

Bouw
Van Mourik Broekmanweg 6
Postbus 49
2600 AA Delft

www.tno.nl

T +31 15 276 30 00
F +31 15 276 30 10
info-BenO@tno.nl

TNO-rapport

TNO-034-DTM-2009-02109

Betrouwbaarheid van trillingspredicties

Datum 25 mei 2009
Auteur(s) ir. D.J. Molenaar

Opdrachtgever

Projectnummer 034.87187/01.02

Rubricering rapport

Titel
Samenvatting
Rapporttekst
Bijlagen

Aantal pagina's 33 (incl. bijlagen)
Aantal bijlagen

Alle rechten voorbehouden. Niets uit dit rapport mag worden vermenigvuldigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze dan ook, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van TNO.

Indien dit rapport in opdracht werd uitgebracht, wordt voor de rechten en verplichtingen van opdrachtgever en opdrachtnemer verwezen naar de Algemene Voorwaarden voor onderzoeksopdrachten aan TNO, dan wel de betreffende terzake tussen de partijen gesloten overeenkomst.

Het ter inzage geven van het TNO-rapport aan direct belanghebbenden is toegestaan.

Inhoudsopgave

	Samenvatting	Error! Bookmark not defined.
1	Inleiding.....	3
2	Samenvatting resultaten DC1.....	4
2.1	Inleiding	4
2.2	Modellen.....	4
2.3	Aanpak DC1	5
2.4	Uitsplitsing onzekerheden	6
2.5	Resultaten DC1	6
2.6	Resultaten DC1 na extra informatie	9
2.7	Niet onderzocht in DC1	10
2.8	Samenvatting.....	11
3	De invloed van de modelleur	12
3.1	Inleiding	12
3.2	Interviews modelleurs	13
3.3	Vergelijking ervaring modelleurs met scores	14
3.4	Discussie en conclusie.....	16
4	Betrouwbaarheid van trillingspredicties	17
4.1	Inleiding	17
4.2	Optelling deelbetrouwbaarheden.....	17
4.3	Gewenste spreadsheet.....	17
4.4	Alternatieve aanpak.....	18
4.5	Discussie.....	19
5	Samenvatting	21
6	Referenties.....	23
	Bijlage(n)	
	A Resultaten afzonderlijke modelleurs DC1	
	B Lognormaalverdelingen	
	C Optelling van standaarddeviaties	
	D Sommatie van deelbetrouwbaarheden	

1 Inleiding

In de eerste tranche van Delft Cluster (DC1) is een uitgebreid onderzoek gedaan naar de betrouwbaarheid van trillingsvoorspellingen. Dit heeft inzicht opgeleverd over de betrouwbaarheid van modellen, de onzekerheid over invoerparameters, de rol van modelleerder en de stochastiek van de praktijk. In dit werkpakket is een poging gedaan deze kennis toe te passen op de huidige voorspellingsmethoden en de onzekerheden rond prognoses hanteerbaar te maken voor onderzoeker en opdrachtgever. Na bestudering van de resultaten van DC1 bleek dat de resultaten niet goed te vertalen zijn naar direct hanteerbare richtlijnen bij de huidige voorspellingsmethoden. In dit rapport staat een verslag van het onderzoek naar de toepasbaarheid van de kennis van DC1 en enkele alternatieve benaderingswijzen.

In hoofdstuk 2 is een samenvatting gegeven van de resultaten van DC1. In hoofdstuk 3 wordt de hypothese beoordeeld of er een relatie bestaat tussen de betrouwbaarheid van een voorspelling en de ervaring van de modelleur. In hoofdstuk 4 staat de aanpak beschreven die bij het opstellen van het werkplan was voorzien en een voorstel voor een gewijzigde aanpak.

2 Samenvatting resultaten DC1

2.1 Inleiding

In referentie [1] staat een samenvatting van het onderzoek naar de betrouwbaarheid van trillingspredicties van DC1. In het huidige DC onderzoek (BET) wordt voortgeborduurd op de resultaten van het DC1 onderzoek. Voor een goed begrip van de problematiek wordt in dit hoofdstuk een samenvatting gegeven van deze resultaten.

2.2 Modellen

Prognoses van het trillingsniveau in de bebouwde omgeving worden gemaakt met behulp van modellen. Deze modellen zijn in de regel modulair opgebouwd. Een veel gehanteerde indeling is weergegeven in onderstaand schema.



Het totale te modelleren systeem wordt opgebouwd gedacht uit drie deelsystemen, de trillingsbron, het medium waardoor de trillingen zich uitbreiden (bodem), en het ontvangende systeem (het gebouw). Deze deelsystemen worden in de regel apart gemodelleerd en vervolgens gekoppeld om tot een totaalmodel te komen.

Onzekerheid in trillingspredicties kan voortkomen uit de volgende vier bronnen:

1. incomplete informatie over de specificatie van het (deel)systeem dat moet worden gemodelleerd.
2. incomplete informatie over invoer en randvoorwaarden van het (deel)systeem
3. vereenvoudigingen en aannamen in de fysische modellering
4. discretisaties en benaderingen in de numerieke modellering

Nemen we als voorbeeld de bodemmodule. Bij de modellering van het bodemgedrag bestaat er in de regel significante onzekerheid uit de eerste bron, aangezien er beperkte kennis is over de bodemopbouw. Ook de tweede bron brengt onzekerheid in, aangezien het deelmodel is gekoppeld aan de modellen van de twee andere deelmodellen. Deze koppeling is meestal niet zodanig dat de benodigde randvoorwaarden en/ of inputs voor het bodemmodel eenduidig worden vastgelegd. Onzekerheid uit de derde bron is direct gekoppeld aan het al eerder geïntroduceerde niveau van modelleren. Wanneer de bodemmodellering op basis van een EEM-aanpak plaatsvindt, is de onzekerheidsbijdrage uit deze bron gering ten opzichte van een modellering met bijvoorbeeld de Barkan-formule. Wel kan de koppeling tussen het EEM-bodemmodel en overige deelmodellen nog onzekerheid introduceren. Daarnaast kan bij een EEM-aanpak nog onzekerheid ontstaan ten gevolge van de vertaling van het fysische model in een numeriek model.

Grofweg duiden we de eerste twee bronnen van onzekerheid aan met 'parameter-onzekerheid', terwijl de laatste twee bronnen van onzekerheid leiden tot 'model-onzekerheid'. Onderscheid tussen parameter- en modelonzekerheid is niet altijd even helder. Met name voor eenvoudiger modellen wordt dit onderscheid lastiger te maken.

2.3 Aanpak DC1

In DC1 zijn trillingspredicties gedaan door verschillende partijen voor verschillende trillingsbronnen (onder andere intrillen van damwanden, heien van heipalen en verkeerspassages over een drempel) en op verschillende locaties. Dit is gedaan met predictiemethoden variërend van expertmening tot FEM model. Alle predicties zijn vergeleken met de gemeten waarden. De totale onzekerheid in de trillingssnelheid v wordt beschreven door de stochastische factor g en de waarde van de predictie v_{model} :

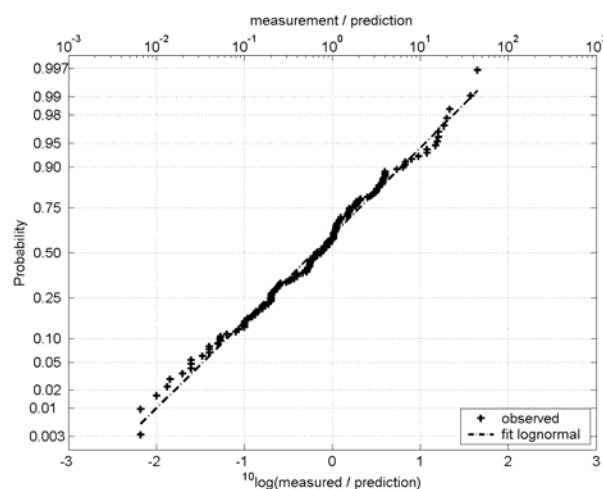
$$v = gv_{\text{model}} \quad (1)$$

De kansverdeling volgt uit de gerealiseerde waarden voor g , gedefinieerd door:

$$g = \frac{v_{\text{gemeten}}}{v_{\text{model}}} \quad (2)$$

v_{gemeten} is de gemeten trillingssnelheid.

Gebleken is dat de verdeling van g lognormaal is, zodat de onzekerheid een factor is. Dit is grafisch weergegeven in Figuur 1 voor expert predicties.



Figuur 1 Frequentieverdeling van $^{10}\log(v_{\text{gemeten}}/v_{\text{predictie}})$

Uit Figuur 1 is de volgende informatie te halen:

- g_{50} is de mediaan waarde van g , de waarde met een waarschijnlijkheid van overschrijding van 50 %. Als deze waarde voor g zou worden gebruikt om alle predicties te corrigeren, dan zouden de gecorrigeerde predicties geen afwijking hebben. Waarden voor g_{50} van minder dan 1 geven een neiging tot overschatting aan (conservatief), waarden voor g_{50} van meer dan 1 geven een neiging tot onderschatting aan.
- g_{95} is de 95 procentswaarde van g , de waarde met een 95 % betrouwbaarheidsniveau (5 % overschrijdingskans). Deze factor kan worden

beschouwd als de veiligheidsfactor waarbij slechts in 5 % van de gevallen hogere waarden worden gemeten.

- $g_{95/50}$ is gedefinieerd als de verhouding g_{95} / g_{50} . Het is een maat voor de spreiding in de predictie.

