

# VOORUITZICHTEN VOOR DE ONTWIKKELING VAN DE TOEGEPASTE MECHANICA

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN  
HOGLERAAR IN DE TOEGEPASTE MECHANICA AAN DE  
TECHNISCHE HOGESCHOOL OP WOENSDAG 28 SEPT. 1949

DOOR

Dr. Ir. W. T. KOITER

DELFTSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ DELFT

1949

*1.10  
J. H. Koiter*

VOORUITZICHTEN VOOR DE  
ONTWIKKELING VAN DE  
TOEGEPASTE MECHANICA

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN  
HOOGLERAAR IN DE TOEGEPASTE MECHANICA AAN DE  
TECHNISCHE HOGESCHOOL OP WOENSDAG 28 SEPT. 1949

DOOR

Dr. Ir. W. T. KOITER

DELFTSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ DELFT

1949

*Mijne Heren Curatoren en Professoren, Dames en Heren  
Lectoren, Privaatdocenten, Instructeurs, Assistenten en  
Studenten; voorts Gij allen, die door Uw aanwezigheid  
van Uw belangstelling blijk geeft,*

*Zeer gewaardeerde Toehoorders,*

Onder de ingenieurswetenschap der toegepaste mechanica wordt in Nederland verstaan de mechanica der vaste, doch vervormbare lichamen, en wel in het bijzonder de ontwikkeling hiervan met het oog op de toepassing op het onderzoek van sterkte, stijfheid en stabiliteit der constructies. Zoals elke technische wetenschap is ook de toegepaste mechanica genoodzaakt voor de beschrijving van de in de werkelijkheid optredende verschijnselen een geïdealiseerd schema te ontwerpen. Het meest wezenlijke kenmerk van het schema der toegepaste mechanica is de continuïteit van de geïdealiseerde constructiematerialen. Hierdoor wordt het mogelijk de inwendige belasting van het lichaam te beschrijven door spanningen, t.w. de door de delen aan weerszijden van een oppervlakte-element in een inwendig punt van het lichaam op elkaar uitgeoefende krachten — die gelijk doch tegengesteld gericht zijn — gedeeld door het oppervlak van het beschouwde element. De voorwaarden voor evenwicht van elk deel van het lichaam — bij bewegingsvraagstukken met toepassing van het beginsel van d'Alembert — hebben dan ten gevolge, dat de spanning op een willekeurig oppervlakte-element in een punt van het lichaam kan worden uitgedrukt in 6 componenten van de spanningen op 3 niet door een lijn gaande vlakken in dat punt, terwijl deze 6 spanningscomponenten nog moeten voldoen aan een drietal simultane partiële differentiaalvergelijkingen met bijbehorende randvoorwaarden. Het is duidelijk dat deze vergelijkingen niet voldoende zijn om de 6 onbekende spanningscomponenten als ondubbelzinnige functies van de plaats in het lichaam te bepalen.

De ervaring heeft echter geleerd, dat vaste lichamen onder de invloed van uitwendige belastingen vervormen, ook al zijn deze vervormingen in het algemeen klein. Wordt deze ervaring passend overgebracht op het inwendige van het lichaam dan is het aanemelijk, dat de vervormingstoestand van een volume-element in

een willekeurig punt van het lichaam ook wordt bepaald door de op dit element werkende belastingen, d.w.z. door de spannings-toestand in het beschouwde punt. De plaatselijke vervormingstoestand wordt evenals de spanningstoestand geheel beschreven door 6 grootheden, de vervormingscomponenten, die kunnen worden uitgedrukt in de afgeleiden van de verplaatsingscomponenten van de punten van het lichaam. Bijzondere gevallen buiten beschouwing latend, kunnen de spanningscomponenten omgekeerd dan ook worden opgevat als functies van de vervormingscomponenten. Substitutie van deze functies in de drie differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden voor de spanningen doet deze vergelijkingen dan overgaan in drie simultane differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden voor de drie verplaatsingscomponenten, hetgeen de hoop wekt dat hiervoor inderdaad voldoende bepaalde oplossingen kunnen worden verkregen.

