Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Inventarisatie van een Inventarisspel

(Engelse titel: The Tally Game)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

ROSE BOGAERS

Delft, Nederland
November 2016

Copyright © 2016 door Rose Bogaers. Alle rechten voorbehouden.

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Inventarisatie van een Inventarisspel . . . ”

(Engelse titel: “The Tally Game”)

ROSE BOGAERS

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. R.J. Fokkink

Overige commissieleden

Dr. J.L.A. Dubbeldam

. . .

Dr. B. van den Dries

. . .

November, 2016

Delft

Voorwoord

De bachelor Technische Wiskunde te TU Delft wordt afgerond met een Bachelor Eind Project (BEP) waar gedurende een kwartaal aan gewerkt wordt. Voor dit project heb ik een onderwerp gezocht in de richting Game Theory en zo werd ik gekoppeld aan mijn begeleider Robbert Fokkink.
Mijn opdracht was om een ondergrens te bepalen voor een spel, beschreven in een artikel van Tim Nonner en Alexander Souza.
De eerste paar weken heb ik me vooral beziggehouden met het bekend raken met Game Theory en het proberen te begrijpen van het artikel dat ik gekregen heb. Hierna heb ik vooral tijd gespendeerd aan het zoeken van een oplossing.
Elke week, en op het laatst wel twee keer in de week, had ik een uurtje begeleiding van meneer Fokkink. Zo kon ik eventuele vragen stellen en hielp meneer Fokkink mij de goede richting op. Ik wil meneer Fokkink graag bedanken voor de fijne hulp die ik gekregen heb om mijn project op tijd af te ronden.

Veel plezier tijdens het lezen van het verslag.

Rose Bogaers
Delft, November 2016

Inhoudsopgave

Inleiding **1**

1 Introductie Speltheorie **3**
1.1 Het spel van Alice en Bob . . . 3
1.1.1 Dobbelsteen met 1, 2 of 3 . . . 3
1.1.2 Twee verschillende dobbelstenen . . . 4
1.1.3 Drie verschillende dobbelstenen . . . 5
1.2 Minimax Stelling . . . 6
1.2.1 Zadelpunten . . . 7
1.2.2 Gedomineerde strategieën verwijderen . . . 7
1.2.3 Gelijkmakende strategie . . . 7
1.3 Oneindig veel dobbelstenen . . . 8

2 The Generalized Tally Game **11**
2.1 The Tally Game . . . 11
2.2 The Generalized Tally Game . . . 12
2.2.1 Integraalvergelijking . . . 12
2.2.2 Bewijs continuïteit $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ . . . 12
2.2.3 Randvoorwaarden . . . 14
2.2.4 Kansdichtheid . . . 14

3 Nieuwe grenzen op de waarde van het spel **21**
3.1 De ondergrens . . . 21
3.1.1 Alice kiest één vast getal . . . 21
3.1.2 Alice kiest twee vaste getallen . . . 22
3.2 De bovengrens . . . 23
3.2.1 Andere kansdichtheid . . . 23

Conclusie **31**

Bibliografie **33**

A Appendices **35**
A.1 Figuur kansdichtheid f . . . 35
A.2 Bewijs lemma 6 . . . 35
A.2.1 Integraal berekenen . . . 35
A.2.2 Plot . . . 36
A.3 Figuur kansdichtheid f en g . . . 36
A.4 Lemma 12. . . . 37
A.4.1 Integraal berekenen . . . 37
A.4.2 Plot . . . 37

Inleiding

De opdracht die ik heb gekregen voor mijn Bachelor Eind Project is om een artikel te lezen van Tim Nonner en Alexander Souza. Het artikel heet *Approximating the Joint Replenishment Problem with Deadlines* [1]. Nadat ik het artikel heb gelezen en het in mijn eigen woorden heb kunnen weergeven was het aan mij om een ondergrens te zoeken en de bovengrens te verscherpen van een spel gedefinieerd in paragraaf 2.4 van het artikel. Het spel, *The Generalized Tally Game*, is van belang voor de optimale bevoorrading van warenhuizen. Het artikel gaat over het benaderen van de *Joint Replenishment Problem* (JRP). Het doel van de JRP is om de bestelkosten te verminderen door middel van het combineren van bestellingen is twee fases. Eerst bij een handelaar en daarna bij een magazijn.

In het eerste hoofdstuk zal ik de lezer bekend maken met een aantal begrippen uit de Speltheorie. Daarna zal ik aan de had van een vereenvoudigd spel de lezer de lezer een idee geven hoe de Speltheorie is zijn werk gaat.
Het tweede hoofdstuk is gewijd aan het uitleggen van *The Generalized Tally Game* uit het artikel van Nonner en Souza. Hier wordt het spel in mijn eigen woorden uitgelegd en laat ik zien hoe Nonner en Souza aan hun resultaat zijn gekomen.
In het laatste hoofdstuk zal ik proberen een ondergrens te vinden en de bovengrens te verscherpen.

1

Introductie Speltheorie

In dit hoofdstuk zal ik aan de hand van een voorbeeld wat meer inzicht geven in de speltheorie.
We gaan een vereenvoudigd spel spelen, gebaseerd op het spel van Nonner en Souza, zodat het theoretische probleem in het volgende hoofdstuk duidelijker is.
Allereerst spelen we een drietal spellen, steeds een gradatie moeilijker, en vervolgens wordt er theorie gegeven over de speltheorie. Tot slot zal het spel worden opgelost met oneindig veel dobbelstenen.

1.1. Het spel van Alice en Bob

We spelen een spel met Alice en Bob. Alice kiest een geheim getal 1, 2 of 3. Bob kiest een merkwaardige dobbelsteen met maar drie kanten.

Figuur 1.1: Dobbelsteen met 4 kanten

In de oudheid gebruikte men vaak een dobbelsteen met vier kanten. De kubusvormige dobbelsteen waar we nu bekend mee zijn, werd pas veel later gebruikt.
Een dobbelsteen behoort zo gevormd te zijn dat elke zijde een even grote kans heeft om boven te komen liggen. Zo'n dobbelsteen heet *zuiver*. Neem aan dat Bob met een, niet bestaande, dobbelsteen met drie kanten gooit. Deze dobbelsteen heeft de getallen 1, 2 en 3 elk op één van zijn kanten weergegeven.

Bob gooit met deze dobbelsteen tot dat de som van de worpen groter is dan het geheime getal van Alice. Als dat gebeurt zegt Alice stop. Bob wint dan de waarde van het verschil tussen de som van de worpen zonder de laatste worp, en het geheime getal van Alice.
Bob mag elke dobbelsteen kiezen die 1, 2 of 3 gooit zolang de gemiddelde uitkomst van de dobbelsteen gelijk is aan 2.
Bijvoorbeeld mag Bob een dobbelsteen kiezen die alleen maar 2 gooit of een dobbelsteen die 1 of 3 gooit.

Nu de spelregels bekend zijn, kunnen we gaan spelen. Alice kiest een getal en houdt dat geheim, en Bob kiest een dobbelsteen en houdt dat geheim. Zodra ze allebei gekozen hebben, gaat het spel van start. Alice laat haar getal weten en Bob laat zijn dobbelsteen zien. We gaan nu de dobbelsteen gooien tot dat het geheime getal overschreden wordt.

1.1.1. Dobbelsteen met 1, 2 of 3

Laten we eerst het spel gaan spelen waarbij Bob de dobbelsteen kiest die 1, 2 of 3 gooit. De dobbelsteen gooit deze getallen alle drie met even grote waarschijnlijkheid zodat de gemiddelde uitkomst gelijk is aan 2.
Welk getal kan Alice het beste kiezen als Bob met deze dobbelsteen gooit?

Laten we D de dobbelsteen noemen die 1, 2 of 3 gooit en x het geheime getal van Alice.
We gaan nu onderzoeken wat de verwachte winst is voor Alice bij de keuze van Bob voor dobbelsteen D.

Alice kiest geheim getal $x = 1$ en Bob gooit 1 met de dobbelsteen. De som is niet groter dan het geheime getal dus Bob mag nog een keer gooien. Elk getal hij nu gooit, zorgt ervoor dat de som van de twee worpen groter is dan 1. Het verschil tussen de som van de worpen zonder de laatste worp en het getal van Alice is gelijk aan 0. Dus Bob moet niks aan Alice betalen.

Alice kiest geheim getal $x = 1$ en Bob gooit 2 met de dobbelsteen. De som van de worpen is groter dan het geheime getal van Alice dus Bob wint $0 - 1 = -1$. Bob moet dus 1 euro aan Alice betalen.

Alice kiest het geheime getal $x = 1$ en Bob gooit 3 met de dobbelsteen. De som van de worpen is weer groter dan het geheime getal dus Bob verliest weer 1 euro aan Alice.

De verwachte waarde van de uitkomst $\mathbb{E}[D,1]$ van deze dobbelsteen en geheim getal 1 is dan gelijk aan $0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Alice verdiend gemiddeld $\frac{2}{3}$ euro met geheim getal 1 als Bob deze dobbelsteen kiest.

Als we dit nu ook bereken voor de andere twee keuzes van de geheime getallen krijgen we de verwachte uitkomsten zoals in deze matrix. De waarden die zijn weergegeven zijn de bedragen die Bob aan Alice moet betalen. Het spel is niet eerlijk want Bob kan nooit winnen.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} D \\ \left[\begin{array}{c} \mathbb{E}[D,1] \\ \mathbb{E}[D,2] \\ \mathbb{E}[D,3] \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} D \\ \left[\begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{14}{27} \end{array}\right] \end{array}$$

Wat is nu de optimale keuze van het geheime getal voor Alice?
Alice wil zo veel mogelijk winst maken dus optimaal zal ze het getal 2 als haar geheime getal nemen.

1.1.2. Twee verschillende dobbelstenen

Laten we het spel wat spannender maken. Alice kiest nog steeds de getallen 1, 2 of 3 als geheim getal, maar Bob heeft nu de keuze uit twee dobbelstenen:

- Dobbelsteen E: Gooit alleen 2.
- Dobbelsteen F: Gooit 1 of 3, beide met even grote waarschijnlijkheid.

Het spel begint. Alice kiest een geheim getal en Bob kiest een dobbelsteen.
Ze laten beide het getal en de dobbelsteen aan elkaar zien en Bob begint met gooien.
De verwachte uitkomst per getal en per dobbelsteen wordt hieronder in een matrix weergegeven.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbb{E}[E,1] & \mathbb{E}[F,1] \\ \mathbb{E}[E,2] & \mathbb{E}[F,2] \\ \mathbb{E}[E,3] & \mathbb{E}[F,3] \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{5}{8} \end{array}\right] \end{array}$$

Als we vanuit Alice haar perspectief naar dit spel kijken zien we dat geheim getal 3 het altijd beter doet dan geheim getal 1. De getallen in de eerste rij zijn beide kleiner of gelijk aan de getallen in de derde rij. Dus Alice zal alleen geheime getallen 2 en 3 gaan kiezen.