2.4 Uitsplitsing onzekerheden

Het oorspronkelijke idee bij DC1 was dat de totale betrouwbaarheid kan worden uitgesplitst in deelbetrouwbaarheden van de verschillende deelsystemen:

$$g_{\text{totaal}} = g_{\text{bron}} * g_{\text{bodem}} * g_{\text{gebouw}} * g_{\text{bron-bodem}} * g_{\text{bodem-gebouw}} \quad (3)$$

Hier is g uitgesplitst in deelfactoren, die respectievelijk de bijdrage van de bron, de bijdrage van de bodem, de gebouwbijdrage, de bijdrage van de interactie bron-bodem en de bijdrage van de interactie bodem-gebouw aan de onzekerheid beschrijven. Voorwaarde hiervoor is wel dat alle verdelingen lognormaal verdeeld zijn.

In DC1 is alleen gekeken naar de deelsystemen bron en bodem. Hiervoor geldt:

$$g_{\text{totaal}} = g_{\text{bron}} * g_{\text{bodem}} * g_{\text{bron-bodem}} \quad (4)$$

De realisaties van g_{bodem} zijn in DC1 bepaald via vergelijking 1, waarbij metingen en predicties werden gebruikt aan het separate deelsysteem bodem (valproefmetingen, fase 1). Op deze realisaties is een kansverdeling gefit.

g_{bodem} is weer te splitsen in parameter- en modelonzekerheid via:

$$g_{\text{bodem}} = g_{\text{bodem, par}} * g_{\text{bodem, model}} \quad (5)$$

Realisaties van g_{bodem} kunnen worden bepaald via vergelijking 2, waarbij metingen en predicties worden gebruikt aan het separate deelsysteem bodem, waarbij in de predicties van bekende (apart gemeten) parameterwaarden is uitgegaan (Bij DC1 waren dat de valproefmetingen, fase 3).

Bij analyse van de resultaten bleek dat er nog een factor in het spel was, die zich niet goed liet beschrijven met een dergelijke formule: de invloed van de modelleur. Dit wordt getoond in de volgende paragraaf.

2.5 Resultaten DC1

Voor de andere predicties en trillingsbronnen zijn vergelijkbare grafieken gemaakt als Figuur 1 en ook bovenstaande waarden zijn bepaald. De resultaten zijn samengevat in Tabel 1.

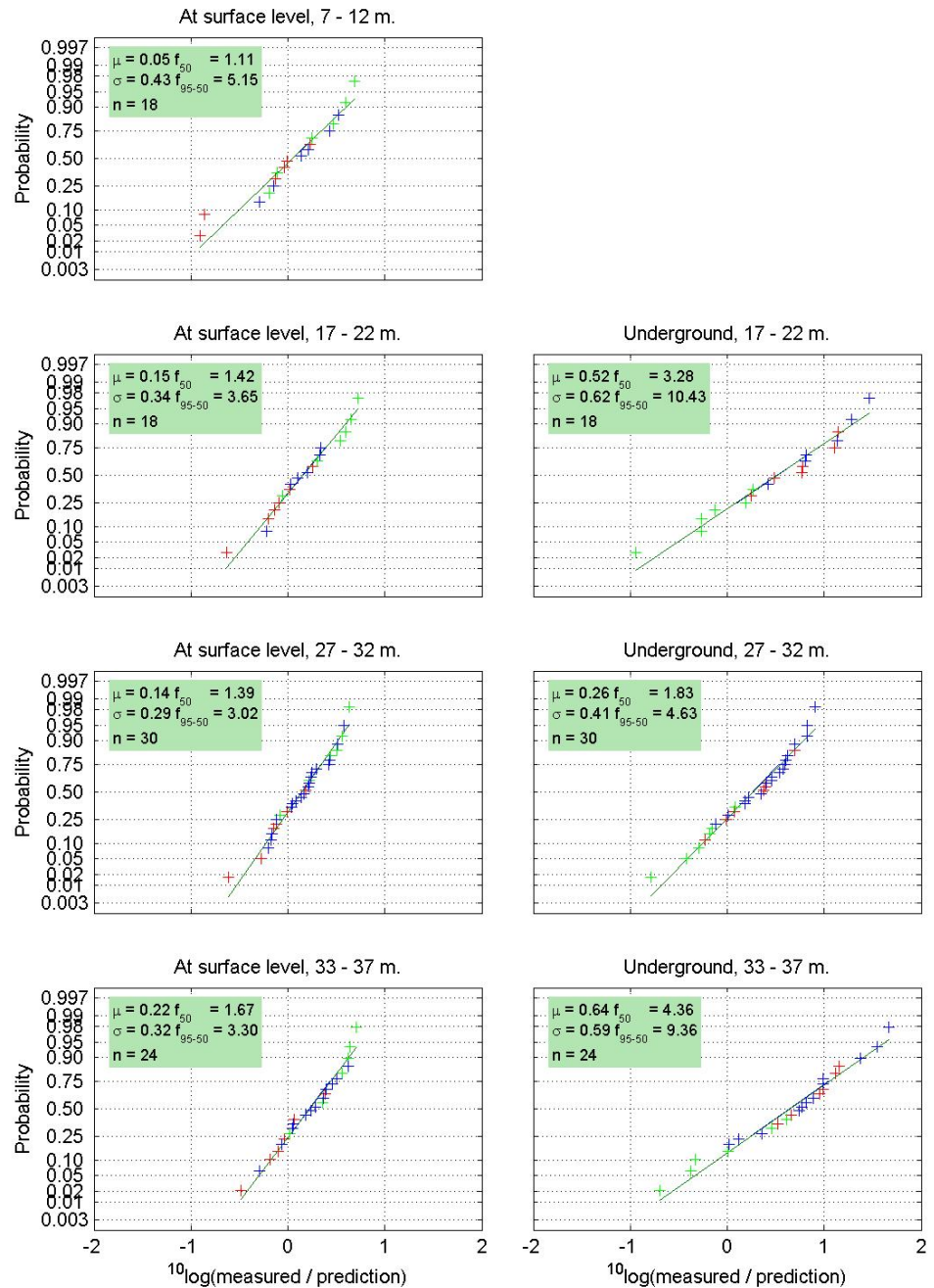
Tabel 1 Overzicht van de totale onzekerheid van de verschillende predictie tools en methoden

vibration source → prediction method ↓	pile-driving	sheet piling	traffic	overall
Expert				$g_{50} = 0.6$ $g_{95/50} = 18$
Empirical (D11)				$g_{50} = 0.25$ $g_{95/50} = 20$
Dedicated (pile-driving special)	$g_{50} = 0.6$ $g_{95/50} = 3$			
FEM	$g_{50} = 0.7$ $g_{95/50} = 5$	$g_{50} = 1.6$ $g_{95/50} = 15$	$g_{50} = 1.9$ $g_{95/50} = 6$	$g_{50} = 1.3$ $g_{95/50} = 10$

Uit Tabel 1 volgt dat de FEM modellen ($g_{95/50} = 10$) ruwweg een factor 2 nauwkeuriger predictie geven dan de expert meningen ($g_{95/50} = 18$) en het empirische model ($g_{95/50} = 20$). Uit de resultaten van de FEM modellen volgt dat trillingen van heien en verkeerspassages ongeveer een factor 3 nauwkeuriger kunnen worden voorspeld dan trillingen van damwand trillen.

In het huidige onderzoek gaat het vooral om verkeerstrillingen, daarom wordt bij de beschouwing van de resultaten van DC1 ingezoomd op dit type trillingen. Hierbij moet worden opgemerkt dat bij DC1 alleen trillingen als gevolg van verkeerspassages over een drempel zijn gemeten en niet van railverkeerpassages.

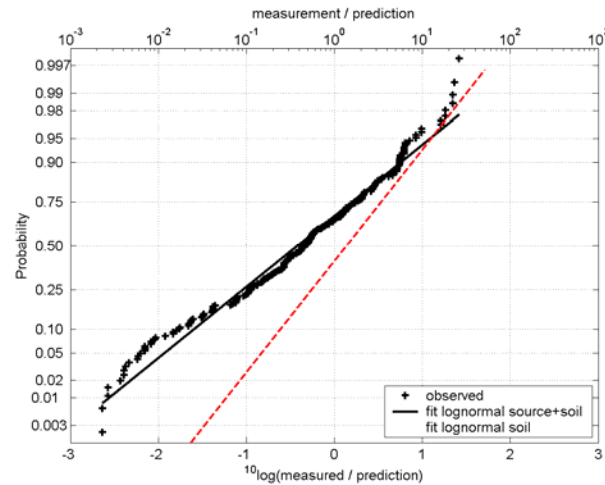
Er is een uitsplitsing gemaakt naar de afstand tussen de drempel en de sensorlocatie, referentie [2]. Daarnaast is een uitsplitsing gemaakt naar sensorlocaties aan het maaiveld en sensoren op diepte. De resultaten van deze twee uitsplitsingen zijn samengevat in Figuur 2.



Figuur 2 Frequentieverdeling van $^{10}\log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van een vrachtwagenpassage over een verkeersdrempel. De data van verschillende voorspellende instituten zijn verschillend gekleurd. De data in de linker bovenhoek geven het gemiddelde aan van $^{10}\log g(\mu)$, de standaarddeviatie van $^{10}\log g(\sigma)$, de mediaanwaarde g_{50} (verwarrend genoteerd als f_{50}) en het aantal data in de frequentieverdeling.