Zo gemakkelijk als dit is gezegd, zo moeilijk kan het echter worden gedaan. Het is dan ook vrijwel altijd onvermijdelijk om nog verdere vereenvoudigingen in te voeren, waarvan wij er thans enkele met haar consequenties en mogelijkheden nader willen bespreken.

Reeds aan haar benaming is het duidelijk, dat de *klassieke elasticiteitstheorie* het verst is ontwikkeld. Zij vertoont dan ook wel de eenvoudigst denkbare vorm van het eerder geschetste schema, doordien zij het verband tussen spanningscomponenten en vervormingscomponenten lineair stelt (wet van Hooke) en bovendien de verplaatsingen infinitesimaal onderstelt. Meestal wordt daarenboven nog isotropie van het materiaal aangenomen, waarmede het aantal elasticiteitsconstanten, d.w.z. het aantal der onafhankelijke coëfficiënten in de lineaire betrekkingen tussen spanningen en vervormingen, van 21 in het algemene geval tot twee wordt gereduceerd. De resulterende vergelijkingen voor de verplaatsingen en de bijbehorende randvoorwaarden zijn lineair.

Helaas zijn zij toch nog dermate gecompliceerd dat slechts weinig exacte oplossingen bekend zijn, waaronder enkele die voor de techniek van groot belang zijn, o.a. de oplossing van de Saint-Venant voor de op torsie, buiging en dwarskracht belaste prisma-tische staaf. Weliswaar gelden deze oplossingen alleen dan exact indien de randbelastingen volgens een bepaalde verdeling worden aangebracht, een voorwaarde waaraan in de techniek wel nimmer

zal kunnen worden voldaan, desondanks hebben zij een veel grotere draagwijdte op grond van een eveneens door de Saint-Venant voor het eerst duidelijk uitgesproken beginsel, dat van de allerdiepste betekenis is voor de toepassing van de gehele elasticiteitstheorie op technische vraagstukken. Dit beginsel behelst in niet geheel scherpe maar des te aanschouwelijker formulering, dat de spannings-toestand in een deel van een lichaam, dat „ver” verwijderd is van een deel waarop belastende krachten werken, nagenoeg onafhankelijk is van de verdeling dezer krachten doch vrijwel geheel bepaald wordt door hun resultante.

De vooruitzichten voor het uitbreiden van het aantal exacte oplossingen der elasticiteitsvergelijkingen zijn weinig hoopvol. Gelukkig zijn er echter nog andere wegen om ons inzicht in de gedragingen van constructies, welke materialen de wet van Hooke volgen, te verdiepen en te verbreden.

Allereerst dienen te worden genoemd de experimentele methodes voor de bepaling van spanningen in een belaste constructie. De hierop betrekking hebbende beproevingstechniek heeft vooral in en na de oorlog enorme vorderingen gemaakt, die een geheel nieuw arbeidsveld voor de toegepaste mechanica hebben ontsloten. Het experimentele spanningsonderzoek is in het bijzonder onvervangbaar gebleken in die gevallen, waarin hetzij de op de constructie werkende belastingen, hetzij de aan de constructie verschaft ondersteuning onvoldoende bekend zijn, waardoor een betrouwbare basis voor berekening zou ontbreken.

Indien wij de experimentele oplossingsmethodes nu niet verder bespreken, dan geschiedt dit niet uit gebrek aan deferentie voor haar betekenis, doch alleen omdat U hierover niet lang geleden van deze plaats een uitvoerige uiteenzetting is gegeven.

