

Seiches in het Europoortgebied

Numerieke modellering van de zeerland in een ééndimensionaal model



A.B. Méndez Lorenzo
Afstudeerrapport
juni 1997

Seiches in het Europoortgebied

Numerieke modellering van de zeerand in een ééndimensionaal model

Afstudeercommissie:

Prof. dr. ir. G.S. Stelling

Prof. dr. ir. J.A. Battjes

ir. J.P.F.M. Janssen

ir. H.W.J. Kernkamp

ir. C. Verspuy

A.B. Méndez Lorenzo

Afstudeervoordracht

Hierbij nodig ik alle belangstellenden uit voor het bijwonen van mijn afstudeervoordracht, getiteld:

Seiches in het Europoortgebied

Numerieke modellering van de zeerland in een ééndimensionaal model

woensdag 18 juni

16:00 uur

faculteit der Civiele Techniek

zaal G



Seiches zijn opslingerende staande golven die in afgesloten (haven)bekkens kunnen ontstaan, wanneer vanaf zee golven met specifieke golflengten de haven binnen dringen. In het Europoortgebied ontstaat een afgesloten bekken wanneer de stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg en de Hartelkering worden gesloten. In deze situatie kunnen seiches ontstaan, die een extra verval over de stormvloedkering veroorzaken.

Onderzocht is of het mogelijk is om op de open rand (zeerland) in een ééndimensionaal model een zodanige randvoorwaarde op te leggen dat de uitstraling van energie naar zee door die open rand correct wordt gemodelleerd. Een correcte modellering van de uitstraling van energie naar zee is belangrijk, omdat de amplitude van seiches hierdoor in belangrijke mate wordt gedempt. Tijdens de afstudeervoordracht zal worden ingegaan op de methode waarop de randvoorwaarde op de open rand in het ééndimensionale model is afgeleid en op de mogelijkheden en beperkingen van het gebruik ervan.

Belangstellenden zijn van harte welkom.

Anabel Méndez Lorenzo

Voorwoord

Vanaf oktober 1996 tot en met mei 1997 heb ik mij bezig gehouden met een afstudeeronderzoek ter afsluiting van mijn studie aan de Faculteit der Civiele Techniek in Delft bij de vakgroep vloeistofmechanica. Het afstudeerproject had betrekking op de modellering in een ééndimensionaal numeriek waterbewegingsmodel van opslingerende golven (seiches) in havenbekkens. Het resultaat van het afstudeeronderzoek is in dit rapport beschreven.

Tijdens mijn afstudeerperiode ben ik als stagiair in dienst geweest bij de DWW te Delft. Deze periode heb ik als zeer plezierig en leerzaam ervaren. De DWW wil ik hier graag voor bedanken.

De leden van mijn afstudeercommissie wil ik bedanken voor de steun en de adviezen gedurende de gehele afstudeerfase.

Delft, juni 1997
A.B. Méndez Lorenzo

Samenvatting

Seiches zijn opslingerende staande golven die in afgesloten havenbekkens kunnen ontstaan, wanneer vanaf zee golven met specifieke golflengtes de haven binnen dringen. In het Europoortgebied ontstaat een afgesloten bekken wanneer de stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg en de Hartelkering worden gesloten. Seiches veroorzaken een extra verval over de stormvloedkering.

Bij de Rijkswaterstaat (dienst Weg- en Waterbouwkunde (DWW)) bestaat de vraag naar een ééndimensionaal waterbewegingsmodel waarmee seiches in het Europoortgebied kunnen worden weergegeven. De DWW heeft al een ééndimensionaal model (ZWENDL) voor de berekening van seiches in gebruik, maar met name de modellering van de zeerland is in dat model nog niet correct.

De amplitude van seiches wordt gedempt door uitstraling van energie naar zee, door wrijving en wervelvorming en door overdracht van energie naar hogere harmonischen. De laatste drie hydrodynamische dempingsmechanismen worden zonder verdere modelvorming berekend door niet-lineaire termen in de lange-golfvergelijkingen. Dit onderzoek concentreert zich op de juiste weergave in een ééndimensionaal model van de uitstraling van energie naar zee door middel van het opleggen van een correct gedefinieerde randvoorwaarde op de open rand in het model.

In het rapport is aangenomen dat de uitstraling van energie naar zee correct wordt weergegeven door de Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde. Deze uitstralingsvoorwaarde veronderstelt dat een golf komende uit een havenmond, zich radiaal expanderend voortplant en dat ver van deze havenmond de amplitude van de golf naar nul afneemt. Op de open rand in het gebied (op oneindig grote afstand van de havenmond) zijn dan alleen uitgaande golven aanwezig.

De onderhavige studie heeft als doel het vinden van een antwoord op de volgende vraag:

- *Indien wordt aangenomen dat een ééndimensionaal model geschikt is voor het weergegeven van seiches, is dan ter plaatse van de open rand in het model een randvoorwaarde te definiëren, zodanig dat de uitstraling van energie naar zee door die open rand correct wordt gemodelleerd?*

Voor het beantwoorden van de vraag uit de doelstelling is eerst met behulp van een ééndimensionale analytische seichesberekening voor een eenvoudige testconfiguratie (lang en smal afgesloten bekken) de amplificatiefactor in het bekken en de reflectiefactor ter plaatse van de overgang van bekken naar zee berekend. Volgens de analytische oplossing worden relatief lange golven ten opzichte van de breedte van het kanaal gereflecteerd. Relatief korte golven ten opzichte van de breedte van het kanaal worden gedeeltelijk getransmitteerd en gedeeltelijk gereflecteerd.

Hierna is een randvoorwaarde voor de open rand in een ééndimensionaal numeriek model afgeleid. Bij de afleiding van de randvoorwaarde zijn de volgende eisen in beschouwing genomen:

1. De reflectie van golven ter plaatse van de open rand in het ééndimensionale numerieke model moet gelijk zijn aan de analytisch berekende reflectie van golven ter plaatse van een plotselinge verbreding. Hieruit volgt de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid. Deze opgelegde grootheid is een combinatie van een waterstand en een tijdsafgeleide van de ingaande Riemann invariant vermenigvuldigd met een bepaalde factor ε :

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right)$$

Met:

$$\varepsilon = \frac{-\frac{ia}{\sqrt{gH}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{gH}} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (\text{exact})$$

$$\varepsilon = \frac{ka}{\omega^2 \left[1 - 2(ka) + (ka)^2 + \frac{4(ka)^2}{\pi^2} \ln^2\left(\frac{2\gamma(ka)}{\pi e}\right) \right]} \quad (\text{benadering})$$

- u = snelheid
- ζ = waterstand ten opzichte van de gemiddelde diepte
- γ = constante van Euler = 0.577215
- e = grondtal natuurlijk logaritme
- 2a = breedte van het bekken
- k = golfgetal = $2\pi/\lambda$
- $\rightarrow ka = \pi * 2a/\lambda$
- λ = golflengte
- $\omega = 2\pi/T = 2\pi f = (gH)^{1/2}k$
- T = periode
- g = zwaartekrachtsversnelling
- H = gemiddelde diepte

2. De analytisch berekende amplificatiefunctie moet gelijk zijn aan of in ieder geval benaderd worden door de amplificatiefunctie, die wordt verkregen als gevolg van het opleggen van de te definiëren randvoorwaarde op de open rand in het numerieke model. Hieruit volgt de functie (rechterlid) waaraan de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid moet worden gelijkgesteld:

$$\sqrt{\frac{g}{H}} (e^{i\omega t} + i\omega\varepsilon e^{i\omega t})$$

De afgeleide randvoorwaarde wordt aangeduid als ε -rand:

$$\sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}} (e^{i\omega t} + i\omega\varepsilon e^{i\omega t})$$

Indien de ε -randvoorwaarde (met de benaderde ε) op de open rand in een ééndimensionaal numeriek model wordt opgelegd dan komt de berekende amplificatiefunctie vrij goed overeen met de analytische oplossing

De amplificatiefactor aan het einde van een afgesloten bekken wordt in een ééndimensionaal model berekend door de amplitude van de waterstandsvariatie aan het einde van het bekken te delen door de amplitude van de op de open rand opgelegde grootheid. Deze amplitude is gelijk aan twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust.

De factor ε is een functie van ka en dus van de verhouding van de breedte van het bekken tot de golflengte. ε moet worden benaderd indien als inkomend signaal een sommatie van golven met verschillende frequenties

wordt opgelegd. Voor elke golflengte heeft ϵ een verschillende waarde, maar in een bepaalde numerieke berekening moet ϵ constant zijn. ϵ wordt benaderd afhankelijk van de locatie in het systeem waar de amplificatiefunctie interessant is en afhankelijk van de resonantiepiek in de functie waarvan de hoogte correct moet worden gemodelleerd. Het is met de gedefinieerde randvoorwaarde dus niet mogelijk om een som van golven met verschillende frequenties op te leggen en daarbij alle amplificatiepieken voldoende dicht bij de analytische oplossing te krijgen. Dit is een nadeel van het gebruik van de ϵ -rand.

Uit het onderzoek is geconcludeerd dat de uitstraling van energie naar zee goed wordt gemodelleerd indien de ϵ -rand als randvoorwaarde wordt opgelegd op de open rand in het model. Het voordeel van de ϵ -rand is dat deze randvoorwaarde eenvoudig te implementeren is in een ééndimensionaal model. De beperking ervan is echter dat alleen de vooraf vastgestelde piek in de amplificatiefunctie op een bepaalde locatie in het bekken goed wordt berekend. Daarom wordt aanbevolen om bij gebruik van de ϵ -rand in een ééndimensionaal model niet een combinatie van frequenties op te leggen, maar slechts één enkele frequentie. Eventueel kan op de open rand een waterstand worden opgelegd. Uit de berekening volgen dan frequenties waarbij opslinging optreed. Rondom de opgespoorde frequentie moet de berekening opnieuw worden gemaakt, maar dan met een ϵ -rand als randvoorwaarde opgelegd op de open rand. De (benaderde) plaats van de resonantiefrequentie wordt dan berekend met een waterstandsrand als randvoorwaarde. De hoogte van de amplificatiefactor ter plaatse van de resonantiefrequentie echter wordt verkregen uit een berekening met een ϵ -rand als randvoorwaarde.

De algemene conclusie uit het onderzoek is dat een ééndimensionale modellering van seiches wel mogelijk is, maar dat een betere modellering waarschijnlijk wordt verkregen door een tweedimensionaal zeegebied aan het havenbekken te koppelen.

Inhoudsopgave

Voorwoord	i
Samenvatting	iii
Inhoudsopgave	vii
1 Inleiding	1
1.1 Inleiding	1
1.2 Probleemstelling	2
1.3 Doelstelling	3
1.4 Gevolgde werkwijze / Opbouw van het rapport	3
2 Seiches	7
2.1 Het verschijnsel seiches	7
2.2 Terminologie	9
3 Seiches, analytische oplossing	11
3.1 Inleiding	11
3.2 Helmholtz vergelijking	11
3.3 Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde	11
3.4 Tweedimensionale analytische seichesberekening	12
3.5 Ééndimensionale analytische seichesberekening	18
3.5.1 Ééndimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in een lang, smal havenbekken	18
3.5.2 Versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken volgens Xiping Yu	18
3.5.3 Versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken volgens C.C. Mei	18
3.5.4 Uitstraling van energie ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee	19
4 Numerieke modellering van de zeerand	23
4.1 Inleiding	23
4.2 Riemann invarianten en karakteristieke richtingen	24
4.3 Reflectiefactoren	25
4.3.1 Inleiding	25
4.3.2 Rand 1: Waterstandsrand	26
4.3.3 Rand 2: Riemannrand	27
4.3.4 Rand 3: ε -rand	27
4.4 Versterkingsfactoren	29
4.5 Implementatie van de ε -rand in een ééndimensionaal numeriek model	32
4.6 Resultaten	36
4.5 Alternatieve modellering van de zeerand	40
5 Conclusies en aanbevelingen	41
5.1 Conclusies	41
5.2 Aanbevelingen	43
Referenties	45
Symbolenlijst	47

Bijlagen

Bijlage I:	De Helmholtz vergelijking
Bijlage II:	Tweedimensionale analytische uitdrukking voor de waterbeweging in een havenbekken gekoppeld aan een half oneindig zeegebied
Bijlage III:	Berekening van de versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken (volgens Xiping Yu)
Bijlage IV:	Uitstraling van energie ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee; berekening van de reflectie- en transmissiefactor
Bijlage V:	Ééndimensionaal waterbewegingsprogramma voor een langgerekte bak; beschrijving en listing
Bijlage VI:	Testberekeningen
Bijlage VII:	Afleiding van de opgelegde grootheid in geval van een ε -rand
Bijlage VIII:	Definitie en berekening van versterkingsfactoren in een ééndimensionaal numeriek model
Bijlage IX:	ε -rand, versterkingsfactor

1. Inleiding

In dit hoofdstuk worden het kader van het onderzoek en de doelstelling beschreven. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de opbouw van het rapport.

1.1 Inleiding

Als onderdeel van het Deltaplan startte in 1987 een studie naar de beveiliging van het benedenrivierengebied. Centraal daarin stond de afweging tussen een stormvloedkering of zwaardere dijken. De blijvende vrije toegang tot de Rotterdamse havens was in die studie een belangrijk uitgangspunt. Uiteindelijk werd gekozen voor een stormvloedkering (zie Figuur 1.1) en wel voor de sectordeurkering van de Bouwkombinatie Maeslant Kering (BMK). Op 10 mei 1997 is de stormvloedkering officieel in gebruik gesteld. Door de keuze voor een stormvloedkering hoeft maar een beperkt programma voor dijkversterking te worden uitgevoerd.



Figuur 1.1: Stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg

Sluitstuk in de bescherming van Zuid-Holland is een waterkering door het Europoortgebied. Deze waterkering vormt de ontbrekende schakel tussen de stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg en de waterkering van Voorne-Putten. Onderdeel hiervan is de Hartelkering. Door het bouwen van een kering in het Hartelkanaal kan de Beerdam worden afgegraven. Daarmee krijgt de binnenvaart aanzienlijk betere verbindingen tussen de Maasvlakte- en Europoorthavens en het achterland.

Het Europoortgebied met daarin de Stormvloedkering, de Hartelkering en de Beerdam is in Figuur 1.3 weergegeven. Wanneer de Stormvloedkering en de Hartelkering worden gesloten ontstaat er in het Europoortgebied een afgesloten bekken (zie Figuur 1.3), waarin staande golven kunnen opslingeren.

Opslingerende staande golven worden seiches genoemd. De modellering van seiches in een ééndimensionaal numeriek model is het onderwerp van dit afstudeeronderzoek.

1.2 Probleemstelling

Seiches veroorzaken in het Europoortgebied een extra verval over de Stormvloedkering (zie [Janssen, Jorissen (1994)]). De bijdrage van seiches aan het maximale positieve verval (waterstand aan de zeezijde hoger dan aan de landzijde) is beperkt (0.5 m; zie [contract BD001 (1989)]) in verband met het onderlopen van haventerreinen onder de extreme omstandigheden die aanwezig zijn bij gesloten kering. Hierdoor worden seiches in hun opslinging gehinderd. Een negatief verval ontstaat tijdens openen van de kering door de ingebouwde vertraging van de openingsoperatie en als gevolg van de dalende buitenwaterstand. De seiches zijn dan veel hoger omdat er geen haventerreinen meer onderlopen. Ook tijdens het sluitproces kan een optredend seiche tot een groot negatief verval leiden, indien een positief verval niet voldoende snel wordt opgebouwd. De kering heeft echter een relatief geringe capaciteit om negatief verval te keren. Deze capaciteit is vergelijkbaar met het negatieve ontwerpverval (1.5 m).

Verwacht wordt dat het negatieve verval als gevolg van seiches beperkt kan worden door het beheer van de kering interactief op de waterstanden te laten reageren. Dit heeft consequenties voor het beslis- en besturingssysteem. Om dit nader te kunnen onderzoeken, is er bij de Rijkswaterstaat (dienst Weg- en Waterbouwkunde (DWW)) behoefte aan een ééndimensionaal waterbewegingsmodel waarmee seiches kunnen worden weergegeven. Dit model dient dan tevens als toetsing van het door BMK gebruikte waterbewegingsmodel RAS/FLOW.

In het verleden zijn voor het modelleren van seiches in het Europoortgebied zowel tweedimensionale (PHAROS en TRISULA, zie [Seiches Europoort, WL (1994)]) als ééndimensionale (RAS/FLOW) waterbewegingsmodellen gebruikt. Ééndimensionale modellen hebben ten opzichte van tweedimensionale modellen naast nadelen onder andere het voordeel dat de rekentijd korter is, wat deze modellen geschikter maakt voor probabilistische berekeningen. Aangezien het maken van probabilistische berekeningen met het model vereist is, wordt door de DWW een ééndimensionaal waterbewegingsmodel verkozen.

Bij de DWW is het ééndimensionale numerieke waterbewegingsmodel ZWENDL reeds in gebruik voor het berekenen van waterstanden in het benedenrivierengebied. De DWW heeft ervoor gekozen (zie [van Haaren (1996)]) dit model geschikt te maken voor het modelleren van seiches in het Europoortgebied. In 1995/1996 is door Y. van Haaren een studie verricht naar de mogelijkheden hiervan.

In het bestaande model (ZWENDL) is als randvoorwaarde op de open rand (monding van de Nieuwe Waterweg) een waterstand opgelegd. Als gevolg hiervan worden seiches op de open rand volledig gereflecteerd, waardoor er geen uitstraling van energie naar open zee plaatsvindt. Als gevolg hiervan is er te weinig demping in het systeem waardoor de hoogte van de seiches in het model wordt overschat. Ten behoeve van het vergroten van de demping van seiches in het model is in [van Haaren (1996)] de Noorderpier doorlatend gemaakt door het creëren van zijdelingse afvoervakken. De implementatie van de zijdelingse afvoer leverde echter niet de veronderstelde demping van seiches. Ook is geëxperimenteerd met het opleggen van een zwak/niet reflecterende randvoorwaarde in de vorm van Riemann invarianten. In [van Haaren (1996)] is tenslotte geconcludeerd dat de demping van seiches in het model nog niet correct wordt weergegeven. Na de genoemde studie zijn daarom nog vragen blijven bestaan betrekking hebbende op de schematisatie van de zeerand.

1.3 Doelstelling

Het doel van het in dit rapport beschreven afstudeeronderzoek is het vinden van een antwoord op de volgende vraag:

- Indien wordt aangenomen dat een ééndimensionaal waterbewegingsmodel geschikt is voor het weergeven van seiches, is dan ter plaatse van de open rand in het model een randvoorwaarde te definiëren, zodanig dat de uitstraling van energie naar zee door die open rand correct wordt gemodelleerd?

1.4 Gevolgde werkwijze / Opbouw van het rapport

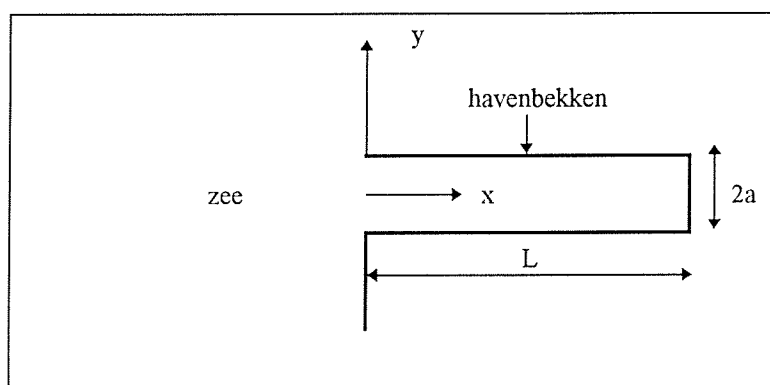
Het rapport bestaat uit 4 delen.

Inleidend gedeelte

Hoofdstuk 2 vormt het eerste deel van het rapport. In dit hoofdstuk is een beknopte beschrijving opgenomen van het verschijnsel seiches. Beschreven is hoe seiches in een afgesloten bekken kunnen ontstaan en welke mechanismen voor demping van de hoogte van seiches verantwoordelijk zijn.

Analytisch gedeelte

Het tweede deel bestaat uit hoofdstuk 3. In dit hoofdstuk is een analytische seichesberekening gemaakt voor een eenvoudig testprobleem, een lang en smal afgesloten bekken (zie Figuur 1.2).



Figuur 1.2: Testconfiguratie

In de analytische berekening is alleen rekening gehouden met demping als gevolg van uitstraling van energie naar zee. Aangenomen is daarbij dat door de Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde de uitstraling van energie naar zee correct wordt weergegeven.

Met behulp van de analytische oplossing zijn vervolgens de amplificatiefactor in een lang en smal bekken en de reflectiefactor ter plaatse van de overgang van bekken naar zee berekend. De analytisch berekende amplificatiefactor en reflectiefactor komen in het “numerieke gedeelte” van pas bij de afleiding van een correcte randvoorwaarde ter plaatse van de open rand in een numeriek model.

Numeriek gedeelte

Hoofdstuk 4 vormt het derde deel van het rapport. Ter plaatse van de open rand in een ééndimensionaal numeriek waterbewegingsmodel is een randvoorwaarde gedefinieerd, waarmee de uitstraling van energie naar zee zo goed mogelijk wordt weergegeven.

Bij de afleiding van de randvoorwaarde zijn de volgende eisen in beschouwing genomen:

- De reflectie van golven ter plaatse van de open rand in het ééndimensionale numerieke model moet gelijk zijn aan de reflectie van golven ter plaatse van een plotselinge verbreding, zoals berekend in het “analytische gedeelte” van het rapport. Hieruit volgt de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid.
- De analytisch berekende amplificatiefunctie moet gelijk zijn aan of in ieder geval benaderd worden door de amplificatiefunctie, die wordt verkregen als gevolg van het opleggen van de te definiëren randvoorwaarde op de open rand in het numerieke model. Hieruit volgt de functie (rechterlid) waaraan de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid moet worden gelijkgesteld.

Met behulp van een ééndimensionaal numeriek waterbewegingsprogramma voor een langgerekt bekken is tenslotte aangetoond dat de gedefinieerde randvoorwaarde de analytische oplossing voor seiches goed benaderd.

Afsluitend gedeelte

Het rapport wordt afgesloten met hoofdstuk 5. In dit hoofdstuk staan conclusies en aanbevelingen.



Figuur 1.3: Afgesloten bekken in het Europeoortgebied

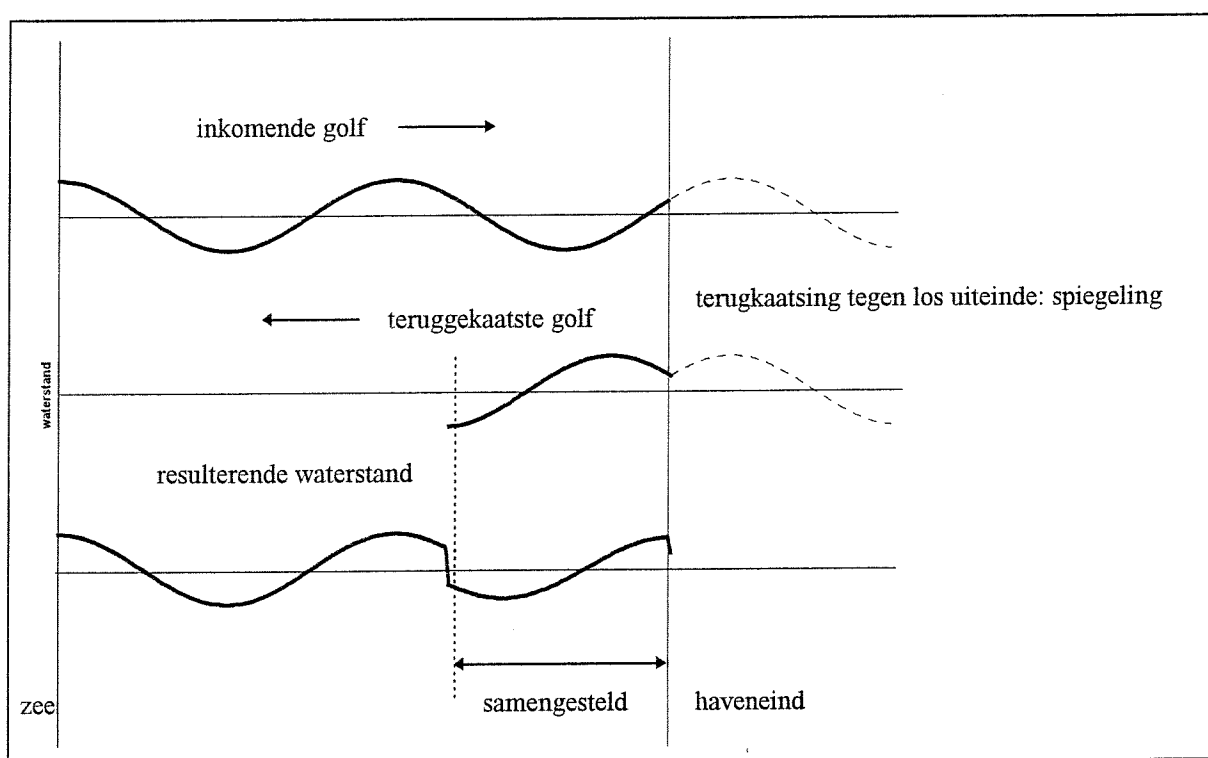
2. Seiches

In dit hoofdstuk wordt het verschijnsel seiches beknopt beschreven en worden definities gegeven van veelgebruikte termen in het rapport. Voor een uitvoerige inleiding van het verschijnsel seiches wordt verwezen naar [Mei (1989)].

2.1 Het verschijnsel seiches

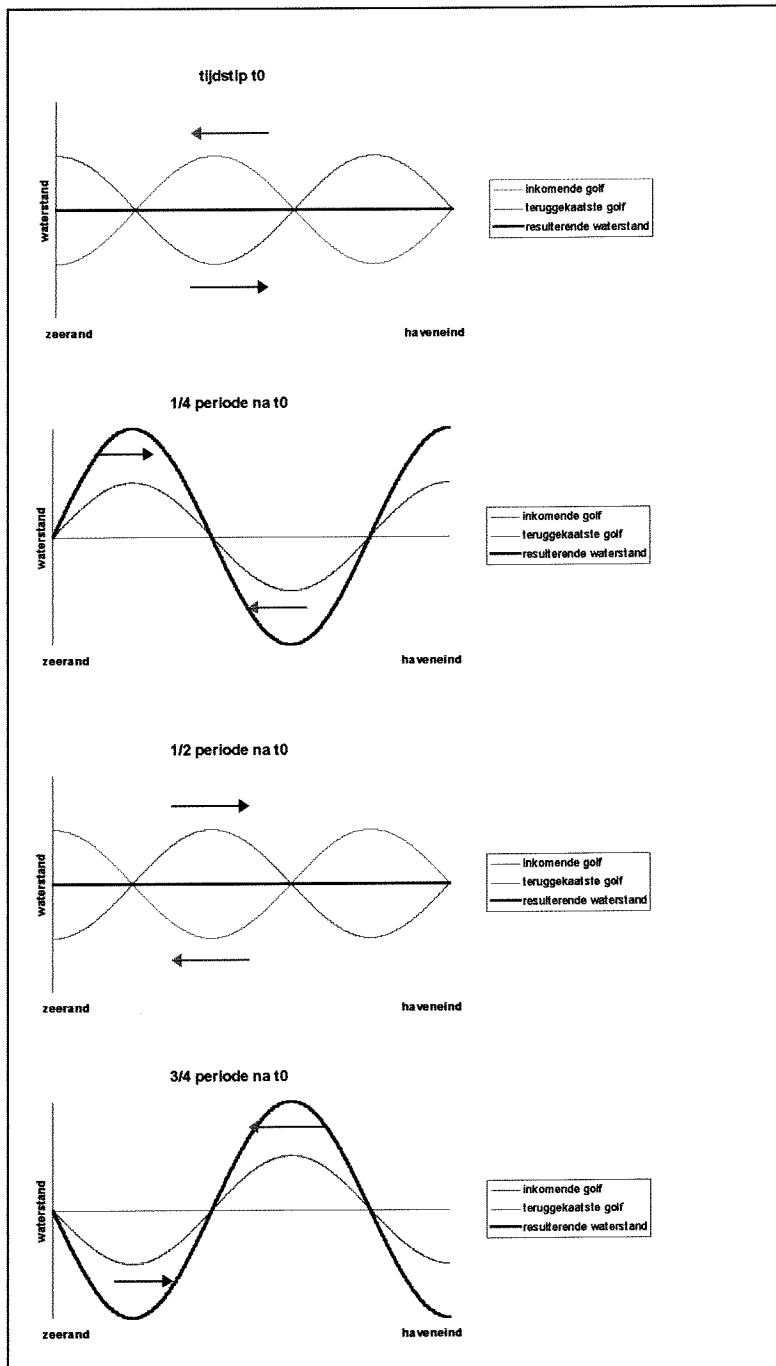
Wanneer vanuit zee een golf het Europeoortgebied binnen dringt, plant de golf zich voort in de verschillende havens. Er ontstaat een golfpatroon dat zich uitspreidt over de verschillende bekkens. Door terugkaatsing tegen waterkeringen of kaden ontstaat vervolgens ook een patroon van teruggekaatste golven.

Bij het samenspel van inkomende en teruggekaatste golf ontstaat een samengesteld golfpatroon, waarbij op sommige plaatsen de beide golven elkaar versterken en op andere plaatsen elkaar verzwakken (zie Figuur 2.1).



Figuur 2.1: Samenspel van inkomende en teruggekaatste golf

Indien de inkomende golf precies in het havenbekken past, zodat aan het eind van de haven de golf met de volledige top-dal-afstand wordt gereflecteerd, ontstaat er een teruggekaatste golf die samen met de inkomende golf een regelmatig golfpatroon (een staande golf) vormt (zie Figuur 2.2). Er is sprake van “precies passen” indien de lengte van het havenbekken een oneven maal een kwart van de golflengte bedraagt.



Figuur 2.2: Ontstaan van een staande golf (resulterende waterstand = staande golf)

Een uitgaande golf wordt bij de havenmond gedeeltelijk gereflecteerd door de plotselinge verwijding, zodanig dat een deel van de golfenergie in het havenbekken achterblijft en een deel van de golfenergie wordt uitgestraald naar zee. Indien op zee een golfveld is ontstaan dat gedurende enige tijd achter elkaar golven levert die precies in het havenbekken passen, zal ten gevolge van het verschil tussen instraling en uitstraling, steeds een nieuwe hoeveelheid golfenergie in het havenbekken achterblijven. De staande golven in de haven worden hierdoor steeds hoger. Dit wordt opslingingering ofwel resonantie genoemd.

De maximale amplitude van de staande golven bij resonantie wordt gedempt door de volgende mechanismen (zie [Mei (1989)]):

- Uitstraling van energie naar zee
- Wrijving
- Wervelvorming

- Overdracht van energie naar hogere harmonischen

Van de opgesomde dempingsmechanismen zijn de eerste twee het meest van belang.

Dit onderzoek concentreert zich op de juiste weergave in een ééndimensionaal model van uitstraling van energie naar zee door middel van het opleggen van een correct gedefinieerde randvoorwaarde op de open rand (zeerland) in het model.

De overige hydrodynamische dempingsmechanismen worden zonder verdere modelvorming berekend door niet-lineaire termen in de lange-golfvergelijkingen. Aan deze dempingsmechanismen wordt in dit rapport verder geen aandacht besteed. Bij berekeningen in dit onderzoek zijn niet-lineaire termen in de differentiaalvergelijkingen verwaarloosd. Het enige mechanisme waardoor seiches in dat geval worden gedempt is de uitstraling van energie naar zee. De invloed van verschillen in modelleringen van de zeerland (waarmee alleen dit dempingsmechanisme wordt beïnvloed) kan dan goed worden bepaald. Bij de definitieve implementatie van de in dit rapport gedefinieerde randvoorwaarde moet rekening gehouden worden met alle dempingsmechanismen.

Naarmate de lengte van het havenbekken toeneemt of de breedte van de haven verhoudingsgewijs kleiner wordt ten opzicht van de lengte van de staande golf in de haven, neemt de resonantiefrequentie af en de maximale uitwijking van de staande golven toe. De uitstraling van energie naar zee neemt namelijk af naarmate de breedte van de havenmond kleiner wordt ten opzichte van de golflengte. Als gevolg hiervan blijft er meer energie in het havenbekken achter. Dit wordt de “havenparadox” van Miles en Munk (zie [Miles, Munk (1961)]) genoemd.

De maximale amplitude van de golven kan niet oneindig groot worden. Ook al wordt de wrijving buiten beschouwing gelaten, dan nog komt er een einde aan de groei van de staande golf. Dat komt omdat de uitstraling van energie terug naar zee toeneemt naarmate in het havenbekken meer energie is opgehoopt; op een zeker moment ontstaat dan de situatie dat door uitstraling even veel energie verdwijnt als er binnen komt via de inkomende golven.

De in deze paragraaf beschreven havenresonanties worden aangeduid met de naam seiches. Het zijn golven met een vrij lange periode. De van belang zijnde seiches in het Europoortgebied hebben een periode tussen de 10 en de 180 minuten.

2.2 Terminologie

In deze paragraaf worden definities of beschrijvingen gegeven van enkele relevante begrippen.

Inkomende golven:

Langkammige golven die in een gebied op zee liggend tegenover de havenmond ontstaan en zich in de richting loodrecht op de kust voortplanten.

Uitgaande golven:

Golven die ontstaan door terugkaatsing tegen waterkeringen of kaden in het afgesloten bekken en zich naar zee voortplanten.

Golfperiode:

Tijdsduur tussen het optreden van een bepaalde golftop (via golfdal) tot een volgende golftop.

Frequentie:

$1/\text{golfperiode}$

ω :

$2\pi/\text{golfperiode}$

Golflengte:

Horizontale afstand tussen twee golftoppen (= constante maal de golfperiode).

Golfgetal:

$2\pi/\text{golflengte}$

Golfhoogte:

Waterstandsverschil tussen golftop en golfdal (= 2 maal de amplitude).

Amplitude:

Maximale uitwijking van de waterstand ten opzichte van de middenstand.