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{5}{8} \end{array}\right] \end{array}$$

Als Alice geheim getal 3 kiest, zal Bob dobbelsteen F kiezen omdat hij dan het minste verliest. Als Bob dobbelsteen F kiest, zal Alice niet meer het getal 3 als geheim getal kiezen, maar getal 2, want dat levert haar meer op.
Alice zal gaan variëren tussen getal 2 en 3. Er zit dus geen zadelpunt in dit spel.

Stel, Alice kiest getal 2 met kans p en getal 3 met kans $1-p$. Dan moet Bob als hij dobbelsteen E kiest $1-p$ betalen en als hij dobbelsteen F kiest, moet hij $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}p$ betalen aan Alice.
Van deze twee kiest Bob natuurlijk de dobbelsteen met het minste verlies. Alice maximaliseert daarom het minimum. De optimale keuze is

$$1-p=\frac{5}{8}-\frac{5}{8}p$$

Dit geldt voor $p=\frac{3}{13}$, dus $(0,\frac{3}{13},\frac{10}{13})$ is haar optimale strategie. Of Bob nu dobbelsteen E of dobbelsteen F kiest, Alice wint altijd een bedrag van $\frac{10}{13}$. Op deze manier garandeert ze zichzelf een opbrengst.

Laten we nu vanuit Bobs perspectief naar het spel gaan kijken. We noemen q de kans dat hij dobbelsteen E kiest en $1-q$ de kans dat hij dobbelsteen F kiest.
Als Alice geheim getal 2 kiest moet Bob $\frac{5}{4}(1-q)$ aan Alice betalen. Kiest Alice geheim getal 3 dan moet Bob $q+\frac{5}{8}(1-q)$ aan haar betalen. Alice kiest natuurlijk het geheime getal dat haar het meeste opbrengt. Bob wil het maximale verlies minimaliseren.

$$\frac{5}{4}(1-q)=q+\frac{5}{8}(1-q)$$

Hieruit volgt dat $q=\frac{5}{13}$, dus $(\frac{5}{13},\frac{8}{13})$ is zijn optimale strategie. Voor elke keuze van het geheime getal van Alice blijft het verlies van Bob beperkt tot $\frac{10}{13}$.

1.1.3. Drie verschillende dobbelstenen

Laten we nu het spel gaan spelen waarbij Bob kan kiezen uit drie verschillende dobbelstenen. Alice kiest nog steeds de getallen 1, 2 of 3 als geheim getal.

- Dobbelsteen D: Gooit 1, 2 of 3, beide met even grote waarschijnlijkheid.
- Dobbelsteen E: Gooit alleen 2.
- Dobbelsteen F: Gooit 1 of 3, beide met even grote waarschijnlijkheid.

De verwachte uitkomst per getal en per dobbelsteen wordt hieronder in een matrix weergegeven.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{E}[D,1] & \mathbb{E}[E,1] & \mathbb{E}[F,1] \\ \mathbb{E}[D,3] & \mathbb{E}[E,2] & \mathbb{E}[F,2] \\ \mathbb{E}[D,3] & \mathbb{E}[F,3] & \mathbb{E}[F,3] \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{5}{4} \\ \frac{14}{27} & 1 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \end{array}$$

Zoals we zien is er geen zadelpunt, er is geen enkele waarde het minimum van een rij en het maximum van een kolom.
Nu zullen Alice en Bob gebruik moeten maken van gemengde strategieën.
Alice kiest getal 1 met kans p, getal 2 met kans q en getal 3 met kans r. Bob kiest dobbelsteen D met kans a, dobbelsteen E met kans b en dobbelsteen F met kans c.
We lossen dit probleem op door gebruik te te maken van de *game solver* van Ferguson [2].
We voeren de matrix in en drukken op *solve*. De *game solver* geeft ons de volgende informatie:

```
The matrix is
 0.667 1 0.5
 0.889 0 1.25
 0.519 1 0.625
The value is 0.71919.
An optimal strategy for Player I is:
 (0.65058,0.28081,0.06861)
An optimal strategy for Player II is:
 (0.30358,0.33698,0.35944)
```

De waarde van het spel is 0.71919. De optimale strategie voor Alice is $(0.65, 0.28, 0.07)$ en de optimale strategie voor Bob is $(0.30, 0.34, 0.36)$.

1.2. Minimax Stelling

De voorgaande spellen zijn opgelost met behulp van de *Minimax Stelling*. Minimax staat voor het *min*imaliseren van het *max*imaal haalbare voor tegenpartijen bij een competitie.

Stelling 1. *De Minimax Stelling [3]. Voor elk eindig tweepersonen nulsomspel,*

1. *er is een getal V, de waarde van het spel,*
2. *er is een gemengde strategie voor Speler 1 zodat zijn gemiddelde winst tenminste V is, wat Speler 2 ook doet, en*
3. *er is een gemengde strategie voor Speler 2 zodat zijn gemiddelde verlies ten hoogste V is, wat Speler 1 ook doet.*

In dit geval is Alice Speler 1 en Bob Speler 2.

We zullen in deze paragraaf een aantal begrippen definieëren die van belang zijn in de *Game Theory* en een aantal methodes uitleggen om met behulp van de *Minimax stelling* tot een optimale oplossing te komen.

Definitie 1. In de speltheorie is de *strategie* [4] van een speler, een van de opties die hij of zij kan kiezen in een situatie waarbij de uitkomst niet alleen van zijn eigen keuzes afhangt maar ook van de keuze van anderen. Een spelers strategie bepaalt welke keuze de speler maakt in elk stadium van het spel.

Het bovengenoemde spel is een voorbeeld van een eindig tweepersonen nulsomspel.

Definitie 2. Bij een *tweepersonen nulsomspel* [3] is de payoff van de ene speler gelijk aan de negatieve payoff van de andere speler.

De *payoff* is de uitbetaling van het spel, oftwel de winst of verlies van een speler.

Definitie 3. Een *pure strategie* [4] is voorzien van een complete definitie van hoe een speler het spel zal spelen. In het bijzonder bepaalt het welke keuze een speler zal maken voor elke mogelijke situatie waar hij of zij zich in kan bevinden.
Als we nu een kans aan elke pure strategie toewijzen, spreken we van een *gemengde strategie* [4]. Dit zorgt ervoor dat een speler een pure strategie willekeurig kan kiezen. Omdat kansen continu zijn, zijn er oneindig veel gemengde strategieën mogelijk voor een speler.

De *payoff matrix* van het spel in paragraaf 1.1 waarbij de twee strategieën van Bob zijn uitgezet tegen de geheime getallen van Alice, is hieronder weergegeven:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \end{array}$$

Een strategie van Bob bestaat uit een keuze voor een dobbelsteen. De keuze voor dobbelsteen E is een voorbeeld van een pure strategie, net als de keuze voor dobbelsteen F.
Als Bob dobbelsteen E zal kiezen met kans p en strategie F met kans $1-p$, spreken we van een gemengde strategie.

Stelling 2. *In zijn algemeenheid wordt een eindig tweepersonen nulsomspel weergegeven door (X, Y, A) [3]. Hier is X de niet-lege verzameling met strategieën van Speler 1, Y de niet-lege verzameling strategieën van Speler 2 en A is de payoff function die kan worden weergegeven door de matrix*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ met } a_{ij} = A(x_i, y_j)$$

Er volgen nu een aantal methodes die helpen bij het oplossen van een tweepersonen nulsomspel.

1.2.1. Zadelpunten

De optimale strategie bepalen van een eindig tweepersonen nulsomspel kan makkelijk opgelost worden door middel van zadelpunten, mits er een zadelpunt aanwezis is.

Definitie 4. *Zadelpunten* [3]. Als een willekeurige a_{ij} van de matrix A de eigenschap heeft dat

1. a_{ij} is het minimum is van de i-de rij, en
2. a_{ij} is het maximum is van de j-de kolom,

dan noemen we a_{ij} een zadelpunt. Als a_{ij} een zadelpunt is, kan Speler 1 tenminste a_{ij} winnen door rij i te kiezen, en Speler 2 kan ten hoogste a_{ij} verliezen door kolom j te kiezen. Hier is a_{ij} de waarde van het spel.

Dit zal verder toegelicht worden aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1. Stel we nemen de *payoff matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

waarbij Speler 1 tegen Speler 2 speelt.
In dit voorbeeld is 2 een zadelpunt, want het is het minimum van de tweede rij en het maximum van de eerste kolom. Het is optimaal voor Speler 1 om de tweede rij te kiezen en voor Speler 2 om de eerste kolom te kiezen. De waarde van het spel is 2. De optimale strategie voor Speler 1 is (0,1,0) en de optimale strategie voor Speler 1 is (1,0).

1.2.2. Gedomineerde strategieën verwijderen

Grote matrices mogen gereduceerd worden tot kleinere matrices indien een rij of een kolom gedomineerd wordt. [3].

- De i-de rij domineert de k-de rij als $a_{ij} \geq a_{kj}$ voor alle j.
- De j-de kolom domineert de k-de kolom als $a_{ij} \leq a_{ik}$ voor alle i.

1.2.3. Gelijkmakende strategie

Als er geen zadelpunt is, en we hebben het de matrix kunnen reduceren tot een 2 x 2 matrix, kunnen we het spel oplossen aan de hand van een gelijkmakende strategie [3].
In het algemeen kan ook een m x n matrix worden opgelost, maar dit gaat met het simplex algoritme en valt buiten de theorie in dit BSc rapport.

Voor een 2 x 2 matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kunnen de optimale strategieën en waarde van het spel als volgt bepaald worden.
De kansen p en $1-p$ worden toegewezen aan respectievelijk rij 1 en rij 2, en de kansen q en $1-q$ worden toegewezen aan respectievelijk kolom 1 en kolom 2. Speler 1 gebruikt de gemengde strategie $(p, 1-p)$ en Speler 2 gebruikt de gemengde strategie $(q, 1-q)$. Door de kansen per keuze van een speler gelijk aan elkaar te stellen, blijft de uitkomst hetzelfde, welke keuze de andere speler ook maakt.
Voor Speler 1 volgt er dan

$$ap + d(1-p) = bp + c(1-p)$$

Oplossen naar p,

$$p = \frac{c-d}{(a-b)+(c-d)}.$$

Voor Speler 2 volgt er dan

$$aq + b(1-q) = dq + c(1-q)$$

Oplossen naar q,

$$q = \frac{c-b}{(a-b)+(c-d)}$$

De verkregen waarden voor p en q zijn optimaal en hiermee kan de waarde van het spel berekend worden.