Uit Figuur 2 volgt dat de spreiding in predicties op diepte significant groter is dan aan het maaiveld. Aangezien de trillingen aan het maaiveld worden gegenereerd ontstond het vermoeden dat de reden voor de onnauwkeurigheid ligt aan de modellering van de bodem. Om te bepalen welke onzekerheid door het bodemmodel is gegenereerd, zijn extra predicties gedaan voor een volledig gespecificeerde trillingsbron: een valgewicht

waarbij de kracht die het valgewicht op de bodem uitoefende werd gemeten. Dus vrijwel geen onzekerheden in het bron subsysteem. Wederom is een grafiek gemaakt van de frequentieverdeling van de verhouding tussen gemeten en voorspelde waarden, zie Figuur 3.



Figuur 3 Frequentieverdeling van $^{10}\log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM voorspellingen alleen voor de bodem. Als vergelijking zijn de waarden van de FEM voorspellingen voor het bron + bodem systeem ook weergegeven (gestreepte lijn).

De belangrijkste waarneming is dat de helling van de verdeling voor alleen het bodemmodel significant minder steil is dan die van de verdeling van het bron + bodem model. Dit betekent dat de onzekerheid in de voorspellingen toeneemt, zelfs als de input van het bronmodel een onzekerheid van 0 heeft. Dit kan erop wijzen dat er een afhankelijkheid bestaat tussen het bron model en het bodem model (negatieve correlatie). Een mogelijke verklaring die in referentie [1] wordt gegeven is dat de modelleur gebruik maakt van zijn ervaring in het veld. In het kiezen van zijn punt schattingen voor de modelparameters zal hij waarden vermijden die onrealistische waarden opleveren. Met andere woorden: als een modelleur resultaten krijgt die hij niet verwacht, zal hij die terzijde schuiven en de invoerparameters aanpassen totdat een antwoord ontstaat dat past binnen zijn verwachtingspatroon.

2.6 Resultaten DC1 na extra informatie

De onzekerheid in de voorspellingen worden veroorzaakt door zowel de modelonzekerheid (simplificaties in het model) als de parameteronzekerheid. Om de relatieve bijdrage van de parameteronzekerheid te bepalen zijn additionele FEM voorspellingen gedaan, gebaseerd op extra, gemeten data van de bodemparameters. De extra bodemdata reduceren de parameteronzekerheid. Vooraf was de verwachting dat de voorspellingen aanzienlijk beter zouden zijn. Dit bleek niet het geval te zijn. Tabel 2 en Tabel 3 laten de statistieken zien van de frequentieverdelingen van g , de verhouding tussen gemeten waarden aan de ene kant en de voorspellingen met extra informatie aan de andere kant.

Tabel 2 Schattingen van het gemiddelde en de standaarddeviatie van $^{10}\log g$ voor FEM predicties in fase 1 (standaard parameter onzekerheid) en fase 2 (gereduceerde parameter onzekerheid)

	fase 1	fase 2
gemiddelde	-0.4	-0.3
standaard deviatie	0.9	0.9

Tabel 3 Schattingen van g voor FEM predicties in fase 1 (standaard parameter onzekerheid) en fase 2 (gereduceerde parameter onzekerheid)

	fase 1	fase 2
g_{50}	0.4	0.5
$g_{95/50}$	30	30

De tabellen laten zien dat extra informatie over de bodemparameters de predicties niet significant verbeteren. Dit laat zien dat ofwel de reductie in parameteronzekerheid is verwaarloosbaar, ofwel de dominante bron van onzekerheid in de predicties is de modelonzekerheid. Wel wordt in referentie [1] opgemerkt dat een andere bodem eventueel tot andere resultaten zou kunnen leiden. De hypothese wordt gesteld dat een modelleur gebruik maakt van zijn ervaringen in het veld en zijn predicties hierop aanpast, zolang ze niet passen bij zijn ervaring. Hierdoor is de invloed van de modelleur vermoedelijk groter dan die van de andere onderdelen van de modellen.

Bovenstaande resultaten zijn samengevat in Tabel 4.

Tabel 4 Uitsplitsing van de onzekerheid in FEM predicties. 'par' staat voor parameter onzekerheid, 'mod' voor model onzekerheid en 'tot' voor totale onzekerheid.

Subsystem →	Source			soil			building			total
	par	mod	tot	par	mod	tot	par	mod	tot	
FEM				$g_{50} = 0.5$ $g_{95/50} = 30$		$g_{50} = 0.4$ $g_{95/50} = 30$				$g_{50} = 1.3$ $g_{95/50} = 10$

2.7 Niet onderzocht in DC1

Het gebouw

In het onderzoek in DC1 is geen gebouw gemodelleerd, omdat op de meetlocatie geen gebouw voorhanden was. Een gebouw werkt middelend op de bodemtrillingen. Bij de metingen bij DC1 zijn verschillende meetpunten gebruikt, waarbij de bron gelijk werd gehouden. Het is mogelijk, bijvoorbeeld door onregelmatigheden in de bodem, dat er grote verschillen ontstaan in trillingssterkte op punten op gelijke afstand. Een modelleur zou waarschijnlijk op zo'n klein terrein voor punten op gelijke afstand een gelijke trillingssterkte prognosticeren. In dit geval veroorzaken de onregelmatigheden in de bodem al een grote spreiding in de resultaten van de modelleur. Als de meetpunten zich in een gebouw hadden bevonden, zou het gebouw deze verschillen in zekere mate uitmiddelen. De spreiding als gevolg van de spreiding in de bodem wordt hierdoor dus kleiner. Hiermee is niet gezegd dat de modelleurs beter zouden scoren als er een gebouw had gestaan, aangezien ze dan nog wel de overdracht van de bodem naar het gebouw goed zouden moeten modelleren.

Dataverwerking

In DC1 zijn de predictiewaarden van de modellers vergeleken met de maximaal gemeten waarden bij elke trillingsbron. Dit betekent dat bij een heipaal waar 200 klappen zijn geweest, de maximale trillingssterkte is genomen. Als voor die heipaal toevallig veel minder klappen nodig zouden zijn geweest, zou een lagere waarde worden gevonden. Beter zou het daarom zijn de 95 % bovengrens te nemen van alle heiklappen.

2.8 Samenvatting

Bij DC1 zijn modellen gebruikt voor predicties van verschillende soorten trillingsbronnen, maar niet voor railverkeer. Daarom is niet bekend hoe de predictiemodellen voor railverkeer scoren.

Gemiddeld is de fout in voorspellingen van trillingen van verschillende trillingsbronnen voor FEM modellen een factor 10.

Als de trillingen aan het maaiveld moeten worden voorspeld, scoren de modellers aanzienlijk beter dan als de trillingen in de bodem moeten worden voorspeld. Ook de afstand is van belang: op korte afstand zit men er meer naast. Voor toekomstige predicties dient men hiermee rekening te houden bij de bepaling van de betrouwbaarheid van de predictie.

In DC1 is hiervoor een verklaring bedacht. Een modelleur maakt gebruik van zijn ervaringen in het veld en past zijn predicties hierop aan, zolang ze niet passen bij zijn ervaring. Hierdoor is de invloed van de modelleur vermoedelijk groter dan die van de andere onderdelen van de modellen. In DC1 is dit niet nader onderzocht.

Extra informatie over de bodemparameters verbetert de predicties niet significant. Dit laat zien dat ofwel de reductie in parameteronzekerheid is verwaarloosbaar, ofwel de dominante bron van onzekerheid in de predicties is de modelonzekerheid. Wel wordt opgemerkt dat een andere bodem eventueel tot andere resultaten zou kunnen leiden.

3 De invloed van de modelleur

3.1 Inleiding

Zoals in paragraaf 2.3 is aangegeven, is bij DC1 de hypothese gesteld dat de invloed van de modelleur misschien wel de belangrijkste parameter is voor wat betreft de betrouwbaarheid van prognoseresultaten. In dit hoofdstuk wordt dit aspect nader onderzocht.

In Tabel 5 is in tabelvorm het experiment beschreven dat in DC1 is uitgevoerd. In deze tabel staan de verschillende foutenbronnen uitgesplitst in de rijen. In de derde kolom staat voor vrachtwagenpassages de bijbehorende bijdrage aan de totale spreiding per foutenbron weergegeven. De in deze tabel weergegeven getallen zijn willekeurig gekozen en min of meer gelijkmatig verdeeld, zodanig dat het totaal op 7¹ kwam (de totale spreiding voor vrachtwagenpassages). Voor het gebouw is 1,0 ingevuld omdat de metingen in de bodem en aan het maaiveld plaatsvonden. In de vierde kolom staat weergegeven wat de verwachting was als informatie werd toegevoegd in de vorm van metingen: de valproef. De spreiding in de bron en bron-bodem interactie zou verdwijnen en als de verdeling van de bijdragen van de verschillende foutenbronnen zou kloppen, zou de spreiding afnemen van een factor 7 naar een factor 6.

Tabel 5 Experiment DC1 in tabelvorm beschreven

	vrachtwagenpassage	experiment DC1	
		valgewicht	
	$g_{95/50}$	$g_{95/50}$	$g_{95/50}$
		verwachting	werkelijk
Bron	3.0	1.0	
Bron-Bodem interactiefactor	3.0	3.0	
Bodem	4.0	4.0	
Bodem-Gebouw interactiefactor	1.0	1.0	
Gebouw	1.0	1.0	
Modelleur	3.8	3.8	
Totaal	7	6	30

*) Bij de valproef is de kracht op de bodem gemeten: daarin is dus geen onzekerheid meer.