Amplificatiefactor / Versterkingsfactor:

De amplificatie- of versterkingsfactor in een bepaald punt in een afgesloten bekken is gelijk aan de waarde, die wordt verkregen door de amplitude van de waterstandsvariatie in het betreffende punt te delen door twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust.

Amplificatiefunctie:

Bij elk punt in een haven hoort een bepaalde relatie tussen de periode van de inkomende golf en de amplificatie die vervolgens op die plaats optreedt. Deze relatie heet de amplificatiefunctie voor dat bepaalde punt. De grafiek van die functie heeft pieken bij specifieke golfperioden (resonantieperioden). Meestal wordt bij de grootste resonantieperiode (grondtoon of eerste harmonische) de hoogste piek in de amplificatiefunctie gevonden.

Resonantie:

Resonantie treedt op wanneer de lengte van het bekken een oneven maal een kwart van de lengte van de inkomende golf bedraagt. De golfhoogte van de staande golf die dan ontstaat is in dat geval maximaal.

Gereflecteerde golf:

Golf die ter plaatse van de open rand in het model het havenbekken in wordt gereflecteerd.

Getransmitteerde golf:

Golf die ter plaatse van de open rand in het model naar zee wordt uitgestraald.

Reflectiefactor:

Verhouding van de complexe amplitude van de gereflecteerde golf tot de complexe amplitude van de uitgaande golf.

Transmissiefactor:

Verhouding van de complexe amplitude van de getransmitteerde golf tot de complexe amplitude van de uitgaande golf.

3. Seiches, analytische oplossing

In dit hoofdstuk wordt een tweedimensionale analytische seichesberekening gemaakt voor een lang en smal bekken. Uit de resultaten volgt dat onder bepaalde voorwaarden een ééndimensionale oplossing voor seiches voldoet. Met behulp van de ééndimensionale oplossing worden vervolgens de amplificatiefactor in een bekken en de reflectiefactor ter plaatse van de overgang van het bekken naar zee berekend.

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk is een tweedimensionale analytische seichesberekening gemaakt voor een langgerekt havenbekken gekoppeld aan een half oneindig zeegebied (zie Figuur 3.3). Uit de uitdrukking, die hieruit volgt, zijn voorwaarden afgeleid waaronder een ééndimensionale berekening voor seiches voldoende is.

Uit de ééndimensionale analytische oplossing zijn vervolgens de amplificatiefactor voor een lang, smal bekken en de reflectiefactor op de overgang van bekken naar zee berekend. De analytisch berekende amplificatiefactor en reflectiefactor worden in het volgende hoofdstuk gebruikt bij het definiëren van een randvoorwaarde voor een ééndimensionaal wiskundig model.

3.2 Helmholtz vergelijking

Voor de analytische berekening is de Helmholtz vergelijking gebruikt. Deze vergelijking is geldig onder bepaalde voorwaarden:

- wrijvingsloze vloeistof (viskeuze schuifspanningen verwaarloosbaar)
- zeer kleine golfamplitude
- randen perfect reflecterend en verticaal over de gehele diepte
- constante diepte

Indien alleen lange golven (golflengte veel groter dan de diepte) worden beschouwd dan kan de Helmholtz vergelijking (zie [Mei (1989)]) worden verkregen uit de tweedimensionale lange-golfvergelijkingen met verwaarlozing van externe krachten (zie bijlage I). De Helmholtz vergelijking is hierna weergegeven:

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0$$

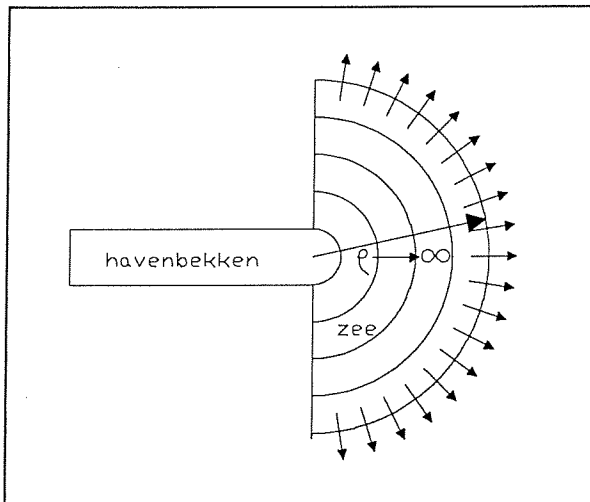
Met:

η = waterstand

k = golfgetal = $2\pi/\lambda$

3.3 Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde

In dit rapport is aangenomen dat de Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde (zie [Sommerfeld (1949)]) de uitstraling van energie naar zee correct weergeeft. De Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde veronderstelt dat een golf, komende uit een havenmond, zich radiaal expanderend voortplant en dat ver van deze havenmond de amplitude van de golf naar nul afneemt (zie Figuur 3.1). Op de rand van het gebied (op oneindig grote afstand van de havenmond) zijn alleen uitgaande golven aanwezig.

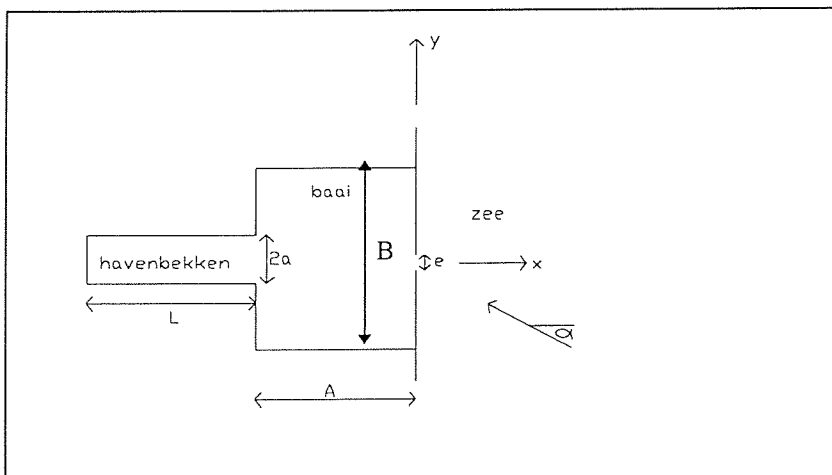


Figuur 3.1: Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde

3.4 Tweedimensionale analytische seichesberekening

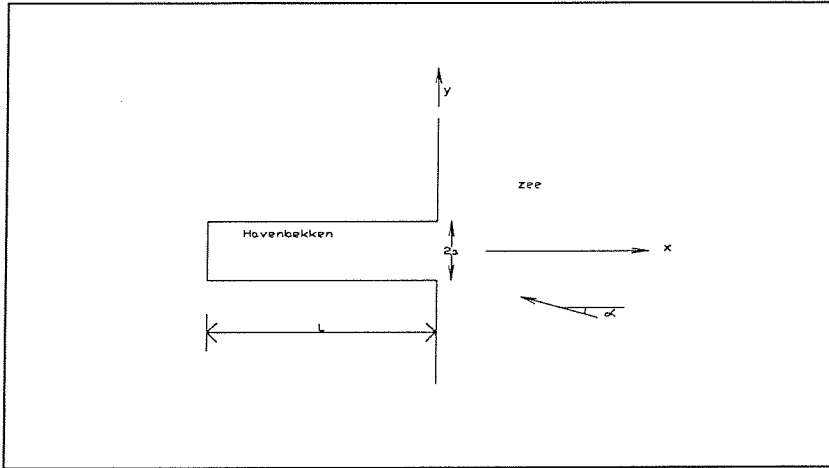
In het tijdschrift "Coastal Engineering" (nummer 28) (zie [Xiping Yu (1996)]) is door Xiping Yu een tweedimensionale seichesberekening gemaakt voor een baai gekoppeld aan een havenbekken en gelegen aan een rechte kust (zie Figuur 3.2).

In de berekening is aangenomen dat de kustlijn volledig reflecterend is. Ter plaatse van de zeeopening is de Sommerfeld stralingsconditie opgelegd.



Figuur 3.2: Situatieschets: havenbekken gekoppeld aan een baai en gelegen aan een rechte kust

In bijlage II is de genoemde berekening vereenvoudigd door de baai uit de oplossing te verwijderen ($A=0$). Als gevolg van deze vereenvoudiging is een tweedimensionale uitdrukking verkregen voor de waterbeweging in een havenbekken direct gekoppeld aan een half oneindig zeegebied (zie Figuur 3.3). Deze geometrie komt beter overeen met de vorm van het Europoortgebied.



Figuur 3.3: Situatieschets: havenbekken gekoppeld aan een half oneindig zeegebied

De tweedimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in het bekken, die uit de berekening volgt, is hieronder weergegeven:

$$\eta_r = U(2a)\varphi_{rs}(x) + u(2a)^2\psi_{rs}(x, y) \quad (3.1)$$

Met:

..r = subscript r (staat voor rivier)

..s = subscript s (staat voor zee)

$$\varphi_{rs}(x) = \frac{\cos(\mu_0(x+L))}{\mu_0 2a \sinh(\mu_0 L)}$$

$$\psi_{rs}(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{(2m-1)^2 \pi^2} \frac{\cosh(\mu_{2m-1}(x+L))}{\mu_{2m-1} 2a \sinh(\mu_{2m-1} L)} \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2a}$$

$$\mu_n = k \left[\left(\frac{n\pi}{2ka} \right)^2 - (1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$U(2a) = \frac{1}{\varphi_{rs} - \varphi_{sr}} \bar{\omega} H_0 \quad (3.2)$$

$$u(2a)^2 = \frac{1}{\psi_{rs} - \psi_{sr}} \tilde{\omega} H_0 \quad (3.3)$$

$$\varphi_{rs} = \frac{1}{\mu_0 2a \tanh(\mu_0 L)}$$

$$\psi_{rs} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{(2m-1)^4 \pi^4} \frac{1}{\mu_{2m-1} 2a \tanh(\mu_{2m-1} L)}$$

$$\varphi_{sr} = -\frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{kay}{e} \right) \right) + \frac{1}{2} i$$

$$\psi_{sr} = \frac{1}{16\pi}$$

$$\bar{\omega} = F[k \sin \alpha] \quad (3.4)$$

$$\tilde{\omega} = -\frac{i}{2} G[k \sin \alpha] \quad (3.5)$$

$$F[z] = \frac{\sin z}{z} \quad (3.6)$$

$$G[z] = \frac{dF}{dz} = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \quad (3.7)$$

H_0 = 2* golfhoopte van de inkomende golf

$2a$ = breedte van het bekken

L = lengte van het bekken

k = golfgetal ($=2\pi/\lambda$)

λ = golflengte

α = hoek van inval van de inkomende golf (zie Figuur 3.3)

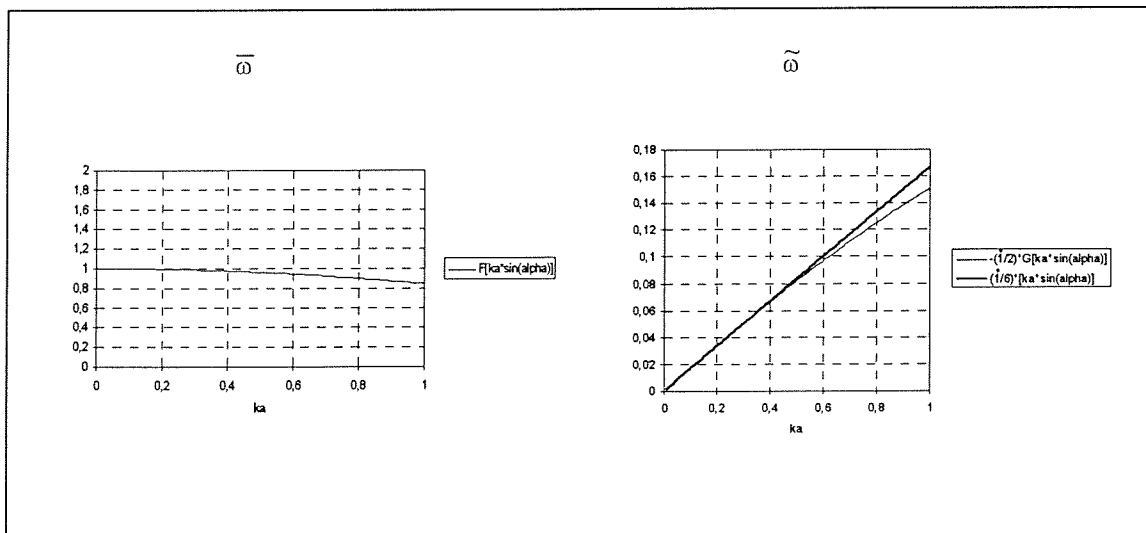
De eerste term in vergelijking (3.1), $U(2a)\phi_{rs}(x)$, geeft de bijdrage aan de golfbeweging van de variatie van de waterstand in x-richting. De tweede term, $u(2a)^2\psi_{rs}(x,y)$, staat voor de bijdrage aan de golfbeweging van de variatie van de waterstand in y-richting.

Uit de vergelijkingen (3.4) t/m (3.7) volgt dat als de breedte van het bekken ($2a$) klein is ten opzichte van de golflengte:

$$\bar{\omega} = 1$$

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{6} k \sin \alpha$$

Het bovenstaande geldt indien $ka \ll 1$ (zie Figuur 3.4)



Figuur 3.4: Benadering van $\bar{\omega}$ en $\tilde{\omega}$

Indien $ka \ll 1$ geldt dus dat $U(2a)\phi_{rs}(x)$ [$\bar{\omega} = 1$ in $U(2a)$] onafhankelijk en $u(2a)^2\psi_{rs}(x,y)$ [$(\tilde{\omega} = (i/6)ka \sin \alpha$ in $u(2a)^2$] afhankelijk is van de hoek van inval van de inkomende golf.

Als $\alpha = 0^\circ$ (zie Figuur 3.3), dus als de golven loodrecht de haven binnen komen, dan geldt:

$$\tilde{\omega} = 0 \quad \left(\rightarrow u(2a)^2 = 0 \right)$$

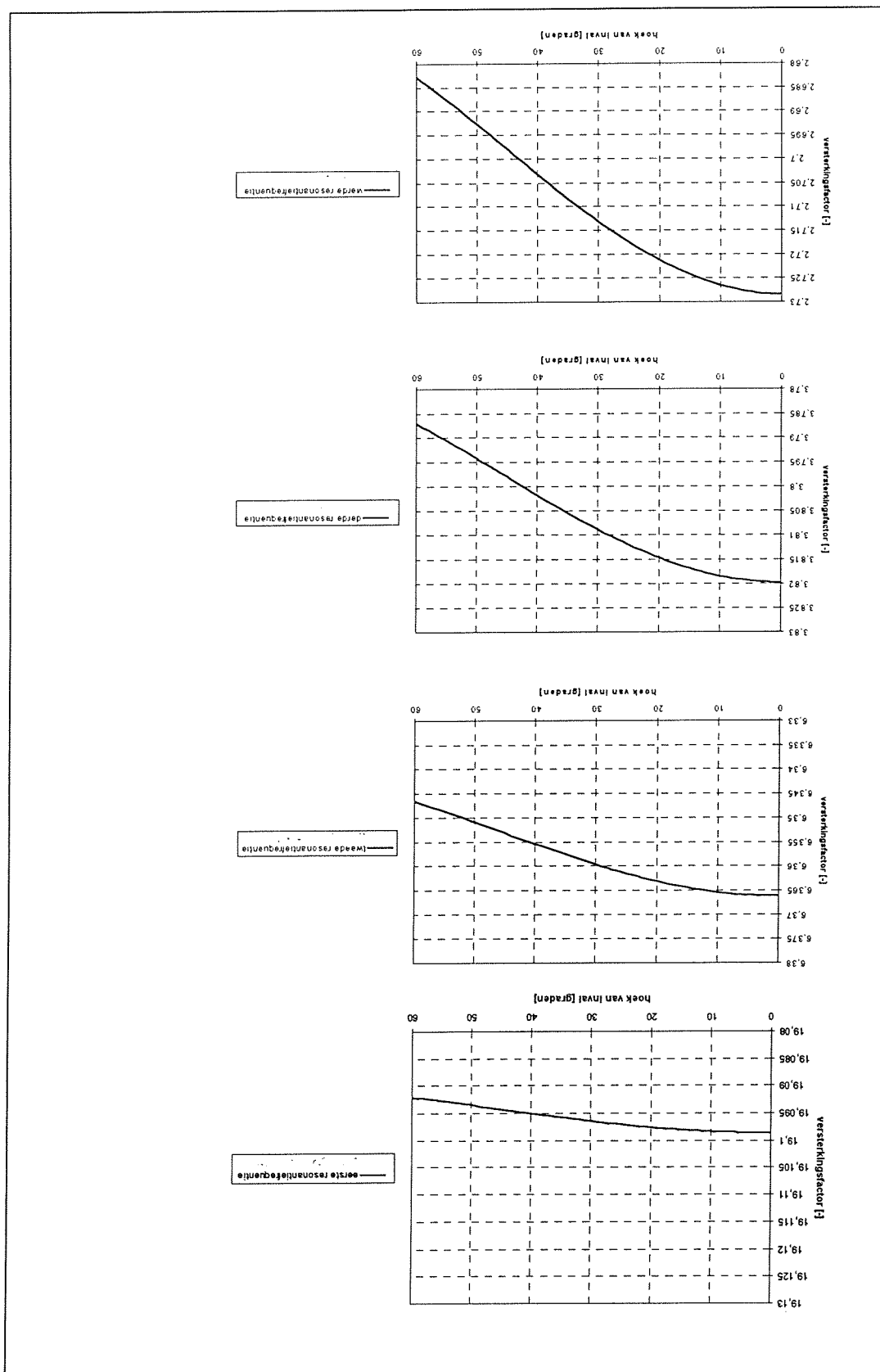
De variatie van de waterstand in y-richting (de tweede term in vergelijking (3.1)) is in dit geval nul. De golfbeweging is dan per definitie één dimensionaal.

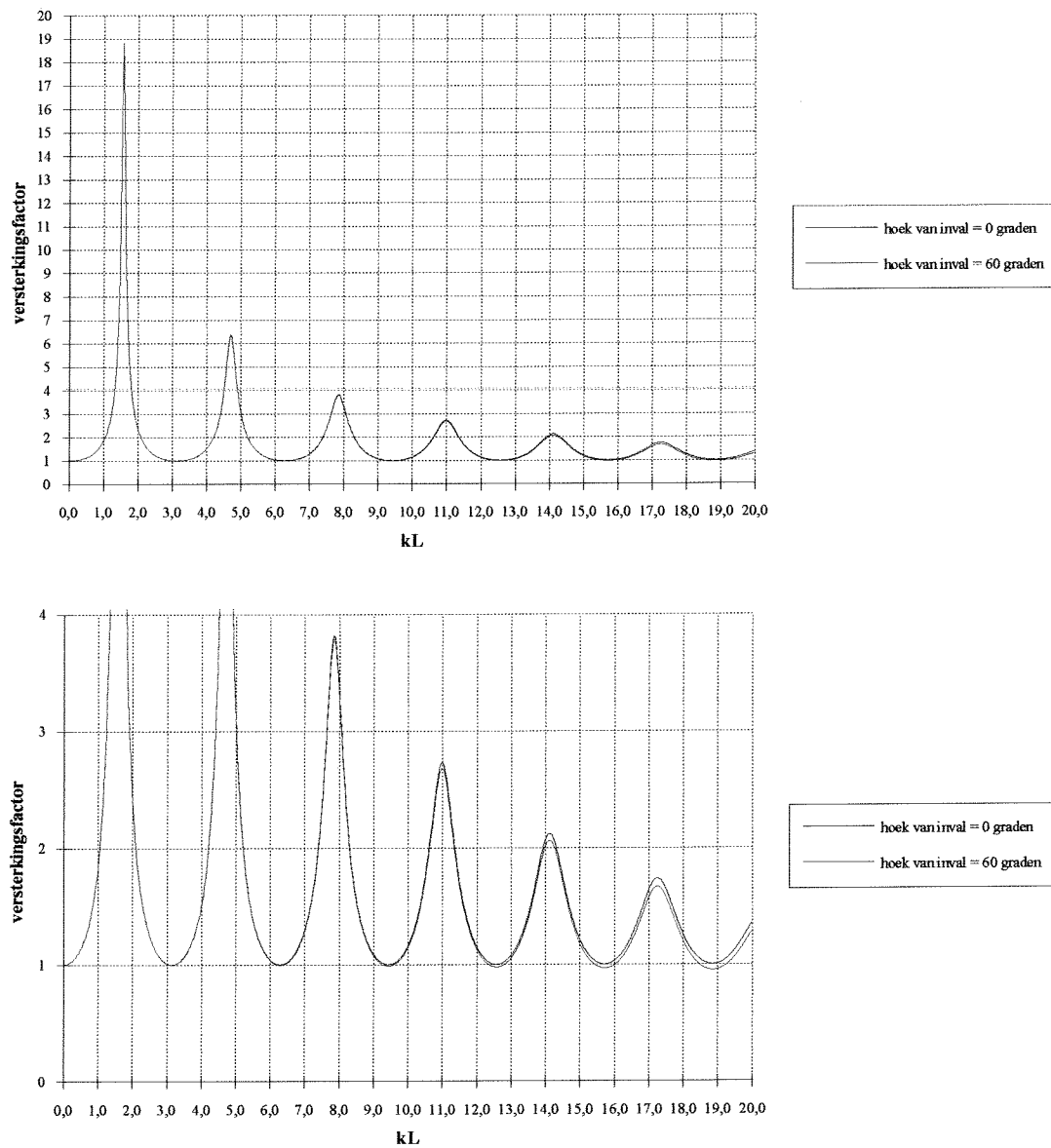
Als $\alpha \neq 0^\circ$, dus als de golven onder een hoek de haven binnen komen, dan is de variatie van de waterstand in de y-richting wel van belang en is de waterbeweging dus tweedimensionaal. De invloed van de variatie van de waterstand in y-richting op de amplificatiefactor is echter klein zoals blijkt uit Figuur 3.5. In deze figuur is de amplificatiefactor voor verschillende hoeken van inval van de inkomende golven weergegeven. Des te groter de hoek van inval, des te lager de versterkingsfactor ten opzichte van het één dimensionale geval ($\alpha = 0^\circ$). De afname van de versterkingsfactor ten opzichte van de één dimensionale situatie wordt groter naarmate de frequentie toeneemt. In Figuur 3.5 is de versterkingsfactor weergegeven aan het einde van een havenbekken met een lengte breedte verhouding ($L/2a$) gelijk aan 15. De afname van de versterkingsfactor ten opzicht van de één dimensionale situatie wordt kleiner naarmate de lengte breedte verhouding van het havenbekken groter wordt.

Uit het bovenstaande kan worden geconcludeerd dat het verwaarlozen van de variatie van de waterstand in transversale richting geoorloofd is (afhankelijk van de geaccepteerde fout) voor de lagere resonantiefrequenties. Bij hoge resonantiefrequenties wordt de versterkingsfactor zichtbaar beïnvloed door de hoek van inval van de inkomende golven. Wanneer hoge resonantiefrequenties van belang zijn kan als gevolg hiervan een tweedimensionale berekening nodig zijn.

In Figuur 3.6 is de versterkingsfactor weergegeven als functie van kL voor een havenbekken met een lengte breedte verhouding gelijk aan 15. De versterkingsfactor is weergegeven voor het geval de golven loodrecht (per definitie een één dimensionale situatie) en onder een hoek van 60° invallen. Uit deze figuur blijkt (nogmaals) dat de invloed van de hoek van inval pas bij hoge frequenties zichtbaar is.

Figuur 3.5: Versterkingsfactor aan het einde van een havenbekken ($L/2a = 15$) als functie van de golfhichting voor de eerste vier resonantiefrequenties





Figuur 3.6: Versterkingsfactor als functie van kL in een havenbekken ($L/2a = 15$) voor twee verschillende golfrichtingen van de inkomende golf (de amplificatiefunctie is weergegeven met twee verschillende schalen).

3.5 Ééndimensionale analytische seichesberekening

3.5.1 Ééndimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in een lang, smal havenbekken

Uit de vorige paragraaf volgt dat seiches in een lang en smal havenbekken ééndimensionaal kunnen worden gemodelleerd mits wordt voldaan aan bepaalde voorwaarden. De tweedimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in het havenbekken (zie (3.1)) kan in dat geval dus worden vereenvoudigd. Indien de variatie van de waterstand in y-richting (de tweede term in vergelijking (3.1)) wordt verwaarloosd wordt een ééndimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in een lang, smal havenbekken verkregen.

Deze uitdrukking is hieronder weergegeven (zie voor de betekenis van de verschillende variabelen paragraaf 3.4):

$$\eta_r = U(2a)\varphi_{rs}(x) \quad (3.8)$$

3.5.2 Versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken volgens Xiping Yu

Uitgaande van de verkregen ééndimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in een lang en smal havenbekken (zie vergelijking (3.8)) is de versterkingsfactor (zie paragraaf 2.2 voor de definitie) aan het einde van het bekken in bijlage III berekend. Het resultaat is hieronder weergegeven:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\left| \cos(kL) + \frac{2ka}{\pi} \sin(kL) \left(\ln \frac{\gamma ka}{e} \right) - ika \sin(kL) \right|} \quad (3.9)$$

Met:

- $\mathfrak{R}$ = versterkingsfactor
- γ = constante van Euler = 0.577215
- e = grondtal natuurlijk logaritme

3.5.3 Versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken volgens C.C. Mei

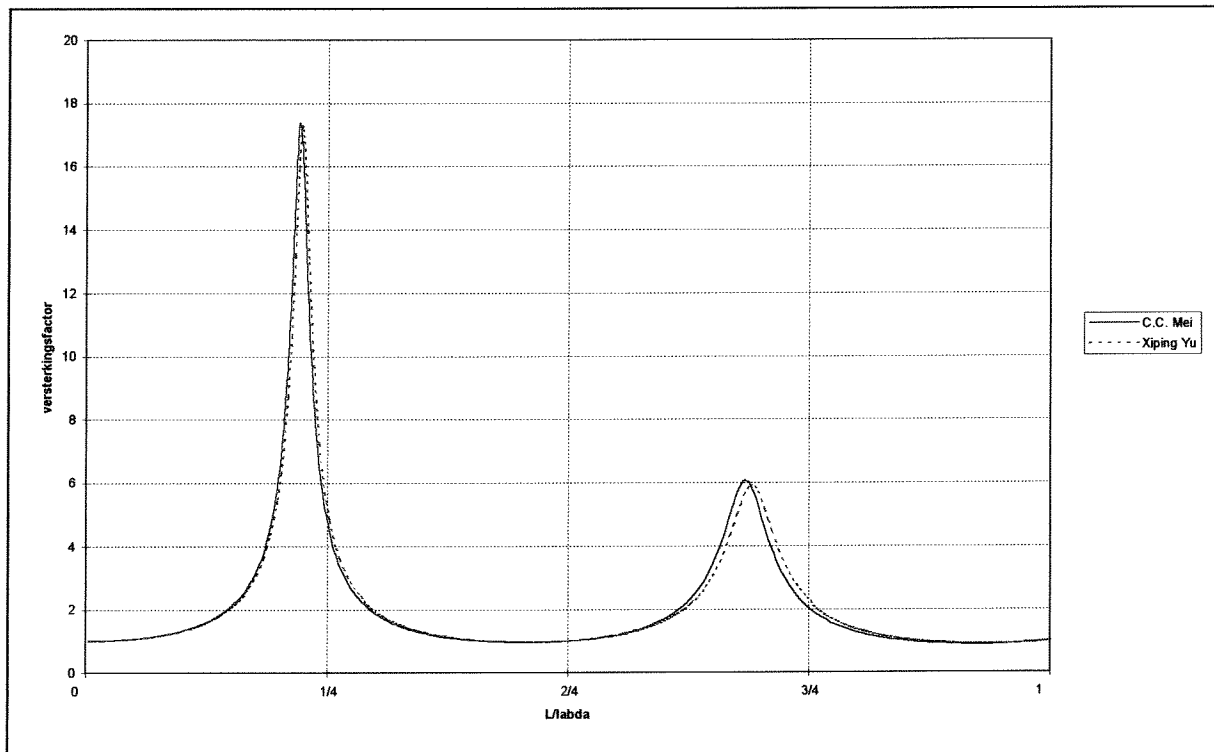
In het boek “The applied Dynamics of ocean surface waves” van Chiang C. Mei (zie [Mei (1989)]) is een seichesberekening gemaakt voor een lang en smal havenbekken. In deze berekening is bij voorbaat aangenomen dat de waterbeweging in het havenbekken ééndimensionaal is.

De met deze berekening verkregen versterkingsfactor (zie paragraaf 2.2 voor de definitie) is hieronder weergegeven:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\left| \cos(kL) + \frac{2ka}{\pi} \sin(kL) \left(\ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right) - ika \sin(kL) \right|} \quad (3.10)$$

In Figuur 3.7 zijn de 2 versterkingsfactoren ((3.9) en (3.10)) met elkaar vergeleken. In de figuur is de amplificatiefactor weergegeven voor een bekken met een lengte breedte verhouding gelijk aan 12. De twee analytische oplossingen liggen bijna over elkaar heen. In de limiet $L/2a \rightarrow \infty$ zijn de beide oplossingen gelijk.

In het vervolg van het rapport is alleen met de versterkingsfactor volgens C.C. Mei gewerkt. In dit afstudeeronderzoek is geprobeerd een randvoorwaarde te definiëren voor een ééndimensionaal kanaal gekoppeld aan een (in het model niet aanwezig) zeegebied. C.C. Mei is van deze situatie uitgegaan en daarom is ervoor gekozen om met de versterkingsfactor volgens C.C. Mei te werken. Kwantitatief maakt het niet veel uit voor welke versterkingsfactor wordt gekozen.



Figuur 3.7: Amplificatiefunctie voor een bekken ($L/2a = 12$) berekend met behulp van twee analytische oplossingen

3.5.4 Uitstraling van energie ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee

Een uitgaande golf wordt bij de havenmond gedeeltelijk gereflecteerd en gedeeltelijk getransmitteerd door de plotselinge verwijding.

De (complexe) reflectie- en transmissiefactor (zie hoofdstuk 2 voor de definitie), die worden verkregen indien de Sommerfeld stralingsconditie als randvoorwaarde ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee wordt opgelegd, zijn in bijlage IV berekend en zijn hierna weergegeven:

$$R = \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (3.11)$$

$$T = \frac{2ka}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (3.12)$$

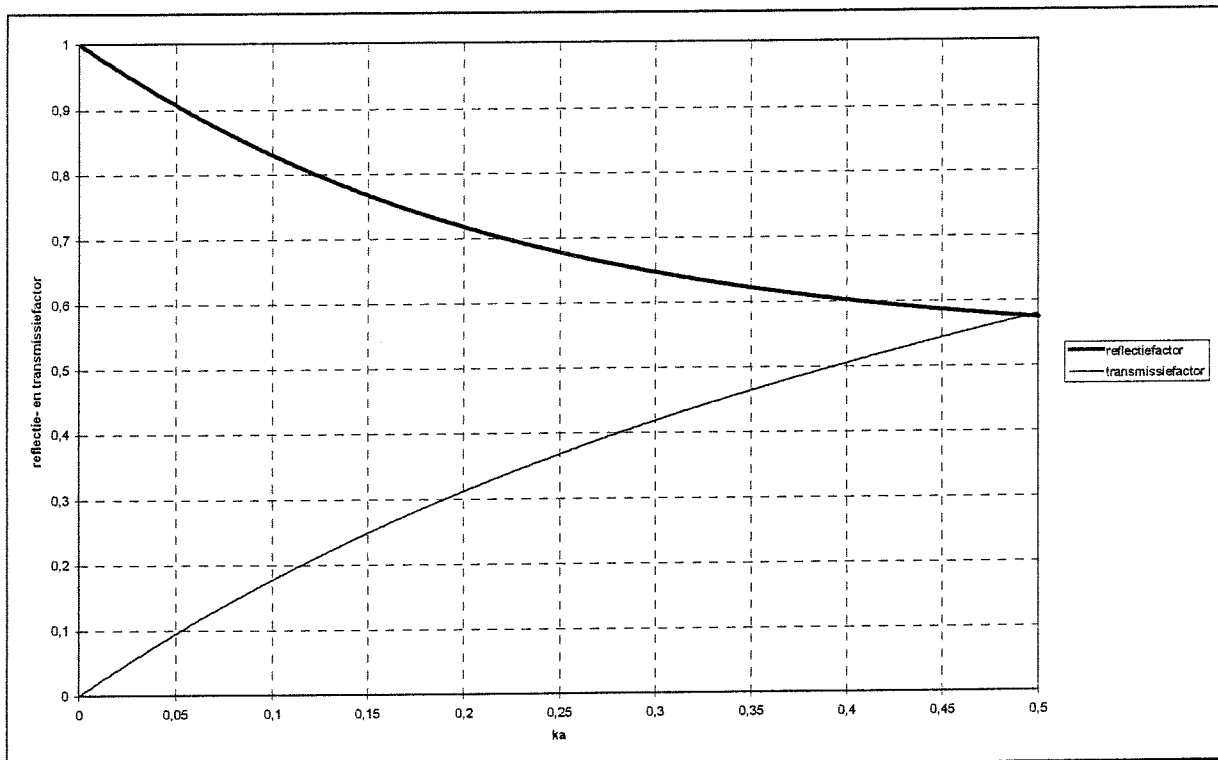
Met:

R = reflectiefactor
T = transmissiefactor

In Figuur 3.8 is de modulus van de reflectiefactor en transmissiefactor weergegeven. De modulus van de reflectiefactor ($|R|$) staat voor de verhouding van de amplitude van de gereflecteerde golf tot de amplitude van de uitgaande golf. De modulus van de transmissiefactor ($|T|$) staat voor de verhouding van de amplitude van de getransmitteerde golf tot de amplitude van de uitgaande golf. Deze twee uitdrukkingen zijn hieronder weergegeven:

$$|R| = \frac{\sqrt{(-1+ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}}{\sqrt{(1+ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}}$$

$$|T| = \frac{2ka}{\sqrt{(1+ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}}$$



Figuur 3.8: Reflectie- en transmissiefactor volgens de Sommerfeld stralingsvoorwaarde ter plaatse van een plotselinge verbreding

De reflectie van uitgaande golven ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee is afhankelijk van de verhouding van de breedte van het kanaal tot de golflengte van de uitgaande golf. Indien de verhouding relatief klein is dan wordt de golf voornamelijk gereflecteerd. Indien de verhouding relatief groot is dan wordt de golf zowel gereflecteerd als getransmitteerd.