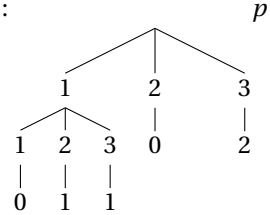
1.3. Oneindig veel dobbelstenen

Met behulp van de theorie zullen we in deze paragraaf het tweepersonen nulsomspel oplossen waarbij Bob oneindig veel strategieën heeft, oftewel waarbij hij uit oneindig veel dobbelstenen kan kiezen. Alice kiest nog steeds de getallen 1, 2 of 3 als geheim getal.
Een dobbelsteen voor Bob is een random getal met kansen p, q en r zodanig dat $p+2q+3r = 2$ en $p+q+r = 1$.
Er moet dus gelden dat$p = r$ dus er volgt $2p + q = 1$.
We noemen G de dobbelsteen met kans p voor getal 1, kans q voor getal 2 en kans r voor getal 3.
In het spel waarbij Bob kan kiezen uit twee dobbelstenen hebben we berekend dat het optimaal is voor Alice om geheim getal 2 met kans $\frac{3}{13}$ te kiezen en geheim getal 3 met kans $\frac{10}{13}$. We nemen in dit spel aan dat de optimale strategie voor Alice gelijk is aan $(0, \frac{3}{13}, \frac{10}{13})$.
Wat is nu de optimale strategie (p, q, r) voor Bob?

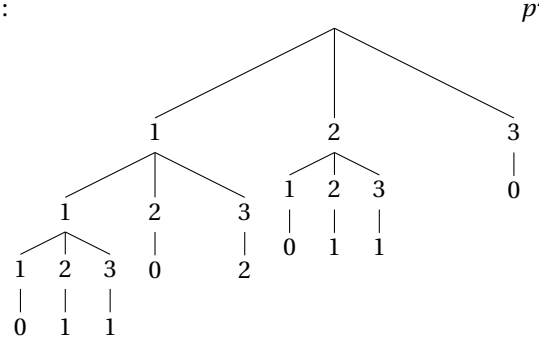
We gaan $\mathbb{E}[G, x]$ minimaliseren.
Er geldt dat

$$\mathbb{E}[G, x] = 0 \cdot \mathbb{E}[G, 1] + \frac{3}{13} \cdot \mathbb{E}[G, 2] + \frac{10}{13} \cdot \mathbb{E}[G, 3].$$

We gaan nu $\mathbb{E}[G, 2]$ en $\mathbb{E}[G, 3]$ berekenen. De mogelijke uitkomsten zijn in grafen weergegeven met de kansen p, q en r bij de takken van respectievelijk 1, 2 en 3.
$\mathbb{E}[G, 2]$: $p \cdot q \cdot 1 + p \cdot r \cdot 1 + r \cdot 2$



$\mathbb{E}[G, 3]$: $p^2 \cdot q \cdot 1 + p^2 \cdot r \cdot 1 + p \cdot r \cdot 2 + q^2 \cdot 1 + q \cdot r \cdot 1.$



Nu krijgen we de volgende vergelijking voor de verwachte uitkomst met dobbelsteen G.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G, x] &= \frac{3}{13} \cdot \mathbb{E}[G, 2] + \frac{10}{13} \cdot \mathbb{E}[G, 3] \\ &= \frac{3}{13} \cdot (pq + pr + 2r) + \frac{10}{13} \cdot (p^2 q + p^2 r + 2pr + q^2 + qr)\end{aligned}$$

We vullen $r = p$ en $q = 1 - 2p$ in de vergelijking in en stellen de afgeleide gelijk aan 0.
Er volgt dat $p = 0.24$.
De optimale strategie voor Bob, de strategie waarbij hij het minste verlies maakt, is om een dobbelsteen te kiezen die 0.24 keer op 1 valt, 0.52 keer op 2 en 0.24 keer op 3: $(0.24, 0.52, 0.24)$.
De verwachtingswaarde van de worpen is gelijk aan 2 en Bob heeft een verlies van 0.58.
Dit is aanzienlijk gunstiger voor Bob dan de eerder gevonden waarde van $\frac{10}{13}$. Nu Bob deze strategie gebruikt, zal Alice haar antwoord wijzigen. De optimale strategie voor beide spelers is nog niet berekend. Het probleem wat precies de waarde van dit spel is, blijft open.

2

The Generalized Tally Game

In dit hoofdstuk zullen twee black-jack achtige spellen geïntroduceerd worden, de *Tally Game* en de *Generalized Tally Game*. Deze twee spellen zijn afkomstig uit het artikel van Nonner en Souza [1].
Eerst zullen de twee spellen uitgelegd worden en daarna zal worden uitgewerkt hoe de bovengrens van Nonner en Souza is berekend.

2.1. The Tally Game

In de *Tally Game* krijgt Alice in het begin een getal x tussen 0 en 1. In elke ronde van het spel trekt Bob een random getal y uit een kansverdeling met kansdichtheid f die hij heeft gekregen. Deze kansverdeling heeft verwachtingswaarde $\mathbb{E}[Y] = 1/2$.
Het spel gaat dan als volgt:

- Als $x \geq y$ dan word het verschil tussen x en y de nieuwe waarde van x en Bob gaat door naar de volgende ronde.
- Als $x < y$ dan stopt het spel en Bob moet x aan Alice betalen.

In hoofdstuk 1 was Alice beperkt tot de geheime getallen 1, 2 en 3. Nu heeft Alice oneindig veel keuzes voor x.

Voorbeeld 2.

Gegeven een bepaalde kansdichtheid aan Bob en Alice krijgt het getal $x = \frac{1}{5}$. Als Bob dan $\frac{2}{3}$ trekt, stopt het spel en moet Bob $\frac{1}{5}$ betalen. Trekt Bob echter $\frac{1}{6}$, dan gaat het spel verder met $x - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$.

Het is een pessimistisch spel omdat Bob nooit kan winnen. Het doel van Bob is om zijn verlies te minimaliseren. Het spel is niet op te lossen aan de hand van de methode in het vorige hoofdstuk, want Alice was in het vorige hoofdstuk beperkt tot 3 strategieën ze heeft er in dit spel oneindig veel.
Merk op dat in de *Tally Game* de spelers geen invloed hebben op het spel. In de volgende paragraaf wordt een spel gedefinieerd waarbij dat wel het geval is.

Laat $Z(f,x)$ de uitkomst van het spel zijn, oftewel de uiteindelijke waarde van x die Bob aan Alice moet betalen.
$Z(f,x)$ is een stochast. Bob trekt de random getallen $Y_1, Y_2, \cdots$ en Alice zegt stop als $Y_1 + \cdots + Y_k$ groter dan x is. Hieruit volgt dat $Z(f,x) = |(Y_1 + \cdots + Y_{k-1}) - x|$.
Er geldt dus altijd dat $Z(f,x) \leq x$ en daaruit volgt dat $\mathbb{E}[Z(f,x)] \leq x$.

2.2. The Generalized Tally Game

De *Generalized Tally Game* is een uitbreiding op de *Tally Game* waarbij Bob de kansdichtheid nu zelf mag kiezen, maar waarbij Alice de beginwaarde x ook zelf mag kiezen. De vraag voor Bob bij de *Generalized Tally Game* is nu, hoe kies je de kansdichtheid zó dat de verwachte uitkomst minimaal is rekening houdend met de keuze van Alice voor de beginwaarde x?
We moeten dus de *worst case scenario*, gaan minimaliseren. Oftewel:
Minimaliseer

$$\max_{0\le x\le 1} \mathbb{E}[Z(f,x)] \tag{2.1}$$

2.2.1. Integraalvergelijking

We gaan de verwachte waarde van de uitkomt, $\mathbb{E}[Z(f,x)]$, schrijven in de vorm van een integraalvergelijking.

Stelling 3.

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = \int_0^x \mathbb{E}[Z(f,y)]f(x-y)dy + x\int_x^1 f(y)dy \tag{2.2}$$

Bewijs. We weten dat:

- Als $x \ge y$, dan is de verwachte uitkomst $\mathbb{E}[Z(f,x-y)]$, want de nieuwe x wordt $x-y$;
- Als $x < y$, dan is de uitkomst x.

Zoals bekend geldt $\mathbb{E}[g(x)] = \int g(x)f(x)dx$. In dit geval is $g(x)$ een stochastische variabele, namelijk de waarde van de uitkomst van het spel.
Omdat we twee verschillende uitkomsten hebben, kunnen we de verwachting als volgt opschrijven.
$\mathbb{E}[Z(f,x] = \int_0^x \mathbb{E}[Z(f,x-y)]\cdot f(y)dy + \int_x^1 x\cdot f(y)dy$ voor $x \in [0,1]$.
Als we nu $x-y$ voor y substitueren in de vergelijking, we laten de verdere technische details achterwegen, krijgen we de volgende integraalvergelijking:

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = \int_0^x \mathbb{E}[Z(f,y)]f(x-y)dy + x\int_x^1 f(y)dy \tag{2.3}$$

□

2.2.2. Bewijs continuïteit $\mathbb{E}[Z(f,x)]$

We gaan $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ berekenen via een differentiaalvergelijking dus we moeten aantonen dat de functie differentieerbaar is. Het is al lastig genoeg om te bewijzen dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ continu is.

Definitie 5. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$, en $f : A \to \mathbb{R}$. Laat $a \in A$.
We noemen f continu in het punt a als er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in A \text{ met } |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

We noemen $f : A \to \mathbb{R}$ continu als f continu is in ieder punt van A [5].

Lemma 1. *Zij $A = [0,1]$. Neem $x \in A$ willekeurig en definieer $0 < \delta \le 1$. Laat f een continue kansdichtheid. Defineer Z als het eerste getal $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ met $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \ge x$. Dan geldt $P(Z \text{ in } [x, x+\delta)) < \epsilon$.*

Bewijs. Stap 1: $P(Z \text{ in } [x,x+\delta)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + X_2.. + X_n \text{ in } [x,x+\delta))$.
Stap 2: We gaan nu aantonen dat er een $N \in \mathbb{N}$ is, zodat de som van de kansen met $M > N$ willekeurig klein is.
$X \le \frac{1}{4}$ met kans tenminste $\frac{1}{4}$.
Voor elke $\epsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat $P(X_1 + \cdots + X_N \ge 1) \ge 1 - \epsilon$.
Vervang X door een andere variabele Y met

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{als } X < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} & \text{als } X \ge \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$P(X_1+\cdots+X_N \geq 1) \geq (Y_1+\cdots+Y_N \geq 4) = 1-\binom{N}{0}(\frac{3}{4})^N - \binom{N}{1}(\frac{3}{4})^{N-1}\frac{1}{4} - \binom{N}{2}(\frac{3}{4})^{N-2}(\frac{1}{4})^2 - \binom{N}{3}(\frac{3}{4})^{N-3}(\frac{1}{4})^3$$
$$= 1-\binom{N}{0}(\frac{3}{4})^N$$

We hebben nu van een oneindig probleem een eindig probleem gemaakt.
Voor $M > N$ geldt $\sum_{n=M}^{\infty} P(Z \text{ in } n \text{ keer in } [x, x+\delta]) < \frac{\epsilon}{2}$.
Stap 3: Voor een eindige som van kansen kunnen we δ klein genoeg kiezen.
Kies ϵ zó dat voor willekeurige $n \leq N$ geldt $P(\text{Z in } n \text{ keer in } [x, x+\delta]) < \frac{\epsilon}{2N}$
Nu geldt er dat
$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z \text{ in } n \text{ keer in } [x, x+\delta]) = \sum_{n=1}^{N} P(Z \text{ in } n \text{ keer in } [x, x+\delta]) + \sum_{n=M}^{\infty} P(Z \text{ in } n \text{ keer in } [x, x+\delta]) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Hieruit volgt $P(Z \text{ in } [x, x+\delta)) < \epsilon$. □

Stelling 4. $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ *is continu in* x.

