatie zijn bij verschillende celgrootten de circulaties berekend volgens vergelijking (5.5) en (5.6) bij gelijke stromingscondities.

De circulatie die wordt berekend met vergelijking (5.6) is minder afhankelijk van de celgrootte omdat de circulatie wordt bepaald door het gemiddelde van de snelheden in 6, in plaats van 3 roosterpunten (zie Figuur 5.4). Uitgaande van de resultaten uit de testberekeningen is vervolgens de circulatie met vergelijking (5.6) bepaald voor verschillende contouren C(t). De circulaties die zijn berekend bij verschillende contouren en een zelfde celgrootte, variëren niet significant van elkaar. Uitgaande van deze resultaten van de testberekeningen is gekozen om de circulatie ter plaatse van het loslaatpunt te bepalen met vergelijking (5.6) voor de contour weergegeven in Figuur 5.4.



Figuur 5.4 Introductie circulatie in loslaatpunt.

Per tijdstap (Δt) wordt één puntwervel in het loslaatpunt geïntroduceerd met circulatie:

$$\Gamma_n = \frac{1}{N}\left\{\Delta x\left(u_{p-\frac{1}{2},q} + u_{p+\frac{1}{2},q} - u_{p-\frac{1}{2},q+1} - u_{p+\frac{1}{2},q+1}\right) + \Delta y\left(v_{p+1,q+\frac{1}{2}} - v_{p-1,q+\frac{1}{2}}\right)\right\}, \quad (5.7)$$

waarin N het aantal puntwervels is dat de circulatie in het gebied (zie Figuur 5.4) representeert: $N = \Gamma/\Gamma_n$. Het aantal puntwervels (N) in het betreffende gebied wordt hieronder bepaald uit de positie van het loslaatpunt en de afstand van dit loslaatpunt tot de contour C(t), de gemiddelde snelheid in het gebied en de tijdstap (Δt).

De circulatie (Γ) kan worden gerepresenteerd door een groot aantal puntwervels met een kleine circulatie (N groot) of een klein aantal puntwervels met een grote waarde voor de circulatie (N klein). Afhankelijk van de gewenste puntendichtheid bij de grafische uitvoer kan in het rekenmodel VORTEX de grootte van de circulatie die aan een puntwervel wordt toegekend, indirect worden opgegeven. Hiermee kan de puntendichtheid in de grafische uitvoer worden veranderd.

Hieronder wordt beschreven op welke wijze het aantal (N) wordt bepaald. Verondersteld wordt dat de tijdstap in combinatie met de celgrootte zo klein is, dat een deeltje na loslaten zich rechtlijnig voortbeweegt binnen één cel (zie Figuur 5.5). Omdat de tijdstap (Δt) in de berekeningen klein is ten opzichte van golfperiode (T_g), wordt aangenomen dat de stroming gedurende een aantal tijdstapjes (circa $6\Delta t$) niet significant verandert.

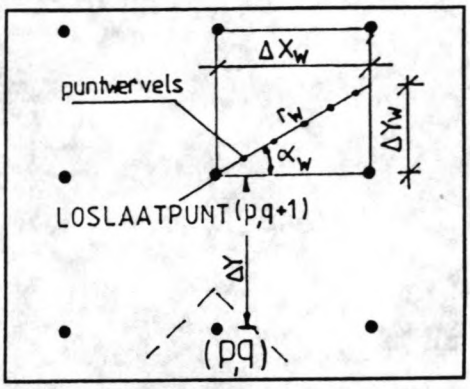


Fig. 5.5 Loslaten van werveldeeltje.

• De hoek (α_w) waaronder een werveldeeltje wordt meegenomen is afhankelijk van de positie van het loslaatpunt. Uit testberekeningen is gebleken dat deze hoek (α_w) voornamelijk bepaald wordt door de overtrekkende hoofdstroom en niet zozeer wordt beïnvloed door de configuratie van de werveldeeltjes. Het roosterpunt waarin deze hoek wordt bepaald, is arbitrair vastgesteld op Δy boven de top (p,q) van de bodemribbel zodat de invloed van de verticale snelheid op de hoek (α_w) ter plaatse van het roosterpunt (p,q), door de wijze van numerieke modellering, zoveel mogelijk wordt beperkt. De hoek (α_w) waaronder een werveldeeltje op het moment van loslaten wordt meegenomen door de hoofdstroom is:

$$\alpha_w = \arctan \left| \frac{v_{p,q+1}}{u_{p,q+1}} \right| , \qquad (5.8)$$

•zonder storingen zou een werveldeeltje binnen één rekencel, met $\Delta x = \Delta y$, maximaal een afstand (r_w):

$$r_w = \sqrt{\Delta x_w^2 + \Delta y_w^2} = \sqrt{\Delta x^2 (1 + \tan^2 \alpha_w)} \qquad |\alpha_w| < 45° \quad , \qquad (5.9)$$

en:

$$r_w = \sqrt{\Delta y^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha_w}\right)} \qquad |\alpha_w| \geq 45° \quad , \qquad (5.10)$$

afleggen.

Het aantal puntwervels (N) dat de circulatie (Γ) representeert in het gebied (zie Figuur 5.5) is:

$$\begin{cases} N = \dfrac{\sqrt{\Delta x^2 \left(1 + \tan^2(\alpha_w)\right)}}{\sqrt{(u_{p,q+1}^2 + v_{p,q+1}^2)}\ \Delta t} & |\alpha_w| < 45^\circ \\[2ex] N = \dfrac{\sqrt{\Delta y^2 \left(1 + \dfrac{1}{\tan^2(\alpha_w)}\right)}}{\sqrt{(u_{p,q+1}^2 + v_{p,q+1}^2)}\ \Delta t} & |\alpha_w| \geq 45^\circ \end{cases} \qquad (5.11)$$

De circulatie die initieel aan één puntwervel (Γ_n) wordt toegekend, is bepaald door de circulatie (Γ) te bepalen op tijdstip t voor een gebied zoals weergegeven in Figuur 5.4 en deze circulatie (Γ) te delen door het aantal puntwervels (N) in het gebied zoals weergegeven in Figuur (5.5). Per tijdstap (Δt) wordt één puntwervel geïntroduceerd in het loslaatpunt, met een waarde voor de circulatie (Γ_n) als hierboven beschreven.

De theorie beschreven in paragraaf (3.3.2) over de dikte (δ) van de binnengrenslaag is ter plaatse van de scherpe top van de bodemribbel niet geldig omdat het snelheidsveld niet glad verloopt en de stroming turbulent is. Toch wordt deze theorie gebruikt om een bovengrens van de grenslaagdikte (δ) af te schatten opdat het loslaatpunt in de simulaties zich in de "grenslaag" bevindt. Uitgaande van deze bovengrensbenadering voor δ en de theorie uit paragraaf (4.2.2) waarin wordt beschreven dat de positie van het loslaatpunt empirisch dient te worden bepaald, is arbitrair vastgesteld dat het loslaatpunt zich ½Δy boven de numerieke positie van de top (p,q) van de bodemribbel bevindt. Dit betekent echter dat het loslaatpunt niet vast ligt ten opzichte van de top wanneer Δy varieert. Longuet-Higgins (1981) geeft aan dat de positie van het loslaatpunt, zolang dit zich in de grenslaag bevindt, geen significante invloed heeft op het verloop van de stroming. De geometrie is in de beschrijving van Longuet-Higgins getransformeerd naar de complexe ruimte en gebruik wordt gemaakt van de Vortex methode, zodat deze bewering met enige voorzichtigheid dient te worden gehanteerd.

• In de subroutine <u>HERVER</u> worden de snelheden (u_n, v_n) van een puntwervel bepaald met vergelijking (4.49). Voor een rekengebied waarin zich geen ondoorlatende randen bevinden voldoet deze methode goed. In het geval echter van een ondoorlatende rand zoals een bodemribbel ontstaan problemen. Werveldeeltjes die een positie dicht bij de rand hebben, kunnen door een verplaatsing door convectie of diffusie, over de rand gaan. Getest is of het reflecteren van werveldeeltjes op de ondoorlatende rand een goede oplossing is van het hierboven beschreven probleem. Het reflecteren heeft door de relatief geringe verplaatsing door convectie en diffusie van de werveldeeltjes ten opzichte van de celgrootte $(\Delta x, \Delta y)$ tot resultaat dat ter plaatse van stagnante discrete punten een hoge concentratie van circulatie optreedt.

• Om dit probleem te omzeilen wordt in de subroutine <u>VELCEL</u> de snelheid van een puntwervel bepaald via een andere methode dan in de literatuur beschreven. De gedachte achter de methode in deze subroutine is om een puntwervel die dicht in de buurt van een ondoorlatende rand komt en hierover dreigt te gaan, voor deze rand te laten afbuigen (zie Figuur 5.6).

Om dit te bewerkstelligen dient de snelheid van een puntwervel die zich in een cel bevindt te worden bepaald uit de normaalsnelheden op de zijden van een cel die volgen uit de waarden voor de stroomfunctie (ψ) in de hoekpunten van die cel. Gebruik wordt gemaakt van het gegeven dat de snelheden op een ondoorlatende rand van een cel klein zijn -door de wijze van numerieke benadering zijn de normaalsnelheden ongelijk nul- ten opzichte van de doorlatend rand. De relatieve positie van het werveldeeltje ten opzichte van Δx en Δy heeft tot resultaat dat, hoe dichter het deeltje bij de rand komt des te sterker wordt de baan van het deeltje voor de rand afgebogen (zie Figuur 5.6).

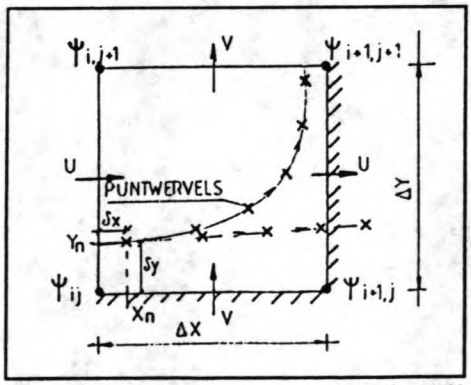


Fig. 5.6 Baan van een deeltje bij een ondoorlatende rand.

Bovenstaande beschrijving geldt slechts wanneer de tijdstap (Δt) in de berekening kleiner is dan:

$$\Delta t = \mathrm{MIN}\left(\frac{\Delta x}{2u_n}, \frac{\Delta y}{2v_n}\right) . \tag{5.12}$$

De numerieke procedure is als volgt:

De normaalcomponenten van de snelheid op de vlakken $i, i+1, j, j+1$ worden bepaald door een eerste-orde benadering voor (3.38) te gebruiken:

$$\begin{cases} u_{i,j+½} = \dfrac{(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j})}{\Delta y} \\ u_{i+1,j+½} = \dfrac{(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j})}{\Delta y} \\ v_{i+½,j+1} = \dfrac{-(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j+1})}{\Delta x} \\ v_{i+½,j} = \dfrac{-(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j})}{\Delta x} \end{cases} , \tag{5.13}$$

Deze benadering is $O(\Delta x)$ nauwkeurig. De snelheidscomponenten (u_n, v_n) van een werveldeeltje worden berekend door lineaire interpolatie afhankelijk van de positie van een deeltje in een cel via:

$$\begin{cases} \delta x = x_n - x_{i,j} \\ \delta y = y_n - y_{i,j} \end{cases} , \tag{5.14}$$

waarmee de snelheid van een werveldeeltje in een cel vastgelegd is:

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{(\Delta x - \delta x)u_{i,j+½} + \delta x\, u_{i+1,j+½}}{\Delta x} \\ v_n = \dfrac{(\Delta y - \delta y)v_{i+½,j} + \delta y\, v_{i+½,j+1}}{\Delta y} \end{cases} . \tag{5.15}$$

Uitgaande van Figuur 5.6 geldt: $u_{i,j+½} > u_{i+1,j+½}$ en $v_{i+½,j+1} > v_{i+½,j}$. Wanneer een puntwervel een rekencel binnenkomt met een naar rechts georiënteerde snelheid, zoals in Figuur 5.6 weergegeven, dan neemt de snelheid u_n evenredig met de afstand δx af en neemt de snelheid v_n evenredig met de afstand δy toe (zie vergelijking 5.15). Een combinatie van deze twee snelheden geeft, bij het voldoende klein zijn van de tijdstap (Δt), dat een puntwervel voor de ondoorlatende rand afbuigt.

Een werveldeeltje kan de rand nog wel passeren door een verplaatsing door diffusie. Uit een aantal testberekeningen is gebleken dat het aantal deeltjes die door de diffusie alsnog over de rand gaan gering is ten opzichte van het totaal aantal deeltjes.
Toepassen van de theorie van de Random Walk geeft dat het terugzetten van een deeltje geen significante invloed heeft op het patroon van de stroming omdat de richting waarin een deeltje zich verplaatst immers bepaald wordt door twee stochasten die willekeurig uit een Gaussische verdeling worden getrokken.

• In de subroutine <u>STOCH</u> worden de stochasten $W^{(x)}(t)$ en $W^{(y)}(t)$ bepaald waarmee de stochastische verplaatsing van een discrete puntwervel wordt vastgelegd waarmee de diffusie wordt gesimuleerd. Wanneer in het rekengebied ondoorlatende randen voorkomen geeft de Random Walk met een Gaussische kansverdeling problemen omdat de stochasten ($W^{(x)}(t)$, $W^{(y)}(t)$) gedefinieerd zijn op $[-\infty, +\infty]$ hetgeen impliceert dat ook de verplaatsingen ($\Delta x, \Delta y$) van een deeltje zijn gedefinieerd op $[-\infty, +\infty]$. Afhankelijk van de situatie -met of zonder ondoorlatende randen- kan daarom worden gekozen voor respectievelijk een uniforme kansverdeling op $[-1, +1]$ met kansdichtheid $p(x_t) = ½$ voor $\{-1 \leq x_t \leq 1\}$ ($E(x_t) = 0$ en $\sigma^2 = (1/3)$) of een Gaussische kansverdeling op $[-\infty, +\infty]$ met een kansdichtheid $p(x_t)$ volgens vergelijking (4.21) voor $\{-\infty \leq x_t \leq +\infty\}$ ($E(x_t) = 0$ en $\sigma^2 = 1$).

Wanneer wordt gekozen voor een uniforme verdeling op $[-1,+1]$ moet de variantie (σ^2) van de uniforme verdeling worden gecorrigeerd met een factor opdat de absolute waarde van de verplaatsing ($\Delta x, \Delta y$) hetzelfde blijft aan die bij een Gaussische verdeling:

$$\begin{cases} \Delta x = \sqrt{\dfrac{2}{\sigma^2} \nu \Delta t}\; W^{(x)}(t) = \sqrt{6 \nu \Delta t}\; W^{(x)}(t) \\ \Delta y = \sqrt{\dfrac{2}{\sigma^2} \nu \Delta t}\; W^{(y)}(t) = \sqrt{6 \nu \Delta t}\; W^{(y)}(t) \end{cases} , \tag{5.16}$$

met $W^{(x)}(t)$ en $W^{(y)}(t)$ op $[-1,+1]$.

De RANDOM-generator op de computer genereert de stochasten op een domein $[0,1]$ met een kansdichtheid $p(x_t)=1$ voor $\{0 \le x_t \le 1\}$. Omzetting naar het domein $[-1,+1]$ wordt verkregen door de volgende transformatie:

$$W(t)|_{[-1,+1],P(x_t)=½} = (2\; W(t)|_{[0,+1],P(x_t)=1} - 1\;) \;. \tag{5.17}$$

• In de subroutine <u>UPDATE</u> wordt de nieuwe positie van een deeltje na een tijdstap (Δt) uitgerekend. Voor een Gaussische verdeling wordt de nieuwe positie bepaald door:

$$\begin{cases} \hat{x}_n(t+\Delta t) = \hat{x}(t) + u_n \Delta t + \sqrt{2 \nu \Delta t}\; W^{(x)}(t)|_{[-\infty,+\infty]} \\ \hat{y}_n(t+\Delta t) = \hat{y}(t) + v_n \Delta t + \sqrt{2 \nu \Delta t}\; W^{(y)}(t)|_{[-\infty,+\infty]} \end{cases} \tag{5.18}$$

en voor een uniforme verdeling:

$$\begin{cases} \hat{x}_n(t+\Delta t) = \hat{x}(t) + u_n \Delta t + \sqrt{6 \nu \Delta t}\; W^{(x)}(t)|_{([-1,+1],P(x_t)=½)} \\ \hat{y}_n(t+\Delta t) = \hat{y}(t) + v_n \Delta t + \sqrt{6 \nu \Delta t}\; W^{(y)}(t)|_{([-1,+1],P(x_t)=½)} \end{cases} \tag{5.19}$$

• In <u>PERIOD</u> worden de x-coördinaten van die puntwervels die de rechterrand of linkerrand zijn overgegaan gecorrigeerd met respectievelijk $-L_r$ en $+L_r$ aangezien het numerieke model L_r-periodiek is. Puntwervels die over de bovenrand van het rekengebied gaan worden op inactief gesteld en uit de matrix gehaald.

• In de subroutine CLUST worden twee puntwervels die te dicht bij elkaar komen, samengevoegd tot één puntwervel volgens de theorie beschreven in paragraaf 4.3. Het criterium dat bepaalt of twee puntwervels worden samengevoegd tot één puntwervel wordt gegeven door de "cluster"viscositeit (ϵ), een coëfficiënt die het invloedsgebied van een puntwervel weergeeft door visceuze effecten, en de tijd die verstreken is nadat een puntwervel is losgelaten. Afhankelijk van het gewenste aantal puntwervels in het rekengebied kan de waarde voor ϵ vrij worden opgegeven in het programma VORTEX. Hoe groter de waarde van ϵ hoe groter de afstand mag zijn tussen twee puntwervels voordat zij worden samengevoegd tot één puntwervel.
Juist op de grensvlakken tussen puntwervels met positieve en negatieve circulatie is het van belang om bij de grafische uitvoer duidelijk te kunnen waarnemen waar een "grens"contour zich bevindt. Gebleken is dat bij een waarde voor $\epsilon \geq 1.E\text{-}8\ m^2/s$ de wervelstructuren worden verstoord doordat teveel puntwervels worden samengevoegd. Dit is het gevolg van het grote aantal puntwervels dat wordt losgelaten.

• In HEROME wordt de circulatie van een puntwervel die zich in een rekencel bevindt, gewogen herverdeeld volgens de vergelijkingen (4.43), (4.44) en (4.45) naar de omliggende roosterpunten (zie Figuur 4.1). Wanneer de bijdrage aan de wervelsterkte in de roosterpunten is berekend wordt teruggekeerd naar de plaats in het rekenprogramma waar de Poissonvergelijking opgelost wordt (zie Tabel 5.1).

6. RESULTATEN VAN DE SIMULATIES

Voorafgaand aan de simulatie van wervelafschudding bij bodemribbels is een testcase gedraaid om een aantal subroutines te testen en om een indruk te krijgen van de wervelstromingen. In dit hoofdstuk wordt in het kort ingegaan op deze testcase waarna uitvoerig wordt ingegaan op de simulatie van de wervelafschudding bij de bodemribbel. Beschreven wordt welke situatie wordt doorgerekend en welke simulaties zijn uitgevoerd. Van deze verschillende simulaties wordt een overzicht gegeven. Uitgaande van de resultaten van de simulaties (zie bijlagen D t/m I) wordt voor één simulatie de ontwikkeling van de wervelstructuur en de nauwkeurigheid van de berekening besproken. De grafische uitvoer van deze simulatie wordt geverifieerd aan de resultaten van een soortgelijke simulatie die ontleend is aan de literatuur (Bijlage J). Hiervan uitgaande worden de oorzaken van de verschillen met de andere uitgevoerde simulaties besproken.

6.1 Testcase : horizontale plaat

Het model van de testcase geeft het samengaan weer van twee stromen met verschillende uniforme snelheden die gescheiden zijn door een horizontale plaat met een zekere lengte. Op het punt waar de plaat ophoudt is het snelheidsveld niet meer rotatievrij. In dit roosterpunt worden puntwervels losgelaten met een bepaalde circulatie. De circulatie voor een puntwervel die na Δt wordt geïntroduceerd, wordt bepaald door het snelheidsverschil (Δu) over de horizontale plaat en is bepaald met vergelijking (4.25.a).

Omdat de testberekening, die ongeveer 100 uur in beslag nam, in een vroeg stadium is gedraaid zijn bepaalde elementen zoals het reflecteren van deeltjes en de rekentijd nog niet in het model aangebracht.

Er zijn verschillende testen gedraaid met als gevarieerde parameters: grootte van het rekengebied, lengte van de plaat, aantal iteraties Poisson-solver, snelheden in het rekengebied en positie van het loslaatpunt. Uit deze testen is een indicatie verkregen van het aantal puntwervels dat moet worden geïntroduceerd en hoe lang moet worden gerekend opdat een stationaire stromingstoestand wordt verkregen. Zolang het loslaatpunt in het verlengde ligt van de plaat en aan de Kutta-voorwaarde wordt voldaan, is de positie van het loslaatpunt niet van significante invloed op de ontwikkeling van de wervelstructuren.

In geen van de testberekeningen is een stationaire eindtoestand (volledig ontwikkelde wervelstraat) bereikt wanneer enkel puntwervels worden geïntroduceerd in het loslaatpunt. De rekentijden totdat een stationaire toestand wordt bereikt, zijn zeer groot doordat er veel puntwervels geïntroduceerd moeten worden en het rekengebied uitgestrekt wordt. Het bereiken echter van een stationaire eindtoestand zou versneld kunnen worden door in het verlengde van de plaat in elk roosterpunt een puntwervel te plaatsen met een circulatie die overeenkomt met de circulatie die op tijdstip t van circa $10\Delta t$ wordt uitgerekend.

Op bijlage C is het verloop van de ontwikkeling van de wervelstructuren weergegeven. Een punt in de figuur komt overeen met een puntwervel met negatieve circulatie. De grootte van de circulatie is niet uit de figuren op te maken. Duidelijk is het ontstaan van een wervelstraat waar te nemen. Op $t=t^+$ wordt direct een stationaire stroming ingesteld met een behoorlijk snelheidsverschil over de horizontale plaat. Doordat de stroming initieel rotatievrij is ($\omega=0$), wordt op een tijdstip t^+ de Laplace-vergelijking opgelost. Hierdoor ontstaat een grote startwervel.
Na enige tijd strekt de wervel zich in langsrichting. Hierna rolt de grenslaag zich op en zijn de instabiliteiten van Kelvin Helmholtz waar te nemen. Na enige tijd ontstaan clusters van werveldeeltjes. De wervelclusters die ontstaan, met een vrij geconcentreerde wervelsterkte, zijn goed gescheiden door zones met rotatievrije vloeistof. De groei van de grenslaag ontstaat door de spreiding van de wervelclusters om de middellijn en door het samengaan van wervelclusters tot een grotere structuur.

6.2 Wervelafschudding bij bodemribbels

Om de resultaten van de simulaties van de wervelafschudding te kunnen verifiëren is een situatie doorgerekend die overeenkomt met een soortgelijke simulatie die ontleend is aan de literatuur (Longuet-Higgins 1981). De nadruk bij deze verificatie wordt gelegd op de wijze van ontwikkeling van de wervelstructuren en de grootte en uitstrekking van deze wervelpatronen (zie Bijlage J).

Met de ervaring opgedaan met de wervelstromingen in de eerste testcase is gebleken dat een aantal parameters van significante invloed is op de ontwikkeling van de wervelstructuur. Deze belangrijkste parameters, die in het rekenmodel moeten worden ingevoerd, zijn:

- grootte van een rekencel ($\Delta x, \Delta y$)
- aantal iteraties bij het oplossen van de Poisson-vergelijking
- kinematische viscositeit (ν)
- Gaussische of uniforme kansverdeling bij de Random Walk
- "cluster"viscositeit (ϵ)
- Aantal Werveldeeltjes dat de circulatie (Γ) op tijdstip t in het gebied (zie Figuur 5.5) representeert (**Wct**)
- Afstand van het Loslaatpunt tot aan de Top van de Bodemribbel (**ALTB**).

Om een indicatie te verkrijgen van de invloed van deze parameters op de ontwikkeling van de wervelstructuren wordt een zestal simulaties uitgevoerd.

Om de invloed van een verandering op andere parameters zoveel mogelijk te beperken zijn de volgende vereenvoudigingen aangebracht:

- Het aantal iteratiestappen, voor het iteratief oplossen van de Poisson-vergelijking, is zo groot genomen dat voor elke situatie geldt dat de oplossing tot een eindwaarde convergeert. Dit betekent dat de isolijnen voor de stroomfunctie (ψ) aan de bovenrand van het rekenmodel evenwijdig aan elkaar lopen.
- Voor de Random Walk wordt gebruik gemaakt van een uniforme kansverdeling.
- Het aantal werveldeeltjes dat de circulatie op tijdstip t representeert in het gebied zoals weergegeven in Figuur 5.5, is bij benadering evenredig met de lengte van een zijde van een cel. Aannemende dat de hoofdstroom horizontaal is betekent dit: celgrootte tweemaal zo groot, aantal deeltjes tweemaal zo groot. Er wordt uitgegaan van de situatie dat de circulatie die op tijdstip t moet worden geïntroduceerd, wordt gerepresenteerd door 3 werveldeeltjes ($N=3$) in het gebied met een celgrootte $\Delta x=\Delta y=1$ mm. Hiermee wordt een duidelijk beeld verkregen van de positie van de puntwervels.

De parameters die gevarieerd worden, in combinatie met elkaar, zijn de:

- celgrootte ($\Delta x,\Delta y$)
- kinematische viscositeit (ν) en de "cluster"viscositeit (ϵ)
- afstand loslaatpunt tot top van de bodemribbel (ALTB).

De constante parameters die de geometrie en de stromingscondities representeren zijn als volgt (zie Longuet-Higgins 1981):

• Lengte van de bodemribbel (L_r)	[m]	: 0.126
• Hoogte van de bodemribbel (H_r)	[m]	: 0.0213
• Waarde polygoon van bodemribbel (P_r)	[-]	: 5
• Stroomsnelheid in buitengebied (u_∞)	[m/s]	: 0.075
• Periode van de golfbeweging (T_g)	[s]	: 6.28
• Faseverschuiving van de golfperiode (T_{g0})	[rad]	: $\pi/2$
• Totaal door te rekenen tijd (T_{tot})	[sec]	: 9.5

Hieronder volgt een overzicht van de doorgerekende simulaties met het rekenprogramma VORTEX:

test :	Wct	ν m²/s	ε m²/s	Re *100	Δx*Δy mm, mm	ALTB mm	aant. iter.	Bijlage
1 :	6	0.0	0.0	-	2*2	1.0	150	D
2 :	6	1.E-6	1.E-8	945	2*2	1.0	150	E
3 :	9	0.0	0.0	-	3*3	1.5	150	F
4 :	9	1.E-6	1.E-8	945	3*3	1.5	150	G
5 :	4	0.0	1.E-8	-	1.5*1.5	0.5	200	H
6 :	4	0.0	1.E-8	-	1.5*1.5	1.0	200	I

Tabel 6.1 Uitgevoerde simulaties met rekenprogramma VORTEX.

Wct : Aantal werveldeeltjes dat de circulatie op tijdstip t representeert in het gebied zoals weergegeven in Figuur 5.5

ALTB : Afstand van Loslaatpunt tot Top van de Bodemribbel.

Bij de testen 5 en 6 is de afstand van het loslaatpunt tot de top van de bodemribbel ongelijk aan ½Δy. Door de positie in deze testen te variëren is een indicatie verkregen over de invloed van de positie van het loslaatpunt op de ontwikkeling van de wervelstructuren.

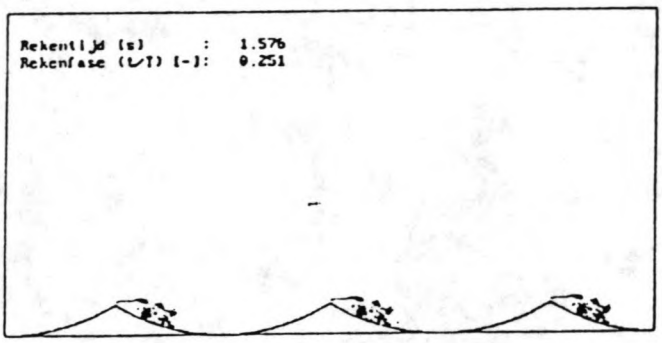
Voor de berekeningen weergegeven in Tabel 6.1 bedraagt de gemiddelde rekentijd op het HP-werkstation ca. 45 uur. In de volgende paragraaf wordt ingegaan op de ontwikkeling van de wervelstructuur boven de bodemribbel.

6.2.1 Beschrijving wervelstroming boven de bodemribbels

Op de bijlagen D t/m I zijn de simulaties van de wervelafschudding bij de bodemribbel weergegeven die zijn verricht. Uitgaande van deze resultaten en die ontleend aan de literatuur (Longuet-Higgins 1981) wordt hieronder dié simulatie besproken, die door de auteur als het meest nauwkeurig wordt beschouwd.
Deze simulatie, weergegeven op bijlage D, laat een stabiele voortbeweging zien van de wervelstructuren waarbij na één golfperiode (T_g) het stromingsbeeld bijna identiek is aan dat in de beginsituatie. De andere simulaties op de bijlagen (E,F,G,H) laten, tot ongeveer een rekentijd gelijk aan driekwart van de golfperiode (T_g) dezelfde trend zien maar worden echter door kleine instabiliteiten verstoord. De simulatie weergegeven op bijlage I (test 6) laat een ongestoorde ontwikkeling zien van de wervelstructuren en komt overeen met de simulatie weergegeven op bijlage D (test 1).
Hieronder wordt het mechanisme beschreven uitgaande van de simulatie op bijlage D met de rekentijd (t), de rekenfase (t/T_g), golfperiode (T_g) en totale rekentijd (T_{tot}). Een opmerking die hierbij gemaakt dient te worden is dat de golfperiode (T_g) op de bijlagen D t/m I identiek is aan T in de figuren op deze bijlagen. Een wervel met een configuratie die voornamelijk uit positieve circulatie of negatieve circulatie bestaat, wordt aangeduid met respectievelijk wervel$^+$ en wervel$^-$. De eerste dipool die gevormd wordt, wordt angegeven met dipool^1 en de tweede dipool met dipool^2.

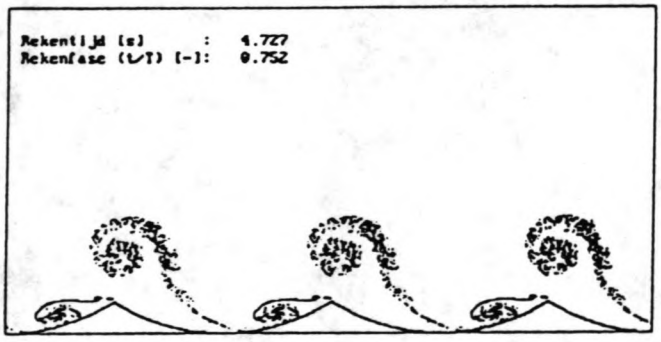
De figuren 6.1 t/m 6.5 die hierna volgen, representeren enige karakteristieke momenten in de ontwikkeling van de wervelstructuren. Een wervel in een figuur is opgebouwd uit een eindig aantal puntwervels. Deze puntwervels zijn weergegeven door een "zwarte" punt. Helaas is door deze methode van weergeven niet expliciet duidelijk of een puntwervel positieve of negatieve circulatie heeft. Doordat echter de tijdstap tussen de onderlinge figuren op de bijlagen D t/m I klein is, kan wel worden vastgesteld of een wervelconfiguratie opgebouwd is uit positieve of negatieve circulatie.

Op t=0 s is de stroming in rust. Op t^+ beweegt de buitenstroming naar rechts en wordt door de kleef ter plaatse van de bodemribbel negatieve circulatie gegenereerd. Van t=0 s tot t=1.6 s rolt de wervel zich op met verstoringen op kleine schaal. De wervel groeit gedurende een kwart periode (rekenfase=0.251) waarbij de ontstane $wervel^-$ netjes door een omhullende lijn van puntwervels wordt omsloten (zie onderstaande Figuur 6.1).



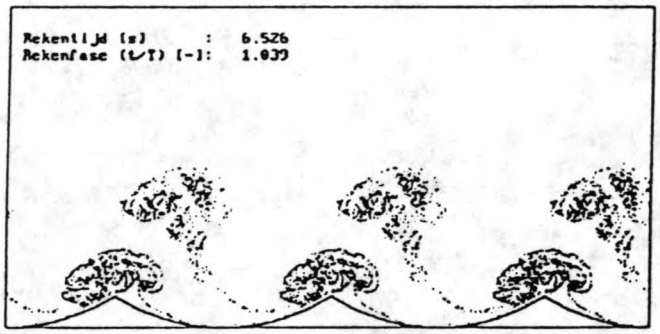
Figuur 6.1 (t=1.576 s)

Op t=1.8 s is de buitenstroming van richting veranderd. Van t=1.8 s tot t=2.7 s wordt de $wervel^-$ in elkaar gedrukt en beweegt hij zich richting de top van de bodemribbel. Op t=2.7 s wordt positieve circulatie gegenereerd ter plaatse van de top van de bodemribbel. Gedurende een tijd van t=2.9 s tot t=3.8 s ontwikkelt zich een $wervel^+$ waarbij op t=3.8 s een eerste dipool[1] wordt gevormd uit de $wervel^-$ en de $wervel^+$, die loslaat van de top van de bodemribbel en zich voortbeweegt naar hoger gelegen vloeistoflagen. Na t=3.8 s wordt een nieuwe $wervel^+$ gevormd ter plaatse van de top die zich oprolt aan de linker-zijde van de bodemribbel (zie Figuur 6.2). Dit proces speelt zich af tussen t=3.8 s en t=5.6 s.



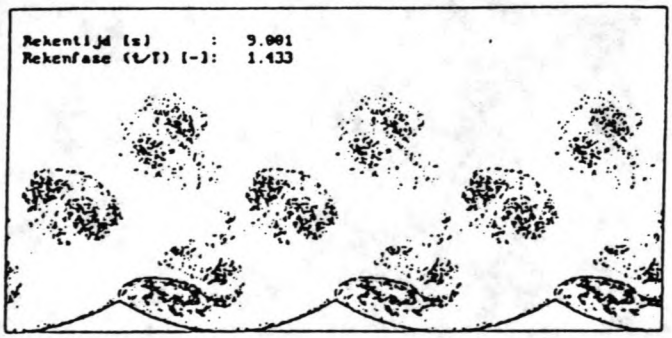
Figuur 6.2 (t=4.727 s)

Op t=5.8 s wordt de wervel$^+$ beïnvloed door de dipool^1 waardoor deze wervel$^+$, ondanks dat de stroming naar links is gericht (rekenfase = 0.931) over de top van de bodemribbel naar rechts loopt. Op t=5.8 s is de buitenstroom van richting veranderd en wordt tot t=6.9 s een nieuwe wervel$^-$ gevormd aan de rechterzijde van de ribbeltop. De dipool^1 wordt door de verandering van de stroomrichting gedeeltelijk in elkaar gedrukt (zie Figuur 6.3). Al snel echter wordt een nieuwe dipool^2 gevormd uit de wervel$^-$ met de wervel$^+$ die loslaat op t=7.3 s.



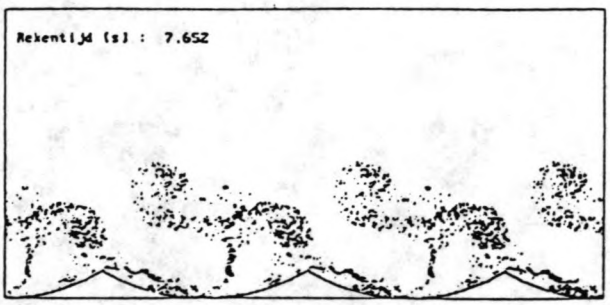
Figuur 6.3 (t=6.526 s)

Van t=7.3 s tot 9.4 s speelt zich hetzelfde proces af als beschreven van t=0 s tot t= ± 3.4 s met dat verschil dat in de stroming een aantal dipolen aanwezig is. Net na t=7.3 s beïnvloeden de dipolen elkaar maar na enige tijd gaan zij toch ieder hun eigen weg waarbij een aantal kleine storingen optreden. De oriëntatie van een dipool is belangrijk voor het verdere verloop van de simulatie omdat een dipool de eigenschap heeft zich voort te bewegen in de richting van zijn oriëntatie die gevormd wordt door de raaklijn tussen wervel$^+$ en wervel$^-$. De dipool^1 en dipool^2 bewegen zich beide in een richting van de bodemribbel af (zie onderstaande Figuur 6.4).



Figuur 6.4 (t=9.001 s)

In sommige simulaties, die niet in de bijlagen zijn opgenomen, ontmoeten de twee dipolen elkaar. Op dat moment kan een quadri-pool worden gevormd zoals aangegeven in onderstaande Figuur 6.5.



Figuur 6.5 (t=7.652 s)

6.2.2 Verschillen tussen de uitgevoerde simulaties

De resultaten van de simulaties op de bijlagen (D, E, F, G, H, I) (zie tabel 6.1) verschillen op een aantal punten van elkaar. De oorzaken van de verschillen tussen de onderlinge simulaties zijn voornamelijk het gevolg van de celgrootte (Δx,Δy) en de positie van het loslaatpunt ten opzichte van de top van de bodemribbel.
Duidelijk is geworden uit de simulaties dat een kleine storing op t^+ (testen 5 en 6) een geheel andere ontwikkeling van de wervelstructuur geeft te zien. De ontwikkeling van de grootschalige wervelstructuren heeft gedurende driekwart golfperiode de zelfde trend, maar de kleinschalige wervelstructuren op de buitenranden van de grotere wervelstructuren zorgen voor storingen die de grootschalige wervelstructuur sterk beïnvloeden. Na $t=\frac{1}{2}T_g$ (zie bijlagen F2,F3 (test 3) en H2,H3 (test 5)) ontstaat een dipool aan de linkerzijde van de top van de bodemribbel met een wervel"staart". Een storing in deze staart verandert de oriëntatie van de dipool zodat de wervelstructuren zich anders ontwikkelen.

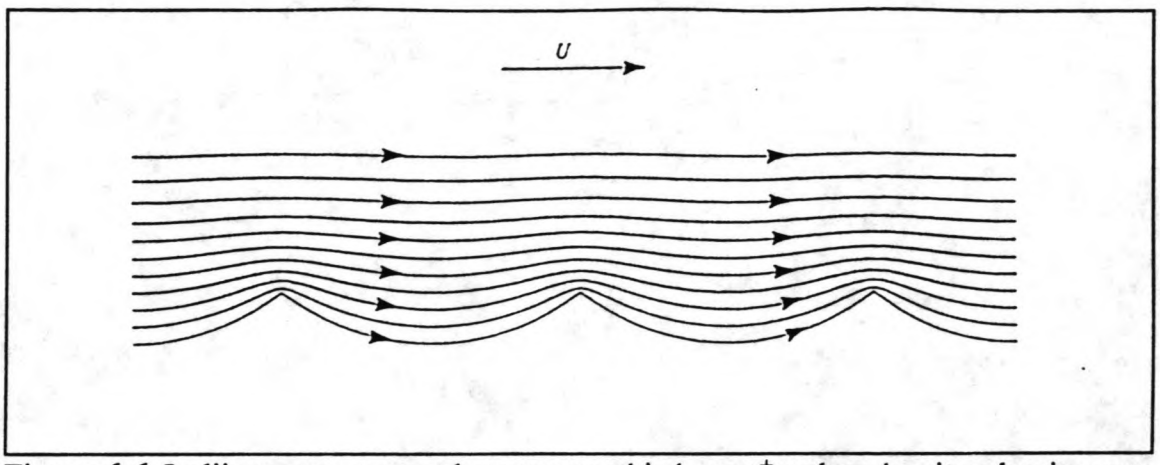
De grootte van de storingen worden in hoofdzaak bepaald door de volgende zes factoren:

1. De invloed van de verhouding van de hoogte van het model $\Delta y(N_y-1)$ ten opzichte van de lengte van het model $L_r=\Delta x(N_x-1)$. Vastgesteld is (zie paragraf 5.1) dat de hoogte tenminste $2*L_r$ moet zijn om randinvloeden te voorkomen. Echter de hoogte van het modelgebied in combinatie met de harde randvoorwaarde voor (ψ) (vergelijking 5.3) bepaalt in sterke mate de stroming in het gebied. Het numerieke model stelt zelf een snelheidsprofiel in dat aansluit op de opgedrukte stroomfunctie aan de bovenrand. Er is niet nagegaan in hoeverre deze randvoorwaarde voor ψ de stroming in het rekengebied beïnvloedt bij een andere positie van de bovenrand.

2. Afhankelijk van de celgrootte van het rekenrooster bevindt het punt waar de puntwervels in het numerieke model worden losgelaten zich niet op dezelfde plaats bij de uitgevoerde simulaties. Uit een aantal testen (5 en 6) waarvan twee weergegeven op de bijlagen H en I blijkt dat de positie van het loslaatpunt van groot belang is voor de ontwikkeling van de wervelstructuur.

3. In het numerieke model wordt de grenslaag aan de bodemribbel niet correct gesimuleerd. De theorie van de grenslagen is niet in het model verwerkt. Dit heeft tot gevolg dat de snelheden in de knooppunten die de geometrie van de bodemribbel omsluiten, ongelijk aan nul zijn. Om het model volledig te maken dient de grenslaag gemodelleerd te worden. Echter modellering van deze grenslaag is zeer complex en aangenomen is dat het verwaarlozen van de modellering van de grenslaag geen significante invloed heeft op de grootschalige wervelstructuren.

4. Het programma heeft de mogelijkheid om de isolijnen van ψ te plotten. Het in Figuur 6.6 getekende isolijnen verloop zou na enkele tijdstapjes aanwezig moeten zijn. Echter deze situatie ontstaat pas na een aantal tijdstapjes ($\pm$ 25Δt). De oorzaak moet gezocht worden in een inspeelverschijnsel van de Poisson-vergelijking, ook al is deze niet afhankelijk van de tijd (t). Op het moment dat er een bronterm (ω) in het rechterlid van het stelsel ($A\psi=-\omega$) verschijnt, is de opbouw van het vlak van ψ kwadratisch van vorm en niet lineair zoals bij de Laplace-vergelijking. De wiskundige discontinuïteit in het model ter plaatse van de top van de bodemribbel heeft tot gevolg dat (ψ) niet continu differentieerbaar is.



Figuur 6.6 Isolijnen van ψ voor het stroomgebied op t^+ volgende uit oplossing van de Laplace-vergelijking. Figuur ontleend aan Longuet-Higgins (1981).

De brontermen (ω) in het rechterlid, bepaald door de rotatie te nemen over het snelheidsveld ter plaatse van de bodemribbeltop, zorgen er indirect voor dat de functie voor ψ weer continu differentieerbaar wordt ter plaatse van de discontinuiteit na circa $25\Delta t$. Het effect van deze situatie in het beginstadium van de ontwikkeling van de wervelstructuur is niet bekend.

5. De circulatie die wordt toegekend aan een puntwervel wordt bepaald door de kringintegraal te nemen over het snelheidsveld ter plaatse van de top van de bodemribbel. Bij een kleine celgrootte zal het snelheidveld "gladder" zijn met tot gevolg dat de circulatie per eenheid van oppervlakte een andere waarde heeft dan wanneer de circulatie wordt uitgerekend in de omgeving van de top van de bodemribbel bij een grotere cel. Ondanks dat de verschillen klein zijn, is niet nagegaan wat de invloed is van deze verschillen in circulatie op de ontwikkeling van de wervelstructuur.

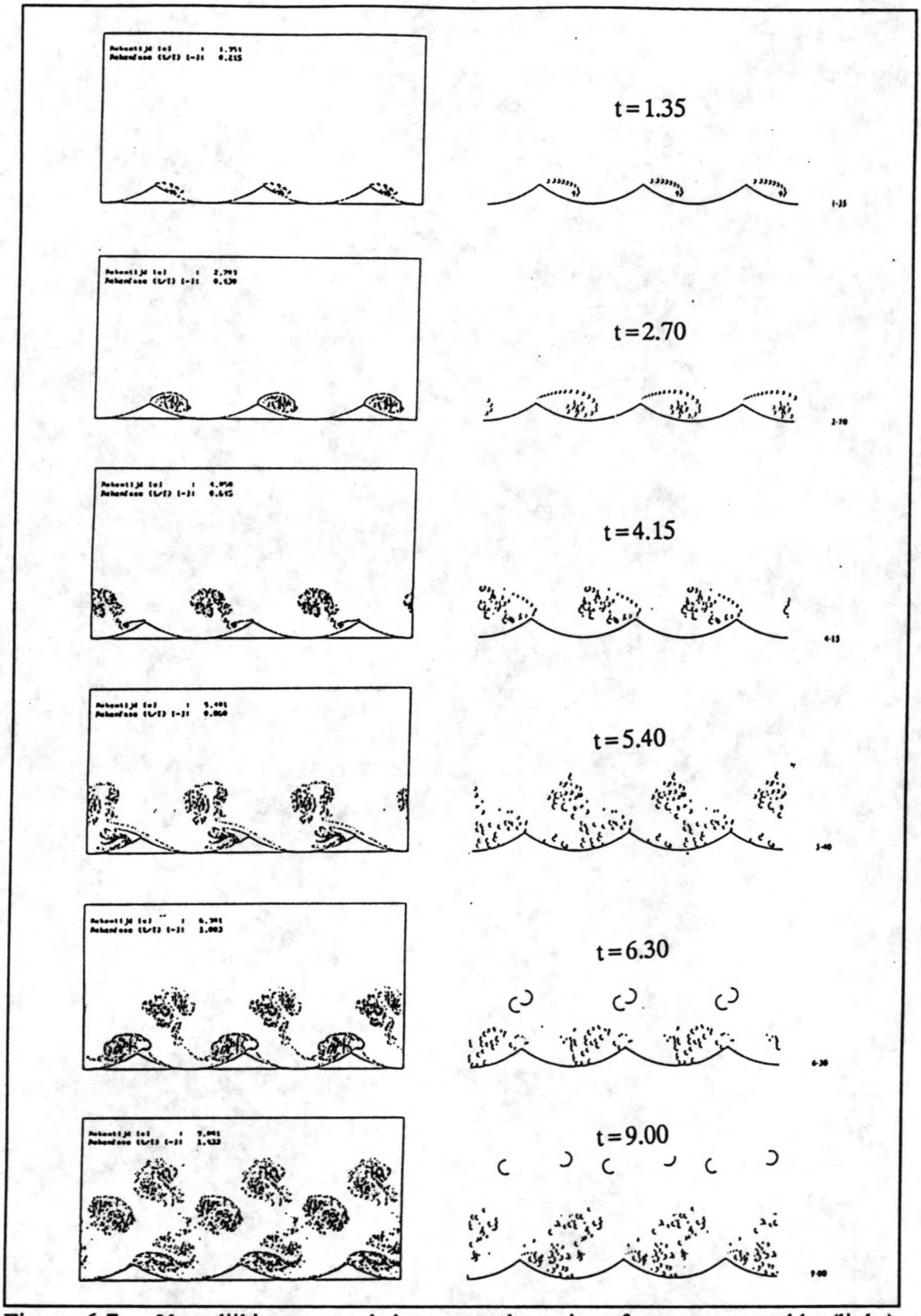
6. De circulatie die op tijdstip t wordt berekend, wordt gerepresenteerd door een aantal puntwervels (Γ_n). Het aantal puntwervels (N) wordt bepaald door het gebied weergegeven in Figuur 5.5 en de snelheden (u, v) in het loslaatpunt en kan indirect worden beïnvloed door het getal van Courant te veranderen. De circulatie kan worden gerepresenteerd door een groot aantal puntwervels met een kleine waarde voor de circulatie en vice versa. De invloed van het aantal werveldeeltjes op de ontwikkeling van de wervelstructuren is niet nagegaan.

6.2.3 Verificatie van het rekenmodel VORTEX

In dit onderzoek wordt het ontwikkelde rekenmodel geverifieerd door de grafische uitvoer van de simulaties kwantitatief te vergelijken met de resultaten van een soortgelijke simulatie beschreven in de literatuur. Deze simulatie, uitgevoerd door Longuet-Higgins (1981) is gebaseerd op een Vortex methode voor een niet-visceuze stroming waarbij de positie van het loslaatpunt en het aantal werveldeeltjes in het model verschilt van die van de Cloud In Cell methode. Belangrijk is dat de positie van het loslaatpunt door een transformatie van de geometrie geen significante invloed heeft op de ontwikkeling van de wervelstructuren bij de door Longuet-Higgins gebruikte methode. De resultaten van Longuet-Higgins zijn weergegeven op bijlage J.

Op de bijlagen D, F, H en I (testen 1, 3, 5, 6) zijn de simulaties weergegeven voor een niet-visceuze stroming. Deze simulaties hebben allemaal dezelfde trend als de simulatie weergegeven op bijlage J. Echter voor de simulaties op de bijlagen F en H (testen 3 en 5) is te zien dat na ongeveer een rekenfase (t/T)=0.824, door een verstoring de oriëntatie van de dipool zodanig is, dat de dipool zich omdraait en zich horizontaal (bijlagen F3, F4 en F5) of verticaal naar beneden (bijlagen H3, H4 en H5) begint te verplaatsen.

Voor de bijlagen D en I geldt dat de simulaties goed overeenkomen met die van Longuet Higgins op een aantal kenmerkende punten na. De wervel die zich op t=1.80 s (bijlagen D1 en I1) in de bodemribbel bevindt, strekt zich minder ver uit dan de wervel op de bijlagen J1 en J2. Voor alle simulaties geldt dat de wervelstructuren minder langgerekt en "open" zijn vergeleken met de simulatie uitgevoerd door Longuet-Higgins.
In composiet-figuur 6.7 worden enkele overeenkomstige fasen van de simulaties uit test 1 (zie bijlage D) met de resultaten van Longuet-Higgins vergeleken. Gekozen is voor de resultaten van test 1 (tabel 6.1) omdat deze bij de auteur als meest nauwkeurig over komen.



Figuur 6.7 Vergelijking van enkele overeenkomstige fasen van test één (links) met de resultaten van de simulatie van Longuet-Higgins (rechts).

Op t=6.30 s is duidelijk te zien dat de oriëntatie van de dipool, zie de bijlagen D3 en I3, ongeveer dezelfde richting heeft als de dipool weergegeven op bijlage J2. Na t=6.30 s geeft Longuet-Higgins de dipool weer door twee grote puntwervels. Een vergelijking met de resultaten verkregen met het rekenprogramma VORTEX is dan niet meer goed mogelijk.

De oorzaken van de verschillen tussen de uitgevoerde simulaties en die van Longuet-Higgins zijn dezelfde als beschreven in paragraaf 6.2.1. Onderzocht dient te worden welke parameter de grootste invloed heeft op de ontwikkeling van de wervelstructuur.

6.3 Nauwkeurigheid van de simulaties

Door de herverdeling van circulatie van puntwervels naar de wervelsterkte in de rasterpunten, het oplossen van de Poissonvergelijking, het bepalen van de snelheden hieruit en de bepaling van de nieuwe posities van de deeltjes, ontstaan fouten.

Convergentie en stabiliteit van de gebruikte Poissonsolver zijn niet zondermeer altijd gegarandeerd. De snelheid van convergentie is zeer afhankelijk van het aantal roosterpunten en de nauwkeurigheid van het aantal iteratiestappen. Verschillende testberekeningen hebben laten zien dat de oplossing voor de stroomfunctie naar een eindwaarde convergeert wanneer voor een raster van (60*120) en (30*60) het aantal iteratiestappen respectievelijk 150 en 100 wordt genomen. De stroomfunctie (ψ) is $O(\Delta x^2)$ nauwkeurig. Uitgaande van de berekende stroomfunctie (ψ) is de nauwkeurigheid van de snelheid van een deeltje $O(\Delta x)$.

De orde van nauwkeurigheid in de tijd is moeilijk te bepalen omdat de diffusievergelijking niet discreet wordt opgelost maar wordt gerepresenteerd door de Random Walk.

De Euler-vergelijking wordt wel exact opgelost door de verplaatsing van de puntwervels, op een fout door de discrete tijdstap na.

In principe mag een verandering van de grootte van een cel geen significante invloed hebben op de ontwikkeling van de wervelstructuur. Echter door de fouten die ontstaan is dit wel het geval. Afhankelijk van de fijnheid van het rooster wordt een fout verkregen in de positie van een werveldeeltje.
Baker (1979) beschrijft dat er bij een verfijning van het rooster kleine storingen optreden. Het oprollen van de wervel op het fijne rekenrooster geschiedt ongeveer hetzelfde als op het grovere rekenrooster. De grootschalige structuren worden in beide rekenroosters goed weergegeven.

7. CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN

Uitgaande van de verrichte literatuurstudie en de verrichte simulaties voor de wervelafschudding bij bodemribbels worden in dit hoofdstuk conclusies getrokken en aanbevelingen gedaan.

7.1 Conclusies

Om de ontwikkeling van wervelstructuren en de wervelafschudding bij bodemribbels zo duidelijk mogelijk weer te geven is gekozen voor een simulatie met een deeltjesmodel. Een literatuurstudie naar de deeltjesmodellen, de werveldynamica, Vortex methoden en de geometrie van de bodemribbel is verricht. Op basis van deze studie is ervoor gekozen het wervelsterkteveld weer te geven door puntwervels en de vergelijkingen die de beweging van de wervelstructuren beschrijven, met een Cloud In Cell methode op te lossen.
De vergelijkingen die de beweging van de puntwervels beschrijven, zijn in tijd en ruimte gediscretiseerd en numeriek opgelost. Hiervoor is een rekenprogramma ontwikkeld, VORTEX genaamd, dat geschreven is in de programmeertaal FORTRAN. Met het programma VORTEX.PLT kunnen de deeltjes grafisch worden weergegeven.