Bij de gehanteerde methode hadden alleen de cellen met een waarde groter dan 1 een bijdrage in de totale spreiding. Zoals genoemd in paragraaf 2.6 bleek de spreiding echter een factor 30 te zijn. Dit kon dus alleen het geval zijn als het product van de modelonzekerheid van de bodem en de invloed van de modelleur 30 was. Aangezien vermindering van de onzekerheid in de bodem door meer informatieverstrekking geen effect had (zie Tabel 3), leidde dit tot de conclusie dat de invloed van de modelleur zeer groot is.

¹ In hoofdstuk 4 staat beschreven hoe de optelling van de deelbetrouwbaarheden tot stand komt.

3.2 Interviews modellers

Om de invloed van de modelleur te bepalen, zijn de personen die zich bij DC1 met de prognoses hebben bezig gehouden wederom benaderd. Omdat het al een paar jaar geleden was, was niet alles meer precies bekend. De volgende vragen zijn gesteld aan de modellers:

1. Heb je met collega's de predictiewaarden doorgenomen voordat je die hebt ingediend?
2. Heb je naar aanleiding van de discussie met je collega's de waarden nog aangepast?
3. Hoe ben je te werk gegaan? Heb je "gewoon" de predictiewaarden genomen die uit je eerste predictie kwamen, of heb je wellicht nog waarden aangepast op basis van je ervaring met metingen in vergelijkbare situaties?

Het bleek dat bij alle modellers er op een of andere manier overleg is geweest met een begeleider over de resultaten. Ook zijn "onrealistische resultaten" daarbij verwijderd. Naast de bovengenoemde vragen zijn enkele vragen gesteld over de ervaring van de modellers:

1. Hoeveel jaren ervaring had je ten tijde van het DC1 onderzoek op het gebied van trillingen?
2. En hoeveel met het model dat je hebt gebruikt?
3. Hoeveel ervaring had je begeleider?
4. Heb je veel ervaringen met metingen in vergelijkbare situaties?

De bovenstaande vragen zijn gesteld voor de predicties van heien, intrillen damwanden en drempels. De resultaten van de ervaringsvragen zijn samengevat in Tabel 6 tot en met Tabel 8.

Tabel 6 **Heien.** Samenvatting van de ervaring van de modellers van DC1 van de drie partijen. De getallen geven het aantal jaren ervaring aan.

Partij	1	2	3
Ervaring modelleur	4	8	1
Modelervaring	4	8	0
Ervaring begeleiding	10	8	4
Ervaring metingen	2	8	4

Tabel 7 **Intrillen damwanden.** Samenvatting van de ervaring van de modellers van DC1 van de drie partijen. De getallen geven het aantal jaren ervaring aan.

Partij	1	2	3
Ervaring modelleur	4	8	0
Modelervaring	4	8	0
Ervaring begeleiding	10	8	0
Ervaring metingen	2	8	4

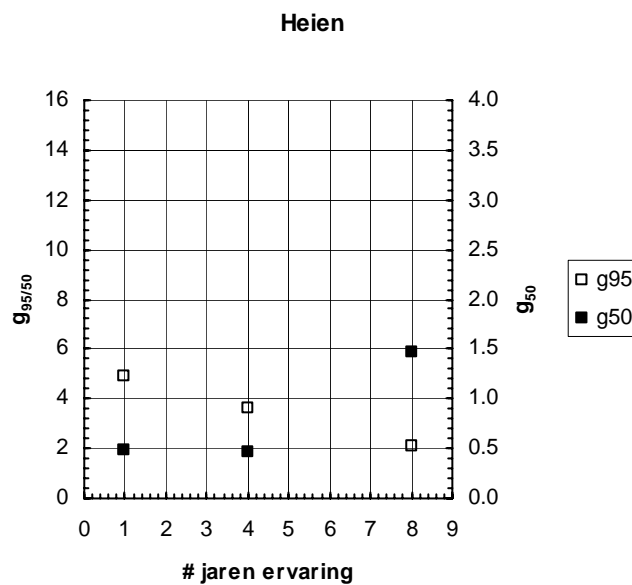
Tabel 8 **Drempels.** Samenvatting van de ervaring van de modelleers van DC1 van de drie partijen. De getallen geven het aantal jaren ervaring aan.

Partij	1	2	3
Ervaring modelleur	4	0	0
Modelervaring	4	0	0
Ervaring begeleiding	10	0	0
Ervaring metingen	2	8	4

3.3 Vergelijking ervaring modelleers met scores

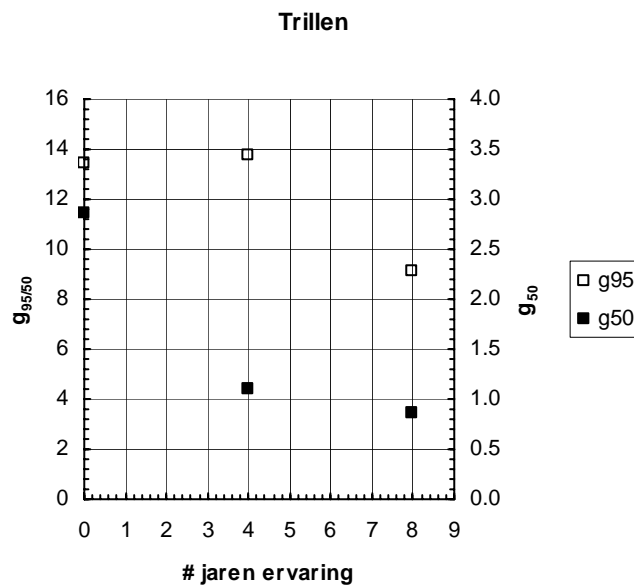
De ervaring van de modelleers is vergeleken met de “scores” die ze hebben behaald. Wederom zijn grafieken gemaakt van de frequentieverdelingen van de verhouding tussen gemeten en voorspelde waarden, zoals in Figuur 1 en Figuur 2, maar nu voor de drie partijen afzonderlijk. De resultaten staan in grafieken weergegeven in bijlage A.

In de linker bovenhoek van deze figuren is steeds een numerieke waarde gegeven voor onder andere g_{50} en $g_{95/50}$. Deze waarden zijn uitgezet tegen het aantal jaren ervaring van de modelleur in Figuur 4 tot en met Figuur 6.



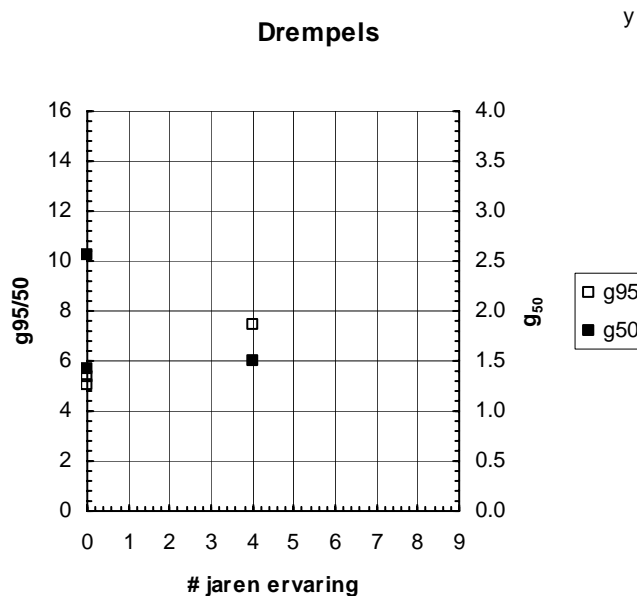
Figuur 4 g_{50} en $g_{95/50}$ uitgezet tegen het aantal jaren ervaring van de modelleur bij predicties van trillingen bij het heien. $g_{95/50}$ staat uitgezet op de linker y-as, g_{50} op de rechter y-as.

In Figuur 4 zien we voor de $g_{95/50}$ waarde een daling met het aantal jaren ervaring, precies conform de verwachting: hoe meer ervaring, hoe kleiner de te verwachten spreiding. Voor de g_{50} waarde is de trend wat minder duidelijk: de partijen met 1 en 4 jaren ervaring hebben voor g_{50} een waarde van 0,5, wat overeenkomt met een onderschatting van de trillingen, de meest ervaren partij (8 jaren) heeft voor g_{50} een waarde van 1,5, dus een neiging tot overschatting.



Figuur 5 g_{50} en $g_{95/50}$ uitgezet tegen het aantal jaren ervaring van de modelleur bij predicties van trillingen bij het intrillen van damwanden. $g_{95/50}$ staat uitgezet op de linker y-as, g_{50} op de rechter y-as.

Het voorspellen van het intrillen van damwanden blijkt het moeilijkst te zijn. De partij met de meeste ervaring, 8 jaar, brengt het er nog het best af ($g_{95/50} = 9$). De partij met de minste ervaring, partij 1, heeft een sterke neiging tot overschatting ($g_{50} \approx 12$).



Figuur 6 g_{50} en $g_{95/50}$ uitgezet tegen het aantal jaren ervaring van de modelleur bij predicties van trillingen bij het intrillen van damwanden. $g_{95/50}$ staat uitgezet op de linker y-as, g_{50} op de rechter y-as.

Bij de voorspellingen van de drempels hadden 2 partijen geen ervaring. Opmerkelijk is dat de partij met 4 jaar ervaring toch een hogere waarde voor $g_{95/50}$ had. Ook bij de

waarde voor g_{50} is geen duidelijke trend te herkennen. De trillingen worden in alle gevallen overschat (g_{50} is steeds groter dan 1).