Bewijs. Zij $A = [0,1]$ en $\mathbb{E}[Z(f,x)] : A \to \mathbb{R}$. Gegeven is $\epsilon > 0$ en neem $a \in A$ willekeurig. We moeten bewijzen dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

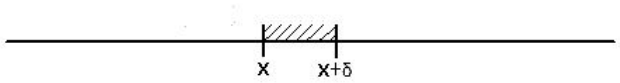
$$|\mathbb{E}[Z(f,x)] - \mathbb{E}[Z(f,a)]| < \epsilon$$

voor alle $x \in A$ met $|x-a| < \delta$.
Bob genereert een rij random getallen

$$X_1, X_1+X_2, X_1+X_2+X_3, \cdots$$

Alice zegt stop zodra voor de eerste k getallen geldt: $X_1+X_2+\cdots+X_k > x$.
$Z(f,x)$ is een random getal. Er geldt dat $Z(f,x) = |X_1+\cdots+X_{k-1}-x|$.
Neem $\delta > 0$ en $k \leq l$. Alice zegt stop als voor de eerste l getallen geldt: $X_1+X_2+\cdots+X_l > x+\delta$.
Er geldt dat $Z(f,x+\delta) = |X_1+\cdots+X_{l-1}-(x+\delta)|$.
Er zijn nu twee opties:

1. $k = l$, $Z(f,x) - Z(f,x+\delta) = \delta$
2. $k < l$, $Z(f,x) \leq \delta$ en van $Z(f,x+\delta)$ weet je niks. $Z(f,x) - Z(f,x+\delta) \leq 1$.



Figuur 2.1: Continuïteitsbewijs

Noem $P(E1)$ de kans op Event 1 en $P(E2)$ de kans op Event 2. Er geldt $P(E1)+P(E2) = 1$.

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z(f,x)-Z(f,x+\delta)]| &\leq \mathbb{E}[|Z(f,x)-Z(f,x+\delta)|] && \text{(Jensen's inequality)} \\ &\leq \delta \cdot P(E1) + 1 \cdot P(E2) \\ &= \delta \cdot P(E2^c) + 1 \cdot P(E2) \end{aligned}$$

Uit Lemma 1 volgt dat voor continue f geldt $P(x \leq X \leq x+\delta) \to 0$ als $\delta \to 0$.
Er volgt dus dat $P(E2) \to 0$ voor $\delta \to 0$.
Voor δ klein genoeg geldt $|\mathbb{E}[Z(f,x)-Z(f,x+\delta)]| < \epsilon$.
Hieruit volgt dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ continu is.

□

We hebben laten zien dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ continu is en hier laten we het ook bij. Het is veel werk om differentieerbaarheid ook nog aan te tonen, dit valt buiten dit BSc rapport. We nemen eenvoudig aan, net als Nonner en Souza, dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ differentieerbaar is.

2.2.3. Randvoorwaarden

We gaan nu integraalvergelijking (2.2) reduceren tot een differentiaalvergelijking. Hiervoor hebben we de aanname nodig dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ differentieerbaar is.

Stelling 5. *Er zijn twee randvoorwaarden bij de integraalvergelijking, namelijk:*

$$\mathbb{E}[Z(f,0)] = 0 \text{ en } \frac{d\mathbb{E}[Z(f,0)]}{dx} = 1. \tag{2.4}$$

Bewijs. De eerste randvoorwaarde spreekt voor zich. Als het geheime getal van Alice 0 is, is elke waarde die getrokken wordt groter of gelijk aan 0 en dus is de uitkomst gelijk aan 0.

Bij de tweede randvoorwaarde is het voldoende om aan te tonen dat voor elke $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ met $1-\epsilon \leq \frac{\mathbb{E}[Z(f,x)]}{x} \leq 1$ als $x < \delta$.
De kansdichtheid f ligt vast. Gegeven $\epsilon > 0$, kies x voldoende klein zó dat $P(X > x) \geq 1-\epsilon$. Er geldt dat $x(1-\epsilon) \leq \mathbb{E}[Z(f,x)] \leq x$. Hieruit volgt dat

$$1-\epsilon \leq \frac{\mathbb{E}[Z(f,x)]}{x} \leq 1$$

als x voldoende klein. Er geldt dus dat $\Pr[Z(f,x) = x] \to 1$ als $x \to 0$. Hiermee is het gevraagde bewezen.

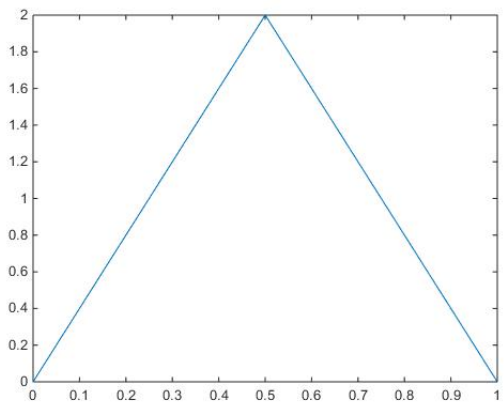
□

2.2.4. Kansdichtheid

In de *Generalized Tally Game* willen we dus een kansdichtheid f vinden zó dat de functie die voldoet aan vergelijking (2.2) en randvoorwaarden (2.4) rekeninghoudend met f, vergelijking (2.1) minimaliseert.
De precieze f is nog niet gevonden. Er is wel een simpele kansdichtheid die al een redelijk goede strategie is voor Bob. Dat is de volgende:

$$f(y) := \begin{cases} 4y & 0 \leq y \leq 1/2, \\ 4-4y & 1/2 < y \leq 1, \\ 0 & \text{anders}, \end{cases} \tag{2.5}$$

Die er als volgt uitziet:



Figuur 2.2: kansdichtheid f

Lemma 2.

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \mathbb{E}[Z(f,x)] < \frac{1}{3}$$

Voor het bewijs van dit lemma hebben we een aantal andere lemma's nodig.

Lemma 3.

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = \int_0^x 4(x-y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy + x(1-2x^2)$$

Bewijs. We passen eerst de integraal vergelijking (2.2) aan onze keuze van f aan.
Gegeven is dat

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = \int_0^x f(x-y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy + x\int_x^{\frac{1}{2}} f(y)\,dy + x\int_{\frac{1}{2}}^1 f(y)\,dy.$$

Als we nu onze keuze voor f invullen volgt dat

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = I_1 + I_2 + I_3$$

met

- $I_1 = \int_0^x 4(x-y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy$. Hier geldt dat $y \le x$ dus er volgt $0 \le y \le 1/2$ waardoor $f(x-y)$ gelijk is aan $4(x-y)$;
- $I_2 = x\int_x^{\frac{1}{2}} 4y\,dy$. Hier is $x < y$ en y loopt maar tot $\frac{1}{2}$ dus hier geldt ook dat $f(y)$ gelijk is aan $4y$;
- $I_3 = x\int_{\frac{1}{2}}^1 4-4y\,dy$. Hier is $x < y$ en $1/2 < y \le 1$ dus $f(y)$ is gelijk aan $4-4y$.

Er volgt nu dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(f,x)] &= \int_0^x 4(x-y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy + x\int_x^{1/2} 4y\,dy + x\int_{\frac{1}{2}}^1 4-4y\,dy \\ &= \int_0^x 4(x-y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy + x(1-2x^2)\end{aligned}$$

□

Lemma 4. $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ *voldoet aan de differentiaalvergelijking*

$$y'' - 4y' + 12x = 0$$

Bewijs. We nemen aan dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ twee keer differentieerbaar is. In dit bewijs noemen we $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ voor de gemakkelijkheid $z(x)$. We maken gebruik van Lemma 3.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}z(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^x 4(x-y)z(y)\,dy + \frac{d^2}{dx^2}x(1-2x^2) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^x 4x\cdot z(y)\,dy - \frac{d^2}{dx^2}\int_0^x 4y\cdot z(y)\,dy + \frac{d}{dx}x - 6x^2 \\ &= \frac{d^2}{dx^2}4x\cdot Z(y)|_0^x - \frac{d}{dx}4x\cdot z(x) - 12x \\ &= 4z(x) - 12x\end{aligned}$$

Dit is gelijk aan de differentiaalvergelijking $y'' - 4y' + 12x = 0$. □

Lemma 5. *Voor* $0 \le x \le 1/2$,

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2} + 3x.$$

Bewijs. Uit Lemma 4 weten we dat $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $y'' - 4y' + 12x = 0$. Deze gaan we nu oplossen rekening houdend met de randvoorwaarden (2.4).
De differentiaalvergelijking is een inhomogene differentiaalvergelijking van de vorm

$$y'' - 4y = -12x \tag{2.6}$$

We maken de vergelijking eerst homogeen: $y'' - 4y' = 0$ en lossen deze op door $y = e^{rx}$ in te vullen. Hieruit volgt $r = 2$ en $r = -2$.
De oplossing voor de homogene vergelijking is

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

Nu gaan we de particuliere oplossing zoeken. Dit doen we door $y = Ax$ in vergelijking (2.6) in te vullen.
Hier volgt: $-4Ax = -12x$ dus we zien dat $A = 3$. De particuliere oplossing is dus $3x$.
We hebben nu de oplossing van de differentiaalvergelijking gevonden, namelijk:

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + 3x$$

Als we nu de beginwaarden invullen vinden we voor $c_1 = -1/2$ en $c_2 = 1/2$.
De oplossing voor de differentiaalvergelijking wordt nu:

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2} + 3x$$

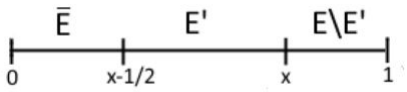
en hiermee is het gevraagde bewezen. □

Hier is $\mathbb{E}[Z(f,x)]$ berekend voor $0 \le x \le 1/2$. We weten nu wat de verwachte opbrengst is voor $x \le \frac{1}{2}$. Wat is de verwachte opbrengst voor $x > \frac{1}{2}$? Het blijkt dat in dat geval de keuze $x = \frac{1}{2}$ optimaal is voor Alice.