Conclusies ten aanzien van de gediscretiseerde vergelijkingen en de Cloud In Cell-methode:

- Toepassen van de Cloud In Cell methode heeft tot gevolg dat juist op die plaatsen waar karakteristieke stromingspatronen optreden, door de introductie van werveldeeltjes een duidelijk beeld wordt verkregen van deze stroming.
- De rekentijden bij de Cloud In Cell methode zijn aanzienlijk en worden voornamelijk bepaald door het oplossen van de Poissonvergelijking en niet zozeer door het totaal aantal puntwervels dat zich in het rekengebied bevindt.

- Doordat de puntwervels bij de Cloud In Cell methode indirect snelheden op elkaar induceren, namelijk via herverdeling van circulatie over roosterpunten, kan het wervelsterkteveld worden gerepresenteerd door puntwervels zodat complexe verdelingsfuncties niet behoeven te worden gebruikt.
- Bij de Cloud In Cell methode is de positie van het loslaatpunt ten opzichte van de bodemribbeltop van invloed op de verdere ontwikkeling van de wervelstructuur.
- De Cloud In Cell methode heeft geen last van instabiliteitsverschijnselen of numerieke diffusie die zich bij een volledig Euleriaanse methode wel voordoen. Stromingen met een hoog Reynolds-getal kunnen daardoor goed gesimuleerd worden.
- De nauwkeurigheid van de oplossing, gebaseerd op de gediscretiseerde vergelijkingen, is voornamelijk afhankelijk van de celgrootte ($\Delta x, \Delta y$). De tijdstap (Δt) is zo klein dat de fout in deze tijdstap geen significante invloed heeft op de verplaatsing van de puntwervels bij het exact oplossen van de Euler-vergelijking.
- Diffusie van circulatie wordt in het discrete model gesimuleerd door de verplaatsingen van de puntwervels te beschrijven door een Random Walk. De diffusievergelijkingen behoeven niet numeriek te worden geïntegreerd.

Conclusies ten aanzien van de resultaten van de uitgevoerde simulaties:

- De uitgevoerde simulaties hebben dezelfde trend als die beschreven in de literatuur. Op de bijlagen (D t/m I) is duidelijk de ontwikkeling te zien van de wervelstructuren en de dipolen die periodiek loslaten aan de top van de bodemribbel en zich in de vloeistof voortbewegen.
- Storingen die op de ontwikkeling van de wervelstructuur werken, zijn het gevolg van de numerieke benadering en de positie waar de puntwervels worden geïntroduceerd.
- Het rekenmodel is nog nauwelijks geverifieerd zodat nog weinig kan worden gezegd over de nauwkeurigheid.

Het rekenmodel VORTEX is geschikt om de ontwikkeling van wervelstructuren te simuleren waarbij aandacht dient te worden besteed aan bovenstaande punten. Door de invoer in VORTEX.INV te veranderen, kan de invloed op de wervelbeweging bij een andere bodemribbelvorm worden bepaald of kan de invloed op de wervelbeweging bij een bepaalde randvoorwaarde voor de waterbeweging (grotere orbitaalsnelheids-amplitude) bij een bodemribbel worden onderzocht.

Het programma van het rekenmodel is zodanig van opzet dat de aanbevelingen die hierna volgen, in een vervolgonderzoek eenvoudig kunnen worden uitgevoerd. In het programma is uitvoerig commentaar tussen de regels geplaatst zodat het programma duidelijk leesbaar is.

7.2 Aanbevelingen

1. Reduceren van de rekentijd door het toepassen van bijvoorbeeld een LU-decompositie voor het oplossen van de Poissson-vergelijking, aangezien de coëfficiënten van de rekenmoleculen in de matrix (A) gedurende de berekening constant zijn.

2. Onderzoek naar de positie van het loslaatpunt is noodzakelijk omdat uit de simulaties is gebleken dat bij toepassing van de C.I.C.methode met een rekenrooster de positie van het loslaatpunt van invloed is op de ontwikkeling van de wervelstructuren.

3. Onderzoek naar het opdrukken van de randvoorwaarde voor de stroomfunctie (ψ) op de bovenrand. Gedacht kan worden om de randvoorwaarde te verkrijgen uit de oplossing van de vergelijkingen die de snelheidsverdeling in de verticaal beschrijven onder een oscillerende stroming.

4. Het rekenmodel verifiëren door de snelheidsprofielen in een verticaal gedurende een periode te vergelijken met waarnemingen beschreven in de literatuur.

Gemeten snelheidsprofielen onder golfbewegingen voor de betreffende geometrie van de bodemribbel zijn beschikbaar (Ikeda *et al.* 1991; Sawamoto *et al.* 1983).

5. Onderzoek verrichten naar de invloed van de celgrootte op de nauwkeurigheid. Mogelijk herverdeling van de circulatie naar een negental roosterpunten in plaats van vier roosterpunten

6. Voor bepaling van de snelheid van een deeltje: niet enkel direct via bilineaire interpolatie de snelheden bepalen maar een predictor-corrector methode toepassen. De nieuwe plaats van een deeltje wordt dan bepaald door:

$$\begin{aligned} \overline{x_n} &= x_n(t) + u_n(x_n)\Delta t \\ x_n(t + \Delta t) &= x_n(t) + \tfrac{1}{2}(u_n(x_n) + u_n(\overline{x_n}))\Delta t \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} \overline{y_n} &= x_n(t) + v_n(y_n)\Delta t \\ y_n(t + \Delta t) &= y_n(t) + \tfrac{1}{2}(v_n(y_n) + v_n(\overline{y_n}))\Delta t \end{aligned} \tag{7.2}$$

Bovenstaande is uitsluitend voor convectieve verplaatsing (zie Baker 1979).

7. Het verder ontwikkelen van het rekenmodel door sediment-transportformules aan de vergelijkingen te koppelen zodat het opwoelen van sediment onderzocht kan worden. Deze uitbreiding is pas mogelijk wanneer het rekenmodel in voldoende mate is geverifieerd.

[1] Abbott M.B., Basco D.R. (1989), **Computational Fluid Dynamics**, ISBN 0-470-21316-7, Copublished in the United States, New York, p. 22-24 en p. 303-357

[2] Acheson D.J. (1991), **Elementary Fluid Dynamics**, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford, p. 1-55 en p. 147-200

[3] Ames W.F. (1977), **Numerical Methods For Partial Differential Equations**, Academic Press, New York/San Francisco

[4] Baker G.R. (1979), **The "Cloud In Cell" Technique Applied to the Roll Up of Vortex Sheets**, Journal of Computational Physics 31, p. 76-95

[5] Battjes J.A. (1989.a), **College handleiding B70 Vloeistofmechanica**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[6] Battjes J.A. (1989.b), **College handleiding B71 Vloeistofmechanica**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[7] Battjes J.A. (1990.a), **College handleiding B76 Korte golven**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[8] Battjes J.A. (1990.b), **College handleiding B78 Wind-golven**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[9] Booij R. (1986), **College handleiding B82 Turbulentie in de waterloopkunde**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[10] Bouwmeester J. (1989), **College handleiding F4 Flexibele waterbouwkundige constructies**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[11] Chorin A.J. (1973), **Numerical study of slightly viscous flow**, Journal of Fluid Mechanics, Volume 57, part 4, p. 785-796

[12] Chorin A.J. (1972), **A vortex method for the study of rapid flow**, Lecture Notes in Physis, Vol. 19, p.100-104

[13] Dercksen A., Walree F. van (1989), **Simulation of the hydrodynamic loading and structural response of a marine riser**, Maritime Research Institute Netherlands, Wageningen, The Netherlands

[14] Feller W. (1950), **An introduction to probability theory and its applications**, 3e-druk, Volume I, A Wiley International Edition, New York, USA

[15] Goldstein S. (1965), **Modern Developments in Fluid Dynamics (Volume I)**, Dover Publications, inc., New York, USA

[16] Goldstein S. (1965), **Modern Developments in Fluid Dynamics (Volume II)**, Dover Publications, inc., New York, USA

[17] Graham J.M.R. (1978), **The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers**, Journal of Fluid Mechanics (1980), Vol. 97, part 2, p. 331-346

[18] Hoeijmakers H.W.M. (1989), **Computational aerodynamics of ordered vortex flows**, Proefschrift, Technische Universiteit Delft, Nederland

[19] Groesen van E.W.C., (1992), **Optimaliteit in beweging: gestructureerde verschijnselen in de natuur**, De Ingenieur, Orgaan van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs, jaargang 104, juni 1992, nr.6 ,p.26-31

[20] Gustafson K.E., Sethian J.A. (1991), **Vortexmethods and vortex motion**, SIAM Philadelphia, Pennsylvania, USA, p. 1-47 en p. 196-198

[21] Ikeda S., Horikawa K., Nakamura H., Noguchi K. (1991), **Oscillatory boundary layer over a sand ripple model**, Coastal Engineering in Japan, Vol. 34, No. 1, Japan Society of Civil Engineers, Japan

[22] Ikeda S., Kizaki S., Ishii S., Kuribayashi S. (1989), **Flow near sand ripples and dissipation of wave energy**, Coastal Engineering in Japan, Vol. 32, No. 1, Japan Society of Civil Engineers, Japan

[23] Laan D.J., **Vortex-simulatie van stromingen**, Afstudeerverslag 1991

[24] Lamb H. (april 1932), **Hydrodynamics**, New York Publications, p.202-249

[25] Longuet-Higgins (1981), **Oscillating flow over steep sand ripples**, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 107, p. 1-35

[26] Nadaoka K., Yagi H. (1989), **A numerical simulation of wave boundary layer by CIC method**, Proc. Int. Symp. on Computational Fluid Mechanics-Nagoya, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan

[27] Peyret R., Taylor T.D (1990), **Computational Methods for Fluid Flow**, ISBN 0-387-13851-X Springer-Verlag New York / Heidelberg / Berlin, p. 129-136 en p. 196-250

[28] Prandtl L., Tietjens O.G. (1934), **Fundamentals of Hydro- & Aeromechanics**, Dover Publications, Inc, New York.

[29] Reineck H.-E, Singh I.B. (1973), **Depositional Sedimentary Environments**, ISBN 3-540-06115-0 Springer-Verlag New York / Heidelberg / Berlin, p. 7-47

[30] Roberson J.A., Crowe C.T. (1990), **Engineering Fluid Mechanics**, ISBN 0-395-38124-X Houghton Mifflin Company, Boston, p. 99-137

[31] Sawamoto M. (1980), **Flow field over rippled beds induced by wave action**, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, Department of Civil Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan

[32] Sawamoto M., Yamashita T., Yamaguchi S., (1983), **Velocity measurements of an oscillatory flow over an enlarged model of sand ripples,** Technical report, No. 31, Department of Civil Engineering, Tokyo Institute of Technology, Japan

[33] Steketee J.A. (1973), **College handleiding D-18 Aero I**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, Delft, Nederland

[34] Steketee J.A. (1975), **College handleiding D-19 Aero II**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, Delft, Nederland

[35] Toonder J.M.J. den (1991), **Simulation of the flow around cylinders at very high Reynolds numbers by the random vortex method and turbulence modeling**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Wiskunde en Informatica, Delft

[36] Vegt J.J.W. van der, Boom W.C. de (1985), **Numerical simulation of flow around circular cylinders at high Reynolds numbers**, Maritime Research Institute Netherlands, Wageningen, The Netherlands

[37] Vegt J.J.W. van der, Huijsmans R.H.M. (1984), **Numerical simulation of flow around bluff bodies at high Reynolds numbers**, Maritime Research Institute Netherlands, Wageningen, The Netherlands

[38] Veldman A.E.P. (1988), **College handleiding A110B Numerieke stromingsleer**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica, Delft, Nederland

[39] Vreugdenhil C.B. (1980), **College handleiding B85 Waterloopkundige berekeningen II**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[40] Vries M. de (1984), **Vloeistofmechanica**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, Nederland

[41] Wilders P. (1989), **College handleiding A110A Numerieke stromingsleer**, Technische Universiteit Delft, Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica, Delft, Nederland

Symbool	Omschrijving	Eenheid	Dimensie
a	Amplitude van oppervlakte-uitwijking	[m]	[L]
A_k	Oppervlakte van gedeelte cel	[m^2]	[L^2]
$C(t)$	Contour van een gebied	[m]	[L]
d	Waterdiepte	[m]	[L]
e_{ij}	Deformatietensor	[ ]	[ ]
e_z	Eenheids normaal vector	[ ]	[ ]
$E(x_t)$	Verwachtingswaarde van functie x_t	[ ]	[ ]
f	Frequentie	[Hz]	[T^{-1}]
$f(a)$	Functie van a	[1]	[-]
$f_\delta()$	Delta Dirac-functie	[m^{-2}]	[L^{-2}]
$f_\sigma()$	Verdelings-functie	[m^{-2}]	[L^{-2}]
F_i	Krachtenveld (i=1,2,3)	[$kg.m.s^{-2}$]	[MLS^{-2}]
g	Gravitatieversnelling	[$m.s^{-2}$]	[LT^{-2}]
H_r	Ribbelhoogte	[m]	[L]
$\cdot\cdot_{i,j}$	Teller in respectievelijk x- en y-richting	[ ]	[ ]
k	Golfgetal	[$rad.m^{-1}$]	[$radL^{-1}$]
k_r	Golfgetal bodemribbel	[$rad.m^{-1}$]	[$radL^{-1}$]
L	Golflengte	[m]	[L]
L_r	Ribbellengte	[m]	[L]
m	Aantal tijdstappen bij experiment	[ ]	[ ]
N	Aantal discrete werveldeeltjes	[ ]	[ ]
N_x	Aantal roosterpunten in x-richting	[ ]	[ ]
N_y	Aantal roosterpunten in y-richting	[ ]	[ ]
$N^{(1),(2)}$	Stochastische variabelen (uniform verdeeld)	[ ]	[ ]
p,P	Druk	[$N.m^{-2}$]	[$T^{-2}L^{-1}$]
P_r	Waarde van polygoon	[1]	[ ]
$p(x_t)$	Kansdichtheidsfunctie	[ ]	[ ]
$\cdot\cdot_{p,q}$	Numerieke coördinaten top bodemribbel	[ ]	[ ]
r	Straal (lengte van een vector)	[m]	[L]
r_w	Afstand van loslaatpunt tot contour	[m]	[L]
$\vec{r}$	Plaatsvector (x,y)	[m]	[L]
Re	Getal van Reynolds	[1]	[-]
Str	Getal van Strouhal	[1]	[-]
$S(t)$	Oppervlakte van gebied binnen een contour	[m^2]	[L^2]
t	Tijd	[s]	[T]
t^+	Tijdstip net na t=0	[s]	[T]
t_0	Begintijd op t=0	[s]	[T]
t_i,t_{ij}	Tijd waarop puntwervels zijn losgelaten	[s]	[T]
T_g,T	Periode golfbeweging	[s]	[T]
T_{tot}	Totale rekentijd	[s]	[T]
$\vec{u}$	Snelheidsvector (u,v,w)	[$m.s^{-1}$]	[LT^{-1}]
u_b	Snelheid net buiten de binnengrenslaag	[$m.s^{-1}$]	[LT^{-1}]

Symbool	Omschrijving	Eenheid	Dimensie
u,v,w	Snelheden in i-richting (i=1,2,3)	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
$\vec{u}_h$	Snelheidsvector uit Laplace-vglk.	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
$\vec{u}$	Snelheidsvector	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
u_n	Snelheid in normaalrichting	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
u_s	Snelheid loodrecht op de normaal	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
u_*	Schuifspanningssnelheid	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
$u_i'(p)$	Snelheid $\vec{u}$ in punt p'(i= 1,2,3)	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
u_∞, v_∞	Snelheid in buitengebied	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
u_Θ	Radiale snelheid	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
U	Snelheid gebruikt in schaling	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
v_i	Snelheidscomponent (i=1,2,3)	$[m.s^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
$W^{(x)}(t)$	Stochastische variabele	[ ]	[ ]
w_p, w_q	Uniforme kansverdeling	[ ]	[ ]
$W_i(\hat{w})$	Stochastische variabele	[ ]	[ ]
$\hat{x},\hat{y}$	Stochastische coördinaten	[m]	[L]
x,y,z	Coördinaten in cartesisch assenstelsel	[m]	[L]
x_m	Positie van een deeltje na m tijdstappen	[m]	[L]

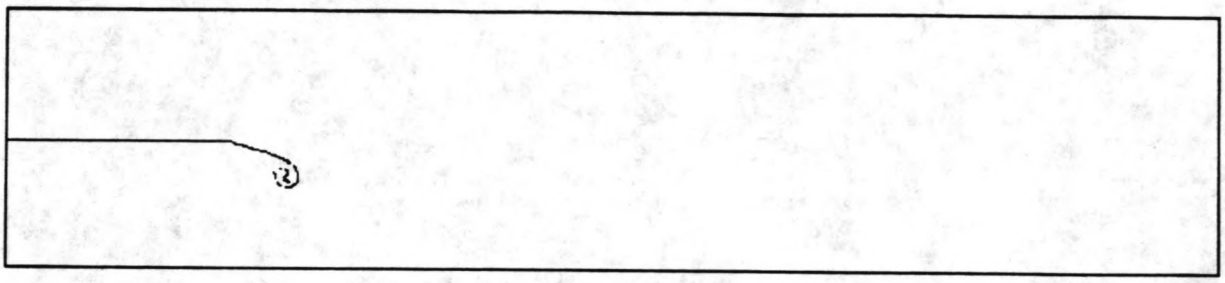
Symbool	Omschrijving	Eenheid	Dimensie
α,β	Plaats deeltje (x,y) op tijdstip t	[m]	[L]
α_t	Tophoek van de bodemribbel	[rad]	[-]
α_w	Hoek waaronder deeltjes loslaten	[rad]	[-]
γ	Verdelingsfunctie	[m^2]	[m^2]
γ_{ij}	Deformatietensor	[s^{-1}]	[T^{-1}]
Γ_i	Circulatie toegekend aan Puntwervel	[$m^2.s^{-1}$]	[L^2T^{-1}]
δ^d	Dirac Delta-functie	[m^{-2}]	[L^{-2}]
δ	Grenslaagdikte	[m]	[L]
δ_{cl}	Cuttoff length bij een werveldeeltje	[m]	[L]
δ_i,δ_j	Invloedsgebied van puntwervel na tijd t_i, t_j	[m]	[L]
δ_{ij}	Kroneckersymbool	[1]	[-]
Δt	Tijdstap in de berekening	[sec]	[T]
$\Delta x,\Delta y$	Stapgrootte van rooster in x- en y-richting	[m]	[L]
Δx_w	X-afstand van baan in rekencel	[m]	[L]
Δy_w	Y-afstand van baan in rekencel	[m]	[L]
Δr	Absolute afstand tussen twee puntwervels	[m]	[L]
Δz	Kleine verplaatsing bij Random Walk	[m]	[L]
ϵ	"Cluster" viscositeit	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]
ϵ_{ij}	Deformatie snelheidstensor	[s^{-1}]	[T^{-1}]
$\eta(x,t)$	Oppervlakte-uitwijking	[m]	[L]
η	Dynamische viscositeit	[$kg.m^{-1}s^{-1}$]	[$ML^{-1}T^{-1}$]
Θ	Hoek	[rad]	[rad]
κ	Constante van Von Karman (0.41)	[1]	[-]
ν_m	Kinematische moleculaire viscositeit	[ms^{-2}]	[LT^{-1}]
ν_t	Kinematische turbulentie viscositeit	[ms^{-2}]	[LT^{-1}]
ν	Kinematische viscositeits-coëfficiënt	[ms^{-2}]	[LT^{-1}]
π	Pi (3.14159265)	[rad]	[-]
ρ	Dichtheid	[$kg.m^3$]	[ML^3]
σ	Variantie van een verdelingsfunctie	[m]	[L]
τ	Schuifspanning	[$N.m^{-2}$]	[$MT^{-2}L^{-1}$]
τ_{ij}	Visceuze spanningscomponent	[$N.m^{-2}$]	[$MT^{-2}L^{-1}$]
ϕ	Potentiaalfunctie	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]
ψ_p	Stroomfunctie	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]
ψ	Stroomfunctie van de Poisson-vergelijng	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]
ψ_h	Stroomfunctie van de Laplace-vergelijking	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]
ψ_∞	Stroomfunctie behorend bij u_∞ en v_∞	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]
ω	Wervelsterkte	[s^{-1}]	[T^{-1}]
ω_g	Hoekfrequentie van een golf	[$rad.s^{-1}$]	[$radT^{-1}$]
ξ	Werveltensor	[s^{-1}]	[T^{-1}]
Ω	Constante waarde voor circulatie	[m^2s^{-1}]	[L^2T^{-1}]

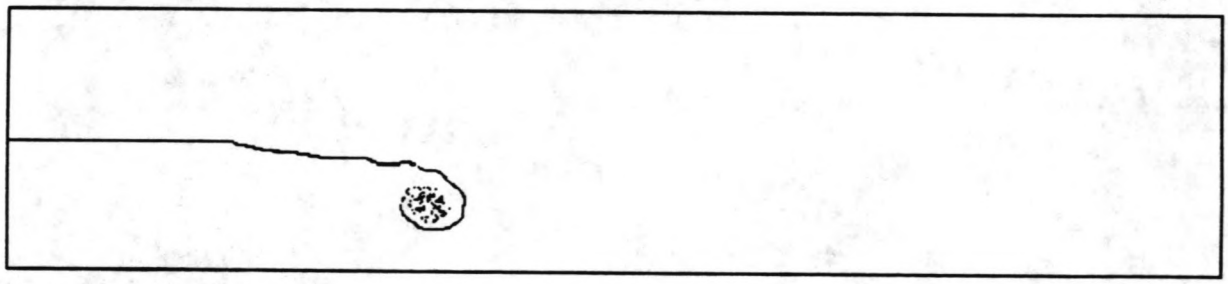
Indices en symbolen:

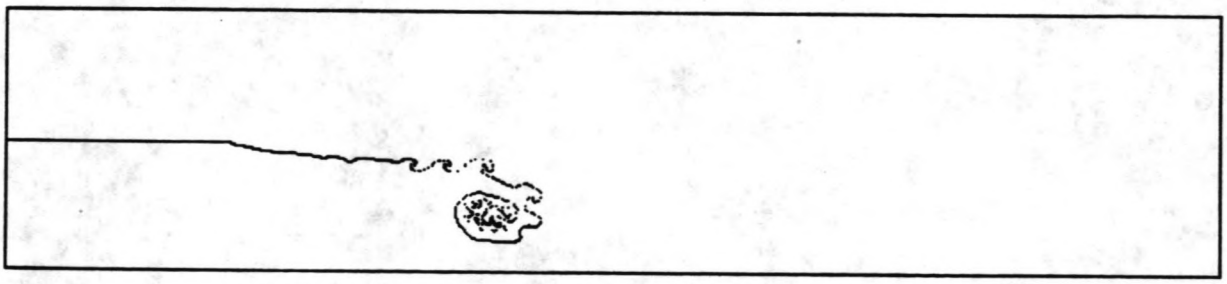
x,y,z	Richtingindices
1,2,3	Richtingindices
δ_{ij}	als $\begin{cases} i=j & \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j & \delta_{ij} = 0 \end{cases}$
$\frac{\partial ..}{\partial ..}$	Partiële afgeleide
$\frac{D..}{Dt}$	Meebewegende afgeleide
∇_i	$\frac{\partial}{\partial x_i}$
Δ_i	$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
$\approx$	Bijna gelijk aan
$\times$	Uitwendig product
.	Inwendig product
Δ	Is gedefinieerd als...

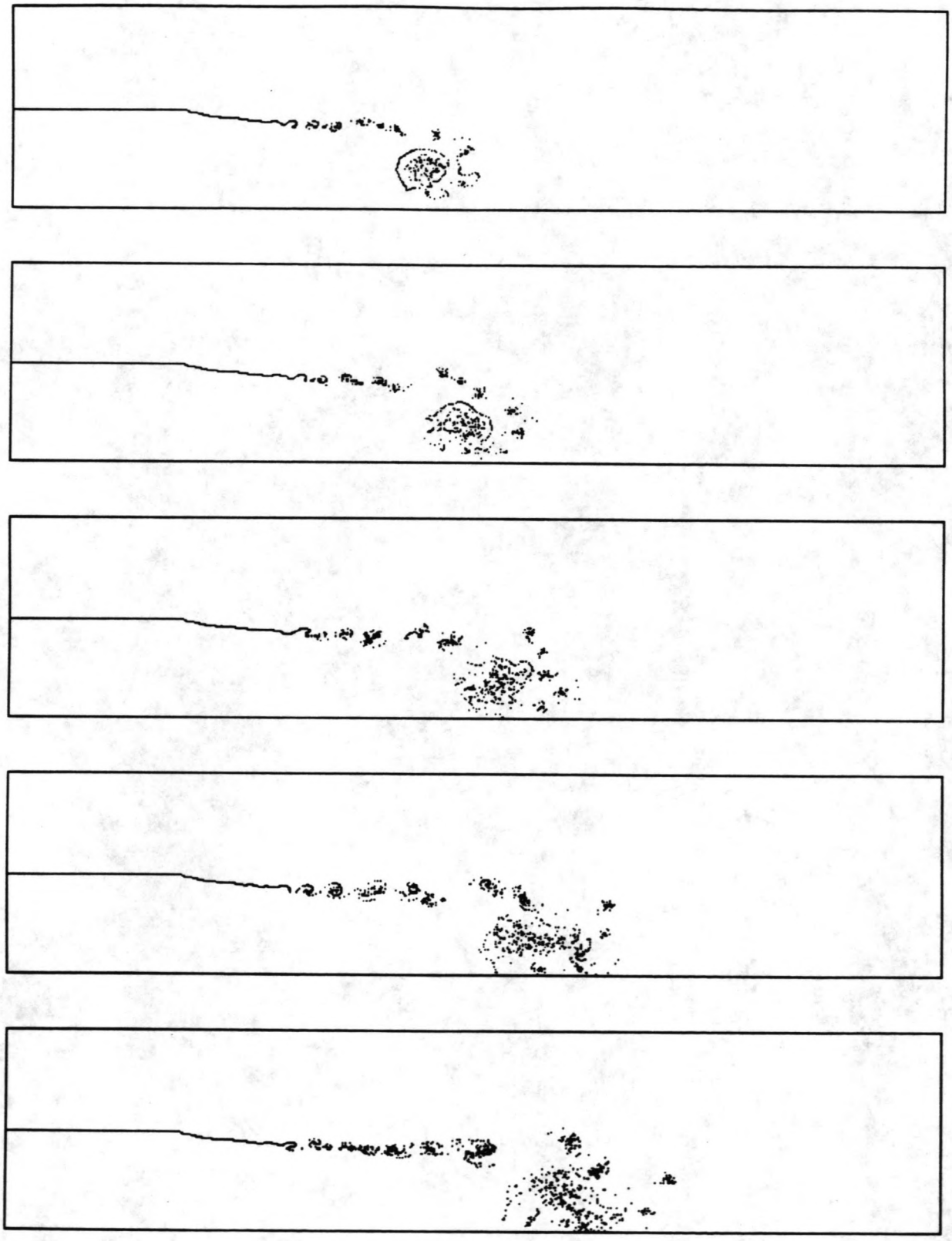
Ontwikkeling grenslaag in de vorm van een wervelstraat:

Snelheid boven de horizontale plaat	[m/s]	: 4.0
Snelheid onder de horizontale plaat	[m/s]	: 1.0
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 0.0
Aantal roosterpunten in x-richting	[ ]	: 150
Aantal roosterpunten in y-richting	[ ]	: 150
Aantal iteraties voor Poisson-solver	[ ]	: 80



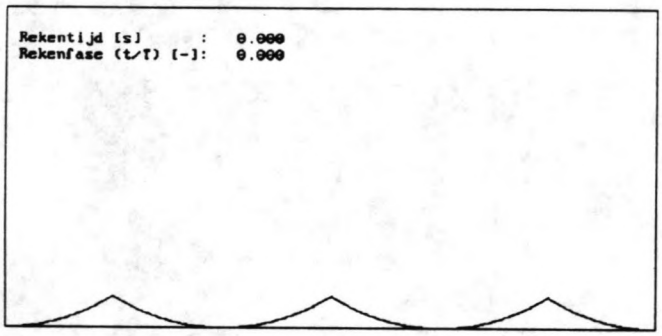


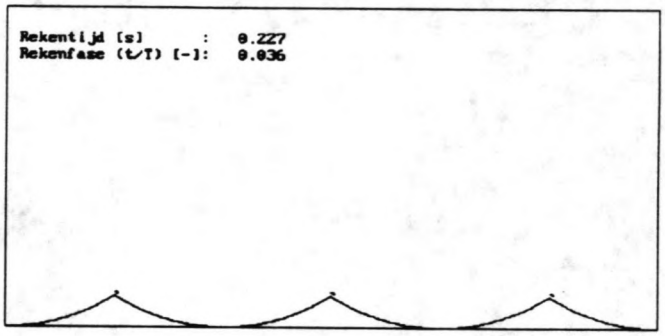


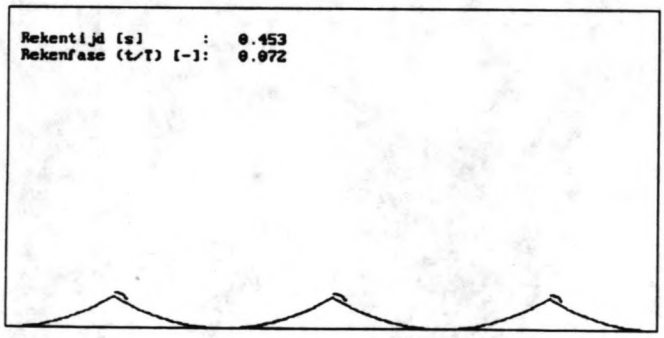


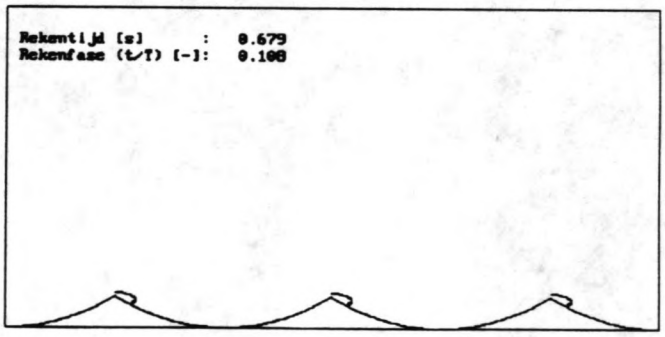
Wervelafschudding bij bodemribbels:

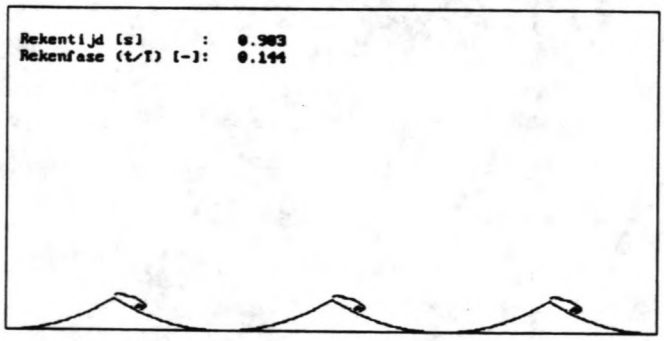
Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygoonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 0.0
"Cluster" viscositeit	[m²/s]	: 1.E-8
Roostergrootte	[-]	: ((3*63) + 1)*110
Celgrootte ($\Delta x*\Delta y$)	[mm]	: 2*2
Aantal iteraties Poissonsolver	[-]	: 150
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5
Afstand loslaatpunt tot bodemribbeltop	[mm]	: 1.0