Uit de schematisatiegegevens van het Europoortgebied volgt dat de zeerland van de Nieuwe Waterweg ongeveer 1100 m breed en 19 m diep is.

De seiches in het Europoortgebied hebben een periode variërend van 10 minuten tot 180 minuten. De golflengte van de seiches is als volgt te berekenen:

$$\lambda = \sqrt{gHT}$$

Met:

T = periode
g = zwaartekrachtsversnelling
H = diepte

$$10 \text{ min uten} < T < 180 \text{ min uten}$$

$$\Rightarrow \approx 8 \text{ km} < \lambda < \approx 150 \text{ km}$$

$$\Rightarrow 0.023 < \left(ka = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \text{ breedte} \right) \right) < 0.43 \quad (\Rightarrow ka \ll 1)$$

Hieruit volgt dat de seiches in het Europoortgebied ter plaatse van de monding van de Nieuwe Waterweg gedeeltelijk worden getransmitteerd en gedeeltelijk worden gereflecteerd.

4. Numerieke modellering van de zeerand

In dit hoofdstuk wordt een randvoorwaarde ter plaatse van de open rand in een ééndimensionaal numeriek model gedefinieerd, die de uitstraling van energie naar zee volgens de Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde zo goed mogelijk benadert.

4.1 Inleiding

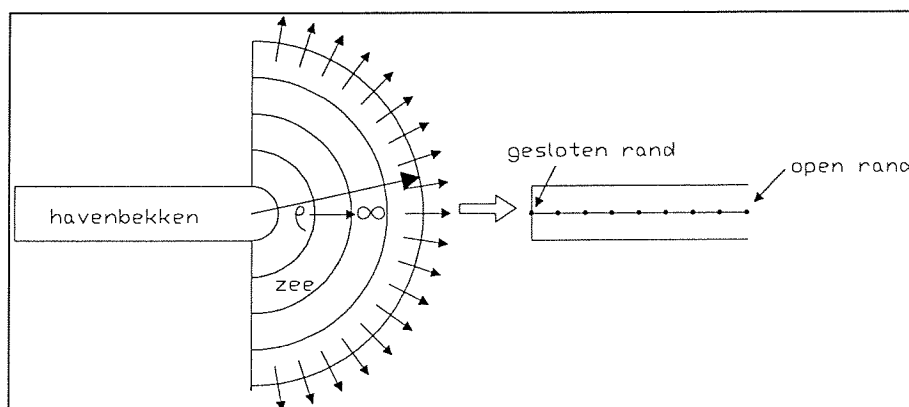
In een numeriek model is alleen het gebied van interesse opgenomen. Dit gebied is meestal een deel van een groter geheel. Dit houdt in dat een numeriek model wordt begrensd door open en gesloten randen. Open randen zijn in een numeriek model aangebracht om het rekengebied tot het gebied van interesse te beperken. Deze randen zijn daarom kunstmatig en hebben alleen betekenis voor het wiskundige model. Gesloten randen in het model zijn in werkelijkheid ook gesloten. Deze randen zijn daarom natuurlijk.

In geval van het Europoortgebied ligt de grens van het ééndimensionale numerieke model bij de monding van de Nieuwe Waterweg. Dit is in het wiskundige model van het Europoortgebied de (kunstmatige) open rand. Deze open rand is gesitueerd tussen een relatief smal kanaal en een relatief breed zeegebied.

Voor het oplossen van de vergelijkingen in een wiskundig model zijn begin- en randvoorwaarden nodig. De randvoorwaarde voor (natuurlijke) gesloten randen is eenvoudig. De snelheid loodrecht op die randen is nul. Voor open (kunstmatige) randen is het bepalen van een randvoorwaarde minder eenvoudig. De randvoorwaarde die op een open rand wordt opgelegd moet zodanig zijn gedefinieerd dat de oplossing wordt benaderd die zou worden verkregen indien het model niet zou worden begrensd door kunstmatige randen.

Uit de analytische oplossing (hoofdstuk 3) volgt dat seiches ter plaatse van een plotselinge verbreding (overgang van een kanaal naar een half oneindig zeegebied) gedeeltelijk worden getransmitteerd en gedeeltelijk worden gereflecteerd. Een belangrijke eigenschap, die aan de open rand in het ééndimensionale wiskundige model moet worden opgelegd, is dus dat deze rand relatief lange golven reflecteert en relatief korte golven doorlaat. Tegelijkertijd moet een inkomend signaal worden opgelegd.

In dit hoofdstuk wordt een randvoorwaarde ter plaatse van een open rand in een ééndimensionaal model gedefinieerd, die de uitstraling van seiches naar zee volgens de Sommerfeld stralingsvoorwaarde zo goed mogelijk benadert. De gedefinieerde randvoorwaarde wordt op de open rand in een ééndimensionaal numeriek model opgelegd. In dit ééndimensionale model ligt de open rand op de overgang van kanaal naar zee. De gedefinieerde randvoorwaarde vervangt dus als het ware het hele zeegebied (zie Figuur 4.1).



Figuur 4.1: Numerieke modellering van de zeerand

De zeerand van de Nieuwe Waterweg kan op verschillende wijzen worden gemodelleerd. In dit rapport is één van de mogelijke oplossingen uitgewerkt. Twee andere mogelijke modelleringen zijn in paragraaf 4.7 beknopt toegelicht.

4.2 Riemann invarianten en karakteristieke richtingen

In dit hoofdstuk zijn Riemann invarianten in verschillende berekeningen gebruikt. De Riemann invarianten voor de lange-golfvergelijkingen (waarin niet-lineaire termen zijn verwaarloosd), die in dit hoofdstuk worden gebruikt, zijn in deze paragraaf afgeleid.

De volledig lineaire lange-golfvergelijkingen (zonder gelineariseerde wrijvingsterm) zijn hieronder weergegeven:

continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

Met:

- ζ = waterstand (ten opzichte van de gemiddelde waterstand)
- H = gemiddelde diepte
- u = snelheid
- g = zwaartekrachtsversnelling

De continuïteitsvergelijking vermenigvuldigen met $(g/H)^{1/2}$ en de bewegingsvergelijking herschrijven geeft:

$$\frac{\partial \left(\zeta \sqrt{\frac{g}{H}} \right)}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \left(\zeta \sqrt{\frac{g}{H}} \right)}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

Optellen van de vergelijkingen (4.1) en (4.2) geeft:

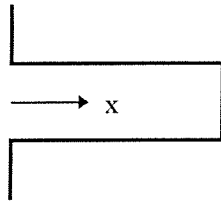
$$\frac{\partial \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right)}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right)}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

De vergelijkingen (4.1) en (4.2) van elkaar aftrekken geeft:

$$\frac{\partial \left(u - \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right)}{\partial t} - \sqrt{gH} \frac{\partial \left(u - \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right)}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

Met:

Definitieschets:



$$\begin{aligned} u + (g/H)^{1/2}\zeta &= R_i = \text{ingaaande Riemann invariant} \\ u - (g/H)^{1/2}\zeta &= R_u = \text{uitgaande Riemann invariant} \end{aligned}$$

De Riemann invarianten zijn constant langs de lijnen $(dx/dt) = \pm (gH)^{1/2}$ (karakteristieke richtingen).

4.3 Reflectiefactoren

4.3.1 Inleiding

In hoofdstuk 3 is de reflectiefactor volgens de Sommerfeld stralingsvoorwaarde ter plaatse van een plotselinge verbreding weergegeven (zie Figuur 3.8). Volgens de analytische oplossing is de uitstraling van energie naar zee afhankelijk van de verhouding van de breedte van het kanaal tot de golflengte van de uitgaande golf.

In een numeriek model is op de open rand een randvoorwaarde opgelegd. De reflectie van golven ter plaatse van de open rand is afhankelijk van de opgelegde randvoorwaarde.

In dit rapport is aangenomen dat de zeerand correct is gemodelleerd indien de reflectie van golven ter plaatse van de open rand in het numerieke model gelijk is aan de reflectie van golven ter plaatse van een plotselinge verbreding, zoals analytisch berekend in hoofdstuk 3. Hiervan uitgaande is in deze paragraaf een randvoorwaarde afgeleid (zie 4.3.4), die opgelegd zou kunnen worden op de open rand in een één dimensionaal numeriek waterbewegingsmodel waarmee seiches correct moeten worden gemodelleerd. Het op juiste wijze weergeven van de reflectie van golven ter plaatse van de open rand in het numerieke model is belangrijk, omdat de demping van seiches als gevolg van uitstraling van energie naar zee hiervan afhankelijk is.

In het bestaande één dimensionale waterbewegingsmodel, dat bij de DWW in gebruik is voor het berekenen van seiches in het Europoortgebied, is op de open rand een waterstandsrand opgelegd. De reflectiefactor in geval van een waterstandsrand is gelijk aan -1. Dit houdt in dat alle uitgaande golven onafhankelijk van de golflengte op de open rand volledig worden gereflecteerd. Als gevolg hiervan is er geen uitstraling van energie naar zee. Er blijft te veel energie in het systeem achter waardoor de opslinging van seiches wordt overschat.

Indien op de open rand in het numerieke model een ingaande Riemann invariant wordt opgelegd dan is de reflectiefactor gelijk aan nul. Alle uitgaande golven worden onafhankelijk van de golflengte ter plaatse van de open rand volledig getransmitteerd. Als gevolg hiervan blijft er geen energie achter in het systeem. In dit geval vindt geen opslinging plaats.

Zowel door een waterstandsrand als door een Riemannrand wordt de reflectie van uitgaande golven niet goed gemodelleerd. In paragraaf 4.3.4 is een randvoorwaarde afgeleid (ϵ -rand), waar een reflectiefactor bij hoort die gelijk is aan de analytisch berekende reflectiefactor. De ϵ -rand is een combinatie van een waterstandsrand en een Riemannrand. Indien de golflengte van de uitgaande golven relatief lang is dan lijkt de ϵ -rand op een waterstandsrand. Is de golflengte van de uitgaande golven relatief kort dan benadert de ϵ -rand de Riemannrand.

Voor het berekenen van de reflectiefactor als gevolg van de opgelegde randvoorwaarde is gebruik gemaakt van Riemann invarianten. De door de randvoorwaarde opgelegde grootheid is gelijkgesteld aan een lineaire combinatie van ingaande en uitgaande Riemann invariant:

$$A(Ri) + B(Ru) = \text{opgelegde grootheid} \quad (4.5)$$

Met:

A = te bepalen factor (afhankelijk van de opgelegde randvoorwaarde)
 B = te bepalen factor (afhankelijk van de opgelegde randvoorwaarde)

De reflectiefactor is gedefinieerd als volgt:

$$R = \frac{B}{A}$$

Indien de ingaande Riemann invariant als gevolg van de randvoorwaarde wordt gekoppeld aan de uitgaande Riemann invariant, dan is er sprake van reflectie ter plaatse van de open rand. De reflectiefactor ter plaatse van de rand is gedefinieerd als de relatie tussen beide Riemann invarianten. Het geeft aan in hoeverre het naar links gaande verschijnsel is gekoppeld aan het naar rechts gaande verschijnsel.

4.3.2 Rand 1: Waterstandsrand

In het bestaande ééndimensionale waterbewegingsmodel, dat bij de DWW in gebruik is voor het berekenen van seiches in het Europoortgebied, is op de open rand een waterstandsrand opgelegd. De opgelegde grootheid in geval van een waterstandsrand is een waterstand (ζ).

$$\zeta = e^{i\omega t}$$

De berekening van de reflectiefactor is hierna weergegeven.

$$A\left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta\right) + B\left(u - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta\right) = \zeta \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow (A+B)u = 0 \quad \Rightarrow A = -B$$

$$\left(A\sqrt{\frac{g}{H}} - B\sqrt{\frac{g}{H}}\right)\zeta = \zeta \quad \Rightarrow A\sqrt{\frac{g}{H}} - B\sqrt{\frac{g}{H}} = 1 \quad (4.7)$$

(4.6) invullen in (4.7) en uitwerken geeft de reflectiefactor:

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} \\ A &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \frac{B}{A} = -1 \quad (4.8)$$

De reflectiefactor in geval van een waterstandsrand is gelijk aan -1. Dit houdt in dat alle uitgaande golven op de open rand volledig worden gereflecteerd en 180° in fase verschoven. Er is geen uitstraling van energie naar zee en dus blijft er te veel energie achter in het systeem. De opslinging van seiches is in dit geval te groot.

4.3.3 Rand 2: Riemannrand

De opgelegde grootheid in geval van een Riemannrand is de ingaande Riemann invariant $(u + (g/H)^{1/2}\zeta)$.

$$u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta = \sqrt{\frac{g}{H}}e^{i\omega t}$$

De berekening van de reflectiefactor is hierna weergegeven.

$$A\left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta\right) + B\left(u - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta\right) = u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 0 \\ A = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow R = \frac{B}{A} = 0 \quad (4.9)$$

De reflectiefactor in geval van een Riemannrand is gelijk aan 0. Dit houdt in dat alle uitgaande golven op de open rand volledig worden getransmitteerd. Er blijft geen energie achter in het systeem. In dit geval vindt geen opslingering plaats.

4.3.4 Rand 3: ϵ -rand

Een waterstandsrant reflecteert uitgaande golven volledig. Een Riemannrand laat alle uitgaande golven volledig door. De reflectie eigenschappen van beide randen komen niet overeen met die van de analytische oplossing. In deze paragraaf is een randvoorwaarde afgeleid, die wat betreft reflectie eigenschappen op de overgang van kanaal naar zee overeen komt met de analytische oplossing. Deze randvoorwaarde zal in het vervolg van het rapport worden aangeduid met ϵ -rand.

De door de randvoorwaarde (nog af te leiden) opgelegde grootheid is gelijkgesteld aan een som van ingaande en uitgaande Riemann invariant:

$$A(Ri) + B(Ru) = \text{opgelegde grootheid} \quad (4.10)$$

De reflectiefactor behorende bij de te definiëren randvoorwaarde is hierna weergegeven:

$$R = \frac{B}{A}$$

Deze reflectiefactor is gelijkgesteld aan de hieronder weergegeven analytisch berekende reflectiefactor (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.11)):

$$R = \frac{B}{A} = \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (4.11)$$

Uit (4.10) en (4.11) volgt de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid. Voor de berekening van de opgelegde grootheid wordt verwezen naar bijlage VII. Het resultaat van de berekening, de opgelegde grootheid in geval van een ϵ -rand, is hierna weergegeven:

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \mu \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) \quad (4.12)$$

Met:

$$\mu = \frac{ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (4.13)$$

Afhankelijk van de waarde van μ is de tweede term in het linkerlid van vergelijking (4.12) meer of minder van belang. Des te groter ka (en dus μ), des te groter is de waarde van de tweede term in het linkerlid van de vergelijking. Dit houdt in dat bij relatief korte golven (ka is dan relatief groot $\rightarrow \mu$ relatief groot) de ε -rand op een Riemannrand gaat lijken. Indien de uitgaande golven relatief lang zijn dan lijkt de ε -rand juist op een waterstandsrand.

De afgeleide grootheid (zie (4.12)) is gelijkgesteld aan een som van sinussen en cosinussen zoals hieronder weergegeven:

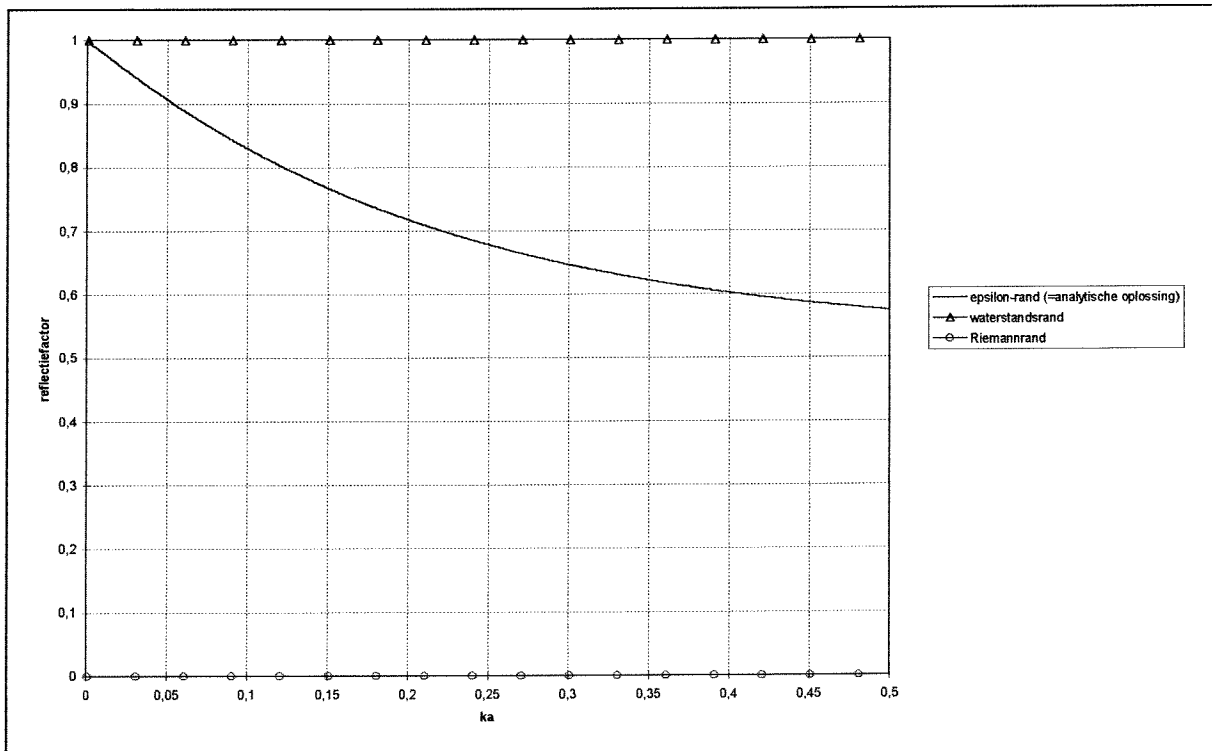
$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \mu \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}} \left(e^{i\omega t} + \mu e^{i\omega t} \right) \quad (4.14)$$

In paragraaf 4.4 zal worden aangetoond dat als gevolg van het opleggen van deze randvoorwaarde op de open rand in een numeriek model, de berekende amplificatiefactor aan het einde van een afgesloten bekken gelijk is aan de analytisch berekende amplificatiefactor volgens C.C. Mei (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.10)).

De reflectiefactor in het geval een ε -rand op de open rand wordt opgelegd is gelijk aan de analytisch berekende reflectiefactor ((4.11)). Hiervan uitgaande is immers de ε -randvoorwaarde afgeleid. In Figuur 4.2 is de modulus van de reflectiefactor als functie van ka weergegeven. In de figuur zijn ook de reflectiefactoren weergegeven die op de open rand in het model gelden ten gevolge van het opleggen van een waterstand of een ingaande Riemann invariant:

$$\begin{aligned} |R|_{\text{rand1}} &= 1 \\ |R|_{\text{rand2}} &= 0 \\ |R|_{\text{rand3}} &= \sqrt{\frac{(-1 + ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}{(1 + ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}} \end{aligned}$$

De modulus van de reflectiefactor is gelijk aan de verhouding van de amplitude van de teruggekaatste golf tot die van de uitgaande golf.



Figuur 4.2: Reflectiefactoren als functie van ka

4.4 Versterkingsfactoren

De definitie (zie paragraaf 2.2) van amplificatie- of versterkingsfactor in een bepaald punt in een afgesloten bekken is hieronder weergegeven:

De amplificatie- of versterkingsfactor in een bepaald punt in een afgesloten bekken is gelijk aan de waarde die wordt verkregen door de amplitude van de waterstandsvariatie in het betreffende punt te delen door twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust.

De open rand in een ééndimensionaal model bevindt zich ter plaatse van de overgang van kanaal naar zee. Het zeegebied is niet gemodelleerd in een ééndimensionaal waterbewegingsmodel, met als gevolg dat de amplitude van de inkomende golf op zee niet bekend is. Dit laatste heeft als consequentie dat de definitie van amplificatiefactor niet meer eenvoudig kan worden toegepast.

Het op elkaar delen van de amplitudes van de waterstandsvariatie aan het eind en begin van het bekken geeft over het algemeen geen goede resultaten. Alleen indien een waterstand op het beginknooppunt is opgelegd kan de versterkingsfactor op deze manier worden berekend. Indien iets anders dan een waterstand op de open rand is opgelegd dan kan de berekende waterstandsvariatie op het beginknooppunt niet als inkomend signaal worden beschouwd. Op het beginknooppunt kan namelijk zowel een knoop als een buik van de staande golf ontstaan. Indien op het beginknooppunt een knoop ontstaat dan wordt de amplitude van de waterstand aan het einde van het bekken gedeeld door nul. Uit de berekening volgt dan een oneindig hoge versterkingsfactor, terwijl dit niet per definitie het geval is.

Aangetoond kan worden (zie bijlage VIII) dat de waarde van de amplificatiefactor in het ééndimensionale model als volgt correct kan worden berekend:

Methode 1: *De amplitude van het uitgaande signaal delen door de amplitude van het ingaande signaal.*

$$\begin{array}{c}
 S_{\text{in}} \xrightarrow{x=0} \boxed{\text{bekken}} \xrightarrow{x=L} S_{\text{uit}} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{S_{\text{uit}}(x=L)}{S_{\text{in}}(x=0)}
 \end{array}$$

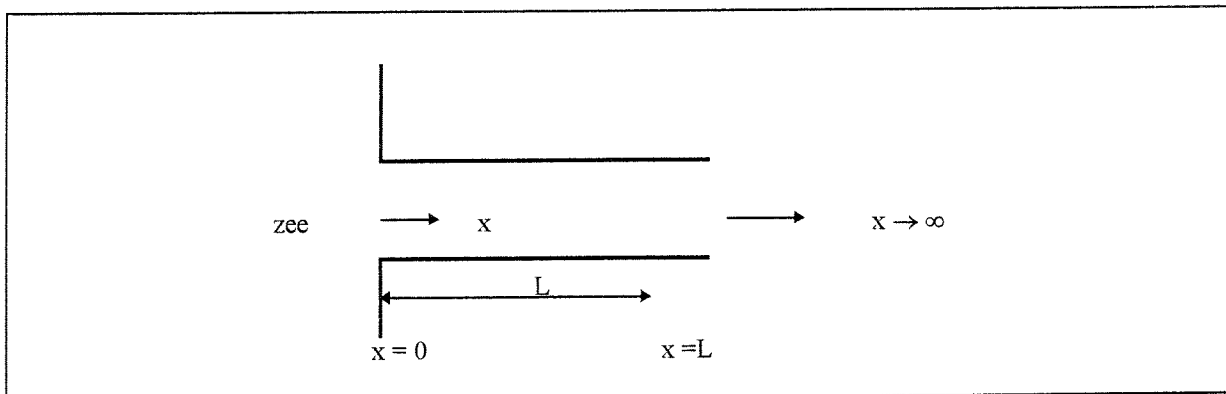
Met:

$$\begin{array}{ll}
 \mathcal{R} & = \text{versterkingsfactor} \\
 S_{\text{in}} & = |\zeta(0)| \quad (\text{indien een waterstandsrand is opgelegd}) \\
 & = |u(0) + (g/H)^{1/2}\zeta(0)| \quad (\text{indien een Riemannrand is opgelegd}) \\
 & = |(g/H)^{1/2}\zeta(0) + i\omega\varepsilon(u(0) + (g/H)^{1/2}\zeta(0))| \quad (\text{indien een } \varepsilon\text{-rand is opgelegd}) \\
 S_{\text{uit}} & = |\zeta(L)| \quad (\text{indien een waterstandsrand is opgelegd}) \\
 & = |u(L) + (g/H)^{1/2}\zeta(L)| \quad (\text{indien een Riemannrand is opgelegd}) \\
 & = |(g/H)^{1/2}\zeta(L) + i\omega\varepsilon(u(L) + (g/H)^{1/2}\zeta(L))| \quad (\text{indien een } \varepsilon\text{-rand is opgelegd})
 \end{array}$$

Methode 2: *De amplitude van de inkomende golf op zee berekenen waarna de definitie van versterkingsfactor kan worden toegepast.*

De amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust kan worden berekend door een half oneindig kanaal te veronderstellen (zie Figuur 4.3). Hierna kan de bekende definitie van versterkingsfactor worden gebruikt voor de berekening ervan.

De amplitude van de waterstand op een afstand L van de zeerand wordt berekend. Aangezien het kanaal niet afgesloten is zijn er alleen golven aanwezig die zich in positieve x -richting verplaatsen. De berekende amplitude van de golf op een afstand L van de rand is dan gelijk aan de amplitude van de zuivere inkomende golf op de zeerand ($x=0$). Dat betekent dat er geen superpositie is van heen en weer lopende golven zoals in het geval van een afgesloten bekken.



Figuur 4.3: Half oneindig kanaal

De verhouding tussen de amplitude van de berekende inkomende golf ter plaatse van de zeerand ($x=0$) en de amplitude van de inkomende golf op zee, op voldoende grote afstand van de kust ($x \ll 0$), is afhankelijk van de opgelegde randvoorwaarde (zie bijlage VIII). De amplitude van de inkomende golf op zee is hieruit te berekenen. De versterkingsfactor aan het einde van het afgesloten bekken kan dan worden berekend volgens de bekende definitie. Dat betekent dat de versterkingsfactor wordt berekend door de amplitude van de waterstandsvariatie aan het einde van het afgesloten bekken te delen door twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust.

Beide hiervoor beschreven berekeningsmethoden resulteren in dezelfde waarde voor de versterkingsfactor (zie bijlage VIII).

In bijlage VIII is aangetoond dat de amplitude van de opgelegde grootheid in alle gevallen gelijk is aan twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee. Dit houdt in dat de versterkingsfactor aan het einde van een afgesloten bekken eenvoudig kan worden berekend door de amplitude van de waterstandsvariatie te delen door de amplitude van de opgelegde grootheid.

Indien een waterstand op de open rand wordt opgelegd dan is de versterkingfactor gelijk aan:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\cos(kL)}$$

Indien een ingaande Riemann invariant op de open rand in het model wordt opgelegd dan is de versterkingsfactor gelijk aan 1.

Het opleggen van een ε -rand op de open rand in het model leidt tot de volgende versterkingsfactor:

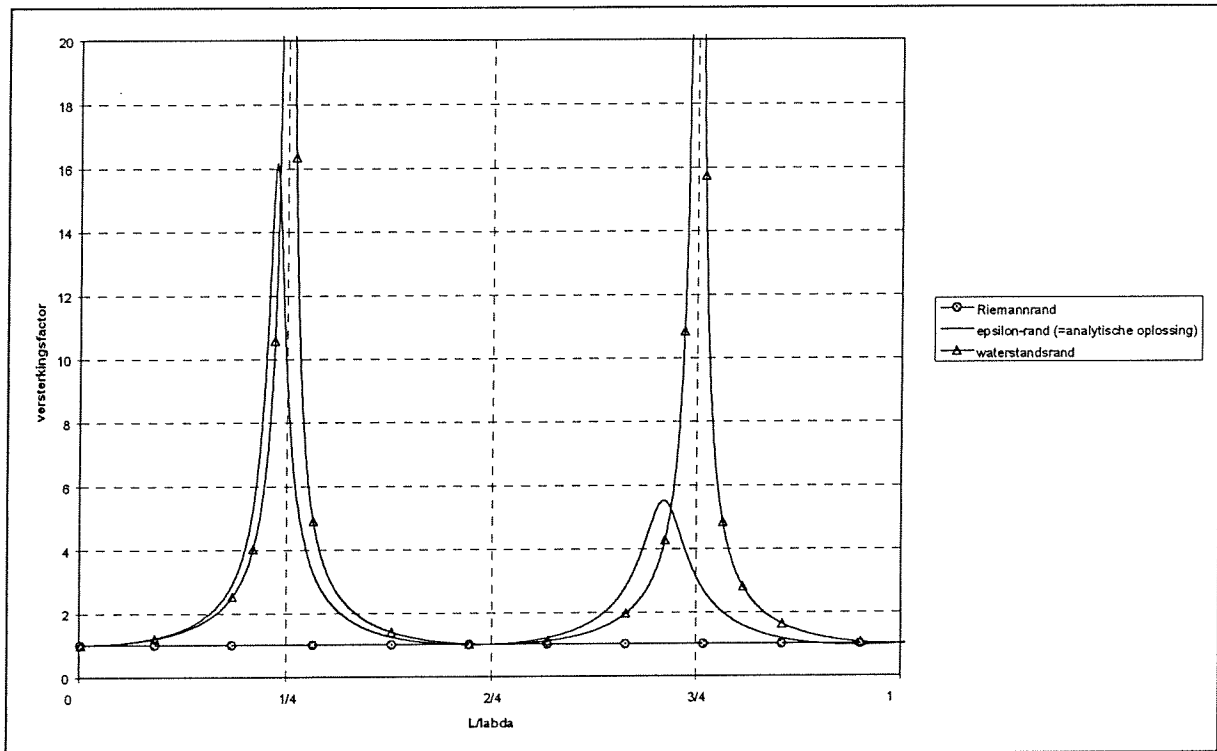
$$\mathfrak{R} = \left| \frac{2(1+\mu)}{(1+e^{-2ikL} + 2\mu)} \right| \quad (4.15)$$

De uitdrukking voor de versterkingsfactor ((4.15)) is in bijlage IX herschreven en vereenvoudigd door de uitdrukking voor μ ((4.13)) erin te substitueren. Het resultaat van de berekening is hieronder weergegeven:

$$\Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{1}{\left| \cos(kL) + \left(\frac{2ka}{\pi} \right) \sin(kL) \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) - ika \sin(kL) \right|} \quad (4.16)$$

Vergelijking (4.16) geeft de versterkingsfactor voor een ε -rand. Deze is identiek aan de analytisch berekende versterkingsfactor (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.10)).

In Figuur 4.4 zijn de amplificatiefuncties in een langgerekt bekken weergegeven als gevolg van het opleggen op de open rand in het wiskundige model van respectievelijk een Riemannrand, een ε -rand en een waterstandsrant.



Figuur 4.4: Amplificatiefuncties in een langgerekt bekken als gevolg van het opleggen van een Riemannrand, een ϵ -rand of een waterstandsrand (als functie van L/λ met L = lengte van het bekken en λ = golflengte)

4.5 Implementatie van de ϵ -rand in een éédimensionaal numeriek model

De in voorgaande paragrafen afgeleide randvoorwaarde voor de open rand in een numeriek model is hieronder weergegeven:

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \mu \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}} \left(e^{i\omega t} + \mu e^{i\omega t} \right) \quad (4.17)$$

Met:

$$\mu = \frac{ka + \frac{2ia}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}$$

De afgeleide μ is een complexe grootheid. Dat bemoeilijkt de implementatie in een wiskundig model. Voor de implementatie moet de complexe μ worden omgezet in een reële operator. Dat is geen eenvoudige opgave. Hiervoor wordt verwezen naar [Engquist, Majda (1977)] en [Taylor (1975)]. In dit rapport is een andere benadering gekozen.

De factor μ wordt als volgt geschreven:

$$\mu = i\omega\epsilon$$

Met:

$$\varepsilon = \frac{-\frac{ia}{\sqrt{gH}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{gH}} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}$$

$i\omega$ kan worden vervangen door $\partial/\partial t$ (zie [Taylor (1975)]). De randvoorwaarde wordt dan:

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}} \left(e^{i\omega t} + i\omega\varepsilon e^{i\omega t} \right) \quad (4.18)$$

Een soortgelijke randvoorwaarde is reeds in [Stelling, (1984)] aan de orde gekomen. De tijdsafgeleide van de Riemanninvariant vermenigvuldigd met een bepaalde (kleine) factor ε werd in dat geval gecombineerd met een snelheid en gelijk gesteld aan een bepaalde functie. De tijdsafgeleide van de Riemanninvariant werd aan de voorgeschreven snelheid toegevoegd ten behoeve van het verkrijgen van een stabiele berekening.

(De complexe) ε wordt reëel verondersteld. De berekening van ε is hierna weergegeven.

De modulus van de analytisch berekende reflectiefactor is gelijkgesteld aan de modulus van de reflectiefactor als gevolg van de ε -randvoorwaarde. De uitdrukking voor ε volgt hieruit. Als gevolg van de gebruikte benadering voor ε worden in de numerieke berekening de amplitudes van de gereflecteerde golven goed berekend.

De modulus van de analytisch berekende reflectiefactor (zie (4.11)) is gelijk aan:

$$|R| = \sqrt{\frac{(-1+ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}{(1+ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)^2}} \quad (4.19)$$

De berekening (van de modulus) van de reflectiefactor van de ε -rand is hierna weergegeven.

De door de ε -rand opgelegde grootheid is gelijkgesteld aan een som van ingaande en uitgaande Riemann invariant:

$$\begin{aligned} A \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) + B \left(u - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) &= \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \varepsilon i\omega \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) \\ \Rightarrow (A+B)u &= \varepsilon i\omega u & \Rightarrow A+B &= \varepsilon i\omega \\ (A-B)\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta &= (1+\varepsilon i\omega)\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta & \Rightarrow A-B &= (1+\varepsilon i\omega)\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \end{aligned}$$

Uitwerken hiervan heeft als resultaat de (modulus van de) reflectiefactor:

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{1}{2} \\ A &= \varepsilon i\omega + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |R| = \frac{|B|}{|A|} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\left| \varepsilon i\omega + \frac{1}{2} \right|} = \left| -\frac{1}{2\varepsilon i\omega + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon\omega)^2 + 1}} \quad (4.20)$$

(4.20) gelijkstellen aan (4.19) geeft de volgende uitdrukking voor ϵ :

$$\epsilon = \frac{ka}{\omega^2 \left[1 - 2(ka) + (ka)^2 + \frac{4(ka)^2}{\pi^2} \ln^2 \left(\frac{2\gamma(ka)}{\pi e} \right) \right]} \quad (4.21)$$

De versterkingsfactor, die bij gebruik van de gedefinieerde randvoorwaarde wordt verkregen, is in paragraaf 4.4 berekend (zie (4.15)) en hieronder weergegeven (met $\mu = i\omega\epsilon$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \left| \frac{2(1+i\omega\epsilon)}{(1+e^{-2ikL} + 2i\omega\epsilon)} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1+\omega^2\epsilon^2}{\cos^2(kL) - 2\omega\epsilon \sin(kL)\cos(kL) + \omega^2\epsilon^2}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

De resulterende amplificatiefunctie indien de berekende ϵ (vergelijking (4.21)) in vergelijking (4.22) wordt gesubstitueerd is in de figuren 4.8 en 4.9 vergeleken met de analytisch berekende amplificatiefunctie uit hoofdstuk 3 (zie (3.10)). Uit de figuren volgt dat de met de ϵ -randvoorwaarde berekende amplificatiefunctie vrij goed overeen komt met de analytische oplossing.