Lemma 6.

$$\max_{1/2 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(f,x)] = \mathbb{E}[Z(f,1/2)].$$

Bewijs. Neem een vaste $1/2 \le x \le 1$ en laat y een willekeurige waarde zijn die getrokken is in de eerste ronde van de *Generalized Tally Game* uit de kansverdeling met dichtheid f.
Laat E de gebeurtenis zijn dat $x - y \le 1/2$, en laat $\overline{E}$ de complementaire gebeurtenis zijn, dus $x - y > 1/2$. Laat vervolgens $E' \subseteq E$ de subgebeurtenis zijn dat $y \le x$, en zo geldt voor $E \setminus E'$ dat $y > x$.



Figuur 2.3: Gebeurtenissen Lemma 6

De verwachtingswaarde van $Z(f,x)$ kunnen we splitsen in de som van drie voorwaardelijke verwachtingen. Voor de duidelijkheid duiden we $Z(f,x)$ aan met X.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\overline{E}]P(\overline{E}) + \mathbb{E}[X|E']P(E') + \mathbb{E}[X|E \setminus E']P(E \setminus E') \tag{2.7}$$

We gaan nu de derde term van deze som analyseren. Merk op dat

$$P(E \setminus E') = \int_x^1 f(y)\,dy = \int_x^1 4 - 4y\,dy = 4y - 2y^2|_x^1 = 2(1-x)^2.$$

Ook geldt $\mathbb{E}[Z(f,x)|E \setminus E'] = x$. Dit komt omdat het spel voor $y > x$ stopt en Bob x moet uitbetalen. Er geldt dus dat

$$\mathbb{E}[X|E \setminus E']P(E \setminus E') = 2(1-x)^2 \cdot x = 2x(1-x)^2 \tag{2.8}$$

We gaan de tweede term van som (2.7), $\mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E']$, berekenen. $\overline{E}$ is de subgebeurtenis dat $y \leq x$. Het spel gaat dus door en het nieuwe geheime getal wordt $x-y$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E'] &= \int_{x-1/2}^{x} f(y)\mathbb{E}[Z(f,x-y)]\,dy \\
&= \int_{x-1/2}^{1/2} 4y\mathbb{E}[Z(f,x-y)]\,dy + \int_{1/2}^{x} 4(1-y)\mathbb{E}[Z(f,x-y)]\,dy \\
&= \int_{0}^{x-1/2} 4(1-x+y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy + \int_{x-1/2}^{1/2} 4(x-y)\mathbb{E}[Z(f,y)]\,dy
\end{aligned}$$

Als we nu gebruik maken van Lemma 6 volgt er:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E'] &= \int_{0}^{x-1/2} 4(1-x+y)\cdot(\frac{1}{2}e^{-2y} - \frac{1}{2}e^{2y} + 3y)\,dy + \int_{x-1/2}^{1/2} 4(x-y)\cdot(\frac{1}{2}e^{-2y} - \frac{1}{2}e^{2y} + 3y)\,dy \\
&= -e^{1-2x} + e^{2x-1} - e^{-1}x - ex + e^{-1} - 4x^3 + 6x^2 - \frac{7}{2}x + 2
\end{aligned}$$

Zie Bijlage A.2.1.
Er geldt dus dat:

$$\mathbb{E}[Z(f,x)|E']Pr[E'] = -e^{1-2x} + e^{2x-1} - e^{-1}x - ex + e^{-1} - 4x^3 + 6x^2 - \frac{7}{2}x + 2 \tag{2.9}$$

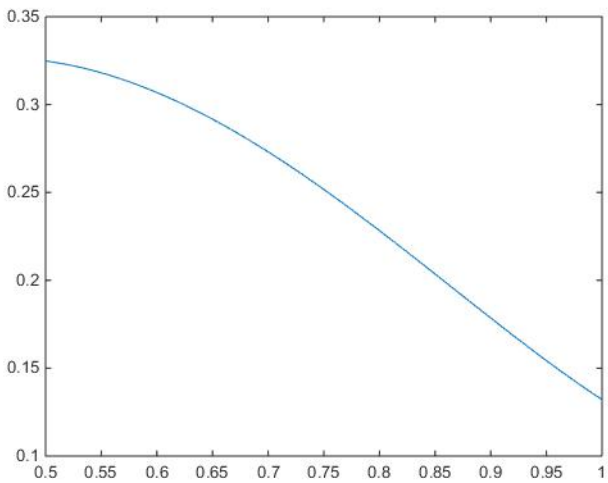
We kunnen schrijven

$$\mathbb{E}[Z(f,x)|E] = \mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E'] + \mathbb{E}[Z(f,x)|E \setminus E']\Pr[E \setminus E']$$

Als we (2.8) en (2.9) invullen in deze vergelijking krijgen we

$$\mathbb{E}[Z(f,x)|E] = -e^{1-2x} + e^{2x-1} - e^{-1}x - ex + e^{-1} - 4x^3 + 6x^2 - \frac{7}{2}x + 2 + 2x - 4x^2 + 2x^3$$

We willen onderzoeken voor welke x deze vergelijking maximaal is.
We kunnen dit alleen numeriek berekenen dus we maken hier gebruik van MATLAB, zie Bijlage A.2.2. De figuur ziet er als volgt uit voor $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$:



Figuur 2.4: Maximum

De functie is dalend dus $\mathbb{E}[Z(f,x)|E]$ is maximaal voor $x = \frac{1}{2}$. Er geldt

$$\max_{1/2 \leq x \leq 1} \mathbb{E}[Z(f,x)|E] = \mathbb{E}[Z(f,1/2)].$$

We moeten nu alleen nog $\mathbb{E}[Z(f,x)|\overline{E}]P(\overline{E})$ gaan analyseren.
Er zijn twee gevallen $\overline{E}$ en E.
Voor gebeurtenis $\overline{E}$ geldt dat $x-y>\frac{1}{2}$, en voor gebeurtenis E geldt $x-y\leq\frac{1}{2}$
In gebeurtenis E is het optimale geheime getal voor Alice gelijk aan $\frac{1}{2}$.
In gebeurtenis $\overline{E}$ gaat het spel verder met een nieuw geheim getal voor Alice, dat nog steeds groter of gelijk aan een half is.

$$x-y:\begin{cases}\leq\frac{1}{2} & \text{maximale uitbetaling is } \mathbb{E}[Z(x,\frac{1}{2})|E_0]\cdot P(E_0)\\ >\frac{1}{2} & \text{de analyse gaat door, maar nu met } x-Y_1 \text{ i.p.v. } x\end{cases}$$

Bob trekt nu nog een random getal Y_2. Beschouw $(x-Y_1)-Y_2$.

$$(x-Y_1)-Y_2:\begin{cases}\leq\frac{1}{2} & \text{maximale uitbetaling is } \mathbb{E}[Z(x,\frac{1}{2})|E_1]\cdot P(E_1)\\ >\frac{1}{2} & \text{de analyse gaat door, maar nu met } x-Y_1-Y_2 \text{ i.p.v. } x-Y_1\end{cases}$$

Herhaal de analyse.
Met kans 1 zal Bob uiteindelijk een getal produceren dat het geheime getal benaderd met afstand $\leq\frac{1}{2}$.
Uit deze analyse volgt dat in dit geval de optimale uitbetaling voor Alice gelijk is aan $\mathbb{E}[Z(f,\frac{1}{2})]$.

Vergelijking (2.7) kan nu geschreven worden als

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(f,x)] &\leq \max_{1/2\leq x\leq 1}\mathbb{E}[Z(f,x)|\overline{E}]P[\overline{E}]+\max_{1/2\leq x\leq 1}\mathbb{E}[Z(f,x)|E]P[E]\\ &=\mathbb{E}[Z(f,1/2)|\overline{E}]P[\overline{E}]+\mathbb{E}[Z(f,1/2)|E]P[E]\end{aligned}$$

Dus er geldt

$$\max_{1/2\leq x\leq 1}\mathbb{E}[Z(f,x)]=\mathbb{E}[Z(f,1/2)]$$

□

We kunnen nu Lemma 2 gaan bewijzen:

Bewijs. Uit Lemma 5 volgt

$$\mathbb{E}[Z(f,x)]=\frac{e^{-2x}-e^{2x}}{2}+3x=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+3x. \tag{2.10}$$

We gaan nu het maximum van x berekenen door de afgeleide gelijk te stellen aan 0:

$$\mathbb{E}'[Z(f,x)]=-e^{-2x}-e^{2x}+3=0$$

We vermenigvuldigen de vergelijking met e^{-2x} en er volgt: $-e^{-4x}+3e^{-2x}-1=0$. Als we nu $y=e^{-2x}$ substitueren in de vergelijking volgt $y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. We substitueren x weer terug, en dan vinden we dat

$$x=-\frac{\ln\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}{2}$$

Er moet gelden $0\leq x\leq 1/2$. Uit de berekening volgt dat $-\frac{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})}{2}<0$. De oplossing is dus gelijk aan

$$x=-\frac{\ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{2}\approx 0.48.$$

$\mathbb{E}[Z(f,x)]$ is dus maximaal voor 0.48. Als we dit invullen in vergelijking (2.10) volgt er

$$\mathbb{E}[Z(f,x)]=\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0.48}-\frac{1}{2}e^{2\cdot 0.48}+3\cdot 0.48\approx 0.327$$

Dus geldt er

$$\max_{0\leq x\leq 1/2}\mathbb{E}[Z(f,x)]\approx 0.327.$$

Lemma 6 zegt dat

$$\max_{1/2 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(f,x)] = \mathbb{E}[Z(f,1/2)] \approx 0.325.$$

Hieruit volgt

$$\max_{0 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(f,x)] < \frac{1}{3}.$$

□

Bewezen is nu dat voor de *Generalized Tally Game* met kansdichtheid f (2.5) de bovengrens $\frac{1}{3}$ is.

3

Nieuwe grenzen op de waarde van het spel

Nonner en Souza hebben in hun artikel alleen strategieën voor Bob onderzocht, niks over de optimale strategie van Alice. In dit hoofdstuk gaan we onderzoeken wat de optimale strategie voor Alice is en we gaan onderzoeken of we een ondergrens kunnen vinden.
Nonner en Souza hebben bovengrens $\frac{1}{3}$ gevonden, zie Hoofstuk 2. In dit hoofdstuk gaan we ook onderzoeken of we de bovengrens kunnen verscherpen.