De oudste benaderingsmethode voor de oplossing van het elasticiteitsvraagstuk is wel de schematisering van constructies, welke afmetingen in twee richtingen klein zijn t.o.v. de afmeting in de derde richting, tot eendimensionale elastische lichamen (staven en balken), waarvan de elasticiteit zodanig is bepaald, dat zo goed mogelijke overeenstemming met de algemene theorie wordt verkregen. De eerste toepassing van deze methode is de balkentheorie van Bernoulli, welke zelfs reeds lang vóór de opstelling der algemene vergelijkingen van Navier werd ontwikkeld. Vele zijn de pogingen geweest om een soortgelijke schematisering tot stand te

brengen voor constructies, waarvan de afmetingen in één richting klein zijn t.o.v. de afmetingen in de twee andere richtingen (platen en schalen), doch het is pas aan Kirchhoff gelukt het plaatprobleem langs deze weg tot een oplossing te brengen.

Door deze benaderingen wordt bereikt, dat het balkenvraagstuk door een gewone lineaire differentiaalvergelijking wordt beschreven, terwijl het plaatvraagstuk uiteenvalt in twee afzonderlijke problemen, die elk door een vlakke bipotentiaalfunctie worden beheerst.

Hoe eenvoudig de oplossing van het balkenvraagstuk uit mathematisch oogpunt ook moge zijn, het is wel gebleken, dat bij het volledig doorrekenen van meer samengestelde, veelvuldig statisch onbepaalde balksystemen nog veel vernuft nodig is om met een dragelijke omvang van het rekenwerk bevredigende resultaten te verkrijgen. In de relaxatiemethode van Southwell en haar voorloper, de vereffeningsmethode van Hardy-Cross, beschikt de ingenieur evenwel over doeltreffende en eenvoudige rekenwijzen voor de behandeling van ingewikkelde systemen, terwijl voor eenvoudiger vraagstukken hem reeds lang tal van rekenwijzen ter beschikking staan. Hoewel verdere vereenvoudiging der rekenmethodes zeker niet onwelkom zou zijn, kan het balkenvraagstuk derhalve in hoofdzaak als opgelost worden beschouwd.

De oplossing van de bipotentiaalvergelijkingen voor de plaatvraagstukken is echter ook mathematisch nog allerm minst eenvoudig en de moeilijkheden zijn nog groter voor de schaalvraagstukken, hoofdzakelijk omdat deze niet meer uiteenvallen in twee afzonderlijke problemen. Voor de numerieke beheersing hiervan kan evenwel steeds ook gebruik worden gemaakt van de nu te bespreken benaderingsmethodes voor het algemene elasticiteitsprobleem

Tot de vruchtbaarste methodes behoren die, welke berusten op de variatieprincipes voor het elastisch evenwicht. De oudste toepassing hiervan is die van Rayleigh-Ritz op de potentiële energie van het elastisch lichaam met zijn belastende krachten. Het variatieprincipe voor de potentiële energie drukt uit, dat deze energie in de optredende evenwichtstoestand minimaal is, indien zij wordt vergeleken met de potentiële energie in willekeurige naburige configuraties of wel verplaatsingstoestanden, mits deze slechts voldoen aan de het elastisch lichaam opgelegde kinematische voorwaarden. Een benaderingsoplossing volgens Ritz wordt nu verkregen, indien de verplaatsingen worden aangenomen in de vorm

van een lineaire combinatie van bekende, onafhankelijke functies, die aan de kinematische randvoorwaarden voldoet, en de coëfficiënten van deze lineaire combinatie zodanig worden bepaald, dat de quadratische vorm in deze coëfficiënten, die ontstaat bij substitutie van de aangenomen verplaatsingen in de uitdrukking voor de potentiële energie, minimaal is. Het is duidelijk, dat het rekenwerk van deze methode sterk toeneemt met het aantal functies, dat in de lineaire combinatie wordt betrokken. Voor het bereiken van bruikbare resultaten met een redelijke hoeveelheid rekenwerk zal dan ook veel afhangen van een doeltreffende keuze van een beperkt aantal dezer functies. De nauwkeurigheid, waarmede de energie wordt benaderd, is voorts groter dan die van de verplaatsingen en deze worden op haar beurt in het algemeen weer nauwkeuriger gevonden dan haar afgeleiden, d.w.z. de vervormingen en spanningen.