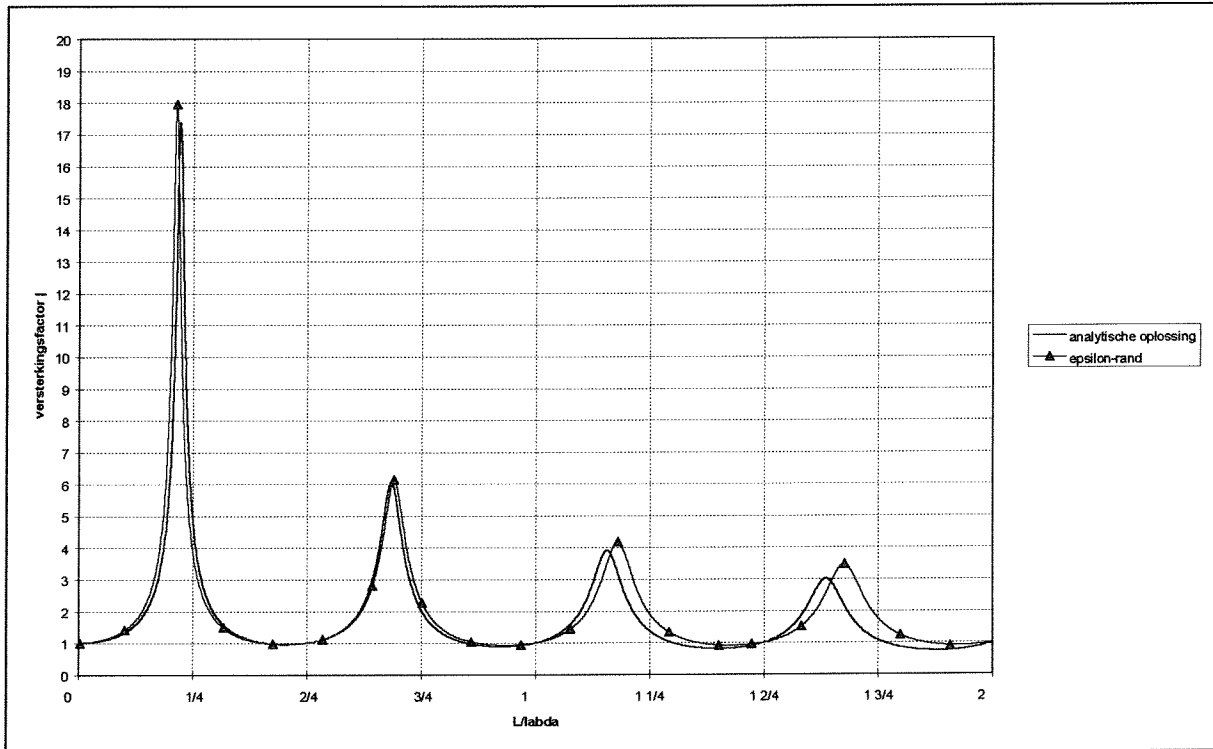
Zoals uit vergelijking (4.21) volgt is ϵ afhankelijk van ka . Dit levert een probleem op bij het opleggen van het inkomende signaal, indien dat een sommatie is van golven met verschillende frequenties of golflengtes. Voor elke golflengte heeft (ka en dus ook) ϵ een verschillende waarde, maar in het linkerlid van vergelijking (4.18) (de opgelegde grootte op de open rand) komt een ϵ voor, welke constant moet zijn in een bepaalde berekening.

Indien ervoor gekozen wordt om als inkomend signaal een sommatie van golven met verschillende frequenties op te leggen, moet ϵ in de berekening worden benaderd. Afhankelijk van de locatie in het systeem waar de amplificatiefunctie berekend moet worden en de piek in de amplificatiefunctie die correct moet worden benaderd, wordt ϵ geschat. Het is dus met de gedefinieerde randvoorwaarde niet mogelijk om een som van golven met verschillende frequenties op te leggen en daarbij de hoogte van alle amplificatiepieken voldoende dicht bij de analytische oplossing te krijgen.

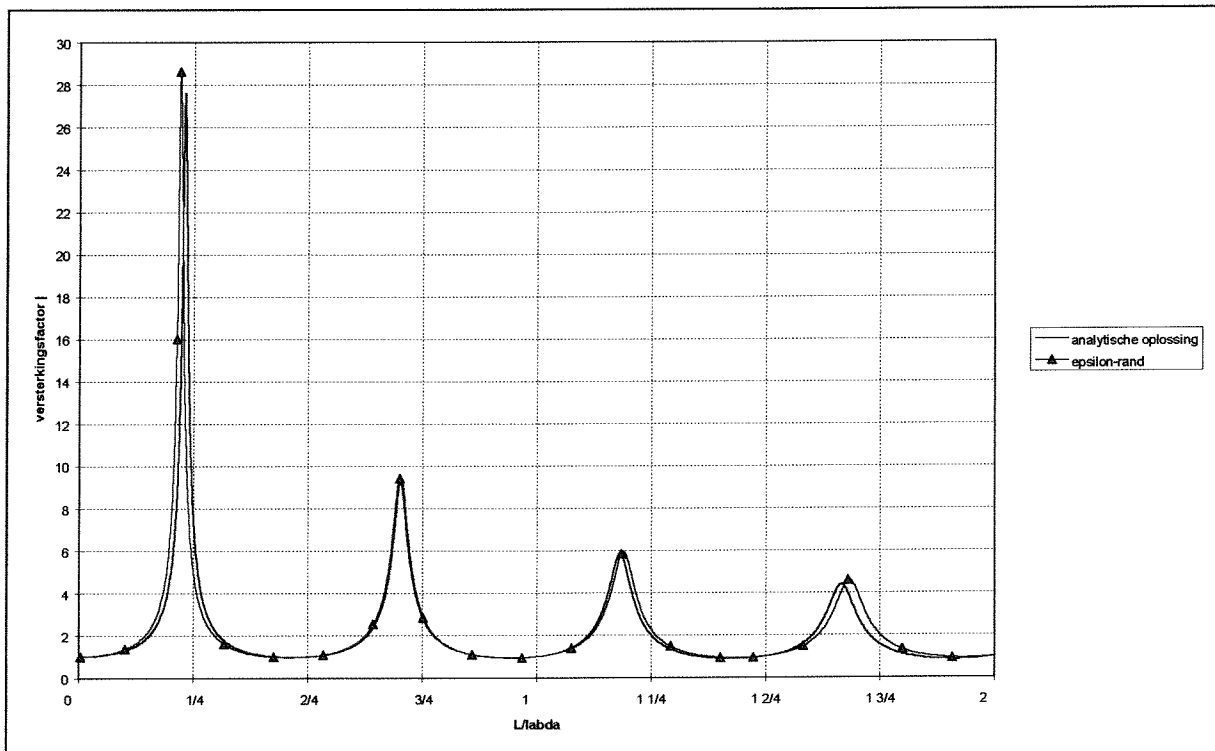
Indien de berekende reflectiefactor ter plaatse van de eerste resonantiefrequentie overeen moet komen met de analytische reflectiefactor en de lengte breedte verhouding van het bekken 12 bedraagt (afmetingen van de Nieuwe Waterweg tot de stormvloedkering), dan is de waarde van ka in vergelijking (4.18) bij benadering gelijk aan:

$$ka = \frac{kL}{2\left(\frac{L}{2a}\right)} = \pi \frac{\left(\frac{L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{L}{2a}\right)} \quad \xrightarrow{\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{4} \text{ en } \frac{L}{2a} = 12} \quad ka = 0.065$$

De waarde voor ka zou eigenlijk iets kleiner genomen moeten worden, omdat de waterstand niet opslingert bij exact $L/\lambda = n/4$ (met $n = 1, 3, 5, \dots$) maar bij een kleinere waarde (zie Figuur 4.5).



Figuur 4.5: Amplificatiefunctie (analytische oplossingen en ϵ -rand) voor $L/2a = 12$ (L = lengte van het bekken, $2a$ = breedte van het bekken, λ = golflengte)

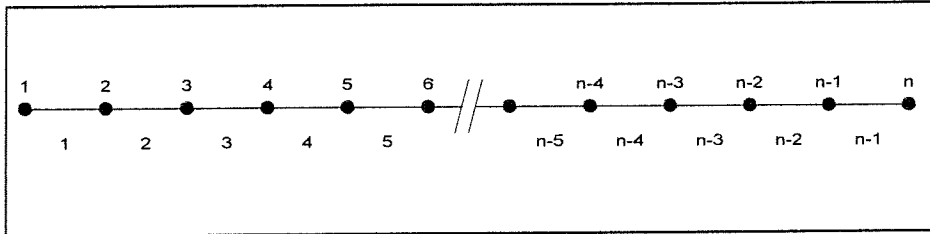


Figuur 4.6: Amplificatiefunctie (analytische oplossingen en ϵ -rand) voor $L/2a = 20$ (L = lengte van het bekken, $2a$ = breedte van het bekken, λ = golflengte)

4.6 Resultaten

De ε -rand, zoals weergegeven in (4.18), is geïmplementeerd in een ééndimensionaal numeriek waterbewegingsmodel. Met het model zijn amplificatiefuncties berekend voor twee bekkens met verschillende afmetingen. De bekkens hebben respectievelijk een lengte breedte verhouding gelijk aan 12 en 20. Voor de lengte breedte verhouding van het bekken is 12 gekozen, omdat dit overeen komt met de afmetingen van de Nieuwe Waterweg tot de stormvloedkering. Ook zijn berekeningen gemaakt voor een bekken met lengte breedte verhouding 20. In het Europoortgebied komen namelijk wel lengte breedte verhoudingen groter dan 12 voor, maar niet kleiner.

In het programma is een netwerk van vakken verbonden met knooppunten gedefinieerd (zie Figuur 4.7). Elk vak heeft een constant, in het programma bepaald, dwarsprofiel.



Figuur 4.7: Netwerk van vakken verbonden door knooppunten

Het programma berekent in de tijd de snelheid en de waterstand op elk knooppunt. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de ééndimensionale lange-golfvergelijkingen.

In bijlage V is het programma beschreven en is de listing weergegeven. In bijlage VI is het programma getest.

De met het programma berekende amplificatiefuncties worden steeds vergeleken met de analytische oplossing volgens C.C. Mei (zie hoofdstuk 3; vergelijking (3.10)). In beide berekeningen (numerieke berekening en analytische berekening) is damping door wrijving verwaarloosd, waardoor het met elkaar vergelijken van de resultaten geoorloofd is.

In Figuur 4.8 is de numeriek berekende amplificatiefunctie weergegeven voor een bekken met lengte breedte verhouding gelijk aan 12. In het model is ka (en dus ε) zodanig gekozen dat de versterkingsfactor ter plaatse van de eerste resonantiefrequentie de analytisch berekende versterkingsfactor benadert:

$$ka = \pi \frac{\left(\frac{L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{L}{2a}\right)} \quad \xrightarrow{\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{4} \text{ en } \frac{L}{2a} = 12} \quad ka = 0.065$$

In Figuur 4.9 is de numeriek berekende amplificatiefunctie weergegeven voor een bekken met lengte breedte verhouding gelijk aan 20. Ook in deze berekening is ka (en dus ε) zodanig gekozen dat de versterkingsfactor ter plaatse van de eerste resonantiefrequentie de analytisch berekende versterkingsfactor benadert:

$$ka = \pi \frac{\left(\frac{L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{L}{2a}\right)} \quad \xrightarrow{\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{4} \text{ en } \frac{L}{2a} = 20} \quad ka = 0.039$$

De berekende hoogte van de tweede resonantiepiek in Figuur 4.8 is ten opzichte van het analytische resultaat te laag. Dat is te verklaren. Ter plaatse van de tweede resonantiepiek zou in het geval van een bekken met $L/2a = 12$ de volgende (benaderde) waarde voor ka moeten worden gebruikt:

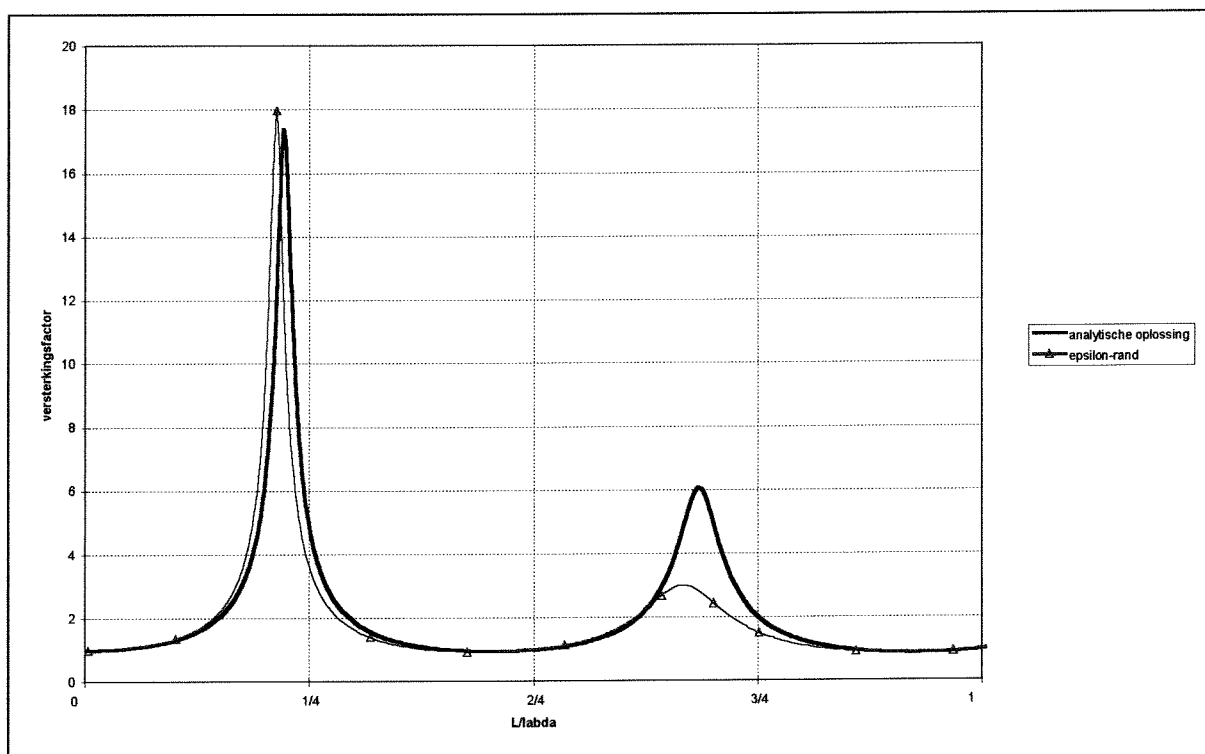
$$ka = \pi \frac{\left(\frac{L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{L}{2a}\right)} \xrightarrow{\frac{L}{\lambda} = \frac{3}{4} \text{ en } \frac{L}{2a} = 12} ka = 0.196$$

De berekening is echter gemaakt met $ka = 0.065$. De gebruikte ε is in de berekening daarom te hoog ter plaatse van de tweede resonantiepiek. De randvoorwaarde gaat dan te veel op een Riemann randvoorwaarde lijken. Er blijft daardoor te weinig energie in het systeem achter en als gevolg ervan is de amplificatie te laag.

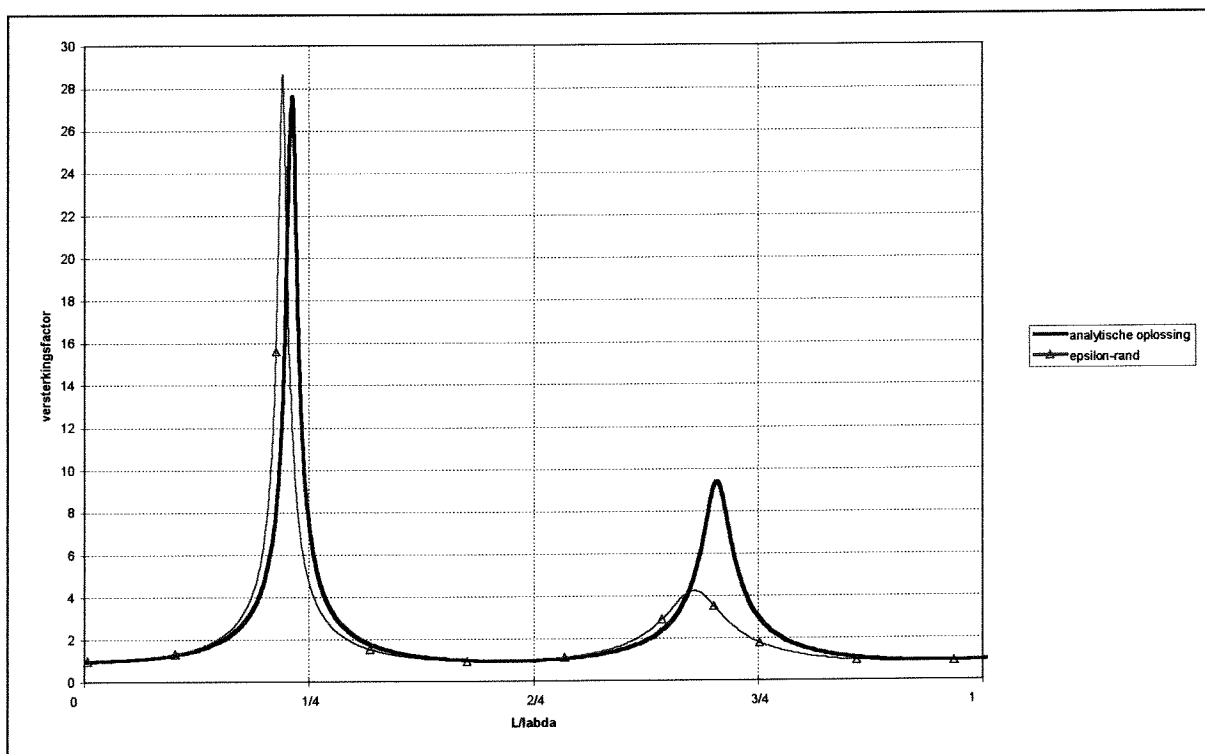
Voor een bekken met $L/2a = 20$ geldt een soortgelijke verklaring.

In de figuren 4.10 en 4.11 zijn de numeriek berekende amplificatiefuncties weergegeven voor bekkens met lengte breedte verhoudingen gelijk aan respectievelijk 12 en 20. In het model is ka (en dus ε) zodanig gekozen dat de hoogte van de versterkingsfactor ter plaatse van de tweede resonantiefrequentie bij benadering correct wordt gemodelleerd. De resultaten komen ter plaatse van de tweede resonantiefrequentie vrij goed overeen met de analytische oplossing. Ter plaatse van de eerste resonantiefrequentie zijn de berekende versterkingsfactoren te hoog, omdat voor die frequenties de in de berekening gebruikte ε te laag is.

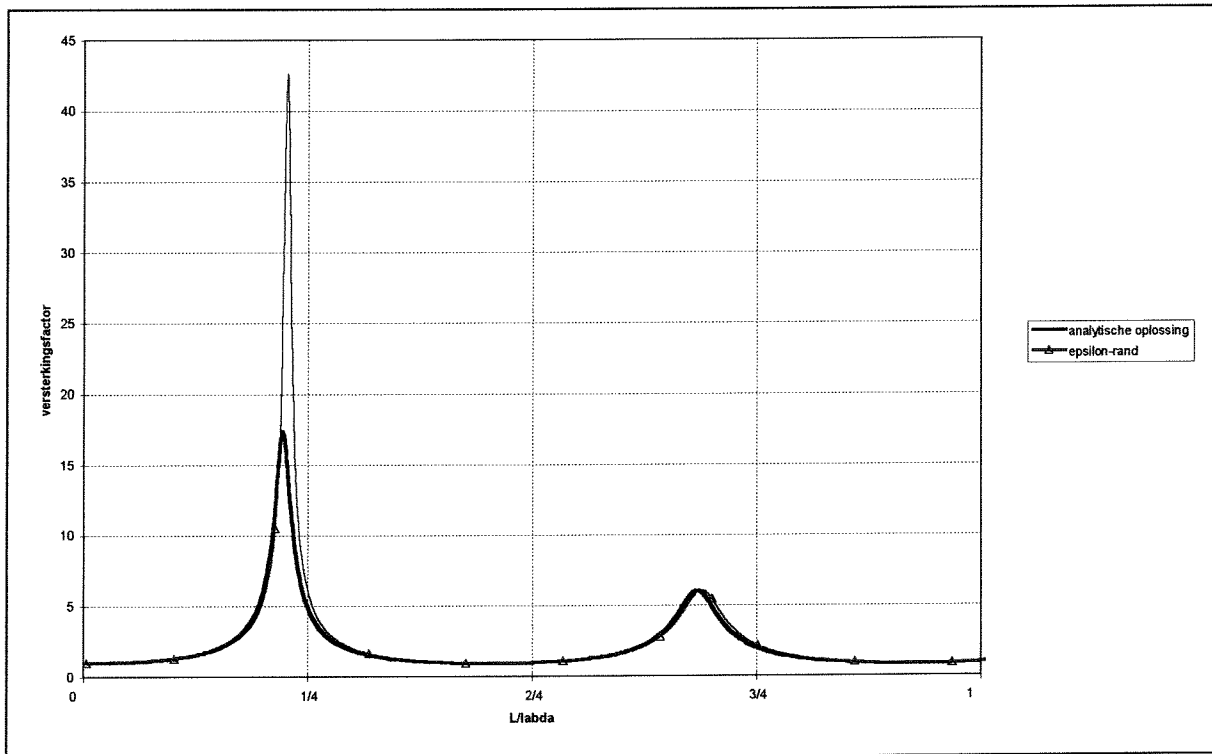
De weergegeven numeriek berekende amplificatiefuncties zijn identiek aan de amplificatiefuncties, die zouden worden verkregen indien de versterkingsfactor weergegeven in vergelijking (4.22), berekend met een vaste waarde voor ε , zou worden uitgezet als functie van L/λ .



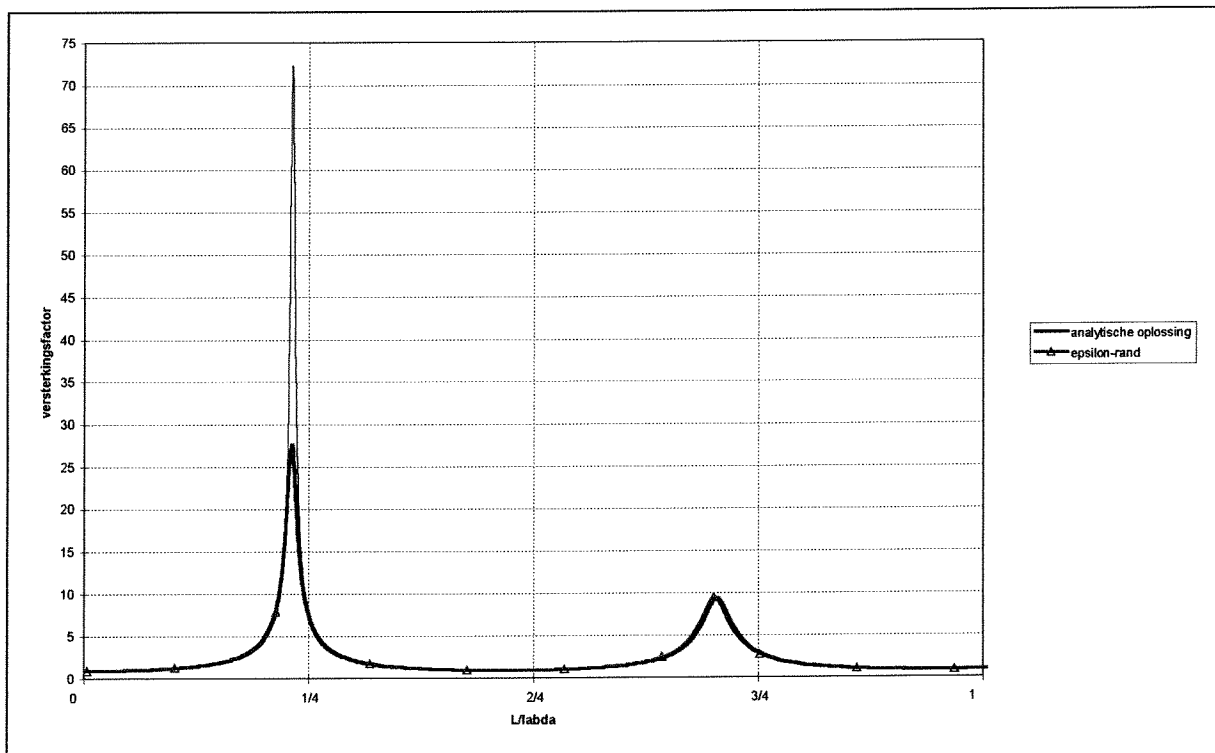
Figuur 4.8: Amplificatiefunctie voor een bekken met $L/2a = 12$. (In de berekening wordt de eerste resonantiepiek goed gemodelleerd.)



Figuur 4.9: Amplificatiefunctie voor een bekken met $L/2a = 20$. (In de berekening wordt de eerste resonantiepiek goed gemodelleerd.)



Figuur 4.10: Amplificatiefunctie voor een bekken met $L/2a = 12$. (In de berekening wordt de tweede resonantiepiek goed gemodelleerd.)



Figuur 4.11: Amplificatiefunctie voor een bekken met $L/2a = 20$. (In de berekening wordt de tweede resonantiepiek goed gemodelleerd.)

4.7 Alternatieve modellering van de zeerand

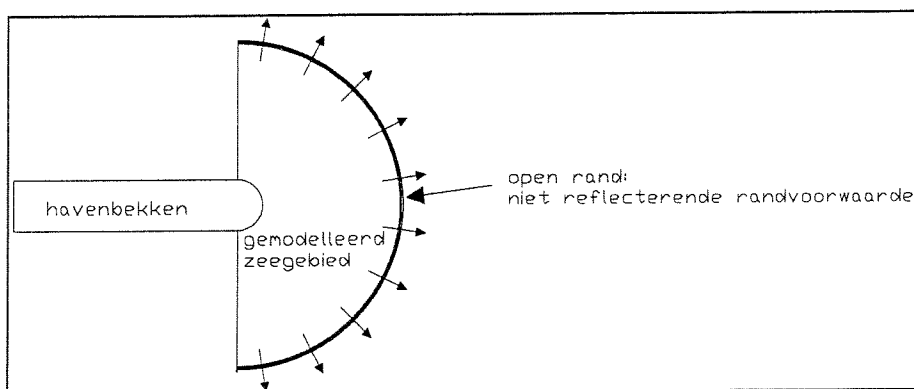
In de vorige paragrafen is een mogelijke oplossing voor de modellering van de monding van de Nieuwe Waterweg uitgewerkt. De resultaten verkregen met de gedefinieerde randvoorwaarde opgelegd op de open rand, benaderen de analytische oplossing. De verkregen randvoorwaarde is eenvoudig te implementeren in een ééndimensionaal waterbewegingsmodel, zoals ZWENDL of DUFLOW. Bij gebruik van de randvoorwaarde is het echter niet mogelijk een sommatie van golven met verschillende frequenties op te leggen en daarbij de hoogte van alle amplificatiepieken voldoende dicht bij de analytische oplossing te krijgen. Dit is een nadeel van de afgeleide randvoorwaarde.

In deze paragraaf zijn daarom twee alternatieve modelleringen van de zeerand kort beschreven.

Alternatief 1

Aan het ééndimensionale kanaal kan een zeegebied worden gekoppeld (zie Figuur 4.12). In het zeegebied gelden de ééndimensionale lange golf vergelijkingen, omgeschreven naar poolcoördinaten. Op de rand van het zeegebied (=open rand) wordt als randvoorwaarde de ingaande Riemann invariant opgelegd, welke volgt uit de naar poolcoördinaten omgeschreven vergelijkingen.

Als gevolg van het opleggen van de ingaande Riemann invariant is de open rand (op een "oneindig" grote afstand van de havenmond) niet reflecterend. Deze eigenschap komt overeen met de Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde.



Figuur 4.12: Alternatieve modellering van de zeerand

Deze modellering van de zeerand komt overeen met de definitie van de Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde (zie paragraaf 3.3).

Alternatief 2

De beste modellering wordt hoogstwaarschijnlijk verkregen door aan het kanaal een tweedimensionaal zeegebied te koppelen. Hiervoor wordt verwezen naar [Seiches Europoort; WL (1994)] of [Castello-Branco, Monteiro Fernandes (1991)]. In [Seiches Europoort; WL (1994)] is dit zeegebied gekoppeld aan een tweedimensionaal model. De berekende amplificatiefuncties kwamen in die studie goed overeen met de analytisch resultaten.

5. Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk worden conclusies en aanbevelingen gegeven, welke uit het afstudeeronderzoek zijn afgeleid.

5.1 Conclusies

Ten aanzien van de modellering van seiches in een ééndimensionaal model

- Voor de in dit rapport gebruikte testconfiguratie (lang en smal afgesloten bekken) geldt dat seiches met behulp van een ééndimensionaal model kunnen worden gemodelleerd indien ka (met k = golfgetal en $2a$ = breedte van het bekken) veel kleiner is dan 1 én de golven loodrecht het bekken binnenvallen. Indien de golven onder een hoek het bekken binnen komen dan voldoet een ééndimensionale berekening bij benadering voor de eerste vier of vijf resonantiefrequenties. Voor een complexe geometrie als het Europoortgebied worden geen conclusies getrokken. De Nieuwe Waterweg tot de stormvloedkering kan echter wel gemodelleerd worden als een lang en smal bekken. Bovendien geldt $ka \ll 1$ voor de in het Europoortgebied van belang zijnde seiches. De ééndimensionale modellering van seiches in de Nieuwe Waterweg is daarom mogelijk mits op de zeerand een correcte randvoorwaarde is opgelegd.

Ten aanzien van de modellering van de zeerand (monding van de Nieuwe Waterweg) in een ééndimensionaal model

- Seiches worden ter plaatse van een plotselinge verbreding gedeeltelijk gereflecteerd en gedeeltelijk getransmitteerd afhankelijk van de verhouding van de breedte van het kanaal tot de golflengte. Relatief lange golven ten opzichte van de breedte van het bekken worden op de rand voornamelijk teruggekaatst. Relatief korte golven ten opzichte van de breedte van het bekken worden op de rand gedeeltelijk doorgelaten en gedeeltelijk teruggekaatst. In het Europoortgebied worden seiches ter plaatse van de monding van de Nieuwe Waterweg gedeeltelijk getransmitteerd en gedeeltelijk gereflecteerd.
- De randvoorwaarde, die in een ééndimensionaal numeriek model op de open rand wordt opgelegd moet zodanig zijn gedefinieerd dat golven ter plaatse van die kunstmatige rand, net als in de analytische oplossing, afhankelijk van de golflengte worden gereflecteerd of getransmitteerd. De randvoorwaarde (ε -rand), die wat betreft reflectie eigenschappen overeen komt met de analytische oplossing is hieronder weergegeven:

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}} \left(e^{i\omega t} + i\omega\varepsilon e^{i\omega t} \right)$$

Met:

$$\varepsilon = \frac{ka}{\omega^2 \left[1 - 2(ka) + (ka)^2 + \frac{4(ka)^2}{\pi^2} \ln^2 \left(\frac{2\gamma(ka)}{\pi e} \right) \right]}$$

u = snelheid

ζ = waterstand ten opzichte van de gemiddelde waterstand

$2a$ = breedte van het bekken

γ	= constante van Euler = 0.577215
e	= grondtal natuurlijk logaritme
k	= golfgetal = $2\pi/\lambda$
λ	= golflengte
ω	= $2\pi/T = 2\pi f = (g/H)^{1/2}k$
T	= periode
g	= zwaartekrachtsversnelling
H	= gemiddelde diepte

De door de randvoorwaarde opgelegde grootheid is een combinatie van een waterstand en een tijdsafgeleide van een Riemann invariant. De combinatie is belangrijk. Indien alleen een waterstand op de open rand in een ééndimensionaal numeriek model wordt opgelegd dan is de versterkingsfactor bij resonantie te hoog. Indien alleen de ingaande Riemann invariant als randvoorwaarde op de open rand wordt opgelegd dan is er geen sprake van opslinging.

Indien de ε -rand op de open rand in het model wordt opgelegd dan komt de berekende amplificatiefunctie vrij goed overeen met de analytische oplossing.

- Bij gebruik van de ε -rand in een numeriek model is het niet mogelijk golven met verschillende frequenties op te leggen en daarbij de hoogte van alle amplificatiepieken voldoende dicht bij de analytische oplossing te krijgen. De waarde voor ε wordt in dit geval benaderd afhankelijk van de locatie in het systeem waar de amplificatiefunctie moet worden berekend en de resonantiepiek in de amplificatiefunctie waarvan de hoogte moet worden voorspeld. Dit is een nadeel van het gebruik van de randvoorwaarde. De berekende waarde van de amplificatiefactor ter plaatse van de vooraf vastgestelde van belang zijnde resonantiefrequentie benadert de analytische oplossing.

Ten aanzien van de definitie van versterkingsfactor in een ééndimensionaal model

- In een ééndimensionaal model moet de versterkingsfactor aan het einde van een afgesloten bekken worden berekend door de amplitude van de waterstandsvariatie aan het einde van het bekken te delen door de amplitude van de op de open rand opgelegde grootheid.