3.1. De ondergrens

We gaan onderzoeken of er een ondergrens is door de keuzes van Alice te beperken tot een pure strategie en een gemengde strategie van de simpelste vorm. Een pure strategie voor Alice wil zeggen dat Alice één vast getal kiest. De optimale pure strategie is het dan optimale getal voor Alice, dus het getal waarbij de payoff het hoogst is.
Een gemengde strategie van de simpelste vorm is de strategie waarbij Alice de keuze heeft uit twee getallen. De optimale gemengde strategie voor Alice is dan een combinatie van de twee getallen, allebei met een waarschijnlijkheid, waarvoor de payoff het hoogst is.
In tegenstelling tot het vorige hoofdstuk is de keuze voor Alice discreet. Het blijkt optimaal voor Bob om ook disctreet, een discrete stochast, te kiezen. Deze stochast zal worden voorgesteld door een dobbelsteen met verwachting $\frac{1}{2}$.

3.1.1. Alice kiest één vast getal

We beperken ons tot de situatie waarin Alice alleen één pure strategie gebruikt.

Lemma 7. *Een optimale pure strategie voor Alice heeft $x \leq \frac{1}{2}$.*

Bewijs. Uit het ongerijmde. Stel, de optimale pure strategie heeft $x > \frac{1}{2}$.
Nu kiest Bob een dobbelsteen met uitkomsten 0 en x. De kans p op x is zodanig dat de verwachting van de dobbelsteen $\frac{1}{2}$ is. Er geldt $p \cdot x + (1-p) \cdot 0 = \frac{1}{2}$ en hieruit volgt $p = \frac{1}{2x} < 1$ dus deze dobbelsteen is toegestaan.
Óf Bob werpt x en de payoff is 0. Óf hij werpt 0 en het spel gaat verder tot Bob x gooit, dan is de payoff 0.
Met geheim getal $x > \frac{1}{2}$ is de payoff 0. Dat is niet optimaal dus er volgt dat het geheime getal $x \leq \frac{1}{2}$.

□

Lemma 8. *Stel, Alice kiest één vaste $x \leq 1/2$. De optimale strategie van Bob hiertegen is een dobbelsteen (stochast) Y met*

$$Y := \begin{cases} x & \text{met kans } p, \\ 1 & \text{met kans } 1-p. \end{cases} \tag{3.1}$$

zodanig dat $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$.

Bewijs. Stel, Bob kiest een dobbelsteen Z met uitkomsten tussen 0 en 1 en verwachting $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{2}$.
Pas deze strategie als volgt aan en noem deze X:

- Als $Z_1 \leq x$, maak er x van;
- Als $Z_1 > x$, maak er 1 van.

Er geldt $X \geq Z$ dus er volgt dat $\mathbb{E}[X] \geq \frac{1}{2}$.
Bovendien is direct duidelijk dat de payoff van X kleiner of gelijk is aan die van Z.
Payoff Y is weer kleiner of gelijk aan die van X. Dit is zo omdat de kans op getal x groter is en de kans op getal 1 in gelijke mate kleiner, zodat $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$.
Deze nieuwe strategie Y heeft een betere payoff dan Z.
Omdat Z een willekeurige strategie is met uitkomsten tussen 0 en 1, is Y de optimale strategie voor Bob.

□

Stelling 6. *De optimale pure strategie voor Alice is het geheimde getal x=0.3. Haar payoff is dan gelijk aan* 0.086.

Bewijs. De verwachtingswaarde voor y is $\mathbb{E}[Y] = x \cdot p + 1 \cdot (1-p) = \frac{1}{2}$. Hieruit volgt $p = \frac{1}{2(1-x)}$.
Voor $1-p$ geldt nu dat $1-p = \frac{1-2x}{2(1-x)}$. De optimale strategie voor Bob is:

$$Y := \begin{cases} x & \text{met kans } \frac{1}{2(1-x)}, \\ 1 & \text{met kans } \frac{1-2x}{2(1-x)}. \end{cases}$$

De verwachtingswaarde voor de payoff is gelijk aan:

$$0 \cdot \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1-2x}{2(1-x)} \cdot x = \frac{1-2x}{2(1-x)} \cdot x$$

Alice wil deze vergelijking maximaliseren.
We stellen de afgeleide gelijk aan 0 en hieruit volgt dat $x = 0.3$. De winst bedraagt dan 0.086.

□

De optimale strategie voor Bob is nu

$$Y := \begin{cases} 0.3 & \text{met kans } \frac{5}{7}, \\ 1 & \text{met kans } \frac{2}{7}. \end{cases}$$

We hebben nu een ondergrens voor de *Generalized Tally Game* gevonden, namelijk 0.086.

3.1.2. Alice kiest twee vaste getallen

We gaan nu een specifieke strategie van Alice onderzoeken: ze kiest 0.3 of 0.5 beide met kans een half. Het is moeilijk om de optimale respons van Bob te berekenen. Dat doen we niet. We gaan als volgt te werk. Eerst kiezen we een goede respons van Bob en dan berekenen we of er een epsilon aanpassing te maken is, die een betere respons is.

Vergelijk de volgende twee dobbelstenen:

1. Een dobbelsteen met 0.3 en 1, met kansen respectievelijk $\frac{5}{7}$ en $\frac{2}{7}$.
   De payoff tegen 0.3 is gelijk aan $0.086 = \frac{6}{70}$ en de payoff tegen 0.5 is gelijk aan $\frac{5}{7} \cdot 0.2 + \frac{2}{7} \cdot 0.5 = \frac{2}{7}$.
   Conclusie: De payoff is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{70} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{70}$.
2. Dobbelsteen met 0.5.
   De payoff tegen 0.3 is gelijk aan 0.3 en de payoff tegen 0.5 is gelijk aan 0. Beide met kans $\frac{1}{2}$
   Conclusie: De payoff is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 0.3 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.15$.

De tweede dobbelsteen heeft een lagere payoff dan de eerste dobbelsteen dus Bob kan beter de tweede dobbelsteen kiezen.
Ik vermoed dat de tweede dobbelsteen optimaal is, maar dat kan niet berekenen.

Om te onderzoeken of de tweede dobbelsteen optimaal is variëren we de dobbelsteen een beetje:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{met kans } 1-\epsilon-\delta \\ x\ (<\frac{1}{2}) & \text{met kans } \epsilon \\ 1 & \text{met kans } \delta \end{cases}$$

Er moet gelden dat $\delta \cdot 1 + \epsilon \cdot x = \frac{1}{2} \cdot (\delta + \epsilon)$. Hieruit volgt dat $\delta = \epsilon(1-2x)$.
Nu volgt:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{met kans } 1-2\epsilon(1-x) \\ x\ (<\frac{1}{2}) & \text{met kans } \epsilon \\ 1 & \text{met kans } \epsilon(1-2x) \end{cases}$$

Van alle strategieën is er maar een interessant, en intuïtief is de beste strategie $x = 0.3$.

Voor $x = 0.3$ geldt er:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{met kans } 1-1.4\epsilon \\ 0.3 & \text{met kans } \epsilon \\ 1 & \text{met kans } 0.4\epsilon \end{cases}$$

De verwachingswaarde is nu $\mathbb{E}[Y] = 0.4\epsilon + 0.3\epsilon + 0.5 - 0.7\epsilon$. Voor de payoff geldt:

- Tegen 0.3 is de uitbetaling $\epsilon \cdot 0 + (1-\epsilon) \cdot 0.3$
- Tegen 0.5 is de uitbetaling $\epsilon \cdot 0.2 + (1-1.4\epsilon) \cdot 0 + 0.4\epsilon \cdot 0.5 = 0.4\epsilon$.

De payoff is nu $\frac{1}{2} \cdot (1-\epsilon) \cdot 0.3 + \frac{1}{2} \cdot 0.4\epsilon = 0.5 + 0.05\epsilon$. Deze variatie werkt niet dus neem $\epsilon = 0$. Als de variatie voor alle pure strategieën niet beter is dan is de tweede dobbelsteen optimaal. De optimale payoff is dan 0.15.

Het blijkt dat elke epsilon variatie van deze dobbelsteen een verslechtering oplevert. Dit is een aanwijzing (maar geen bewijs!) dat de dobbelsteen optimaal is en dat de payoff van deze strategie voor Alice gelijk is aan 0.15.
De ondergrens voor de *generalized tally game* is dan 0.15.

3.2. De bovengrens

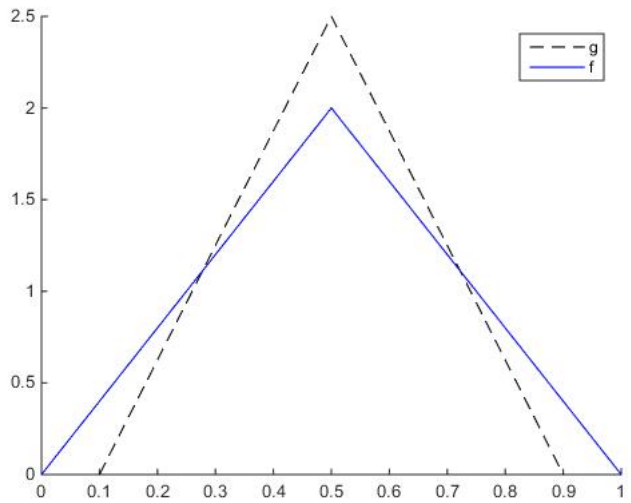
In deze paragraaf gaan we experimenteren met een andere kansdichtheid en onderzoeken of we de bovengrens kunnen verscherpen.

3.2.1. Andere kansdichtheid

We onderzoeken wat de bovengrens van het spel is met een andere kansdichtheid g.
We kiezen kansdichtheid g waarvoor de grafiek spitser is dan de kansdichtheid, f zie figuur 3.3 en Bijale A.3.

$$g(y) := \begin{cases} \frac{25}{4}(y-0.1) & 0.1 \le y \le 1/2, \\ \frac{25}{4}(0.9-y) & 1/2 < y \le 0.9, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

Het is een intuïtief idee om de kansdichtheid zo te kiezen. Het idee hierachter is dat de waarde van het spel bij 0.3 ligt, dus Alice zal nooit kleinere getallen kiezen dan 0.3. Het heeft dus ook geen zin voor Bob om kleine getallen te gebruiken.
De randvoorwaarden van g zijn gelijk aan die bij f, (2.4).



Figuur 3.1: Nieuwe kansdichtheid g

Stelling 7.

$$\max_{0\le x\le 1} \mathbb{E}[Z(g,x)] < 0.314$$

Voor het bewijs van dit lemma hebben we opnieuw een aantal andere lemma's nodig.