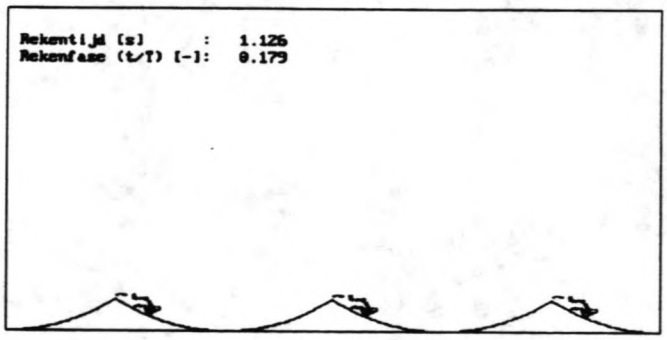


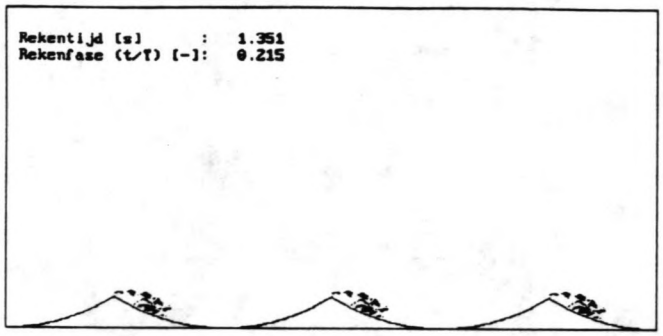


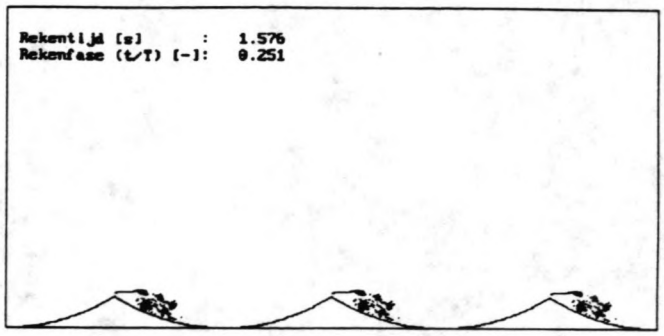


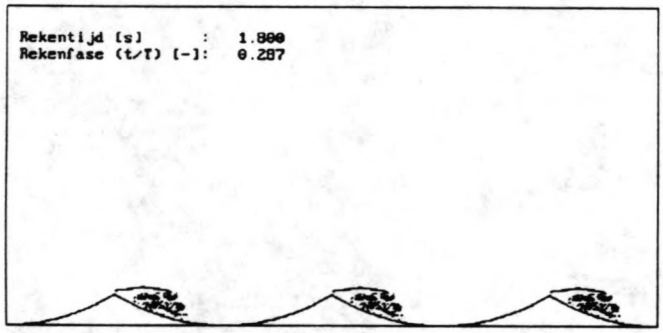


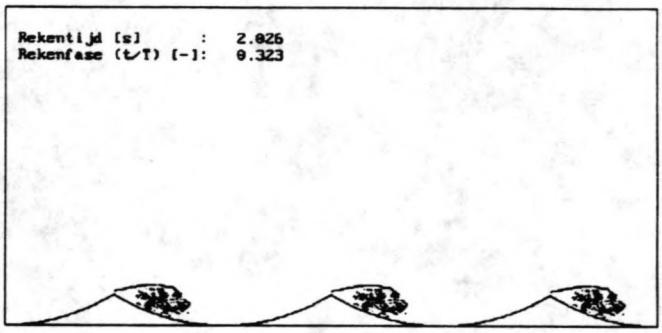


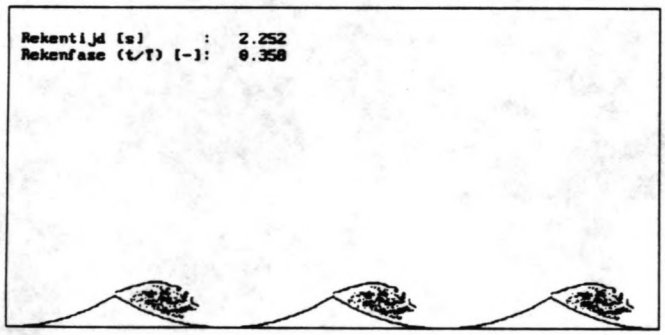


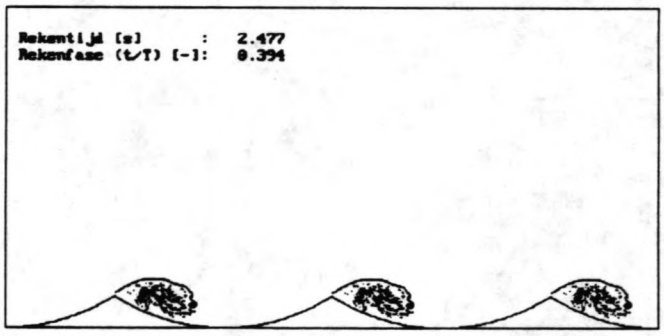

Rekentijd [s] : 1.351
Rekenfase (t/T) [-]: 0.215

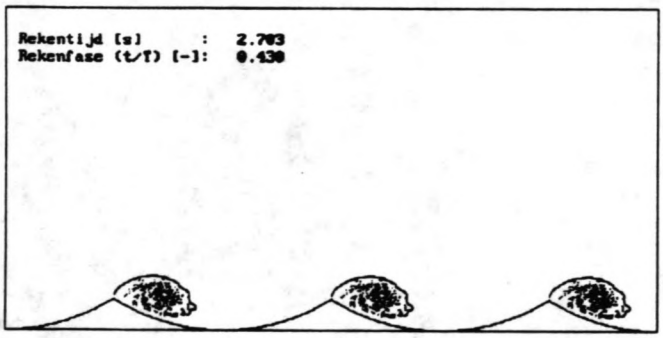

Rekentijd [s] : 1.576
Rekenfase (t/T) [-]: 0.251

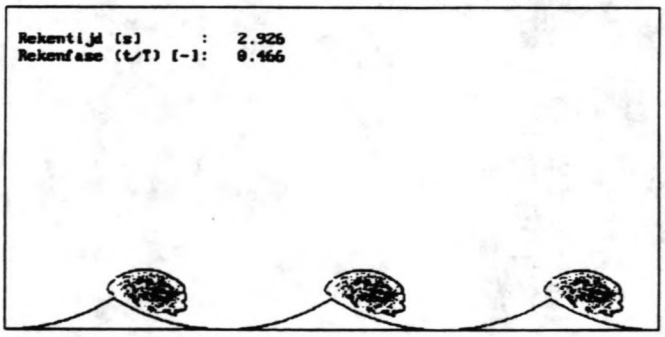

Rekentijd [s] : 1.800
Rekenfase (t/T) [-]: 0.287

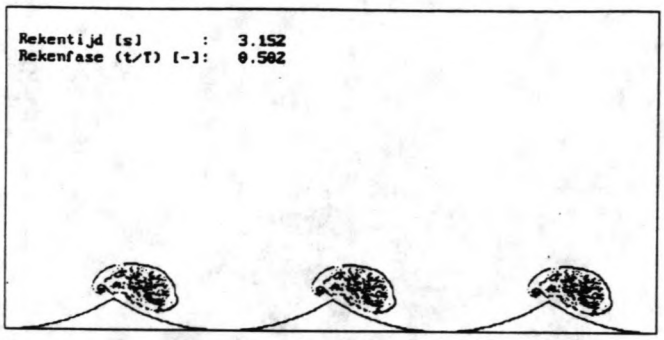

Rekentijd [s] : 2.026
Rekenfase (t/T) [-]: 0.323

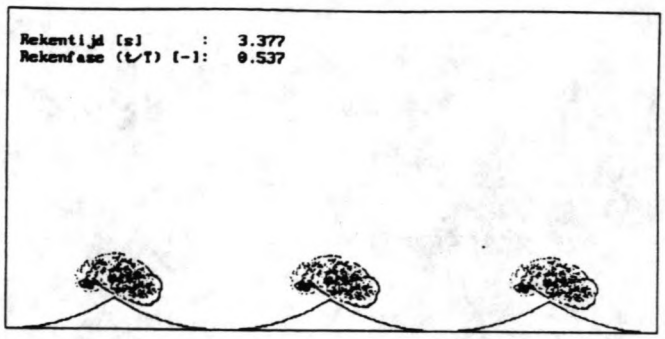

Rekentijd [s] : 2.252
Rekenfase (t/T) [-]: 0.358

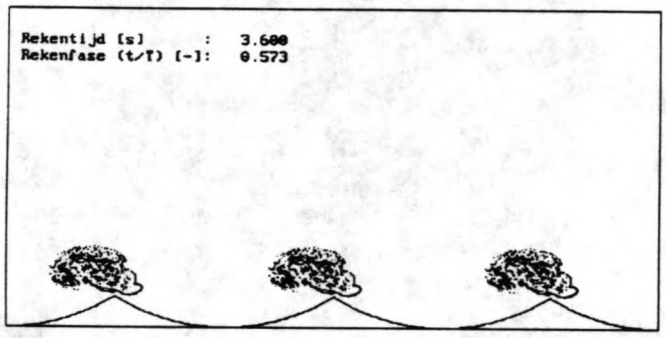

Rekentijd [s] : 2.477
Rekenfase (t/T) [-]: 0.394

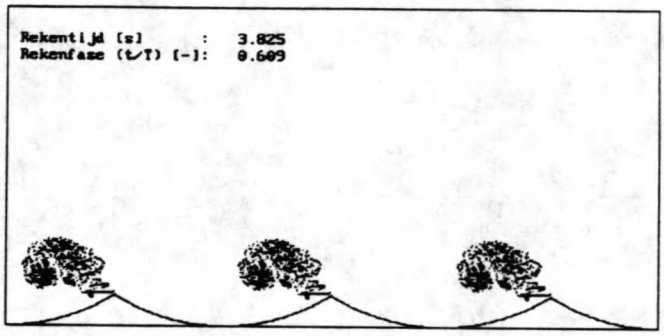

Rekentijd [s] : 2.703
Rekenfase (t/T) [-]: 0.430

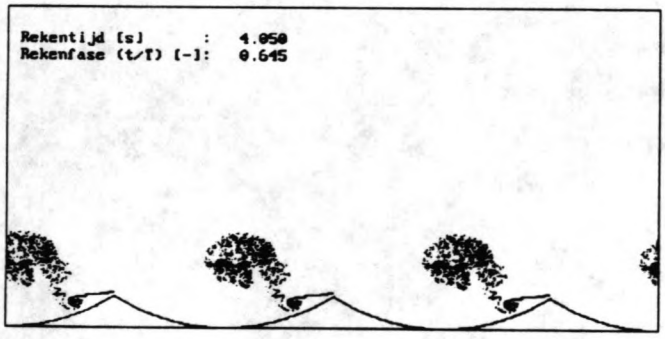

Rekentijd [s] : 2.926
Rekenfase (t/T) [-]: 0.466

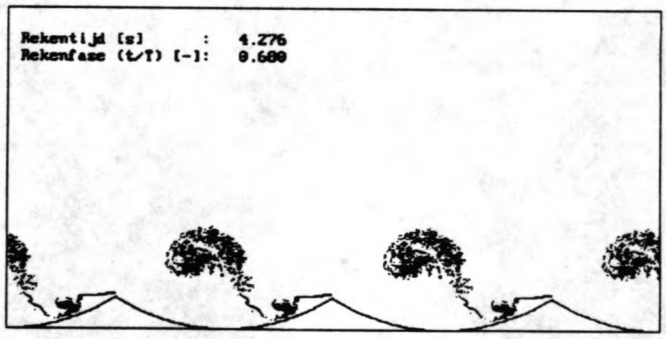

Rekentijd [s] : 3.152
Rekenfase (t/T) [-]: 0.502

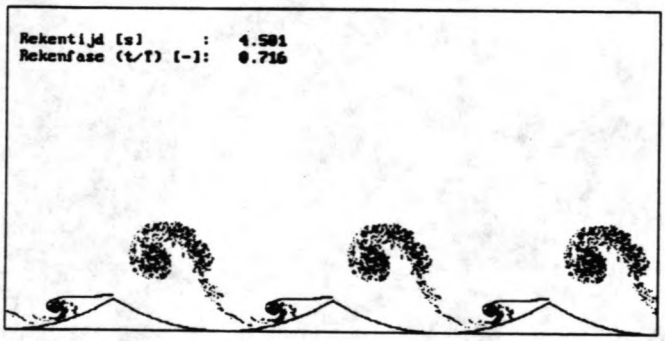

Rekentijd [s] : 3.377
Rekenfase (t/T) [-]: 0.537

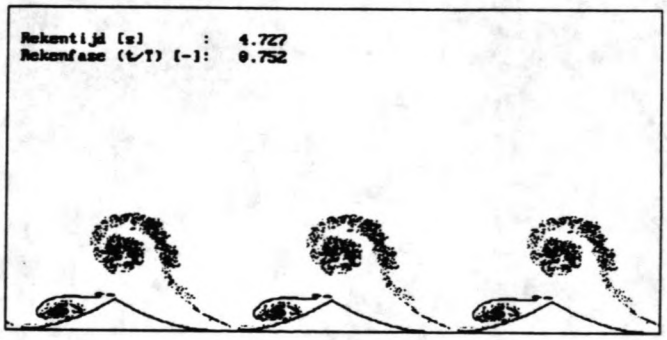

Rekentijd [s] : 3.600
Rekenfase (t/T) [-]: 0.573

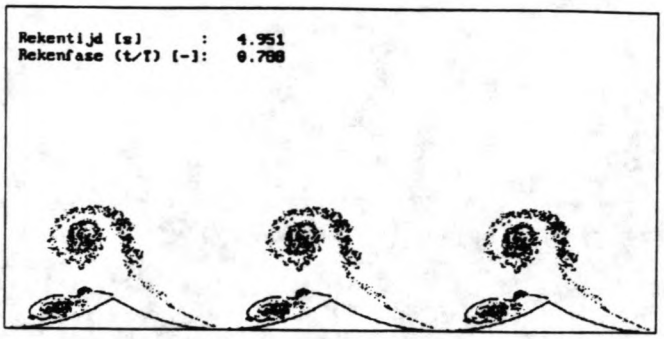

Rekentijd [s] : 3.825
Rekenfase (t/T) [-]: 0.609

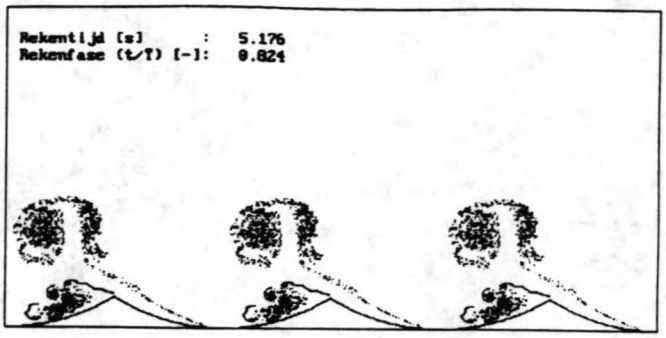

Rekentijd [s] : 4.050
Rekenfase (t/T) [-]: 0.645

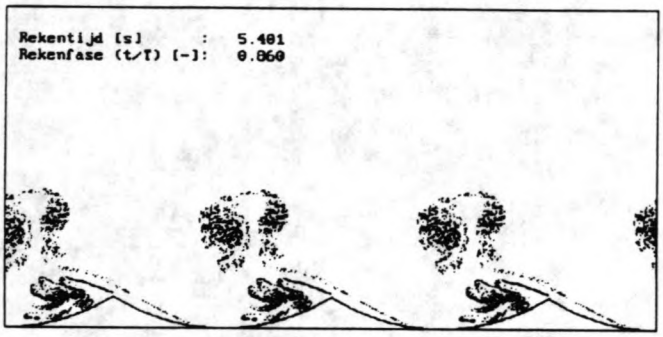

Rekentijd [s] : 4.276
Rekenfase (t/T) [-]: 0.680

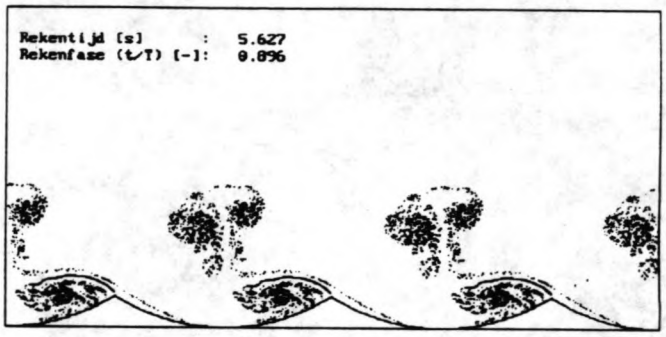

Rekentijd [s] : 4.501
Rekenfase (t/T) [-]: 0.716

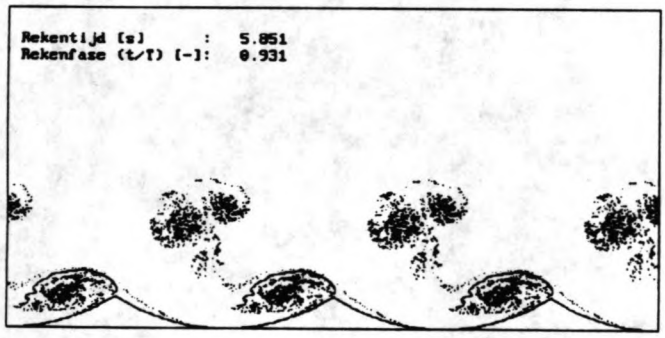

Rekentijd [s] : 4.727
Rekenfase (t/T) [-]: 0.752

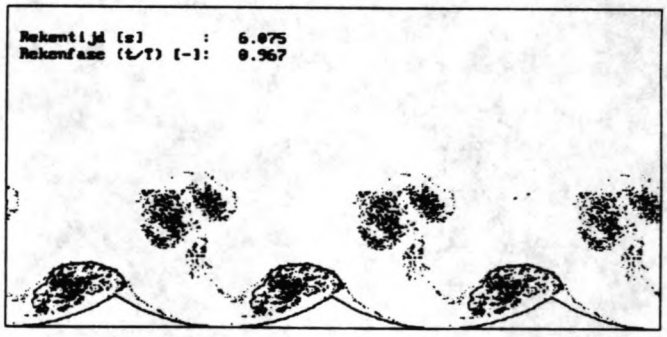

Rekentijd [s] : 4.951
Rekenfase (t/T) [-]: 0.788

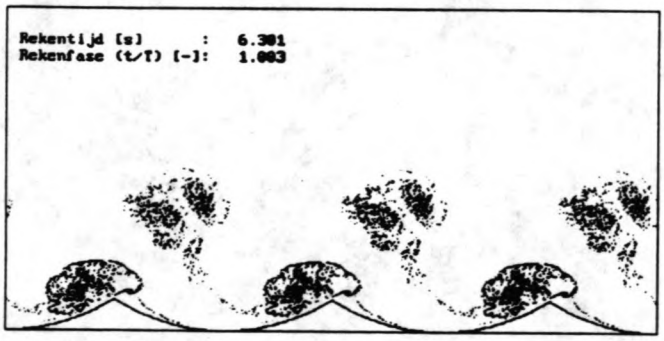

Rekentijd [s] : 5.176
Rekenfase (t/T) [-]: 0.824

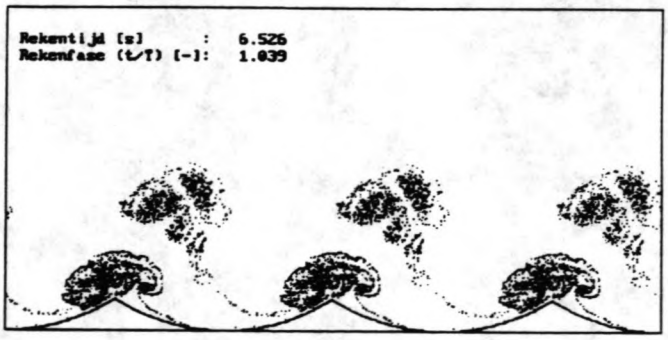

Rekentijd [s] : 5.401
Rekenfase (t/T) [-]: 0.860

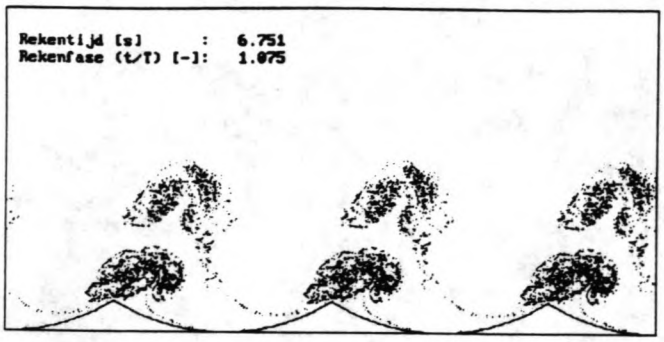

Rekentijd [s] : 5.627
Rekenfase (t/T) [-]: 0.896

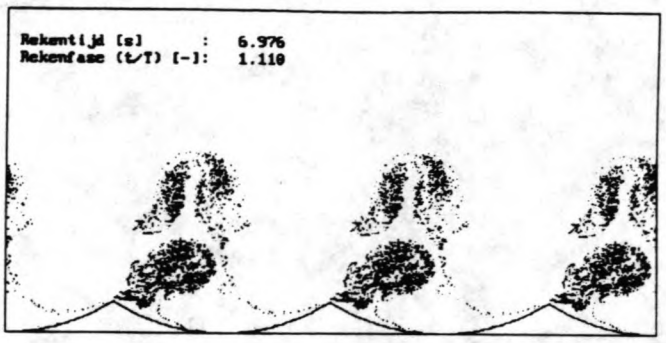

Rekentijd [s] : 5.851
Rekenfase (t/T) [-]: 0.931

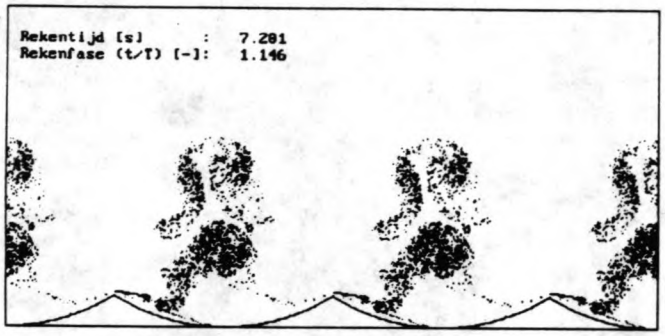

Rekentijd [s] : 6.075
Rekenfase (t/T) [-]: 0.967

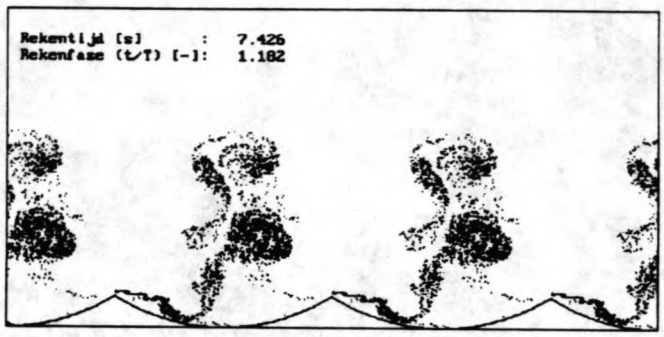

Rekentijd [s] : 6.301
Rekenfase (t/T) [-]: 1.003

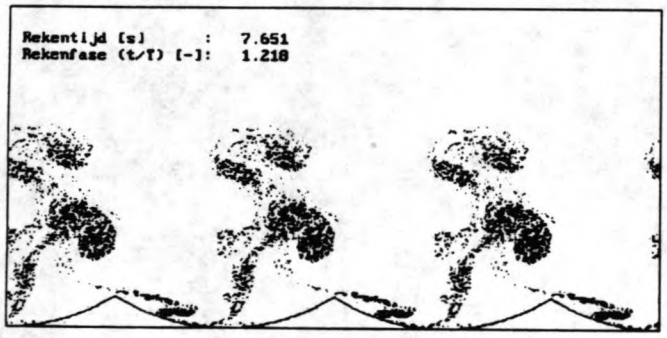

Rekentijd [s] : 6.526
Rekenfase (t/T) [-]: 1.039

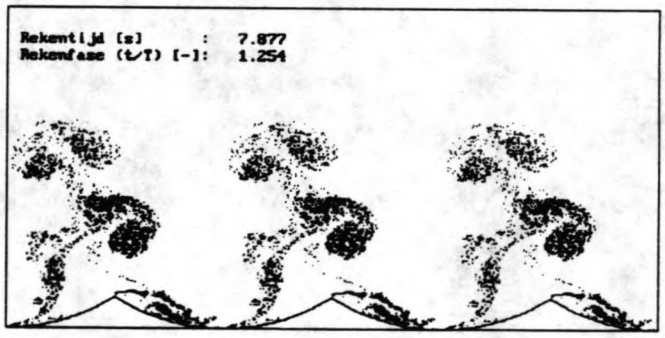

Rekentijd [s] : 6.751
Rekenfase (t/T) [-]: 1.075

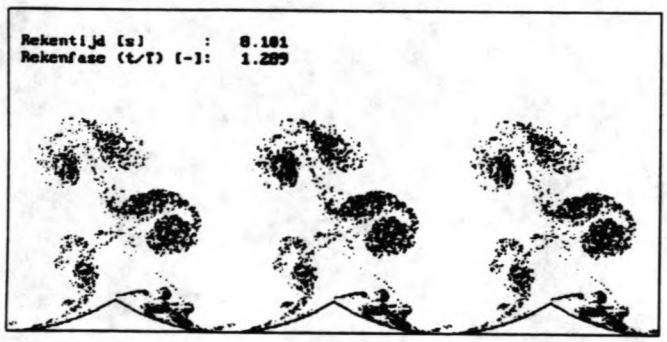

Rekentijd [s] : 6.976
Rekenfase (t/T) [-]: 1.110

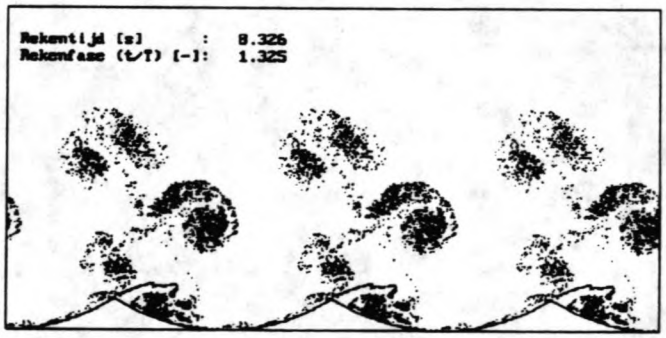

Rekentijd [s] : 7.201
Rekenfase (t/T) [-]: 1.146

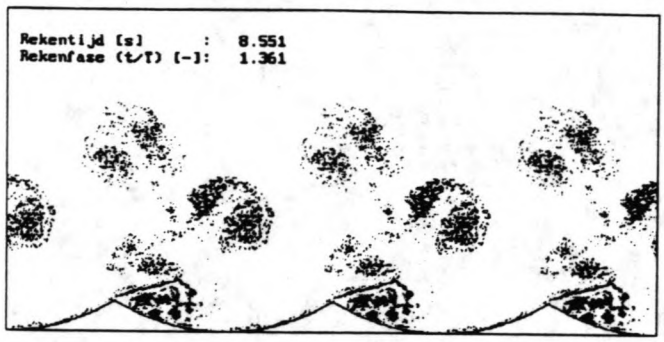

Rekentijd [s] : 7.426
Rekenfase (t/T) [-]: 1.182

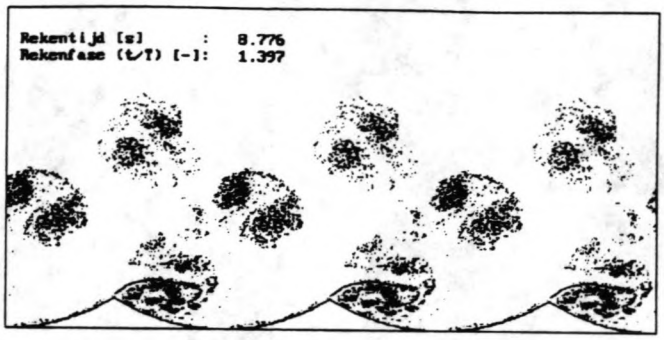

Rekentijd [s] : 7.651
Rekenfase (t/T) [-]: 1.218

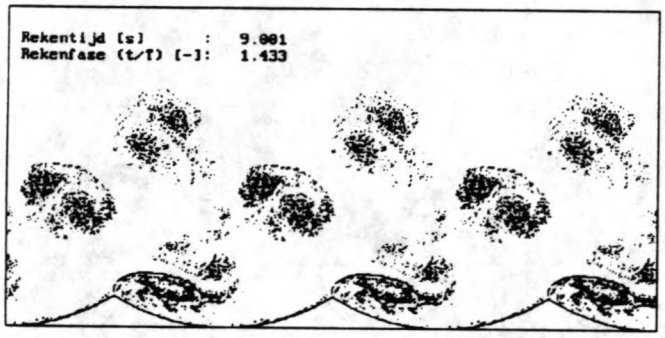

Rekentijd [s] : 7.877
Rekenfase (t/T) [-]: 1.254

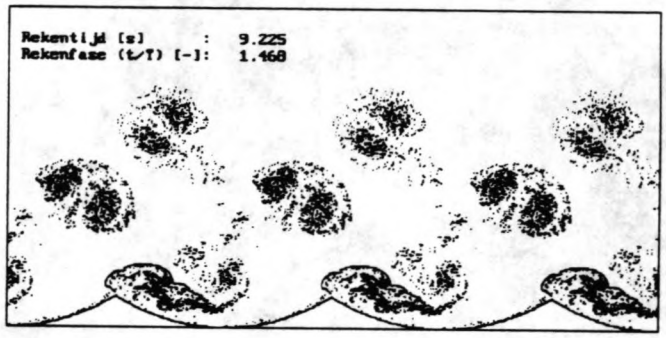

Rekentijd [s] : 8.101
Rekenfase (t/T) [-]: 1.289

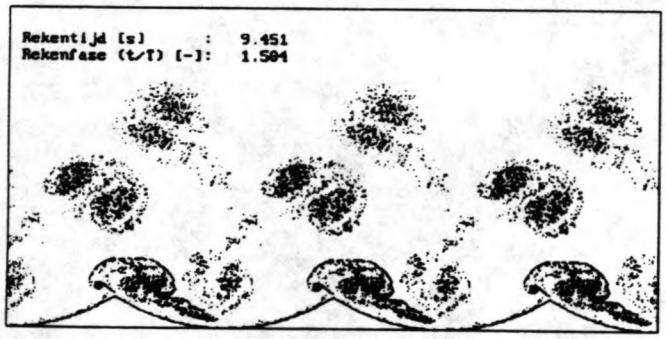

Rekentijd [s] : 8.326
Rekenfase (t/T) [-]: 1.325


Rekentijd [s] : 8.551
Rekenfase (t/T) [-]: 1.361


Rekentijd [s] : 8.776
Rekenfase (t/T) [-]: 1.397

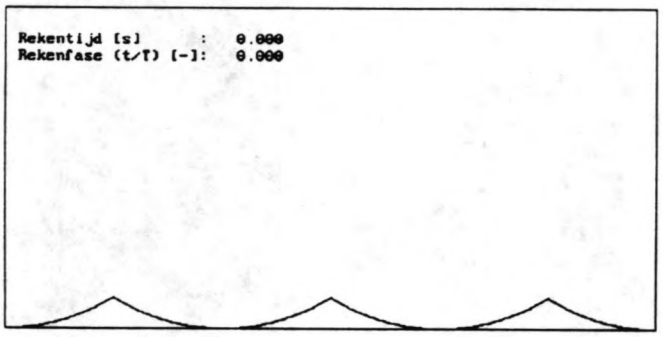

Rekentijd [s] : 9.001
Rekenfase (t/T) [-]: 1.433

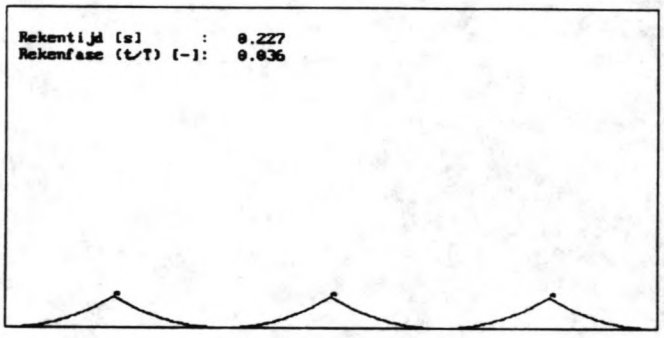

Rekentijd [s] : 9.225
Rekenfase (t/T) [-]: 1.468

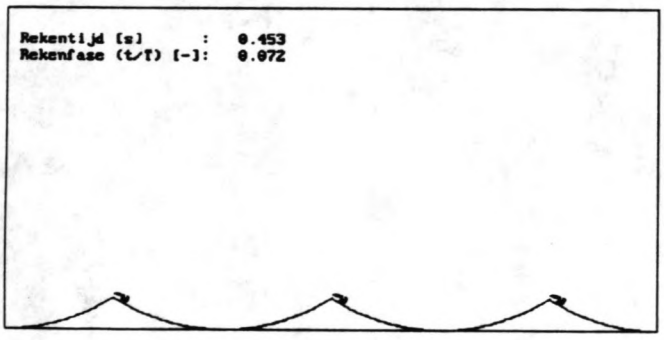

Rekentijd [s] : 9.451
Rekenfase (t/T) [-]: 1.504

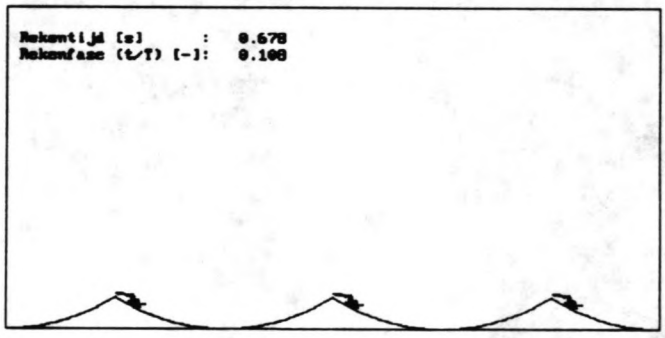
Wervelafschudding bij bodemribbels:

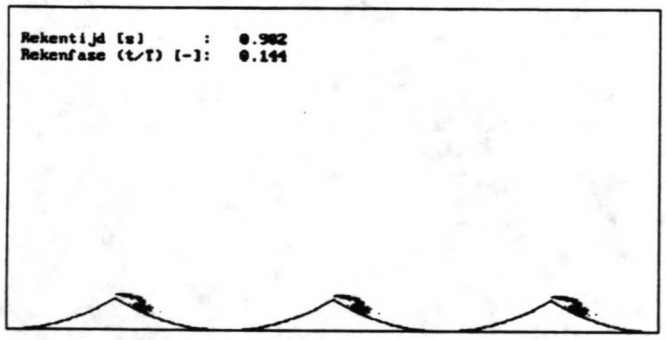
Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygoonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 1.E-6
"Cluster" viscositeit	[m²/s]	: 1.E-8
Roostergrootte	[-]	: ((3*63) + 1)*110
Celgrootte ($\Delta x*\Delta y$)	[mm]	: 2*2
Aantal iteraties Poissonsolver	[-]	: 150
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5
Afstand loslaatpunt tot bodemribbeltop	[mm]	: 1.0

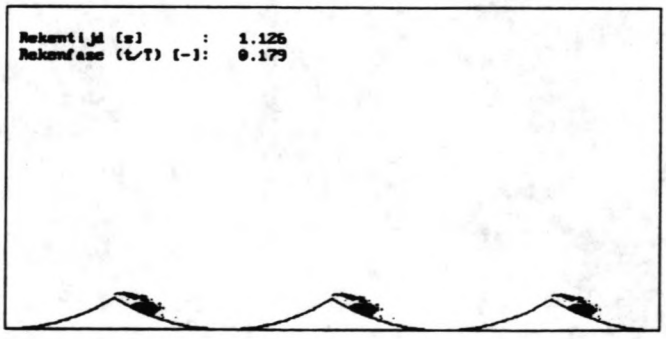


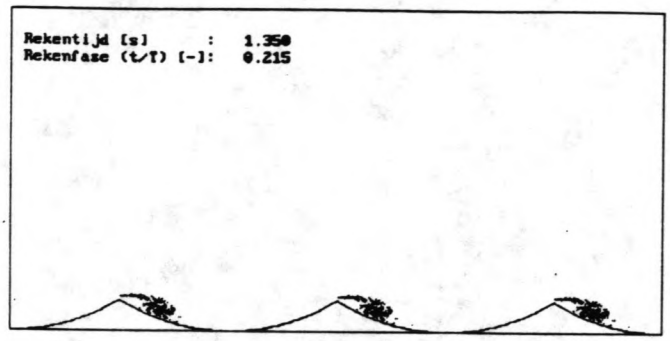


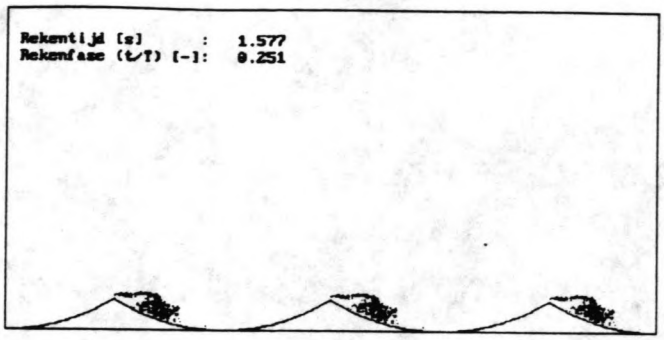


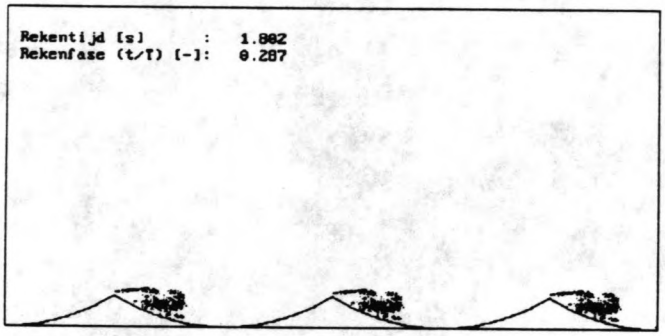


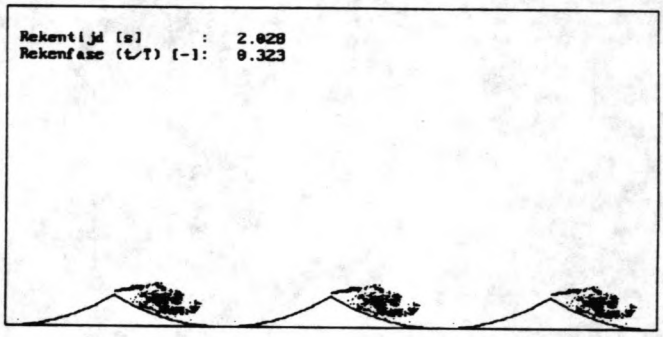


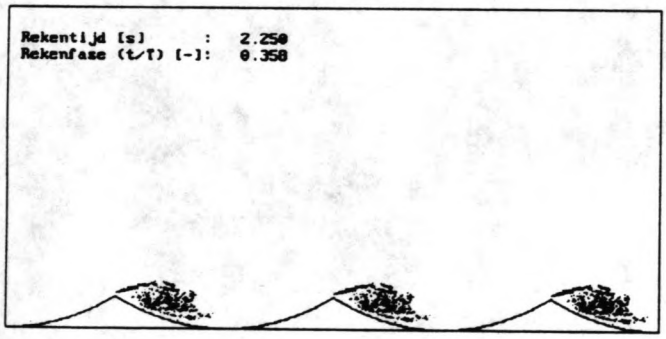


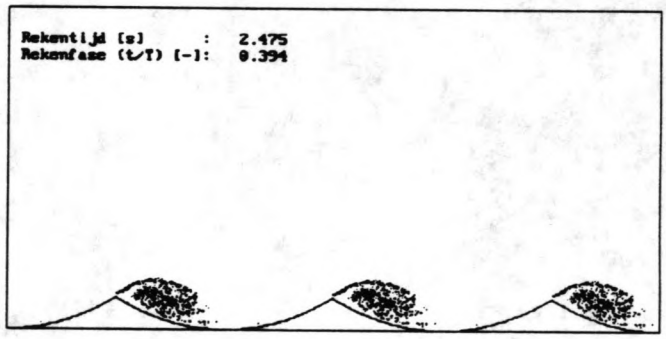

Rekentijd [s] : 1.350
Rekenfase (t/T) [-]: 0.215

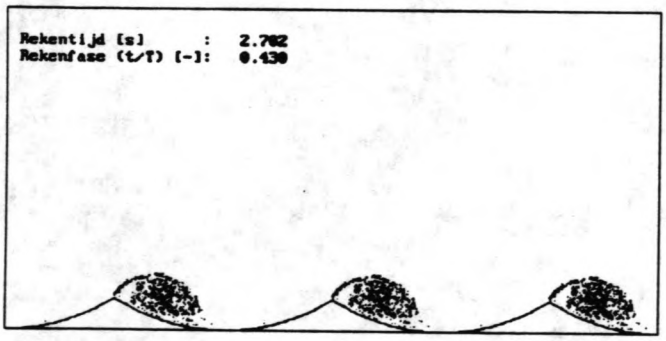

Rekentijd [s] : 1.577
Rekenfase (t/T) [-]: 0.251

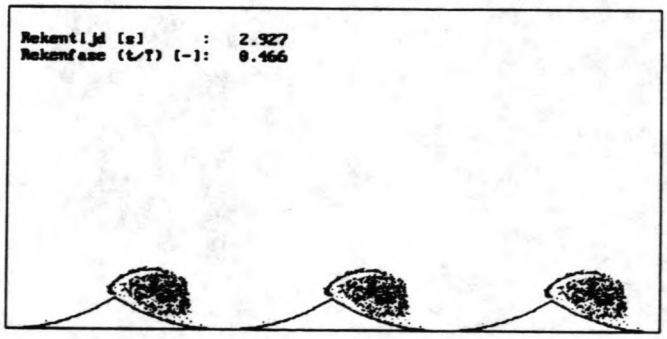

Rekentijd [s] : 1.802
Rekenfase (t/T) [-]: 0.287

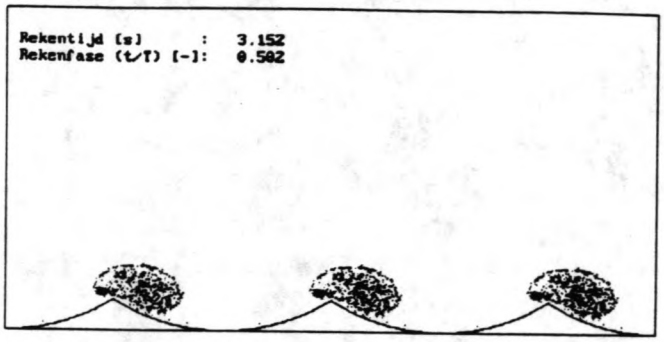

Rekentijd [s] : 2.028
Rekenfase (t/T) [-]: 0.323

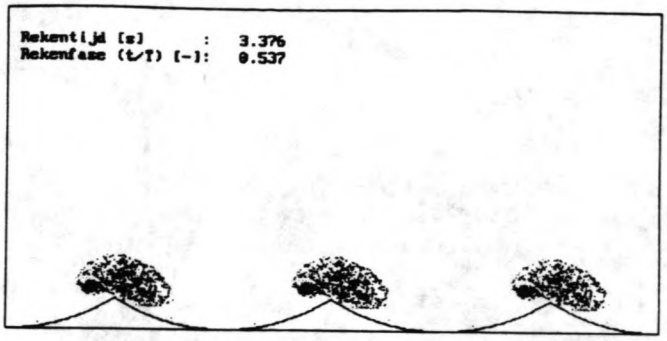

Rekentijd [s] : 2.250
Rekenfase (t/T) [-]: 0.358

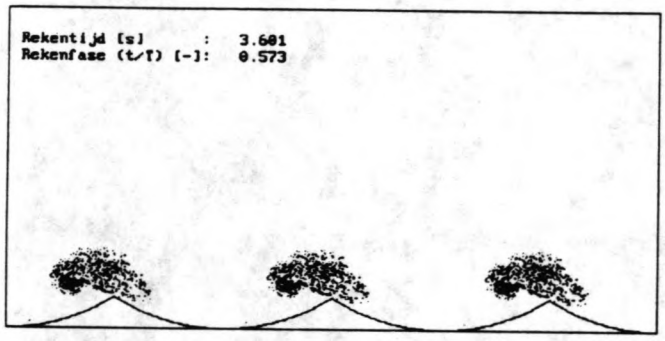

Rekentijd [s] : 2.475
Rekenfase (t/T) [-]: 0.394

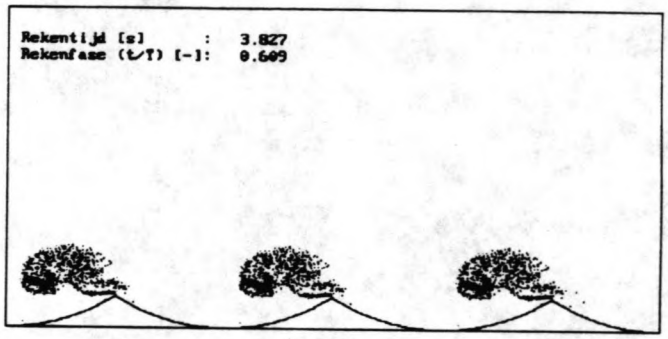

Rekentijd [s] : 2.702
Rekenfase (t/T) [-]: 0.430

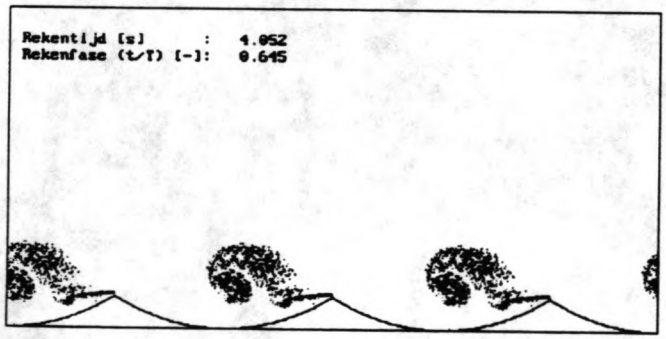

Rekentijd [s] : 2.927
Rekenfase (t/T) [-]: 0.466

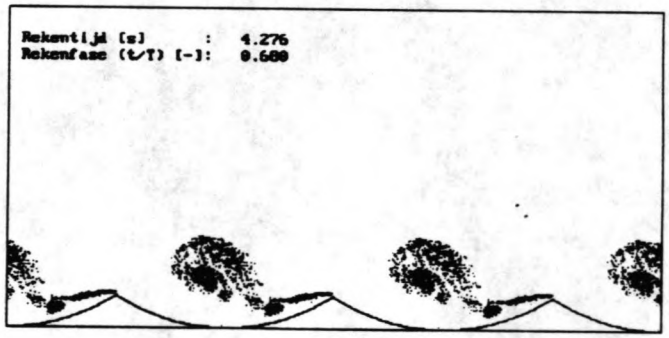

Rekentijd [s] : 3.152
Rekenfase (t/T) [-]: 0.502

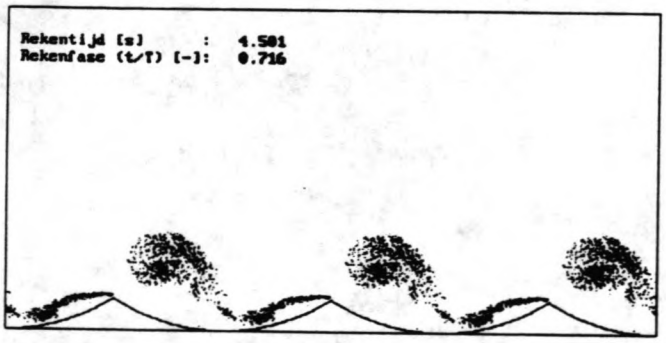

Rekentijd [s] : 3.376
Rekenfase (t/T) [-]: 0.537

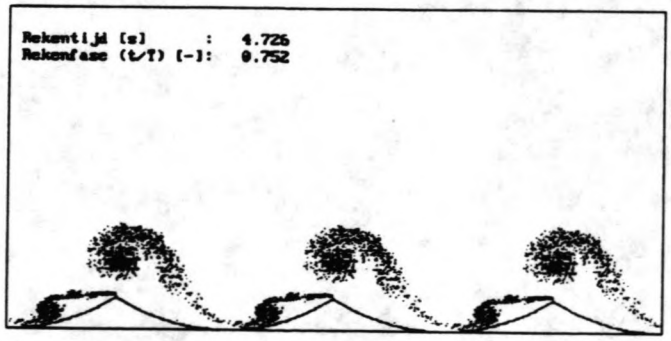

Rekentijd [s] : 3.601
Rekenfase (t/T) [-]: 0.573

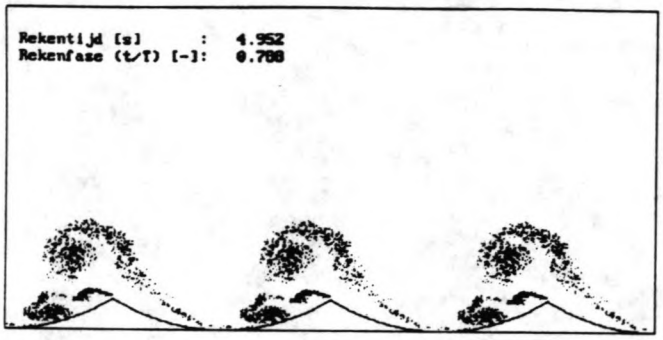

Rekentijd [s] : 3.827
Rekenfase (t/T) [-]: 0.609

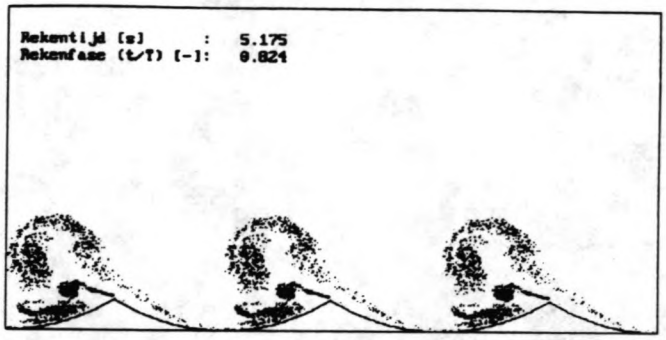

Rekentijd [s] : 4.052
Rekenfase (t/T) [-]: 0.645

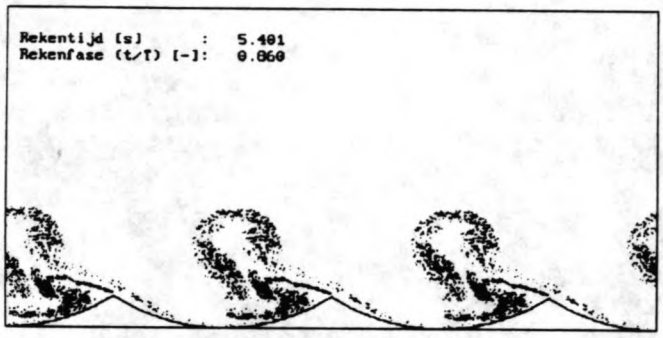

Rekentijd [s] : 4.276
Rekenfase (t/T) [-]: 0.680

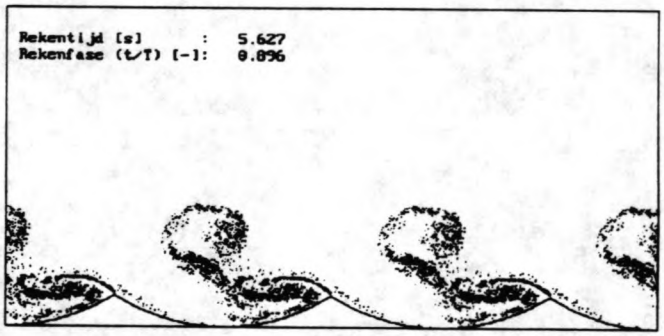

Rekentijd [s] : 4.501
Rekenfase (t/T) [-]: 0.716

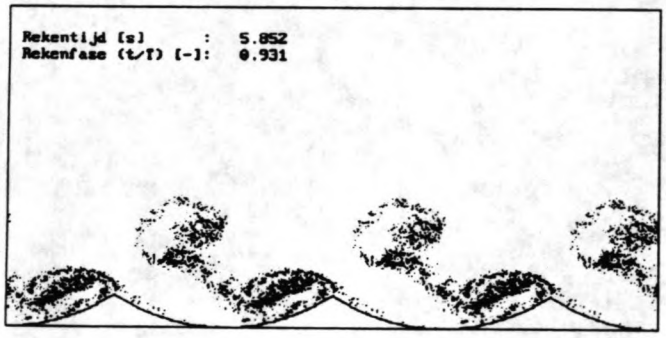

Rekentijd [s] : 4.726
Rekenfase (t/T) [-]: 0.752

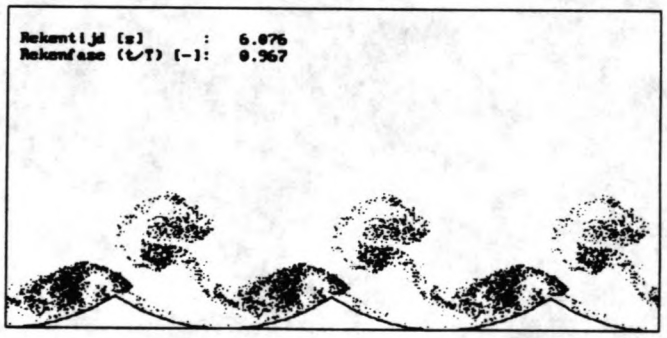

Rekentijd [s] : 4.952
Rekenfase (t/T) [-]: 0.788

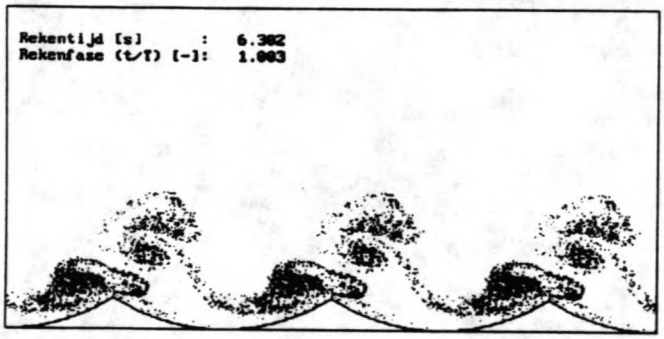

Rekentijd [s] : 5.175
Rekenfase (t/T) [-]: 0.824

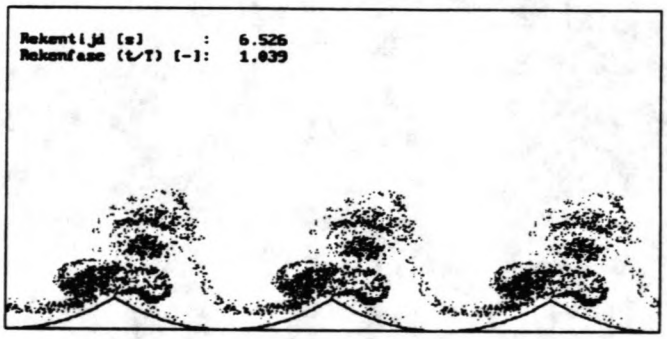

Rekentijd [s] : 5.401
Rekenfase (t/T) [-]: 0.860

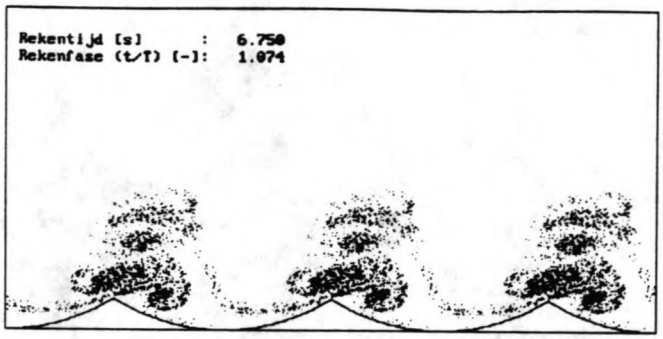

Rekentijd [s] : 5.627
Rekenfase (t/T) [-]: 0.896

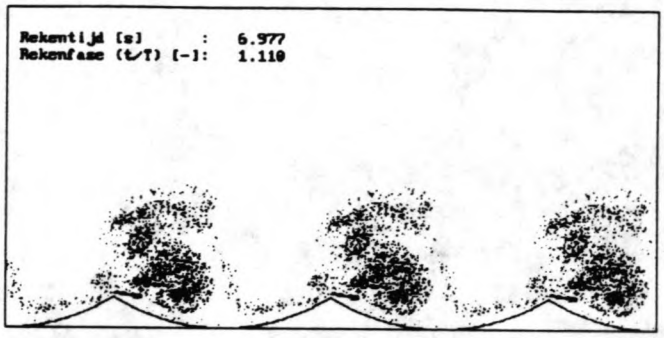

Rekentijd [s] : 5.852
Rekenfase (t/T) [-]: 0.931

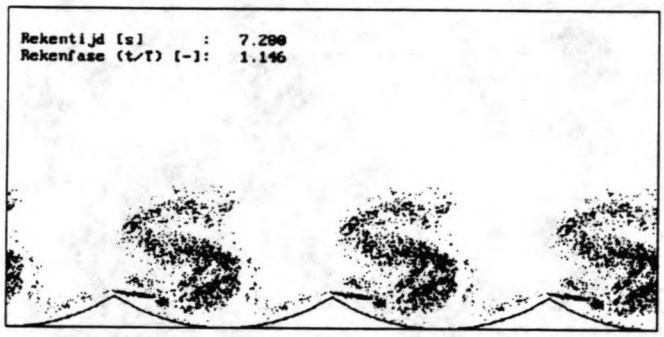

Rekentijd [s] : 6.076
Rekenfase (t/T) [-]: 0.967

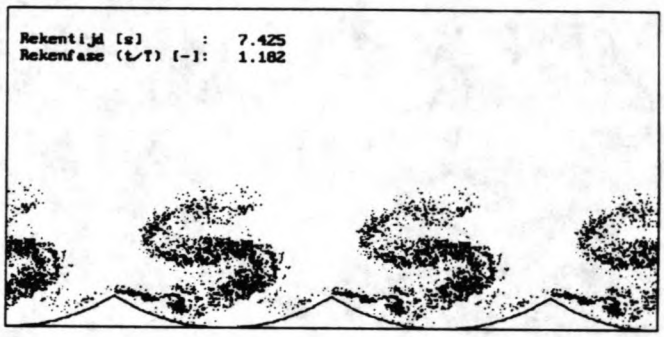

Rekentijd [s] : 6.302
Rekenfase (t/T) [-]: 1.003

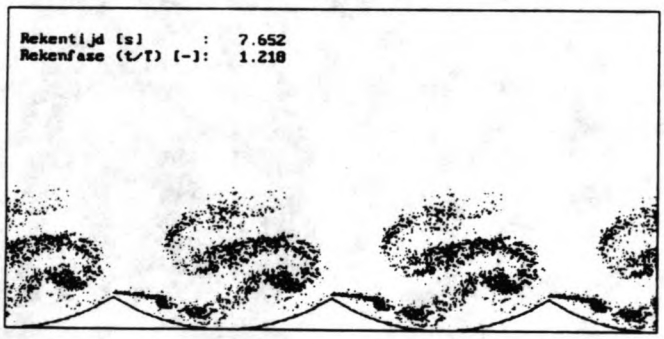

Rekentijd [s] : 6.526
Rekenfase (t/T) [-]: 1.039

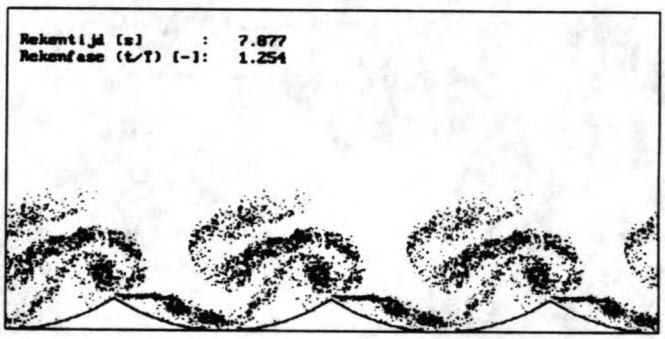

Rekentijd [s] : 6.750
Rekenfase (t/T) [-]: 1.074

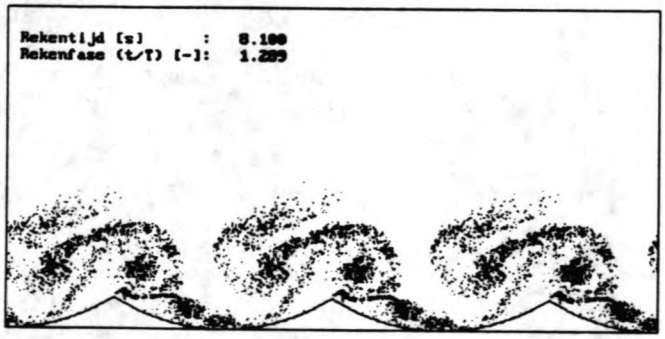

Rekentijd [s] : 6.977
Rekenfase (t/T) [-]: 1.110

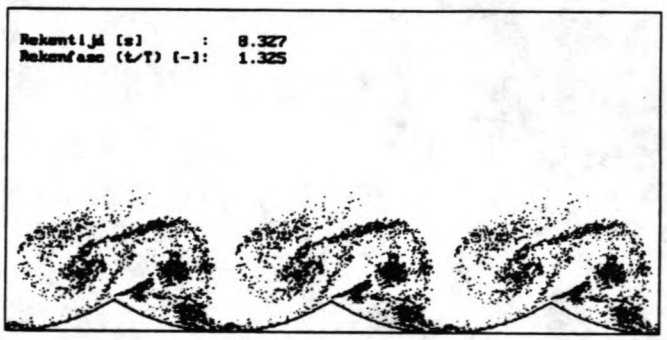

Rekentijd [s] : 7.200
Rekenfase (t/T) [-]: 1.146

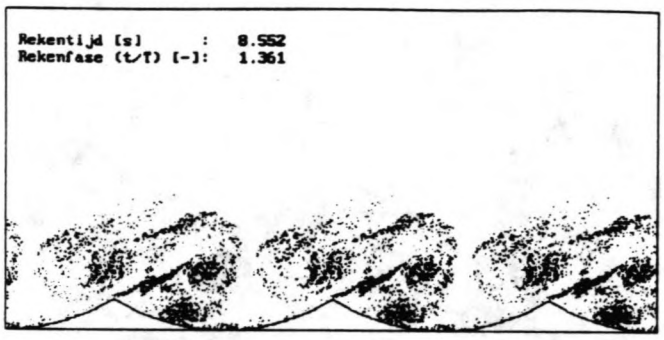

Rekentijd [s] : 7.425
Rekenfase (t/T) [-]: 1.182

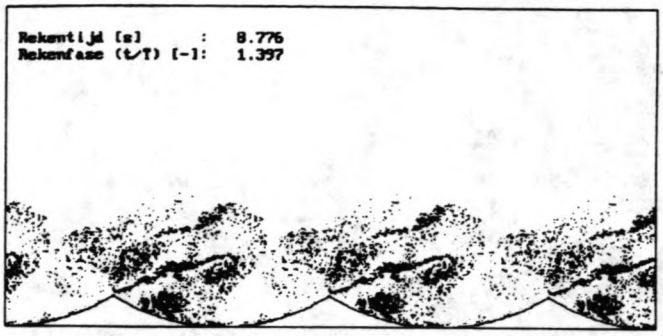

Rekentijd [s] : 7.652
Rekenfase (t/T) [-]: 1.218

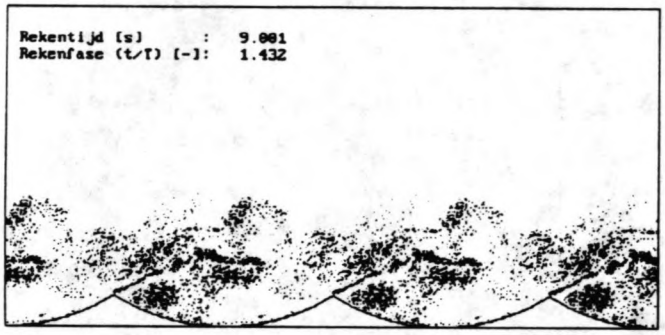

Rekentijd [s] : 7.877
Rekenfase (t/T) [-]: 1.254

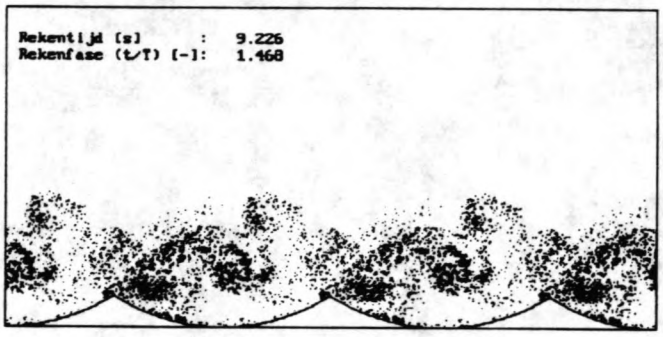

Rekentijd [s] : 8.100
Rekenfase (t/T) [-]: 1.289

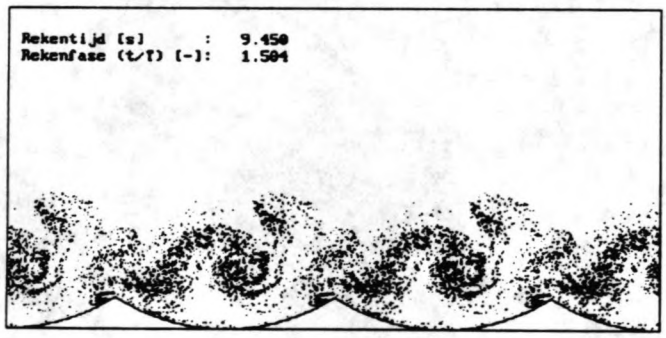

Rekentijd [s] : 8.327
Rekenfase (t/T) [-]: 1.325


Rekentijd [s] : 8.552
Rekenfase (t/T) [-]: 1.361


Rekentijd [s] : 8.776
Rekenfase (t/T) [-]: 1.397

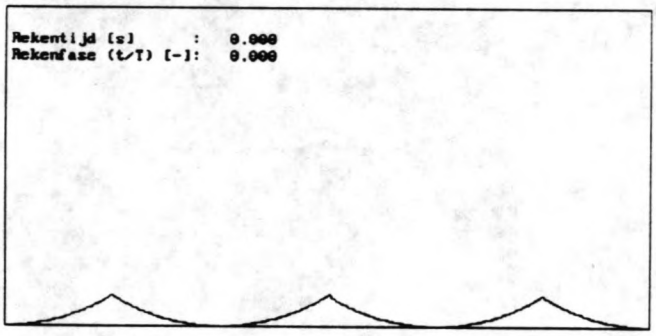

Rekentijd [s] : 9.001
Rekenfase (t/T) [-]: 1.432

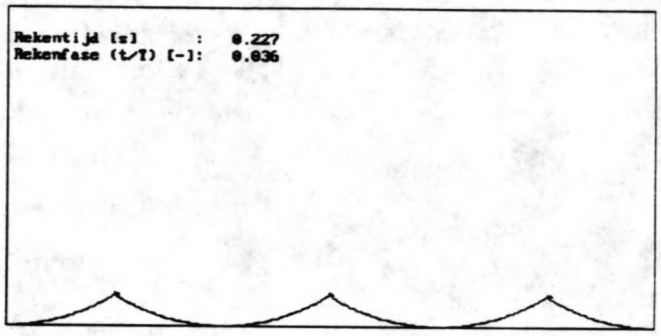

Rekentijd [s] : 9.226
Rekenfase (t/T) [-]: 1.468

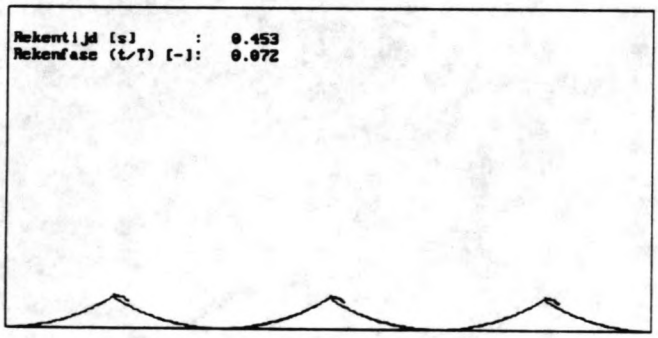

Rekentijd [s] : 9.450
Rekenfase (t/T) [-]: 1.504

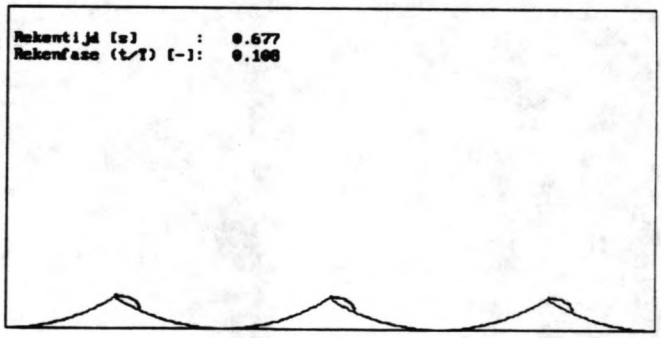
Wervelafschudding bij bodemribbels:

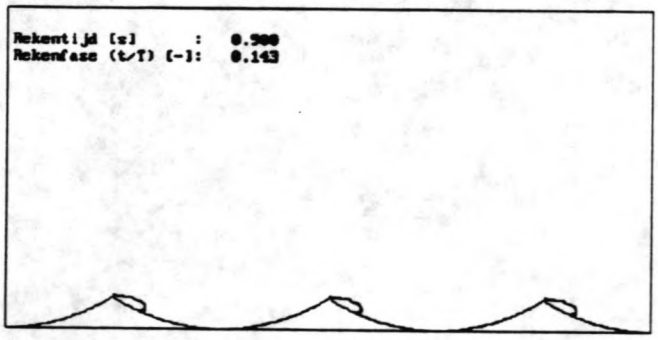
Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygoonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 0.0
"Cluster" viscositeit	[m²/s]	: 1.E-8
Roostergrootte	[-]	: ((3*42) + 1)*74
Celgrootte ($\Delta x*\Delta y$)	[mm]	: 3*3
Aantal iteraties Poissonsolver	[-]	: 150
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5
Afstand loslaatpunt tot bodemribbeltop	[mm]	: 1.5