Algemene conclusie

- Een ééndimensionale modellering van seiches is wel mogelijk, maar een betere modellering wordt waarschijnlijk verkregen door een tweedimensionaal zeegebied aan het havenbekken te koppelen.

5.2 Aanbevelingen

- Aanbevolen wordt de ε -rand in een ééndimensionaal numeriek waterbewegingsmodel als DUFLOW of ZWENDL te implementeren. In dit rapport zijn niet-lineaire termen in de lange golf vergelijkingen verwaarloosd. Bij de definitieve implementatie moeten ze wel in rekening worden gebracht. Met het verkregen model moeten hierna testberekeningen worden gemaakt.
- Aangezien het gebruik van de ε -rand een nadeel kent, wordt bovendien aanbevolen:
 - Een (tweedimensionaal) zeegebied aan het bestaande model te koppelen.
of
 - Bij gebruik van de ε -rand geen combinatie van verschillende frequenties op te leggen, maar slechts één enkele frequentie.
of
 - Het model te gebruiken met als randvoorwaarde ter plaatse van de open rand een waterstandsrand. Hiermee worden dan de frequenties opgespoord, waarbij resonantie optreed. Rondom de opgespoorde frequentie wordt de berekening opnieuw gemaakt, maar dan met een ε -rand als randvoorwaarde opgelegd op de open rand. De (benaderde) plaats van de resonantiefrequentie wordt berekend met een waterstandsrand als randvoorwaarde. De hoogte van de amplificatiefactor echter wordt verkregen uit een berekening met een ε -rand als randvoorwaarde.

Referenties

Abbott M.B., Basco D.R.
Computational Fluid Dynamics, an introduction for engineers
1989

Abramowitz M., Stegun I.A.
Handbook of mathematical functions
Dover Publications, New York
1992

Contract BD001
1989

Engquist B., Majda A.
Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves
Mathematics of computations, volume 31, number 139: 629-651
1977

van Haaren Y.
Implementatie van seiches in het ZWENDL model
1996

Janssen J.P.F.M., Jorissen R.E.
Beslisdocument seiches
1994

Mei C.C.
The applied dynamics of ocean surface waves
1989

Miles J., Munk W.
Harbor paradox
Journal of the Waterways and Harbors Division
ASCE, 87: 111-130
1961

Numerical Recipes
The Art of Scientific Computing (FORTRAN version)
William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling
Cambridge University Press, 1989

Seiches Europoort
Analyse betrouwbaarheid van seiches-berekeningen met PHAROS en TRISULA
Waterloopkundig Laboratorium, 1994

Sommerfeld A.
Partial Differential Equations in Physics
Academic Press
New York, 1949

Stelling G.S.
Rijkswaterstaat communications
On the construction of computational methods for shallow water flow problems
1984

Stelling G.S., Booij N.
Computational modelling in open channel hydraulics
Lecture Notes
1994

Taylor M.E.
Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations
Comm. Pure Applied Mathematics, volume 28: 457-478
1975

Verspuy C.
Lange golven, collegedictaat (b73)
1987

Xiping Yu
Oscillations in a coupled bay-river system, 1.
Analytic solution
Coastal Engineering, 28: 147-164
1996

Symbolenlijst

η	=	waterstand
k	=	golfgetal = $\omega/(gH)^{1/2} = 2\pi/\lambda$
λ	=	golflengte
g	=	zwaartekrachtsversnelling
H	=	gemiddelde diepte
ω	=	$(gH)^{1/2}k = 2\pi/T = 2\pi f$
T	=	periode
f	=	frequentie
L	=	lengte van het havenbekken
$2a$	=	breedte van het havenbekken
α	=	hoek van inval van de inkomende golven
γ	=	constante van Euler = 0.577215
e	=	grondtal natuurlijk logaritme
$\mathfrak{R}$	=	versterkingsfactor / amplificatiefactor
R	=	reflectiefactor
T	=	transmissiefactor
u	=	snelheid
ζ	=	waterstand (ten opzichte van de gemiddelde waterstand)
R_i	=	ingående Riemanninvariant
R_u	=	uitgaande Riemanninvariant

Bijlagen

Bijlage I:	De Helmholtz vergelijking
Bijlage II:	Tweedimensionale analytische uitdrukking voor de waterbeweging in een havenbekken gekoppeld aan een half oneindig zeegebied
Bijlage III:	Berekening van de versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken (volgens Xiping Yu)
Bijlage IV:	Uitstraling van energie ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee; berekening van de reflectie- en transmissiefactor
Bijlage V:	Ééndimensionaal waterbewegingsprogramma voor een langgerekte bak; beschrijving en listing
Bijlage VI:	Testberekeningen
Bijlage VII:	Afleiding van de opgelegde grootheid in geval van een ε -rand
Bijlage VIII:	Definitie en berekening van versterkingsfactoren in een ééndimensionaal numeriek model
Bijlage IX:	ε -rand, versterkingsfactor

Bijlage I : De Helmholtz vergelijking

Voor de analytische seichesberekening in hoofdstuk 3 is de Helmholtz vergelijking gebruikt (zie [Mei (1989)]). Deze vergelijking is geldig onder bepaalde voorwaarden:

- wrijvingsloze vloeistof (viskeuze schuifspanningen verwaarloosbaar)
- zeer kleine golfamplitude
- randen perfect reflecterend en verticaal over de gehele diepte
- constante diepte

Indien wordt uitgegaan van lange golven dan kan de Helmholtz vergelijking worden verkregen uit de tweedimensionale lange-golfvergelijkingen met verwaarlozing van externe krachten:

Continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i (\zeta + H)] = 0$$

Bewegingsvergelijking (de vergelijking van Euler met verwaarlozing van de verticale coördinaat):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$$

Met:

- ζ = waterstand ten opzichte van referentieniveau
 H = gemiddelde waterstand (referentieniveau)
 u = snelheid
 g = zwaartekrachtsversnelling

Lineariseren van de bovenstaande vergelijkingen voor zeer kleine golfamplitude:

$$\frac{|\zeta|}{H} \ll 1$$

geeft:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla(Hu) = 0 \quad (\text{I. 1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \nabla \zeta \quad (\text{I. 2})$$

Als de golven sinusvormig zijn geldt:

$$\zeta = \eta(x, y) e^{-i\omega t}$$

$$u(x, y, t) = u(x, y) e^{-i\omega t}$$

Hiermee worden de vergelijkingen (I. 1) en (I. 2):

$$i\omega \eta = \nabla(Hu) \quad (\text{I. 3})$$

$$-i\omega u = -g \nabla \eta \quad \Rightarrow \quad u = \frac{i^2 g}{-i\omega u} \nabla \eta = -\frac{ig}{\omega} \nabla \eta \quad (\text{I. 4})$$

Vergelijking (I. 4) invullen in vergelijking (I. 3) geeft:

$$\nabla(H\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0 \quad (\text{I. 5})$$

Voor constante diepte reduceert vergelijking (I. 5) tot de Helmholtz vergelijking:

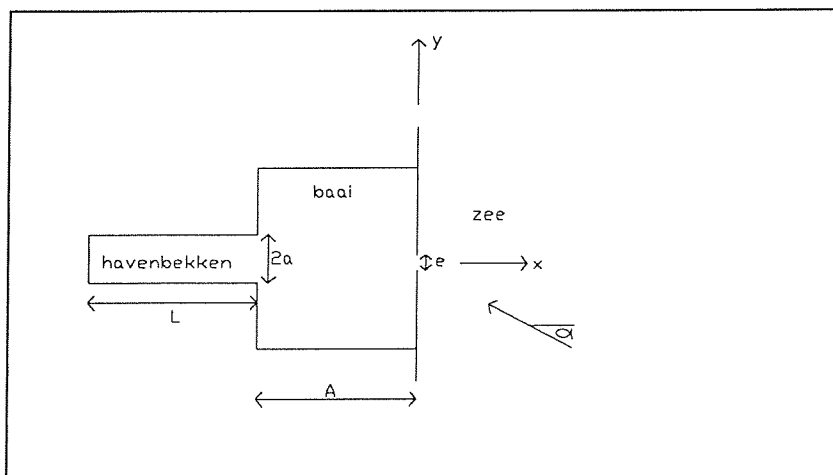
$$\nabla^2\eta + k^2\eta = 0 \quad (\text{I. 6})$$

Met:

$$k = \text{golfgetal} = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \quad (\text{dispersie vergelijking})$$

Bijlage II : Tweedimensionale analytische uitdrukking voor de waterbeweging in een havenbekken gekoppeld aan een oneindig zeegebied

In het tijdschrift "Coastal Engineering" (nummer 28) (zie [Xiping Yu (1996)]) is een tweedimensionale seichesberekening gemaakt voor een baai gekoppeld aan een havenbekken en gelegen aan een rechte kust (zie Figuur II.1).

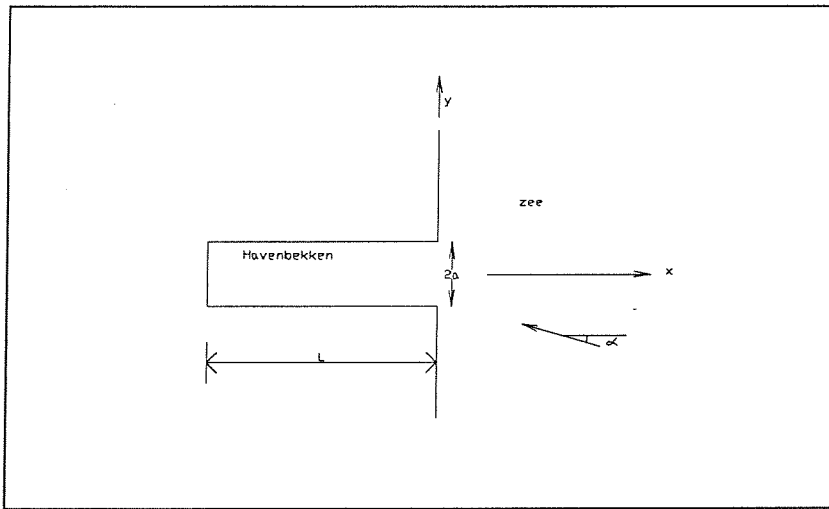


Figuur II.1: Situatieschets: havenbekken gekoppeld aan een baai en gelegen aan een rechte kust

In deze bijlage is de genoemde berekening vereenvoudigd door de baai uit de oplossing te verwijderen ($A=0$). Hierdoor wordt een tweedimensionale uitdrukking verkregen voor de waterbeweging in een havenbekken direct gekoppeld aan een oneindig zeegebied (zie Figuur II.2).

De oplossingen in het havenbekken en in het zeegebied zijn gelijk aan de oplossingen gegeven in [Xiping Yu (1996)]. In deze bijlage zijn ze direct aan elkaar gekoppeld. In [Xiping Yu (1996)] werd de oplossing in het havenbekken (op $x = -A$) gekoppeld aan de oplossing in de baai (zie Figuur II.1).

Voor de analytische oplossing is de Helmholtz vergelijking (zie bijlage I) gebruikt. Het gebied is opgedeeld in twee deelgebieden: het havenbekken en het zeegebied. In elk gebied afzonderlijk is in [Xiping Yu (1996)] de analytische oplossing bepaald door middel van scheiding van variabelen. In deze bijlage zijn de gebruikte randvoorwaarden voor het verkrijgen van de oplossingen in havenbekken en zeegebied weergegeven. Daarna is (zonder berekening) de oplossing geformuleerd. Tenslotte zijn de afzonderlijke oplossingen op de grens van de deelgebieden ($x=0$) aan elkaar gekoppeld.



Figuur II.2: Situatieschets: havenbekken gekoppeld aan een oneindig zeegebied

De diepte is in het gehele gebied constant en de randen zijn ondoorlatend.

Deelgebied 1: het havenbekken

De Helmholtz vergelijking is opgelost met de volgende randvoorwaarden:

- 1 $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ voor $y = a$
- 2 $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ voor $y = -a$
- 3 $\frac{\partial \eta}{\partial x} = U + uy$ voor $|y| \leq a$ en $x = 0$
- 4 $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ voor $x = -L$

Met:

U = gemiddelde waarde van de snelheid in x-richting voor $x = 0$

u = variatie van de snelheid in x-richting over de breedte van het bekken ($-a < y < a$) voor $x = 0$

Hieruit volgt de waterstandsvariatie in een willekeurig punt in het bekken:

$$\eta_r = U(2a)\phi_{rs}(x) + u(2a)^2 \psi_{rs}(x, y) \quad (\text{II.1})$$

Met:

$$\phi_{rs}(x) = \frac{\cos(\mu_0(x+L))}{\mu_0 2a \sinh(\mu_0 L)}$$

$$\psi_{rs}(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{(2m-1)^2 \pi^2} \frac{\cosh(\mu_{2m-1}(x+L))}{\mu_{2m-1} 2a \sinh(\mu_{2m-1} L)} \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2a}$$

$$\mu_n = k \left[\left(\frac{n\pi}{2ka} \right)^2 - (1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Deelgebied 2: het zeegebied

In het zeegebied geldt:

$$\eta_s = \eta_0 + \eta'$$

Met:

η_0 = inkomende + gereflecteerde golf

η' = de door de havenopening gediffracteerde golf

Indien dissipatie in het zeegebied wordt verwaarloosd geldt:

$$\eta_0 = \frac{H_0}{2} e^{ik(y \sin \alpha - x \cos \alpha)} + \frac{H_0}{2} e^{ik(y \sin \alpha + x \cos \alpha)} = H_0 e^{iky \sin \alpha} \cos(kx \cos \alpha)$$

De gediffracteerde golf moet voldoen aan de volgende differentiaalvergelijking en randvoorwaarden:

$$\nabla^2 \eta' + k^2 \eta' = 0$$

- 1 $\frac{\partial \eta'}{\partial x} = 0$ voor $|y| > a$ en $x = 0$
- 2 $\frac{\partial \eta'}{\partial x} = U + uy$ voor $|y| \leq a$ en $x = 0$
- 3 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho_0} \left(\frac{\partial \eta'}{\partial \rho_0} - ik \eta' \right) = 0$ (Sommerfeld stralingsconditie)

Met:

$\rho = (x+y)^{1/2}$ = afstand van $x=0$ tot een willekeurig punt in het zeegebied

U = gemiddelde waarde van de snelheid in x -richting voor $x=0$

u = variatie van de snelheid in x -richting over de breedte van het bekken ($-a < y < a$) voor $x = 0$

Volgens de Sommerfeld stralingconditie verdwijnt op oneindig grote afstand van de rand de golfenergie als van een radiaal uitstralende golf.

De oplossing van de Helmholtz vergelijking welke voldoet aan de Sommerfeld stralingsvoorwaarde is de Hankel functie $H_0^{(1)}(k\rho)$. Volgens de integraalstelling van Green kan de waarde van η' op $(0,y)$ (met $-a \leq y \leq a$) worden uitgedrukt als volgt:

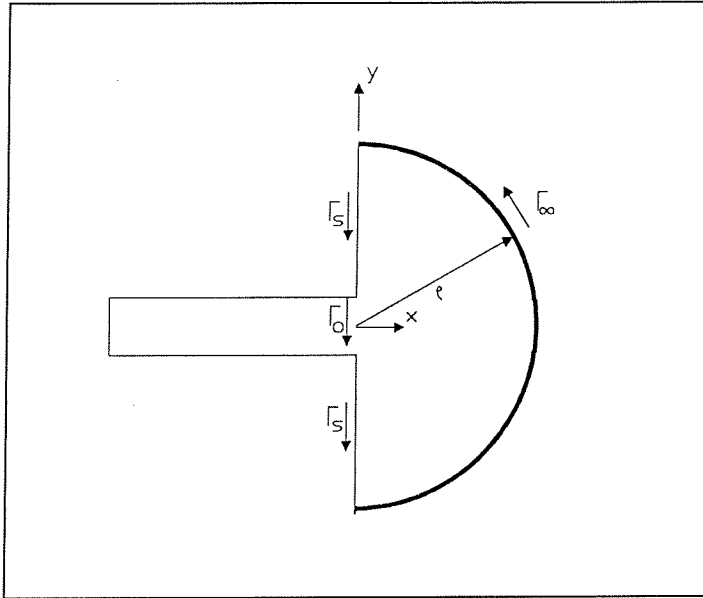
$$2i\eta' = \int_{\Gamma_0 + \Gamma_s + \Gamma_\infty} \left[\eta' \frac{\partial H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial n} - H_0^{(1)}(k\rho) \frac{\partial \eta'}{\partial n} \right] d\Gamma \quad (II.2)$$

Met:

Γ_0 = havenopening (Figuur II.3)

Γ_s = kust (Figuur II.3)

Γ_∞ = rand op oneindig grote afstand van de kust (Figuur II.3)



Figuur II.3: Definitieschets

Aangezien $H_0^{(1)}(k\rho)$ en η' op oneindige afstand van de rand voldoen aan dezelfde uitstralingsvoorwaarde, verdwijnt de integrand in vergelijking (II.2) langs Γ_∞ . Verder geldt:

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial n} = 0 \quad \text{langs } \Gamma_s \text{ en } \Gamma_0$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial n} = 0 \quad \text{langs } \Gamma_s$$

Vergelijking (II.2) wordt hiermee:

$$2i\eta' = - \int_{\Gamma_0} H_0^{(1)}(k\rho) \frac{\partial \eta'}{\partial n} d\Gamma = - \int_{-a}^a H_0^{(1)}(k|Y-y|) (U + uy) dY \quad (\text{II.3})$$

Indien de haveningang smal is geldt: $k|Y-y| \ll k(2a) \ll 1$. De Hankel functie kan dan als volgt worden benaderd (zie [Abramowitz, Stegun (1992)]):

$$H_0^{(1)}(k|Y-y|) = 1 + i \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k|Y-y|}{2} + \gamma \right) \quad (\text{II.4})$$

(II.4) invullen in vergelijking (II.3) en uitwerken geeft:

$$\eta' = U(2a)\phi_{sr}(y) + u(2a)^2 \psi_{sr}(y)$$

Hieruit volgt de oplossing in het zeegebied:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \eta_0 + \eta' \\ \eta_s &= H_0 e^{iky \sin \alpha} \cos(kx \cos \alpha) + U(2a)\phi_{sr}(y) + u(2a)^2 \psi_{sr}(y) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Met:

$$\varphi_{sr}(y) = -\frac{1}{\pi} \left(\ln \left(k \sqrt{(2a)^2 - 4y^2} \right) - \frac{y}{2a} \ln \left(\frac{2a-2y}{2a+2y} \right) + \gamma - 1 - 2 \ln 2 \right) + \frac{1}{2} i$$

$$\psi_{sr}(y) = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{(2a)^2} \right) \ln \left(\frac{2a-2y}{2a+2y} \right) - \frac{y}{2a} \right]$$

Koppeling van oplossingen op $x = 0$

De oplossingen in het havenbekken ((II.1)) en in het zeegebied ((II.5)) worden aan elkaar gekoppeld op $x=0$.
Uit vergelijking (II.2) volgt:

$$\bar{\eta}_r|_{x=0} = U(2a)\varphi_{rs} \quad (\text{gemiddelde waarde}) \quad (\text{II.6})$$

$$\tilde{\eta}_r|_{x=0} = u(2a)^2 \psi_{rs} \quad (\text{afwijking van de gemiddelde waarde}) \quad (\text{II.7})$$

Uit vergelijking (II.5) volgt:

$$\bar{\eta}_s|_{x=0} = H_0 \bar{\omega} + U(2a)\varphi_{sr} \quad (\text{gemiddelde waarde}) \quad (\text{II.8})$$

$$\tilde{\eta}_s|_{x=0} = H_0 \tilde{\omega} + u(2a)^2 \psi_{sr} \quad (\text{afwijking van de gemiddelde waarde}) \quad (\text{II.9})$$

(II.6) gelijkstellen aan (II.8) en (II.7) gelijkstellen aan (II.9) geeft:

$$U(2a) = \frac{1}{\varphi_{rs} - \varphi_{sr}} \bar{\omega} H_0 \quad (\text{II.10})$$

$$u(2a)^2 = \frac{1}{\psi_{rs} - \psi_{sr}} \tilde{\omega} H_0 \quad (\text{II.11})$$

Met:

$$\varphi_{rs} = \frac{1}{\mu_0 2a \tanh(\mu_0 L)}$$

$$\psi_{rs} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{(2m-1)^4 \pi^4} \frac{1}{\mu_{2m-1} 2a \tanh(\mu_{2m-1} L)}$$

$$\varphi_{sr} = -\frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{kay}{e} \right) + \frac{1}{2} i$$

$$\psi_{sr} = \frac{1}{16\pi}$$

$$\bar{\omega} = F[k \sin \alpha]$$

$$\tilde{\omega} = -\frac{i}{2} G[k \sin \alpha]$$

$$F[z] = \frac{\sin z}{z}$$

$$G[z] = \frac{dF}{dz} = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2}$$

De vergelijkingen (II.10) en (II.11) invullen in vergelijking (II.1) geeft een uitdrukking voor de waterbeweging in een afgesloten bekken gelegen aan een rechte kust.

De eerste term in de vergelijking, $U(2a)\phi_{rs}(x)$, geeft de bijdrage aan de golfbeweging van de variatie van de waterstand in x-richting. De tweede term, $u(2a)^2\psi_{rs}(x,y)$, staat voor de bijdrage aan de golfbeweging van de variatie van de waterstand in y-richting.

Bijlage III : Berekening van de versterkingsfactor in een lang, smal havenbekken (volgens Xiping Yu)

In deze bijlage is de versterkingsfactor aan het einde van een lang en smal havenbekken berekend uitgaande van de ééndimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in dat bekken.

De ééndimensionale uitdrukking voor de waterbeweging in een lang en smal bekken is hieronder weergegeven:

$$\eta_r = U(2a)\varphi_{rs}(x) \quad (\text{III.1})$$

Met:

$$U(2a) = \frac{1}{\varphi_{rs} - \varphi_{sr}} \bar{\omega} H_0$$

$$\varphi_{rs}(x) = \frac{\cos(\mu_0(x+L))}{\mu_0 2a \sinh(\mu_0 L)}$$

$$\mu_n = k \left[\left(\frac{n\pi}{2ka} \right)^2 - (1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_{rs} = \frac{1}{\mu_0 2a \tanh(\mu_0 L)}$$

$$\varphi_{sr} = -\frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\gamma ka}{e} \right) + \frac{1}{2} i$$

$$\bar{\omega} = 1 \quad (\text{indien } ka \ll 1)$$

$H_0 = 2 \times$ golfhoogte van de inkomende golf

Voor $n=0$ is μ_n :

$$\mu_0 = k \left[\left(\frac{n\pi}{kt} \right)^2 - (1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = k \left[\left(\frac{0\pi}{kt} \right)^2 - (1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = ki \quad (\text{III. 2})$$

Vergelijking (III.2) invullen in de uitdrukking voor φ_{rs} en $\varphi_{rs}(x)$ geeft:

$$\begin{aligned} \varphi_{rs} &= \frac{1}{\mu_0 (2a) \tanh(\mu_0 L)} \\ &= \frac{1}{k(2a)i \tanh(kLi)} \\ &= \frac{1}{k(2a)i \frac{e^{kLi} - e^{-kLi}}{e^{kLi} + e^{-kLi}}} \\ &= \frac{1}{k(2a)i \frac{\cos(kL) + i \sin(kL) - (\cos(kL) - i \sin(kL))}{\cos(kL) + i \sin(kL) + (\cos(kL) - i \sin(kL))}} \\ &= \frac{1}{i^2 k(2a) \tan(kL)} = -\frac{1}{k(2a) \tan(kL)} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{rs}(x) &= \frac{\cos(\mu_0(x+L))}{\mu_0(2a)\sinh(\mu_0 L)} \\
 &= \frac{\cos(\mu_0(-L+L))}{k(2a)i\sinh(kL)} \\
 &= \frac{1}{k(2a)i \frac{e^{kLi} - e^{-kLi}}{2}} \\
 &= \frac{1}{k(2a)i \frac{\cos(kL) + i\sin(kL) - (\cos(kL) - i\sin(kL))}{2}} \\
 &= \frac{1}{i^2 k(2a)\sin(kL)} = -\frac{1}{k(2a)\sin(kL)}
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

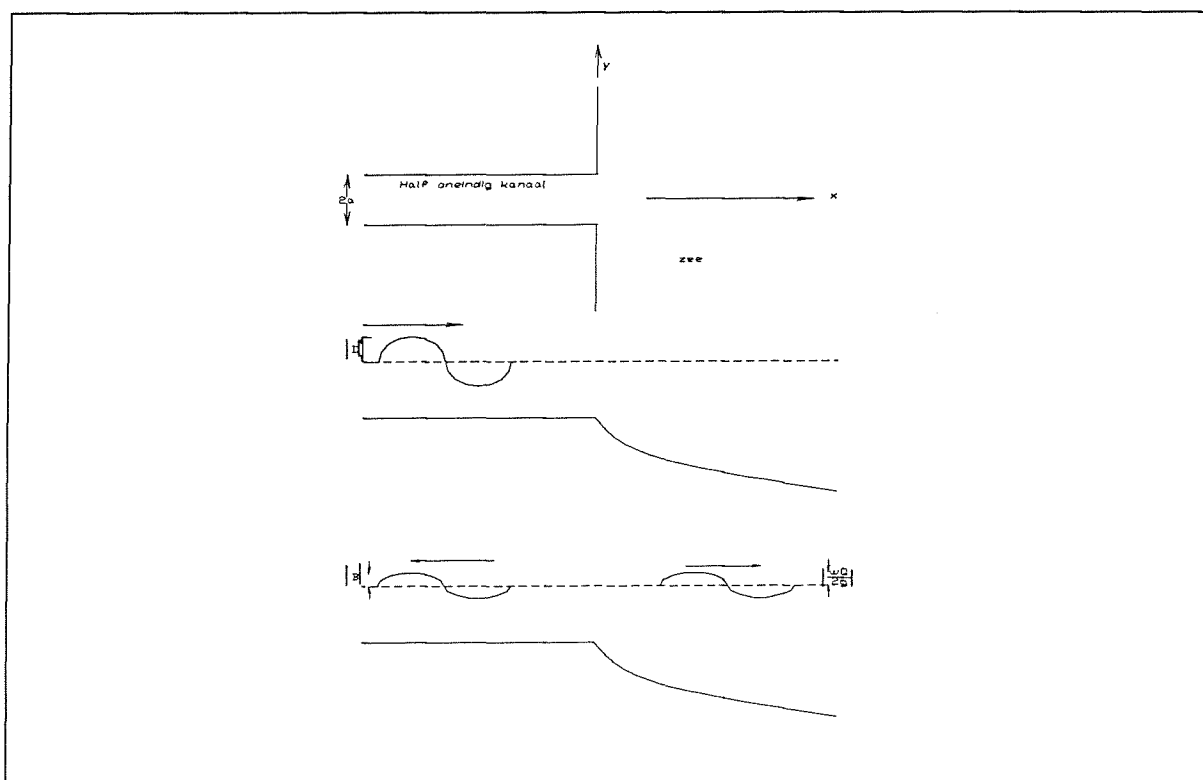
De vergelijkingen (III. 2) t/m (III.4) invullen in (III.1) en uitwerken geeft de versterkingsfactor $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned}
 \eta_r &= \frac{-\frac{1}{k(2a)\sin(kL)}}{-\frac{1}{k(2a)\tan(kL)} + \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\gamma ka}{e} \right) - \frac{1}{2}i} H_0 \\
 \mathfrak{R} &= \frac{-\frac{1}{k(2a)\sin(kL)}}{-\frac{\cos(kL)}{k(2a)\sin(kL)} + \frac{k(2a)\sin(kL)}{\pi k(2a)\sin(kL)} \left(\ln \frac{\gamma ka}{e} \right) - \frac{k(2a)\sin(kL)}{k(2a)\sin(kL)} \frac{1}{2}i} \\
 &= \frac{1}{\left| \cos(kL) + \frac{2ka}{\pi} \sin(kL) \left(\ln \frac{\gamma ka}{e} \right) - ika \sin(kL) \right|}
 \end{aligned}$$

Bijlage IV : Uitstraling van energie ter plaatse van de overgang van havenbekken naar zee; berekening van de reflectie en transmissiefactor

De reflectie- en transmissiefactor ter plaatse van de overgang van een relatief smal havenbekken naar een relatief breed zeegebied, die worden verkregen indien de Sommerfeld stralingsconditie op die overgang wordt opgelegd, zijn in deze bijlage berekend.

In deze bijlage is een berekening gemaakt voor een half oneindig kanaal dat uitmondt in zee (zie Figuur IV.1). Er is verondersteld dat er in het half oneindige kanaal een golf aanwezig is, die zich naar zee voortplant. Ter plaatse van de overgang van kanaal naar zee wordt deze golf gedeeltelijk gereflecteerde en gedeeltelijk getransmitteerd door de plotselinge verwijding.



Figuur IV.1: Half oneindig kanaal wat uitmondt in zee

In [Mei (1989)] is een seiches berekening gemaakt voor een lang en smal kanaal gekoppeld aan een half oneindig zeegebied. De Sommerfeld uitstralingsvoorwaarde is als randvoorwaarde opgelegd op de overgang van bekken naar zee.

De oplossing in het kanaal is hieronder weergegeven:

$$\eta_{\text{kanaal}} = B e^{-ikx} + D e^{ikx}$$

Met:

- B = teruggekaatste golf (zie Figuur IV.1)
- D = uitgaande golf (zie Figuur IV.1)

De oplossing in het zeegebied is hierna weergegeven:

$$\eta_{\text{zee}} = 2A \cos(kx) + \frac{\omega Q}{2g} H_0^{(1)}(k\rho)$$

Met:

A = inkomende golf

$\omega Q/2g$ = getransmitteerde golf (zie Figuur IV.1)

$H_0^{(1)}$ = Hankel functie

ρ = afstand van de havenmond tot een willekeurig punt in het zeegebied

De twee oplossingen zijn aan elkaar gekoppeld ter plaatse van de overgang van bekken naar zee. Daaruit volgen de twee hierna weergegeven vergelijkingen. Deze vergelijkingen geven de relatie tussen A , B , $\omega Q/2g$ en D .

$$ka(-B + D) = \frac{\omega Q}{2g} \quad (\text{IV.1})$$

$$2A - B - D = -\frac{\omega Q}{2g} - \frac{2i}{\pi} \frac{\omega Q}{2g} \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} \quad (\text{IV.2})$$

A , B , $\omega Q/2g$ en D zijn complexe getallen. De modulus ervan geeft de amplitude van de betreffende golven.

De vergelijkingen zijn in deze paragraaf opgelost voor een golf komende uit een half oneindig kanaal dat uitmondt in zee (zie Figuur IV.1).

Er wordt verondersteld dat de uitgaande golf (D) bekend is en dat er geen golf vanuit zee het kanaal binnenkomt ($A=0$). Op de rand wordt de uitgaande golf gedeeltelijk teruggekaatst en gedeeltelijk getransmitteerd. De teruggekaatste golf (B) en de getransmitteerde golf ($\omega Q/2g$) volgen uit de berekening.

Met $A = 0$ worden de vergelijkingen (IV.1) en (IV.2):

$$ka(-B + D) = \frac{\omega Q}{2g} \quad (\text{IV.3})$$

$$-B - D = -\frac{\omega Q}{2g} - \frac{2i}{\pi} \frac{\omega Q}{2g} \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} \quad (\text{IV.4})$$

Uit vergelijking (IV.3) volgt :

$$B = -\frac{\omega Q}{2g} \frac{1}{ka} + D \quad (\text{IV.5})$$

Vergelijking (IV.5) invullen in vergelijking (IV.4) en uitwerken geeft de getransmitteerde golf:

$$\frac{\omega Q}{2g} = \frac{2Dka}{1 + ka + \left(\frac{2ika}{\pi}\right) \left(\ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)} \quad (\text{IV.6})$$

Vergelijking (IV.6) invullen in vergelijking (IV.5) geeft tenslotte de teruggekaatste golf:

$$B = \frac{-2D}{1 + ka + \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)} + D \quad (IV.7)$$

De reflectiefactor wordt verkregen door de gereflecteerde golf ((IV.7)) te delen door de uitgaande golf (D):

$$R = \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right)}$$

De transmissiefactor wordt verkregen door de getransmitteerde golf ((IV.6)) te delen door de uitgaande golf (D):

$$T = \frac{2ka}{1 + ka + \frac{2ka}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right)}$$

De modulus van de reflectiefactor staat voor de verhouding van de amplitude van de gereflecteerde golf tot die van de uitgaande golf. De modulus van de transmissiefactor staat voor de verhouding van de amplitude van de getransmitteerde golf tot die van de uitgaande golf. Deze twee uitdrukkingen zijn hieronder weergegeven:

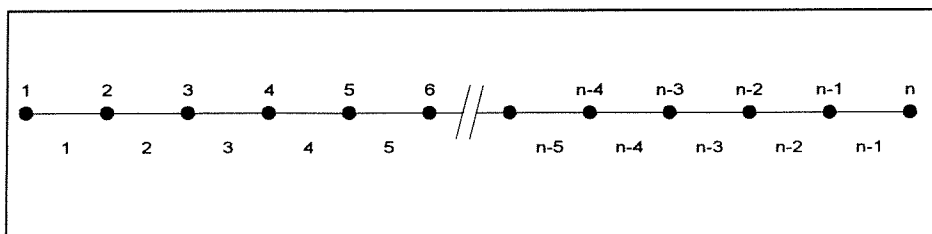
$$|R| = \frac{\sqrt{(-1 + ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)^2}}{\sqrt{(1 + ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)^2}}$$

$$|T| = \frac{2ka}{\sqrt{(1 + ka)^2 + \left(\frac{2ka}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)^2}}$$

Bijlage V : Ééndimensionaal waterbewegingsprogramma voor een langgerekte bak; beschrijving en listing

Programma structuur diagram van het hoofdprogramma

In het programma wordt een netwerk van vakken verbonden met knooppunten gedefinieerd (zie Figuur V.1). Elk vak heeft een constant, in het programma bepaald, dwarsprofiel.