Dergelijke grafieken als in Figuur 4 tot en met Figuur 6 zijn ook gemaakt voor het aantal jaren ervaring van de begeleiding en het aantal jaren ervaring met predictie software. Deze zijn niet in dit rapport opgenomen. De reden hiervoor is dat in die grafieken geen duidelijke trends te ontdekken zijn.

3.4 Discussie en conclusie

De resultaten van het onderzoek naar de invloed van de ervaring van de modelleur op de betrouwbaarheid van zijn trillingspredicties zijn gebaseerd op de resultaten van slechts een drietal partijen. Het is daarom niet goed mogelijk stellige conclusies te trekken uit de resultaten. Bovendien kunnen in de grafieken geen duidelijke trends worden gevonden tussen de betrouwbaarheid en het aantal jaren ervaring van de modelleurs. De modelleur is van belang voor de betrouwbaarheid van zijn voorspelling, maar het verband tussen zijn ervaring en zijn betrouwbaarheid is niet duidelijk. Het verband is in ieder geval niet sterk: anders zouden de grafieken (ondanks het geringe aantal punten) een duidelijker trend laten zien.

Het is nog mogelijk dat er andere parameters dan de ervaring van de modelleurs van belang zijn, die hier niet zijn beschouwd. Bijvoorbeeld het aantal predictieberekeningen dat een modelleur per maand uitvoert, ISO certificering, het IQ, het opleidingsniveau van de modelleur en/of dat van zijn begeleider, etc. Dit soort zaken is nu echter moeilijk nog te achterhalen.

Ook is het mogelijk dat als het experiment van DC1 bij een andere bodemopbouw zou worden herhaald, andere resultaten naar voren zouden komen.

4 Betrouwbaarheid van trillingspredicties

4.1 Inleiding

Het doel van dit onderzoek was te komen tot een spreadsheet met alle betrouwbaarheidscomponenten, in te vullen door een voorspeller, met een formule voor de totale betrouwbaarheid. In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe een dergelijke spreadsheet eruit zou kunnen zien.

4.2 Optelling deelbetrouwbaarheden

Zoals beschreven in 2.4 kan de totale onbetrouwbaarheid van een predictie worden opgedeeld in deelbetrouwbaarheden van deelmodellen. In de statistiek wordt een lognormale verdeling gebruikt om een variabele te modelleren die gezien kan worden als het multiplicatieve resultaat van een aantal kleine, onafhankelijke factoren. In dit geval zijn dat respectievelijk g_{bron} , g_{bodem} , etc. Oftewel $g_1 \dots g_n$. Als ze onafhankelijk zijn van elkaar, geldt:

$$g = \prod_{i=1}^n g_i \quad (6)$$

In C wordt afgeleid dat dan bij benadering geldt:

$$\frac{\sigma_g^2}{g^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{g_i}^2}{g_i^2} \quad (7)$$

In appendix D wordt tenslotte afgeleid hoe de deelbetrouwbaarheden sommeren tot de totale betrouwbaarheid. Het resultaat is:

$$g_{95/50,totaal} = e^{1,64 \sqrt{\ln \left(1 + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{g_{95/50,i}}{1,64^2} \right)^2 \ln \left(\frac{g_{95/50,i}}{1,64} \right) - 1 \right] \right)}} \quad (8)$$

4.3 Gewenste spreadsheet

De spreadsheet zou er uit kunnen zien, zoals in paragraaf 3.1, Tabel 5. Een modelleur zou per subsysteem de betrouwbaarheid moeten invoeren om de totale betrouwbaarheid van zijn voorspelling te kunnen berekenen. Maar het invullen van de spreadsheet levert een aantal problemen op:

- In DC1 is niet op een dergelijke gedetailleerde manier naar de betrouwbaarheid van afzonderlijke parameters gekeken: alleen de totaalbetrouwbaarheid (in dit geval 7) is bepaald. De getallen die per parameter en per submodel zouden moeten worden ingevuld zijn niet bekend. Aangezien er een behoorlijke tijd is verstreken sinds DC1 (ca. 7 jaar), is het vrijwel niet uitvoerbaar om de gegevens nog boven water te krijgen en deze exercitie alsnog uit te voeren.

- In de spreadsheet is de “modelleur” opgenomen in de keten van betrouwbaarheid beïnvloedende factoren. Hoewel het in hoofdstuk 3 niet kon worden aangetoond, speelt de ervaring van een modelleur waarschijnlijk een belangrijke rol. Het is echter de vraag hoe een modelleur zichzelf zou moeten inschatten. Een (logische) neiging zou kunnen zijn dat een modelleur zichzelf een zeer goede betrouwbaarheid toedicht.
- In feite kan een modelleur aan alle knoppen van het model draaien: zowel invullen van andere getalswaarden voor de parameters als een aanpassing doen van het model. Het is in DC1 niet onderzocht welke werkwijzen modelleurs volgen bij het uitvoeren van predicties: welke parameters passen ze aan en hoe komen ze tot het besluit dat er parameters moeten worden aangepast? Een onderzoek hiernaar zou tot opheldering kunnen leiden hoe groot de invloed van de modelleur werkelijk is.
- De weergave in Tabel 5 waarbij de modelleur als een onderdeel van het model is weergegeven, is niet correct. Dan zou volgens vergelijking 2 v_{gemeten} en $v_{\text{predictie}}$ moeten worden bepaald. En daar is bij een modelleur geen sprake van.
- Ook bij de andere onderdelen van het model is het in veel gevallen niet mogelijk om $g_{95/50}$ direct te bepalen. De waarden van $g_{95/50}$ in Tabel 5 moeten daarom meer worden gezien als de waarden voor de onzekerheidsbijdragen van het desbetreffende modelonderdeel.
- In DC1 is gebleken dat predicties van een bron+bodem model kleiner zijn dan van een model van uitsluitend de bodem, die wordt geëxciteerd met een bekende trillingsbron. Dit impliceert een negatieve correlatie tussen bodem en bronmodellen.
- De betrouwbaarheid van predictiemodellen is, zelfs bij de meest geavanceerde FEM modellen, relatief laag: in de orde van factor 10. Bij een eenvoudiger prognosemethode, zoals SRM-T is te verwachten dat de betrouwbaarheid nog lager zal liggen. Mogelijk is de betrouwbaarheid beter bij predicties van trillingen als gevolg van railpassages. Dit is echter nog niet onderzocht.

Uit het bovenstaande blijkt dat de oorspronkelijk bedachte werkwijze, waarbij de afzonderlijke betrouwbaarheden van de subsystemen moeten worden ingevuld, niet goed uitvoerbaar is. In de volgende paragraaf wordt een mogelijke alternatieve aanpak voorgesteld.

4.4 Alternatieve aanpak

Vanwege de onbekendheid van de verschillende onbetrouwbaarheidscomponenten, wordt in deze paragraaf een omgekeerde werkwijze geschetst, uitgaande van een “uitgangsbetrouwbaarheid”: de overall betrouwbaarheid, zoals deze in DC1 is bepaald. Ook bij andere modellen dan die bij DC1 zijn gebruikt, kan een uitgangsbetrouwbaarheid worden gebruikt. Deze moet dan wel eerst worden bepaald met behulp van een benchmark.

Wederom kan hiervoor een spreadsheet worden gebruikt. Een voorbeeld hoe een dergelijke spreadsheet eruit zou kunnen zien, is geschetst in Tabel 9.

Tabel 9 Voorbeeldtabel voor verbetering betrouwbaarheid.

		$g_{95/50}$
Bron	parameter	2
	model	2
Bron-Bodem interactiefactor	parameter	2
	model	3
Bodem	parameter	3
	model	3
Bodem-Gebouw interactiefactor	parameter	1
	model	1
Gebouw	parameter	1
	model	1
Modelleur		3,5
Totaal		7

De totale onzekerheid is opgebouwd gedacht uit de bovenstaande “onzekerheidsbijdragen”. $g_{95/50}$ kan voor de verschillende modelonderdelen niet zomaar afzonderlijk worden bepaald, doordat er geen goede meting mogelijk is zonder invloed van de andere onderdelen. Zo is het bijvoorbeeld niet mogelijk om bij railpassages metingen te verrichten onder de bron (trein), zonder de invloed van de bodem mee te meten. Dit betekent dat de afzonderlijke onzekerheidsbijdragen op een andere manier moeten worden bepaald. Voor een deel kan dit worden gedaan met behulp van variatiestudies en ook kan een expertmeningen-onderzoek worden gedaan.

Ook is een vereenvoudigde versie van Tabel 9 mogelijk door de onzekerheden van de deelmodellen samen te nemen, evenals de parameteronzekerheden. Daarmee wordt de totale betrouwbaarheid opgesplitst in drie deelcomponenten: $g_{95/50,model}$, $g_{95/50,parameter}$ en $g_{95/50,modelleur}$.

$g_{95/50,totaal}$ de totale betrouwbaarheid van een trillingspredictie kan worden bepaald met een benchmark, waarbij predicties worden gedaan en worden vergeleken met de resultaten van metingen. Voor de resultaten van metingen kan ook gebruik worden gemaakt van een database, mits de modelleurs geen kennis hebben van deze metingen.

$g_{95/50,parameter}$ de parameter betrouwbaarheid. Deze kan worden bepaald met behulp van een gevoeligheidsstudie.

$g_{95/50,modelleur}$ de betrouwbaarheid van de modelleur. Deze kan worden bepaald uit een benchmark studie waarbij verschillende modelleurs predicties gaan doen voor de zelfde situatie en met het zelfde model.

De term $g_{95/50,model}$ kan dan berekend worden uit deze resultaten. Daarmee kunnen we verschillende modellen met elkaar vergelijken.