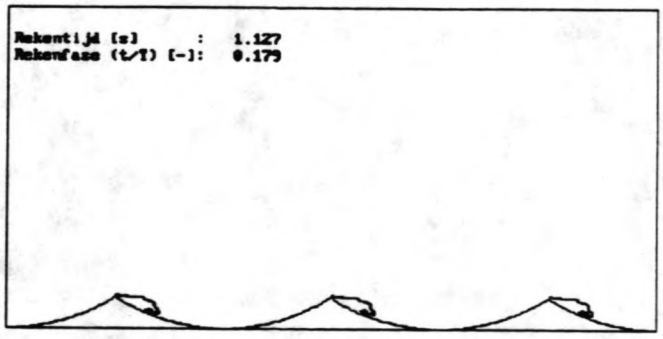


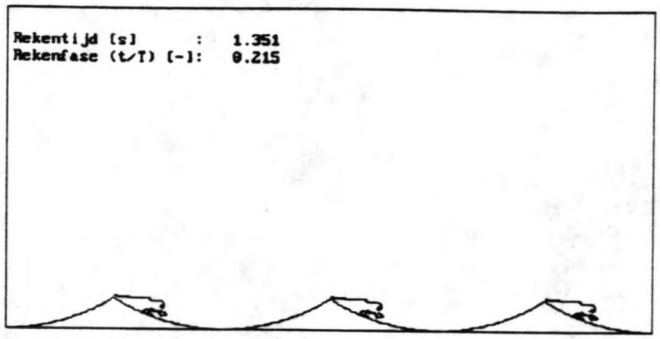


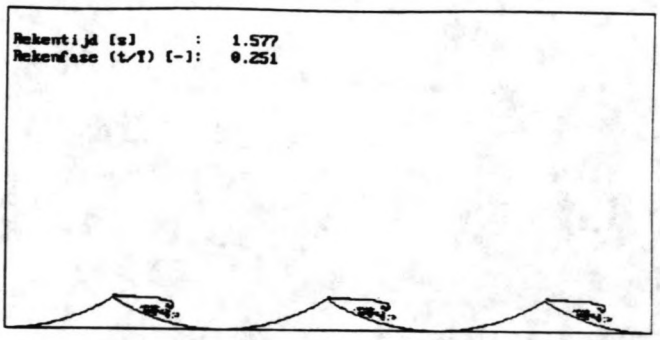


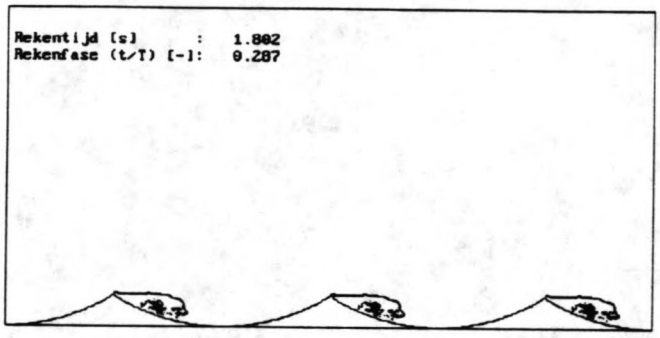


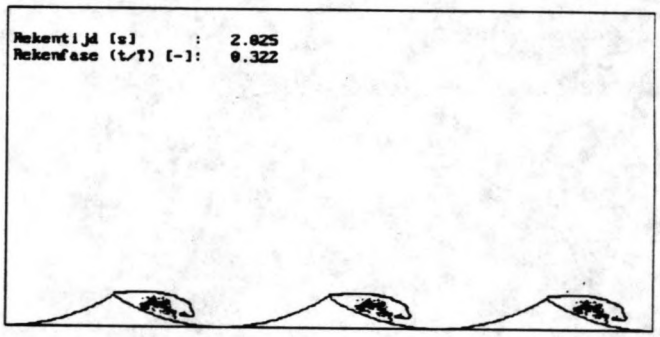


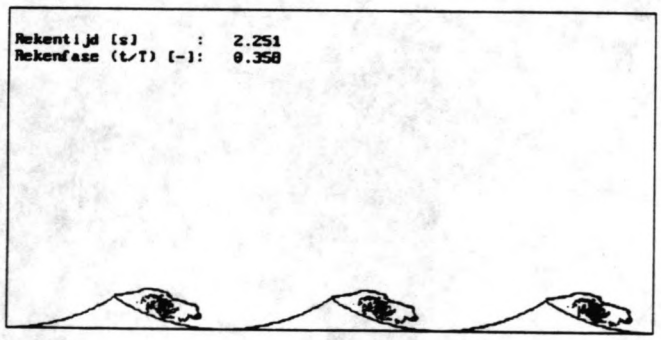


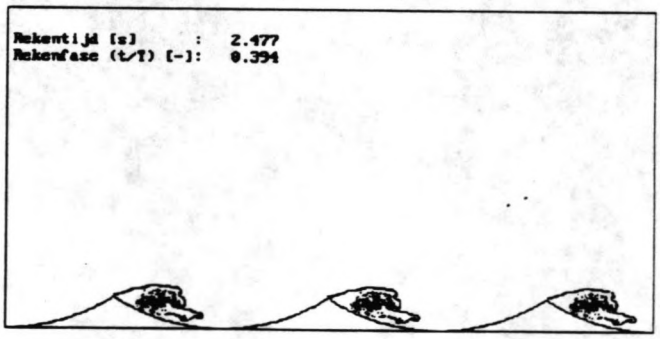

Rekentijd [s] : 1.351
Rekenfase (t/T) [-]: 0.215

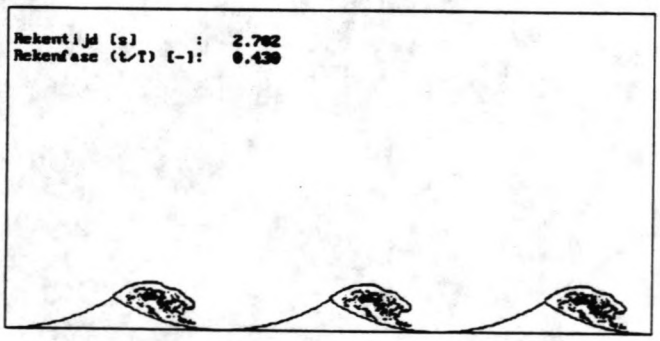

Rekentijd [s] : 1.577
Rekenfase (t/T) [-]: 0.251

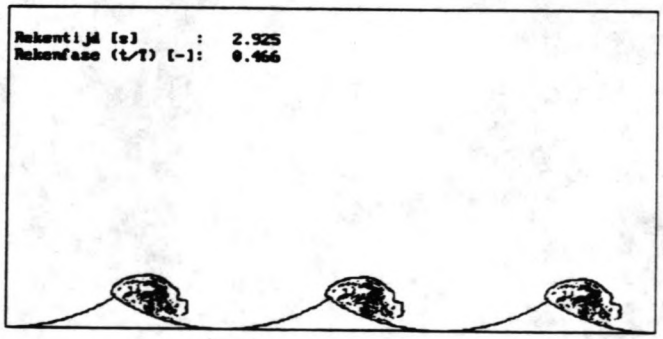

Rekentijd [s] : 1.802
Rekenfase (t/T) [-]: 0.287

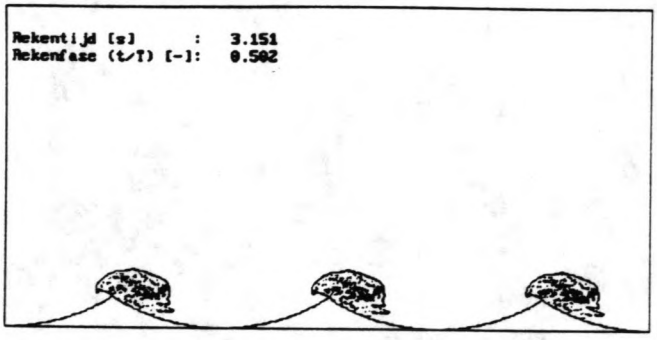

Rekentijd [s] : 2.025
Rekenfase (t/T) [-]: 0.322

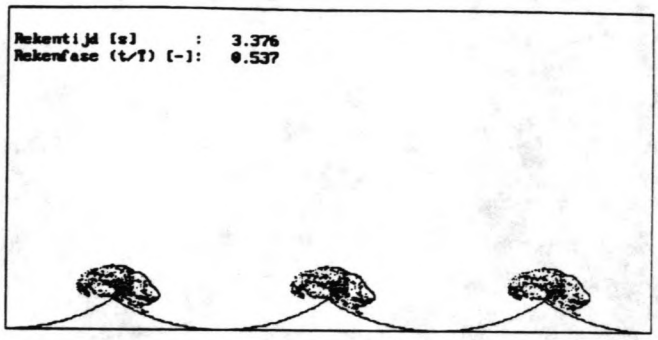

Rekentijd [s] : 2.251
Rekenfase (t/T) [-]: 0.358

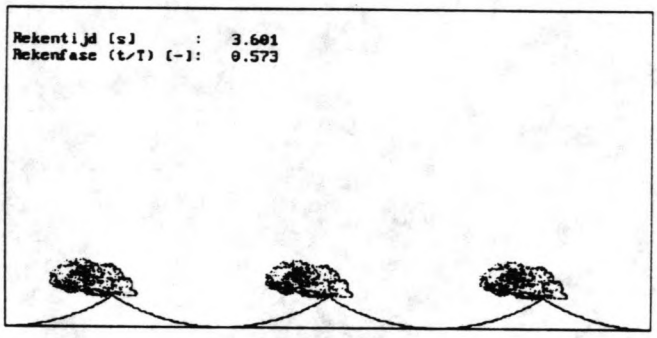

Rekentijd [s] : 2.477
Rekenfase (t/T) [-]: 0.394

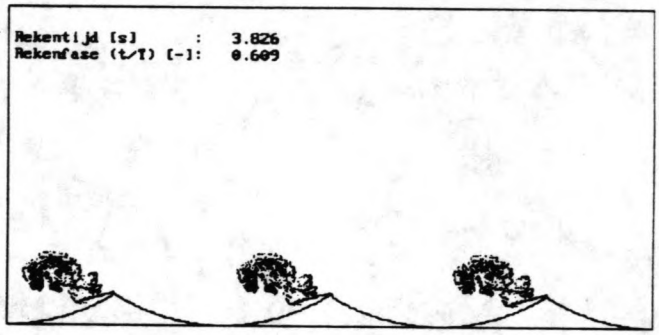

Rekentijd [s] : 2.702
Rekenfase (t/T) [-]: 0.430

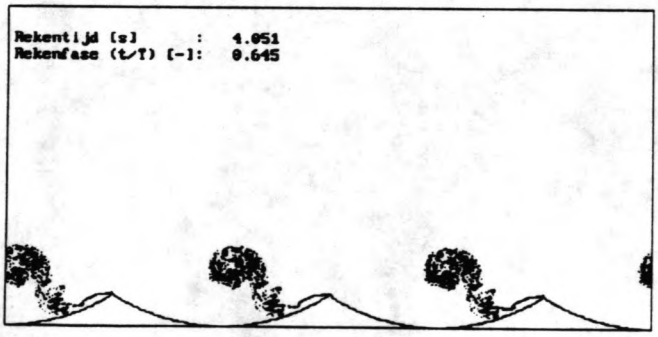

Rekentijd [s] : 2.925
Rekenfase (t/T) [-]: 0.466

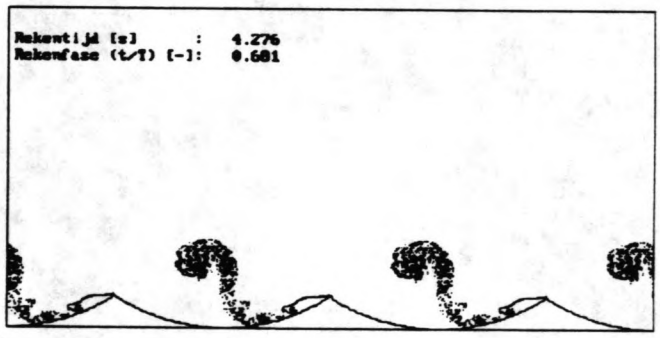

Rekentijd [s] : 3.151
Rekenfase (t/T) [-]: 0.502

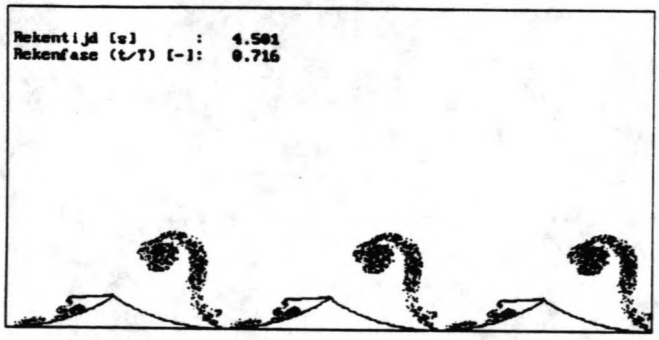

Rekentijd [s] : 3.376
Rekenfase (t/T) [-]: 0.537

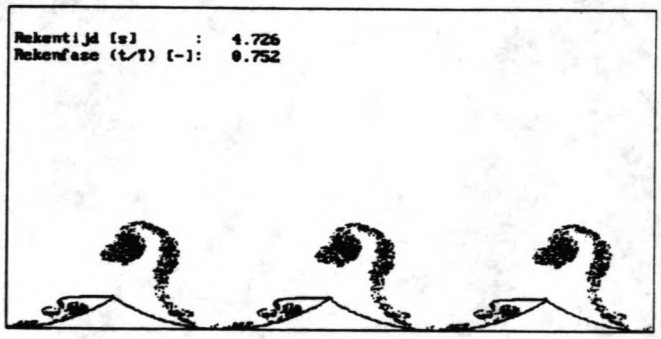

Rekentijd [s] : 3.601
Rekenfase (t/T) [-]: 0.573

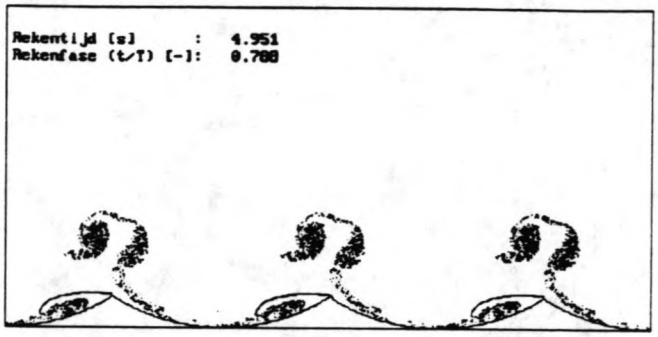

Rekentijd [s] : 3.826
Rekenfase (t/T) [-]: 0.609

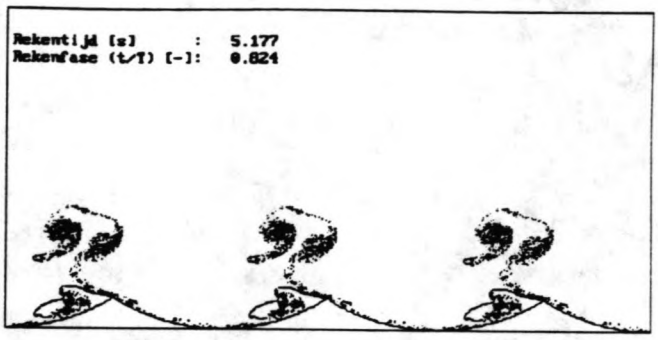

Rekentijd [s] : 4.051
Rekenfase (t/T) [-]: 0.645

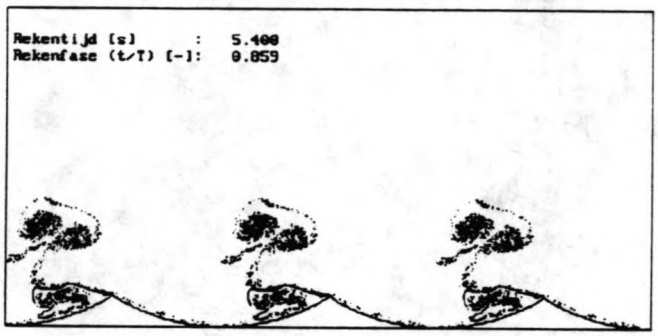

Rekentijd [s] : 4.276
Rekenfase (t/T) [-]: 0.681

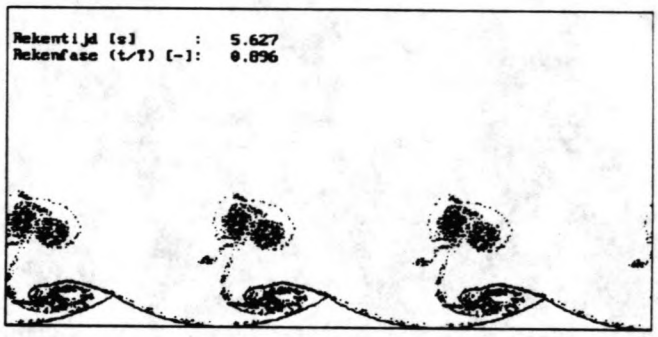

Rekentijd [s] : 4.501
Rekenfase (t/T) [-]: 0.716

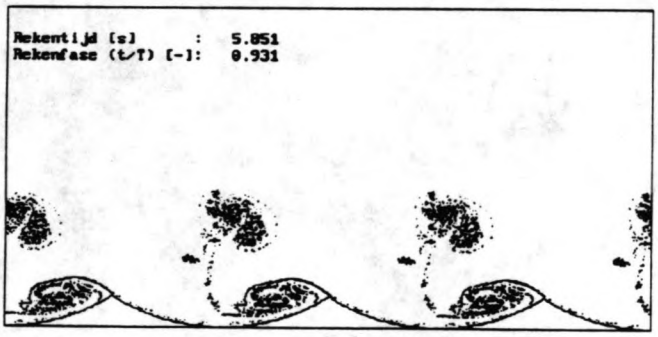

Rekentijd [s] : 4.726
Rekenfase (t/T) [-]: 0.752

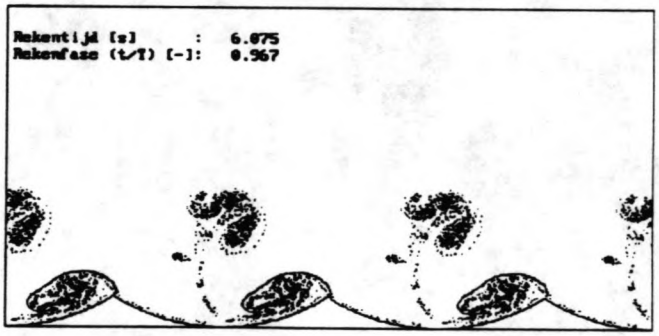

Rekentijd [s] : 4.951
Rekenfase (t/T) [-]: 0.708


Rekentijd [s] : 5.177
Rekenfase (t/T) [-]: 0.824

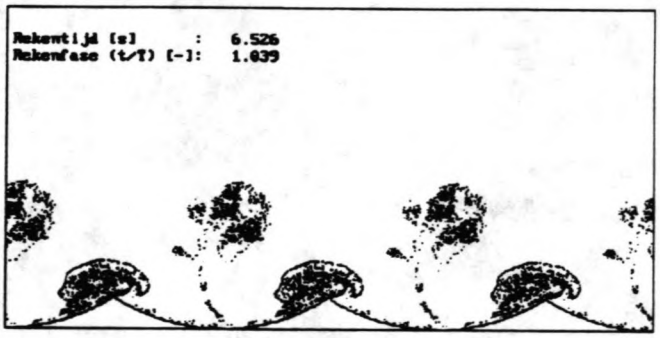

Rekentijd [s] : 5.400
Rekenfase (t/T) [-]: 0.859

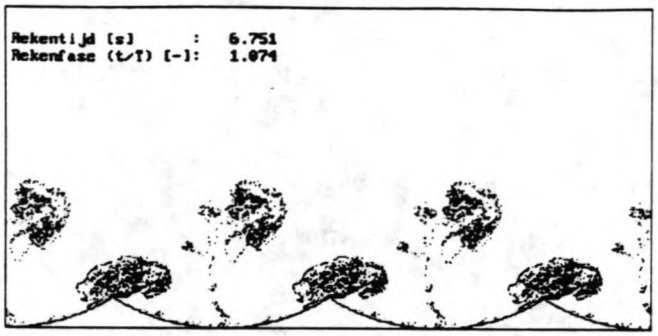

Rekentijd [s] : 5.627
Rekenfase (t/T) [-]: 0.896

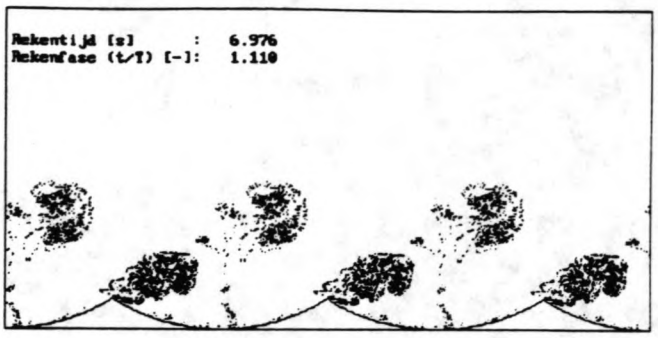

Rekentijd [s] : 5.851
Rekenfase (t/T) [-]: 0.931

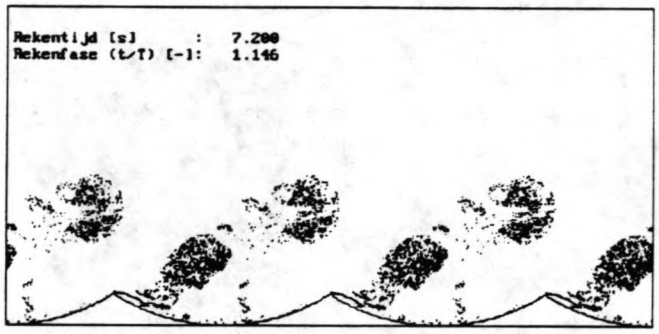

Rekentijd [s] : 6.075
Rekenfase (t/T) [-]: 0.967

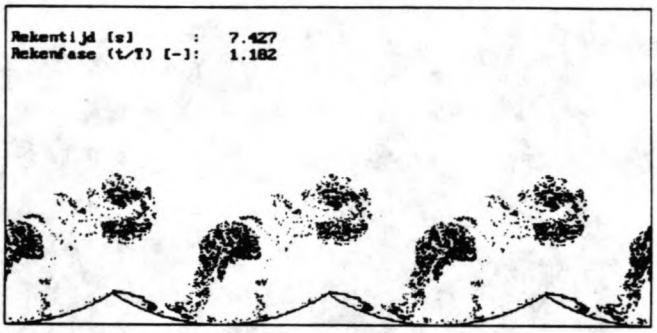
Rekentijd [s] : 6.301
Rekenfase (t/T) [-]: 1.003

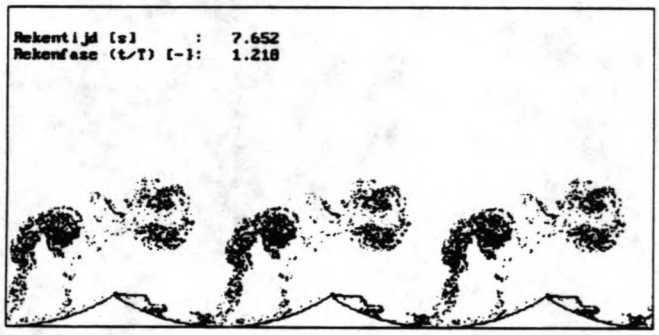

Rekentijd [s] : 6.526
Rekenfase (t/T) [-]: 1.039

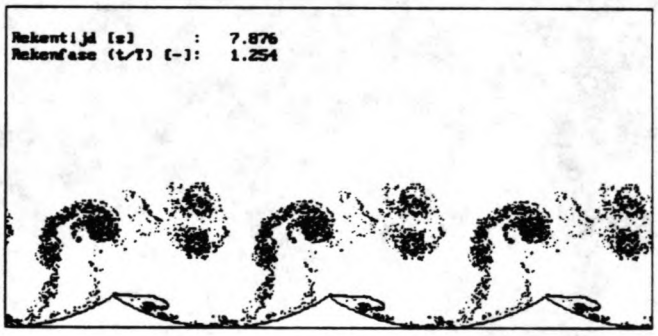

Rekentijd [s] : 6.751
Rekenfase (t/T) [-]: 1.074

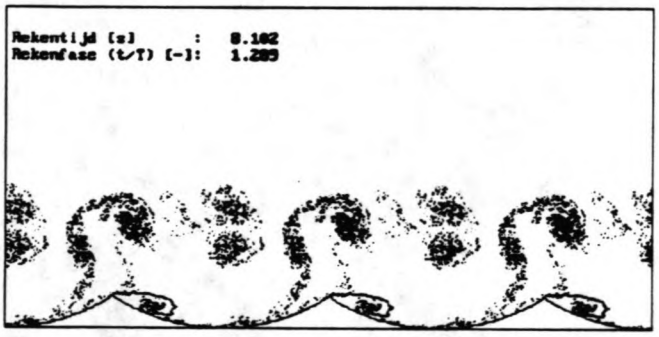

Rekentijd [s] : 6.976
Rekenfase (t/T) [-]: 1.110

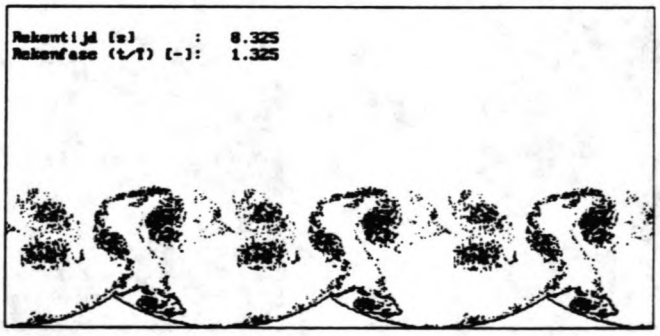

Rekentijd [s] : 7.200
Rekenfase (t/T) [-]: 1.146

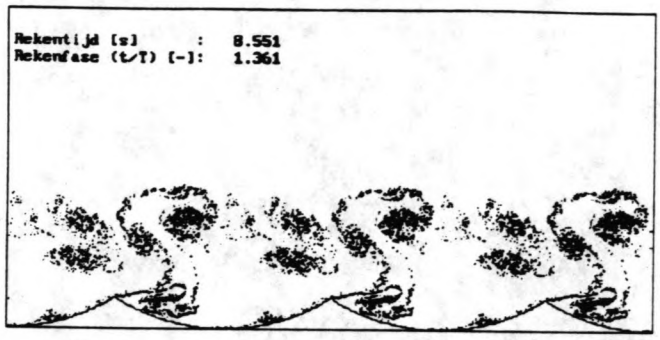

Rekentijd [s] : 7.427
Rekenfase (t/T) [-]: 1.182

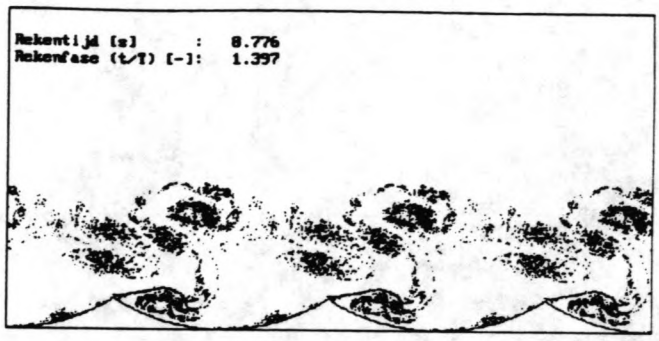

Rekentijd [s] : 7.652
Rekenfase (t/T) [-]: 1.218

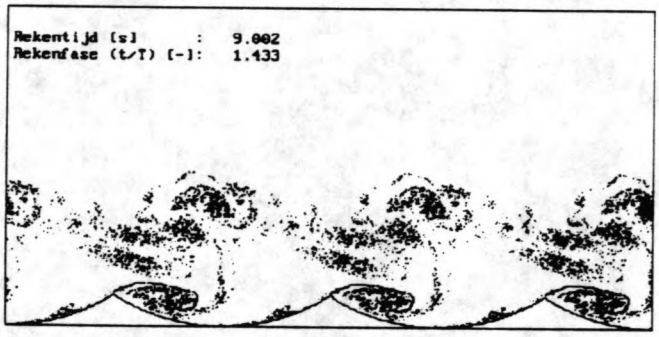

Rekentijd [s] : 7.876
Rekenfase (t/T) [-]: 1.254

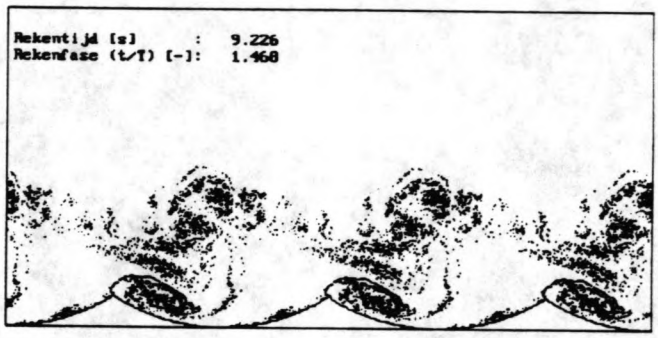

Rekentijd [s] : 8.102
Rekenfase (t/T) [-]: 1.289

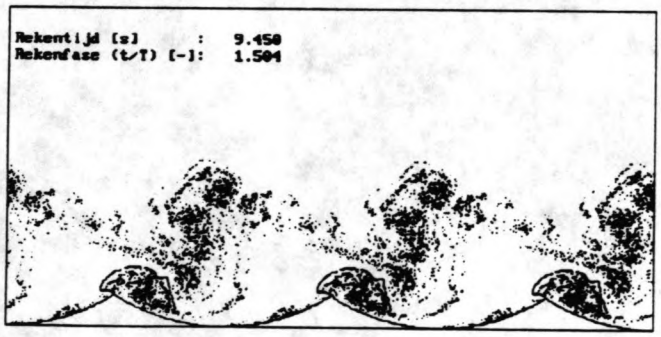

Rekentijd [s] : 8.325
Rekenfase (t/T) [-]: 1.325


Rekentijd [s] : 8.551
Rekenfase (t/T) [-]: 1.361


Rekentijd [s] : 8.776
Rekenfase (t/T) [-]: 1.397

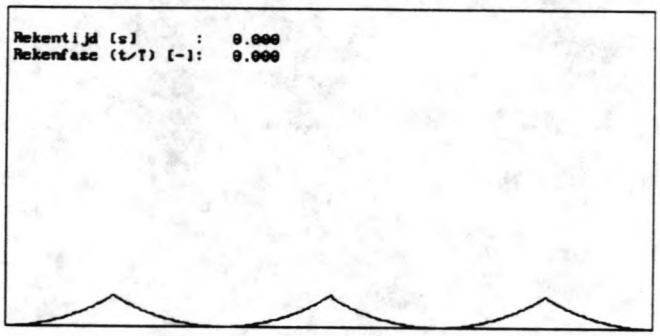

Rekentijd [s] : 9.002
Rekenfase (t/T) [-]: 1.433

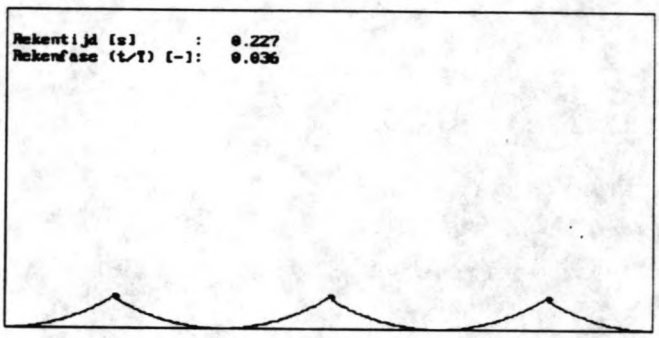

Rekentijd [s] : 9.226
Rekenfase (t/T) [-]: 1.468

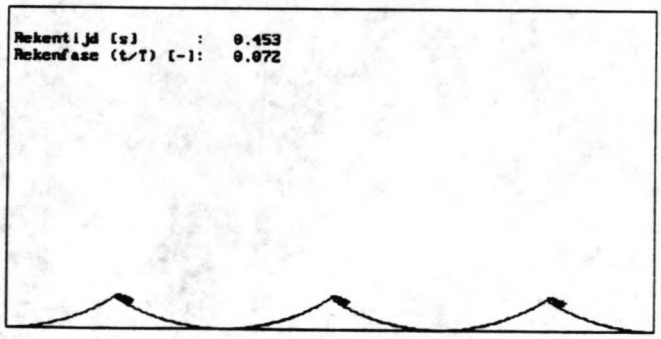

Rekentijd [s] : 9.450
Rekenfase (t/T) [-]: 1.504

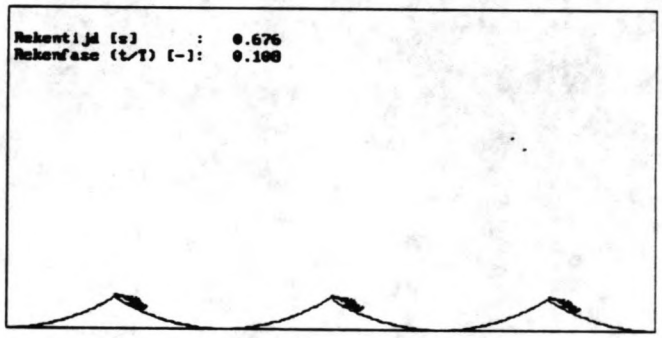
Wervelafschudding bij bodemribbels:

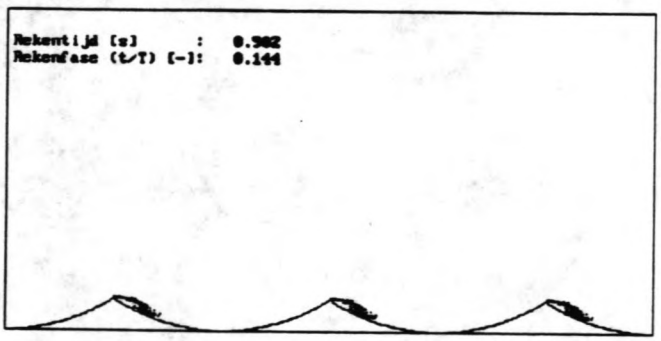
Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygoonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 1.E-6
"Cluster" viscositeit	[m²/s]	: 1.E-8
Roostergrootte	[-]	: ((3*42) + 1)*74
Celgrootte ($\Delta x*\Delta y$)	[mm]	: 3*3
Aantal iteraties Poissonsolver	[-]	: 150
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5
Afstand loslaatpunt tot bodemribbeltop	[mm]	: 1.5