Figuur V.1: Netwerk van vakken verbonden door knooppunten

Het geschreven programma berekent in de tijd de snelheid en de waterstand op elk knooppunt. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de ééndimensionale lange golf vergelijkingen. De berekende waterstanden en snelheden worden opgeslagen in matrices van de volgende vorm:

$$\begin{bmatrix}
 A_1^0 & A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & A_1^4 & A_1^5 & \dots & \dots & \dots & A_1^{T-3} & A_1^{T-2} & A_1^{T-1} & A_1^T \\
 A_2^0 & A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & A_2^4 & A_2^5 & \dots & \dots & \dots & A_2^{T-3} & A_2^{T-2} & A_2^{T-1} & A_2^T \\
 A_3^0 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & A_3^4 & A_3^5 & \dots & \dots & \dots & A_3^{T-3} & A_3^{T-2} & A_3^{T-1} & A_3^T \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 A_N^0 & A_N^1 & A_N^2 & A_N^3 & A_N^4 & A_N^5 & \dots & \dots & \dots & A_N^{T-3} & A_N^{T-2} & A_N^{T-1} & A_N^T
 \end{bmatrix}$$

Met:

$$A_{\text{knooppunt}}^{\text{tijdstap}} = \text{snelheid of waterstand op knooppunt (knooppunt) en op tijdstap (tijdstap)}$$

Het structuurdiagram van het hoofdprogramma is hierna weergegeven.

subroutine eigenschappen

(In deze subroutine wordt het volgende bepaald:

- de afmetingen (lengte, breedte, diepte) van het bekken.
- de eigenschappen van het rekenproces (tijdstap (dt), lengtestap (dx), theta, het aantal tijdstappen en het aantal knooppunten).)

subroutine begincondities

(In deze subroutine worden beginwaarden vastgesteld voor de snelheid en de waterstand op alle knooppunten.)

subroutine random

(In deze subroutine wordt een random fase berekend.)

n = 0 tot T

subroutine randcondities

(In deze subroutine worden de randvoorwaarden bepaald.)

subroutine stelsel

(In deze subroutine wordt een pentadiagonaal stelsel opgesteld en gereduceerd tot een tridiagonaal stelsel.)

subroutine sweep

(In deze subroutine wordt het tridiagonale stelsel opgelost. Hieruit volgen waterstanden en snelheden op alle knooppunten in het netwerk.)

subroutine fourier

(In deze subroutine wordt een Fourieranalyse uitgevoerd voor de waterstandsvariatie op begin- en eindknooppunt. Het resultaat ervan zijn amplitudes en fases als functie van de frequentie.)

Theoretische achtergrond

Het programma is gebaseerd op een numerieke benadering van de ééndimensionale partiële differentiaalvergelijkingen (zie [Verspuy (1987)]), die worden gebruikt voor het beschrijven van niet-stationaire stroming in open watersystemen:

bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{|u|u}{C^2 R} = 0$$

continuïteitsvergelijking:

$$B \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial uA}{\partial x} = 0$$

In het programma zijn de wrijvingsterm en de advectieve traagheidsterm verwaarloosd. Verder wordt aangenomen dat de diepte constant is, waardoor in plaats van de bodem, de gemiddelde diepte als referentieniveau gebruikt kan worden. De ééndimensionale partiële differentiaalvergelijkingen, die in het programma worden gebruikt, zijn hieronder weergegeven:

bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.1})$$

continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.2})$$

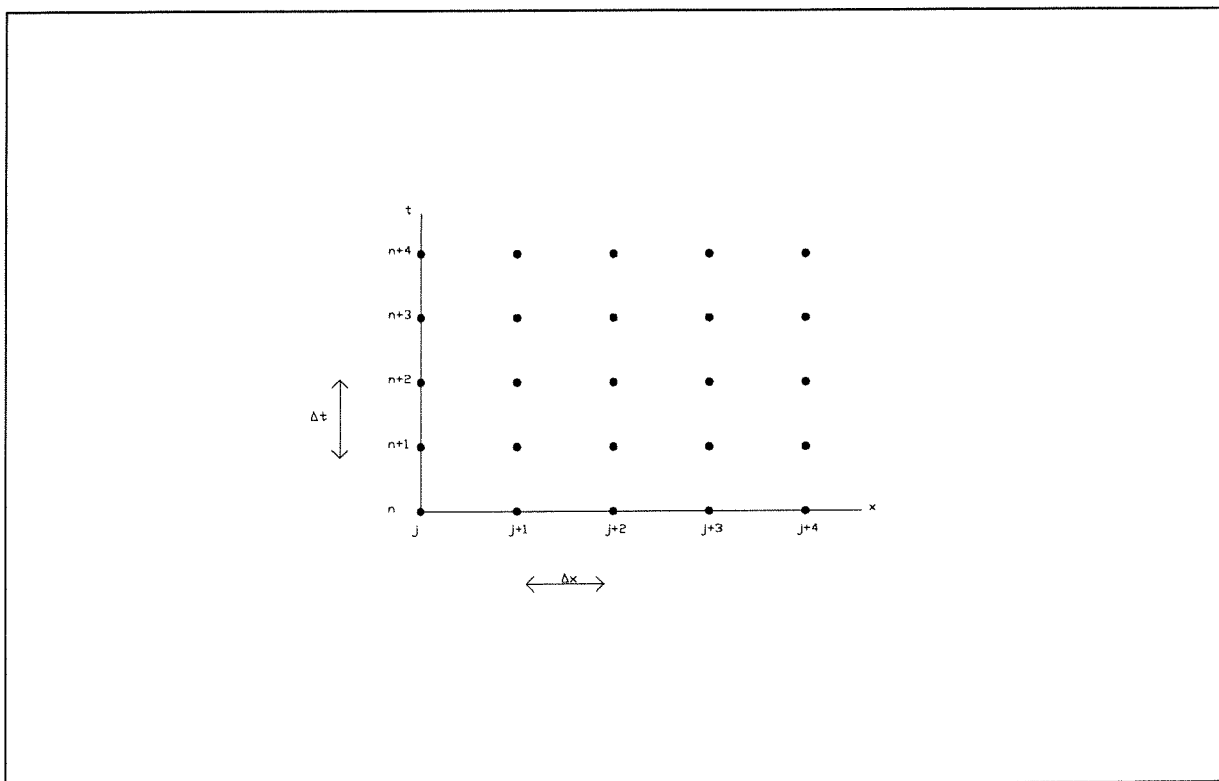
Met:

H = gemiddelde diepte (referentieniveau)

ζ = waterstand ten opzichte van het referentieniveau

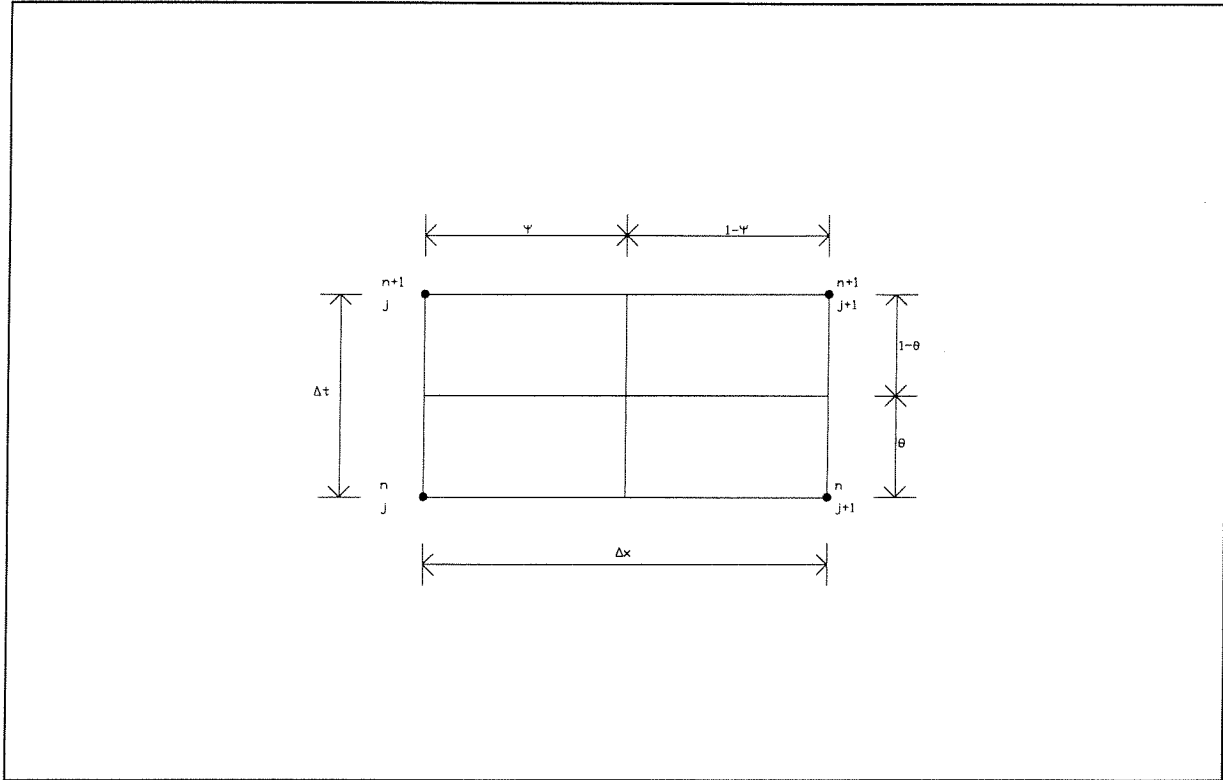
Numerieke discretisatie

Het continue domein waarvoor de partiële differentiaalvergelijkingen zijn gedefinieerd wordt weergegeven met behulp van het rooster afgebeeld in Figuur V.2. De afstand tussen twee opeenvolgende roosterpunten in x-richting wordt Δx genoemd en in de tijd Δt . In ieder roosterpunt (j,n) worden de waterstand en de snelheid berekend.



Figuur V.2: Rooster

De partiële differentiaalvergelijkingen worden gediscretiseerd met behulp van het impliciete Preissmann schema (zie [Stelling, Booij (1994)], [Abbott, Basco (1989)]). Dit schema is weergegeven in Figuur V.3.



Figuur V.3: Preissmann schema, weergegeven voor $\psi=1/2$ en $\theta=1/2$

De numerieke benadering van de partiële differentiaalvergelijkingen verkregen met behulp van het Preissmann schema is hieronder weergegeven.

bewegingsvergelijking:

$$(1-\psi) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + g \left\{ (1-\theta) \frac{\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{\zeta_{j+1}^{n+1} - \zeta_j^{n+1}}{\Delta x} \right\} = 0$$

continuïteitsvergelijking:

$$(1-\psi) \frac{\zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{\zeta_{j+1}^{n+1} - \zeta_{j+1}^n}{\Delta t} + H \left\{ (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right\} = 0$$

Er is voor gekozen om in de berekeningen standaard $\psi=1/2$ te gebruiken. De gediscretiseerde vergelijkingen reduceren hierdoor tot:

bewegingsvergelijking:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{2\Delta t} + g \left\{ (1-\theta) \frac{\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{\zeta_{j+1}^{n+1} - \zeta_j^{n+1}}{\Delta x} \right\} = 0 \quad (V.3)$$

continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n}{2\Delta t} + \frac{\zeta_{j+1}^{n+1} - \zeta_{j+1}^n}{2\Delta t} + H \left\{ (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right\} = 0 \quad (V.4)$$

De vergelijkingen (V.3) en (V.4) worden nu zodanig herschreven dat de waterstanden en de snelheden op het tijdniveau $n+1$ aan de linkerkant en de waterstanden en snelheden op het tijdniveau n aan de rechterkant van de vergelijking staan.

bewegingsvergelijking:

$$\begin{aligned} & -\frac{g\theta}{\Delta x} \zeta_j^{n+1} + \frac{1}{2\Delta t} u_j^{n+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} \zeta_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta t} u_{j+1}^{n+1} = \\ & \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} \zeta_j^n + \frac{1}{2\Delta t} u_j^n - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} \zeta_{j+1}^n + \frac{1}{2\Delta t} u_{j+1}^n \\ \Rightarrow & a1 \zeta_j^{n+1} + b1 u_j^{n+1} + c1 \zeta_{j+1}^{n+1} + d1 u_{j+1}^{n+1} = e1 \end{aligned} \quad (V.5)$$

Met:

$$\begin{aligned} a1 &= -\frac{g\theta}{\Delta x} \\ b1 &= \frac{1}{2\Delta t} \\ c1 &= \frac{g\theta}{\Delta x} \\ d1 &= \frac{1}{2\Delta t} \\ e1 &= \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} \zeta_j^n + \frac{1}{2\Delta t} u_j^n - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} \zeta_{j+1}^n + \frac{1}{2\Delta t} u_{j+1}^n \end{aligned}$$

continuïteitsvergelijking:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \zeta_j^{n+1} - \frac{H\theta}{\Delta x} u_j^{n+1} + \frac{1}{2\Delta t} \zeta_{j+1}^{n+1} + \frac{H\theta}{\Delta x} u_{j+1}^{n+1} = \\ & \frac{1}{2\Delta t} \zeta_j^n + \frac{H(1-\theta)}{\Delta x} u_j^n + \frac{1}{2\Delta t} \zeta_{j+1}^n - \frac{H(1-\theta)}{\Delta x} u_{j+1}^n \\ \Rightarrow & a2 \zeta_j^{n+1} + b2 u_j^{n+1} + c2 \zeta_{j+1}^{n+1} + d2 u_{j+1}^{n+1} = e2 \end{aligned} \quad (V.6)$$

Met:

$$a2 = \frac{1}{2\Delta t}$$

$$b2 = -\frac{H\theta}{\Delta x}$$

$$c2 = \frac{1}{2\Delta t}$$

$$d2 = \frac{H\theta}{\Delta x}$$

$$e2 = \frac{1}{2\Delta t} \zeta_j^n + \frac{H(1-\theta)}{\Delta x} u_j^n + \frac{1}{2\Delta t} \zeta_{j+1}^n - \frac{H(1-\theta)}{\Delta x} u_{j+1}^n$$

Oplossingsmethode

In elk vak zijn twee vergelijkingen beschikbaar: de gediscretiseerde bewegingsvergelijking ((V.5)) en de gediscretiseerde continuïteitsvergelijking ((V.6)). Het aantal onbekenden in een geschematiseerd netwerk is gelijk aan $(2 \cdot (\text{aantal knooppunten}))$. Het aantal knooppunten is gelijk aan $(\text{aantal vakken}) + 1$. Hieruit volgt dat er $(2 \cdot (\text{aantal vakken}) + 2)$ vergelijkingen moeten zijn voor het oplossen van de onbekenden. Het systeem moet dus worden aangevuld met randvoorwaarden op begin- en eindknooppunt van het netwerk. Voor de definitie van de randvoorwaarden op begin- en eindknooppunt wordt verwezen naar de volgende paragraaf.

De vergelijkingen vormen een pentadiagonaal stelsel. Dit stelsel is hierna weergegeven.

randvoorwaarde op knooppunt 1	$b(0) \quad c(0)$	$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} E_1 \\ e1(1) \end{bmatrix}$
bewegingsvergelijking in vak 1	$a1(1) \quad b1(1) \quad c1(1) \quad d1(1)$	$\begin{bmatrix} \zeta_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e1(1) \\ e2(1) \end{bmatrix}$
continuïteitsvergelijking in vak 1	$a2(1) \quad b2(1) \quad c2(1) \quad d2(1)$	$\begin{bmatrix} \zeta_3 \\ u_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e1(2) \\ e2(2) \end{bmatrix}$
bewegingsvergelijking in vak 2	$a1(2) \quad b1(2) \quad c1(2) \quad d1(2)$	$\vdots$	$\vdots$
continuïteitsvergelijking in vak 2	$a2(2) \quad b2(2) \quad c2(2) \quad d2(2)$	$\vdots$	$\vdots$
enz.	$\ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots$	$\vdots$	$\vdots$
randvoorwaarde op knooppunt (N+1)	$c(M) \quad d(M)$	$\begin{bmatrix} \zeta_{N+1} \\ u_{N+1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} E_{N+1} \end{bmatrix}$

De verkregen pentadiagonale matrix wordt gereduceerd tot een tridiagonale matrix. Dit wordt gedaan met de eliminatiemethode van Gauss. Het volgende stelsel wordt dan verkregen:

$$\begin{bmatrix}
 b(0) & c(0) & & & \\
 a(1) & b(1) & c(1) & & \\
 & a(2) & b(2) & c(2) & \\
 & & a(3) & b(3) & c(3) \\
 & & & a(4) & b(4) & c(4) \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & & a(M) & b(M)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \zeta_1 \\
 u_1 \\
 \zeta_2 \\
 u_2 \\
 \zeta_3 \\
 u_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \zeta_{N+1} \\
 u_{N+1}
 \end{bmatrix}^{n+1}
 =
 \begin{bmatrix}
 d(0) \\
 d(1) \\
 d(2) \\
 d(3) \\
 d(4) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 d(M)
 \end{bmatrix}
 \quad (V.7)$$

of: $A\underline{x} = \underline{d}$

Met:

N = totaal aantal vakken
 M = $2*N+1$
 $a(1)$ = $a1(1)$
 $b(1)$ = $b1(1) - a(2)*(d1(1)/c(2))$
 $c(1)$ = $c1(1) - b(2)*(d1(1)/c(2))$
 $d(1)$ = $e1(1) - d(2)*(d1(1)/c(2))$
 $a(2)$ = $b2(1) - b1(1)*(a2(1)/a1(1))$
 $b(2)$ = $c2(1) - c1(1)*(a2(1)/a1(1))$
 $c(2)$ = $d2(1) - d1(1)*(a2(1)/a1(1))$
 $d(2)$ = $e2(1) - e1(1)*(a2(1)/a1(1))$
 enz.

In de procedure **stelsel** worden eerst voor elk vak de parameters $a1$ t/m $e1$ en $a2$ t/m $e2$ uit de vergelijkingen (V.5) en (V.6) berekend. Hierna worden de elementen uit het stelsel (V.7) bepaald. De elementen in de hoofddiagonaal, subdiagonaal en superdiagonaal worden respectievelijk opgeslagen in de vectoren $\underline{b}$, $\underline{a}$ en $\underline{c}$. Het rechterlid wordt opgeslagen in de vector $\underline{d}$.

De tridiagonale matrix (A) wordt hierna, met behulp van de LU decompositie, herschreven als product van twee matrices: een onderdriehoeksmatrix (L) en een bovendriehoeksmatrix (U), zodanig dat $L^{\circ}U=A$.

Het stelsel (V.7) kan dan als volgt worden herschreven:

$$A\underline{x} = \underline{d} \Leftrightarrow (L^{\circ}U)\underline{x} = \underline{d} \Leftrightarrow L^{\circ}U\underline{x} = \underline{d} \Leftrightarrow L\underline{z} = \underline{d}$$

Uit $L\underline{z} = \underline{d}$ volgen de vectorelementen z_1 t/m z_n . Hierna worden de waterstanden en snelheden (vectorelementen x_1 t/m x_n) berekend met $U\underline{x} = \underline{z}$.

In de procedure **sweep** wordt het tridiagonale stelsel opgelost. De tridiagonale matrix wordt ontbonden in een onderdriehoeksmatrix en een bovendriehoeksmatrix. De elementen van de hoofddiagonaal en subdiagonaal van de onderdriehoeksmatrix worden opgeslagen in de vectoren Ohoofd en Osub. De elementen van de superdiagonaal van de bovendriehoeksmatrix worden opgeslagen in de vector Bsuper.

De twee procedures (stelsel en sweep), die in deze paragraaf zijn beschreven, worden voor elke tijdstap t opnieuw uitgevoerd. Als resultaat worden de waterstanden en snelheden op alle knooppunten voor tijdstap t gevonden

Randvoorwaarden

In de procedure **randcondities** worden de randvoorwaarden bepaald. Voor het opleggen van de randvoorwaarde op het beginknooppunt zijn drie mogelijkheden. Deze drie mogelijke randvoorwaarden worden in deze paragraaf toegelicht.

Rand 1: Waterstandsrand

In geval van een waterstandsrand wordt op het beginknooppunt een waterstandsvariatie opgelegd. In het programma is dit als volgt weergegeven:

$$b(0)\zeta_1^{n+1} + c(0)u_1^{n+1} = d(0)$$

Met:

$$b(0) = 1$$

$$c(0) = 0$$

$$d(0) = \sum_{n=1}^N (\text{amp}) \cos(2\pi f_n t + \varphi)$$

f_n = frequentie

φ = random fasehoek

(amp) = amplitude

Rand 2: Riemannrand

Op het beginknooppunt wordt de ingaande Riemann invariant $(u + (g/H)^{1/2}\zeta)$ opgelegd. De ingaande Riemann invariant wordt gelijkgesteld aan een som van cosinussen met random fase.

$$b(0)\zeta_1^{n+1} + c(0)u_1^{n+1} = d(0)$$

Met:

$$b(0) = \sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$c(0) = 1$$

$$d(0) = \sqrt{\frac{g}{H}} \sum_{n=1}^N (\text{amp}) \cos(2\pi f_n t + \varphi)$$

f_n = frequentie

φ = random fasehoek

g = zwaartekrachtsversnelling

H = gemiddelde diepte

(amp) = amplitude

Rand 3: Combinatie van rand 1 en rand 2, ε -rand

Op het beginknooppunt wordt het volgende opgelegd:

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}} \sum_{n=1}^N \left(\cos(2\pi f_n t) - \varepsilon (2\pi f_n) \sin(2\pi f_n t) \right)$$

Met:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2}{gHka \left[1 - 2(ka) + (ka)^2 + \frac{4(ka)^2}{\pi^2} \ln^2 \left(\frac{2\gamma(ka)}{\pi e} \right) \right]}}$$

2a	= breedte van het bekken
g	= zwaartekrachtsversnelling
H	= diepte
γ	= constante van Euler
e	= grondtal natuurlijk logaritme
k	= golfgetal = $2\pi/\lambda$
λ	= golflengte
ζ	= waterstand op tijdstip t
$u+(g/H)^{1/2}\zeta$	= ingaande Riemann invariant op tijdstip t
f_n	= frequentie

Het linkerlid is als volgt gediscretiseerd:

$$\sqrt{\frac{g}{H}} \zeta_1^{n+1} + \varepsilon \frac{\left(u_1^{n+1} + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta_1^{n+1} \right) - \left(u_1^n + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta_1^n \right)}{\Delta t}$$

In het programma is deze randvoorwaarde als volgt weergegeven:

$$b(0)\zeta_1^{n+1} + c(0)u_1^{n+1} = d(0)$$

Met:

$$b(0) = \sqrt{\frac{g}{H}} + \varepsilon \frac{\sqrt{\frac{g}{H}}}{\Delta t}$$

$$c(0) = \frac{\varepsilon}{\Delta t}$$

$$d(0) = \varepsilon \frac{\sqrt{\frac{g}{H}}}{\Delta t} \zeta_1^n + \frac{\varepsilon}{\Delta t} u_1^n + \sqrt{\frac{g}{H}} (\text{amp}) \sum_{n=1}^N [\cos(2\pi f_n t) - \varepsilon(2\pi f_n) z \sin(2\pi f_n t)]$$

Omdat het een afgesloten bak betreft, is het debiet op het eindknooppunt gelijkgesteld aan nul. In het programma is deze randvoorwaarde als volgt weergegeven:

$$b(M)\zeta_{\text{eindknooppunt}}^{n+1} + c(M)u_{\text{eindknooppunt}}^{n+1} = d(M)$$

Met:

$$b(M) = 0$$

$$c(M) = 1$$

$$d(M) = 0$$

Random generatie van fase

Voor het berekenen van een random fase is een standaard procedure uit het boek "Numerical Recipes" gebruikt. Deze procedure genereert getallen waarvan de cijfers achter de komma random zijn.

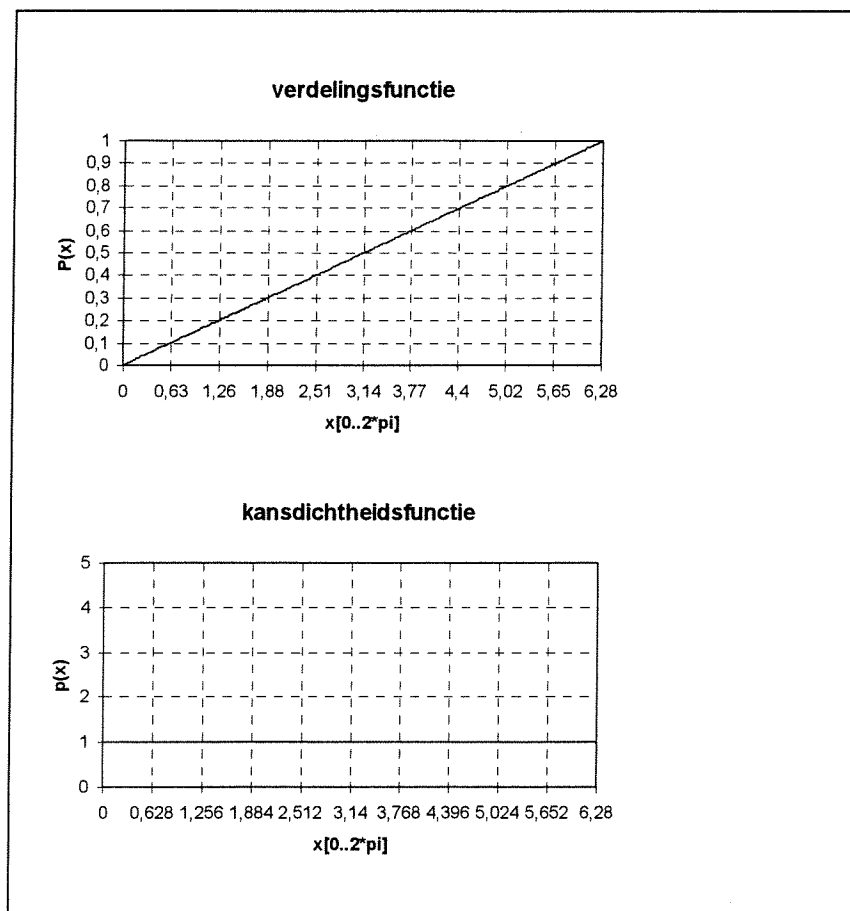
Hieronder zijn 5 getallen weergegeven, die door de functie RAN1(IDUM) worden gegenereerd:

$0.518467762513836 \cdot 10^{-314}$
 $0.522782350349348 \cdot 10^{-314}$
 $0.519313757542063 \cdot 10^{-314}$
 $0.508926064887240 \cdot 10^{-314}$
 $0.524268698920494 \cdot 10^{-314}$

Door de procedure **random** worden de weergegeven getallen bewerkt met als resultaat getallen tussen 0 en 1 met een uniforme verdeling. De door de procedure uitgevoerde berekening is hieronder weergegeven:

phi		phi1		phi3		phi4
$0.518467762513836 \cdot 10^{-314}$		518.467762513836		518		0.467762513836
$0.522782350349348 \cdot 10^{-314}$	$\cdot 10^{317}$	522.782350349348	int(phi1)	522	phi1-phi3	0.782350349348
$0.519313757542063 \cdot 10^{-314}$	$\Rightarrow$	519.313757542063	$\Rightarrow$	519	$\Rightarrow$	0.313757542063
$0.508926064887240 \cdot 10^{-314}$		508.926064887240		508		0.926064887240
$0.524268698920494 \cdot 10^{-314}$		524.268698920494		524		0.268698920494

De getallen phi4 worden vervolgens vermenigvuldigd met $2 \cdot \pi$ en opgeslagen in de vector fase. De verdelingsfunctie en kansdichtheidsfunctie van de op deze manier verkregen random fase zijn weergegeven in Figuur V.4.



Figuur V.4

Fourieranalyse

In het programma wordt de waterstandsvariatie op een aantal knooppunten fouriergeanalyseerd. Als resultaat van de Fourieranalyse worden amplitudes en fases gevonden als functie van de frequentie.

De berekende waterstandsvariatiën kunnen worden weergegeven als een som van sinussen met verschillende frequenties en random fase:

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(2\pi f_n t - \alpha_n) \quad (\text{V.8})$$

Met:

$\zeta(t)$ = berekende waterstand als functie van de tijd
 a_n = amplitude
 f_n = frequentie
 α_n = fase

De frequentie wordt als volgt berekend:

$$f_1 = \frac{1}{\text{rekentijd}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{\Delta t(\text{aantal tijdstappen})} \quad (= \text{oplossend vermogen})$$

$$f_n = n f_1 = \frac{n}{T}$$

$$f_N = f_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{\text{aantal tijdstappen}}{2T} = \frac{\text{aantal tijdstappen}}{2} f_1$$

(V.8) is als volgt te schrijven:

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(2\pi f_n t) + B_n \sin(2\pi f_n t)$$

Met:

$$A_n = \frac{2}{T} \int \zeta(t) \cos(2\pi f_n t) dt \quad (V.9)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int \zeta(t) \sin(2\pi f_n t) dt \quad (V.10)$$

De amplitudes (a_n) en fases (α_n) van de verschillende componenten zijn vervolgens als volgt te berekenen:

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\tan \alpha_n = \frac{B_n}{A_n}$$

De procedure **fourier** voert de fourieranalyse uit voor de waterstandsvariatie op begin- en eindknooppunt. Het resultaat ervan zijn amplitudes en fases als functie van de frequentie. A_n en B_n worden berekend in de procedures **deltaAcomp** en **deltaBcomp**. De integralen (V.9) en (V.10) worden in deze procedures als volgt berekend:

$$A_n = \sum_{j=0}^{(\text{max imaal aantal tijdstappen})/2} \frac{2}{T} \left(\frac{\zeta(j) \cos(2\pi f_n t(j)) + \zeta(j+1) \cos(2\pi f_n t(j+1))}{2} \right) = \sum_{j=0}^{(\text{max imaal aantal tijdstappen})/2} A_{\text{comp}}(j)$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{(\text{max imaal aantal tijdstappen})/2} \frac{2}{T} \left(\frac{\zeta(j) \sin(2\pi f_n t(j)) + \zeta(j+1) \sin(2\pi f_n t(j+1))}{2} \right) = \sum_{j=0}^{(\text{max imaal aantal tijdstappen})/2} B_{\text{comp}}(j)$$

Listing van het programma

program randvoorwaarde

```
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension a(0:(2*max1-1)), b(0:(2*max1-1)), c(0:(2*max1-1)),
* d(0:(2*max1-1)), Ohoofd(0:(2*max1-1)), Osub(0:(2*max1-1)),
* Bsuper(0:(2*max1-1)), z(0:(2*max1-1)),
* x(0:(2*max1-1)), zeta(max1,0:max2), u(max1,0:max2),
* AcompN(0:max2), Acomp1(0:max2), BcompN(0:max2),
* Bcomp1(0:max2), amplN(0:max2), ampl1(0:max2),
* faseN(0:max2), fase1(0:max2), amplificatie(0:max2),
* fase(max2)
```

c Hoofdprogramma

```
call eigenschappen (diepte, baklengte, dx, dt, theta,
* maxtijd, maxknoop, breedte)
call begincondities (j, maxknoop, zeta, u, diepte)
call random (fase, maxtijd)
do n=0, (maxtijd-1)
    call randcondities (maxknoop, a, b, c, d, n, baklengte,
*                      diepte, dt, maxtijd, fase, u, zeta, breedte)
    call stelsel (maxknoop, dt, theta, dx, diepte, a, b, c, d, u, zeta, n)
    call sweep (maxknoop, n, Ohoofd, Osub, Bsuper, a, b, c, d, x, z,
*              u, zeta, diepte)
end do
c do n=0, (maxtijd-1)
c   write (*, *) zeta(1, n), zeta(maxknoop, n)
c end do
call fourier (maxtijd, amplN, ampl1, AcompN, Acomp1, dt, BcompN, Bcomp1,
*            maxknoop, zeta, faseN, fase1, amplificatie, diepte,
*            baklengte)
write (*, '(" einde programma")')
end
```

c Subroutine eigenschappen

c In deze subroutine worden de afmetingen (diepte, lengte, breedte) van de in de berekening gebruikte bak
c en de eigenschappen (tijdstap (dt), lengtestap (dx), theta, het aantal tijdstappen (maxtijd) en het aantal
c knooppunten (maxknoop)) van het rekenproces bepaald.

```
subroutine eigenschappen (diepte, baklengte, dx, dt, theta,
* maxtijd, maxknoop, breedte)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
diepte = 2
baklengte = 160
breedte = 8
c dx = 8
dx = 4
c dt = 1.8
dt = 0.9
```

```

theta = 0.5
maxtijd = 10000
maxknoop = (baklengte/dx) + 1
return
end

```

c Subroutine begincondities

c In deze subroutine worden beginwaarden vastgesteld voor de waterstand ten opzichte van het referentieniveau c (zeta) en de snelheid (u) op alle knooppunten.

```

subroutine begincondities (j,maxknoop,zeta,u,diepte)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension zeta(max1,0:max2),u(max1,0:max2)
do j= 1,maxknoop
  zeta(j,0) = 0
  u(j,0) = 0
end do
return
end

```

c Subroutine random

c In deze subroutine wordt een random fase berekend en opgeslagen in de vector fase.

```

subroutine random (fase,maxtijd)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension fase(max2)
pi = 4*atan(1)
do j=1,(maxtijd/2)
  phi=ran1(jdum)
  phi1=(phi*(10E+30)*(10E+30)*(10E+30)*(10E+30)*(10E+30)*(10E+30)*
* (10E+30)*(10E+30)*(10E+30)*(10E+30)*(10000))
  phi2=1000*phi1
  phi3= int(phi2)
  phi4=phi2-phi3
  fase(j)=((-1)**j)*phi4*(4.3*pi)
end do
return
end

```

c Subroutine randcondities

c In deze subroutine worden de randvoorwaarden bepaald. Voor het opleggen van de randvoorwaarde op het c beginknooppunt zijn 3 mogelijkheden (waterstandrand, Riemannrand, ε-rand).

```

subroutine randcondities (maxknoop,a,b,c,d,n,baklengte,diepte,dt,
* maxtijd,fase,u,zeta,breedte)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension a(0:(2*max1-1)),b(0:(2*max1-1)),c(0:(2*max1-1)),
* d(0:(2*max1-1)),fase(max2), u(max1,0:max2),zeta(max1,0:max2),