4.5 Discussie

Het invullen van een tabel als Tabel 9 vraagt wel extra kennis die nu nog niet voorhanden is:

- Uitgangsbetrouwbaarheid

In Tabel 9 is als voorbeeld een factor 7 genomen. De uitgangswaarde voor de betrouwbaarheid moet per model en per deel van het model inclusief de modelleur worden vastgesteld om de in dit hoofdstuk beschreven methodiek te kunnen toepassen. Voor railpassages betekent dit dat de uitgangswaarde alsnog moet worden bepaald. Deze “benchmark score” is dus gekoppeld zowel aan het model, inclusief alle deelmodellen, als aan de modelleur.

- Specifieke situaties

Bij bepaalde specifieke situaties, bijvoorbeeld op een grotere afstand, is de betrouwbaarheid beter dan bij andere, zoals bleek uit Figuur 2. Des te beter deze informatie per benchmark score bekend is, des te beter de betrouwbaarheid per specifieke situatie kan worden bepaald.

- Modelleur

In Tabel 9 staat ook een onzekerheidsbijdrage genoemd voor de modelleur. Dit is waarschijnlijk een zeer variabele waarde. De onzekerheidsbijdrage van een modelleur zal verschillend zijn bij verschillende typen bronnen en bij verschillende modellen, want de hoeveelheid ervaring zal verschillend zijn.

- Verbetering betrouwbaarheid

Als de verschillende onzekerheidsbijdragen bekend zijn, kan in principe voor een specifieke situatie een andere betrouwbaarheid worden gehaald dan de benchmark score. Als bijvoorbeeld een modelonderdeel wordt vervangen door een meting, kunnen de onzekerheidsbijdragen van dat modelonderdeel worden vervangen door 1. Hierbij moet wel worden opgelet of de aanpassing geen invloed heeft op de onzekerheidsbijdrage van de modelleur. Met een situatie waarbij een deel van een model is vervangen door een meting heeft de desbetreffende modelleur waarschijnlijk minder ervaring.

Hoewel de overtuiging bestaat dat de ervaring van de modelleur een belangrijke invloed heeft op de betrouwbaarheid van zijn predictie, bestaat er weinig inzicht in hoe die invloed tot stand komt. Bij toekomstig onderzoek, waarbij betrouwbaarheid van trillingspredicties wordt onderzocht, dient dit aspect daarom een belangrijke rol te hebben.

5 Samenvatting

In de eerste tranche van Delft Cluster (DC1) is een uitgebreid onderzoek gedaan naar de betrouwbaarheid van trillingsvoorspellingen. Dit heeft inzicht opgeleverd over de betrouwbaarheid van modellen, de onzekerheid over invoerparameters, de rol van modelleerder en de stochastiek van de praktijk. In dit werkpakket was het de bedoeling om deze kennis toe te passen op de huidige voorspellingsmethoden en de onzekerheden rond prognoses hanteerbaar te maken voor onderzoeker en opdrachtgever. Het bleek dat de resultaten nog niet te vertalen zijn naar direct hanteerbare richtlijnen.

DC1

Bij DC1 zijn modellen gebruikt voor predicties van verschillende soorten trillingsbronnen, maar niet voor railverkeer. Daarom is niet bekend hoe de predictiemodellen voor railverkeer scoren.

Gemiddeld is de fout in voorspellingen van trillingen van verschillende trillingsbronnen voor FEM modellen een factor 10.

Als de trillingen aan het maaiveld moeten worden voorspeld, scoren de modelleurs aanzienlijk beter dan als de trillingen in de bodem moeten worden voorspeld. Ook de afstand is van belang: op korte afstand zit men er meer naast. Voor toekomstige predicties dient men hiermee rekening te houden bij de bepaling van de betrouwbaarheid van de predictie.

De hypothese wordt gesteld dat een modelleur gebruik maakt van zijn ervaringen in het veld en zijn predicties hierop aanpast, zolang ze niet passen bij zijn ervaring. Hierdoor is de invloed van de modelleur vermoedelijk groter dan die van de andere onderdelen van de modellen. In DC1 is dit niet nader onderzocht.

Extra informatie over de bodemparameters verbetert de predicties niet significant. Dit laat zien dat ofwel de reductie in parameteronzekerheid is verwaarloosbaar, ofwel de dominante bron van onzekerheid in de predicties is de modelonzekerheid. Wel wordt opgemerkt dat een andere bodem eventueel tot andere resultaten zou kunnen leiden.

Invloed modelleur

De resultaten van het onderzoek naar de invloed van de ervaring van de modelleur op de betrouwbaarheid van zijn trillingspredicties zijn gebaseerd op de resultaten van slechts een drietal partijen. Het is daarom niet goed mogelijk stellige conclusies te trekken uit de resultaten. Bovendien kunnen in de grafieken geen duidelijke trends worden gevonden tussen de betrouwbaarheid en het aantal jaren ervaring van de modelleurs. De hypothese dat de ervaring van de modelleur van belang is voor de betrouwbaarheid van zijn voorspelling blijft staan, maar het is wel duidelijk dat het verband niet heel sterk is: anders zouden de grafieken (ondanks het geringe aantal punten) een duidelijker trend laten zien.

Het is nog mogelijk dat er andere parameters in de ervaring van de modelleurs van belang zijn, die hier niet zijn beschouwd. Bijvoorbeeld het aantal predictieberekeningen dat een modelleur per maand uitvoert, ISO certificering, het IQ, het opleidingsniveau van de modelleur en/of dat van zijn begeleider, etc. Dit soort zaken is nu echter moeilijk nog te achterhalen.

Ook is het mogelijk dat als het experiment van DC1 bij een andere bodemopbouw zou worden herhaald, andere resultaten naar voren zouden komen.

Betrouwbaarheid van trillingspredicties

Het invullen van een tabel als Tabel 9 vraagt kennis die nu nog niet voorhanden is:

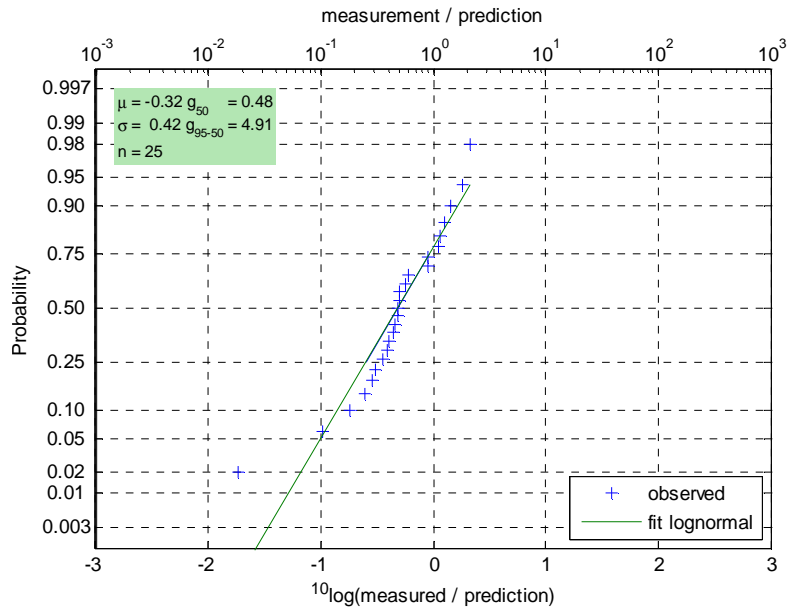
- **Uitgangsbetrouwbaarheid**
De uitgangswaarde voor de betrouwbaarheid moet per model en per deel van het model inclusief de modelleur worden vastgesteld om de in dit hoofdstuk beschreven methodiek te kunnen toepassen. Voor railpassages betekent dit dat de uitgangswaarde alsnog moet worden bepaald. Deze “benchmark score” is dus gekoppeld zowel aan het model met alle deelmodellen als aan de modelleur.
- **Specifieke situaties**
Bij bepaalde specifieke situaties, bijvoorbeeld op een grotere afstand, is de betrouwbaarheid beter dan bij andere. Des te beter deze informatie per benchmark score bekend is, des te beter de betrouwbaarheid per specifieke situatie kan worden bepaald.
- **Modelleur**
De onzekerheidsbijdrage voor de modelleur is waarschijnlijk een zeer variabele waarde. Deze zal verschillend zijn bij verschillende typen bronnen en bij verschillende modellen, want de hoeveelheid ervaring zal verschillend zijn.
- **Verbetering betrouwbaarheid**
Als de verschillende onzekerheidsbijdragen bekend zijn, kan in principe voor een specifieke situatie een andere betrouwbaarheid worden gehaald dan de benchmark score, bijvoorbeeld door een modelonderdeel te vervangen door een meting. Hierdoor kunnen de onzekerheidsbijdragen van dat modelonderdeel worden vervangen door 1. Hierbij moet wel worden opgelet of de aanpassing geen invloed heeft op de onzekerheidsbijdrage van de modelleur. Met een situatie waarbij een deel van een model is vervangen door een meting heeft de desbetreffende modelleur waarschijnlijk minder ervaring.

Hoewel de overtuiging bestaat dat de ervaring van de modelleur een belangrijke invloed heeft op de betrouwbaarheid van zijn predictie, bestaat er weinig inzicht in hoe die invloed tot stand komt. Bij toekomstig onderzoek, waarbij betrouwbaarheid van trillingspredicties wordt onderzocht, dient dit aspect daarom een belangrijke rol te hebben.