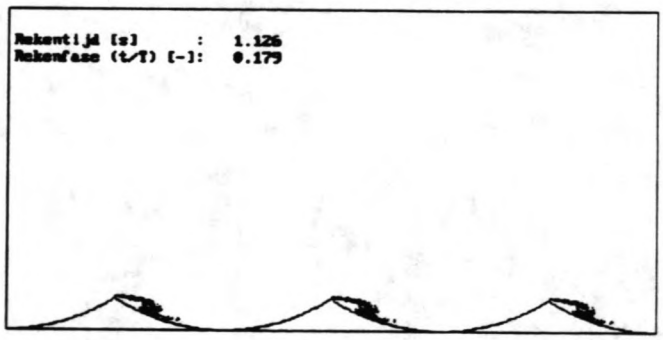


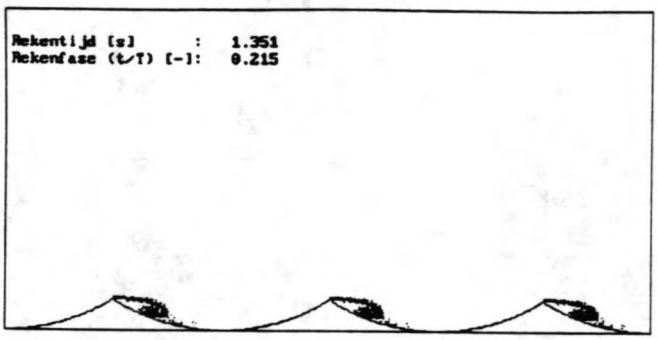


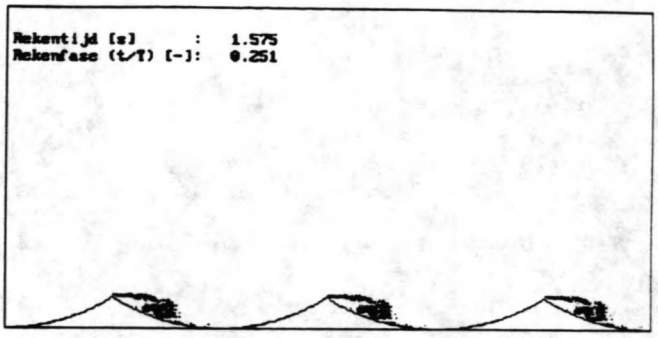


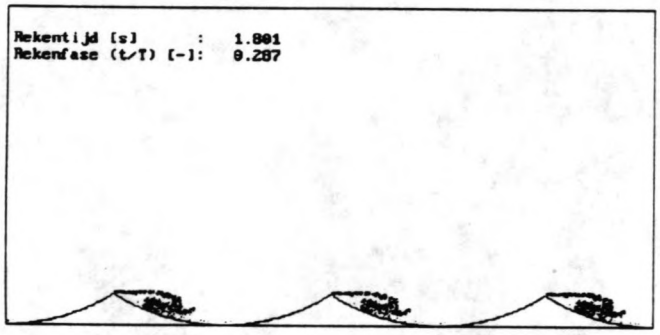


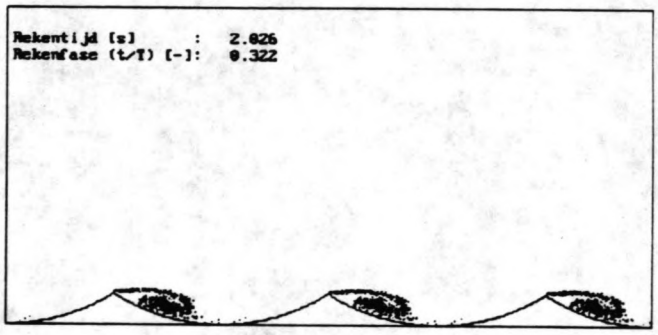


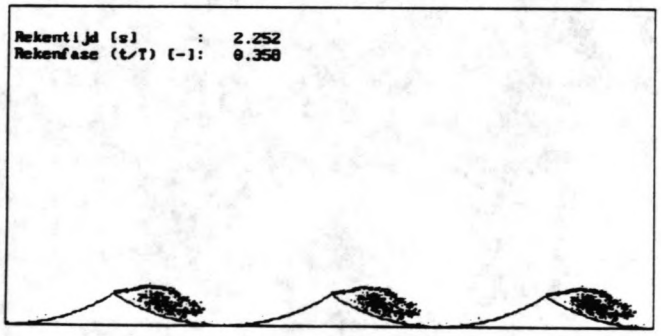


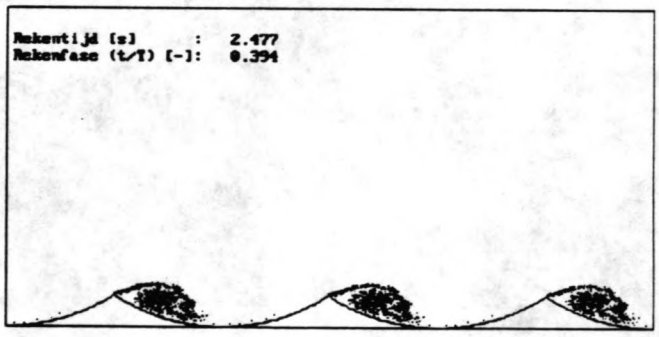

Rekentijd [s] : 1.351
Rekenfase (t/T) [-]: 0.215

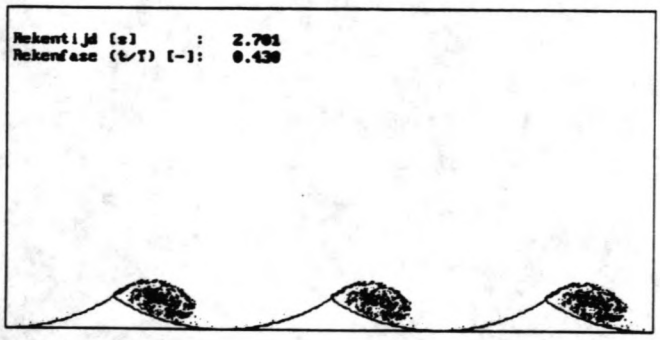

Rekentijd [s] : 1.575
Rekenfase (t/T) [-]: 0.251

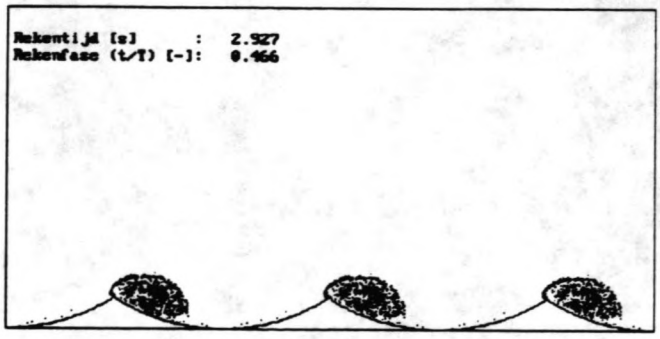

Rekentijd [s] : 1.801
Rekenfase (t/T) [-]: 0.287

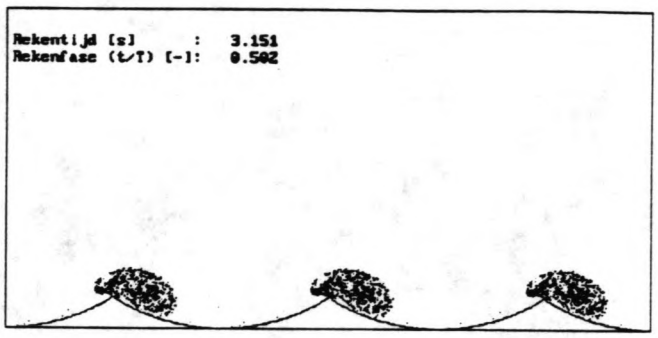

Rekentijd [s] : 2.026
Rekenfase (t/T) [-]: 0.322

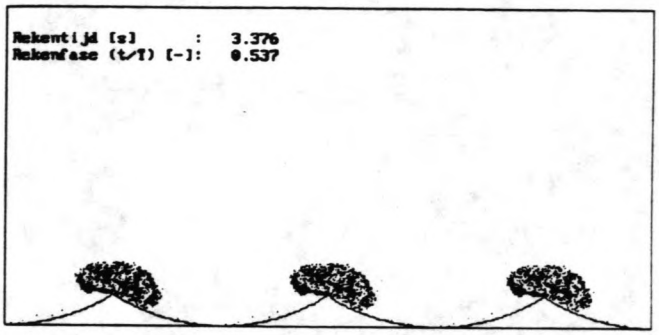

Rekentijd [s] : 2.252
Rekenfase (t/T) [-]: 0.358

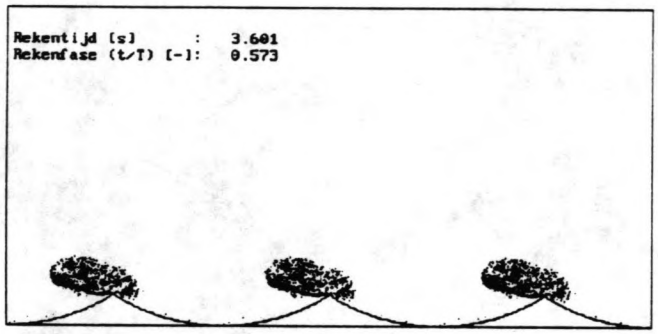

Rekentijd [s] : 2.477
Rekenfase (t/T) [-]: 0.394

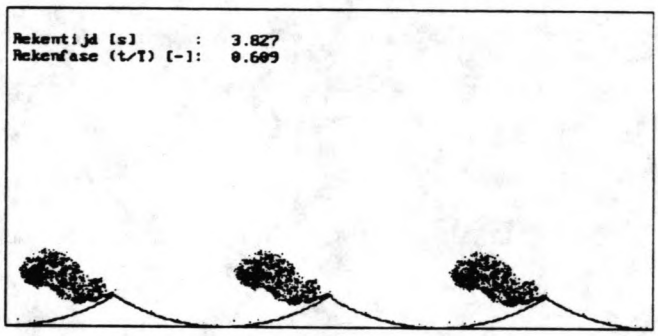

Rekentijd [s] : 2.701
Rekenfase (t/T) [-]: 0.430

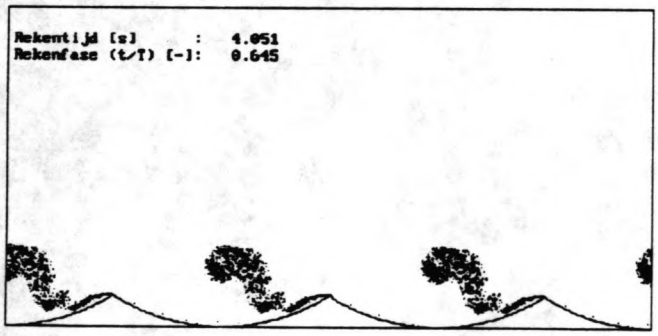

Rekentijd [s] : 2.927
Rekenfase (t/T) [-]: 0.466

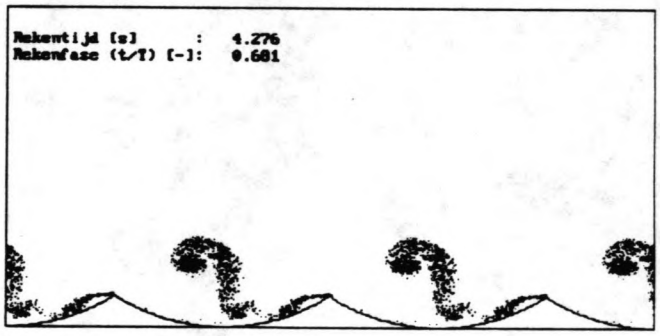

Rekentijd [s] : 3.151
Rekenfase (t/T) [-]: 0.502

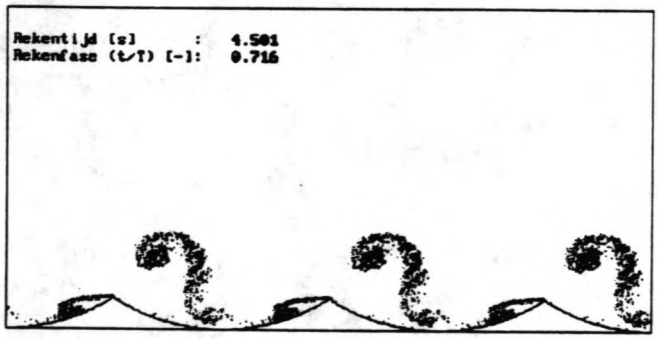

Rekentijd [s] : 3.376
Rekenfase (t/T) [-]: 0.537

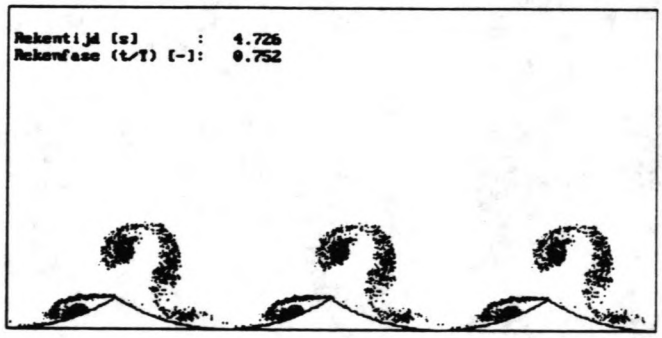

Rekentijd [s] : 3.601
Rekenfase (t/T) [-]: 0.573

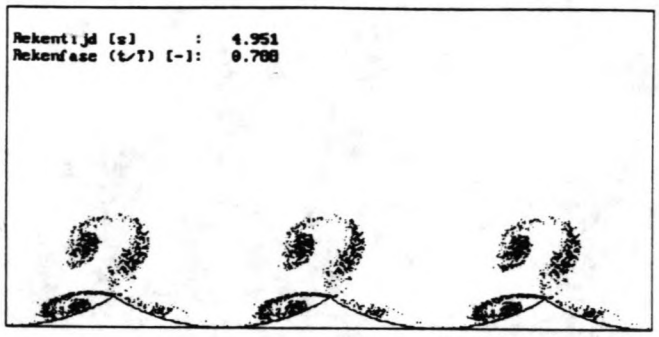

Rekentijd [s] : 3.827
Rekenfase (t/T) [-]: 0.609

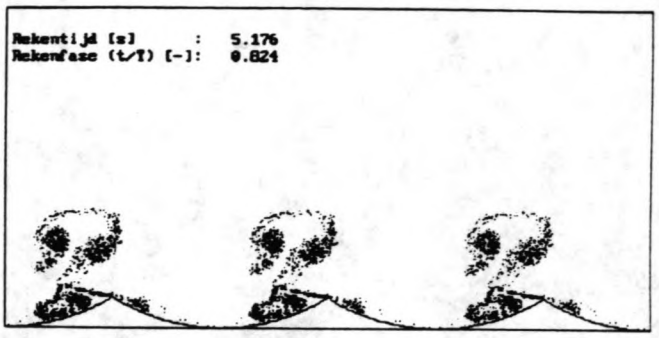

Rekentijd [s] : 4.051
Rekenfase (t/T) [-]: 0.645

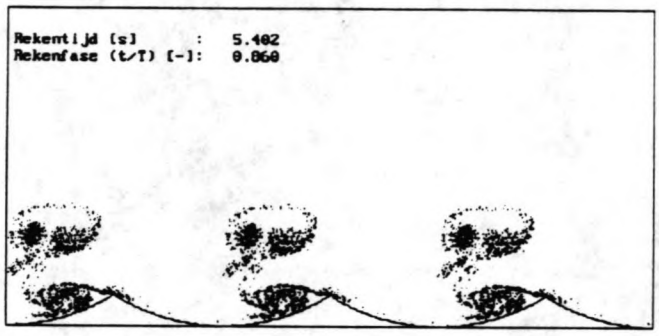

Rekentijd [s] : 4.276
Rekenfase (t/T) [-]: 0.681

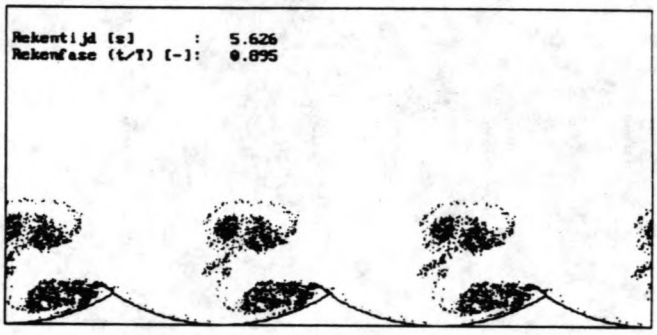

Rekentijd [s] : 4.501
Rekenfase (t/T) [-]: 0.716

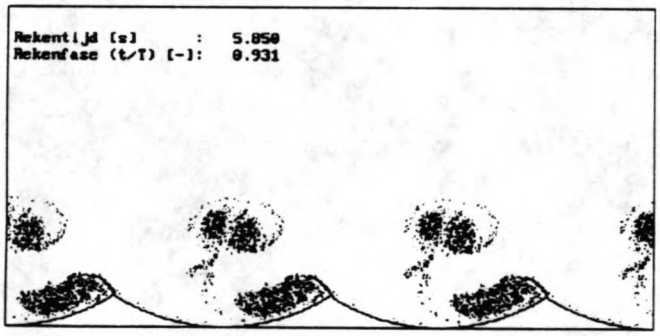

Rekentijd [s] : 4.726
Rekenfase (t/T) [-]: 0.752

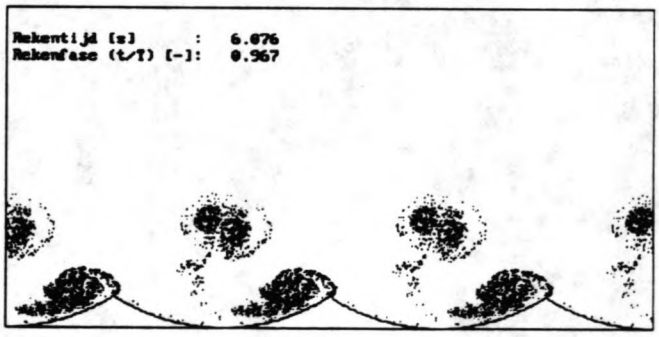

Rekentijd [s] : 4.951
Rekenfase (t/T) [-]: 0.788

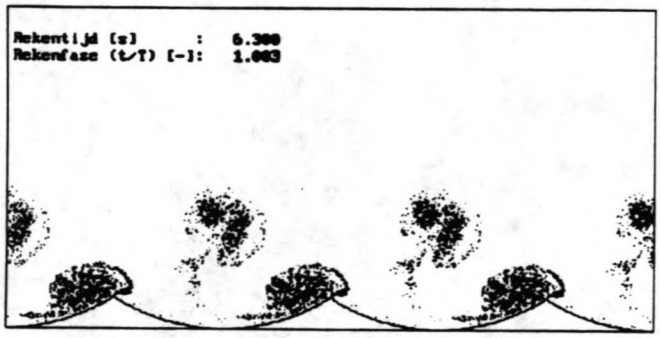

Rekentijd [s] : 5.176
Rekenfase (t/T) [-]: 0.824

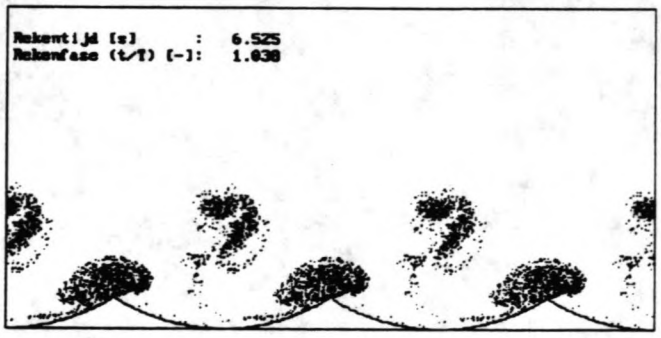

Rekentijd [s] : 5.402
Rekenfase (t/T) [-]: 0.860

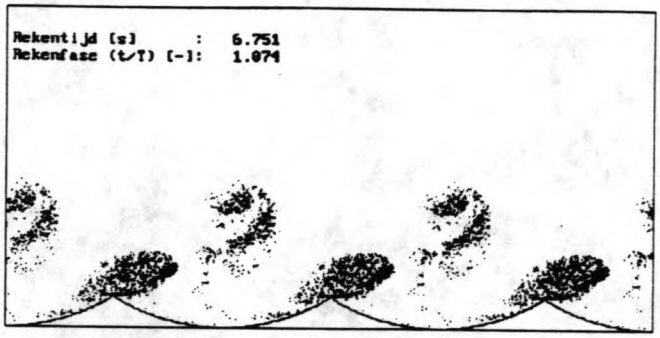

Rekentijd [s] : 5.626
Rekenfase (t/T) [-]: 0.895

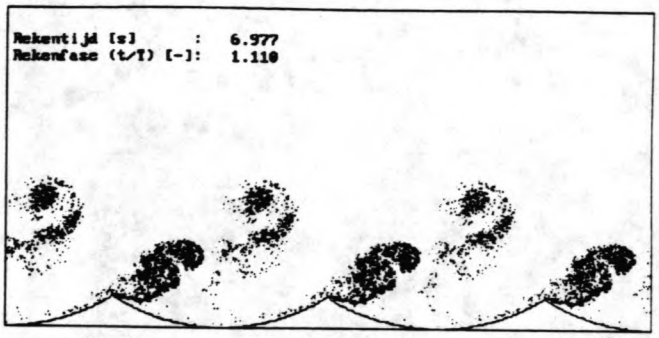

Rekentijd [s] : 5.850
Rekenfase (t/T) [-]: 0.931

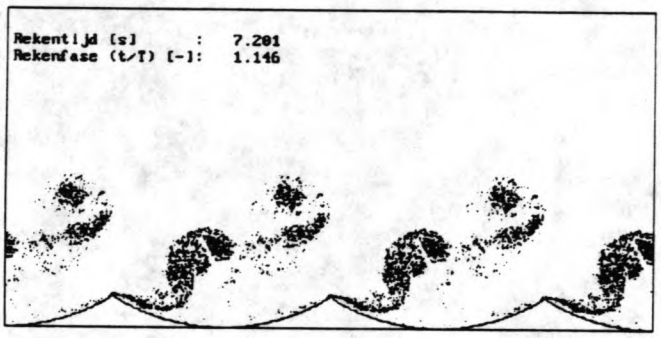

Rekentijd [s] : 6.076
Rekenfase (t/T) [-]: 0.967

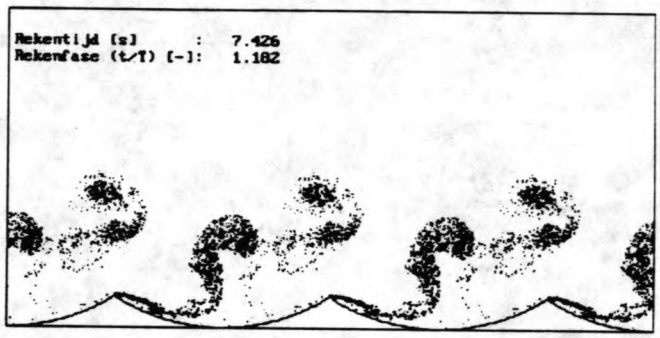

Rekentijd [s] : 6.300
Rekenfase (t/T) [-]: 1.003

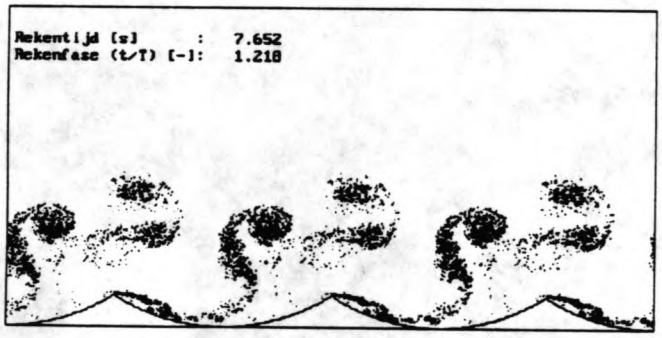

Rekentijd [s] : 6.525
Rekenfase (t/T) [-]: 1.038

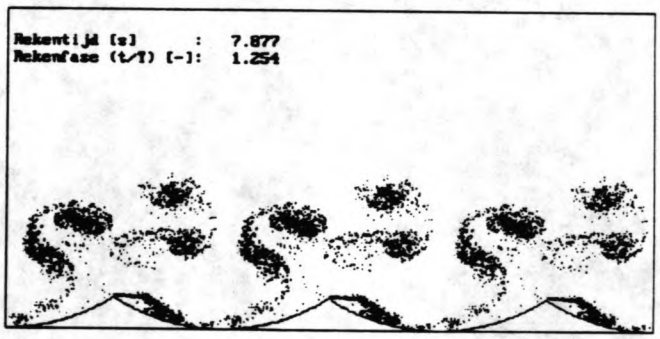

Rekentijd [s] : 6.751
Rekenfase (t/T) [-]: 1.074

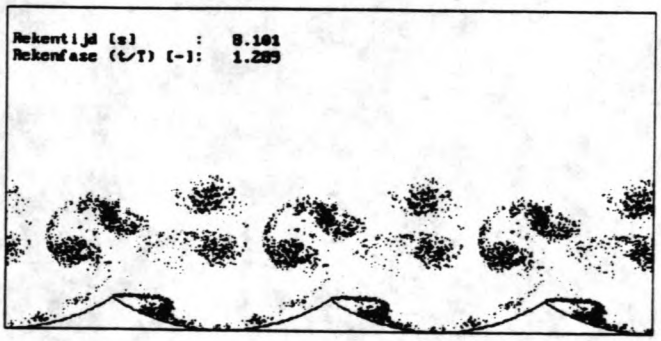

Rekentijd [s] : 6.977
Rekenfase (t/T) [-]: 1.110

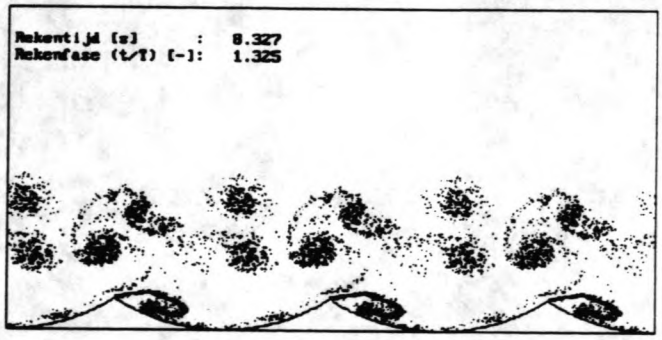

Rekentijd [s] : 7.201
Rekenfase (t/T) [-]: 1.146

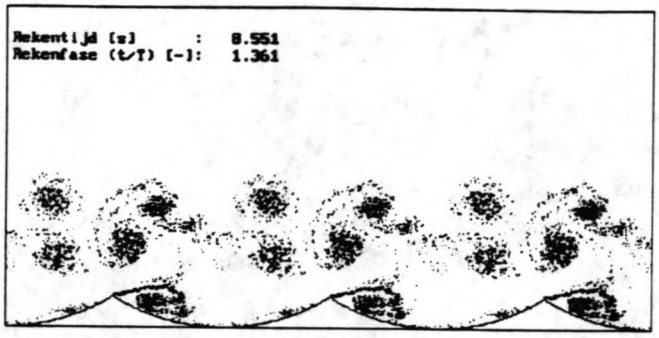

Rekentijd [s] : 7.426
Rekenfase (t/T) [-]: 1.182

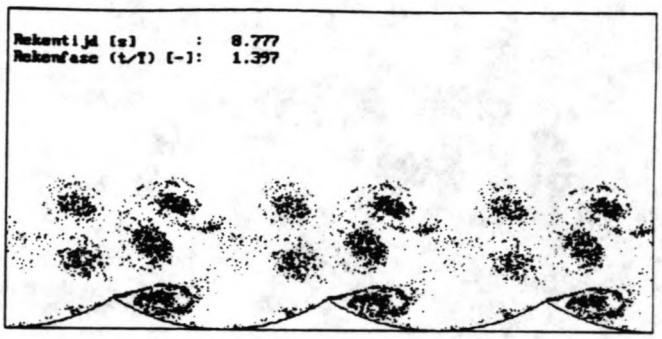

Rekentijd [s] : 7.652
Rekenfase (t/T) [-]: 1.218

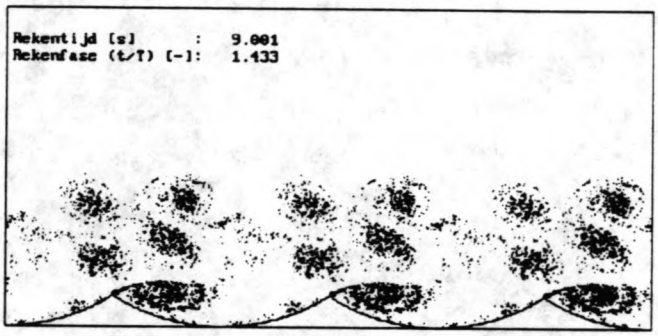

Rekentijd [s] : 7.877
Rekenfase (t/T) [-]: 1.254

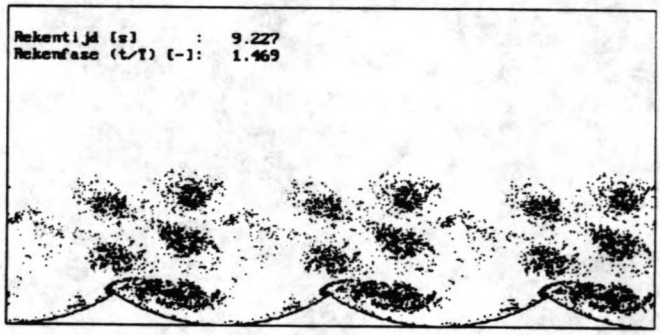

Rekentijd [s] : 8.101
Rekenfase (t/T) [-]: 1.289

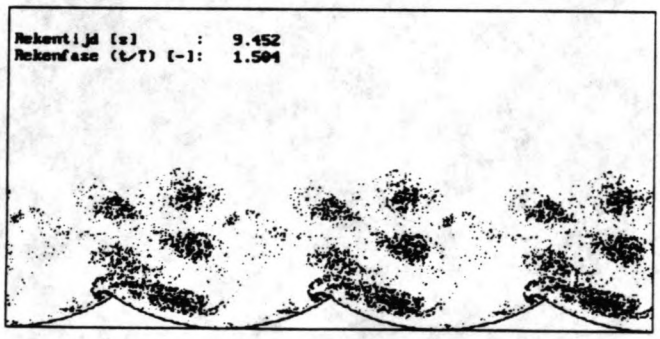

Rekentijd [s] : 8.327
Rekenfase (t/T) [-]: 1.325


Rekentijd [s] : 8.551
Rekenfase (t/T) [-]: 1.361


Rekentijd [s] : 8.777
Rekenfase (t/T) [-]: 1.397

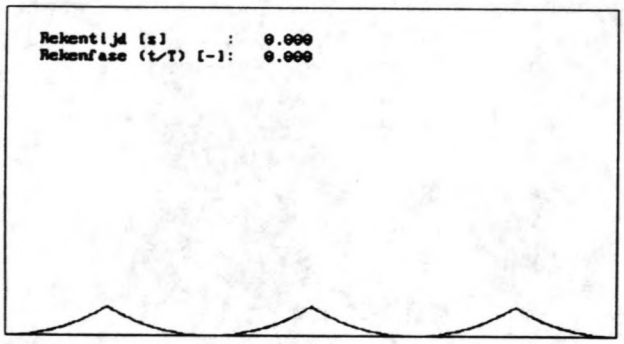

Rekentijd [s] : 9.001
Rekenfase (t/T) [-]: 1.433

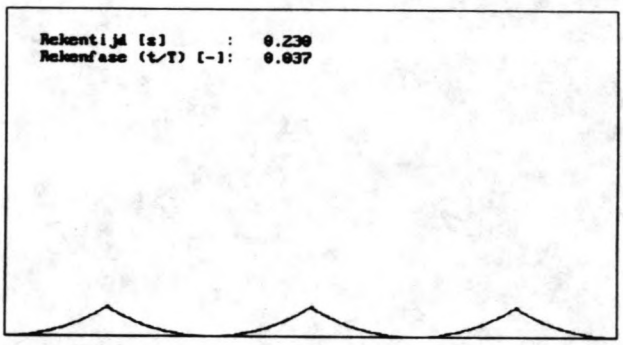

Rekentijd [s] : 9.227
Rekenfase (t/T) [-]: 1.469

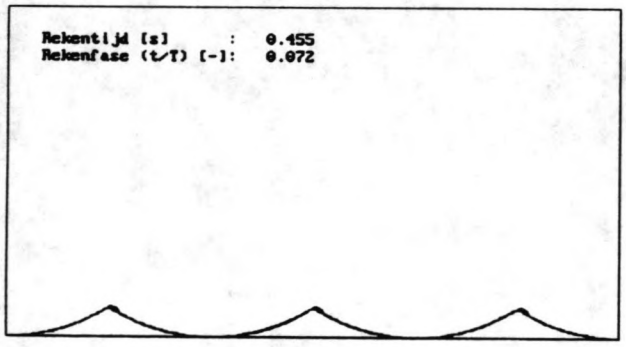

Rekentijd [s] : 9.452
Rekenfase (t/T) [-]: 1.504

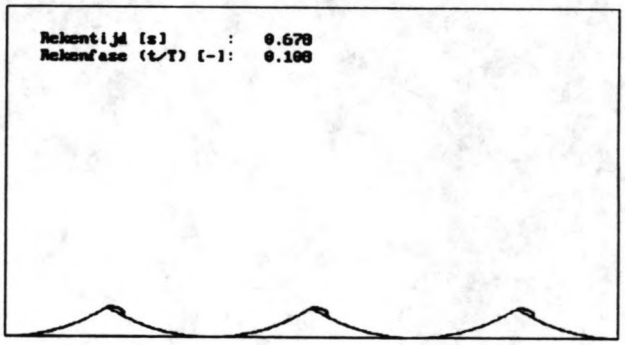
Wervelafschudding bij bodemribbels:

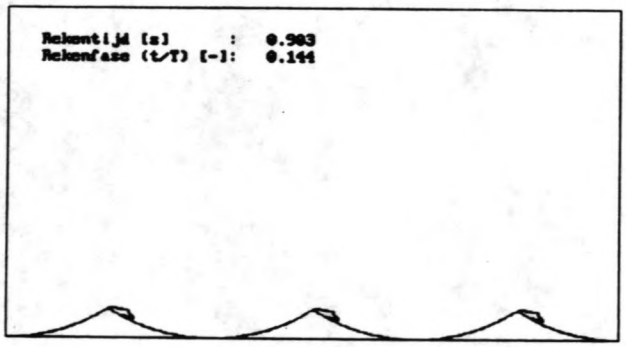
Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygoonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 0.0
"Cluster" viscositeit	[m²/s]	: 1.E-8
Roostergrootte	[-]	: ((3*84) + 1)*160
Celgrootte ($\Delta x*\Delta y$)	[mm]	: 1,5*1,5
Aantal iteraties Poissonsolver	[-]	: 200
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5
Afstand loslaatpunt tot bodemribbeltop	[mm]	: 0.5

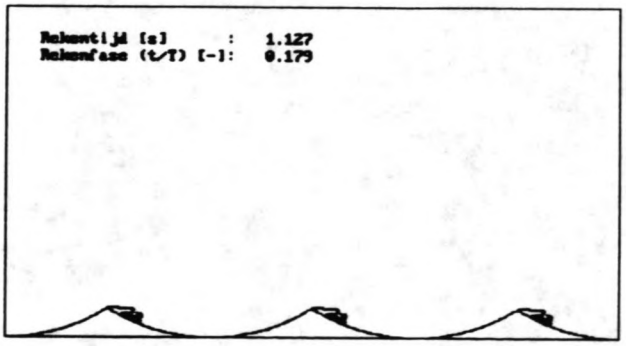


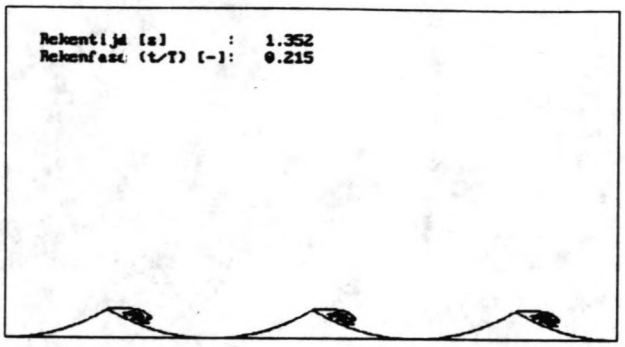


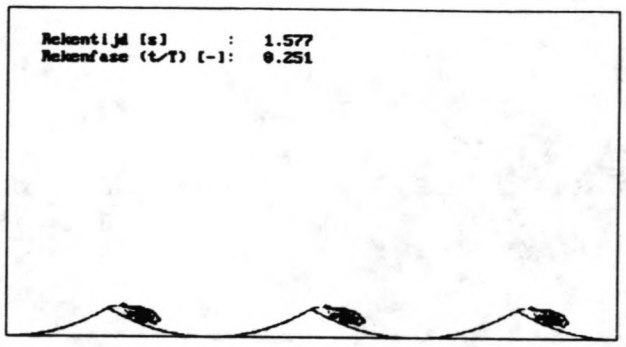


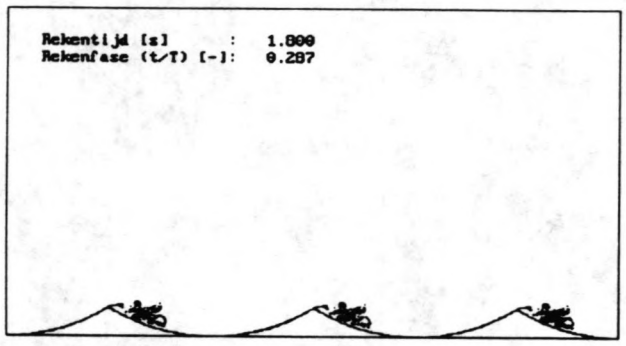


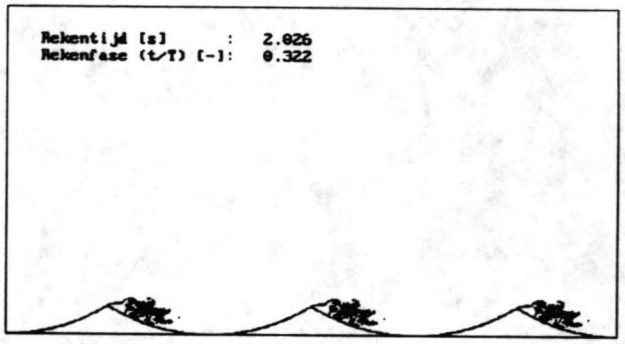


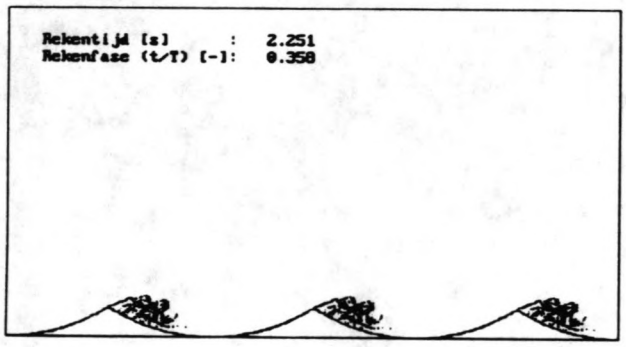


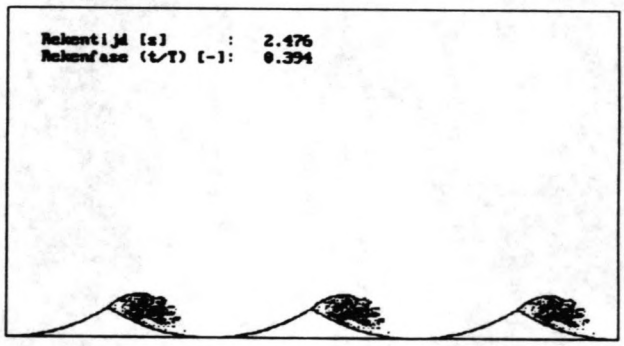

Rekentijd [s] : 1.352
Rekenfase (t/T) [-]: 0.215

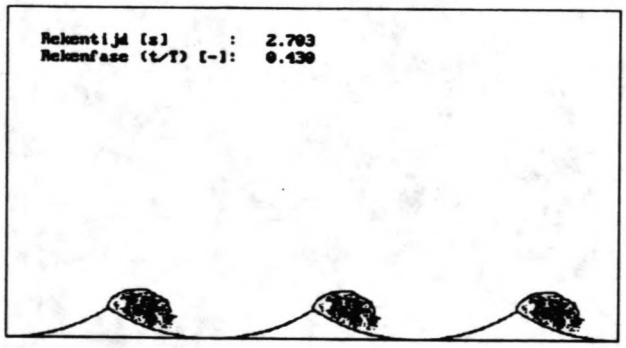

Rekentijd [s] : 1.577
Rekenfase (t/T) [-]: 0.251

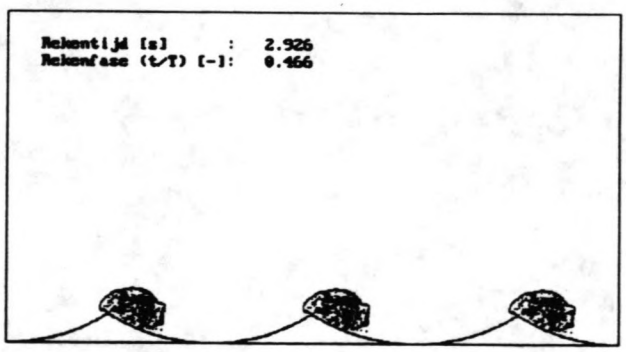

Rekentijd [s] : 1.800
Rekenfase (t/T) [-]: 0.287

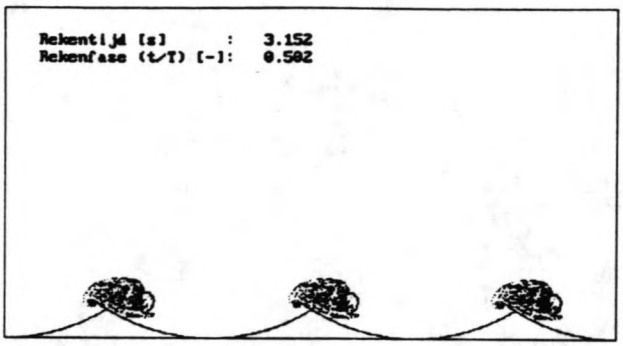

Rekentijd [s] : 2.026
Rekenfase (t/T) [-]: 0.322

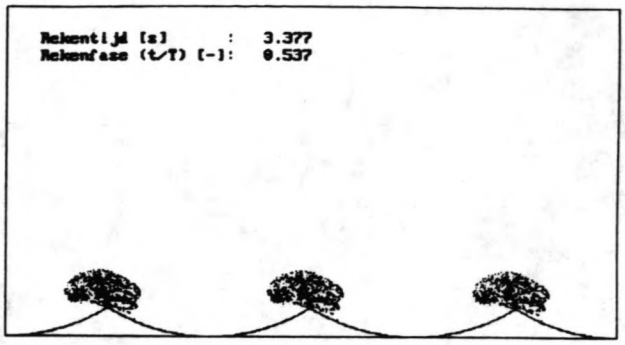

Rekentijd [s] : 2.251
Rekenfase (t/T) [-]: 0.358

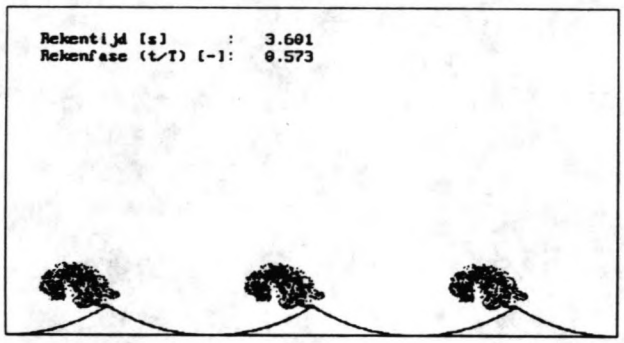

Rekentijd [s] : 2.476
Rekenfase (t/T) [-]: 0.394

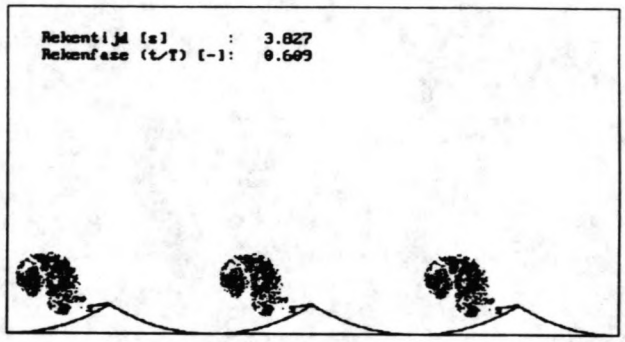

Rekentijd [s] : 2.703
Rekenfase (t/T) [-]: 0.430

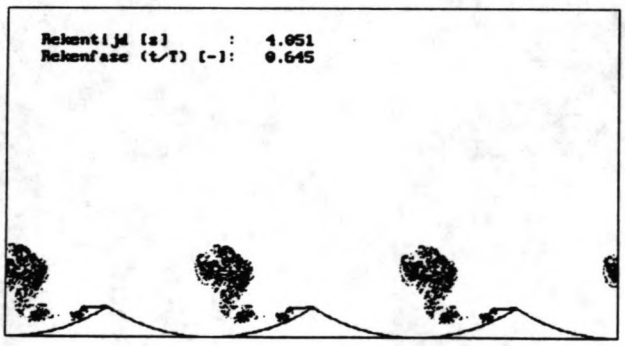

Rekentijd [s] : 2.926
Rekenfase (t/T) [-]: 0.466

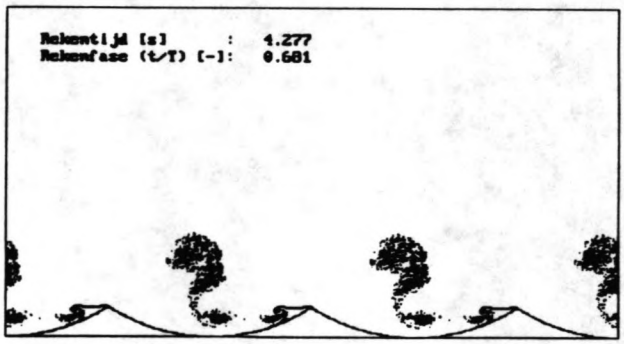

Rekentijd [s] : 3.152
Rekenfase (t/T) [-]: 0.502

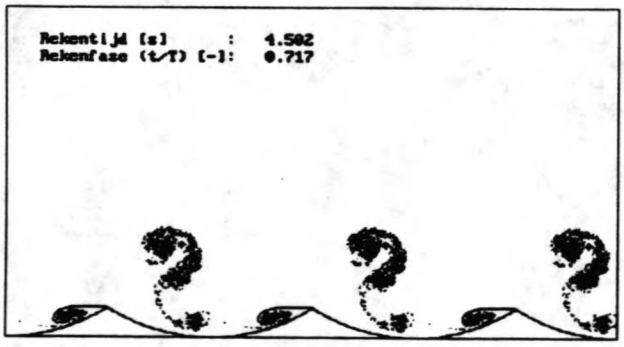

Rekentijd [s] : 3.377
Rekenfase (t/T) [-]: 0.537

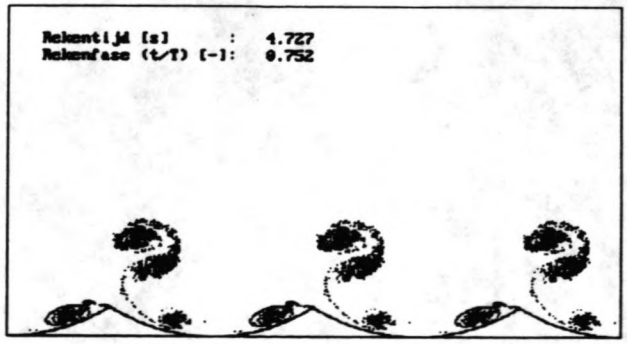

Rekentijd [s] : 3.601
Rekenfase (t/T) [-]: 0.573

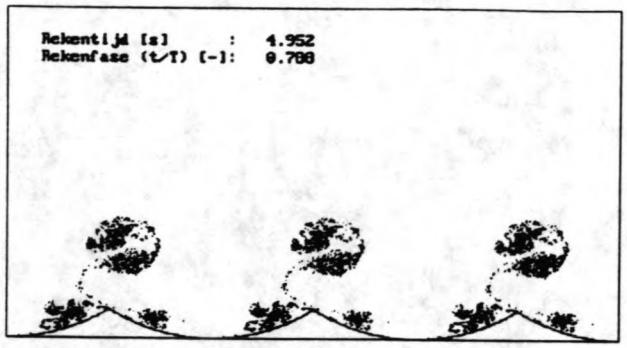

Rekentijd [s] : 3.827
Rekenfase (t/T) [-]: 0.609

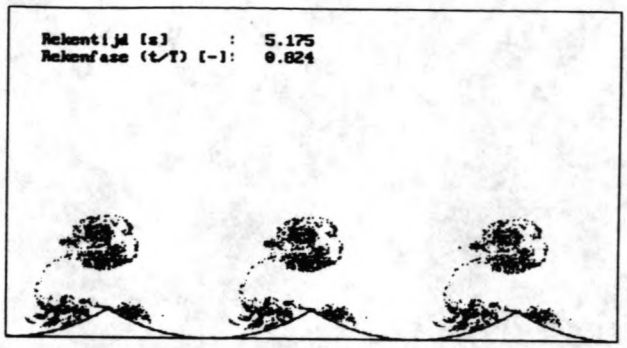

Rekentijd [s] : 4.051
Rekenfase (t/T) [-]: 0.645

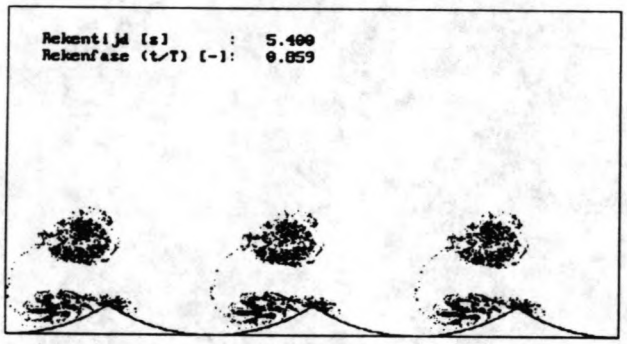

Rekentijd [s] : 4.277
Rekenfase (t/T) [-]: 0.681

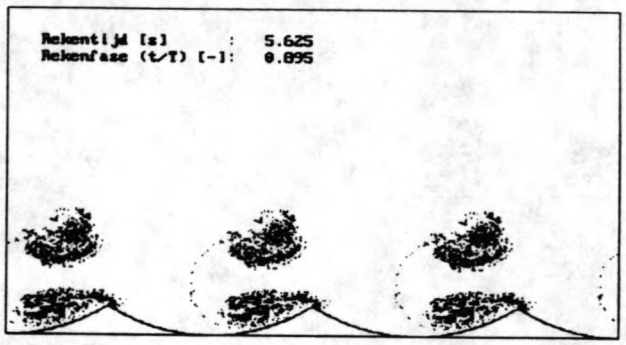

Rekentijd [s] : 4.502
Rekenfase (t/T) [-]: 0.717

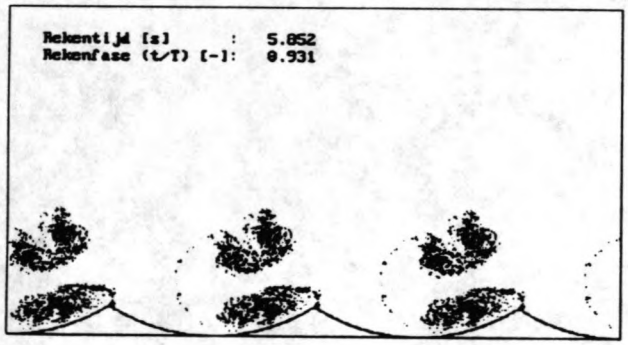

Rekentijd [s] : 4.727
Rekenfase (t/T) [-]: 0.752

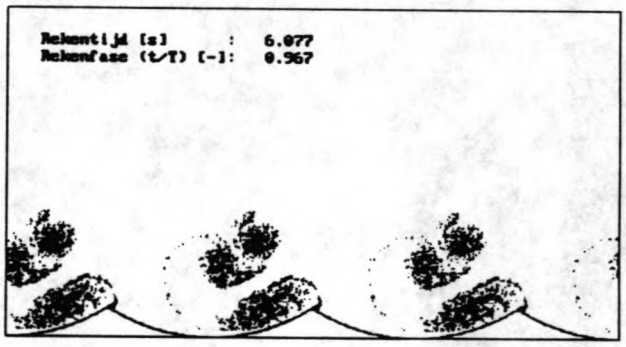

Rekentijd [s] : 4.952
Rekenfase (t/T) [-]: 0.788

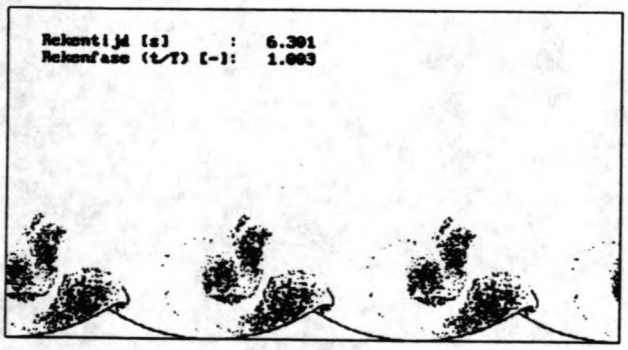

Rekentijd [s] : 5.175
Rekenfase (t/T) [-]: 0.824

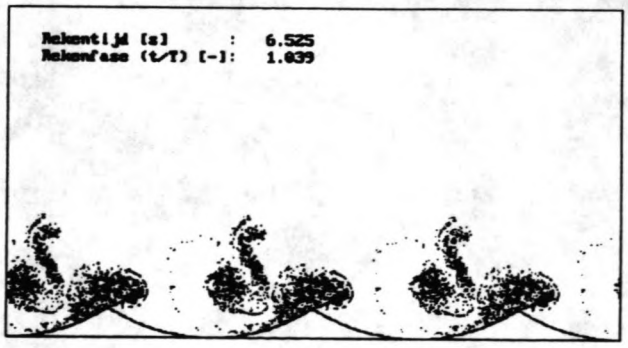

Rekentijd [s] : 5.400
Rekenfase (t/T) [-]: 0.859

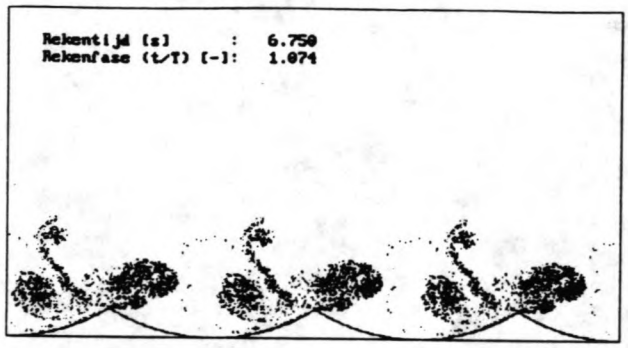

Rekentijd [s] : 5.625
Rekenfase (t/T) [-]: 0.895

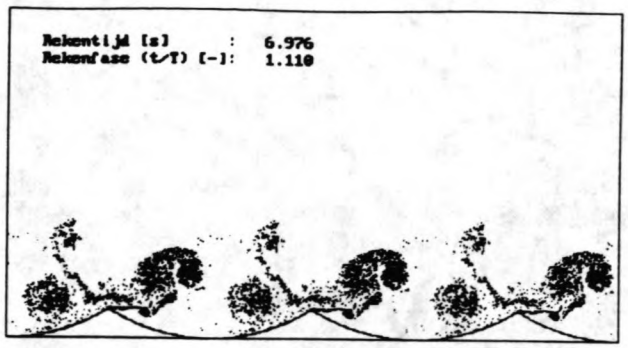

Rekentijd [s] : 5.852
Rekenfase (t/T) [-]: 0.931

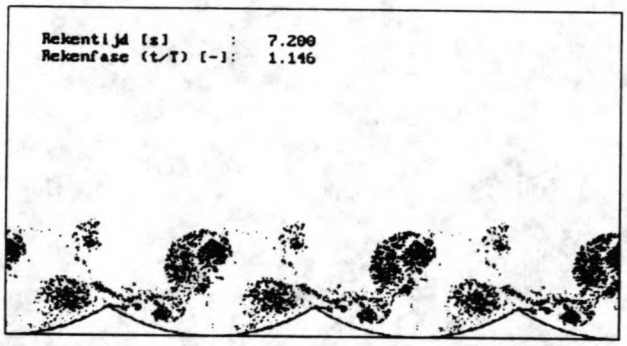

Rekentijd [s] : 6.077
Rekenfase (t/T) [-]: 0.967

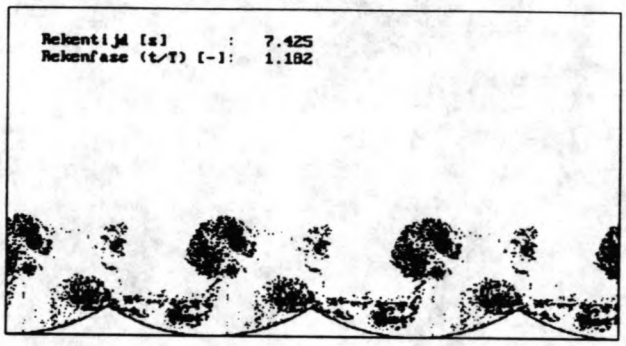

Rekentijd [s] : 6.301
Rekenfase (t/T) [-]: 1.003

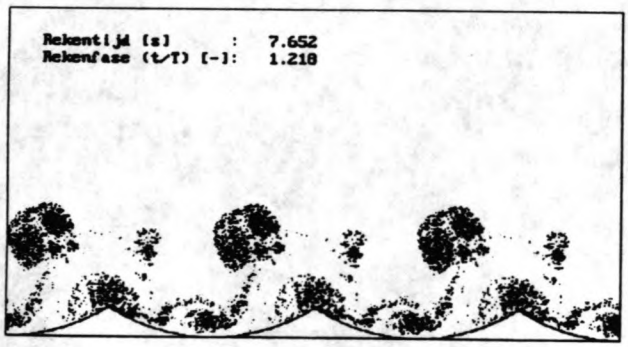

Rekentijd [s] : 6.525
Rekenfase (t/T) [-]: 1.039

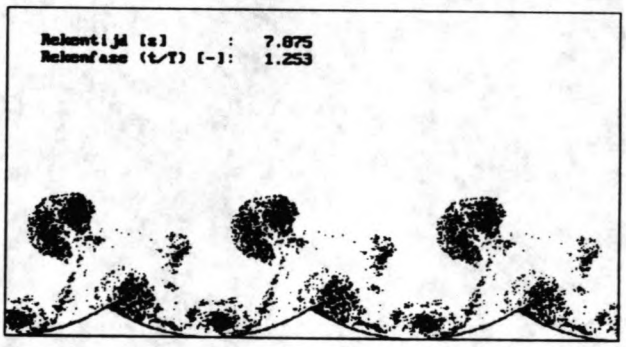

Rekentijd [s] : 6.750
Rekenfase (t/T) [-]: 1.074

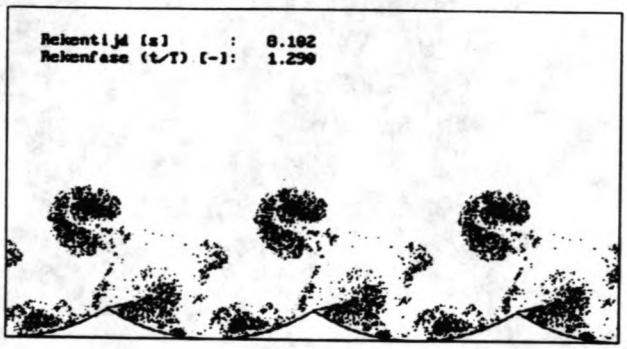

Rekentijd [s] : 6.976
Rekenfase (t/T) [-]: 1.110

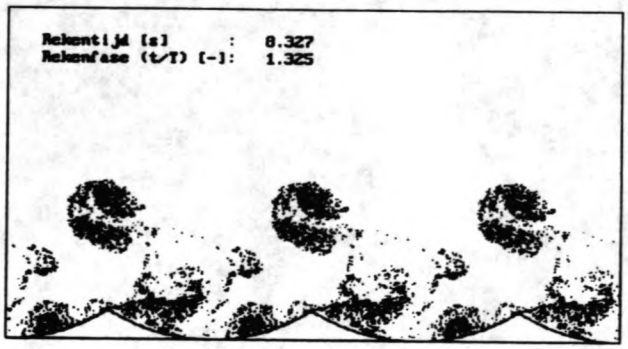

Rekentijd [s] : 7.200
Rekenfase (t/T) [-]: 1.146

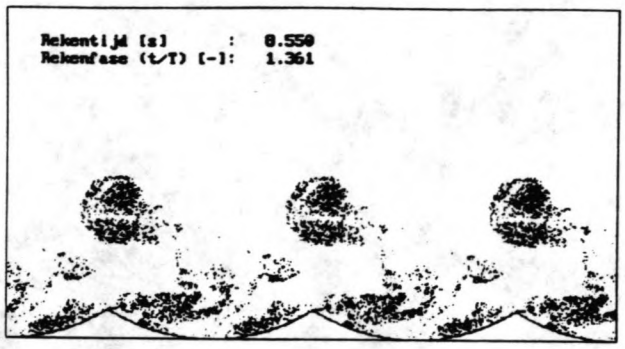

Rekentijd [s] : 7.425
Rekenfase (t/T) [-]: 1.182

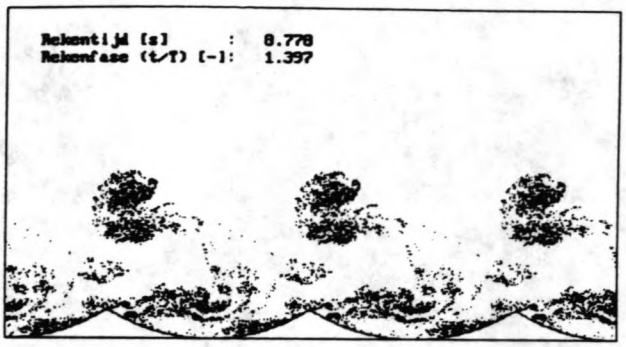

Rekentijd [s] : 7.652
Rekenfase (t/T) [-]: 1.218

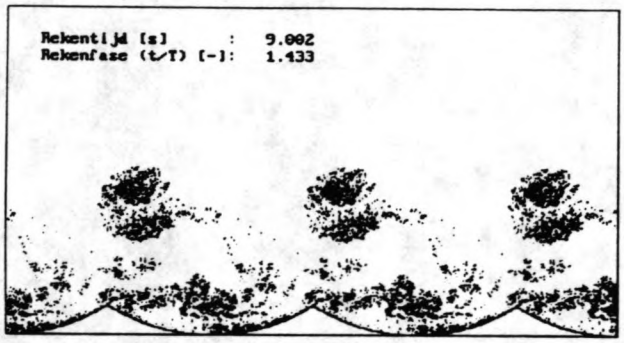

Rekentijd [s] : 7.875
Rekenfase (t/T) [-]: 1.253

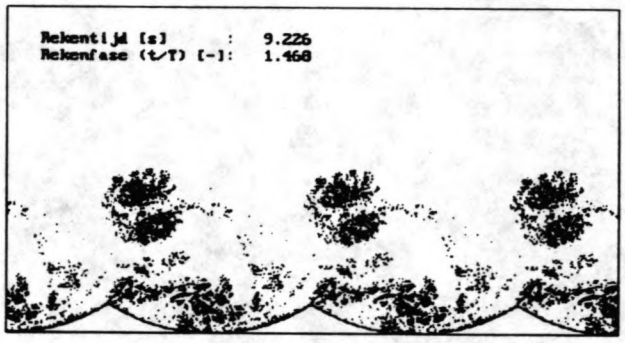

Rekentijd [s] : 8.102
Rekenfase (t/T) [-]: 1.290

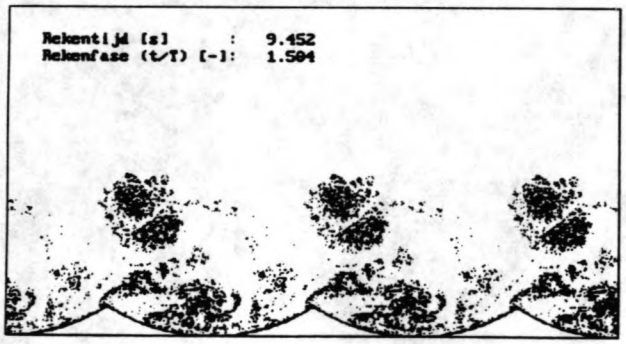

Rekentijd [s] : 8.327
Rekenfase (t/T) [-]: 1.325


Rekentijd [s] : 8.550
Rekenfase (t/T) [-]: 1.361


Rekentijd [s] : 8.778
Rekenfase (t/T) [-]: 1.397

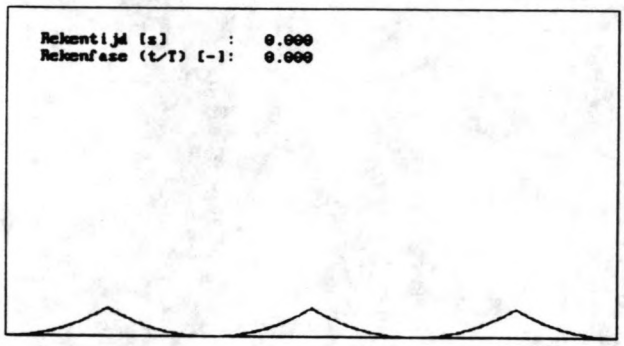

Rekentijd [s] : 9.002
Rekenfase (t/T) [-]: 1.433

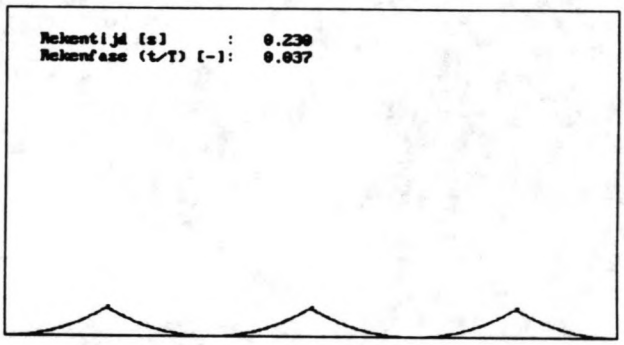

Rekentijd [s] : 9.226
Rekenfase (t/T) [-]: 1.468

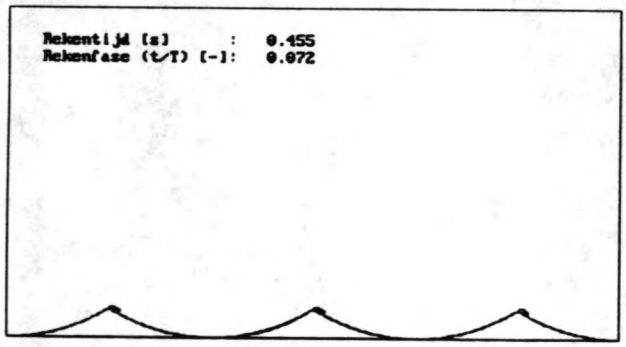

Rekentijd [s] : 9.452
Rekenfase (t/T) [-]: 1.504

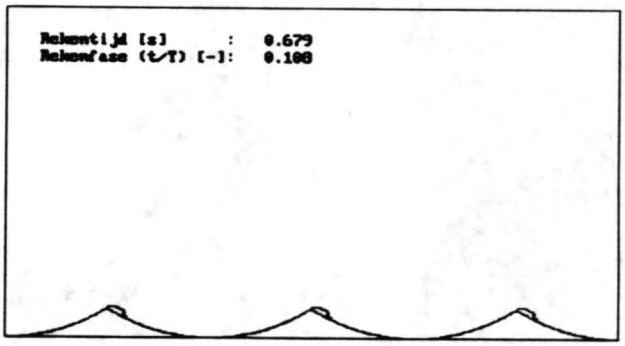
Wervelafschudding bij bodemribbels:

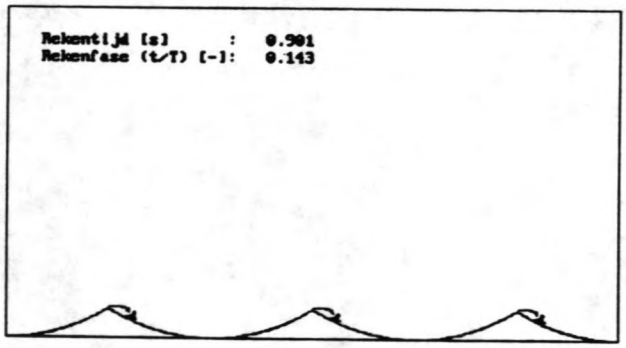
Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygoonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 0.0
"Cluster" viscositeit	[m²/s]	: 1.E-8
Roostergrootte	[-]	: ((3*84) + 1)*160
Celgrootte ($\Delta x*\Delta y$)	[mm]	: 1,5*1,5
Aantal iteraties Poissonsolver	[-]	: 200
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5
Afstand loslaatpunt tot bodemribbeltop	[mm]	: 1.0