Doch ook het principe van Castigliano over het minimum van de vormveranderingsarbeid, uitgedrukt in de spanningen, kortweg de spanningsenergie, kan, zoals pas later naar voren is gebracht, voor het verkrijgen van benaderingsoplossingen worden gebruikt. Het principe van Castigliano drukt immers uit, dat in een vast ondersteunde constructie met willekeurige gegeven belastingen in de optredende spanningstoestand de spanningsenergie minimaal is, vergeleken met alle andere naburige spanningstoestanden, die slechts aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen. Een benaderingsoplossing van het vraagstuk kan nu weer worden aangegeven, indien de spanningstoestand wordt aangenomen in de vorm van een lineaire combinatie van spanningstoestanden, die aan de evenwichtsvergelijkingen voldoet, en de coëfficiënten van deze lineaire combinatie zodanig worden bepaald, dat de quadratische vorm in deze coëfficiënten, die ontstaat bij substitutie van de aangenomen spanningstoestand in de spanningsenergie, minimaal is. Ten aanzien van de bereikbare nauwkeurigheid bij een dragelijke omvang van het rekenwerk gelden soortgelijke overwegingen als bij de methode van Ritz.

Van groot belang voor de beoordeling van de nauwkeurigheid van de met het principe van het minimum der potentiële energie of met het principe van Castigliano verkregen benaderingen is het dualistisch karakter van deze principes. De waarde van de spanningsenergie bij de exacte oplossing van het principe van Castigliano

is namelijk juist het tegengestelde van de waarde der potentiële energie bij de exacte oplossing van het bij deze energie behorende principe. Mitsdien levert een benaderingsoplossing volgens Castigliano, waarbij een bovenste grens voor de spanningsenergie wordt gevonden een onderste grens voor de potentiële energie, en omgekeerd. De energie die bij de exacte oplossing behoort, kan dus steeds van twee zijden worden benaderd.

In de oorlog is door Weber een zinvolle uitbreiding gegeven aan de combinatie van de twee besproken minimumprincipes in dier voege, dat zij ook kunnen worden gebruikt om grenzen aan te geven waarbinnen de verplaatsingen en haar afgeleiden, dus ook de spanningen, volgens de exacte oplossing zijn gelegen. Soortgelijke resultaten zijn ook verkregen door Prager en Synge, gebaseerd op de theorie der functieruimten, welke metriek door de elastische energie is bepaald. Het lijkt waarschijnlijk, dat in deze richting nog belangrijke vooruitgang kan worden bereikt.

Talrijk zijn ook de mogelijkheden gebleken om concrete elasticiteitsvraagstukken benaderend op te lossen door de partiële differentiaalvergelijkingen te vervangen door differentie-vergelijkingen en deze vervolgens door iteratie tot een numerieke oplossing te brengen. Deze methode, die in beginsel reeds door Liebmann is aangegeven voor de potentiaalvergelijking, is vooral door Southwell en zijn medewerkers onder de benaming relaxatiemethode met groot raffinement zodanig uitgewerkt, dat deze berekeningsmethode voor vele tweedimensionale vraagstukken experimentele oplossingsmethodes op grond van analogieën heeft verdrongen.

Een van de grootste principiële moeilijkheden bij de toepassing van de relaxatiemethode is de passende vertaling van de randvoorwaarden voor de oorspronkelijke differentiaalvergelijkingen in die voor de deze vergelijkingen vervangende differentiebetrekkingen. Bovendien is, ondanks de vele vernuftige door Southwell c.s. bedachte kunstgrepen, de convergentie van de iteratie bij sommige vraagstukken, o.a. voor de bipotentiaalvergelijking, nog zo langzaam dat de berekeningen uiterst tijdrovend zijn. In deze opzichten zouden verbeteringen zeer welkom zijn.

De bruikbaarheid van de met de klassieke elasticiteitstheorie verkregen resultaten voor de toepassing op constructies wordt uiteraard bepaald door het antwoord op de vraag, of het schema

dezer theorie de omstandigheden in de constructie voldoende nauwkeurig beschrijft. Dit is echter zeker niet altijd het geval.