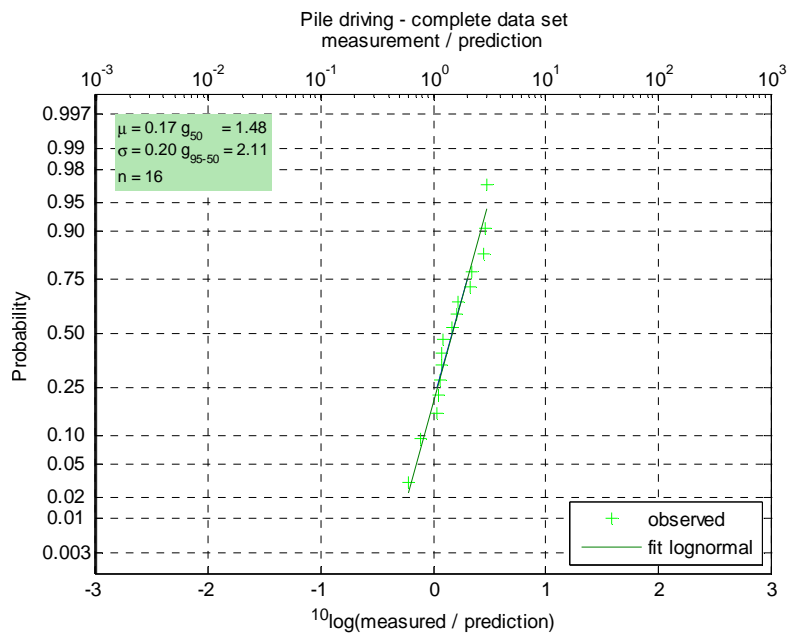
6 Referenties

- [1] Hölscher, Waarts, “Reliability of vibration predictions and reducing measures, Final report on the project”, DC report 01.05.02-20, juni 2003
- [2] De Wit, Galanti, “Reliability of vibration predictions and reducing measures, Synthesis of predictions and measurements”, DC report DC1.152.13, September 2003

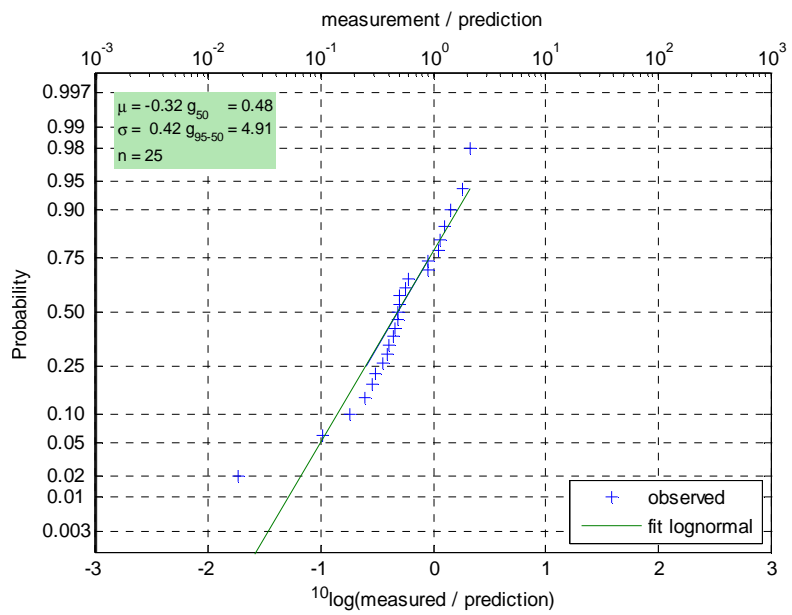
A Resultaten afzonderlijke modelleers DC1



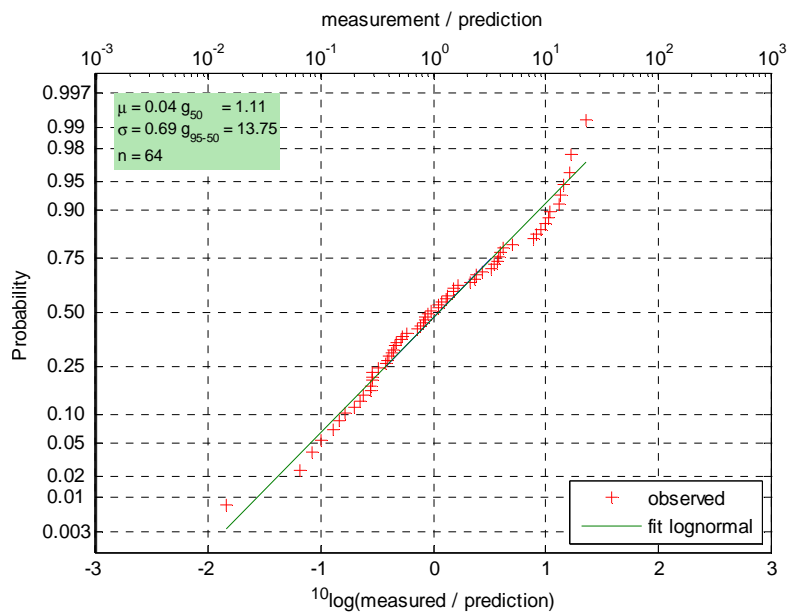
Figuur 7 Partij 1. Frequentieverdeling van $10^0 \log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van heien.



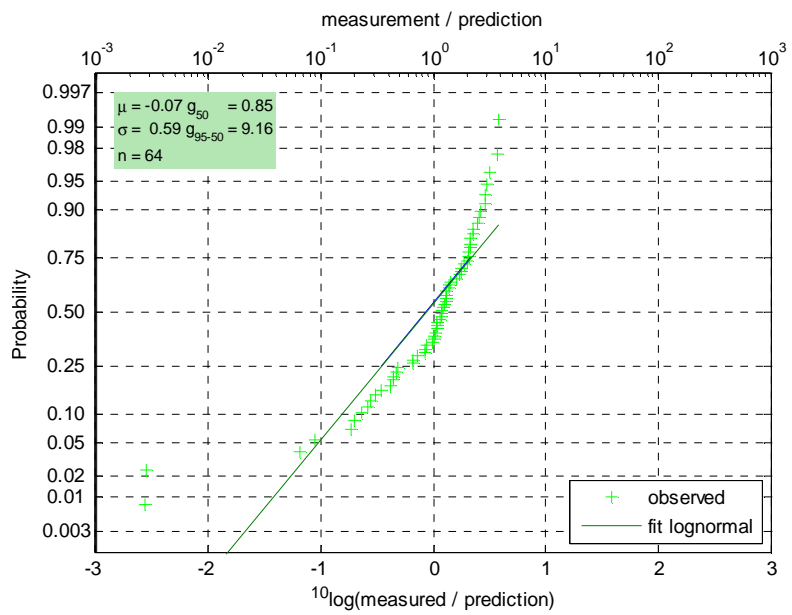
Figuur 8 Partij 2. Frequentieverdeling van $10^0 \log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van heien.



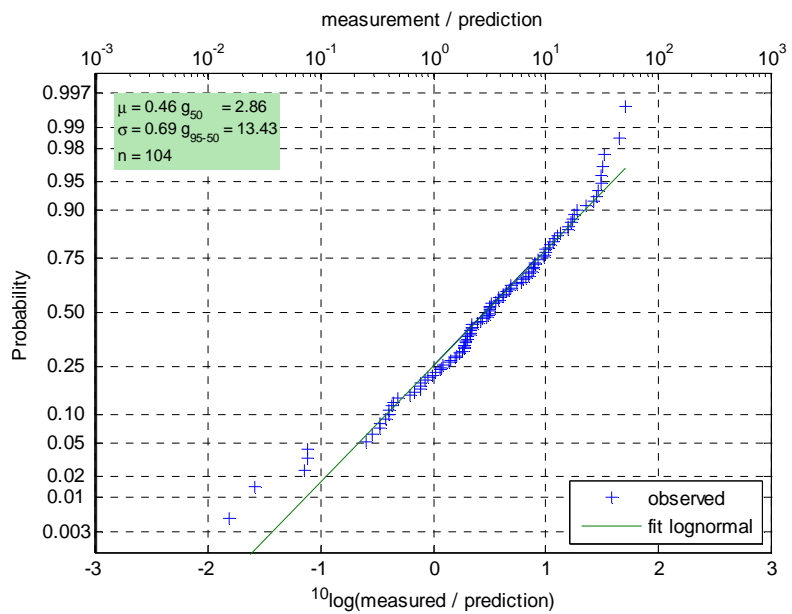
Figuur 9 Partij 3. Frequentieverdeling van $^{10}\log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van heien.



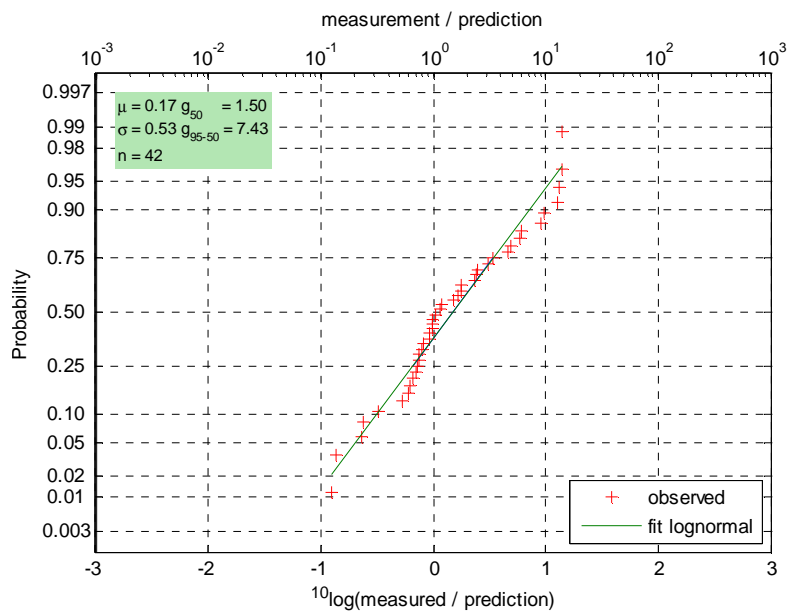
Figuur 10 Partij 1. Frequentieverdeling van $^{10}\log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van intrillen van damwanden.