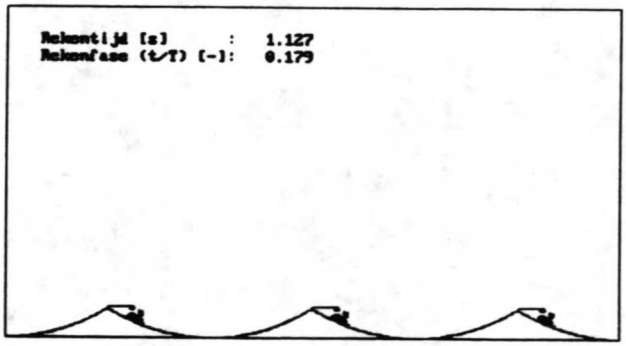


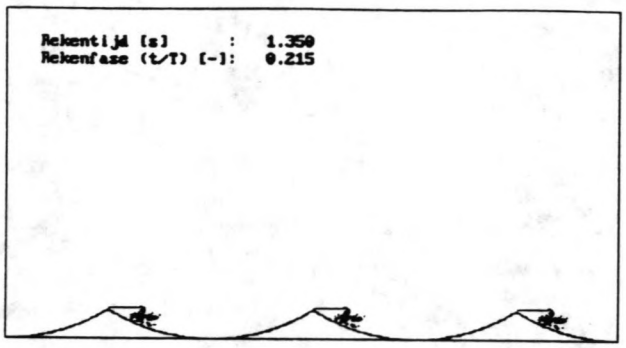


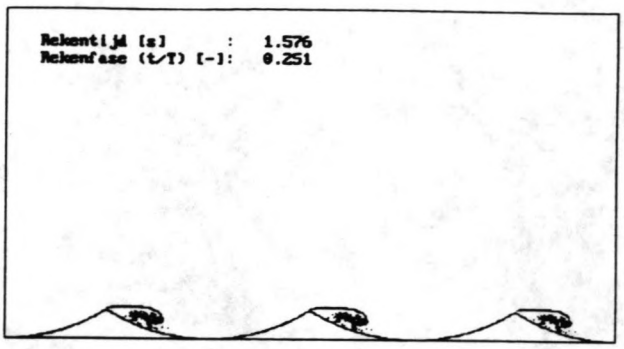


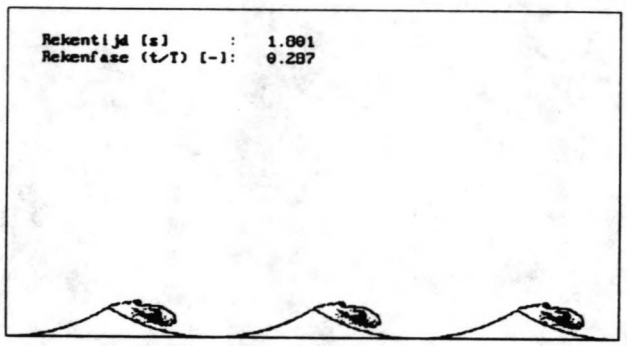


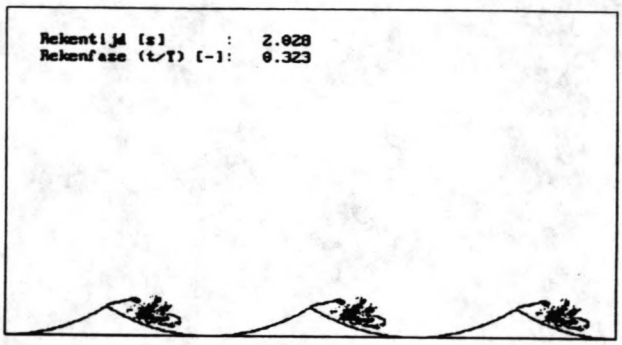


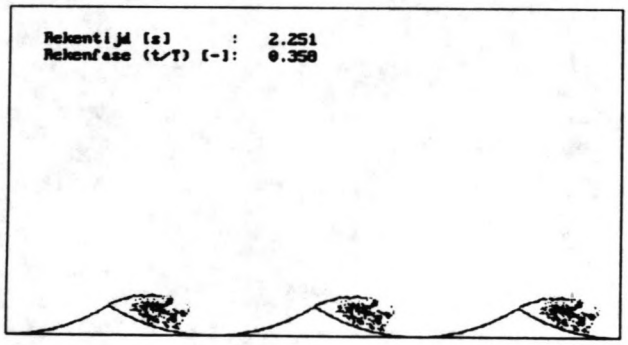


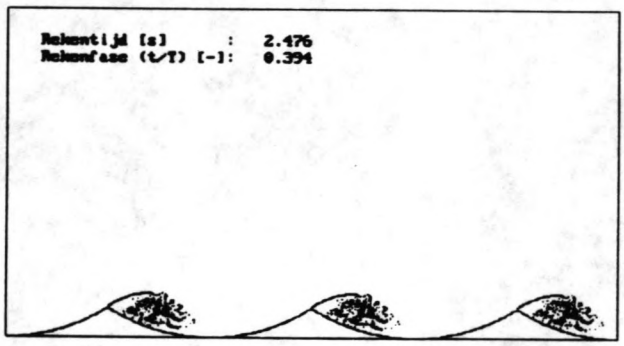

Rekentijd [s] : 1.350
Rekenfase (t/T) [-]: 0.215

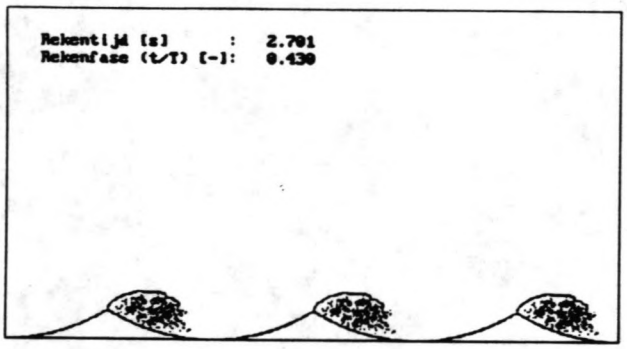

Rekentijd [s] : 1.576
Rekenfase (t/T) [-]: 0.251

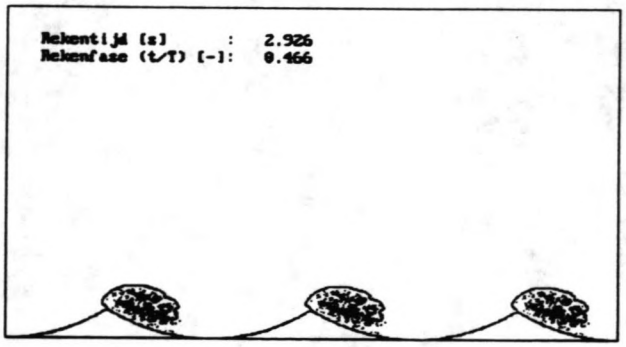

Rekentijd [s] : 1.801
Rekenfase (t/T) [-]: 0.287

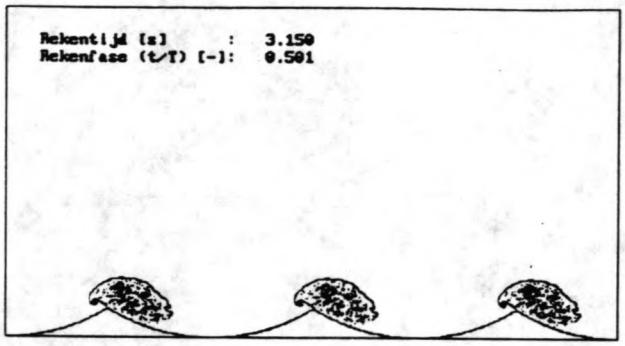

Rekentijd [s] : 2.028
Rekenfase (t/T) [-]: 0.323

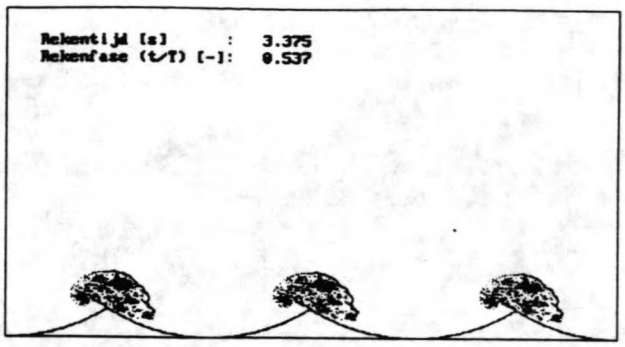

Rekentijd [s] : 2.251
Rekenfase (t/T) [-]: 0.358

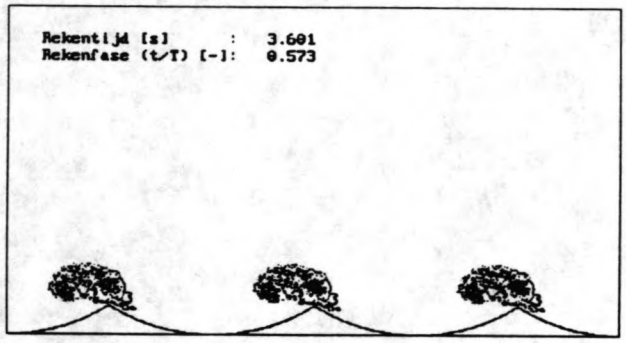

Rekentijd [s] : 2.476
Rekenfase (t/T) [-]: 0.394

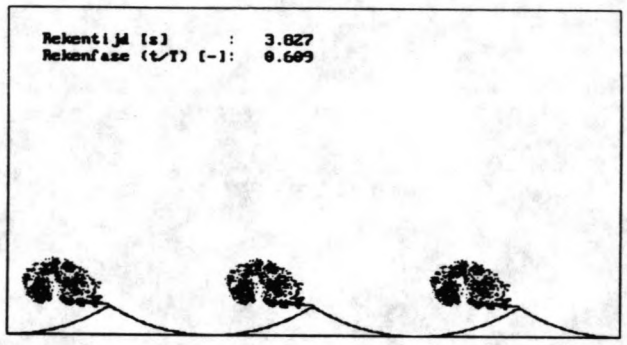

Rekentijd [s] : 2.701
Rekenfase (t/T) [-]: 0.430

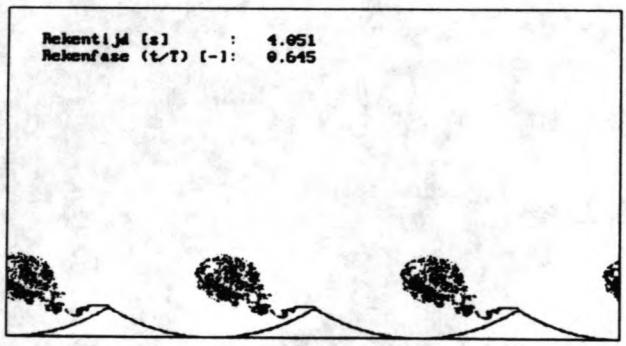

Rekentijd [s] : 2.926
Rekenfase (t/T) [-]: 0.466

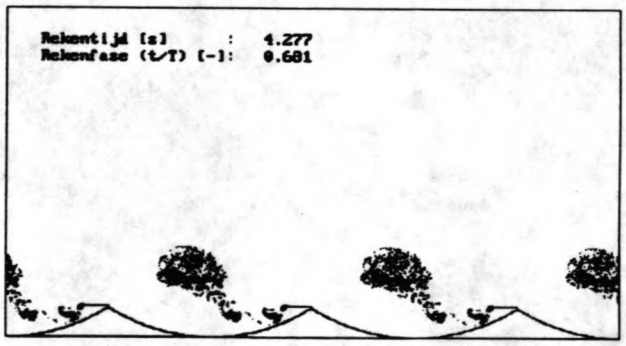

Rekentijd [s] : 3.150
Rekenfase (t/T) [-]: 0.501

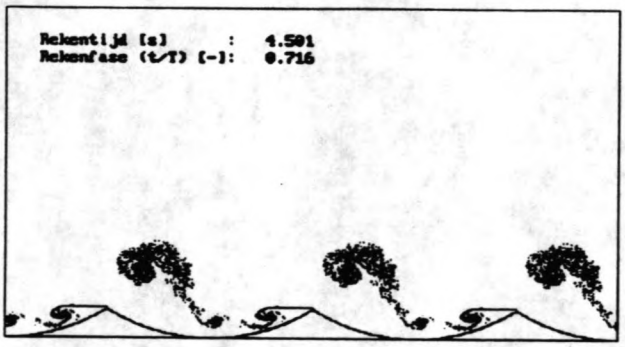

Rekentijd [s] : 3.375
Rekenfase (t/T) [-]: 0.537

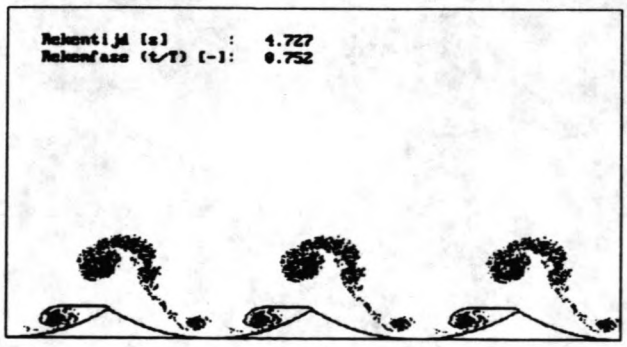

Rekentijd [s] : 3.601
Rekenfase (t/T) [-]: 0.573

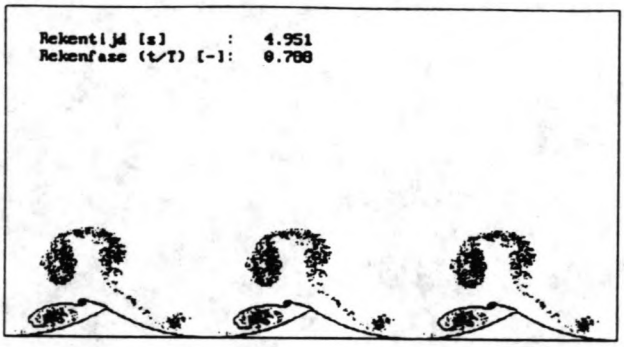

Rekentijd [s] : 3.827
Rekenfase (t/T) [-]: 0.609

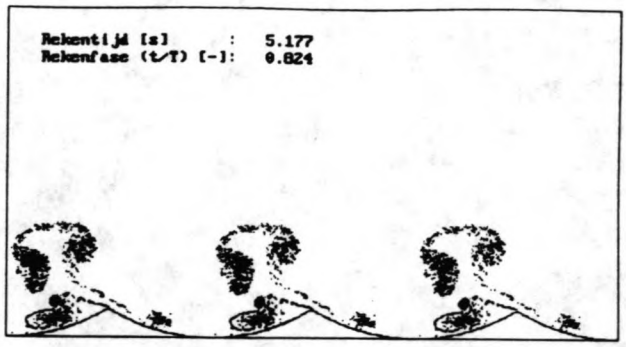

Rekentijd [s] : 4.051
Rekenfase (t/T) [-]: 0.645

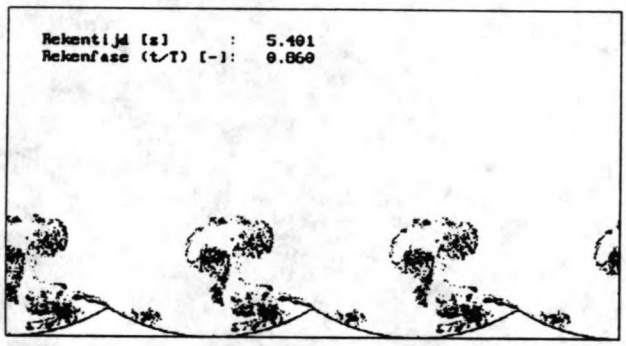

Rekentijd [s] : 4.277
Rekenfase (t/T) [-]: 0.681

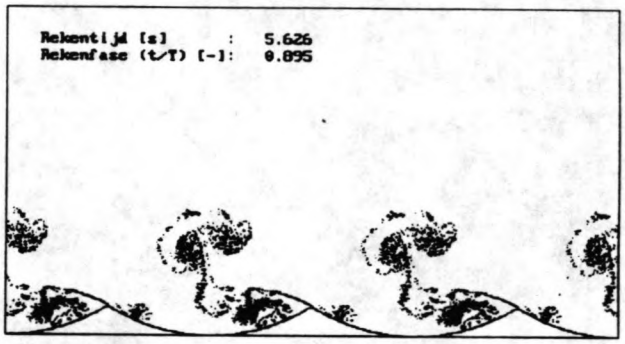

Rekentijd [s] : 4.501
Rekenfase (t/T) [-]: 0.716

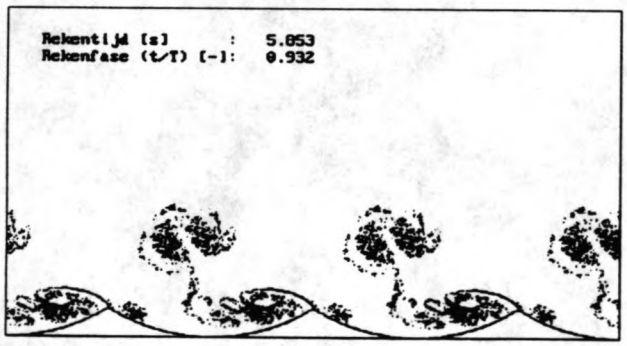

Rekentijd [s] : 4.727
Rekenfase (t/T) [-]: 0.752

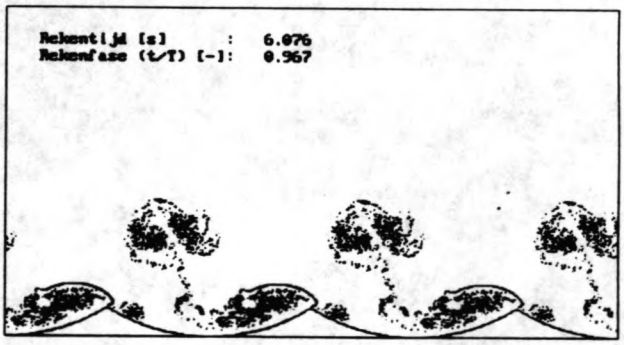

Rekentijd [s] : 4.951
Rekenfase (t/T) [-]: 0.788

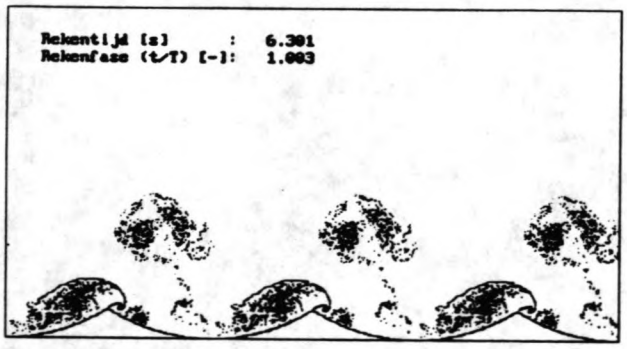

Rekentijd [s] : 5.177
Rekenfase (t/T) [-]: 0.824

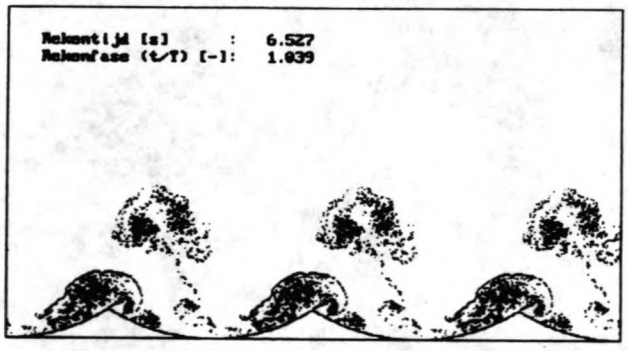

Rekentijd [s] : 5.401
Rekenfase (t/T) [-]: 0.860

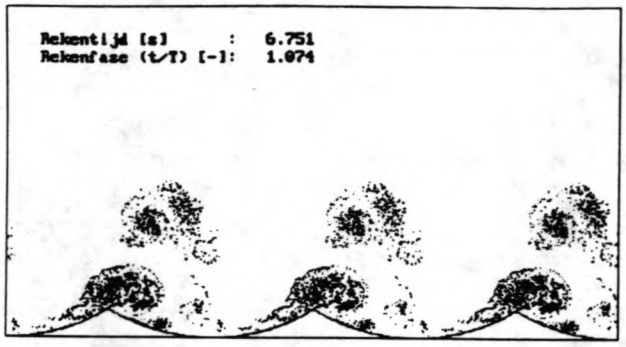

Rekentijd [s] : 5.626
Rekenfase (t/T) [-]: 0.895

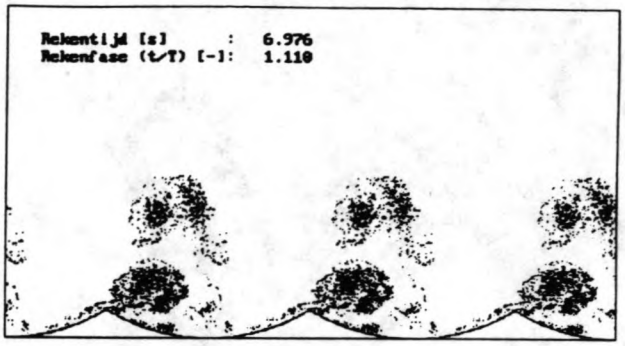

Rekentijd [s] : 5.853
Rekenfase (t/T) [-]: 0.932

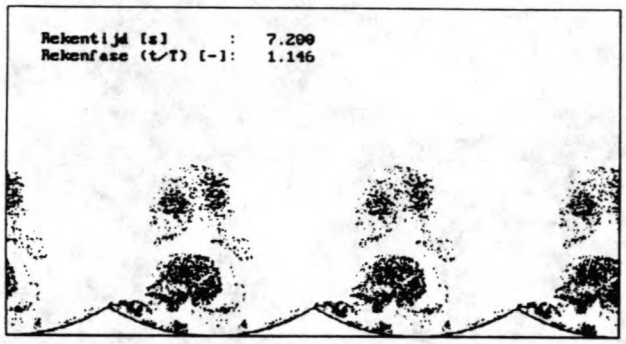

Rekentijd [s] : 6.076
Rekenfase (t/T) [-]: 0.967

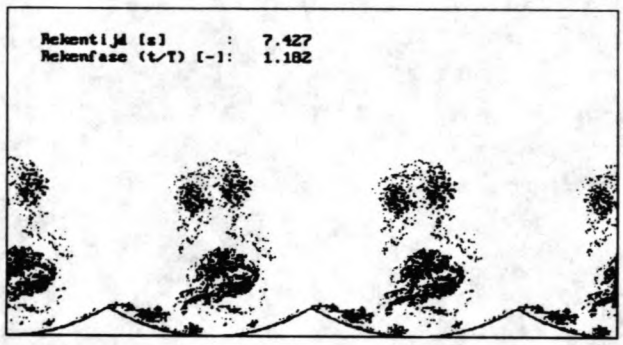

Rekentijd [s] : 6.301
Rekenfase (t/T) [-]: 1.003

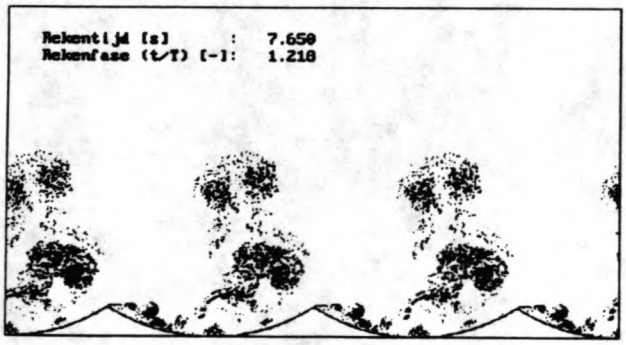

Rekentijd [s] : 6.527
Rekenfase (t/T) [-]: 1.039

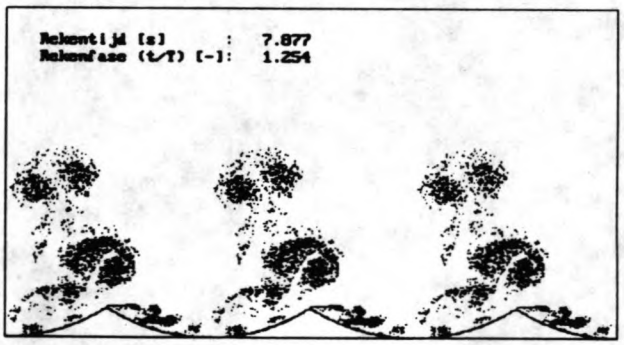

Rekentijd [s] : 6.751
Rekenfase (t/T) [-]: 1.074

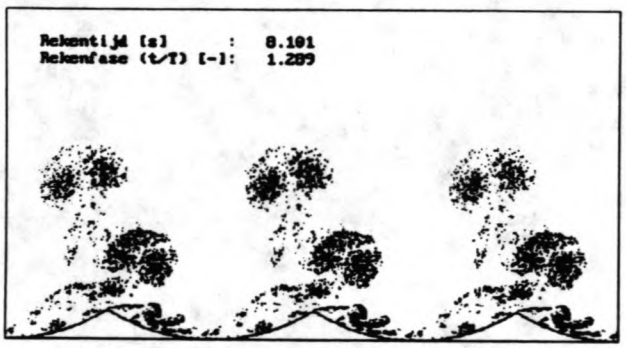

Rekentijd [s] : 6.976
Rekenfase (t/T) [-]: 1.110

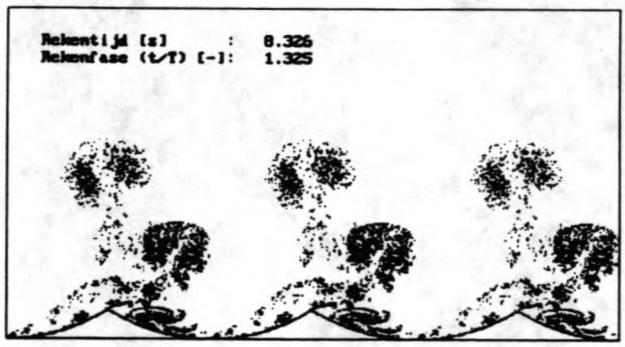

Rekentijd [s] : 7.200
Rekenfase (t/T) [-]: 1.146

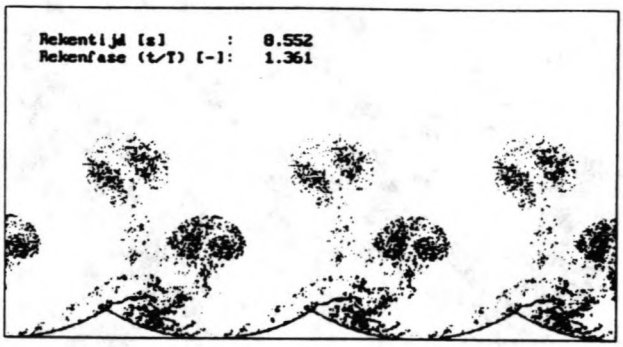

Rekentijd [s] : 7.427
Rekenfase (t/T) [-]: 1.182

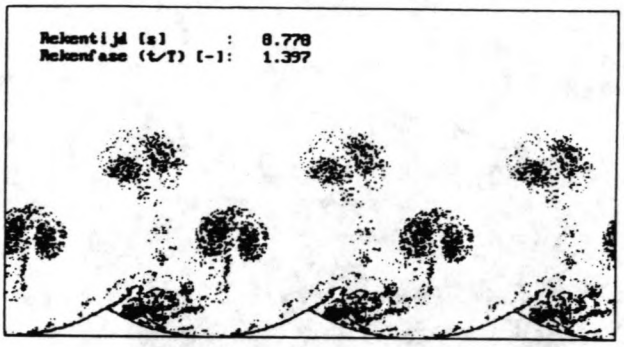

Rekentijd [s] : 7.650
Rekenfase (t/T) [-]: 1.218

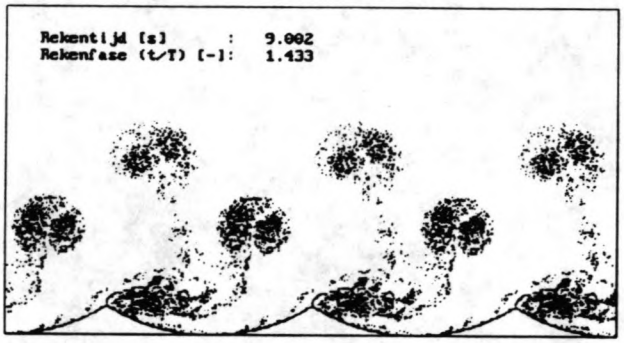

Rekentijd [s] : 7.877
Rekenfase (t/T) [-]: 1.254

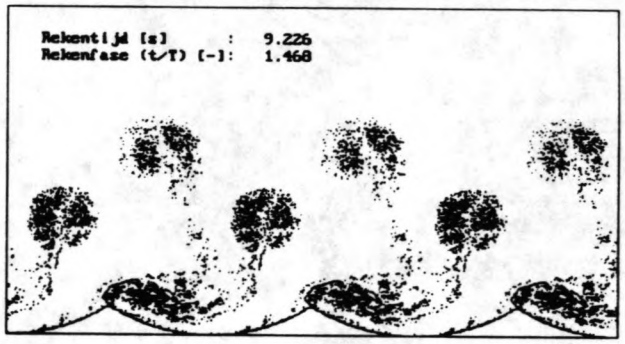

Rekentijd [s] : 8.101
Rekenfase (t/T) [-]: 1.289

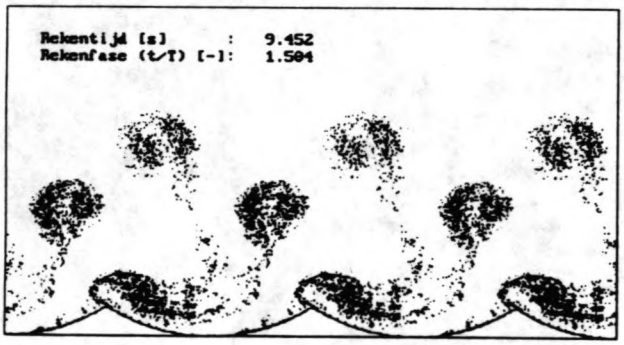

Rekentijd [s] : 8.326
Rekenfase (t/T) [-]: 1.325


Rekentijd [s] : 8.552
Rekenfase (t/T) [-]: 1.361


Rekentijd [s] : 8.778
Rekenfase (t/T) [-]: 1.397


Rekentijd [s] : 9.002
Rekenfase (t/T) [-]: 1.433

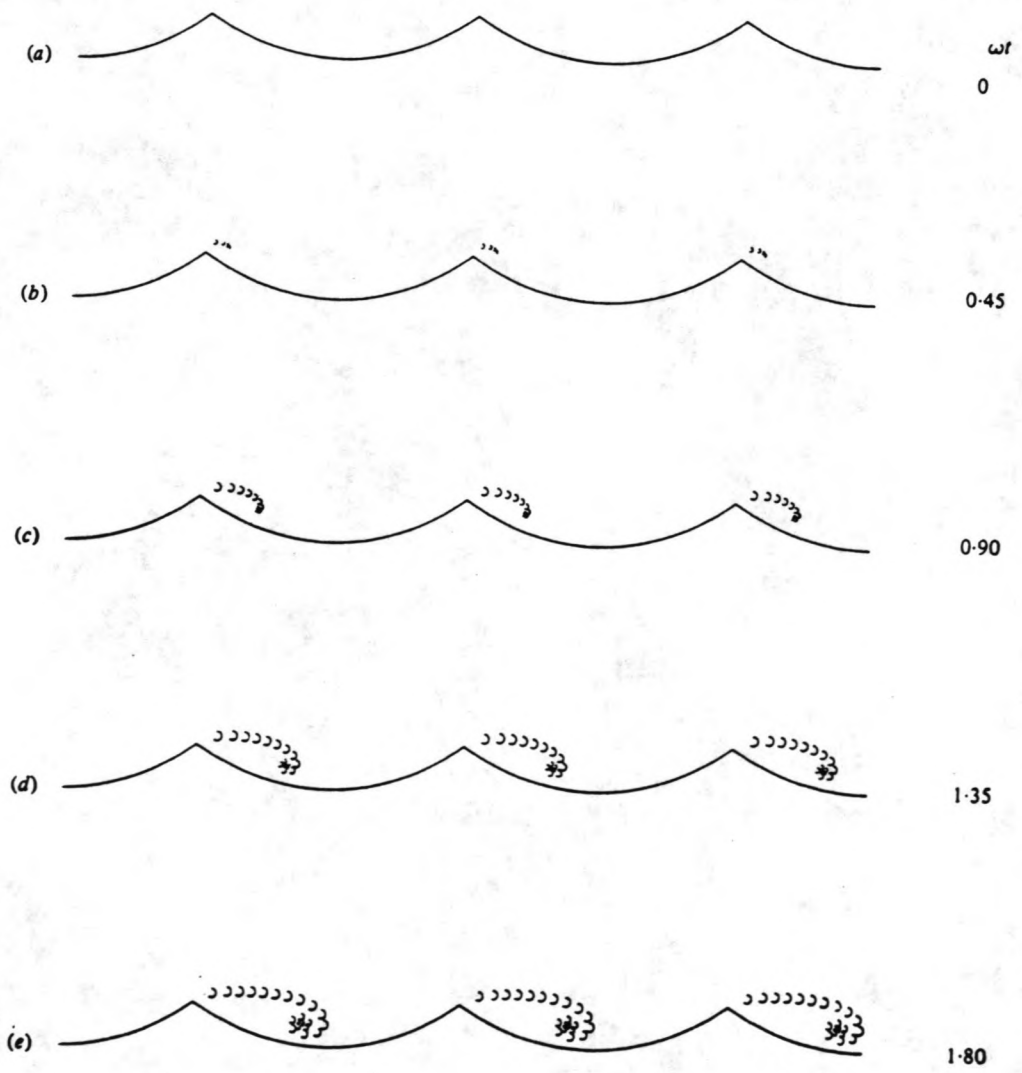

Rekentijd [s] : 9.226
Rekenfase (t/T) [-]: 1.468

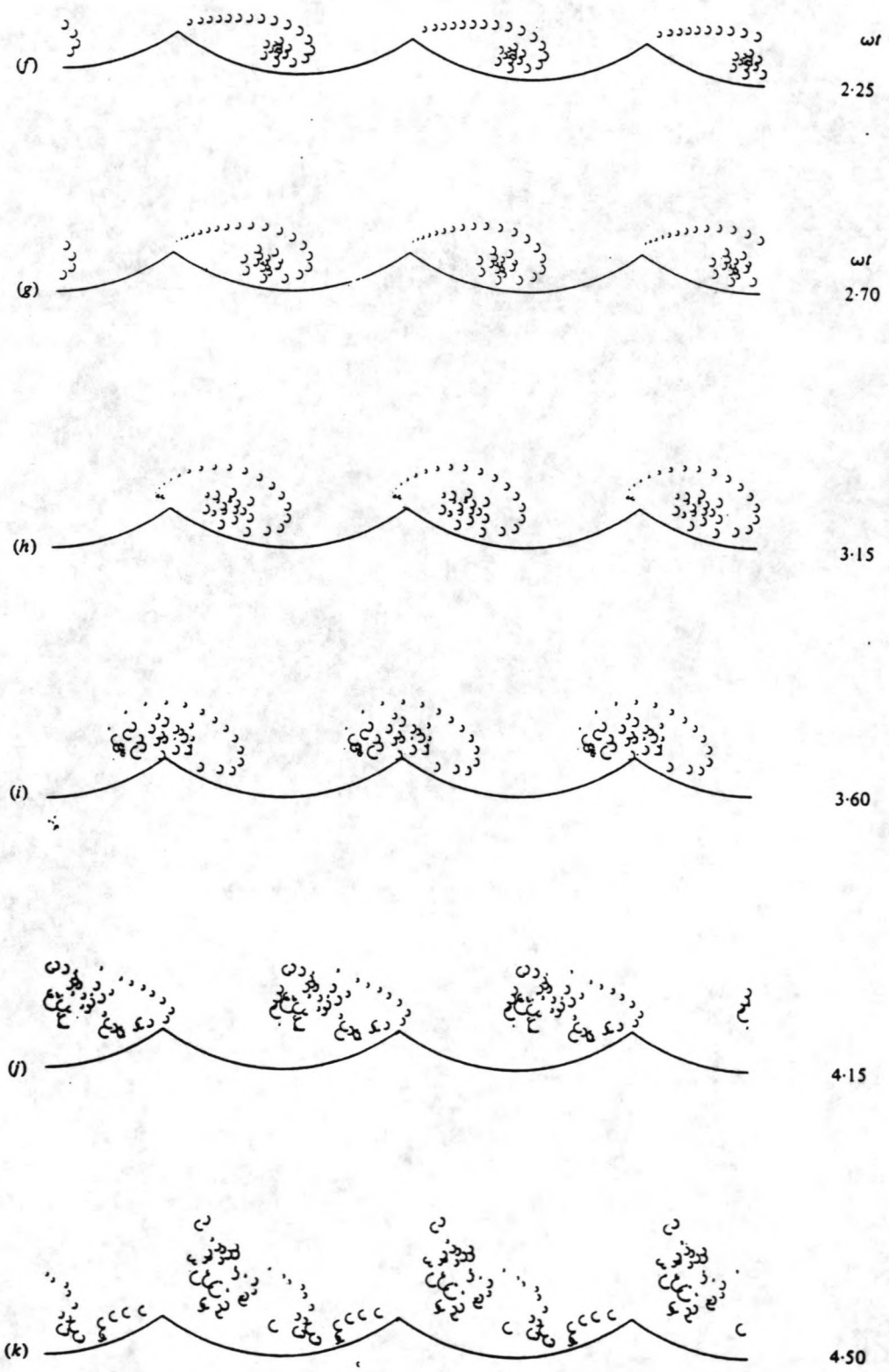

Rekentijd [s] : 9.452
Rekenfase (t/T) [-]: 1.504

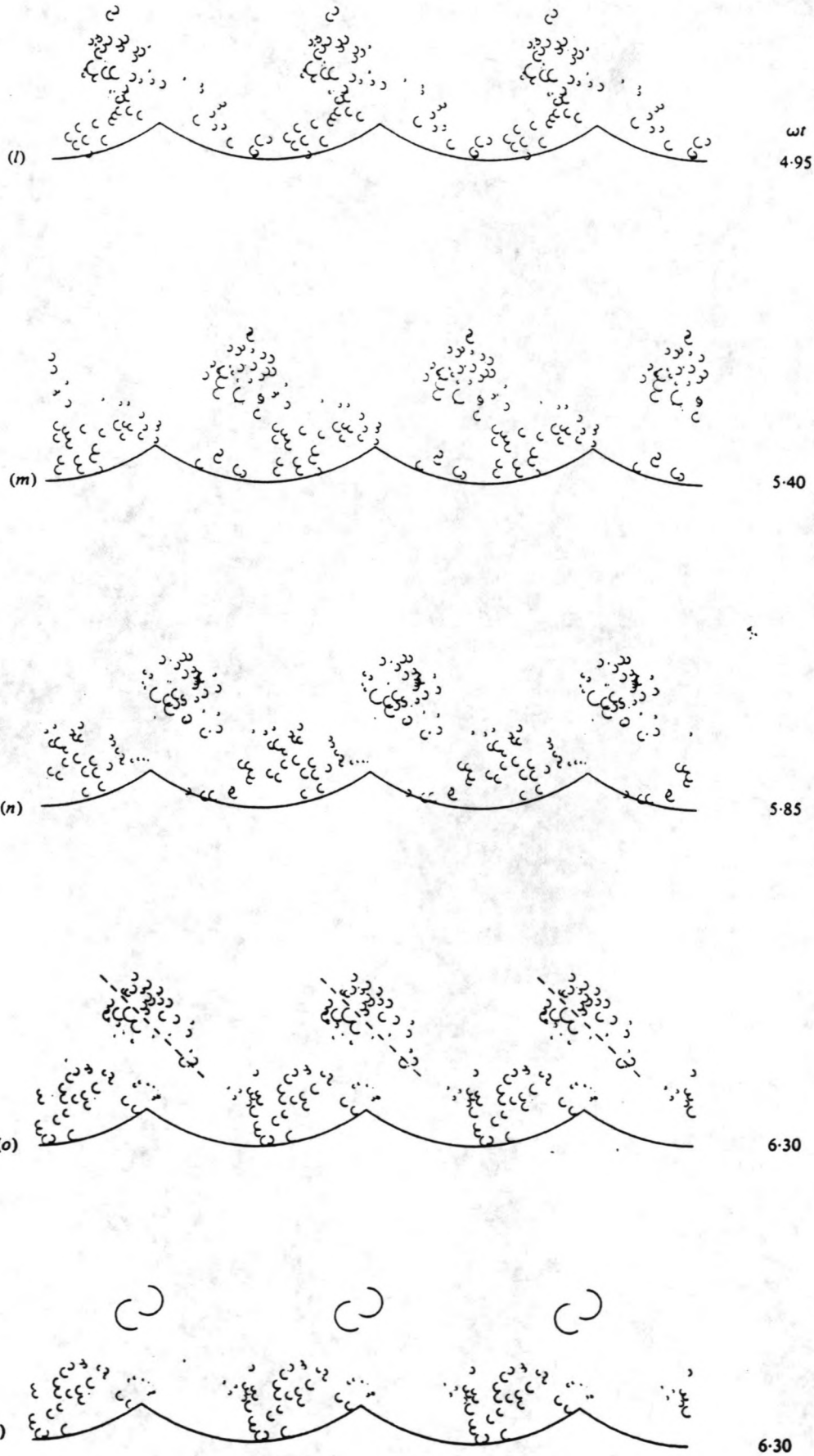
Numerieke simulatie van wervelafschudding bij bodemribbels met een Vortex-methode:

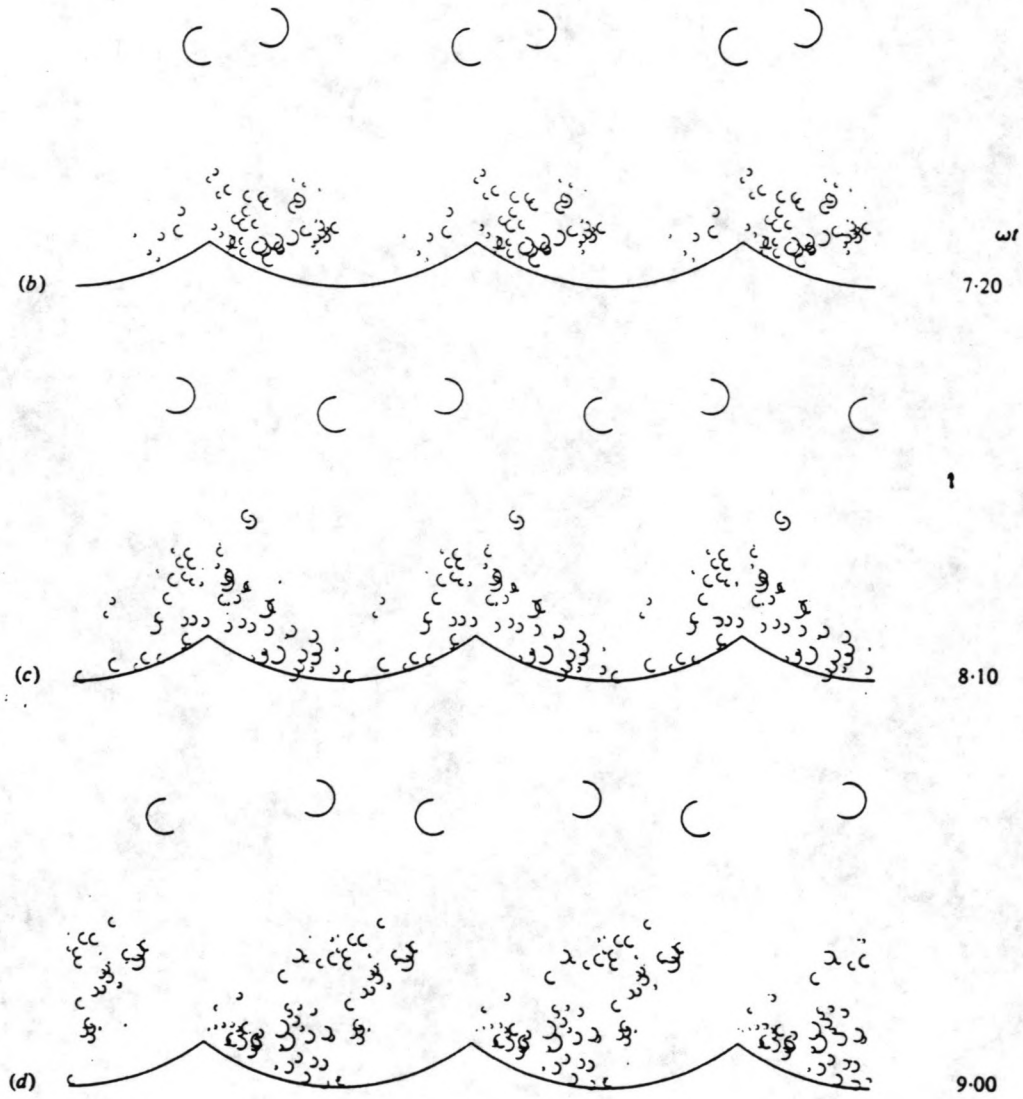
Onderstaande resultaten zijn ontleend aan Longuet-Higgins (1981) en gebruikt ter verificatie van het ontwikkelde rekenprogramma VORTEX gebaseerd op de Cloud In Cell-methode. De resultaten van de onderstaande simulatie zijn verkregen met een Vortex-methode waarbij de geometrie van de bodemribbel is getransformeerd zodanig dat de positie waar de werveldeeltjes worden geïntroduceerd (in de omgeving van de top van de bodemribbel) geen significante invloed heeft op de ontwikkeling van de wervelstructuren. Dit is een kenmerkende eigenschap van de door Longuet-Higgins gebruikte Vortex-methode.

Lengte van de bodemribbel	[m]	: 0.126
Hoogte van de bodemribbel	[m]	: 0.0213
Polygonwaarde bodemribbel	[-]	: 5
Golfperiode (T_g)	[sec]	: 6.283
Randvoorwaarde $u_\infty(x,t)$	[m/s]	: $0.075\cos(2\pi t/T_g + \pi/2)$
Kinematische viscositeit	[m²/s]	: 0.0
"Cluster"viscositeit	[m²/s]	: 1.E-6
Totale rekentijd	[sec]	: 9.5