In de eerste plaats is de wet van Hooke, ofschoon zij voor de meeste constructiematerialen in een beperkt gebied van spanningen en vervormingen met redelijke nauwkeurigheid geldt, bij grote materiaalspanningen niet meer toepasselijk. Bij deze grote spanningen nemen de vervormingen veel sneller toe dan volgens de wet van Hooke, terwijl deze vervormingen ook niet meer na ontlasting verdwijnen; het materiaal gedraagt zich niet langer zuiver elastisch, doch geheel of ten dele plastisch. Weliswaar moeten de spanningen in de meeste constructies onder de voorkomende belastingen in het elastische gebied blijven, voor de beoordeling van de veiligheidsfactor is het noodzakelijk te weten in welke mate de belastingen zouden kunnen worden verhoogd, alvorens de constructie zou bezwijken, en dit vraagstuk kan alleen tot oplossing worden gebracht door onderzoek van het gedrag in het plastische gebied.

Maar ook indien de wet van Hooke volledig van toepassing is kan de klassieke elasticiteitstheorie nog ernstig tekort schieten in haar beschrijving van het gedrag onzer constructies. Om dit in te zien is het voldoende op te merken, dat de uit deze theorie onweerlegbaar volgende bepaaldheidsstelling van Kirchhoff vaststelt, dat er slechts één evenwichtstoestand bestaat die aan alle vergelijkingen en randvoorwaarden der theorie voldoet, in flagrante tegenspraak met het bekende knikverschijnsel. Zoals reeds lang bekend is, ligt de oorzaak van deze tegenspraak in het feit, dat de verplaatsingen en vervormingen, hoewel klein, niet infinitesimaal zijn en dat de verwaarlozing van alle in de afgeleiden der verplaatsingen quadratische termen der vervormingscomponenten, welke verwaarlozing tot de lineaire elasticiteitsvergelijkingen voerde, onder bepaalde omstandigheden, b.v. in knikvraagstukken, niet geoorloofd is.

Alvorens over te gaan tot een korte bespreking van de elasticiteitstheorie voor eindige vervormingen en van de plasticiteitstheorie dient nog te worden opgemerkt, dat ook indien geen der reeds besproken tekortkomingen van de klassieke theorie aan de dag treedt, nog in ernstige mate met de ervaring strijdende resultaten kunnen worden verkregen. Zo is gebleken, dat de met behulp van de theorie correct berekende spanningen in gekerfde

staven of in constructies met spanningsconcentraties onder bekende wisselende belastingen belangrijk hoger kunnen zijn dan de aan proefstaven vastgestelde vermoeiingssterkte van het materiaal. De oorzaak hiervoor moet wel worden gezocht in het gebrek aan continuïteit der constructiematerialen, waarmede het schema van de theorie geen rekening houdt. Verbetering van de theorie op dit punt biedt wel zeer grote moeilijkheden, welke nog worden geaccentueerd door het ontbreken van een helder inzicht in het vermoeiingsverschijnsel. Voorlopig zal het kostbare en tijdrovende experimentele vermoeiingsonderzoek van complete constructies en onderdelen daarvan niet kunnen worden beperkt, integendeel.

Een van de wezenlijke vereenvoudigingen, die in de klassieke theorie het gevolg zijn van de onderstelling van infinitesimale vervormingen, is dat de evenwichtsvergelijkingen kunnen worden betrokken op lichaamselementen in de bekende, onvervormde toestand. Zodra de *eindigheid der vervormingen* in aanmerking wordt genomen, is dit niet meer geoorloofd. Bovendien komt men dan voor de vraag te staan of de spanningen het meest doelmatig worden gedefinieerd met behulp van de vlakke-elementen in de vervormde of in de onvervormde toestand, terwijl voor de bepaling van een materieel punt van het lichaam ook zowel de coördinaten in de onvervormde toestand (coördinaten van Lagrange), als die in de vervormde toestand (coördinaten van Euler) kunnen worden gebezigd. Deze verscheidenheid van beschrijvingsmogelijkheden, die alle in de literatuur voorkomen, maakt het niet gemakkelijk een helder overzicht te verkrijgen zonder gebruik te maken van tensorrekening. Hoewel de tensorrekening ook in de klassieke theorie reeds nuttige diensten kan bewijzen bij de transformatie der vergelijkingen naar algemene kromlijnige coördinaten, wordt zij pas in de theorie voor eindige vervormingen het aangewezen instrument.