```

```

pi = 4*atan(1)
fn=1/(dt*maxtijd)
d(0) = 0
c do j=1,(maxtijd/2)
c   d(0) = d(0)+amp*cos(2*pi*(n+1)*dt*(j*fn)+fase(j))
c   d(0) = d(0)+amp*cos(2*pi*(n+1)*dt*(j*fn))
c end do
c waterstandsrand
c a(0) = 0
c b(0) = 1
c c(0) = 0
c riemannrand
c a(0) = 0
c b(0) = sqrt(g/diepte)
c c(0) = 1
randdebiet = 0
a(2*maxknoop-1) = 0
b(2*maxknoop-1) = 1
c(2*maxknoop-1) = 0
d(2*maxknoop-1) = randdebiet
c epsilon-rand

gka = pi/(20)
epsteller = (0.5*breedte)**2
epsnoemer = (g**2)*gka*(1-2*gka+(gka**2)+((4*(gka**2))/(pi**2))*
* ((log(2*0.577*gka/(pi*2.7)))**2))
epsilon = sqrt(g/diepte)*sqrt(epsteller/epsnoemer)

d(0) = 0
do j=1,(maxtijd/2)

d(0) = d(0) + sqrt(g/diepte)*(amp)*(cos(2*pi*(n+1)*dt*j*fn)-
* epsilon*(2*pi*j*fn)*sin(2*pi*(n+1)*dt*j*fn))

end do

a(0) = 0
b(0) = sqrt(g/diepte)+epsilon*(sqrt(g/diepte))/dt
c(0) = epsilon/(dt)
d(0) = d(0)+
* ((epsilon*(sqrt(g/diepte)*zeta(1,n))/dt)+
* (epsilon/(dt))*u(1,n))

return
end

```

c Subroutine stelsel

c In elk vak zijn twee vergelijkingen beschikbaar:

c - de gediscretiseerde bewegingsvergelijking:

$$c \quad a1*zeta(j,n+1) + b1*u(j,n+1) + c1*zeta(j+1,n+1) + d1*u(j+1,n+1) = e1$$

c - de gediscretiseerde continuïteitsvergelijking:

$$c \quad a2*zeta(j,n+1) + b2*u(j,n+1) + c2*zeta(j+1,n+1) + d2*u(j+1,n+1) = e2$$

c

c In de subroutine stelsel worden voor elk vak de parameters a1 t/m e1 en a2 t/m e2 uit de gediscretiseerde c vergelijkingen berekend. Deze parameters vormen samen met de randvoorwaarden een pentadiagonaal c stelsel. Dit pentadiagonale stelsel wordt in deze subroutine gereduceerd tot een tridiagonaal stelsel.

```

subroutine stelsel (maxknoop,dt,theta,dx,diepte,a,b,c,d,u,zeta,n)
  implicit double precision (a-h,o-z)
  parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
  dimension a(0:(2*max1-1)),b(0:(2*max1-1)),c(0:(2*max1-1)),
  * d(0:(2*max1-1)),zeta(max1,0:max2),u(max1,0:max2)

  do j=1,(maxknoop-1)
    a1 = -(g*theta)/dx
    b1 = 1/(2*dt)
    c1 = -a1
    d1 = 1/(2*dt)
    a2 = 1/(2*dt)
    b2 = -diepte*theta/dx
    c2 = a2
    d2 = -b2
    e1 = (1/(2*dt))*(u(j,n)+u(j+1,n))+
  * ((g*(1-theta))/dx)*(zeta(j,n)-zeta(j+1,n))
    e2 = (1/(2*dt))*(zeta(j,n)+zeta(j+1,n))+
  * (diepte*(1-theta)/dx)*(-u(j+1,n)+u(j,n))
    a(2*j) = b2-b1*(a2/a1)
    b(2*j) = c2-c1*(a2/a1)
    c(2*j) = d2-d1*(a2/a1)
    d(2*j) = e2-e1*(a2/a1)
    a(2*j-1) = a1
    b(2*j-1) = b1-a(2*j)*(d1/c(2*j))
    c(2*j-1) = c1-b(2*j)*(d1/c(2*j))
    d(2*j-1) = e1-d(2*j)*(d1/c(2*j))
  end do
  return
end

```

c Subroutine sweep

c In deze subroutine wordt het tridiagonale stelsel opgelost. De tridiagonale matrix wordt ontbonden in een c onderdriehoeksmatrix en een bovendriehoeksmatrix. De elementen van de hoofddiagonaal en subdiagonaal c van de onderdriehoeksmatrix worden opgeslagen in de vectoren Ohoofd en Osub. De elementen van de c superdiagonaal van de bovendriehoeksmatrix worden opgeslagen in de vector Bsuper.

c

c Als resultaat worden de waterstanden (zeta) en snelheden (u) op alle knooppunten voor tijdstap t gevonden.

```

subroutine sweep (maxknoop,n,Ohoofd,Osub,Bsuper,a,b,c,d,x,z,
  * u,zeta,diepte)
  implicit double precision (a-h,o-z)
  parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
  dimension a(0:(2*max1-1)),b(0:(2*max1-1)),c(0:(2*max1-1)),
  * d(0:(2*max1-1)),Ohoofd(0:(2*max1-1)),Osub(0:(2*max1-1)),
  * Bsuper(0:(2*max1-1)),z(0:(2*max1-1)),
  * x(0:(2*max1-1)),zeta(max1,0:max2),u(max1,0:max2)
  Ohoofd(0) = b(0)

```

```

Osub(0) = 0
Bsuper(0) = c(0)/Ohoofd(0)
do j= 1,(2*maxknoop-2)
  Osub(j) = a(j)
  Ohoofd(j) = b(j) - Osub(j)*Bsuper(j-1)
  Bsuper(j) = c(j)/Ohoofd(j)
end do
Osub(2*maxknoop-1) = a(2*maxknoop-1)
Ohoofd(2*maxknoop-1) = b(2*maxknoop-1)-
*      Osub(2*maxknoop-1)*Bsuper(2*maxknoop-2)
Bsuper(2*maxknoop-1) = 0
z(0) = d(0)/Ohoofd(0)
do j = 1,(2*maxknoop-1)
  z(j) = (d(j)-Osub(j)*z(j-1))/Ohoofd(j)
end do
x(2*maxknoop-1) = z(2*maxknoop-1)
do j = (2*maxknoop-2),0,-1
  x(j) = z(j) - Bsuper(j)*x(j+1)
end do
do j= 1,maxknoop
  zeta(j,n+1) = x(2*j-2)
  u(j,n+1) = x(2*j-1)
end do
return
end

```

c Subroutine fourier

c In deze subroutine wordt de fourieranalyse uitgevoerd voor de waterstandsvariatie op begin- en c eindknooppunt. Het resultaat ervan zijn amplitudes en fases als functie van de frequentie.

```

subroutine fourier (maxtijd,amplN,ampl1,AcompN,Acomp1,dt,BcompN,
*      Bcomp1,maxknoop,zeta,faseN,fase1,amplificatie,
*      diepte,baklengte)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension AcompN(0:max2),Acomp1(0:max2),BcompN(0:max2),
* Bcomp1(0:max2),amplN(0:max2),ampl1(0:max2),
* faseN(0:max2),fase1(0:max2),zeta(max1,0:max2),
* amplificatie(0:max2)

pi = 4*atan(1)
do j=0,max2
  Acomp1(j)=0
  Bcomp1(j)=0
  AcompN(j)=0
  BcompN(j)=0
end do
do i = 0,(maxtijd-1)
  do j = 0,(maxtijd/2)
    call deltaAcomp (maxtijd,maxknoop,i,j,pi,zeta,dt,
*      AcompN,Acomp1)
  end do
  do j = 0,(maxtijd/2)
    call deltaBcomp (maxtijd,maxknoop,i,j,pi,zeta,dt,
*      BcompN,Bcomp1)
  end do
end do

```

```

end do
do j = 0,(maxtijd/2)
  fn=j/(dt*maxtijd)
  amplN(j) = sqrt(AcompN(j)**2+BcompN(j)**2)
  ampl1(j) = sqrt(Acomp1(j)**2+Bcomp1(j)**2)
  call fase (Acomp1,AcompN,Bcomp1,BcompN,j,fase1,faseN,pi)
end do
write (*,('" fn,ampl1(j),amplN(j)"'))
do j=1,(maxtijd/2)
  fn=j/(dt*maxtijd)
  write (*,*) fn,ampl1(j),amplN(j)
end do
c write (*,('" fn,fase1(j),faseN(j)"'))
c do j=1,(maxtijd/2)
c   fn=j/(dt*maxtijd)
c   write (*,*) fn,fase1(j),faseN(j)
c end do
return
end

subroutine deltaAcomp (maxtijd,maxknoop,i,j,pi,zeta,dt,
*      AcompN,Acomp1)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension zeta(max1,0:max2),AcompN(0:max2),Acomp1(0:max2)
N = maxtijd
delta1 = (zeta(1,i)*cos(j*2*pi*i/N)+
*      zeta(1,i+1)*cos(j*2*pi*(i+1)/N))/(N)
deltaN = (zeta(maxknoop,i)*cos(j*2*pi*i/N)+
*      zeta(maxknoop,i+1)*cos(j*2*pi*(i+1)/N))/(N)
if (j .EQ. 0) then
  AcompN(j) = AcompN(j)+(deltaN/2)
  Acomp1(j) = Acomp1(j)+(delta1/2)
else
  AcompN(j) = AcompN(j)+deltaN
  Acomp1(j) = Acomp1(j)+delta1
endif
endif
if (Acomp1(j) .EQ. 0) then
  Acomp1(j) = 0.00000001
endif
if (AcompN(j) .EQ. 0) then
  AcompN(j) = 0.00000001
endif
return
end

subroutine deltaBcomp (maxtijd,maxknoop,i,j,pi,zeta,dt,
*      BcompN,Bcomp1)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension zeta(max1,0:max2),BcompN(0:max2),Bcomp1(0:max2)
N = maxtijd
delta1 = (zeta(1,i)*sin(j*2*pi*i/N)+
*      zeta(1,i+1)*sin(j*2*pi*(i+1)/N))/(N)
deltaN = (zeta(maxknoop,i)*sin(j*2*pi*i/N)+
*      zeta(maxknoop,i+1)*sin(j*2*pi*(i+1)/N))/(N)
BcompN(j) = BcompN(j)+deltaN
Bcomp1(j) = Bcomp1(j)+delta1

```

```

return
end

subroutine fase (Acomp1,AcompN,Bcomp1,BcompN,j,fase1,faseN,pi)
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (g=9.81, max1=41, max2=10000)
dimension AcompN(0:max2),Acomp1(0:max2),BcompN(0:max2),
* Bcomp1(0:max2),faseN(0:max2),fase1(0:max2)

if ((BcompN(j)) .LE. 0) then
  if ((AcompN(j)) .LE. 0) then
    faseN(j) = -pi+abs(atan(BcompN(j)/AcompN(j)))
  endif
  if ((AcompN(j)) .GE. 0) then
    faseN(j) = -abs(atan(BcompN(j)/AcompN(j)))
  endif
  if ((AcompN(j)) .EQ. 0) then
    faseN(j) = -0.5*pi
  endif
endif
if ((BcompN(j)) .GE. 0) then
  if ((AcompN(j)) .LE. 0) then
    faseN(j) = -pi-abs(atan(BcompN(j)/AcompN(j)))
  endif
  if ((AcompN(j)) .GE. 0) then
    faseN(j) = -2*pi+abs(atan(BcompN(j)/AcompN(j)))
  endif
  if ((AcompN(j)) .EQ. 0) then
    faseN(j) = -1.5*pi
  endif
endif
if ((BcompN(j)) .EQ. 0) then
  faseN(j) = 0
endif
if ((Bcomp1(j)) .LE. 0) then
  if ((Acomp1(j)) .LE. 0) then
    fase1(j) = -pi+abs(atan(Bcomp1(j)/Acomp1(j)))
  endif
  if ((Acomp1(j)) .GE. 0) then
    fase1(j) = -abs(atan(Bcomp1(j)/Acomp1(j)))
  endif
  if ((Acomp1(j)) .EQ. 0) then
    fase1(j) = -0.5*pi
  endif
endif
if ((Bcomp1(j)) .GE. 0) then
  if ((Acomp1(j)) .LE. 0) then
    fase1(j) = -pi-abs(atan(Bcomp1(j)/Acomp1(j)))
  endif
  if ((Acomp1(j)) .GE. 0) then
    fase1(j) = -2*pi+abs(atan(Bcomp1(j)/Acomp1(j)))
  endif
  if ((Acomp1(j)) .EQ. 0) then
    fase1(j) = -1.5*pi
  endif
endif
if ((Bcomp1(j)) .EQ. 0) then
  fase1(j) = 0
endif

```

```
endif
return
end

FUNCTION RAN1(IDUM)
DIMENSION R(97)
PARAMETER (M1=259200,IA1=7141,IC1=54773,RM1=3.8580247E-6)
PARAMETER (M2=134456,IA2=8121,IC2=28411,RM2=7.4373773E-6)
PARAMETER (M3=243000,IA3=4561,IC3=51349)
SAVE IX1,IX2,IX3,R
DATA IFF /0/
IF (IDUM.LT.0 .OR. IFF.EQ.0) THEN
  IFF=1
  IX1=MOD(IC1-IDUM,M1)
  IX1=MOD(IA1*IX1+IC1,M1)
  IX2=MOD(IX1,M2)
  IX1=MOD(IA1*IX1+IC1,M1)
  IX3=MOD(IX1,M3)
  DO 11 J=1,97
    IX1=MOD(IA1*IX1+IC1,M1)
    IX2=MOD(IA2*IX2+IC2,M2)
    R(J)=(FLOAT(IX1)+FLOAT(IX2)*RM2)*RM1
11  CONTINUE
  IDUM=1
ENDIF
IX1=MOD(IA1*IX1+IC1,M1)
IX2=MOD(IA2*IX2+IC2,M2)
IX3=MOD(IA3*IX3+IC3,M3)
J=1+(97*IX3)/M3
IF(J.GT.97.OR.J.LT.1)PAUSE
RAN1=R(J)
R(J)=(FLOAT(IX1)+FLOAT(IX2)*RM2)*RM1
RETURN
END
```

Bijlage VII : Afleiding van de opgelegde grootheid in geval van een ε -rand

De door de randvoorwaarde (nog af te leiden) opgelegde grootheid is gelijkgesteld aan een som van ingaande en uitgaande Riemann invariant:

$$A(R_i) + B(R_u) = \text{opgelegde grootheid} \quad (\text{VII.1})$$

De reflectiefactor is gedefinieerd als volgt:

$$R = \frac{B}{A}$$

De analytisch berekende reflectiefactor (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.11)) is hieronder weergegeven:

$$R = \frac{B}{A} = \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (\text{VII.2})$$

Uit (VII.1) en (VII.2) volgt de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid. Deze grootheid is hierna berekend.

Uit (VII.2) volgt:

$$B = \left[\frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] A \quad (\text{VII.3})$$

(VII.3) invullen in (VII.1) geeft:

$$(A+B)u + (A-B)\sqrt{\frac{g}{H}}\xi = \text{opgelegde grootheid} =$$

$$A \left[\left\{ 1 + \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right\} u + \left\{ 1 - \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right\} \sqrt{\frac{g}{H}}\xi \right] =$$

$$\begin{aligned}
 A \left[\frac{2ka + 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] u + \left[\frac{2}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta &= \\
 A \left[\frac{2 - 2ka - 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \left[\frac{2ka + 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) & \quad (VII.4)
 \end{aligned}$$

Stel:

$$A = \frac{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{2 - 2ka - 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (VII.5)$$

(VII.5) substitueren in (VII.4) geeft:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \left[\frac{ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) &= \\
 \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \mu \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) & \quad (VII.6)
 \end{aligned}$$

Met:

$$\mu = \frac{ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}$$

Bijlage VI : Testberekeningen

Het ééndimensionale numerieke waterbewegingsprogramma, beschreven in bijlage V, is getest door twee analytische berekeningen te maken en deze te vergelijken met resultaten van het numerieke programma. In deze bijlage zijn deze twee testberekeningen beschreven

Test 1: Waterstandsrand

Op de open rand (knooppunt 1) is als randvoorwaarde een waterstandsvariatie opgelegd. De analytische oplossing is bepaald met behulp van de harmonische methode. Met behulp van het numerieke waterbewegingsprogramma is een berekening uitgevoerd voor dezelfde bakafmetingen en randvoorwaarden. De resultaten van de analytische oplossing en de computerberekening zijn tenslotte met elkaar vergeleken.

Geometrie van de bak

De in de berekening gebruikte bak bestaat uit 10 vakken met een lengte van 300 m. De diepte tot referentieniveau bedraagt 2.5 m.

Beginvoorwaarden

Als beginvoorwaarden is een waterstand gelijk aan 2.5m en een snelheid gelijk aan 0 m/s opgelegd.

Randvoorwaarden

Op het beginknooppunt is een waterstandsvariatie opgelegd met een amplitude van 0.1 m en een periode van 50 minuten. Op het eindknooppunt is een snelheid gelijk aan 0 m/s opgelegd.

Analytische berekening

Met behulp van de harmonische methode (zie [Verspuy (1987)]) is de analytische oplossing bepaald. De resultaten daarvan zijn hieronder weergegeven.

Vak	H-begin	fase [°]	H-eind	fase [°]	Q-begin	fase [°]	Q-eind	fase [°]
1	0.10000	-360.00	0.14176	-7.6609	3.51087	-285.34	3.35445	-285.83
2	0.14176	-7.6609	0.18234	-11.617	3.35445	-285.83	3.14172	-286.28
3	0.18234	-11.617	0.22057	-13.904	3.14172	-286.28	2.87605	-286.51
4	0.22057	-13.904	0.25527	-15.316	2.87605	-286.51	2.56199	-286.87
5	0.25527	-15.316	0.28571	-16.192	2.56199	-286.87	2.20458	-286.92
6	0.28571	-16.192	0.31146	-16.729	2.20458	-286.92	1.81009	-287.16
7	0.31146	-16.729	0.33194	-17.021	1.81009	-287.16	1.38493	-287.18
8	0.33194	-17.021	0.34686	-17.160	1.38493	-287.18	0.93642	-287.22
9	0.34686	-17.160	0.35580	-17.212	0.93642	-287.22	0.47229	-287.24
10	0.35580	-17.212	0.35899	-17.225	0.47229	-287.24	0.00000	0.00000

Computerberekening

Met behulp van het waterbewegingsprogramma is een berekening uitgevoerd voor dezelfde bakafmetingen en randvoorwaarden. Voor de tijdstap in de berekening is 1 minuut gebruikt. Met een lengtestap van 300 m en een diepte van 2.5 m geeft dit een Courant getal gelijk aan ± 1 .

De verkregen waterstanden per knooppunt zijn vervolgens fouriergeanalyseerde.

Resultaten

Voor de opgelegde frequentie ($0.00335648 \text{ s}^{-1}$) zijn in de tabel hieronder de amplitudes van de waterstanden per knooppunt, verkregen met de harmonische methode en het programma, met elkaar vergeleken.

knooppunt	resultaten van de harmonische berekening [m]	resultaten van de computer berekening [m]
1	0.10000	0.100000001490116
2	0.14176	0.142248166519317
3	0.18234	0.182184937050807
4	0.22057	0.219144043634266
5	0.25527	0.252513110871867
6	0.28571	0.281739833686116
7	0.31146	0.306340587024974
8	0.33194	0.325909397478653
9	0.34686	0.340123090106802
10	0.35580	0.348746649636376
11	0.35899	0.351637038260981

Uit de bovenstaande tabel volgt dat de programma resultaten overeenkomen met de analytische resultaten. Hieruit kan geconcludeerd worden dat het programma goed rekt.

Test 2: Riemannrand

Op de open rand (knooppunt 1) is als randvoorwaarde de ingaande Riemann invariant opgelegd. De analytische oplossing is bepaald met behulp van de methode der karakteristieken (zie [Verspuy (1987)]). Met behulp van het beschreven waterbewegingsprogramma is vervolgens een berekening uitgevoerd voor dezelfde randvoorwaarden en afmetingen. De resultaten zijn tenslotte met elkaar vergeleken.

Geometrie van de bak

De in de berekening gebruikte bak bestaat uit 10 vakken met een lengte van 0.5 m. De diepte tot referentieniveau bedraagt 2.55 m.

Beginvoorwaarden

Als beginvoorwaarden is een waterstand gelijk aan 2.55m en een snelheid gelijk aan 0 m/s opgelegd.

Randvoorwaarden

Op knooppunt 1 wordt de ingaande Riemann invariant opgelegd. Deze wordt gelijkgesteld aan een sinus met een amplitude van 0.1 m en een periode van 5 s. Op knooppunt 11 is een snelheid gelijk aan 0 m/s opgelegd.

Analytische berekening

Met behulp van de methode der karakteristieken is de analytische oplossing bepaald.

Computerberekening

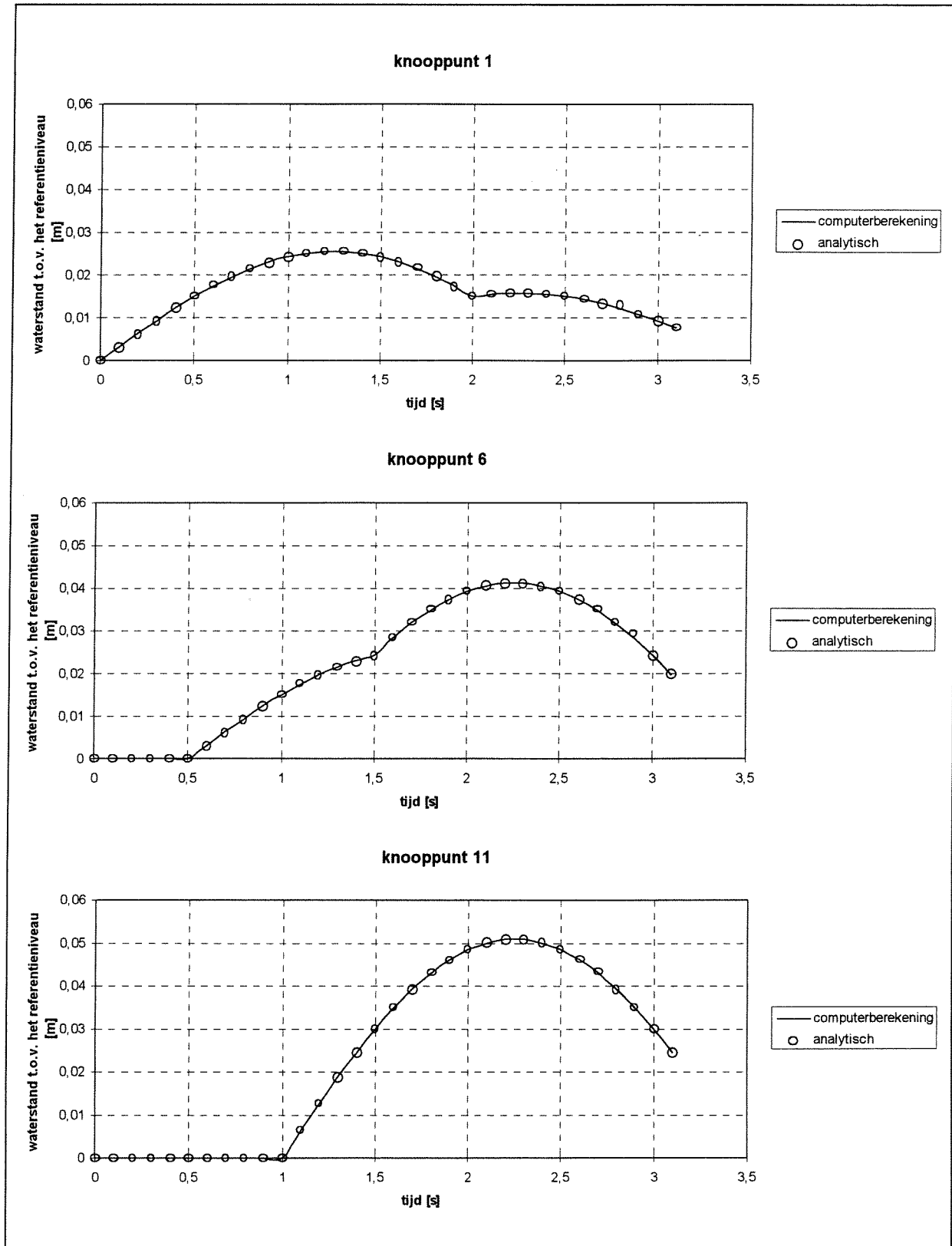
Met het waterbewegingsprogramma is dezelfde berekening uitgevoerd.

Resultaten

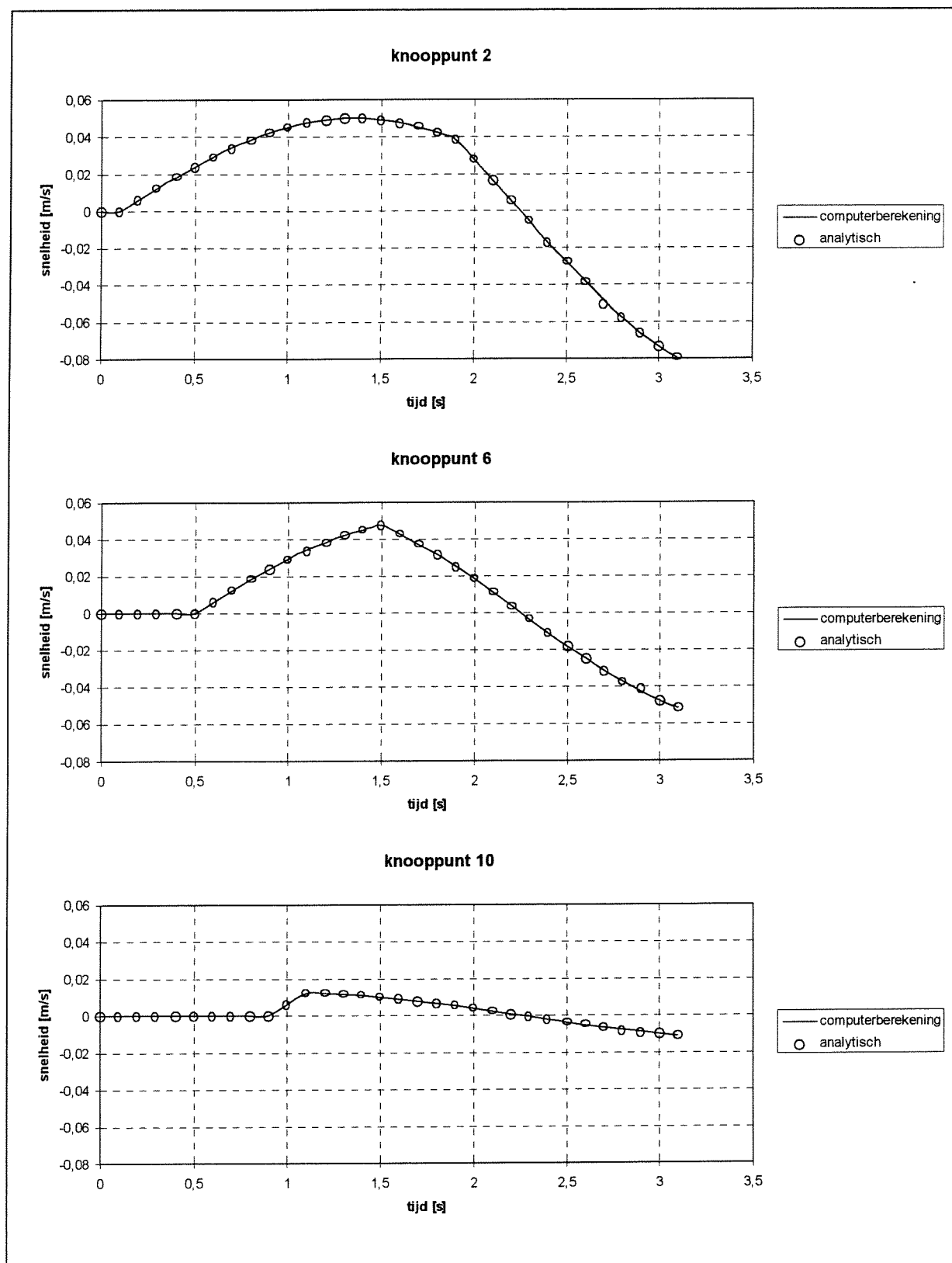
De resultaten van de analytische en de numerieke berekening zijn hierna met elkaar vergeleken. Voor een aantal knooppunten zijn de waterstanden en de snelheden weergegeven, verkregen met beide berekeningen.

In het numerieke programma is het Preissmann schema (exact gecentreerd, $\theta=0.5$ en $\psi=0.5$) gebruikt met een Courant getal gelijk aan 1. Verwacht wordt daarom dat de numerieke resultaten exact overeen zullen komen met de analytische resultaten.

In de figuren is het inspeelverschijnsel te zien. De resultaten komen exact met elkaar overeen. Ook uit deze test volgt dat het waterbewegingsprogramma goed rekent.



Figuur VI.1: Vergelijking van waterstanden (analytische berekening en computerberekening)



Figuur VI.2: Vergelijking van snelheden (analytische berekening en computerberekening)

Bijlage VII : Afleiding van de opgelegde grootheid in geval van een ε -rand

De door de randvoorwaarde (nog af te leiden) opgelegde grootheid is gelijkgesteld aan een som van ingaande en uitgaande Riemann invariant:

$$A(R_i) + B(R_u) = \text{opgelegde grootheid} \quad (\text{VII.1})$$

De reflectiefactor is gedefinieerd als volgt:

$$R = \frac{B}{A}$$

De analytisch berekende reflectiefactor (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.11)) is hieronder weergegeven:

$$R = \frac{B}{A} = \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (\text{VII.2})$$

Uit (VII.1) en (VII.2) volgt de door de randvoorwaarde opgelegde grootheid. Deze grootheid is hierna berekend.

Uit (VII.2) volgt:

$$B = \left[\frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] A \quad (\text{VII.3})$$

(VII.3) invullen in (VII.1) geeft:

$$(A+B)u + (A-B)\sqrt{\frac{g}{H}}\xi = \text{opgelegde grootheid} =$$

$$A \left[\left\{ 1 + \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right\} u + \left\{ 1 - \frac{-1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right\} \sqrt{\frac{g}{H}}\xi \right] =$$

$$\begin{aligned}
 A \left[\frac{2ka + 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] u + \left[\frac{2}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \left\{ \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right\} = \\
 A \left[\frac{2 - 2ka - 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \left\{ \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right\} + \left[\frac{2ka + 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) \quad (VII.4)
 \end{aligned}$$

Stel:

$$A = \frac{1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{2 - 2ka - 2 \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \quad (VII.5)$$

(VII.5) substitueren in (VII.4) geeft:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \left[\frac{ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)} \right] \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) = \\
 \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \mu \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta \right) \quad (VII.6)
 \end{aligned}$$

Met:

$$\mu = \frac{ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}{1 - ka - \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)}$$

Een andere formulering voor de opgelegde grootheid wordt verkregen door te veronderstellen:

$$B = -1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) \quad (VII.7)$$

$$A = 1 + ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) \quad (VII.8)$$

De vergelijkingen (VII.7) en (VII.8) invullen in (VII.1) en uitwerken geeft voor de opgelegde grootheid:

$$\sqrt{\frac{g}{H}} \zeta + \left[ka + \frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) \right] u \quad (VII.9)$$

De opgelegde grootheid volgens (VII.9) is een combinatie van een waterstand en een snelheid. Deze formulering volgt direct uit de reflectiefactor.

De resultaten worden niet beter door (VII.9) in plaats van (VII.6) op de open rand in het model voor te schrijven. Gekozen is voor een uitdrukking volgens (VII.6), omdat dit een combinatie is van twee uiterste situaties:

1. een waterstandsrand, met reflectiefactor gelijk aan 1 (maximale waarde).
2. een Riemannrand, met reflectiefactor gelijk aan 0 (minimale waarde).

De uitdrukking volgens (VII.6) is een combinatie daarvan. Afhankelijk van de golflengte is één van de twee termen belangrijker. De formulering volgens (VII.6) spreekt hierdoor tot de verbeelding.

Bijlage VIII : Definitie en berekening van versterkingsfactoren in een ééndimensionaal numeriek model

In deze bijlage zijn versterkingsfactoren in een afgesloten bekken berekend voor het geval op de open rand een waterstandrand, een Riemannrand of een ε -rand is opgelegd. Verwacht wordt dat de versterkingsfactor in geval van een waterstandrand bij resonantie een oneindig hoge waarde aanneemt. In geval van een Riemannrand wordt verwacht dat de versterkingsfactor gelijk is aan 1 voor alle frequenties. Indien een ε -rand wordt opgelegd zal de versterkingsfactor gelijk moeten zijn aan de analytisch berekende versterkingsfactor volgens C.C. Mei (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.10)).

De definitie (zie paragraaf 2.2) van de amplificatie- of versterkingsfactor in een bepaald punt in een afgesloten bekken is hieronder weergegeven:

De amplificatie- of versterkingsfactor in een bepaald punt in een afgesloten bekken is gelijk aan de waarde, die wordt verkregen door de amplitude van de waterstandsvariatie in het betreffende punt te delen door twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust.

In een ééndimensionaal model is deze definitie niet eenvoudig toe te passen. In deze bijlage zal worden aangetoond dat de amplificatiefactor in een ééndimensionaal model als volgt correct kan worden berekend:

Methode 1: *De amplitude van het uitgaande signaal delen door de amplitude van het ingaande signaal.*

$$\begin{array}{c} S_{\text{in}} \longrightarrow \boxed{\text{bekken}} \longrightarrow S_{\text{uit}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \frac{S_{\text{uit}}}{S_{\text{in}}} \\ x = 0 \qquad \qquad \qquad x = L \end{array}$$

Methode 2: *De amplitude van de inkomende golf op zee berekenen waarna de definitie van versterkingsfactor kan worden toegepast.*

In deze bijlage zal worden aangetoond dat beide berekeningsmethoden resulteren in dezelfde waarde voor de versterkingsfactor.