(f)
ωt
2·25
(g)
ωt
2·70
(h)
3·15
(i)
3·60
(j)
4·15
(k)
4·50


ωt
(l)
4·95
(m)
5·40
(n)
5·85
(o)
6·30
(a)
6·30


ωt
(b)
7·20
(c)
8·10
(d)
9·00

LISTING VAN HET REKENPROGRAMMA VORTEX.F

```
C       PROGRAM VORTEX
C       SIMULATIE WERVELAFSCHUDDING BIJ BODEMRIBBELS MET DE
C       CLOUD IN CELL METHODE
C       datum  5-07-1992
C       laatste versie 1-07-1992
C
C       Auteur:
C
C       R.C.RIS
C       Oude Delft 15
C       2611 BA, Delft
C       tel.:  015-123359 (privé)
C              015-783255 (TUD)
C
C
C       1.  DOEL
C
C       Numerieke simulatie van wervelafschudding met de Cloud-In-Cell
C       methode voor een vormvaste bodemribbel onder golven.
C       In het programma dat gebaseerd is op de theorie zoals beschreven
C       in het rapport van de auteur, zijn enige belangrijke trefwoorden:
C
C       Poisson-vergelijking,  wervelsterkte,  deeltjessnelheden, eerste-
C       orde benadering van de deeltjessnelheid, theorema van Stokes,
C       rotatie, puntwervelsterkte, grenslagen,  loslaatpunt,
C       periodiciteit, convectie , diffusie , Cloud In Cell methode
C
C       2.  METHODE
C
C       Centrale differenties voor de Poissonvergelijking
C       Bepaling snelheden in rasterpunten middels centrale differenties
C       O(dx²) nauwkeurig.
C       Bepaling snelheden van de deeltjes met een eerste-orde benadering
C       O(dx) nauwkeurig.
C       De circulatie die wordt toegekend aan een puntwervel werd in
C       eerste instantie verkregen door de rotatie te nemen over het
C       snelheidsveld ter plaatse van het bekende loslaatpunt (= top van
C       de ribbel.). Na enige testberekeningen te hebben gemaakt, werd
C       duidelijk dat deze methode niet nauwkeurig genoeg was. De circu-
C       latie die aan een puntwervel wordt toegekend, wordt bepaald door
C       de kringintegraal te nemen over een gebied dat het loslaatpunt
C       insluit.
C       De nieuwe positie van een deeltje wordt bepaald door convectieve
C       verplaatsing en een diffuse verplaatsing.
C       Uit nieuwe positie van een deeltje wordt de circulatie van een
C       puntwervel bilineair teruggehaald naar de rasterpunten middels
C       de Cloud In Cell methode zodat de bijdrage wordt gevonden aan de
C       wervelsterkte in dit knooppunt. Met deze nieuwe waarde voor de
C       wervelsterkte in de knooppunten wordt de Poissonvergelijking
C       opnieuw opgelost.
C
```

```
C     3.  ARGUMENT LIST
C
C     4.  COMMON
C
C         Er wordt geen gebruik gemaakt van commonfiles.
C
C     5.  SUBPROGRAMMA'S
C
C     Van de volgende subprogramma's wordt gebruik gemaakt:
C
C     - VORTEX.INV  (in deze file staan de invoergegevens)
C     - PLOT.O  (in deze subroutine worden de coordinaten bepaald voor
C               de isolijnen. De coordinaten worden in de vorm van een
C               HPGL-file weggeschreven in de file isoplot.81. Deze
C               data-file kan worden aangeboden aan het programma
C               printgl.exe, waarmee de isolijnen op het scherm zijn
C               te brengen.
C
C     6.  COMPUTER INFORMATIE
C
C     FORTRAN 77
C
C     7.  FOUTMELDINGEN
C
C     Verondersteld wordt dat de gebruiker op de hoogte is van het
C     eindrapport en als zodanig op de hoogte is van de waarden die
C     ingevoerd dienen te worden in de invoerfile.
C
C     8.  PRINT
C
C     De uitvoer naar de printer is indirect geregeld. In de invoer-
C     file kan worden opgegegeven of de uitvoer moet worden wegge-
C     schreven naar een file. Via de file kan met het commando
C     (print ****.** ) bepaald worden of de data naar de printer
C     wordt gestuurd.
C     De volgende uitvoer is mogelijk:
C     - NESWM   print van ingevoerde coefficienten voor POISSON-
C               solver (AN, AE, AS, AW, AM, RR, OMEGA)
C     - SOL2D   uitvoer van PSI in de rasterpunten na oplossen van
C               POISSON-solver
C     - SOLVEL  uitvoer van de snelheden (U,V) in de rasterpunten
C     - RESULT  uitvoer van alle van belangzijnde parameters:
C               knooppunten, PSI, U, V, OMEGA en van de deeltjes het
C               nummer X, Y, U, V, T en de tijdstap DELTAT.
C
C     9.  OPMERKINGEN
C
C     - De volgende files worden aangemaakt en weggeschreven:
C
C     FILE1 = 'vortex3.inv'  UNIT = 90
C     FILE2 = 'neswm'        UNIT = 100
C     FILE3 = 'sol2d'        UNIT = 80
C     FILE4 = 'solvel'       UNIT = 110
C     FILE6 = 'result'       UNIT = 130
C     FILE7 = 'isoplot.81'   UNIT = 81
C     FILE8 = 'isoplot.82'   UNIT = 82
```

```
C     FILE9 = 'pointsn.n'    UNIT = 140
C     isoplot.81      Geeft data-uitvoer voor tekenen van isolijnen
C                     met printgl.exe.
C     isoplot.82      Geeft data-uitvoer naar plotter.
C     POINTSn.n    Uitvoer voor de plotfile
C
C     10.  STRUCTUUR
C
C
C     ------------------------------------------------------------------
C     | INVOER (invoer van parameters in file VORTEX.INV .)            |
C     |----------------------------------------------------------------|
C     | TESTIN (testen van de invoer, array's op nul zetten e.d.)      |
C     |----------------------------------------------------------------|
C     |     T < totale rekentijd en aantal deeltjes < maximum aantal   |
C     |     ------------------------------------------------------------|
C     |     | NESWM  (initialiseren van de knooppunten van het reken-  |
C     |     |         molecuul (AM, AE, AS, AW, AM en RR), bepaling    |
C     |     |         I_J van de bodemribbel.)                         |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | SOL2D  (Oplossen van Poisson-vergelijking via Alterna-   |
C     |     |         ting Direction Elimination : bepaald wordt       |
C     |     |         de wervelsterkte PSI in de knooppunten.)         |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | PLOTP  (Schrijft de PSI weg naar plotfile zodat isolijn  |
C     |     |         plaatje gemaakt kan worden.)                     |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | POINTS (Schrijft numerieke resultaten over de wervel-    |
C     |     |         deeltjes weg (X, Y, U, V, GAMMA) en bodemribbel) |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | SOLVEL (Bepaling van de snelheden in de knooppunten met  |
C     |     |         behulp van centrale differenties.)               |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | TIJDST (Bepaling van de minimale tijdstap uitgaande van  |
C     |     |         op t = 0 de snelheid u en v in het gebied, later |
C     |     |         de snelheid van de deeltjes.)                    |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | INITOM (Bepaling wervelsterkte voor een werveldeeltje    |
C     |     |         via de stelling van Stokes. Tevens wordt hier de |
C     |     |         plaats (X,Y) en de het tijdstip van loslaten (t) |
C     |     |         in array's opgeslagen.)                          |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | VELCEL (Bepaling van de snelheid van een werveldeeltje   |
C     |     |         door een eerste orde benadering van PSI in om-   |
C     |     |         liggende punten. Met deze eerste orde benadering |
C     |     |         gaat een deeltje niet door de wand als het getal |
C     |     |         van Courant kleiner is dan 1/2. Nauwkeurigheid   |
C     |     |         is O( dx ).)                                     |
C     |     |----------------------------------------------------------|
C     |     | HERVEL (Zelfde principe als VELCEL echter met een tweede |
C     |     |         orde benadering voor de snelheid. Er treden bij  |
C     |     |         deze methode echter problemen op bij de          |
C     |     |         randen, (deeltjes kunnen rand passeren). De be-  |
C     |     |         paling van U en V is O(dx²) nauwkeurig.)         |
C     |     |         Deze subroutine wordt beschreven in de Cloud in  |
C     |     |         Cell theorie.                                    |
```

```
C        Voor de situatie met de bodemribbel gaf de
C        centrale differentie voor u en v problemen op de
C        rand. De subroutine wordt niet aangeroepen en
C        wordt ook niet uit het programma verwijderd
C        omdat voor een andere geometrie deze methode wel
C        geschikt is en een nauwkeuriger resultaat geeft)
C
C RESULT (In deze routine worden alle van belang zijnde
C        numerieke resultaten weggeschreven zoals: U(I_J)
C        V(I_J),PSI en OMEGA in de knooppunten en DELTAT
C        GAMMAX(P),GAMMAY(P),GAMMA(P),GAMMAU(P) GAMMAV(P)
C        voor de deeltjes en de rekentijd T.)
C
C voor deeltje 1 tot totaal aantal werveldeeltjes
C
C        STOCH  (Bepaling van  UNIFORME of GAUSSISCHE
C                verdeling met gemiddelde gelijk aan 0
C                (E(x) = 0) en variantie gelijk aan 1.)
C                Via verdeling kan diffuse verplaatsing
C                van deeltje bepaald worden.)
C
C        UPDATE (Updaten van een deeltje, Nieuwe plaats
C                van een deeltje wordt bepaald door
C                oude plaats + convectieve verplaatsing
C                (u.dt) + diffuse verplaatsing
C                (sqrt(2. nu. dt) W(t)) voor een
C                Gaussische verdeling. W(t)= stachast
C
C PERIOD (Het model voor de bodemribbel is periodiek. Een
C        werveldeeltje dat over de rechter of linkerrand
C        gaat wordt aan de andere kant gepositioneerd.
C        Deeltjes die de rand aan de bovenzijde verlaten
C        worden uit de array gehaald. Wanneer met diffu-
C        sie wordt gerekend, dan worden de deeltjes die
C        door de diffuse verplaatsing over de rand gaan
C        gereflecteerd.)
C
C CLUST  (Bij grote berekeningen (bij veel werveldeeltjes)
C        is het handig om werveldeeltjes op grensvlakken
C        (pos. en neg. deeltjes) te clusteren zodat het
C        grensvlak tussen de wervelstructuren meer zicht-
C        baar wordt. Het clusteren van werveldeeltjes met
C        een gelijk teken heeft geen significant
C        verbeterend effect op het beeld.)
C
C HEROME (Uitgaande van de nieuwe positie van de deeltjes
C        na UPDATE, PERIOD en CLUST kan de bijdrage van
C        de puntwervels aan de ratserpunten met wervel-
C        sterkte worden bepaald via bi-lineaire interpo-
C        latie.Deze methode wordt de Cloud In Cell metho-
C        de genoemd. De bijdrage van de puntwervels aan
C        wervelsterkte in de knooppunten zijn de beginvw.
C        voor het opnieuw oplossen van de POISSON verg.)
C
C EINDE VAN DE BEREKENING
C
```

```
C
CC*********************************************************************
C
C     Uitvoering van de methode Cloud In Cell voor beschreven gebied:
C     Het rechthoekige gebied is opgebouwd uit elementen. De randvoorwaar
C     den zijn als volgt:
C     - bovenrand  rvw: PSI= (m-1)*deltay*U1*COS (TETHA * T - TETHA0)
C     - onderrand  rvw: PSI = constant = 0
C     - PSI_rechterrand = PSI_linkerrand
C
C       Het model is periodiek in x-richting. Dit betekent dat er geen
C       harde randvoorwaarden aan de linker en rechterrand worden opge-
C       geven. De verdeling van de PSI in de ruimte wordt dus bepaald
C       door enkel de randvoorwaarden aan de bovenrand en de onderrand.
C
C       Plaatsbepaling van rasterpunten en deeltjes door:
C       I,J   coordinaten van de punten van het raster. Deze worden
C             ingelezen in de array's A(I,J) met dus een vast aantal
C             roosterpunten (N*M)
C       X,Y   coordinaten van de deeltjes die losgelaten worden ter
C             plaatse van de top van de ribbel. Deeltjes worden inge-
C             lezen in de array GAMMAX() en GAMMAY(). Het maximum
C             aantal deeltjes is TOTALW en wordt ingevoerd in de
C             invoerfile VORTEX.INV
C
C     De oplosmethode wordt hieronder in het kort weergegeven:
C     - over rekengebied wordt een 'fictief' raster gelegd met cellen
C       met zijdelengten DELTAX en DELTAY
C     - totaal aantal punten in x-richting is N
C                              y-richting is M
C     - met bovenstaande kan de vergelijking( B x PSI(I_J)+OMEGA(I_J)) = 0
C       worden opgelost via een een Poisson-solver.
C       De solver geeft de variabele PSI(I_J) als uitvoer.
C       De wervelsterkte OMEGA initieel bedraagt 0. In de loop van
C       de berekening wordt wervelsterkte toegevoegd aan de veld door
C       discrete puntwervels ter plaatse van de top van de bodemribbels
C       los te laten.
C     - Bepaling van de initiële wervelsterkte ter plaatse van het los
C       laatpunt en de positie van een werveldeeltje:
C       - Met de PSI(I_J) uit de solver kunnen de snelheden (U(I_J) en
C         V(I_J) ) in de knooppunten worden uitgerekend middels
C         centrale differenties.
C       - Met deze snelheden is de "rotatie" te bepalen ter plaatse
C         van het loslaatpunt, de top van de bodemribbel. Een aantal
C         mogelijkheden zijn getest waarbij het bepalen van de circula-
C         tie met behulp van het theorema van Stokes, via de kring-
C         integraal over de rand van het gebied, de beste resultaten
C         gaf.
C         Voor de beschrijving van de bepaling van de puntwervelsterkte
C         wordt verwezen naar het rapport.
C       - Wanneer de circulatie bepaald is kan het deeltje discreet in
C         het stroomveld worden gezet op positie GAMMAX(), GAMMAY() en
C         op tijdstip GAMMAT().
C         Het deeltje heeft een puntwervelsterkte van GAMMA().
C     - De snelheid van het werveldeeltje GAMMAU() en GAMMAV() wordt
C       verkregen door de eerste afgeleide te nemen van de stroomfunctie
```

```
C       PSI in de omliggende rasterpunten en deze via een gewogen
C       verdeling over te brengen naar een deeltje.(zie tekst bij de
C       subroutine VELCEL)
C     - Uitgaande van de snelheid van het deeltje kan de nieuwe positie
C       worden bepaald middels de relatie:
C
C       Wanneer een GAUSSISCHE-verdeling voor de diffusie wordt genomen:
C
C       x(t+dt) = x(t) + u(t)*dt + sqrt( 2 . nu . dt) . W(t)
C       y(t+dt) = y(t) + v(t)*dt + sqrt( 2 . nu . dt) . W(t)
C
C       W(t) :  E(x) = 0 en variantie = 1 op [-∞ , +∞]
C
C       Wanneer een UNIFORME-verdeling voor de diffusie wordt genomen:
C
C       x(t+dt) = x(t) + u(t)*dt + sqrt( 6 . nu . dt) . W(t)
C       y(t+dt) = y(t) + v(t)*dt + sqrt( 6 . nu . dt) . W(t)
C
C       W(t) ¦  E(x) = 0 en variantie = 1/3 op [-1, +1]
C
C       Voor de theorie over de verplaatsing van een deeltje door
C       diffusie wordt verwezen naar het rapport.
C     - De tijdstap t wordt bepaald door het getal van Courant uit te
C       rekenen. De maximale tijdstap wordt bepaald door het maximum
C       te nemen van (DELTAX of DELTAY) gedeeld door de grootste
C       snelheid (U of V) van een werveldeeltje. initieel bevinden
C       zich nul deeltjes in het veld en bedraagt de snelheid in het
C       veld eveneens nul. Op dat moment wordt uitgegaan van een
C       tijdstap gegeven bij een Courantgetal van één bepaald door de
C       randvoorwaarde aan de bovenrand.
C     - Uit de nieuwe positie van de puntwervel kan de wervelsterkte
C       via een gewogen verdeling over een cel (de Cloud in Cell-
C       methode) teruggehaald worden naar de knooppunten.
C     - De nieuwe waarden van de de wervelsterkte in de knooppunten
C       OMEGA(I_J) is de nieuwe waarde voor de POISSON-vergelijking
C     - De POISSON vergelijking kan opgelost worden waarna het proces
C       zich weer herhaald.
C     - Bij de volgende tijdstap wordt er weer een deeltje losgelaten
C       ter plaatse van het loslaatpunt van de ribbels.
C
C
C*********************************************************************
C
C PARAMETERS IN HET GEHELE PROGRAMMA:
C
C  F        character    Waarde voor de file's
C  T        character    Waarde voor de tekst
C
C  PSI      real array   Vector met waarde voor PSI in punt I_J
C  OMEGA    real array   Vector met waarde voor OMEGA in punt I_J
C  AM       real array   Vector met de waarde voor de hoofddiagonaal
C  AN       real array   Vector met de waarden voor North-knoop
C  AE       real array   Vector met de waarden voor East-knoop
C  AS       real array   Vector met de waarden voor South-knoop
C  AW       real array   Vector met de waarden voor West-knoop
C  RR       real array   Vector met bekende waarden (OMEGA en restterm)
```

```
C  FF        real array   Vector met de waarden van PSI uit SOL2D.FOR
C  AD        real array   Hoofddiagonaal in eliminatieprocedure
C  AL        real array   Onderdiagonaal in eliminatieprocedure
C  AU        real array   Bovendiagonaal in eliminatieprocedure
C  B         real array   Vector met bekende termen
C  X         real array   Vector met onbekenden, invoer: eerste benadering
C                         uitvoer: resultaat van berekening
C  U         real array   Vector van snelheid in x-richting in punt I-J
C  V         real array   Vector van snelheid in y-richting in punt I_J
C  GAMMA     real array   Array met de waarde voor de wervelsterkte in
C                         het punt x,y
C  GAMMAX    real array   X-coordinaat van werveldeeltje
C  GAMMAY    real array   Y-coordinaat van werveldeeltje
C  GAMMAU    real array   Snelheid in x-richting van een deeltje
C  GAMMAV    real array   Snelheid in y-richting van een deeltje
C  GAMMAT    real array   Tijdstip waarop een deeltje wordt losgelaten
C  A1        real array   Oppervlakte rechtsboven in cel ingesloten door
C                         een werveldeeltje
C  A2        real array   Oppervlakte linksboven in cel ingesloten door
C                         een werveldeeltje
C  A3        real array   Oppervlakte rechtsonder in cel ingesloten door
C                         een werveldeeltje
C  A4        real array   Oppervlakte linksonder in cel ingesloten door
C                         een werveldeeltje
C  WERVEL     integer     Teller voor het aantal werveldeeltjes dat
C                         wordt losgelaten en zich in het rekengebied
C                         bevindt.
C  HULPX      integer     Geeft aan bij welke rasterlijn de wervel zich
C                         bevindt in x-richting
C  HULPY      integer     Geeft aan bij welke rasterlijn de wervel zich
C                         bevindt in y-richting
C  OMRT       real        Bijdrage van 'righttop' bij herverdeling
C  OMLT       real        Bijdrage van 'lefttop' bij herverdeling
C  OMRB       real        Bijdrage van 'rightbottom' bij herverdeling
C  OMLB       real        Bijdrage van 'rightbottom' bij herverdeling
C  POSX       real        X-Coordinaat van een rasterlijn (I)
C  POSY       real        Y-coordinaat van een rasterlijn (J)
C  NX         integer     Aantal punten in x-richt. in SOL2D
C  NY         integer     Aantal punten in y-richt. in SOL2D
C  NITER      integer     Aantal iteraties
C  DELTAX     real        Grootte van de stap in x-richting
C  DELTAY     real        Grootte van de stap in x-richting
C  DELTAU     real        Snelheidsverschil in x-richting over 2 DELTAX
C  DELTAV     real        Snelheidsverschil in y-richting over 2 DELTAY
C  N          integer     Maximum aantal punten in x-richting
C  M          integer     Maximum aantal punten in y-richting
C  I_J        integer     Teller van de punten in het binnengebied
C                         waarde  I_J = I + (J - 1)* N
C  U1         real        Snelheid [m/s] aan de bovenrand van de
C                         oscillerende beweging
C  FACIT      real        Mate van verdeling binnen matrix bij oplossen
C                         waarde:  0.5 <= FACIT  <= 1
C                         Bij het oplossen van de POISSON-vergelijking
C                         wordt de FACIT op 0.99 gezet. Een kleinere
C                         waarde heeft instabiliteit tot gevolg.
C  MXITER     integer     Aantal uit te voeren iteraties
```

```
C                                stationaire stroming MXITER (50-500)
C  HLPITR     integer            Initieel wordt gewerkt met MXITER. Na de
C                                eerste iteratiestap kan de MXITER kleiner
C                                worden genomen
C                                niet stationaire stroming MXITER (50-150)
C  NMMAX      parameter          Maximale dimensie van de array's
C  OMMAX      parameter          Maximaal aantal deeltjes die los worden gelaten
C  STPSI      integer            Aantal isolijnen dat getekend moet worden
C  PSTEP      real               Stapgrootte voor de plot met PSI volgend uit
C                                STPSI
C  T          real               Totale rekentijd
C  P          integer            Teller van de deeltjes voor de array's
C                                GAMMA(P), GAMMAX(P) en GAMMAY(P)
C  PLTPSI     integer            Bepaalt of er geplot moet worden
C  PLTPSn     integer            Bepaalt bij welke werveldeeltjes data moet
C                                worden weggeschreven opdat plot van PSI kan
C                                worden gemaakt
C  PRTS2D     integer            Bepaalt of data moet worden weggeschreven naar
C                                'sol2d'
C  PRTVEL     integer            Bepaalt of data moet worden weggeschreven naar
C                                'solvel'
C  PRTRSL     integer            Bepaalt of data moet worden weggeschreven naar
C                                'result'
C  PTNESW     integer            Bepaalt of data moet worden weggeschreven naar
C                                'neswm'
C  U1,U2      real               Aangemaakte random waarde (uniforme verdeling)
C  W1,W2      real               Stochastische variabele uniform verdeeld.
C  REDDT      real               Reductie op tijdstapgrootte DELTAT. Is equi-
C                                valent aan het verlagen van het "COURANT"getal
C                                Van belang voor de plotuitvoer. Bij het ophO-
C                                gen van REDDT wordt de puntenintensiteit op
C                                het scherm groter.
C  NUTURB     real               Turbulente kinematische viscositeit
C  GAMFAC     real               Correctiefactor voor de wervelsterkte, behoort
C                                op 1 te staan
C  PPOINT     integer            Komt in logical expressie : moet data van de
C                                werveldeeltjes worden weggeschreven naar de
C                                harde schijf.
C  HLPTEL      integer           Hulpteller voor de totale hoeveelheid deeltjes
C                                De deeltjes onder de teller WERVEL zijn niet
C                                constant omdat er deeltjes worden opgevangen
C                                en dus varieert de teller WERVEL.
C
C  IGAMMA       integer          Dichtsbijzijnde rasterwaarde I voor de GAMMAX
C  JGAMMA       integer          Dichtsbijzijnde rasterwaarde J voor de GAMMAY
C  LRIB         real             Lengte van de bodemribbel
C  HRIB         real             Hoogte van de bodemribbel
C  PRIB         real             Waarde voor het polygon
C  PI           real             3.141592654
C  XRIB,YRIB    real             Coordinaten van de punten op de ribbel
C  XORIB,YORIB  real             Tussencoordinaten van de ribbel (heeft te
C                                maken met de vorm van de ribbel en singula-
C                                riteit van de formules voor de bodemribbel.
C  XO,YO                         Begincoordinaten van de ribbeltop.
C  ALPHA        real             Hoek die de top van de bodemribbel maakt met
C                                het horizontale vlak
```

```
C  KRIB        real      Golfgetal van de bodemribbel
C  TETHA        real      Periode van de waterbeweging
C  TETHA0       real      Faseverschuiving van de waterbeweging
C  CLUST        real      bepalen of deeltjes moeten worden geclusterd
C  GAUS         integer   bepaling of de verdeling bij de diffuse ver-
C                         plaatsing Gaussisch of Uniform verdeeld moet
C                         zijn
C  ST1,ST2      real      Breedte van het invloedsgebied (gekarakteri-
C                         seerd door een GAUSS-curve) welke de diffusie
C                         ten gevolge viscositeit van een puntwervel
C                         weergeeft. deze waarde geeft een soort 'cut
C                         off length' welke van belang is bij het
C                         clusteren van de puntwervels.
C  R1,R2        real      Straal van een deeltje in cartesisch assen-
C                         stelsel (sqrt (x² + y² ))
C  EPSIL        real      "Cluster"viscositeit is een maat waarmee de
C                         breedte van de band van het invloedsgebied
C                         van een puntwervel in de tijd toeneemt.
C
C*********************************************************************
C
C     FILE1 = 'vortex.inv'   UNIT = 90
C     FILE2 = 'neswm'        UNIT = 100
C     FILE3 = 'sol2d'        UNIT = 80
C     FILE4 = 'solvel'       UNIT = 110
C     FILE6 = 'result'       UNIT = 130
C     FILE7 = 'isoplot.81'   UNIT = 81
C     FILE8 = 'isoplot.82'   UNIT = 82
C     FILE9 = 'points3.n'    UNIT = 140
C
C*********************************************************************
C
C      HOOFDPROGRAMMA:
C
C*********************************************************************
C
      IMPLICIT CHARACTER*45 (F,T)
C
      INTEGER        N      ,M      ,MXITER,NMMAX ,OMMAX ,
     *               STPSI  ,WERVEL,TOTALW,PLTPSI,PRTS2D,PRTVEL,PRTRSL,
     *               PTNESW,PPOINT,SEED   ,HLPTEL,HLPITR,HULPI1,HULPJ1,
     *               GAUS
C
      REAL           DELTAX,DELTAY,FACIT ,U1     ,GAMFAC,PSI_BT,PSI_TP,
     *               PSTEP ,DELTAT,TOTALT,T      ,REDDT ,NUTURB,LRIB  ,
     *               PRIB  ,HRIB  ,TETHA ,PI     ,ALPHA ,EPSIL ,TDPLT ,
     *               TIJD  ,TETHA0
C
      PARAMETER      (NMMAX = 40000 )
      PARAMETER      (OMMAX = 40000 )
      PARAMETER      (PI    = 3.141592654)
C     1-dimensionale array's
      REAL           AN(NMMAX) ,AE(NMMAX) ,AS(NMMAX)     ,AW(NMMAX)     ,
     *               AM(NMMAX) ,RR(NMMAX) ,PSI(NMMAX)    ,H1(NMMAX)     ,
     *               H2(NMMAX) ,H3(NMMAX) ,H4(NMMAX)     ,OMEGA(NMMAX) ,
     *               U(NMMAX)  ,V(NMMAX)  ,START(NMMAX)
```

```
C
      REAL            GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX), GAMMA(OMMAX) ,
     *                GAMMAU(OMMAX), GAMMAV(OMMAX), GAMMAT(OMMAX)
C
C*********************************************************************
C
C     Initialiseren van waarden
C
      WERVEL = 0
      HLPTEL = 0
      T = 0.
      TIJD   = 0.
      DELTAT = 0.
      SEED = 0
C
C     INVOER bevat de invoerwaarden
C
      CALL INVOER ( N      ,M      ,EPSIL ,TOTALT,TOTALW,TETHA0,
     *              LRIB   ,PRIB   ,MXITER,FACIT ,U1     ,HLPITR,
     *              PLTPSI,STPSI  ,PRTS2D,PRTVEL,PRTRSL,PTNESW,
     *              REDDT  ,NUTURB,GAMFAC,PPOINT,TDPLT ,TETHA  ,
     *              GAUS )
C
C     Waarde in radialen van de halve tophoek van de bodemribbel.
C
      ALPHA =( ( PI - ((2 * PI) / PRIB) ) / 2 )
C
C     TESTIN test de invoer op fouten en zet array's op 0.
C
      CALL TESTIN ( N      ,M      ,NMMAX ,OMEGA ,OMMAX ,GAMMAX,
     *              GAMMAY,GAMMAU,GAMMAV,GAMMAT,GAMMA)
C
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) 'De berekening wordt uitgevoerd'
C
C     Bepaling van DELTAX en DELTAY (DELTAY hoeft niet gelijk te zijn
C     aan DELTAX)
C
      DELTAX = LRIB /REAL(N-1)
      DELTAY = DELTAX
C
50    IF (T .LT. TOTALT) THEN
         T = T + DELTAT
         IF (WERVEL .GT. TOTALW ) THEN
             WRITE(*,*) 'Er zijn te weinig deeltjes in de array'
             WRITE(*,*) 'om tot de gestelde eindtijd te rekenen'
             GOTO 100
         END IF
C
C        NESWM bepaalt de coefficienten voor de punten van het
C        rekenmolecuul.In de subroutine worden de randvoorwaarden
C        ingevoerd voor een oscillerende waterbeweging.
C
         CALL NESWM (AN    ,AE    ,AS    ,AW    ,AM    ,RR    ,
     *               OMEGA ,N     ,M     ,DELTAX,DELTAY,LRIB  ,
     *               PRIB  ,U1    ,NMMAX ,PSI_BT,PSI_TP,PTNESW,
```

```
     *                HRIB   ,T      ,TETHA ,TETHA0,PI     ,HULPI1,
     *                HULPJ1 )
C
C         SOL2D lost de Poissonvergelijking op via een iteratief
C         proces
C
          IF (WERVEL .GT. 0) MXITER = HLPITR
          CALL SOL2D  (AM     ,AN     ,AE     ,AS     ,AW     ,RR     ,
     *                 PSI    ,N      ,M      ,MXITER,FACIT ,H1     ,
     *                 H2     ,H3     ,H4     ,PRTS2D)
C         Bepalen wanneer er geplot moet worden (op welk tijdstip)
C
          IF (T .GE. TIJD .AND. PLTPSI .EQ. 1) THEN
             CALL PLOTP( N      ,M      ,WERVEL,PSI_TP,PSI_BT,PSTEP ,
     *                   STPSI ,PSI    ,DELTAX,DELTAY,NMMAX ,START)
          END IF
C
C         POINTS geeft de coordinaten door naar file points3.n voor
C         het plotten van punten op het beeldscherm van een PC met
C         een eveneens door de auteur geschreven plotprogramma.
C
          IF (T .GE. TIJD .AND. PPOINT .EQ. 1) THEN
          CALL POINTS ( OMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL,T      ,M      ,
     *                  N     ,DELTAX,DELTAY,TOTALW,LRIB   ,PRIB   ,
     *                  U1    ,REDDT ,NUTURB,GAMFAC,GAMMA ,TDPLT ,
     *                  TETHA ,TETHA0,ALPHA ,EPSIL ,TOTALT)
C
            WRITE(*,39) TIJD
39          FORMAT(' wegschrijven data bij rekentijd ',F8.3)
          ELSE
            WRITE(*,40) WERVEL,T,DELTAT
40          FORMAT(' werveldeeltjenr.',I6,'  totale rekentijd',F8.5,
     *            '  dt',F8.6)
          END IF
          WRITE(*,*) DELTAX
C
C         SOLVEL bepaalt de snelheid U en V uit de stroomfunctie
C
          CALL SOLVEL ( N      ,M      ,DELTAX,DELTAY,PSI    ,U      ,
     *                  V      ,NMMAX ,PRTVEL )
C
C         DELTAT bepaalt de maximale tijdstap die genomen wordt voor
C         het updaten van een deeltje uitgaan van :
C         MAX ( U(I_J), V(I_J), GAMMAU(P), GAMMAV(P), U1) waarbij
C         het getal van Courant kleiner is dan 1/2
C
          CALL TIJDST ( N      ,M      ,OMMAX ,NMMAX ,U      ,V      ,
     *                  GAMMAU,GAMMAV,DELTAX,DELTAY,DELTAT,WERVEL,
     *                  REDDT ,U1 )
C
C         Initiele toestand is nu berekend zonder de werveldeeltjes.
C         De snelheden zijn bekend en de circulatie of wervelsterkte
C         vermenigvuldigd met een oppervlaktemaat, kan worden
C         toegekend aan een puntwervel ter plaatse van het loslaatpunt
C         van de bodemribbel. Dit proces wordt beschreven in INITOM
C
```

```
      HLPTEL = HLPTEL + 1
      WERVEL = WERVEL + 1
      CALL INITOM ( N      ,LRIB   ,HRIB   ,GAMMA  ,OMMAX  ,DELTAX,
     *              DELTAY,NMMAX  ,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL,GAMFAC,
     *              U      ,V      ,DELTAT,GAMMAT,T      ,HULPI1,
     *              HULPJ1,M )
C
C     VELCEL bepaald de snelheden van de deeltjes door uit te
C     gaan van de PSI in de knooppunten in plaats van de snel-
C     heden in de knooppunten.
C
      CALL VELCEL ( N      ,NMMAX  ,OMMAX  ,DELTAX,DELTAY,GAMMAU,
     *              GAMMAV,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL,PSI )
C
C     HERVEL bepaalt de snelheid van deeltje via gewogen middeling
C     van de snelheden in de knoopunten. Bij de geometrie van de
C     bodemribbel voldoet deze routine niet. De snelheden worden
C     zodanig uitgerekend dat deeltjes die dicht bij de rand zitten,
C     de rand over kunnen gaan. De bepaling van de snelheden is
C     echter wel O(dx²) nauwkeurig. Deze subroutine kan wel goed
C     gebruikt worden voor ander situaties (horizontale plaat).
C
C     CALL HERVEL ( N      ,NMMAX  ,OMMAX  ,U      ,V      ,DELTAX,
C    *              DELTAY,GAMMAU,GAMMAV,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL )
C
C     RESULT schrijft het merendeel weg van de resultaten waar-
C     onder de waarden in de rasterpunten, alsmede karakteristieke
C     waarden van de deeltjes
C
      IF (T .GE. TIJD .AND. PRTRSL .EQ. 1) THEN
        CALL RESULT ( N      ,M      ,NMMAX  ,OMMAX  ,U      ,V      ,
     *                OMEGA  ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMA  ,PSI    ,WERVEL,
     *                GAMMAU,GAMMAV,T      ,DELTAT)
      END IF
C
C     UPDATE bepaalt de nieuwe positie van een deeltje
C
      CALL UPDATE ( OMMAX  ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMAU,GAMMAV,DELTAT,
     *              WERVEL,NUTURB,SEED   ,DELTAX,DELTAY,GAUS   )
C
C     PERIOD plaatst de deeltjes die het gebied rechts verlaten
C     op de linkerrand en vice versa.
C     Deeltjes die de bovenrand verlaten worden uit de array
C     gehaald. Deeltjes die over de rand van de bodemribbel gaan in
C     een visceuze stroming ten gevolge van een diffuse verplaatsing
C     worden weer in het gebied geplaatst ter hoogte van de grens-
C     laag.
C
      CALL PERIOD  ( N      ,M      ,OMMAX  ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMA,
     *               GAMMAT,DELTAX,DELTAY,WERVEL,PI     ,PRIB ,
     *               LRIB )
C
C     CLUST bepaald of de afstand tussen de puntwervels niet te
C     klein wordt. Als dit het geval is worden twee puntwervels
C     samengevoegd tot een puntwervel met een nieuwe waarde
C     voor de circulatie (GAMMA(P), positie (GAMMAX(P),GAMMAY(P) en
```

```
C         tijd GAMMAT(P).
C
          CALL CLUST  ( OMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMA ,GAMMAT,WERVEL,
     *                  T     ,EPSIL ,REDDT ,DELTAX,LRIB )
C
C         HEROME bepaalt uitgaande van nieuwe positie van de deeltjes
C         de herverdeling van de circulatie van de puntwervels naar de
C         wervelsterkte in de knooppunten
C
          CALL HEROME ( N     ,NMMAX ,OMMAX ,OMEGA ,GAMMAX,GAMMAY,
     *                  GAMMA ,DELTAX,DELTAY,WERVEL )
      ELSE
        WRITE(*,*) ' Einde van de berekening. De tijd is groter'
        WRITE(*,*) ' geworden dan opgegeven tijd'
        GOTO 100
      END IF
      IF (T .GE. TIJD ) TIJD = TIJD + TDPLT
      GOTO 50
C
100   CONTINUE
      WRITE(*,*) 'EINDE VAN BEREKENING'
C
C     sluiten van POINTS3.N
      CLOSE (UNIT = 140)
c
C     sluiten van PLOT.81
      CLOSE (UNIT = 81)
c
C     sluiten van PLOT.82

      CLOSE (UNIT = 82)

      END
C*********************************************************************
C
C      EINDE VAN HET HOOFDPROGRAMMA
C
C*********************************************************************
C
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                         C
C     inlezen van de datafile met invoergegevens                          C
C                                                                         C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE INVOER ( N     ,M     ,EPSIL ,TOTALT,TOTALW,TETHA0,
     *                    LRIB  ,PRIB  ,MXITER,FACIT ,U1    ,HLPITR,
     *                    PLTPSI,STPSI ,PRTS2D,PRTVEL,PRTRSL,PTNESW,
     *                    REDDT ,NUTURB,GAMFAC,PPOINT,TDPLT ,TETHA ,
     *                    GAUS  )
C
      INTEGER                 N     ,M     ,TOTALW,MXITER,PLTPSI,
     *                        STPSI ,PRTS2D,PRTVEL,PRTRSL,PTNESW,
     *                        PPOINT,HLPITR,GAUS
```

```
      REAL                        FACIT ,U1     ,GAMFAC,TOTALT,REDDT ,
     *                            NUTURB,LRIB   ,PRIB   ,TDPLT ,TETHA ,
     *                            TETHA0
C
      CHARACTER*30                FILE1
      FILE1 = 'vortex3.inv'
C
      OPEN (UNIT=90, FILE= FILE1 )
      READ(90,*) N
      READ(90,*) M
      READ(90,*) TOTALT
      READ(90,*) TOTALW
      READ(90,*) LRIB
      READ(90,*) PRIB
      READ(90,*) MXITER
      READ(90,*) HLPITR
      READ(90,*) FACIT
      READ(90,*) U1
      READ(90,*) PLTPSI
      READ(90,*) STPSI
      READ(90,*) PRTS2D
      READ(90,*) PRTVEL
      READ(90,*) PRTRSL
      READ(90,*) PTNESW
      READ(90,*) REDDT
      READ(90,*) NUTURB
      READ(90,*) GAMFAC
      READ(90,*) PPOINT
      READ(90,*) TDPLT
      READ(90,*) TETHA
      READ(90,*) TETHA0
      READ(90,*) EPSIL
      READ(90,*) GAUS
C
      WRITE(*,10) N,M
      WRITE(*,12) TOTALT,TOTALW
      WRITE(*,13) LRIB,PRIB
      WRITE(*,14) MXITER,HLPITR,FACIT
      WRITE(*,15) U1
      WRITE(*,16) PLTPSI,STPSI
      WRITE(*,17) PRTS2D,PRTVEL,PRTRSL,PTNESW
      WRITE(*,18) REDDT
      WRITE(*,19) NUTURB
      WRITE(*,20) GAMFAC
      WRITE(*,21) PPOINT
      WRITE(*,22) TDPLT
      WRITE(*,23) TETHA
      WRITE(*,24) TETHA0
      WRITE(*,26) EPSIL
      WRITE(*,27) GAUS

10    FORMAT(' Aantal punten in x-richting [m]    (N)          :',I12/,
     *       ' Aantal punten in y-richting [m]    (M)          :',I12)
12    FORMAT(' Totaal door te rekenen tijd [sec] (TOTALT)      :',F12.3/,
     *       ' Maximum aantal deeltjes     [1]    (TOTALW)      :',I12)
13    FORMAT(' Lengte van de ribbel         [m]    (LRIB)        :',F12.3/,
```

```
     *        ' Waarde van het polygon         [1]    (PRIB)        :',F12.3)
14    FORMAT(' Aantal iteraties initieel      [1]    (MXITER)      :',I12/,
     *        ' Aantal iteraties na stap 1     [1]    (HLPITR)      :',I12/,
     *        ' Verdeling matrix               [1]    (FACIT)       :',F12.3)
15    FORMAT(' Snelheid in het gebied         [m/s]  (U1)          :',F12.3)
16    FORMAT(' Plotten van PSI (j=1, n=0)     [1]    (PLTPSI)      :',I12/,
     *        ' Aantal te tekenen isolijnen    [1]    (STPSI)       :',I12)
17    FORMAT(' Save data SOL2D bij PLTPSn    (j=1 n=0)             :',I12/,
     *        ' Save data SOLVEL bij PLTPSn   (j=1 n=0)             :',I12/,
     *        ' Save data RESULT bij PLTPSn   (j=1 n=0)             :',I12/,
     *        ' Save data NESWM bij PLTPSn    (j=1 n=0)             :',I12)
18    FORMAT(' Reductie op tijdstap (deeltjes per DELTAT )          :',F12.3)
19    FORMAT(' Kinematische viscositeit (1.E-6)      [m²/s]         :',F12.8)
20    FORMAT(' Correctiecoefficient voor wervelsterkte              :',F12.3)
21    FORMAT(' Save data,plot deeltjes om TELLER (j=1 n=0)          :',I12)
22    FORMAT(' Om de hoeveel seconden een plot      (TDPLT)         :',F12.5)
23    FORMAT(' Golfhoeksnelheid in rad. TETHA = (2*PI)/Tg)          :',F12.5)
24    FORMAT(' Faseverschuiving van de periode in rad.              :',F12.5)
26    FORMAT(' Clusterwaarde deeltjes (1.E-8)        [m²/sec]       :',F12.8)
27    FORMAT(' Diff.: Gaussische verd. [1], Uniform verd. [0]:',I12)
C
      CLOSE (UNIT=90)
      RETURN
C     end van subroutine invoer
      END
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                     C
C     SUBROUTINE  TESTIN                                              C
C     test van de invoer en initialiseren van de array's              C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE TESTIN ( N     ,M     ,NMMAX ,OMEGA ,OMMAX , GAMMAX,
     *                    GAMMAY,GAMMAU,GAMMAV,GAMMAT,GAMMA )
C
      INTEGER             N     ,M     ,P     ,I_J   ,NMMAX ,OMMAX
C
      REAL                OMEGA(NMMAX) ,GAMMAX(OMMAX),GAMMAY(OMMAX),
     *                    GAMMAU(OMMAX),GAMMAT(OMMAX),GAMMA(OMMAX) ,
     *                    GAMMAV(OMMAX)
C
C     Initialiseren van de array's (OMEGA en PSI) op nul
C
      DO 40 J = 1, M
        DO 30 I = 1, N
          I_J = I + (J - 1)*N
          OMEGA(I_J) = 0.
30      CONTINUE
40    CONTINUE
C
C     Initialiseren van de array's voor GAMMAX(P), GAMMAY(P), GAMMAU(P)
C     GAMMAV(P), GAMMAT(P), GAMMA(P) op nul
C
      DO 50 P = 1, OMMAX
         GAMMAX(P) = 0.
```

```
          GAMMAY(P) = 0.
          GAMMA(P) = 0.
          GAMMAT(P) =0.
          GAMMAU(P) =0.
          GAMMAV(P) =0.
50    CONTINUE
C
C     Check of raster van N*M punten de maximaal gedefinieerde array
C     niet overschreidt.
      NM = N*M
      IF (NM .GT. NMMAX) STOP 'NM > NMMAX'
C
C     END VAN SUBROTUINE TESTIN
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                     C
C                 SUBROUTINE  NESWM                                   C
C     inlezen van het gebied zodat de coefficienten voor de           C
C     subroutine bepaald zijn.                                        C
C                                                                     C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE NESWM (AN     ,AE     ,AS     ,AW     ,AM     ,RR     ,
     *                  OMEGA  ,N      ,M      ,DELTAX,DELTAY,LRIB   ,
     *                  PRIB   ,U1     ,NMMAX  ,PSI_BT,PSI_TP,PTNESW,
     *                  HRIB   ,T      ,TETHA  ,TETHA0,PI     ,HULPI1,
     *                  HULPJ1 )
C
      INTEGER           N      ,M      ,I_J    ,PTNESW,IRIB   ,JRIB   ,
     *                  I      ,J      ,J0RIB  ,NMMAX  ,TELLER,HULPI1,
     *                  HULPJ1
C
      REAL              DELTAX,DELTAY,U1     ,PSI_BT,PSI_TP,TETHA0,
     *                  LRIB   ,HRIB   ,XRIB   ,YRIB   ,PRIB   ,TETHA  ,
     *                  KRIB   ,X0RIB  ,Y0RIB  ,X      ,Y      ,A      ,
     *                  B      ,X0     ,Y0     ,T      ,PI
C
      REAL              AN(NMMAX) ,AE(NMMAX) ,AS(NMMAX) ,AW(NMMAX),
     *                  AM(NMMAX) ,RR(NMMAX) ,OMEGA(NMMAX)
C
C
      CHARACTER*30  FILE2
      FILE2 = 'neswm'
C
      HULPI1 = 0
      HULPJ1 = 0
      DELTAX = (LRIB)/REAL(N-1)
      DELTAY = DELTAX
C
      PSI_BT = 0.
      PSI_TP = ((M-1)* U1 * DELTAY ) * COS (TETHA * T - TETHA0)
      NM     = N*M
C
C     In de invoerfile wordt gevraagd om de waarde van DELTAX en
```

```
C     DELATY.Bij de bodemribbel wordt aan deze variabelen een
C     dusdanige waarde toegekend dat er precies één bodemribbel
C     in het opgegeven gebied past.
C     Zie voorbeeld Longuet-Higgings 1981
C
      DO 5 I = 1, N
         DO 4 J = 2, M-1
            I_J = (J-1)*N + I
            AN(I_J) = 1./(DELTAY**2)
            AE(I_J) = 1./(DELTAX**2)
            AS(I_J) = 1./(DELTAY**2)
            AW(I_J) = 1./(DELTAX**2)
            AM(I_J) = (-2./(DELTAX**2) - 2./(DELTAY**2))
            RR(I_J) = OMEGA(I_J)
4        CONTINUE
5     CONTINUE
C
C     Bepalen van de coeficienten op de bodemribbel en onder
C     de bodemribbel. De geometrie van de bodemribbel wordt berekend
C     aan de hand van ingevoerde waarde voor PRIB en LRIB
C
      KRIB = (2 * PI) / (PRIB * LRIB)
      B = 1./COS(PI / PRIB)
      HRIB = (PRIB * LRIB * LOG(B) )/(2*PI)
      X0RIB = 0.
      Y0RIB = 0.
      X0 = 0.
      Y0 = 0.
      JRIB = 1
      DO 20 TELLER = 0 , (N-1)
         X = (TELLER * DELTAX)
         Y = Y0 + (1/KRIB)* LOG( 1./COS(KRIB*(X-X0)) )
         XRIB = (X0RIB + X)
         YRIB = (Y0RIB + Y)
C
C       Omzetten van coordinaten naar rasterpunten. Bij de tellers
C       in x- en y-richting moet 1 worden opgeteld anders is JRIB
C       in eerste instantie gelijk aan 0
C
         J0RIB = JRIB
         IRIB = (NINT(XRIB/DELTAX) + 1)
         JRIB = (NINT(YRIB/DELTAY) + 1)
         IF ((JRIB - J0RIB) .GT. 1) THEN
           JRIB = (JRIB - 1)
           J0RIB = JRIB
         END IF
         IF ((J0RIB - JRIB) .GT. 1) THEN
           JRIB = (JRIB + 1)
           J0RIB = JRIB
         END IF
C
         IF (XRIB .GT. 0. .AND. JRIB .GT. HULPJ1 )THEN
            HULPI1 = IRIB
            HULPJ1 = JRIB
         END IF
C
```

```
C         Wegschrijven van de bodemcoordinaten voor het plotpro-
C         gramma
C         De punten die de bodem omlijnen worden weggeschreven on-
C         der de file XYRIBBEL
C
          I_J = (JRIB - 1)*N + IRIB
          OPEN (UNIT = 150,FILE ='xyribbel',STATUS = 'UNKNOWN')
          WRITE (150,*) ' I_J    XRIB   IRIB   YRIB    JRIB'
          WRITE (150,'(I6,F8.2,I4,F8.2,I4)') I_J,XRIB,IRIB,YRIB,JRIB
C
C         Uitschakelen van de punten onder de bodemribbel en toe
C         kennen van waarden voor NESWM op de ribbel
C         De kolommen worden leeg gemaakt.
C
          I = IRIB
          DO 10 J = JRIB, 1 , -1
            I_J = (J-1)*N + I
            AN(I_J) =0.
            AE(I_J) =0.
            AS(I_J) =0.
            AW(I_J) =0.
            AM(I_J) =-1.
            RR(I_J) =PSI_BT
10        CONTINUE
          IF (X .GE. (LRIB/2) )  X0 = LRIB
          A = ABS( KRIB * (X-X0))
          IF (A .GT. (PI/PRIB)) THEN
            WRITE(*,*) 'logaritme buiten bereik ribbel'
            STOP
          END IF
20      CONTINUE
C
C       coefficienten op de bovenrand J=M
C
        DO 60 I = 1, N
          J = M
          I_J = (J-1)*N +I
          AN(I_J) = 0.
          AE(I_J) =0.
          AS(I_J) =0.
          AW(I_J) =0.
          AM(I_J) =-1.
          RR(I_J) = PSI_TP
60      CONTINUE
C
C       Wegschrijven van de resultaten.
C
        IF (PTNESW .EQ. 1 ) THEN
          OPEN (UNIT = 100, FILE = FILE2, STATUS = 'UNKNOWN')
          NM = N*M
          WRITE (100,*) 'I_J       AM       AN      AE       AS       AW
     *                  RR      OMEGA'
          DO 300 I_J = 1, NM
            WRITE (100,'(I6,8F8.2)') I_J,AM(I_J),AN(I_J),AE(I_J),
     *                          AS(I_J),AW(I_J),RR(I_J),OMEGA(I_J)
300       CONTINUE
```

```
      ENDIF
      CLOSE (UNIT = 150)
C
C     END van subroutine NESW
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                      C
C      Subroutine SOL2d.for                                            C
C      Het programma vectoriseert en lost de onbekenden uit de         C
C      Poissonvergelijking op.                                         C
C                                                                      C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE SOL2D (AM, AN, AE, AS, AW, R, X, NX, NY, NITER,
     *                  FACIT, AD, AL, AU, B ,PRTS2D)
C
C     purpose:  the subroutine solves a system of linear equations
C               of the form:
C               AM(i,j).X(i,j) + AN(i,j).X(i,j+1) + AS(i,j).X(i,j-1) +
C               AE(i,j).X(i+1,j) + AW(i,j).X(i-1,j) + R(i,j) = 0
C
C     method:   alternating direction elimination
C               i.e. iterative method making use of the property
C               that the system matrix is triangular if only x or y
C               is considered.
C               note: in the procedure one-dimensional arrays are used,
C               i.e. index kp=ix+(iy-1)*NX
C
C     source code
C
      INTEGER        PRTS2D
      DIMENSION      AM(*), AN(*), AE(*), AS(*), AW(*), R(*), X(*),
     &               AD(*), AL(*), AU(*), B(*)

      CHARACTER*30   FILE3
      FILE3 = 'sol2d'

      nn = nx*ny
      fac2 = 1. - facit
C
C     carry out iteration
C
      do 700 iter = 1, niter
C
C       prepare sweep computation in x-direction
C
        DO 50 I = 2, (NX-1)
           DO 40 J = 1 , NY
             KP = I + (J-1)*NX
C            do 110 kp = 1, nn
             b(kp)  = r(kp) + an(kp)*x(kp+nx) + as(kp)*x(kp-nx) +
     &        fac2 * am(kp) * x(kp)
             ad(kp) = facit * am(kp)
             al(kp) = aw(kp)
```

```
              au(kp) = ae(kp)
C 110         continue
40          CONTINUE
50        CONTINUE
C
C         Aanpassen voor de linkerrand i.v.m. periodiciteit in het
C         rekengebied
C
          do 115 J = 1, NY
            kp = 1 + (j-1)*nx
            b(kp)  = r(kp) + an(kp)*x(kp+nx) + as(kp)*x(kp-nx) +
     &      fac2 * am(kp) * x(kp)  + AW(KP) * X(NX+(J-1)*NX)
            ad(kp) = facit * am(kp)
            al(kp) = 0.
            au(kp) = ae(kp)
 115      continue
C
C         Aanpassen voor de rechterrand i.v.m. periodiciteit in het
C         rekengebied
C
          do 116 J = 1, NY
            KP = NX + (J-1)*NX
            b(kp)  = r(kp) + an(kp)*x(kp+nx) + as(kp)*x(kp-nx) +
     &      fac2 * am(kp) * x(kp)  + AE(KP) * X(1+(J-1)*NX)
            ad(kp) = facit * am(kp)
            al(kp) = aw(kp)
            au(kp) = 0.
 116      continue
C
C         elimination step
C
          do 140 ix = 2, nx
Cvectorize
            do 130 iy = 1, ny
              kp = (iy-1)*nx + ix
              if (abs(ad(kp-1)) .lt. 1.e-20) then
                write (*, 124) iter, 1, ix-1, iy
 124            format (' zerodiv, iter ', i3, ' step ', i1,
     &          ' place ', 2i6)
              else
                elim   = al(kp) / ad(kp-1)
                b(kp)  = b(kp)  - elim*b(kp-1)
                ad(kp) = ad(kp) - elim*au(kp-1)
              endif
 130        continue
 140      continue
C
C         evaluation step
C
          do 180 ix = nx, 1, -1
Cvectorize
            do 170 iy = 1, ny
              kp = (iy-1)*nx + ix
              if (abs(ad(kp)) .lt. 1.e-20) then
                write (*, 124) iter, 2, ix, iy
              else
```

```
              x(kp) = - (b(kp) + au(kp)*x(kp+1)) / ad(kp)
            endif
 170      continue
 180    continue
C
C       prepare sweep computation in y-direction
C
         DO 200 I=2, (NX-1)
            DO 190 J = 1, NY
              KP = I + (J-1)*NX
C             do 210 kp = 1, nn
              b(kp) = r(kp) + ae(kp)*x(kp+1) + aw(kp)*x(kp-1) +
     &                fac2 * am(kp) * x(kp)
              ad(kp) = facit * am(kp)
              al(kp) = as(kp)
              au(kp) = an(kp)
C 210         continue
190         CONTINUE
200      CONTINUE
C
C        prepare sweep computation in y-direction for I = 1
C
         DO 194 J = 1, NY
           KP = 1 + (J-1)*NX
           b(kp) = r(kp) + ae(kp)*x(kp+1)+aw(kp)*x(NX+(J-1)*NX)+
     &               fac2 * am(kp) * x(kp)
           ad(kp) = facit * am(kp)
           al(kp) = as(kp)
           au(kp) = an(kp)
194      CONTINUE
C
C        prepare sweep computation in y-direction for I = NX
C
         DO 196 J = 1, NY
           KP = NX + (J-1)*NX
           b(kp) = r(kp) + ae(kp)*x(1+(J-1)*NX)+aw(kp)*x(KP-1)+
     &               fac2 * am(kp) * x(kp)
           ad(kp) = facit * am(kp)
           al(kp) = as(kp)
           au(kp) = an(kp)
196      CONTINUE
C
C       elimination step
C
        do 240 iy = 2, ny
Cvectorize
          do 230 ix = 1, nx
            kp = (iy-1)*nx + ix
            if (abs(ad(kp-nx)) .lt. 1.e-20) then
              write (*, 124) iter, 3, ix, iy-1
            else
              elim   = al(kp) / ad(kp-nx)
              b(kp)  = b(kp)  - elim*b(kp-nx)
              ad(kp) = ad(kp) - elim*au(kp-nx)
            endif
 230      continue
```

```
 240    continue
C
C       evaluation step
C
        do 280 iy = ny, 1, -1
Cvectorize
          do 270 ix = 1, nx
            kp = (iy-1)*nx + ix
            if (abs(ad(kp)) .lt. 1.e-20) then
              write (*, 124) iter, 4, ix, iy
            else
              x(kp) = - (b(kp) + au(kp)*x(kp+nx)) / ad(kp)
            endif
 270      continue
 280    continue
C
 700  continue

C     wegschrijven van de resultaten afhankelijk van PRTS2D
C
      IF (PRTS2D .EQ. 1 ) THEN
         OPEN (UNIT=80, FILE= FILE3 ,STATUS='UNKNOWN')
         WRITE (80,710) (I_J, X(I_J), I_J = 1, NN)
710      FORMAT ('PUNT I_J :',I6,'  PSI =',F14.6)
         CLOSE (UNIT = 80)
      END IF

      return
C     end of subroutine SOL2D
      end

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                              C
C   Subroutine PLOTP bepaalt wanneer er geplot moet worden                     C
C   op tijdstip t via de invoer na  tijdstap DELTAT                            C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE PLOTP( N      ,M      ,WERVEL,PSI_TP,PSI_BT,PSTEP ,
     *                  STPSI ,PSI    ,DELTAX,DELTAY,NMMAX ,START )
C
      INTEGER           N      ,M      ,WERVEL,NMMAX ,STPSI
C
      REAL              DELTAX,DELTAY,PSI_TP,PSI_BT,PSTEP
C
      REAL              PSI(NMMAX), START(NMMAX)
C
      PSTEP = (PSI_TP-PSI_BT)/STPSI
      OPEN (UNIT=81, FILE= 'isoplot.81' ,STATUS='UNKNOWN')
      OPEN (UNIT=82, FILE= 'isoplot.82' ,STATUS='UNKNOWN')
C
C         NPLOT en OCPISO zijn de routines die ondergebracht zijn
C         in de file PLOT.FOR. in de routines worden de coordinaten
C         voor printgl.exe en de plotter bepaald
C
          CALL NPLOT
          CALL OCPISO ( PSI    ,N      ,M     ,DELTAX,DELTAY,PSI_BT,
```

```
     *                    PSTEP ,PSI_TP,START  )
C
C
C     END OF SUBROUTINE PLOT
      RETURN
      END
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                            C
C   Subroutine voor het bepalen van de snelheid uit de stroomfunctie         C
C   middels centrale differenties                                            C
C   Subroutine heet :  SOLVEL.OUT                                            C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE SOLVEL ( N     ,M     ,DELTAX,DELTAY,PSI   ,U     ,
     *                    V     ,NMMAX ,PRTVEL )
C
      INTEGER             N     ,M     ,NMMAX ,PRTVEL,I_J   ,I_JPER
      REAL                DELTAX,DELTAY
C
      REAL                PSI(NMMAX), U(NMMAX) , V(NMMAX)
C
      CHARACTER*30        FILE4
      FILE4 ='solvel'
C
C     Bepalen van de snelheden in het gehele gebied (rand en binnen-
C     gebied met centrale differenties
C
C     punten in het binnengebied (centrale differentie is overal
C     mogelijk)
C
      DO 100  J = 2, M-1
         DO 90  I = 2, N-1
            I_J = I + (J - 1)*N
            U(I_J) = (PSI(I_J+N) - PSI(I_J-N))/(2*DELTAY)
            V(I_J) =-(PSI(I_J+1) - PSI(I_J-1))/(2*DELTAX)
90       CONTINUE
100   CONTINUE
C
C     punten aan de onderrand (upwind voor u en v)
C
      DO 110 I = 1, N
         I_J = I
         I_JPER = 1
         IF (I .EQ. N) THEN
           U(I_J) = (PSI(I_J+N) - PSI(I_J))/(DELTAY)
           V(I_J) =-(PSI(I_JPER) - PSI(I_J))/(DELTAX)
         ELSE
           U(I_J) = (PSI(I_J+N) - PSI(I_J))/(DELTAY)
           V(I_J) =-(PSI(I_J+1) - PSI(I_J))/(DELTAX)
         END IF
110   CONTINUE
C
C     De snelheden aan de rechter en linkerrand worden bij een
C     PERIODIEK systeem bepaald door de punten aan de andere rand.
```

```
C
C     De linkerrand :  I = 1
C
      DO 130 J = 2, M-1
         I_J = 1 + (J-1)*N
         I_JPER = I_J + (N-1)
         U(I_J) = (PSI(I_J+N) - PSI(I_J-N))/(2*DELTAY)
         V(I_J) =-(PSI(I_J+1) - PSI(I_JPER))/(2*DELTAX)
130   CONTINUE
C
C     punten aan de bovenrand (upwind voor u )
C
      DO 150 I = 1, N
         I_J = I + (M-1)*N
         I_JPER = 1 + (M-1)*N
         IF (I .EQ. N) THEN
           U(I_J) = (PSI(I_J) - PSI(I_J-N))/(DELTAY)
           V(I_J) =-(PSI(I_JPER) - PSI(I_J))/(DELTAX)
         ELSE
           U(I_J) = (PSI(I_J) - PSI(I_J-N))/(DELTAY)
           V(I_J) =-(PSI(I_J+1) - PSI(I_J))/(DELTAX)
         END IF
150   CONTINUE
C
C     punten aan de rechterrand (centraal voor u en upwind voor v)
C     I = N
C
      DO 170 J = 2, M-1
         I_J = N + (J-1)*N
         I_JPER = I_J - (N-1)
         U(I_J) = (PSI(I_J+N) - PSI(I_J-N))/(2*DELTAY)
         V(I_J) =-(PSI(I_JPER) - PSI(I_J-1))/(2*DELTAX)
170   CONTINUE
C
C     Moeten de resultaten worden weggeschreven (ja=1)

      IF (PRTVEL .EQ. 1 ) THEN
        OPEN (UNIT = 110, FILE = FILE4, STATUS = 'UNKNOWN')
        NM = N*M
        WRITE (110,190) (I_J, U(I_J), V(I_J), I_J = 1, NM)
190     FORMAT ('I_J :',I6,' U(I_J) =',F10.6,' V(I_J) =',F10.4)
c
c       snelheid in een verticaal net in het dal en net boven
c       de top van de ribbel.
c
        WRITE (110,191) (I_J, U(I_J), I_J = 1, (NM-(N-1)), N)
191     FORMAT ('I_J :',I6,' U(I_J) =',F10.6)

        CLOSE (UNIT = 110)
      END IF
C
C     end van subroutine SOLVEL
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C                                                                       C
C  TIJDST  bepaling van de tijdstap aan de hand van de snelheden en     C
C          de grootte van het raster                                    C
C                                                                       C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE TIJDST ( N      ,M      ,OMMAX ,NMMAX ,U      ,V      ,
     *                    GAMMAU,GAMMAV,DELTAX,DELTAY,DELTAT,WERVEL,
     *                    REDDT ,U1)
C
      INTEGER             N      ,OMMAX ,NMMAX ,P      ,WERVEL,
     *                    I_J    ,M
C
      REAL                DELTAX,DELTAY,DELTAT,HULPT ,REDDT ,DU     ,
     *                    DV     ,DGU   ,DGV   ,U1
C
      REAL                U(NMMAX)       ,V(NMMAX)     ,GAMMAU(OMMAX) ,
     *                    GAMMAV(OMMAX)
C
      IF (WERVEL .EQ. 0) THEN
         DELTAT = 1000.
         NM = N*M
         DO 10 I_J = 1, NM
            IF ( ABS (U(I_J)) .LT. 1.E-7 ) THEN
              DU = 99999.9
            ELSE
              DU = ABS(DELTAX/U(I_J))
            ENDIF
            IF ( ABS (V(I_J)) .LT. 1.E-7) THEN
              DV = 9999999.9
            ELSE
              DV = ABS(DELTAY/V(I_J))
            ENDIF
            HULPT = MIN (DU , DV)
            IF (HULPT .LT. DELTAT) THEN
              DELTAT = HULPT
            END IF
10       CONTINUE
      ELSE
        DELTAT = 1000.
        DO 20 P=1, WERVEL
           IF ( ABS (GAMMAU(P)) .LT. 1.E-7 ) THEN
              DGU = 9999999.9
           ELSE
              DGU = ABS(DELTAX/GAMMAU(P))
           ENDIF
           IF ( ABS (GAMMAV(P)) .LT. 1.E-7) THEN
              DGV = 9999999.9
           ELSE
              DGV = ABS(DELTAY/GAMMAV(P))
           ENDIF
           HULPT = MIN (DGU ,DGV)
           IF (HULPT .LT. DELTAT) THEN
              DELTAT = HULPT
           END IF
20      CONTINUE
```

```
      ENDIF
C
C     De REDDT staat voor de reductie van de tijdstap. Afhankelijk van
C     de gewenste puntdichtheid op het scherm kan deze factor
C     vergroot worden.
C
      IF (DELTAT .GT. (DELTAX/U1) ) THEN
        DELTAT = (DELTAX/U1)
      END IF
C
      DELTAT = (DELTAT/REDDT)
C
C     end vam subroutine TIJDST
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                     C
C  Subroutine INITOM , (INITiele OMega) bepaalt de wervelsterkte ter  C
C  plaatse van het  punt ter plaatse van de plaat                     C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE INITOM ( N     ,LRIB  ,HRIB  ,GAMMA ,OMMAX ,DELTAX,
     *                    DELTAY,NMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL,GAMFAC,
     *                    U     ,V     ,DELTAT,GAMMAT,T     ,HULPI1,
     *                    HULPJ1,M )
C
      INTEGER             N     ,OMMAX ,WERVEL,NMMAX ,I1TOP ,J1TOP ,
     *                    I_JTP1,HULPI1,HULPJ1,M
C
      REAL                DELTAX,DELTAY,DELTAT,GAMFAC,KINTUV,LRIB  ,
     *                    HRIB  ,T     ,UX1   ,UX2   ,UX3   ,BETA  ,
     *                    UX4   ,VY1   ,VY2   ,NUMBER
C
      REAL                U(NMMAX)     ,GAMMAX(OMMAX),GAMMAY(OMMAX),
     *                    GAMMA(OMMAX) ,V(NMMAX)     ,GAMMAT(OMMAX)
C
C
C     De waarden van HULPI1 en HULPJ1 zijn bepaald in de subroutine
C     NESWM en staan voor de I en de J van de top van de bodemribbel.
C
      I1TOP = HULPI1
      J1TOP = HULPJ1
C
C     Bepaling van de wervelsterkte ter plaatse van het loslaatpunt.
C
C     Uitgaande van de stelling van Stokes:
C
C     INT { u . ds} = INT INT {omega .dx . dy} = SUM gamma
C        c                S                         i
C     wordt de kringintegraal over de rand van het snelheidsveld
C     bepaald. De rand van de kringintegraal wordt gevormd door de
C     twee cellen rechts en links van de top van de bodemribbel.
C     Omdat niet met een gestaggerd rooster wordt gewerkt worden eerst
C     de gemiddelde snelheden ter plaatse van het midden van een zijde
C     van een cel uitgerekend.
```

```
C       Een belangrijke aanname die wordt gemaakt is dat verondersteld
C       wordt dat de snelheid U ter plaatse van de top van de bodemribbel
C       gelijk is aan nul. In werkelijkheid moet worden voldaan aan de
C       no-slip voorwaarde. In de numerieke benadering is de snelheid U
C       ter plaatse van de bodemribbel ongelijk aan nul.
C
C
CC       het volgende schema wordt aangehouden:
C
C
C        +     UX1       +     UX2       +
C
C
C        VY2                             VY1
C
C                         A                          (A is de top van de ribbel
C        +     UX4       +     UX3       +            punt IJ_TP1.  )
C                         |
C                         |
C                         |
C        +------------- + -------------+
C
C       Knoopnummer van de top:
C
        I_JTP1 = I1TOP + (J1TOP-1)*N
C
        VY1 = ( V(I_JTP1+N+1) + V(I_JTP1+1)    ) / 2
        UX1 = ( U(I_JTP1+N-1) + U(I_JTP1+N)    ) / 2
        UX2 = ( U(I_JTP1+N)   + U(I_JTP1+N+1)  ) / 2
        UX3 = ( U(I_JTP1+1)   + 0.             ) / 2
        UX4 = ( U(I_JTP1-1)   + 0.             ) / 2
        VY2 = ( V(I_JTP1+N-1) + V(I_JTP1-1)    ) / 2
C
C       De waarde van OMEGA in het knooppunt van de bodemribbeltop:
C       KINTUV staat voor (K)ring(INT)egraal over (U) en (V) langs
C       de contour.
C       Linksom is positief !!!!!!!!!!!! (definitie van circulatie)
C
        KINTUV = (UX4*DELTAX + UX3*DELTAX + VY1*DELTAY -
     *            UX3*DELTAX - UX4*DELTAX - VY2*DELTAY )
C
C       De circulatie in knooppunt is bepaald : eenheid [m²/s]
C       De wervelsterkte wordt eveneens bepaald door de
C       som te nemen over het aantal puntwervels dat zich in een
C       cel bevindt. Het aantal deeltjes in een cel is bij benadering
C       gelijk aan ( het deeltje wordt buiten de grenslaag losgelaten):
C       bij een horizontale verplaatsing:
C       DELTAX / ( U(I_JTP1+N) * DELTAT)
C       bij een verticale verplaatsing:
C       DELTAY / ( V(I_JTP1+N) * DELTAT)
C
C       De hoek waaronder de deeltjes worden afgeschud,  wordt bepaald
C       door de snelheden U en V ter plaatse van de bodemribbel. Onder-
C       staande wordt pas toegevoegd bij GAMMA(WERVEL) omdat de U en
C       V gelijk aan nul kunnen worden (delen door nul !!).
C
```

```
C     Hoek waaronder deeltjes worden afgeschoten:
C
C     BETA = ARCTAN ( ABS (V(I_JTP1+N) / U(I_JTP1+N) ) )
C
C     Aantal deeltjes op fictieve baan na te zijn afgeschud:
C
C     NXDEEL = SQRT( (DELTAY/TAN(BETA))**2+(DELTAX*TAN(BETA))**2 ) /
C    *         (SQRT( U(I_JTP1+N)**2 + V(I_JTP1+N)**2 ) * DELTAT)
C
C     De circulatie is nu gelijk aan de waarde van de kring
C     integraal over de rand van U en V vermenigvuldigd met
C     ( 1 / NXDEEL) (zie rapport).
C
C     Bepaling hoek waaronder deeltjes worden afgeschud:
C
      IF (U(I_JTP1+N) .LT. 1E-7 ) THEN
        BETA = 1.570796327
      ELSE
        BETA = ATAN ( ABS (V(I_JTP1+N) / U(I_JTP1+N) ) )
      END IF
C
C     Let op NUMBER is ( 1 / aantal deeltjes dat wordt
C                          losgelaten (=NXDEEL)
C
      IF (BETA .LE. 0.785398163 ) THEN
        NUMBER =( DELTAT * SQRT( U(I_JTP1+N)**2 + V(I_JTP1+N)**2 )) /
     *            SQRT( DELTAX**2 * (1 + (TAN(BETA))**2 ) )
      ELSE IF (BETA .GT. 0.785398163 )THEN
        NUMBER =( DELTAT * SQRT( U(I_JTP1+N)**2 + V(I_JTP1+N)**2 )) /
     *            SQRT( DELTAY**2 * (1 + (TAN(1.57079633 - BETA))**2) )
      END IF
C
C     wervelsterkte die aan de puntwervel wordt toegekend is:
C     GAMMA(wervel)
C     waarbij GAMFAC een correctiefactor is die op één staat.
C     In de invoerfile kan de waarde van GAMFAC worden opgevoerd. Op
C     deze manier kan de invloed van een grotere circulatie op de
C     stroming worden beschouwd.
C
      GAMMA(WERVEL) = GAMFAC * KINTUV * NUMBER
C
C     Bepalen van de positie van de loslaatpunt:
C
      GAMMAX(WERVEL) =  (LRIB/2)
      GAMMAY(WERVEL) =  ((REAL(J1TOP-1)*DELTAY) + (DELTAY/2) +
     *                   1.e-7)
      GAMMAT(WERVEL) =  T
C
C     end van subroutine INITOM
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                              C
C  VELCEL bepalen van de snelheid van de deeltjes door binnen een cel C
C         de PSI vanuit de knooppunten te gebruiken voor het bepalen  C
```

```
C          van de de snelheid in plaats van de snelheid in de knopen   C
C                                                                      C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE VELCEL ( N      ,NMMAX ,OMMAX ,DELTAX,DELTAY,GAMMAU,
     *                    GAMMAV,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL,PSI )
C
      INTEGER             N      ,HULPI ,HULPJ ,I_J   ,I     ,J     ,
     *                    P      ,NMMAX ,OMMAX ,WERVEL
      REAL                DELTAX,DELTAY,POSX  ,POSY  ,PSI_UL,PSI_UR,
     *                    PSI_VT,PSI_VB,DX    ,DY
C
      REAL                GAMMAX(OMMAX) ,GAMMAY(OMMAX),PSI(NMMAX)   ,
     *                    GAMMAU(OMMAX) ,GAMMAV(OMMAX)
C
      DO 10 P = 1 , OMMAX
         GAMMAU(P) = 0.
         GAMMAV(P) = 0.
10    CONTINUE
C
      DO 20 P = 1 , WERVEL
        HULPI = (NINT ( GAMMAX(P) / DELTAX ) + 1 )
        HULPJ = (NINT ( GAMMAY(P) / DELTAY ) + 1 )
        POSX  = REAL(HULPI -1 ) * DELTAX
        POSY  = REAL(HULPJ -1 ) * DELTAY
C       Bepaling van de teller I_J
        I     = HULPI
        J     = HULPJ
        I_J   = I + ( J-1)*N
C       Bepaling van de snelheden van een deeltje:
C
C
C         + PSI(I_J+N-1)------+ PSI(I_J+N)------+ PSI(I_J+N+1)
C         |                   |                  |
C         |                   |                  |
C         |                   |                  |
C         |                   |                  |
C         + PSI(I_J-1)--------+ PSI(I_J) ------ + PSI(I_J+1)   -
C         |                   |                  |              |(DELTAY-DY)
C         |                   |                  |              |
C         |                   |          o       |              -
C         |                   |                  |              | DY
C         + PSI(I_J-N-1) ---- + PSI(I_J-N)----- + PSI(I_J-N+1) -
C
C                                  DX     (DELTAX-DX)
C                             |-----------|-----|
CC
C       De snelheid van een deeltje wordt in tegenstelling tot de
C       subroutine HERVER, bepaald door de waarden voor PSI van de cel
C       waarin het werveldeeltje zich bevindt.
C       Op deze manier wordt bewerkstelligd dat een deeltje, bij het
C       voldoende klein zijn van het getal van Courant, niet de rand
C       overgaat maar afbuigt voor de rand. Dit mechanisme is ook aan-
C       wezig wanneer met een gestaggerd rooster zou worden gewerkt.
C
C
```

```
      IF (GAMMAX(P) .GE. POSX .AND. GAMMAY(P) .GE. POSY ) THEN
C         rechterbovenhoek
          PSI_UL = (PSI(I_J+N)-PSI(I_J))/DELTAY
          PSI_UR = (PSI(I_J+N+1)-PSI(I_J+1))/DELTAY
          DX = (GAMMAX(P) - POSX) / DELTAX
          GAMMAU(P) = (DX * PSI_UR) + ((1-DX) * PSI_UL)
          PSI_VT = -(PSI(I_J+N+1)-PSI(I_J+N))/DELTAX
          PSI_VB = -(PSI(I_J+1)-PSI(I_J))/DELTAX
          DY = (GAMMAY(P) - POSY) / DELTAY
          GAMMAV(P) = (DY * PSI_VT) + ((1-DY) * PSI_VB)
      ELSE IF (GAMMAX(P) .LE. POSX .AND. GAMMAY(P) .GE. POSY ) THEN
C         linkerbovenhoek
          PSI_UL = (PSI(I_J+N-1)-PSI(I_J-1))/DELTAY
          PSI_UR = (PSI(I_J+N)-PSI(I_J))/DELTAY
          DX = (GAMMAX(P) - (POSX - DELTAX)) / DELTAX
          GAMMAU(P) = (DX * PSI_UR) + ((1-DX) * PSI_UL)
          PSI_VT = -(PSI(I_J+N)-PSI(I_J+N-1))/DELTAX
          PSI_VB = -(PSI(I_J)-PSI(I_J-1))/DELTAX
          DY = (GAMMAY(P) - POSY) / DELTAY
          GAMMAV(P) = (DY * PSI_VT) + ((1-DY) * PSI_VB)
      ELSE IF (GAMMAX(P) .LE. POSX .AND. GAMMAY(P) .LE. POSY ) THEN
C         linkerondehoek
          PSI_UL = (PSI(I_J-1)-PSI(I_J-N-1))/DELTAY
          PSI_UR = (PSI(I_J)-PSI(I_J-N))/DELTAY
          DX = (GAMMAX(P) - (POSX - DELTAX)) / DELTAX
          GAMMAU(P) = (DX * PSI_UR) + ((1-DX) * PSI_UL)
          PSI_VT = -(PSI(I_J)-PSI(I_J-1))/DELTAX
          PSI_VB = -(PSI(I_J-N)-PSI(I_J-N-1))/DELTAX
          DY = (GAMMAY(P) - (POSY-DELTAY)) / DELTAY
          GAMMAV(P) = (DY * PSI_VT) + ((1-DY) * PSI_VB)
      ELSE IF (GAMMAX(P) .GE. POSX .AND. GAMMAY(P) .LE. POSY ) THEN
C         rechteronderhoek
          PSI_UL = (PSI(I_J)-PSI(I_J-N))/DELTAY
          PSI_UR = (PSI(I_J+1)-PSI(I_J-N+1))/DELTAY
          DX = (GAMMAX(P) - POSX) / DELTAX
          GAMMAU(P) = (DX * PSI_UR) + ((1-DX) * PSI_UL)
          PSI_VT = -(PSI(I_J+1)-PSI(I_J))/DELTAX
          PSI_VB = -(PSI(I_J-N+1)-PSI(I_J-N))/DELTAX
          DY = (GAMMAY(P) - (POSY-DELTAY)) /DELTAY
          GAMMAV(P) = (DY * PSI_VT) + ((1-DY) * PSI_VB)
      END IF
20    CONTINUE
C     END VAN SUBROUTINE VELCEL
      RETURN
      END
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                          C
C  HERVEL terughalen van de snelheid uit de knopen naar de deeltjes        C
C         opdat de nieuwe positie van het deeltje kan worden bepaald       C
C                                                                          C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE HERVEL ( N      ,NMMAX ,OMMAX ,U      ,V      ,DELTAX,
     *                    DELTAY,GAMMAU,GAMMAV,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL )
```

```
      INTEGER              N      ,HULPI ,HULPJ ,I_J    ,I      ,J      ,
     *                     P      ,NMMAX ,OMMAX ,WERVEL
      REAL                 DELTAX,DELTAY,POSX   ,POSY   ,A1     ,A2     ,
     *                     A3     ,A4
C
      REAL                 GAMMAX(OMMAX)  ,GAMMAY(OMMAX),GAMMAU(OMMAX),
     *                     GAMMAV(OMMAX)  ,U(NMMAX)      ,V(NMMAX)
C
C     Deze subroutine is niet geschikt voor de bodemribbel. Subroutine
C     kan wel goed worden gebruikt waarbij deeltjes "vrij" in het
C     gehele rekengebied kunnen bewegen en zich geen randen in het
C     rekengebied bevinden.
C
C
      DO 10 P = 1 , OMMAX
         GAMMAU(P) = 0.
         GAMMAV(P) = 0.
10    CONTINUE
C
      DO 20 P = 1 , WERVEL
        A1 = 0.
        A2 = 0.
        A3 = 0.
        A4 = 0.
        HULPI = (NINT ( GAMMAX(P) / DELTAX ) + 1 )
        HULPJ = (NINT ( GAMMAY(P) / DELTAY ) + 1 )
        POSX  = (HULPI -1 ) * DELTAX
        POSY  = (HULPJ -1 ) * DELTAY
C       Bepaling van de teller I_J
        I     = HULPI
        J     = HULPJ
        I_J   = I + ( J-1)*N

C       Bepaling van de herverdelingen voor de wervelsterkte
C
        IF (GAMMAX(P) .GE. POSX .AND. GAMMAY(P) .GE. POSY ) THEN
           A1 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (POSY + DELTAY -
     *             GAMMAY(P)))
           A2 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (POSY + DELTAY - GAMMAY(P)))
           A3 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - POSY))
           A4 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (GAMMAY(P) - POSY))
C          Snelheid deeltje in x-richting
           OMLB  = (A1 * U(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
           OMRB  = (A2 * U(I_J+1))/(DELTAX * DELTAY)
           OMLT  = (A3 * U(I_J+N))/(DELTAX * DELTAY)
           OMRT  = (A4 * U(I_J+N+1))/(DELTAX * DELTAY)
           GAMMAU(P) =  OMLB + OMRB + OMLT + OMRT
C          Snelheid deeltje in y-richting
           OMLB  = (A1 * V(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
           OMRB  = (A2 * V(I_J+1))/(DELTAX * DELTAY)
           OMLT  = (A3 * V(I_J+N))/(DELTAX * DELTAY)
           OMRT  = (A4 * V(I_J+N+1))/(DELTAX * DELTAY)
           GAMMAV(P) = OMLB + OMRB + OMLT + OMRT
        ELSE IF (GAMMAX(P) .LE. POSX .AND. GAMMAY(P) .GE. POSY ) THEN
           A1 = ((POSX - GAMMAX(P)) * (POSY + DELTAY - GAMMAY(P)))
           A2 = ((GAMMAX(P) - (POSX - DELTAX)) * (POSY + DELTAY -
```

```
     *              GAMMAY(P)))
            A3 = ((POSX -  GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - POSY))
            A4 = ((GAMMAX(P) - (POSX - DELTAX)) * (GAMMAY(P) - POSY))
C           Snelheid deeltje in x-richting
            OMRB  = (A2 * U(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLB  = (A1 * U(I_J-1))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRT  = (A4 * U(I_J+N))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLT  = (A3 * U(I_J+N-1))/(DELTAX * DELTAY)
            GAMMAU(P) = OMRB + OMLB + OMRT + OMLT
C           Snelheid deeltje in y-richting
            OMRB  = (A2 * V(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLB  = (A1 * V(I_J-1))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRT  = (A4 * V(I_J+N))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLT  = (A3 * V(I_J+N-1))/(DELTAX * DELTAY)
            GAMMAV(P) = OMRB + OMLB + OMRT + OMLT
         ELSE IF (GAMMAX(P) .LE. POSX .AND. GAMMAY(P) .LE. POSY ) THEN
            A1 = ((POSX - GAMMAX(P)) * (POSY - GAMMAY(P)))
            A2 = ((GAMMAX(P) - (POSX- DELTAX)) * (POSY - GAMMAY(P)))
            A3 = ((POSX - GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - (POSY - DELTAY)))
            A4 = ((GAMMAX(P) - (POSX-DELTAX)) * (GAMMAY(P) - (POSY -
     *              DELTAY)))
C           Snelheid deeltje in x-richting
            OMRB  = (A4 * U(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLB  = (A3 * U(I_J-1))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRT  = (A2 * U(I_J-N))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLT  = (A1 * U(I_J-N-1))/(DELTAX * DELTAY)
            GAMMAU(P) = OMRB + OMLB + OMRT + OMLT
C           Snelheid deeltje in y-richting
            OMRB  = (A4 * V(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLB  = (A3 * V(I_J-1))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRT  = (A2 * V(I_J-N))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLT  = (A1 * V(I_J-N-1))/(DELTAX * DELTAY)
            GAMMAV(P) = OMRB + OMLB + OMRT + OMLT
         ELSE IF (GAMMAX(P) .GE. POSX .AND. GAMMAY(P) .LE. POSY ) THEN
            A1 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (POSY - GAMMAY(P)))
            A2 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (POSY - GAMMAY(P)))
            A3 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - (POSY -
     *              DELTAY)) )
            A4 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (GAMMAY(P) - (POSY-DELTAY)))
C           Snelheid deeltje in x-richting
            OMLT  = (A3 * U(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRT  = (A4 * U(I_J+1))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLB  = (A1 * U(I_J-N))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRB  = (A2 * U(I_J-N+1))/(DELTAX * DELTAY)
            GAMMAU(P) = OMRB + OMLB + OMRT + OMLT
C           Snelheid deeltje in y-richting
            OMLT  = (A3 * V(I_J))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRT  = (A4 * V(I_J+1))/(DELTAX * DELTAY)
            OMLB  = (A1 * V(I_J-N))/(DELTAX * DELTAY)
            OMRB  = (A2 * V(I_J-N+1))/(DELTAX * DELTAY)
            GAMMAV(P) = OMRB + OMLB + OMRT + OMLT
         END IF
20    CONTINUE
C     END VAN SUBROUTINE HERVEL
      RETURN
      END
```

```
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                       C
C  STOCH bepaling van een random parameter. Gebruik wordt gemaakt van  C
C        een aangemaakt random uniform verdeelde variabele op [0,1]    C
C        gemiddelde nul en variantie 1/3.STOCH wordt aangeroepen in    C
C        UPDATE                                                         C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE STOCH  ( W1    ,W2    ,SEED  ,GAUS)
C
      INTEGER       SEED  ,GAUS
      REAL          W1    ,W2    ,RANDOM,WAARDE
      PARAMETER     (PI = 3.141592654)
C
C
C     Na een aantal testberekeningen te hebben gemaakt volgde
C     dat de Gaussische verdeling problemen gaf. De diffuse
C     verplaatsing kan (met een hele kleine kans) heel groot
C     worden en een deeltje kan het gebied aan de onderkant
C     "ruim" verlaten (verhouding convectieve verplaatsing ten op-
C     zichte van diffuse verplaatsing = INF).
C     Het deeltje zou gereflecteerd kunnen worden echter bij de
C     onregelmatige structuur van de rand geeft dit
C     problemen ten aanzien van het programmeren.
C     Een eenvoudige methode om dit probleem te omzeilen is om
C     uit te gaan van een UNIFORME verdeling. Via de centrale
C     limietstelling is te bewijzen dat voor N gaat naar oneindig er
C     toch een Gaussische verdeling ontstaat.
C     Dit heeft tot gevolg dat onderstaande bij de bodemribbel
C     niet wordt meegenomen. Bij andere geometrieen (plaat) kan
C     onderstaande wel gebruikt worden. Stel daartoe GAUS = 1 bij de
C     variabele declaratie
C
C     Bij de subroutine UPDATE verandert de waarde onder "het
C     wortelteken" wel wanneer een uniforme verdeling wordt gebruikt.
C     De factor 2 wordt 6. Dit heeft te maken de bepaling van de ver-
C     wachting van de verdeling (tweede orde moment).
C
C     U1 en U2 zijn de uniform verdeelde waarden via "RANDOM function"
      U1 = RANDOM(SEED)
      U2 = RANDOM(SEED)
C
C     uniforme verdeling omgzetten in Gaussische verdeling?
C     gaussische verdeling : GAUS = [1]
C     uniforme verdeling   : GAUS = [0]
C
      IF (GAUS .EQ. 1 ) THEN
        IF (U2 .GE. 1. ) THEN
          WAARDE = 0.0
        ELSE IF (U2 .LT. 1.E-7 ) THEN
          WAARDE = -7.
        ELSE
          WAARDE = -2*LOG(U2)
        END IF
```

```
          W1 = COS(2*PI*U1)*(WAARDE)**0.5
          W2 = SIN(2*PI*U1)*(WAARDE)**0.5
        END IF
C
        IF (GAUS .EQ. 0 ) THEN
C       Let op deze variabelen zijn uniform verdeeld [0,1]
C       Bij UPDATE wordt dit omgezet naar [-1 , +1]
           W1 = U1
           W2 = U2
        END IF
C
C       Einde van subroutine STOCH
        RETURN
        END

        REAL FUNCTION RANDOM(I)
        INTEGER I,J,K,M
        PARAMETER (J = 5243)
        PARAMETER (K = 55397)
        PARAMETER (M = 262139)
        I = MOD(I * J + K,M)
        RANDOM = (REAL(I) + 0.5)/REAL(M)
        RETURN
        END
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                              C
C  UPDATE  bepaling van de nieuwe positie van een deeltje aan de hand C
C          van berekende snelheden van de deeltjes GAMMAU en GAMMAV   C
C                                                                              C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
        SUBROUTINE UPDATE ( OMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMAU,GAMMAV,DELTAT,
     *                      WERVEL,NUTURB,SEED  ,DELTAX,DELTAY,GAUS  )
C
        INTEGER             OMMAX ,P     ,WERVEL,SEED  ,GAUS
        REAL                DELTAT,NUTURB,TND   ,DELTAX,DELTAY
C
        REAL                GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX),GAMMAU(OMMAX),
     *                      GAMMAV(OMMAX)
C
C       Updaten van deeltjes in x-richting en y-richting
C
        DO 10 P=1, WERVEL
C
C         Voor tekst over kansverdelingen zie subroutine STOCH en rapport
C
C         GAUSSISCHE verdeling : GAUS = 1  en TND = 2.*NUTURB*DELTAT
C         UNIFORME verdeling   : GAUS = 0  en TND = 6.*NUTURB*DELTAT
C
          CALL STOCH (W1    ,W2    ,SEED  ,GAUS )
C
          IF (GAUS .EQ. 0 ) THEN
            TND = MAX(0.0 , (6.*NUTURB*DELTAT))
            IF ( (SQRT(TND) .GT. (DELTAX/2)) .OR.
```

```
     *          (SQRT(TND) .GT. (DELTAY/2))  )  THEN
              WRITE(*,*) 'De viscositeit is te groot voor'
              WRITE(*,*) 'de aanwezige celgrootte'
            END IF
C           Bij de uniforme verdeling moet een correctie worden
C           toegepast om E(x)= 0 en variantie gelijk aan 1 te krijgen
            GAMMAX(P) = GAMMAX(P) + (GAMMAU(P) * DELTAT) +
     *                  (SQRT(TND)) * (2*W1 - 1)
            GAMMAY(P) = GAMMAY(P) + (GAMMAV(P) * DELTAT) +
     *                  (SQRT(TND)) * (2*W2 - 1)
          ELSE IF (GAUS .EQ. 1) THEN
            TND = MAX(0.0 , (2.*NUTURB*DELTAT))
            IF ( (SQRT(TND) .GT. (DELTAX/2)) .OR.
     *          (SQRT(TND) .GT. (DELTAY/2)) ) THEN
              WRITE(*,*) 'De viscositeit is te groot voor'
              WRITE(*,*) 'de aanwezige celgrootte'
            END IF
C           W1 en W2 zijn bij GAUSSISCHE verdeling zo dat
C           E(x) = 0 en variantie = 1 reeds de goede waarde hebben
            GAMMAX(P) = GAMMAX(P) + (GAMMAU(P) * DELTAT) +
     *                  (SQRT(TND)) * W1
            GAMMAY(P) = GAMMAY(P) + (GAMMAV(P) * DELTAT) +
     *                  (SQRT(TND)) * W2
          END IF
10      CONTINUE
C
C       end vam subroutine UPDATE
        RETURN
        END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                     C
C  PERIOD  Zorgt voor periodiciteit van de deeltjes die op de randen  C
C          komen en deeltjes die over de onder- en bovenrand gaan     C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
        SUBROUTINE PERIOD   ( N      ,M      ,OMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMA,
     *                        GAMMAT,DELTAX,DELTAY,WERVEL,PI     ,PRIB  ,
     *                        LRIB )
C
        INTEGER               N      ,M      ,OMMAX ,P      ,WERVEL,Q      ,
     *                        R      ,PP
C
        REAL                  DELTAX,DELTAY,XRNACT,XLNACT,YTNACT,PI     ,
     *                        PRIB  ,LRIB  ,HRIB  ,KRIB  ,B      ,X0     ,
     *                        Y0     ,Y
C
        REAL                  GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX),GAMMA(OMMAX),
     *                        GAMMAT(OMMAX)
C
C
C       Bepaling of de y-coordinaat van een werveldeeltje niet kleiner
C       is dan de y-coordinaat van de bodemribbel bij een bepaalde
C       x-coordinaat. Dit zou het gevolg kunnen zijn van een geringe
C       diffuse verplaatsing van een deeltje dat dicht bij de rand zit.
C       De geometrie van de bodemribbel wordt op dezelfde manier bepaald
```

```
C     als bij NESWM.
C     Wanneer een deeltje de rand passeert, dan wordt dit deeltje
C     op een afstand DELTAY buiten de rand geplaatst. Deze waarde
C     DELTAY wordt gezien alszijnde het deeltje weer terug wordt
C     geplaatst in de grenslaag.
C     Bij een groot aantal deeltjes (centrale limietstelling !) maakt
C     het niet voor het uiteindelijke resultaat of een deeltje weer
C     teruggezet wordt in het gebied.
C
      KRIB = (2 * PI) / (PRIB * LRIB)
      B = 1./COS(PI / PRIB)
      HRIB = (PRIB * LRIB * LOG(B) )/(2*PI)
      X0 = 0.
      Y0 = 0.
      DO 10 PP=1, WERVEL
        IF (GAMMAY(PP) .LT. (HRIB+DELTAY) ) THEN
            IF (GAMMAX(PP) .LT. (LRIB/2) )  X0 = 0.
            IF (GAMMAX(PP) .GE. (LRIB/2) )  X0 = LRIB
            Y = Y0 + (1/KRIB)* LOG( 1./COS(KRIB*(GAMMAX(PP)-X0)) )
            IF (GAMMAY(PP) .LE. Y ) THEN
                GAMMAY(PP) = Y + DELTAY
            END IF
        END IF
10    CONTINUE
C
C
C     deeltjes die de bovenrand verlaten worden eruit gehaald.
C     deze procedure moet eerst worden gedaan voor de randen
C     links en recht omdat de waarde van wervel in onderstaande
C     routine kan veranderen (als er deeltjes verdwijnen.)
C
      YTNACT = (M-1)*DELTAY
      P = 1
30    IF ( GAMMAY(P) .GE. YTNACT ) THEN
        DO 40 Q = P ,(WERVEL-1)
          GAMMA(Q)  = GAMMA(Q+1)
          GAMMAX(Q) = GAMMAX(Q+1)
          GAMMAY(Q) = GAMMAY(Q+1)
          GAMMAT(Q) = GAMMAT(Q+1)
40      CONTINUE
          GAMMA(WERVEL)  = 0.
          GAMMAX(WERVEL) = 0.
          GAMMAY(WERVEL) = 0.
          GAMMAT(WERVEL) = 0.
          WERVEL = WERVEL-1
      ENDIF
      P=P+1
      IF (P .LE. WERVEL) GOTO 30
C
C     deeltjes aan de rechterrand of linkerrand:
C
      XRNACT = (N-1)*DELTAX
      XLNACT = 0.
      DO 50 R = 1 , WERVEL
      IF (GAMMAX(R) .GT. XRNACT ) THEN
        GAMMAY(R) = GAMMAY(R)
```

```
            GAMMAX(R) = (GAMMAX(R) - (N-1)*DELTAX)
         END IF
         IF (GAMMAX(R) .LT. XLNACT ) THEN
            GAMMAY(R) = GAMMAY(R)
            GAMMAX(R) = GAMMAX(R) + (N-1)*DELTAX
         END IF
50       CONTINUE
C
C        end vam subroutine PERIOD
         RETURN
         END
C
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                       C
C  CLUST  Clusteren van de puntwervels als ze te dicht bij              C
C         elkaar komen. De afstand wordt bepaald door de straal R       C
C         en is een functie van de tijd                                 C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE CLUST  ( OMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMA ,GAMMAT,WERVEL,
     *                    T     ,EPSIL ,REDDT ,DELTAX,LRIB )
C
      INTEGER             OMMAX ,WERVEL,Q     ,R
C
      REAL                T     ,BREUK1,BREUK2,ST1   ,LRIB  ,DR    ,
     *                    ST2   ,EPSIL ,REDDT ,DELTAX,WORT1 ,WORT2 ,
     *                    DXR   ,DYR   ,DQT   ,DRT
C
      REAL                GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX), GAMMA(OMMAX),
     *                    GAMMAT(OMMAX)
C
C
C     Bepaling van de straal van een puntwervel:
      Q = 1
      R = 2
10    DXR = ( GAMMAX(Q) - GAMMAX(R) )**2
      DYR = ( GAMMAY(Q) - GAMMAY(R) )**2
      DR = SQRT ( DXR + DYR)
      WORT1 = MAX (0.0 , (EPSIL * (T - GAMMAT(Q))) )
      WORT2 = MAX (0.0 , (EPSIL * (T - GAMMAT(R))) )
      ST1 = SQRT(WORT1)
      ST2 = SQRT(WORT2)
      HULP = 0
C
C     De afweging of twee werveldeeltjes worden geclusterd wordt
C     bepaald door de afstand tussen de twee deeltjes en of ze
C     een verschillend teken hebben. Voor de duidelijkheid van de
C     zwart/wit plot is het aan te raden de grensvlakken, daar waar
C     positieve en negatieve deeltjes zitten, dat accent te geven
C     van de overheersende wervelsterkte in de betreffende rand-
C     contouren.
C
      IF ( ( DR .LT. (ST1 + ST2))    .AND.
     *     ((GAMMA(Q)*GAMMA(R)) .LE. 0.) ) THEN
         HULP = 1
```

```
C
C         In de literatuur wordt de nieuwe plaats (x,y) van de
C         nieuwe wervel bepaald door de logaritme te nemen over
C         de afstand. De vereenvoudiging die gemaakt wordt is
C         dat de verdeling lineair wordt genomen over de afstand.
C         zie verhaal van Longuet-Higgins
C
          IF ( (ABS(GAMMA(Q)) .LT. 1.E-12 )  .AND.
     *         (ABS(GAMMA(R)) .LT. 1.E-12 )  ) THEN
            GAMMAX(Q) = GAMMAX(Q) + ( (GAMMAX(R)-GAMMAX(Q)) / 2)
            GAMMAY(Q) = GAMMAY(Q) + ( (GAMMAY(R)-GAMMAY(Q)) / 2)
          ELSE
            GAMMAX(Q) = GAMMAX(Q) + ( (GAMMAX(R)-GAMMAX(Q)) *
     *            ABS(GAMMA(R)) ) / ( ABS(GAMMA(Q)) + ABS(GAMMA(R)) )
            GAMMAY(Q) = GAMMAY(Q) + ( (GAMMAY(R)-GAMMAY(Q)) *
     *            ABS(GAMMA(R)) ) / ( ABS(GAMMA(Q)) + ABS(GAMMA(R)) )
          END IF
C
C
C         Bepaling van de nieuwe tijd van de wervel. Omdat er enkel
C         wordt geclusterd voor positieve en negatieve wervels mag
C         de tijd niet op de manier worden bepaald als beschreven in
C         het verhaal van Longuet-Higgins.
C         Er dient te worden gewerkt met een weging naar de grootte
C         van de circulatie.
C
          IF ( (ABS(GAMMA(Q)) .LT. 1.E-12 )  .AND.
     *         (ABS(GAMMA(R)) .LT. 1.E-12 )  ) THEN
           GAMMAT(Q) = T
          ELSE
           DQT = T - GAMMAT(Q)
           DRT = T - GAMMAT(R)
           BREUK1 = ABS(GAMMA(Q)) / ( ABS(GAMMA(Q))+ABS(GAMMA(R)) )
           BREUK2 = ABS(GAMMA(R)) / ( ABS(GAMMA(Q))+ABS(GAMMA(R)) )
           GAMMAT(Q) = (T-DQT * BREUK1) + (T-DRT * BREUK2 ) - T
          END IF
C
C         Nieuwe circulatie is de som van de twee wervels
C
          GAMMA(Q) = (GAMMA(Q) + GAMMA(R))
C
C         opschuiven van de waarden in de array voor de wervels
C
          DO 20 S = R , (WERVEL-1)
            GAMMA(S)  = GAMMA(S+1)
            GAMMAX(S) = GAMMAX(S+1)
            GAMMAY(S) = GAMMAY(S+1)
            GAMMAT(S) = GAMMAT(S+1)
20        CONTINUE
        GAMMA(WERVEL)  = 0.
        GAMMAX(WERVEL) = 0.
        GAMMAY(WERVEL) = 0.
        GAMMAT(WERVEL) = 0.
        WERVEL = WERVEL-1
      ENDIF
C     de waarde van Q wordt wanneer er een interactie is met één
```

```
C     verhoogd. Er wordt niet verder gekeken naar andere interacties
C     tussen de nieuwe puntwervel (daartoe is de hulpvariabele HULP)
C     en andere interacties tussen de deeltjes.
      R = R + 1
      IF ( (HULP .EQ. 0 ) .AND. (R .LE. WERVEL) ) GOTO 10
C
C     op dit moment zijn alle interacties tussen het eerste deeltje
C     Q en andere deeltjes bepaald. Nu dus de interactie tussen het
C     tweede deeltje (Q = Q+1) en wederom de rest van de deeltjes.
      Q = Q+1
      R = Q+1
      IF (Q .LE. WERVEL) GOTO 10
C     end van subroutine CLUST
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                              C
C  HEROME herverdeling van omega naar de knooppunten                           C
C         de coefficienten A(1), A(2), A(3) en A(4) worden bepaald             C
C                                                                              C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE HEROME ( N      ,NMMAX ,OMMAX ,OMEGA ,GAMMAX,GAMMAY,
     *                    GAMMA ,DELTAX,DELTAY,WERVEL )
C
      INTEGER             N      ,HULPI ,HULPJ ,I_J   ,I     ,J     ,
     *                    P      ,NMMAX ,OMMAX ,WERVEL
C
      REAL                DELTAX,DELTAY,POSX  ,POSY  ,OMRT  ,OMLT  ,
     *                    OMRB  ,OMLB  ,A1    ,A2    ,A3    ,A4
C
      REAL                GAMMA(OMMAX) ,GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX),
     *                    OMEGA(NMMAX)
C
C     Herverdeling van de circulatie van puntwervels naar de
C     knooppunten met wervelsterkte van het raster.
C
      DO 10 I_J = 1 , NMMAX
         OMEGA(I_J) = 0.
10    CONTINUE
      DO 20 P = 1 , WERVEL
        A1 = 0.
        A2 = 0.
        A3 = 0.
        A4 = 0.
        HULPI = (NINT ( GAMMAX(P) / DELTAX ) + 1)
        HULPJ = (NINT ( GAMMAY(P) / DELTAY ) + 1)
        POSX  = (HULPI -1 ) * DELTAX
        POSY  = (HULPJ -1 ) * DELTAY
C       Bepaling van de teller I_J
        I     = HULPI
        J     = HULPJ
        I_J   = I + ( J-1)*N
C
C       Bepaling van de herverdelingen voor de wervelsterkte
```

```
C
      IF (GAMMAX(P) .GE. POSX .AND. GAMMAY(P) .GE. POSY ) THEN
         A1 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (POSY + DELTAY -
     *          GAMMAY(P)))
         A2 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (POSY + DELTAY - GAMMAY(P)))
         A3 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - POSY))
         A4 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (GAMMAY(P) - POSY))
         OMLB  = (A1 * GAMMA(P)) / ( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMRB  = (A2 * GAMMA(P)) / ( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMLT  = (A3 * GAMMA(P)) / ( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMRT  = (A4 * GAMMA(P)) / ( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMEGA(I_J)          = OMEGA(I_J) + OMLB
         OMEGA(I_J + 1)      = OMEGA(I_J + 1) + OMRB
         OMEGA(I_J + N)      = OMEGA(I_J + N) + OMLT
         OMEGA(I_J + N + 1) = OMEGA(I_J + N + 1) + OMRT
      ELSE IF (GAMMAX(P) .LE. POSX .AND. GAMMAY(P) .GE. POSY ) THEN
         A1 = ((POSX - GAMMAX(P)) * (POSY + DELTAY - GAMMAY(P)))
         A2 = ((GAMMAX(P) - (POSX - DELTAX)) * (POSY + DELTAY -
     *          GAMMAY(P)))
         A3 = ((POSX -  GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - POSY))
         A4 = ((GAMMAX(P) - (POSX - DELTAX)) * (GAMMAY(P) - POSY))
         OMRB  = (A2 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMLB  = (A1 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMRT  = (A4 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMLT  = (A3 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMEGA(I_J)          = OMEGA(I_J) + OMRB
         OMEGA(I_J - 1)      = OMEGA(I_J - 1) + OMLB
         OMEGA(I_J + N)      = OMEGA(I_J + N) + OMRT
         OMEGA(I_J + N - 1) = OMEGA(I_J + N - 1) + OMLT
      ELSE IF (GAMMAX(P) .LE. POSX .AND. GAMMAY(P) .LE. POSY ) THEN
         A1 = ((POSX - GAMMAX(P)) * (POSY - GAMMAY(P)))
         A2 = ((GAMMAX(P) - (POSX- DELTAX)) * (POSY - GAMMAY(P)))
         A3 = ((POSX - GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - (POSY - DELTAY)))
         A4 = ((GAMMAX(P) - (POSX-DELTAX)) * (GAMMAY(P) - (POSY -
     *          DELTAY)))
         OMRT  = (A4 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMLT  = (A3 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMRB  = (A2 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMLB  = (A1 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMEGA(I_J)          = OMEGA(I_J) + OMRT
         OMEGA(I_J - 1)      = OMEGA(I_J - 1) + OMLT
         OMEGA(I_J - N)      = OMEGA(I_J - N) + OMRB
         OMEGA(I_J - N - 1) = OMEGA(I_J - N - 1) + OMLB
      ELSE IF (GAMMAX(P) .GE. POSX .AND. GAMMAY(P) .LE. POSY ) THEN
         A1 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (POSY - GAMMAY(P)))
         A2 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (POSY - GAMMAY(P)))
         A3 = ((POSX + DELTAX - GAMMAX(P)) * (GAMMAY(P) - (POSY -
     *          DELTAY )))
         A4 = ((GAMMAX(P) - POSX) * (GAMMAY(P) - (POSY-DELTAY)))
         OMLT  = (A3 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMRT  = (A4 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMLB  = (A1 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMRB  = (A2 * GAMMA(P))/( (DELTAX * DELTAY)**2)
         OMEGA(I_J)          = OMEGA(I_J) + OMLT
         OMEGA(I_J + 1)      = OMEGA(I_J + 1) + OMRT
         OMEGA(I_J - N)      = OMEGA(I_J - N) + OMLB
```

```
            OMEGA(I_J - N + 1) = OMEGA(I_J - N + 1) + OMRB
         ELSE
            WRITE(*,*) 'ERROR BIJ VERDELING VAN OMEGA'
            STOP
         END IF
20    CONTINUE
C
C     END VAN SUBROUTINE HEROME
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                      C
C  subroutine RESULT voor de uitvoer van gegevens. De waarden worden   C
C  naar de file 'result' weggeschreven                                 C
C                                                                      C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE RESULT ( N      ,M      ,NMMAX ,OMMAX ,U     ,V     ,
     *                    OMEGA  ,GAMMAX,GAMMAY,GAMMA ,PSI   ,WERVEL,
     *                    GAMMAU,GAMMAV,T      ,DELTAT)
C
      INTEGER             N      ,M      ,I_J   ,NM    ,NMMAX ,OMMAX ,
     *                    P      ,WERVEL
C
      REAL                OMEGA(NMMAX) , U(NMMAX)     , V(NMMAX)      ,
     *                    PSI(NMMAX)    ,GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX),
     *                    GAMMA(OMMAX) ,GAMMAU(OMMAX), GAMMAV(OMMAX)
C
      CHARACTER*9         FILNM3
      FILNM3 = 'pXXXX.rlt'
      WRITE (FILNM3,5) WERVEL
5     FORMAT ('p',I4,'.rlt')
      do 8 ic=1, 8
        if (filnm3(ic:ic).eq.' ') filnm3(ic:ic)='0'
8     continue
C
      OPEN (UNIT = 130, FILE = FILNM3, STATUS = 'UNKNOWN')
      DO 20 P=1, WERVEL
        WRITE (130,10) P          ,GAMMAU(P) , GAMMAV(P) ,
     *                 GAMMAX(P) ,GAMMAY(P) ,DELTAT      ,
     *                 T          ,GAMMA(P)
10      FORMAT ('P:',I5,' Up:',F4.2,' Vp:',F4.2,' Xp :',
     *          F5.2,' Yp :',F5.2,' dT:',F4.2,' T :',F5.2,
     *          'Gp:',F7.4 )
20    CONTINUE
      NM = N*M
      DO 40 I_J = 1, NM
        WRITE (130,30) I_J, PSI(I_J), U(I_J), V(I_J),
     *                 OMEGA(I_J)
30      FORMAT ('I_J :',I5,' PSI :',F8.3,' U :',F8.3,
     *          ' V :',F8.3,'OMEGA :',F8.3)
40    CONTINUE
      CLOSE (UNIT = 130)
C
C     end van subroutine RESULT
```

```
      RETURN
      END
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                     C
C  subroutine voor de uitvoer naar het netwerk                        C
C  POINTS                                                             C
C                                                                     C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
      SUBROUTINE POINTS ( OMMAX ,GAMMAX,GAMMAY,WERVEL,T     ,M     ,
     *                    N     ,DELTAX,DELTAY,TOTALW,LRIB  ,PRIB  ,
     *                    U1    ,REDDT ,NUTURB,GAMFAC,GAMMA ,TDPLT ,
     *                    TETHA ,TETHA0,ALPHA ,EPSIL ,TOTALT)
C
      INTEGER             M     ,N     ,OMMAX ,P     ,WERVEL,TOTALW
      REAL                DELTAX,DELTAY,T     ,REDDT ,NUTURB,U1    ,
     *                    GAMFAC,LRIB  ,PRIB  ,TDPLT ,TETHA ,TETHA0,
     *                    ALPHA ,EPSIL ,TOTALT
C
      REAL                GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX),GAMMA(OMMAX)
C
      CHARACTER*30        FILE9
      FILE9 = 'points3.n'
C
      OPEN (UNIT = 140, FILE = FILE9, STATUS = 'UNKNOWN')
C     wegschrijven van gegevens uit de invoerfile die op het
C     beeld komen van de plot.
      IF (T .EQ. 0.) THEN
        WRITE(140,*) N
        WRITE(140,*) M
        WRITE(140,*) DELTAX
        WRITE(140,*) DELTAY
        WRITE(140,*) TOTALT
        WRITE(140,*) TOTALW
        WRITE(140,*) LRIB
        WRITE(140,*) PRIB
        WRITE(140,*) U1
        WRITE(140,*) REDDT
        WRITE(140,*) NUTURB
        WRITE(140,*) GAMFAC
        WRITE(140,*) TDPLT
        WRITE(140,*) TETHA
        WRITE(140,*) TETHA0
        WRITE(140,*) ALPHA
        WRITE(140,*) EPSIL

      ENDIF
      WRITE (140,*) WERVEL
      DO 20 P=1, WERVEL
C
C     Waarden voor de plot worden vermenigvuldigd met grote waarden
C     om zo klein mogelijke datafiles te krijgen.
C
        WRITE (140,19) (1000*GAMMAX(P)), (1000*GAMMAY(P)),
```

```
     *                    (10000*GAMMA(P))
19    FORMAT(F7.3,1X,F7.3,1X,F9.6)
20    CONTINUE
      WRITE (140,*) T
C
C     end van subroutine POINTS
      RETURN
      END
```