Voor zover uitsluitend elastische vervormingen in aanmerking worden genomen, moet wegens de omkeerbaarheid van het vervormingsproces het verband tussen spanningen en vervormingen zodanig zijn, dat er een elastische potentiaal bestaat. Deze potentiaal kan dan ook als het uitgangspunt van de theorie worden gekozen, waarna de evenwichtsvergelijkingen kunnen worden afgeleid uit het beginsel van de stationnaire waarde der potentiële

energie. Deze weg biedt het voordeel, dat een expliciete definitie van de spanningen niet nodig is en dat de elasticiteitswet op overzichtelijke wijze wordt geformuleerd.

De eenvoudigste elasticiteitswet, die kan worden aangenomen, is de uitbreiding van de wet van Hooke tot eindige vervormingen in die zin, dat de elastische potentiaal een homogene quadratische functie is van de vervormingen, welke wet bij een passende beschrijving van vervormingstoestand en spanningstoestand ook de lineariteit tussen spanningen en vervormingen bestendigt. Er zijn voldoende aanwijzingen, dat voor de meeste constructiematerialen deze uitgebreide wet van Hooke bevredigend is, zolang tenminste de elasticiteitsgrens van het materiaal niet wordt overschreden.

De algemene niet-lineaire vergelijkingen worden echter steeds zo gecompliceerd, dat een volledige oplossing reeds voor zeer simpele belastinggevallen van eenvoudige constructies meestal onmogelijk zal blijken. In de benaderingsmethode van Rayleigh-Ritz beschikt men echter ook hier over een in vele gevallen doeltreffend apparaat om benaderingsoplossingen te verkrijgen, dat reeds herhaaldelijk met succes is toegepast, zij het ook dat het rekenwerk aanzienlijk moeilijker en omvangrijker is dan in de lineaire theorie.

Een essentieel kenmerk van de het vraagstuk der eindige vervormingen beheersende niet-lineaire vergelijkingen is de mogelijkheid van het bestaan van meervoudige oplossingen. Van deze mogelijkheid is het knikverschijnsel het eenvoudigste voorbeeld, dat tevens voor een relatief gemakkelijke behandeling toegankelijk is, doordat in een kniktoestand *infinitesimaal* naburige oplossingen mogelijk zijn. Hierdoor worden de vergelijkingen en randvoorwaarden, die de mogelijkheid van de overgang van een bekend onderstelde kniktoestand naar een naburige evenwichtstoestand beschrijven, homogeen lineair in de voor deze overgang vereiste extra-verplaatsingen. Deze knikvergelijkingen laten in het algemeen slechts een van nul verschillende oplossing toe, indien de spanningen en vervormingen in de uitgangstoestand aan bepaalde voorwaarden voldoen, welke de knikvoorwaarden worden genoemd.

Vele knikvraagstukken zijn langs deze weg, veelal uitgaande van het geschematiseerde elastisch gedrag van balken en platen, incidenteel tot oplossing gebracht, alvorens de algemene theorie hier-

voor door Southwell, Biezeno en Hencky werd ontwikkeld. Van groot belang zijn ook de recente beschouwingen van Biot en van der Neut, die tot de met de ervaring geheel overeenstemmende conclusie voeren, dat bij de gebruikelijke constructiematerialen elastische knik slechts mogelijk is, indien de bij kleine verplaatsingen optredende hoekverdraaiingen een orde groter kunnen zijn dan de vervormingen, hetgeen alleen het geval kan zijn bij constructies, waarvan tenminste één afmeting klein is t.o.v. de overige afmetingen (slanke balken, dunne platen en schalen). Ofschoon blijkens de ervaring grote voorzichtigheid moet worden betracht bij de verwaarlozing van ogenschijnlijk ondergeschikte termen in een knikvergelijking, kan dit inzicht soms leiden tot verantwoorde vereenvoudiging van knikvraagstukken.