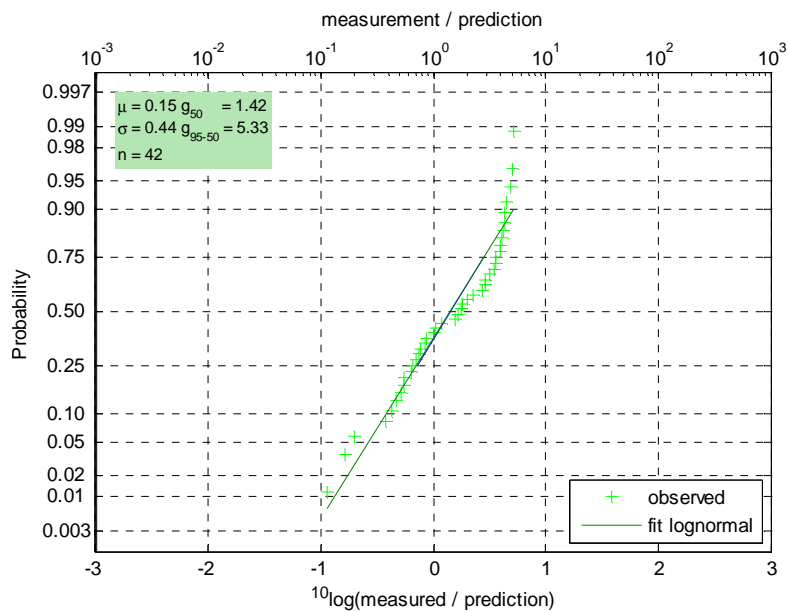
Figuur 11 Partij 2. Frequentieverdeling van $10^1 \log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van intrillen van damwanden.



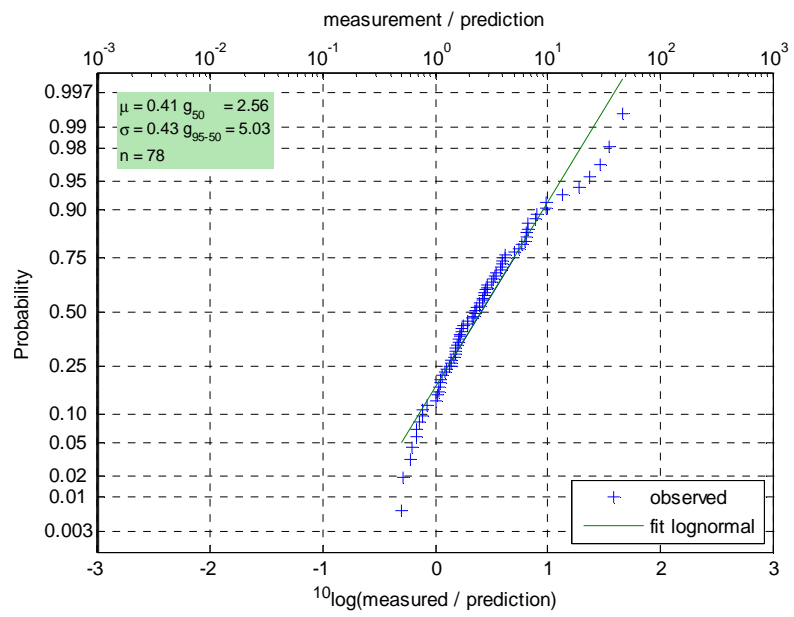
Figuur 12 Partij 3. Frequentieverdeling van $10^1 \log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van intrillen van damwanden.



Figuur 13 Partij 1. Frequentieverdeling van $10^1 \log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van een vrachtwagenpassage over een drempel.



Figuur 14 Partij 2. Frequentieverdeling van $10^1 \log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van een vrachtwagenpassage over een drempel.



Figuur 15 Partij 3. Frequentieverdeling van $^{10}\log g$, de logaritme van de verhouding tussen de gemeten waarden en de FEM predicties voor de trillingen afkomstig van een vrachtwagenpassage over een drempel.

B Lognormaalverdelingen

In de kansrekening is de lognormale verdeling de kansverdeling van een stochastische variabele waarvan het logaritme normaal verdeeld is. Oftewel, als Y een normale verdeling volgt, dan volgt $X = e^Y$ een lognormale verdeling.

Voor het gemiddelde geldt:

$$\mu_X = e^{\mu_Y + \sigma_Y^2 / 2} \quad (\text{B } 1)$$

Voor de standaarddeviatie geldt:

$$\sigma_X^2 = \mu_X^2 (e^{\sigma_Y^2} - 1) \quad (\text{B } 2)$$

Oftewel:

$$\sigma_X = \mu_X \sqrt{(e^{\sigma_Y^2} - 1)} \quad (\text{B } 3)$$

Voor een normaalverdeling geldt dat de 95 % bovengrens gelijk is aan:

$$Y_{0,95} = \mu_Y + 1,64\sigma_Y \quad (\text{B } 4)$$

Dus voor een log-normaalverdeling:

$$X_{0,95} = e^{Y_{0,95}} = e^{\mu_Y + 1,64\sigma_Y} \quad (\text{B } 5)$$

Voor $g_{95/50}$ geldt:

$$g_{95/50} = \frac{X_{0,95}}{X_{0,50}} \quad (\text{B } 6)$$

Combineren van vergelijking 5 en vergelijking 3 levert:

$$g_{95/50} e^{Y_{0,50}} = e^{\mu_Y + 1,64\sigma_Y} \quad (\text{B } 7)$$

$$\ln(g_{95/50}) + Y_{0,50} = \mu_Y + 1,64\sigma_Y \quad (\text{B } 8)$$

$$\sigma_Y = \frac{\ln(g_{95/50}) + Y_{0,50} - \mu_Y}{1,64} \quad (\text{B } 9)$$

Omdat Y normaal verdeeld is, geldt:

$$Y_{0,50} = \mu_Y \quad (\text{B } 10)$$

Hieruit volgt:

$$\sigma_Y = \frac{\ln(g_{95/50})}{1,64} \quad (\text{B } 11)$$

C Optelling van standaarddeviaties

Zoals uit vergelijking 3 volgt, wordt g opgebouwd uit deelcomponenten, g_1, g_2 , etc.
 Dus:

$$g = g_1 g_2 \dots g_n = \prod_1^n g_n \quad (C 1)$$

Voor het gemiddelde geldt (mits $g_1 \dots g_n$ onafhankelijk zijn):

$$\bar{g} = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_n = \prod_1^n \bar{g}_n \quad (C 2)$$

Voor de standaarddeviatie geldt bij benadering (Taylor ontwikkeling):

$$\sigma_g^2 = \frac{\partial g^2}{\partial g_1^2} \Big|_{\bar{g}} \sigma_{g_1}^2 + \dots + \frac{\partial g^2}{\partial g_n^2} \Big|_{\bar{g}} \sigma_{g_n}^2 \quad (C 3)$$

$$\sigma_g^2 = \bar{g}_2 \bar{g}_3 \sigma_{g_1}^2 + \bar{g}_1 \bar{g}_3 \sigma_{g_2}^2 + \dots \quad (C 4)$$

$$\frac{\sigma_g^2}{\bar{g}^2} = \frac{\sigma_g^2}{\bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_n} = \frac{\sigma_{g_1}^2}{\bar{g}_1^2} + \dots + \frac{\sigma_{g_n}^2}{\bar{g}_n^2} \quad (C 5)$$

D Sommatie van deelbetrouwbaarheden

Vergelijking B 2 kan worden omgeschreven tot:

$$\sigma_Y^2 = \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right) \quad (\text{D } 1)$$

Combineren met B 11:

$$\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right) = \frac{\ln^2 g_{95/50}}{1,64^2} \quad (\text{D } 2)$$

Anders geschreven:

$$1,64^2 \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right) = \ln^2 g_{95/50} \quad (\text{D } 3)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right)^{1,64^2} = \ln\left((g_{95/50})^{\ln(g_{95/50})}\right) \quad (\text{D } 4)$$

$$\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right)^{1,64^2} = (g_{95/50})^{\ln(g_{95/50})} \quad (\text{D } 5)$$

$$\boxed{\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} = (g_{95/50})^{\frac{1}{1,64^2} \ln(g_{95/50})} - 1} \quad (\text{D } 6)$$

En vanuit vergelijking D 3 kan ook worden geschreven:

$$\ln(g_{95/50}) = 1,64 \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right)} \quad (\text{D } 7)$$

$$\boxed{g_{95/50} = e^{1,64 \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right)}}} \quad (\text{D } 8)$$

Combinatie van vergelijking D 6 en vergelijking D 8 levert:

$$g_{95/50} = e^{1,64 \sqrt{\ln \left(1 + \sum_{i=1}^n \left[\left(g_{95/50,i} \right)_{1,64^2}^{\frac{1}{1,64^2}} \ln(g_{95/50,i}) - 1 \right] \right)}}$$

(D 9)