LISTING VAN HET PLOTPROGRAMMA VORTEX.PLT

```
C       program bodemribbel
C
C
        IMPLICIT CHARACTER*6  (S)
        INTEGER          P      ,M      ,N      ,WERVEL,TOTALW,KLEUR,
     *                   OMMAX  ,Q      ,AANTAL,TELLER,OUTPUT
        REAL             PI     ,X0     ,Y0     ,X      ,KRIB   ,
     *                   Y      ,DELTAX,DELTAY,U1     ,NUTURB,
     *                   LRIB   ,HRIB   ,PRIB   ,REDDT  ,ALPHA  ,TETHA  ,
     *                   TETHA0,TDPLT  ,GAMFAC,X0RIB  ,Y0RIB  ,
     *                   TOTALT,ALPHA1,XW1    ,XW2    ,XW3    ,
     *                   YW1    ,YW2    ,YW3
        PARAMETER        (OMMAX = 15000)
        REAL             GAMMAX(OMMAX), GAMMAY(OMMAX), GAMMA(OMMAX)

        LOGICAL          ISKEY

        CHARACTER*35     FILE2
        FILE2(1:17) = 'C:\FORTRAN\CASE3\'

        PARAMETER (PI = 3.14159265)
C
C       De waarden voor de bodem ribbel alsmede de afmetingen van het
C       Gebied moeten uit datasets worden gelezen.
C
        WRITE(*,*) ' VOER DE IN TE LEZEN FILE IN (POINTS3.n)  : '
        READ(*,*) FILE2(18:30)
        WRITE(*,*) 'GRAFISCHE UITVOER NAAR LASERJET [1] OF SCHERM [2]:'
        READ(*,*) OUTPUT
        OPEN (UNIT = 210, FILE = FILE2, STATUS ='UNKNOWN')
        READ(210,*) N
        READ(210,*) M
        READ(210,*) DELTAX
        READ(210,*) DELTAY
        READ(210,*) TOTALT
        READ(210,*) TOTALW
        READ(210,*) LRIB
        READ(210,*) PRIB
        READ(210,*) U1
        READ(210,*) REDDT
        READ(210,*) NUTURB
        READ(210,*) GAMFAC
        READ(210,*) TDPLT
        READ(210,*) TETHA
        READ(210,*) TETHA0
        READ(210,*) ALPHA
        READ(210,*) EPSIL
C
C
        DO 5 P = 1 , OMMAX
```

```
          GAMMAX(P) = 0.
          GAMMAY(P) = 0.
          GAMMA(P)  = 0.
5       CONTINUE
C
C       Vaste waarden.
C
        N = 3*N-2
c       of N=3*(N-1)+1
        FACT = MIN (10.7/(N*DELTAX), 5.5/(M*DELTAY) )
        AANTAL = INT(TOTALT/TDPLT)
        C1 = (N-1)*DELTAX+10*DELTAX
        D1 = DELTAY
        C2 = (N-1)*DELTAX+10*DELTAX
        D2 = (M-1)*DELTAY+DELTAY
        C3 = 0+10*DELTAX
        D3 = (M-1)*DELTAY+DELTAY
        C0 = 0+10*DELTAX
        D0 = DELTAY
        DO 100 Q =1 , (AANTAL + 1)
          CALL PLOTS (0,0,0)
          CALL FACTOR (FACT)
          CALL NEWPEN(15)
          CALL PLOT (C0, D0, 3)
          CALL PLOT (C1, D1, 2)
          CALL PLOT (C2, D2, 2)
          CALL PLOT (C3, D3, 2)
          CALL PLOT (C0, D0, 2)
          KRIB = (2*PI)/(PRIB*LRIB)
          B = 1./ COS(PI/PRIB)
          HRIB = (PRIB * LRIB * LOG(B) )/(2*PI)
          X0RIB = 10*DELTAX
          Y0RIB = DELTAY
          X0 = 0.
          Y0 = 0.
C         Sturen van pen naar begin ribbel
          CALL PLOT (X0RIB,Y0RIB,3)
          DO 10 TELLER = 0, (3*(N-1))
            X = TELLER*DELTAX/3
            Y = Y0 + (1/KRIB) * LOG( 1./COS(KRIB*(X-X0)) )
            XRIB = (X0RIB + X)
            YRIB = (Y0RIB + Y)
            CALL PLOT ( XRIB, YRIB, 2)
            IF (X .GE. (LRIB/2) ) X0 = LRIB
            IF (X .GE. (1.5*LRIB) ) X0 = (2 * LRIB)
            IF (X .GE. (2.5*LRIB) ) X0 = (3 * LRIB)
10        CONTINUE
C
          WRITE (STRNG1,40) LRIB
40        FORMAT (F6.4)
          CALL GTEXT (2,2,'Lengte van de zandribbel [m]  :')
          CALL GTEXT (2,34,STRNG1)
C
          WRITE (STRNG2,41) HRIB
41        FORMAT (F6.4)
          CALL GTEXT (3,2,'Hoogte van zandribbel [m]     :')
```

```
      CALL GTEXT (3,34,STRNG2)
C
      WRITE (STRNG3,42) PRIB
42    FORMAT (F6.2)
      CALL GTEXT (4,2,'Polygonwaarde ribbel (Pr)     :')
      CALL GTEXT (4,34,STRNG3)
C
      ALPHA1 = (ALPHA*360/PI)
      WRITE (STRNG4,43) ALPHA1
43    FORMAT (F6.2)
      CALL GTEXT (5,2,'Tophoek van de bodemribbel [°]:')
      CALL GTEXT (5,34,STRNG4)
C
      WRITE (STRNG5,44) (100000*EPSIL)
44    FORMAT (F6.5)
      CALL GTEXT (6,2,'"Cluster"visc.  [*1E-5 m²/sec]:')
      CALL GTEXT (6,34,STRNG5)
C
      WRITE (STRNG6,45) (1000*NUTURB)
45    FORMAT (F6.5)
      CALL GTEXT (7,2,'Kin.viscositeit [*1E-3 m²/sec]:')
      CALL GTEXT (7,34,STRNG6)
C
      WRITE (STRN14,47) N
47    FORMAT (I6)
      CALL GTEXT (8,2,'Aantal rasterpunten  [N]      :')
      CALL GTEXT (8,34,STRN14)
C
      WRITE (STRN15,49) M
49    FORMAT (I6)
      CALL GTEXT (9,2,'Aantal rasterpunten  [M]      :')
      CALL GTEXT (9,34,STRN15)


      CALL GTEXT (2,44,'Aantal deeltjes in plot :')
C
      WRITE (STRNG8,51) U1
51    FORMAT (F6.4)
      CALL GTEXT (3,44,'Stroomsnelheid   [m/s]  :')
      CALL GTEXT (3,69,STRNG8)
C
      WRITE (STRN16,53) TETHA
53    FORMAT (F6.3)
      CALL GTEXT (4,44,'Golfhoeksnelheid [rad/s]:')
      CALL GTEXT (4,69,STRN16)
C
      WRITE (STRN17,55) TETHA0
55    FORMAT (F6.3)
      CALL GTEXT (5,44,'Faseverschuiving [rad]  :')
      CALL GTEXT (5,69,STRN17)
C
      WRITE (STRNG9,57) REDDT
57    FORMAT (F6.2)
      CALL GTEXT (6,44,'Deeltjes per tijdstap   :')
      CALL GTEXT (6,69,STRNG9)
C
```

```
          ENDIF
          GOTO 80
90        CONTINUE
          PAUSE 999
100     CONTINUE
        CALL PLOT (0.,0.,999)
C
        END
```

```
      CALL GTEXT (7,44,'Rekentijd [sec]          :')
C
      WRITE (STRN11,59) Q
59    FORMAT (I4)
      CALL GTEXT (8,44,'Plotnummer :')
      CALL GTEXT (8,57,STRN11)
C
      WRITE (STRN12,61) (aantal+1)
61    FORMAT (I6)
      CALL GTEXT (8,63,'van  :')
      CALL GTEXT (8,69,STRN12)
C
      CALL GTEXT (9,52,'Voor vervolg druk ENTER')
      READ(210,*) WERVEL
      DO 70 P =1, WERVEL
         READ(210,*) GAMMAX(P), GAMMAY(P), GAMMA(P)
         IF (OUTPUT .EQ. 2) THEN
           IF (GAMMA(P) .LE.0.) THEN
              KLEUR = 4
           ELSE IF (GAMMA(P) .GT. 0.) THEN
              KLEUR = 14
           END IF
         ELSE
           KLEUR = 15
         ENDIF
         XW1 = GAMMAX(P)/1000 + 10*DELTAX
         YW1 = GAMMAY(P)/1000 + DELTAY
         XW2 = GAMMAX(P)/1000 + 10*DELTAX + LRIB
         YW2 = GAMMAY(P)/1000 + DELTAY
         XW3 = GAMMAX(P)/1000 + 10*DELTAX + 2*LRIB
         YW3 = GAMMAY(P)/1000 + DELTAY
         CALL SETPIX( XW1 , YW1 , KLEUR)
         CALL SETPIX( XW2 , YW2 , KLEUR)
         CALL SETPIX( XW3 , YW3 , KLEUR)
C
70    CONTINUE
      READ(210,*) T
      WRITE (STRN10,71) T
71    FORMAT (F6.3)
      CALL GTEXT (7,69,STRN10)
c
c     variabele tekst in plot
c
      CALL GTEXT (12,6,'Rekentijd [s]      :')
      CALL GTEXT (12,28,STRN10)

      WRITE (STRN19,72) (TETHA*T/(2*pi))
72    FORMAT (F6.3)
      CALL GTEXT (13,6,'Rekenfase (t/T) [-]:')
      CALL GTEXT (13,28,STRN19)
c
      WRITE (STRNG7,73) (3*WERVEL)
73    FORMAT (I6)
      CALL GTEXT (2,69,STRNG7)
80    IF (ISKEY() )THEN
        GOTO 90
```

900405