Lemma 9. *Voor* $0 \le x \le \frac{1}{2}$ *geldt*

$$\mathbb{E}[Z(g,x)] = \int_{0.1}^{x} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\mathbb{E}[Z(f,y)]dy + x(-\frac{25}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{31}{32})$$

Bewijs. We passen eerst de integraal vergelijking (2.2) aan onze keuze van g aan.
Gegeven is dat

$$\mathbb{E}[Z(g,x)] = \int_{0.1}^{x} g(x-y)\mathbb{E}[Z(g,y)]dy + x\int_{x}^{\frac{1}{2}} g(y)dy + x\int_{\frac{1}{2}}^{0.9} g(y)dy.$$

Als we nu onze keuze voor g invullen volgt dat

$$\mathbb{E}[Z(g,x)] = I_1 + I_2 + I_3$$

met

- $I_1 = \int_{0.1}^{x} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\mathbb{E}[Z(g,y)]dy$. Hier geldt dat $y \le x$ dus er volgt $0 \le y \le 1/2$ waardoor $g(x-y)$ gelijk is aan $\frac{25}{4}(x-y-0.1)$;
- $I_2 = x\int_{x}^{\frac{1}{2}} \frac{25}{4}(y-0.1)dy$. Hier is $x < y$ en y loopt maar tot $\frac{1}{2}$ dus hier geldt ook dat $g(y)$ gelijk is aan $\frac{25}{4}(y-0.1)$;
- $I_3 = x\int_{\frac{1}{2}}^{0.9} \frac{25}{4}(0.9-y)dy$. Hier is $x < y$ en $1/2 < y \le 1$ dus $g(y)$ is gelijk aan $\frac{25}{4}(0.9-y)$.

Er volgt nu dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(g,x)] &= \int_{0.1}^{x} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\mathbb{E}[Z(g,y)]dy + x\int_{x}^{\frac{1}{2}} \frac{25}{4}(y-0.1)dy + x\int_{\frac{1}{2}}^{0.9} \frac{25}{4}(0.9-y)dy \\ &= \int_{0.1}^{x} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\mathbb{E}[Z(g,y)]dy + x(-\frac{25}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{31}{32})\end{aligned}$$

□

Lemma 10. $\mathbb{E}[Z(g,x)]$ *voldoet aan de differentiaalvergelijking* $y'' + \frac{5}{8}y' - \frac{25}{4}y + \frac{75}{4}x - \frac{5}{4} = 0$.

Bewijs. We nemen aan dat $\mathbb{E}[Z(g,x)]$ twee keer differentieerbaar is. In dit bewijs noemen we $\mathbb{E}[Z(g,x)]$ voor de gemakkelijkheid $z(x)$. We maken gebruik van Lemma 9.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}z(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\int_{0.1}^{x}\frac{25}{4}(x-0.1)z(y)dy - \frac{d^2}{dx^2}\int_{0.1}^{x}\frac{25}{4}y\cdot z(y) + \frac{d^2}{dx^2}x(-\frac{25}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{31}{32})\\ &= \frac{d^2}{dx^2}\frac{25}{4}(x-0.1)Z(y)|_{0.1}^{x} - \frac{d}{dx}\frac{25}{4}x\cdot z(x) - \frac{75}{4}x + \frac{5}{4}\\ &= \frac{25}{4}z(x) - \frac{5}{8}z'(x) - \frac{75}{4}x + \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Dit is gelijk aan de differentiaalvergelijking $y'' + \frac{5}{8}y' - \frac{25}{4}y + \frac{75}{4}x - \frac{5}{4} = 0$. □

Lemma 11.

$$\mathbb{E}[Z(g,x)] = -0.46e^{2.2x} + 0.36e^{-2.8x} + 3x + 0.1$$

Bewijs. Uit Lemma 10 weten we dat $\mathbb{E}[Z(g,x)]$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $y''+\frac{5}{8}y'-\frac{25}{4}y+\frac{75}{4}x-\frac{5}{4} = 0$. Deze gaan we nu oplossen rekening houdend met de randvoorwaarden (2.4).
De differentiaalvergelijking is een inhomogene differentiaalvergelijking van de vorm

$$y'' + \frac{5}{8}y' - \frac{25}{4}y = -\frac{75}{4}x + \frac{5}{4} \tag{3.2}$$

We maken de vergelijking eerst homogeen: $y'' + \frac{5}{8}y' - \frac{25}{4}y = 0$ en lossen deze op door $y = e^{rx}$ in te vullen. Hieruit volgt $r = 2.2$ en $r = -2.8$.
De oplossing voor de homogene vergelijking is

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = c_1e^{2.2x} + c_2e^{-2.8x}$$

Nu gaan we de particuliere oplossing zoeken. Dit doen we door $y = Ax + B$ in vergelijking (3.2) in te vullen. Hieruit volgt $A = 3$ en $B = 0.1$. De particuliere oplossing is dus $3x + 0.1$.
We hebben nu de oplossing van de differentiaalvergelijking gevonden, namelijk:

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = c_1e^{2.2x} + c_2e^{-2.8x} + 3x + 0.1$$

Als we nu de beginwaarden invullen vinden we voor $c_1 = -0.46$ en $c_2 = 0.36$.
De oplossing voor de differentiaalvergelijking wordt nu:

$$\mathbb{E}[Z(f,x)] = -0.46e^{2.2x} + 0.36e^{-2.8x} + 3x + 0.1$$

en hiermee is het gevraagde bewezen.

□

Hier is $\mathbb{E}[Z(g,x)]$ berekend voor $0 \le x \le 1/2$. We weten nu wat de verwachte opbrengst is voor $x \le \frac{1}{2}$. Wat is de verwachte opbrengst voor $x > \frac{1}{2}$? Het blijkt dat in dat geval de keuze $x = \frac{1}{2}$ optimaal is voor Alice.

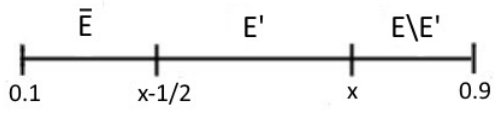
Lemma 12.

$$\max_{1/2\le x\le 1}\mathbb{E}[Z(g,x)] = \mathbb{E}[Z(g,1/2)]$$

Bewijs. Neem een vaste $1/2 \le x \le 1$ en laat y een willekeurige waarde zijn die getrokken is in de eerste ronde van de *Generalized Tally Game* uit de kansverdeling met dichtheid g.
Laat E de gebeurtenis zijn dat $x - y \le 1/2$, en laat $\overline{E}$ de complementaire gebeurtenis zijn, dus $x - y > 1/2$. Laat vervolgens $E' \subseteq E$ de subgebeurtenis zijn dat $y \le x$, en zo geldt voor $E \setminus E'$ dat $y > x$.

De verwachtingswaarde van $Z(g,x)$ kunnen we splitsen in de som van drie voorwaardelijke verwachtingen. Voor de duidelijkheid duiden we $Z(g,x)$ aan met X.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\overline{E}]P(\overline{E}) + \mathbb{E}[X|E']P(E') + \mathbb{E}[X|E\setminus E']P(E\setminus E') \tag{3.3}$$



Figuur 3.2: Gebeurtenissen Lemma 12

We gaan nu de derde term van deze som analyseren. Merk op dat

$$P(E \setminus E') = \int_x^{0.9} g(y)\,dy = \int_x^{0.9} \frac{25}{4}(0.9-y)\,dy = \frac{25}{4}(0.9y - \frac{1}{2}y^2)|_x^{0.9} = \frac{25}{8}x^2 - \frac{45}{8}x + \frac{81}{31}.$$

Ook geldt $\mathbb{E}[Z(f,x)|E \setminus E'] = x$. Dit komt omdat het spel voor $y > x$ stopt en Bob x moet uitbetalen. Er geldt dus dat

$$\mathbb{E}[X|E \setminus E']P(E \setminus E') = x \cdot (\frac{25}{8}x^2 - \frac{45}{8}x + \frac{81}{31}) \tag{3.4}$$

We gaan de tweede term van som (3.3), $\mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E']$, berekenen. $\overline{E}$ is de subgebeurtenis dat $y \leq x$. Het spel gaat dus door en het nieuwe geheime getal wordt $x - y$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E'] &= \int_{x-1/2}^{x} g(y)\mathbb{E}[Z(g,x-y)]\,dy \\
&= \int_{x-1/2}^{1/2} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\mathbb{E}[Z(g,y)]\,dy + \int_{1/2}^{x} \frac{25}{4}(0.9-x+y)\mathbb{E}[Z(g,y)]\,dy \\
&= \int_{0}^{x-1/2} \frac{25}{4}(0.9-x+y)\mathbb{E}[Z(g,y)]\,dy + \int_{x-1/2}^{1/2} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\mathbb{E}[Z(g,y)]\,dy
\end{aligned}$$

Als we nu gebruik maken van Lemma 11 volgt er:

$$\int_0^{x-1/2} \frac{25}{4}(0.9-x+y)\cdot(-0.46e^{2.2y}+0.36e^{-2.8y}+3y+0.1)\,dy + \int_{x-1/2}^{1/2} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\cdot(-0.46e^{2.2y}+0.36e^{-2.8y}+3y+0.1) \tag{3.5}$$

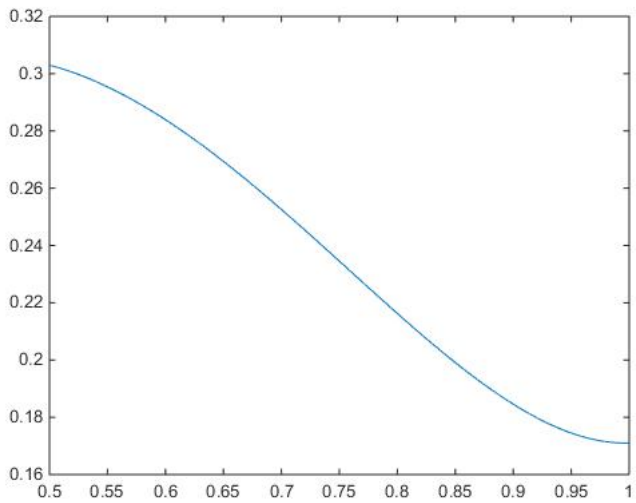
Zie Bijlage A.4.1 voor de uitwerking.
We kunnen schrijven

$$\mathbb{E}[Z(f,x)|E] = \mathbb{E}[Z(f,x)|E']\Pr[E'] + \mathbb{E}[Z(f,x)|E \setminus E']\Pr[E \setminus E']$$

Als we (3.4) en (3.5) invullen in deze vergelijking krijgen we

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(g,x)|E']\Pr[E'] = &\int_0^{x-1/2} \frac{25}{4}(0.9-x+y)\cdot(-0.46e^{2.2y}+0.36e^{-2.8y}+3y+0.1)\,dy \\
&+ \int_{x-1/2}^{1/2} \frac{25}{4}(x-y-0.1)\cdot(-0.46e^{2.2y}+0.36e^{-2.8y}+3y+0.1)\,dy \\
&+ x\cdot(\frac{25}{8}x^2 - \frac{45}{8}x + \frac{81}{31})
\end{aligned}$$