Uit de berekeningen zal blijken dat de amplitude van de opgelegde grootheid in alle gevallen gelijk is aan twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, op voldoende grote afstand van de kust. Dit houdt in dat in een ééndimensionaal model de versterkingsfactor als volgt is gedefinieerd:

De amplificatie- of versterkingsfactor in een ééndimensionaal model is gelijk aan de verhouding van de amplitude van de waterstandsvariatie aan het einde van het bekken tot de amplitude van de opgelegde grootheid.

Eerst is de versterkingsfactor berekend in geval van een waterstandrand. Daarna is hetzelfde gedaan voor het geval een ingaande Riemann invariant op de open rand is opgelegd. Tenslotte komt de ε -rand aan de orde.

In de berekeningen zijn de uitgaande en ingaande Riemann invarianten in de complexe ruimte gebruikt. Deze zijn hierna weergegeven:

$$\begin{aligned} R1 &= Ae^{i(\omega t - kx)} \\ R2 &= Be^{i(\omega t + kx)} \end{aligned} \qquad \qquad \qquad (\text{VIII.1})$$

Met:

R1 = ingaande Riemann invariant

R2 = uitgaande Riemann invariant

A en B volgen uit de randvoorwaarden.

Rand 1: Waterstandrand

Rand 1: Randvoorwaarden

Indien een waterstandsrand is opgelegd dan zijn de randvoorwaarden:

$x = 0$ (open rand)

$$\zeta(0) = (\text{amp})e^{i\omega t}$$

Met:

amp = amplitude van de waterstandsvariatie = amplitude van de opgelegde grootheid

$x = L$ (afgesloten einde van het bekken)

$$u(L) = 0$$

Indien een half oneindig kanaal wordt verondersteld (nodig voor het berekenen van de amplitude van de inkomende golf) dan wordt de uitgaande Riemann invariant op $x = L$ opgelegd in plaats van een snelheid:

$x = L$ (half oneindig bekken)

$$u(L) - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta(L) = 0$$

Rand 1: Berekening van de factoren A en B

De factoren A en B (zie (VIII.1)) zijn uit de randvoorwaarden te berekenen. A en B zijn eerst berekend voor het geval het bekken is afgesloten. Hierna zijn A en B berekend voor een half oneindig bekken.

Afgesloten bekken:

Optellen van de Riemann invarianten levert de snelheid. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} u(L) = 0 &\Rightarrow R1 + R2 = 2u = 0 \\ &\Rightarrow e^{i\omega t} (Ae^{-ikL} + Be^{ikL}) = 0 \\ &\Rightarrow B = -Ae^{-2ikL} \end{aligned}$$

Het van elkaar aftrekken van de Riemann invarianten geeft de waterstand maal een bepaalde factor. Hieruit volgen uitdrukkingen voor A en B:

$$\begin{aligned}
 \zeta(0) = e^{i\omega t} &\Rightarrow R1 - R2 = 2\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta = 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} = \\
 &\Rightarrow e^{i\omega t}(A - B) = \\
 &\Rightarrow Ae^{i\omega t}(1 + e^{-2ikL}) = 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} \\
 &\Rightarrow A = \frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}}{1 + e^{-2ikL}}(\text{amp}) \quad (\text{VIII.2})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}}{1 + e^{-2ikL}}(\text{amp})e^{-2ikL} \quad (\text{VIII.3})$$

Half oneindig bekken:

Uit de randvoorwaarde op $x = L$ volgt:

$$u(L) - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta(L) = 0 \Rightarrow R2 = Be^{i\omega t}e^{ikL} = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (\text{VIII.4})$$

De waarde voor A volgt uit de randvoorwaarde op $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 \zeta(0) = (\text{amp})e^{i\omega t} &\Rightarrow R1 - R2 = 2\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta = 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} = \\
 &\Rightarrow Ae^{i\omega t} = 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} \\
 &\Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp}) \quad (\text{VIII.5})
 \end{aligned}$$

Rand 1: Berekening van de versterkingsfactor

De versterkingsfactor is op twee verschillende manieren berekend.

Methode 1: *De amplitude van het uitgaande signaal delen door de amplitude van het ingaande signaal.*

$$\begin{aligned}
 S_{\text{in}} &= |\zeta(0)| = (\text{amp}) \quad (= \text{opgelegd}) \\
 S_{\text{uit}} &= |\zeta(L)| = (\text{amp})/\cos(kL) \quad (\text{zie berekening})
 \end{aligned}$$

De amplitude van het uitgaande signaal is gelijk aan de amplitude van de waterstand aan het eind van het afgesloten bekken. Deze waterstand is hieronder berekend met de bekende waarden voor A en B (zie (VIII.2) en (VIII.3)):

$$\begin{aligned}\zeta(L) &= \frac{R1 - R2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{e^{i\omega t} (Ae^{-ikL} - Be^{ikL})}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{e^{i\omega t} (e^{-ikL} + e^{-2ikL} e^{ikL})}{1 + e^{-2ikL}} (\text{amp}) \\ &= \frac{(\text{amp})}{\frac{1 + e^{-2ikL}}{2e^{-ikL}}} e^{i\omega t} = \frac{(\text{amp})}{\frac{1}{2}e^{ikL} + \frac{1}{2}e^{-ikL}} e^{i\omega t} = \frac{(\text{amp})}{\frac{1}{2}(\cos(kL) + i\sin(kL) + \cos(kL) - i\sin(kL))} e^{i\omega t} = \frac{(\text{amp})}{\cos(kL)} e^{i\omega t}\end{aligned}$$

De versterkingsfactor indien een waterstandsrand is opgelegd is dan gelijk aan:

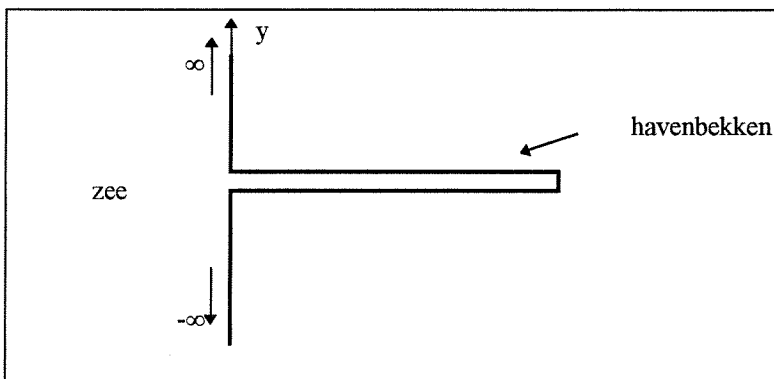
$$\mathfrak{R} = \frac{S_{\text{uit}}}{S_{\text{in}}} = \frac{1}{\cos(kL)} \quad (\text{VIII.6})$$

Methode 2: *De amplitude van de inkomende golf op zee berekenen waarna de definitie van versterkingsfactor kan worden toegepast.*

Hieronder is de waterstand berekend op een afstand $x=L$ vanaf de zeerland indien een half oneindig kanaal is verondersteld. Voor de berekening is gebruik gemaakt van A en B volgens de vergelijkingen (VIII.4) en (VIII.5):

$$\zeta(L) = \frac{R1 - R2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{Ae^{-ikL} e^{i\omega t}}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{2\sqrt{\frac{g}{H}} (\text{amp}) e^{-ikL} e^{i\omega t}}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = (\text{amp}) \sqrt{\cos^2(kL) + \sin^2(kL)} e^{i\omega t} = (\text{amp}) e^{i\omega t}$$

De amplitude van de waterstand op een afstand $x=L$ vanaf de rand in het geval van een oneindig bekken is gelijk aan (amp). De amplitude van de inkomende golf ter plaatse van de zeerland ($x=0$) is hieraan gelijk. Deze amplitude is gelijk aan twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust ($x \ll 0$). De verklaring hiervoor is hierna beschreven. Een waterstandsrand reflecteert alle golven (onafhankelijk van de golflengte) volledig. Volgens de analytische oplossing (zie hoofdstuk 3) worden golven volledig gereflecteerd indien de golflengte relatief groot is ten opzichte van de breedte van het kanaal. Door het opleggen van een waterstandsrand wordt in feite verondersteld dat de breedte van de havenopening oneindig klein is (zie Figuur VIII.1). Alleen dan geldt voor alle golven dat de golflengte groot is ten opzichte van de breedte van de havenopening, waardoor ze volledig worden gereflecteerd. Als gevolg van de oneindig kleine breedte van de havenopening wordt de golf komende uit zee niet beïnvloed door de aanwezigheid van het kanaal. De golf reflecteert tegen de kust en verdubbelt hierbij in amplitude. Deze golf (met een amplitude gelijk aan twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust) loopt het kanaal in.



Figuur VIII.1: Waterstandsrand → oneindig grote breedtevariatie bij de overgang van havenbekken naar zee

De versterkingsfactor indien een waterstand op de open rand is opgelegd is dan gelijk aan:

$$\Re = \frac{\frac{(\text{amp})}{\cos(kL)}}{2\left(\frac{1}{2}(\text{amp})\right)} = \frac{1}{\cos(kL)} \quad (\text{VIII.7})$$

De versterkingsfactoren ((VIII.6) en (VIII.7)) berekent volgens beide methoden zijn aan elkaar gelijk.

$\cos(kL)$ is gelijk aan nul indien:

$$kL = \frac{L}{(\lambda/4)} \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2} \quad \text{met: } n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Indien de bekkenlengte gelijk is aan een oneven aantal maal een kwart van de golflengte dan is de versterkingsfactor oneindig groot. Er is sprake van resonantie.

Dat de versterkingsfactor bij resonantie een oneindig grote waarde aanneemt is te verklaren. Indien een waterstandsrand als randvoorwaarde op de open rand is opgelegd dan worden alle uitgaande golven volledig gereflecteerd. In zo'n geval is er geen uitstraling van energie naar zee. Indien andere dempingsmechanismen zijn verwaarloosd dan worden staande golven bij resonantie oneindig hoog.

Rand 2: Riemannrand

Rand 2: Randvoorwaarden

Indien een Riemannrand op de open rand is opgelegd dan zijn de randvoorwaarden:

$x = 0$ (open rand)

$$u(0) + \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta(0) = \sqrt{\frac{g}{H}} (\text{amp}) e^{i\omega t}$$

$x = L$ (afgesloten einde van het bekken)

$$u(L) = 0$$

Indien een half oneindig kanaal wordt verondersteld (nodig voor het berekenen van de amplitude van de inkomende golf) dan wordt de uitgaande Riemann invariant op $x = L$ opgelegd in plaats van een snelheid:

$x = L$ (half oneindig bekken)

$$u(L) - \sqrt{\frac{g}{H}} \zeta(L) = 0$$

Rand 2: Berekening van de factoren A en B

De factoren A en B (zie (VIII.1)) zijn uit de randvoorwaarden te berekenen. A en B zijn eerst berekend voor het geval het bekken is afgesloten. Hierna zijn A en B berekend voor een half oneindig bekken.

Afgesloten bekken:

Optellen van de Riemann invarianten levert de snelheid. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} u(L) = 0 &\Rightarrow R1 + R2 = 2u = 0 \\ &\Rightarrow B = -Ae^{-2ikL} \end{aligned}$$

Op het beginknooppunt is de ingaande Riemann invariant opgelegd. Hieruit volgen waarden voor A en B:

$$\begin{aligned} R1 &= \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} \\ &= Ae^{i\omega t} = \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} \\ \Rightarrow A &= \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp}) \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})$$

$$\Rightarrow B = -\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{-2ikL} \quad (\text{VIII.9})$$

Half oneindig bekken:

Uit de randvoorwaarde op $x = L$ volgt:

$$u(L) - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta(L) = 0 \Rightarrow R2 = Be^{i\omega t}e^{ikL} = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (\text{VIII.10})$$

De waarde voor A volgt uit de randvoorwaarde op $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(0) + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta(0) &= \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} \Rightarrow R1 = Ae^{i\omega t} = \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})e^{i\omega t} \\ \Rightarrow A &= \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp}) \end{aligned} \quad (\text{VIII.11})$$

Rand 2: Berekening van de versterkingsfactor

De versterkingsfactor is op twee verschillende manieren berekend.

Methode 1: *De amplitude van het uitgaande signaal delen door de amplitude van het ingaande signaal.*

$$\begin{aligned} S_{\text{in}} &= |u(0) + (g/H)^{1/2}\zeta(0)| = (\text{amp}) (g/H)^{1/2} & (= \text{opgelegd}) \\ S_{\text{uit}} &= |u(L) + (g/H)^{1/2}\zeta(L)| = (g/H)^{1/2} |\zeta(L)| = (g/H)^{1/2}(\text{amp}) & (\text{zie berekening}) \end{aligned}$$

De amplitude van het uitgaande signaal is gelijk aan de amplitude van de waterstand aan het einde van het afgesloten bekken vermenigvuldigd met $(g/H)^{1/2}$. De waterstand aan het einde van het afgesloten bekken is hieronder berekend met de bekende waarden voor A en B (zie (VIII.8) en (VIII.9)):

$$\begin{aligned}\zeta(L) &= \frac{R1 - R2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{e^{i\omega t} (Ae^{-ikL} - Be^{ikL})}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{(amp)e^{i\omega t} \left(\sqrt{\frac{g}{H}} e^{-ikL} + \sqrt{\frac{g}{H}} e^{-2ikL} e^{ikL} \right)}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} \\ &= (amp)e^{-ikL} e^{i\omega t} = (amp) [\cos(kL) - i \sin(kL)] e^{i\omega t} = (amp)e^{i\omega t}\end{aligned}$$

De versterkingsfactor indien een ingaande Riemann invariant is opgelegd is dan gelijk aan:

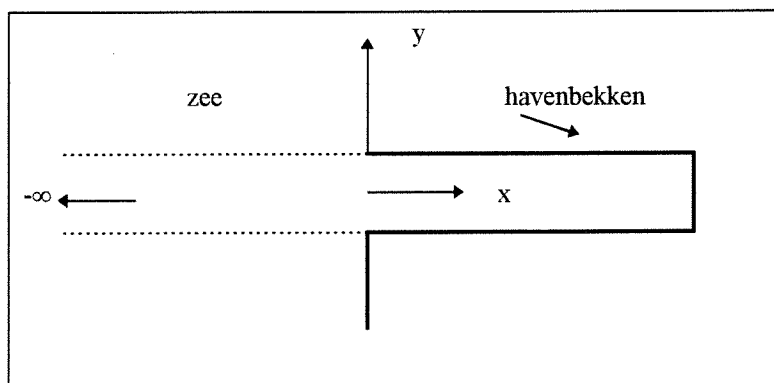
$$\mathfrak{R} = \frac{S_{uit}}{S_{in}} = 1 \quad (\text{VIII.12})$$

Methode 2: *De amplitude van de inkomende golf op zee berekenen waarna de definitie van versterkingsfactor kan worden toegepast.*

Hieronder is de waterstand berekend op een afstand $x=L$ vanaf de zeerand indien een half oneindig kanaal is verondersteld. Voor de berekening is gebruik gemaakt van A en B volgens de vergelijkingen (VIII.10) en (VIII.11):

$$\zeta(L) = \frac{R1 - R2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{Ae^{-ikL} e^{i\omega t}}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{\sqrt{\frac{g}{H}} (amp) e^{-ikL} e^{i\omega t}}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{(amp)}{2} \sqrt{\cos^2(kL) + \sin^2(kL)} e^{i\omega t} = \frac{(amp)}{2} e^{i\omega t}$$

De amplitude van de waterstand op een afstand $x=L$ vanaf de rand in het geval van een oneindig bekken is gelijk aan $(amp)/2$. De amplitude van de inkomende golf ter plaatse van de zeerand ($x=0$) is hieraan gelijk. Deze amplitude is gelijk aan de amplitude van de inkomende golf op zee, voldoende ver van de kust ($x \ll 0$). Een Riemannrand laat alle golven volledig door. Dit kan alleen indien is verondersteld dat het kanaal zonder breedteverandering tot in het oneindige doorloopt (zie Figuur VIII.2). In dit kanaal vindt geen amplitude verandering plaats. Als gevolg hiervan is de amplitude van de inkomende golf op een grote afstand van de rand gelijk aan de amplitude van de inkomende golf ter plaatse van de rand.



Figuur VIII.2: Riemannrand → geen breedtevariatie bij de overgang van havenbekken naar zee

De versterkingsfactor (volgens de definitie) indien een ingaande Riemann invariant op de open rand is opgelegd is dan gelijk aan:

$$\mathfrak{R} = \frac{(\text{amp})}{2\left(\frac{(\text{amp})}{2}\right)} = 1 \quad (\text{VIII.13})$$

De inkomende golf reflecteert volledig tegen het afgesloten einde van het bekken. Op dit punt wordt de amplitude van de inkomende golf verhoogd met een factor 2. De amplitude van de waterstandsvariatie aan het einde van het bekken delen door twee maal de amplitude van de inkomende golf geeft per definitie een amplificatiefactor gelijk aan 1.

Als gevolg van het opleggen van een ingaande Riemann invariant op de open rand worden alle uitgaande golven volledig doorgelaten (reflectiefactor = 0), waardoor er geen energie in het systeem achterblijft en er dus geen amplificatie (amplificatiefactor = 1) optreedt.

Hierna is een berekening opgenomen waaruit volgt dat de versterkingsfactor niet kan worden berekend door de amplitudes van de waterstand op eind- en beginknooppunt op elkaar te delen.

De waterstand aan het begin van de bekken is hieronder berekend:

$$\zeta(0) = \frac{R1 - R2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{e^{i\omega t}(A - B)}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{1 - e^{-2ikL}}{2} (\text{amp}) e^{i\omega t}$$

De amplitude van de waterstand op het beginknooppunt is dan:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= (\text{amp}) \left| \frac{1 + e^{-2ikL}}{2} \right| = (\text{amp}) \left| \frac{1 + (\cos(2kL) - i \sin(2kL))}{2} \right| \\ &= (\text{amp}) \left| \frac{1 + (\cos^2(kL) - (1 - \cos^2(kL))) - i2 \sin(kL) \cos(kL)}{2} \right| = (\text{amp}) |\cos^2(kL) - i \sin(kL) \cos(kL)| \\ &= (\text{amp}) |\cos(kL)| |\cos(kL) - i \sin(kL)| = (\text{amp}) \cos(kL) \sqrt{\cos^2(kL) + \sin^2(kL)} = (\text{amp}) \cos(kL) \end{aligned}$$

Het op elkaar delen van de amplitudes van de waterstand op eind- en beginknooppunt van een afgesloten bekken geeft de volgende waarde voor de versterkingsfactor:

$$\mathfrak{R} = \frac{(\text{amp})}{(\text{amp}) \cos(kL)} = \frac{1}{\cos(kL)}$$

Deze versterkingsfactor hoort bij een waterstandsrand en is niet correct voor een Riemannrand.

Rand 3: ε -rand

Rand 3: Randvoorwaarden

Indien een ε -rand is opgelegd dan zijn de randvoorwaarden:

$x = 0$ (open rand)

$$\sqrt{\frac{g}{H}}\zeta + \mu \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta \right) = \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp}) \left(e^{i\omega t} + \mu e^{i\omega t} \right)$$

$x = L$ (afgesloten einde van het bekken)

$$u(L) = 0$$

Indien een half oneindig kanaal wordt verondersteld (nodig voor het berekenen van de amplitude van de inkomende golf) dan wordt de uitgaande Riemanninvariant op $x = L$ opgelegd in plaats van een snelheid:

$x = L$ (half oneindig bekken)

$$u(L) - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta(L) = 0$$

Rand 3: Berekening van de factoren A en B

De factoren A en B (zie (VIII.1)) zijn uit de randvoorwaarden te berekenen. A en B zijn eerst berekend voor het geval het bekken is afgesloten. Hierna zijn A en B berekend voor een half oneindig bekken.

Afgesloten bekken:

Optellen van de Riemann invarianten levert de snelheid. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} u(L) = 0 &\Rightarrow R1 + R2 = 2u = 0 \\ &\Rightarrow B = -Ae^{-2ikL} \end{aligned}$$

Op het beginknooppunt is een combinatie van een waterstand en een Riemann invariant opgelegd. Hieruit volgen uitdrukkingen voor A en B:

$$\begin{aligned} \frac{R1 - R2}{2} + \mu R1 &= \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp}) \left(e^{i\omega t} + \mu e^{i\omega t} \right) \\ \Rightarrow R1 - R2 + 2\mu R1 &= 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp}) \left(e^{i\omega t} + \mu e^{i\omega t} \right) \\ \Rightarrow e^{i\omega t} \left(A + Ae^{-2ikL} + A2\mu \right) &= e^{i\omega t} 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1 + \mu) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1+\mu)}{1+e^{-2ikL}+2\mu} \quad (\text{VIII.14})$$

$$\Rightarrow B = -\frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1+\mu)}{1+e^{-2ikL}+2\mu}e^{-2ikL} \quad (\text{VIII.15})$$

Indien μ gelijk is aan nul wordt een waterstandsrand verkregen. De uitdrukkingen voor A ((VIII.14)) en B ((VIII.15)) zijn dan gelijk aan die voor een waterstandrand (vergelijkingen (VIII.2) en (VIII.3)). Wanneer μ groot is, dan wordt de Riemannrand benaderd door de ε -rand. (VIII.14) en (VIII.15) benaderen dan de vergelijkingen (VIII.8) en (VIII.9).

Half oneindig bekken:

Uit de randvoorwaarde op $x = L$ volgt:

$$u(L) - \sqrt{\frac{g}{H}}\zeta(L) = 0 \Rightarrow R2 = Be^{i\omega t}e^{ikL} = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (\text{VIII.16})$$

De waarde voor A volgt uit de randvoorwaarde op $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{R1 - R2}{2} + \mu R1 &= \sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(e^{i\omega t} + \mu e^{i\omega t}) \\ \Rightarrow R1 - R2 + 2\mu R1 &= (A + 0 + A2\mu)e^{i\omega t} = 2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1+\mu)e^{i\omega t} \\ \Rightarrow A &= \frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1+\mu)}{(1+2\mu)} \quad (\text{VIII.17}) \end{aligned}$$

Rand 3: Berekening van de versterkingsfactor

De versterkingsfactor is op twee verschillende manieren berekend.

Methode 1: *De amplitude van het uitgaande signaal delen door de amplitude van het ingaande signaal.*

$$\begin{aligned} S_{\text{in}} &= |(g/H)^{1/2}\zeta(0) + \mu(u(0) + (g/H)^{1/2}\zeta(0))| = (g/H)^{1/2}(\text{amp})|1 + \mu| & (= \text{opgelegd}) \\ S_{\text{uit}} &= |(g/H)^{1/2}\zeta(L) + \mu(u(L) + (g/H)^{1/2}\zeta(L))| = (g/H)^{1/2}|1 + \mu||\zeta(L)| & (\text{zie berekening}) \end{aligned}$$

De amplitude van het uitgaande signaal is gelijk aan de amplitude van de waterstand aan het einde van het afgesloten bekken vermenigvuldigd met $(g/H)^{1/2}|1 + \mu|$. De waterstand aan het einde van het afgesloten bekken is hieronder berekend met de bekende waarden voor A en B (zie (VIII.14) en (VIII.15)):

$$\zeta(L) = \frac{R1 - R2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{e^{i\omega t}(Ae^{-ikL} - Be^{ikL})}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1+\mu)(e^{-ikL} + e^{-2ikL}e^{ikL})}{2\sqrt{\frac{g}{H}}(1+e^{-2ikL}+2\mu)}e^{i\omega t} = \frac{2(\text{amp})(1+\mu)(e^{-ikL})}{(1+e^{-2ikL}+2\mu)}e^{i\omega t}$$

De amplitude van de waterstand aan het einde van het bekken is gelijk aan:

$$|\zeta(L)| = (\text{amp}) \left| \frac{2(1+\mu)}{(1 + e^{-2ikL} + 2\mu)} \right|$$

De versterkingsfactor indien de ε -randvoorwaarde is opgelegd is dan gelijk aan:

$$\mathfrak{R} = \frac{S_{\text{uit}}}{S_{\text{in}}} = \frac{\sqrt{\frac{g}{H}} |1+\mu| (\text{amp}) \left| \frac{2(1+\mu)}{(1 + e^{-2ikL} + 2\mu)} \right|}{\sqrt{\frac{g}{H}} |1+\mu| (\text{amp})} = \left| \frac{2(1+\mu)}{(1 + e^{-2ikL} + 2\mu)} \right| \quad (\text{VIII.18})$$

Methode 2: *De amplitude van de inkomende golf op zee berekenen waarna de definitie van versterkingsfactor kan worden toegepast.*

Hieronder is de waterstand berekend op een afstand $x=L$ vanaf de zeerand indien een half oneindig kanaal is verondersteld. Voor de berekening is gebruik gemaakt van A en B volgens de vergelijkingen (VIII.16) en (VIII.17):

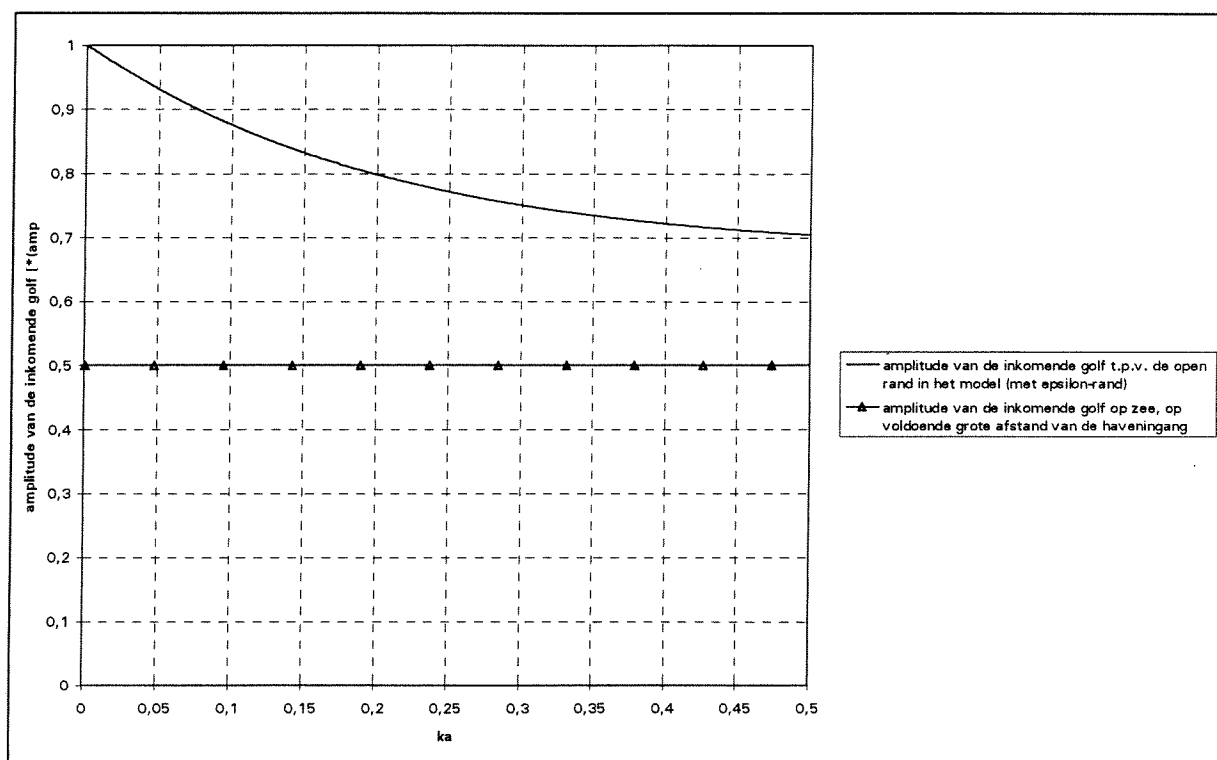
$$\zeta(L) = \frac{R_1 - R_2}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{Ae^{-ikL}e^{i\omega t}}{2\sqrt{\frac{g}{H}}} = \frac{2\sqrt{\frac{g}{H}}(\text{amp})(1+\mu)e^{-ikL}e^{i\omega t}}{2\sqrt{\frac{g}{H}}(1+2\mu)} = (\text{amp}) \frac{(1+\mu)}{(1+2\mu)} e^{i\omega t}$$

De amplitude van de waterstand op een afstand $x=L$ vanaf de rand in het geval van een oneindig bekken is gelijk aan:

$$|\zeta(L)| = (\text{amp}) \left| \frac{(1+\mu)}{(1+2\mu)} \right| \quad (\text{VIII.19})$$

De amplitude van de inkomende golf ter plaatse van de zeerand is hieraan gelijk. De verhouding tussen de berekende amplitude van de golf ter plaatse van de zeerand ($x=0$) en de amplitude van de golf op zee op een grote afstand van de rand ($x \ll 0$), is afhankelijk van de factor μ (zie hoofdstuk 4, vergelijking (4.13)) en dus van de verhouding van de breedte van het bekken tot de golflengte. In geval van een relatief grote golflengte is de berekende amplitude van de golf gelijk aan twee maal de amplitude van de golf gemeten op zee. De verhouding wordt kleiner naarmate de golflengte van de inkomende golf afneemt (zie Figuur VIII.3). De mate waarin deze verhouding afneemt is afhankelijk van de lengte breedte verhouding van het bekken.

De amplitude van de inkomende golf op zee is berekend door een zodanige grote golflengte te beschouwen dat de ε -rand gelijk is aan een waterstandsrand. De op deze manier verkregen waarde voor de amplitude van de waterstand ter plaatse van de open rand gelijk is aan twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee. Uit vergelijking (VIII.19) volgt dat voor grote golflengtes (μ klein) de amplitude van de inkomende golf ter plaatse van de open rand gelijk is aan (amp). De amplitude van de inkomende golf op zee is dan gelijk aan (amp)/2.



Figuur VIII.3: Amplitude van de inkomende golf ter plaatse van de open rand en op zee (bekken afmeting $L/2a = 12$)

De versterkingsfactor is berekend door de amplitude van de waterstandsvariatie aan het einde van het afgesloten bekken te delen door twee maal de amplitude van de inkomende golf op zee:

$$\mathfrak{R} = \frac{(\text{amp}) \left| \frac{2(1+\mu)}{1+e^{-2ikL} + 2\mu} \right|}{2 \left(\frac{\text{amp}}{2} \right)} = \left| \frac{2(1+\mu)}{1+e^{-2ikL} + 2\mu} \right| \quad (\text{VIII.20})$$

De uitdrukking voor de versterkingsfactor ((VIII.20)) is in bijlage IX herschreven en vereenvoudigd door de uitdrukking voor μ erin te substitueren. Het resultaat van de berekening is hieronder weergegeven:

$$\Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{1}{\left| \cos(kL) + \left(\frac{2ka}{\pi} \right) \sin(kL) \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) - ika \sin(kL) \right|} \quad (\text{VIII.21})$$

Vergelijking (VIII.21) geeft de versterkingsfactor voor een ϵ -rand. Deze is identiek aan de analytisch berekende versterkingsfactor (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.10)).

Bijlage IX : ε -rand, versterkingsfactor

De versterkingsfactor indien een ε -rand is opgelegd op de open rand in het model is in hoofdstuk 4 berekend en hieronder weergegeven:

$$\mathfrak{R} = \left| \frac{2(1+\mu)(e^{-ikL})}{(1+e^{-2ikL}+2\mu)} \right| \quad (\text{IX.1})$$

Met:

$$\mu = \frac{ka + \left(\frac{2ia}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}$$

De uitdrukking voor de versterkingsfactor ((IX.1)) wordt hierna herschreven door de uitdrukking voor μ erin te substitueren.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \left| \frac{2(1+\mu)(e^{-ikL})}{(1+e^{-2ikL}+2\mu)} \right| = \\ &= \left| \frac{2 \left(\frac{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)} + \frac{ka + \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)} \right) (\cos(kL) - i \sin(kL))}{\frac{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)} + 2 \frac{ka + \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)} + (\cos(2kL) - i \sin(2kL)) \frac{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}{1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right)}} \right| = \\ &= \left| \frac{2(1)(\cos(kL) - i \sin(kL))}{1 + ka + \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right) + (-1 + 2 \cos^2(kL) - i(2 \cos(kL) \sin(kL))) \left(1 - ka - \left(\frac{2ika}{\pi} \ln \left(\frac{2\gamma ka}{\pi e} \right) \right) \right)} \right| \end{aligned}$$

$$\frac{2(\cos(kL) - i \sin(kL))}{1 + ka + \left(\frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right) - 1 + ka + \left(\frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right) + 2 \cos^2(kL) - 2ka \cos^2(kL) - 2 \cos^2(kL) \left(\frac{2ika}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right) - i2 \cos(kL) \sin(kL) + ika2 \cos(kL) \sin(kL) - 2 \cos(kL) \sin(kL) \left(\frac{2ka}{\pi} \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right)\right)} =$$

$$\frac{2(\cos(kL) - i \sin(kL))}{2 \cos^2(kL) - 2i \cos(kL) \sin(kL) + \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) \left(\frac{2ika}{\pi} + \frac{2ika}{\pi} - 2(1 - \sin^2(kL)) \left(\frac{2ika}{\pi}\right) - 2 \cos(kL) \sin(kL) \left(\frac{2ka}{\pi}\right)\right) + 2ka - 2ka(1 - \sin^2(kL)) + 2ika \cos(kL) \sin(kL)}$$

$$\frac{2(\cos(kL) - i \sin(kL))}{\cos(kL)(2 \cos(kL) - 2i \sin(kL)) + \left(\frac{2ka}{\pi}\right) \sin(kL) \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) (-2 \cos(kL) + 2i \sin(kL)) - ika \sin(kL)(-2 \cos(kL) + 2i \sin(kL))} =$$

$$\frac{|\cos(kL) - i \sin(kL)|}{|\cos(kL) - i \sin(kL)|} \frac{1}{\left| \cos(kL) + \left(\frac{2ka}{\pi}\right) \sin(kL) \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) - ika \sin(kL) \right|}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{1}{\left| \cos(kL) + \left(\frac{2ka}{\pi}\right) \sin(kL) \ln\left(\frac{2\gamma ka}{\pi e}\right) - ika \sin(kL) \right|} \quad (\text{IX.2})$$

Vergelijking (IX.2) geeft de versterkingsfactor voor een ε -rand. Deze is identiek aan de analytisch berekende versterkingsfactor (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.10)).