We willen onderzoeken voor welke x deze vergelijking maximaal is.
We kunnen dit alleen numeriek berekenen dus we maken hier gebruik van MATLAB, zie Bijlage A.4.2.
De figuur ziet er als volgt uit voor $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$:



Figuur 3.3: Maximum

De functie is dalend dus $\mathbb{E}[Z(f,x)|E]$ is maximaal voor $x = \frac{1}{2}$. Er geldt

$$\max_{1/2 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(g,x)|E] = \mathbb{E}[Z(g,1/2)].$$

We moeten nu alleen nog $\mathbb{E}[Z(g,x)|\overline{E}]P(\overline{E})$ gaan analyseren.
Er zijn twee gevallen $\overline{E}$ en E.
Voor gebeurtenis $\overline{E}$ geldt dat $x - y > \frac{1}{2}$, en voor gebeurtenis E geldt $x - y \le \frac{1}{2}$
In gebeurtenis E is het optimale geheime getal voor Alice gelijk aan $\frac{1}{2}$.
In gebeurtenis $\overline{E}$ gaat het spel verder met een nieuw geheim getal voor Alice, dat nog steeds groter of gelijk aan een half is.

$$x - y : \begin{cases} \le \frac{1}{2} & \text{maximale uitbetaling is } \mathbb{E}[Z(g,\frac{1}{2})|E_0] \cdot P(E_0) \\ > \frac{1}{2} & \text{de analyse gaat door, maar nu met } x - Y_1 \text{ i.p.v. } x \end{cases}$$

Bob trekt nu nog een random getal Y_2. Beschouw $(x - Y_1) - Y_2$.

$$(x - Y_1) - Y_2 : \begin{cases} \le \frac{1}{2} & \text{maximale uitbetaling is } \mathbb{E}[Z(g,\frac{1}{2})|E_1] \cdot P(E_1) \\ > \frac{1}{2} & \text{de analyse gaat door, maar nu met } x - Y_1 - Y_2 \text{ i.p.v. } x - Y_1 \end{cases}$$

Herhaal de analyse.
Met kans 1 zal Bob uiteindelijk een getal produceren dat het geheime getal benaderd met afstand $\le \frac{1}{2}$.
Uit deze analyse volgt dat in dit geval de optimale uitbetaling voor Alice gelijk is aan $\mathbb{E}[Z(g,\frac{1}{2})]$.

Vergelijking (3.3) kan nu geschreven worden als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(g,x)] &\le \max_{1/2 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(g,x)|\overline{E}]P[\overline{E}] + \max_{1/2 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(g,x)|E]P[E] \\ &= \mathbb{E}[Z(g,1/2)|\overline{E}]P[\overline{E}] + \mathbb{E}[Z(g,1/2)|E]P[E] \end{aligned}$$

Dus er geldt

$$\max_{1/2 \le x \le 1} \mathbb{E}[Z(g,x)] = \mathbb{E}[Z(g,1/2)]$$

□

Nu kunnen we Stelling 7 bewijzen.

Bewijs. Uit Lemma 11 volgt

$$\mathbb{E}[Z(g,x)] = -0.46e^{2.2x} + 0.36e^{-2.8x} + 3x + 0.1 \tag{3.6}$$

We willen nu de maximale uitkomst voor x weten. We stellen de afgeleide gelijk aan 0:

$$-1.012e^{2.2x} - 1.008e^{-2.8x} + 3 = 0$$

Hieruit volgt dat $x = 0.45$
Als we dit in vergelijking (3.6) invullen volgt dat $\mathbb{E}[Z(g,x)] = 0.314$

□

We hebben bewezen dat

$$\max_{0\le x\le 1} \mathbb{E}[Z(g,x)] < \max_{0\le x\le 1} \mathbb{E}[Z(f,x)]$$

De bovengrens van de *Generalized Tally Game* is nu 0.314.

Conclusie

In artikel *Approximating the Joint Replenishment Problem with Deadlines*[1] hebben T. Nonner en A. Souza bewezen dat de *Generalized Tally Game* een bovengrens heeft van $\frac{1}{3}$.
Ze hebben alleen naar de optimale strategie van Bob gekeken. Ook hebben ze niks beweert over de ondergrens.
In dit verslag is onderzocht dat de bovengrens verscherpt kan worden. De bovengrens is verscherpt en deze bedraagt nu 0.314. De bovengrens kan na meer experimenteren met andere kansdichtheden ook nog meer verscherpt worden.
We hebben ook is onderzocht of er een ondergrens te vinden is. De ondergrens is onderzocht door te bepalen wat de optimale strategie van Alice is. Eerst werd er gekeken naar de optimale strategie van Alice waarbij ze de keuze had uit één vast getal. De optimale strategie is $x = 0.3$ en de payoff bedraagt 0.086.
Daarna is onderzocht wat de optimale strategie van Alice is als ze de keuze heeft uit twee vaste getallen x en y. Het vermoeden is dat de optimale gemengde strategie bestaat uit geheime getallen $x = 0.3$ en $y = 0.5$, beide met kans $\frac{1}{2}$. De ondergrens zou in dit geval verscherpt zijn en 0.15 bedragen. Deze kan nog verder verscherpt worden door te onderzoeken wat er gebeurt als Alice drie geheime getallen neemt, of vier geheime getallen, enzovoort.
Uiteindelijk zullen de ondergrens en bovengrens dichterbij elkaar komen tot een optimale strategie voor beide.

Bewezen is dat de ondergrens van de *Generalized Tally Game* gelijk is aan 0.086 en de bovengrens aan 0.314.

Bibliografie

[1] Nonner, T. en Souza, A. (2010). *Approximating the Joint Replenishment Problem with Deadlines. Discrete Math. Algorithm. Appl.* **01**, 153 (2009). DOI: `\url{http://dx.doi.org/10.1142/S1793830909000130 }`

[2] `\url{https://www.math.ucla.edu/~tom/gamesolve.html}`

[3] Ferguson, T. (2014). *Game Theory*. College dictaat UCLA.

[4] `\url{https://en.wikipedia.org/wiki/Strategy_(game_theory)}`

[5] Coplakova, E. e.a (2012). *Wiskundige Structuren*, collegedictaat TU Delft, cursus wi1607.

A

Appendices

A.1. Figuur kansdichtheid f

```
x=0:0.1:1;
y=zeros(size(x));
for i=1:length(x)
    if (0<=x(i))&(x(i)<=0.5)
        y(i)=4*x(i);
    elseif (0.5<x(i))&(x(i)<=1)
            y(i)=4-4*x(i);
    else y(i) =0;
      end
    end

plot(x,y)
```

A.2. Bewijs lemma 6

A.2.1. Integraal berekenen

```
syms x y
int1=4*(1-x+y)*(0.5*exp(-2*y)-0.5*exp(2*y)+3*y);
int2=4*(x-y)*(0.5*exp(-2*y)-0.5*exp(2*y)+3*y);
int(int1,y);
int(int2,y);
a(y)=int(int1,y);
q(y)=int(int2,y);
b=a(x-0.5);
c=a(0);
r=q(0.5);
s=q(x-0.5);
totaal1=b-c;
totaal2=r-s;
totaalsamen=totaal1+totaal2;
p=totaalsamen+2*x*(1-x)^2
```

A.2.2. Plot

```
x=0.5:0.0001:1;
p=exp(-1) - x/2 + exp(1)/2 - 2*exp(1 - 2*x) + 2*x.*(x - 1).^2 - 6*x.*(x - 1/2).^2
+ 8*(x - 1/2).^3 - x.*exp(-1) + 2*x.*exp(1 - 2*x) - exp(1)*(x + 1/2)
- (6*x - 6).*(x - 1/2).^2 - 2*exp(1 - 2*x).*(x - 1/2) - exp(2*x - 1).*(x - 1/2)
+ exp(2*x - 1).*(x + 1/2) + 3/2;
plot(x,p)
z=-exp(1-2*x)+exp(2*x-1)-exp(-1)*x-exp(1)*x+exp(-1)+6*x.^2-4*x.^3-3.5*x+2+2*x
-4*x.^2+2*x.^3;
plot(x,z)
indexmax = find(max(z) == z);
xmax = x(indexmax)
indexmax2 = find(max(p) == p);
xmax2 = x(indexmax2)
```

A.3. Figuur kansdichtheid f en g

```
hold on
a=0:0.1:1;
b=zeros(size(a));
for i=1:length(a)
    if a(i)<=0.5
        b(i)=6*a(i)-0.6;
    else
            b(i)=5.4-6*a(i);

        end
end


plot(a,b,'k--')

x=0:0.1:1;
y=zeros(size(x));
for i=1:length(x)
    if (0<=x(i))&(x(i)<=0.5)
        y(i)=4*x(i);
    elseif (0.5<x(i))&(x(i)<=1)
            y(i)=4-4*x(i);
    else y(i) =0;
      end
    end

plot(x,y,'b')
ylim([0,2.5])
legend('g','f')
```

A.4. Lemma 12

A.4.1. Integraal berekenen

```
syms x y;
int1=6.25*(0.9-x+y)*(-0.46*exp(2.2*y)+0.36*exp(-2.8*y)+3*y+0.1);
int2=6.25*(x-y-0.1)*(-0.46*exp(2.2*y)+0.36*exp(-2.8*y)+3*y+0.1);
int(int1,y);
int(int2,y);
a(y)=int(int1,y);
q(y)=int(int2,y);
b=a(x-0.5);
c=a(0);
r=q(0.5);
s=q(x-0.5);
totaal1=b-c;
totaal2=r-s;
totaalsamen=totaal1+totaal2;
p=totaalsamen+x*(25/8*x^2-45/8*x+81/32)
```

A.4.2. Plot

```
x=0.5:0.0001:1;
p=(1345.*x)/2464 - (225.*exp(7/5 - (14.*x)/5))/392 + (575.*exp((11.*x)/5 - 11/10))/484
+ (25.*(x - 1/2).^3)/2 + x.*((25*x.^2)/8 - (45.*x)/8 + 81/32)
- ((5.*x)/8 - 1/16).*(x - 1/2) - ((5.*x)/8 - 9/16).*(x - 1/2)
- ((75.*x)/8 - 5/4).*(x - 1/2).^2 - ((75.*x)/8 - 35/4).*(x - 1/2).^2
- exp(11/10).*((115.*x)/88 - 23/121) - exp(-7/5).*((45.*x)/56 - 603/784) + 44333/94864
plot(x,p)
indexmax = find(max(p) == p);
xmax = x(indexmax)
```