Ook voor de behandeling van knikvraagstukken, en wel in het bijzonder weer voor het verkrijgen van benaderingsoplossingen, kan het energie-principe grote voordelen bieden. Is in elke evenwichtstoestand de eerste variatie van de potentiële energie nul voor elke kinematisch mogelijke variatie van de verplaatsingen, in een stabiele toestand is de tweede variatie van deze energie altijd positief en zijn infinitesimaal naburige evenwichtstoestanden niet mogelijk. Knik treedt op, indien de belastingen op de constructie zo hoog zijn opgevoerd, dat de tweede variatie van de energie juist nul wordt voor een zeer bepaalde variatie der verplaatsingen en voor alle andere variaties der verplaatsingen nog positief is. De opstelling van de knikvergelijkingen kan derhalve geschieden uit de voorwaarde, dat het minimum van de tweede variatie der energie ter waarde nul wordt bereikt voor van nul verschillende verplaatsingsvariaties. De uitvoering van dit programma leidt, zoals ook mocht worden verwacht, tot vergelijkingen, die met de langs de eerder besproken weg verkregen overeenstemmen.

Het energie-principe biedt daarenboven de mogelijkheid tot het benaderend onderzoek van niet meer infinitesimaal naburige evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van de knikbelasting. Het lijkt aannemelijk, dat in deze richting voortgaand nog belangrijke uitkomsten zullen kunnen worden verkregen.

Hoewel de benaderingsoplossing van stabiliteitsvraagstukken met het energiebeginsel reeds lang met succes wordt toegepast, is het volledig inzicht pas veel later verkregen. Veel verkeerde op-

vattingen zijn ontstaan door de toepassing van dit beginsel op de onsamendrukbare, op druk belaste staaf — probleem van Euler — in welk geval de kinematische voorwaarde van onsamendrukbaarheid tot het resultaat voert, dat het negatieve deel van de tweede variatie der energie afkomstig is van de belastende drukkrachten. Dit bijzondere geval werd veelal gegeneraliseerd, doordien ook algemeen een negatieve tweede variatie van de energie der belastingen voor de mogelijkheid van knik essentieel werd geacht. Indien deze misvatting binnenkort geheel zal zijn verdwenen, dan zal dit in hoofdzaak zijn te danken aan het werk van Trefftz en zijn medewerkers.

De meest essentiële complicatie, waarvoor de toegepaste mechanica in het *plastische gebied* wordt gesteld, is gelegen in de onomkeerbaarheid van het deformatieproces. Dientengevolge is de spanningstoestand in een punt van het lichaam niet meer volledig bepaald door de ogenblikkelijke plaatselijke vervormingstoestand doch hangt hij tevens af van de vervormingsgeschiedenis in dat punt.

Gelukkig kan voor veel vraagstukken deze complicatie buiten beschouwing blijven, omdat de meeste constructiematerialen zich bij *monotoon toenemende belasting* met redelijke benadering quasi-elastisch gedragen, zij het volgens een niet-lineaire elasticiteitswet. De quasi-elasticiteit kome dan hierin tot uitdrukking, dat ook nu een potentiaal bestaat, waaruit de spanningscomponenten door differentiatie naar de vervormingscomponenten worden verkregen. Deze quasi-elastische potentiaal is uiteraard niet meer een quadratische functie der vervormingscomponenten. De evenwichtstoestanden van een lichaam, welks belasting monotoon wordt opgevoerd, worden dan weer bepaald door het principe van het minimum der totale potentiële energie, samengesteld uit de quasi-elastische energie en de energie der belastingen. Dit beginsel kan dus ook weer worden gebruikt voor het verkrijgen van benaderingsoplossingen.

In gevallen, waarin de vervormingen zo klein zijn, dat volstaan kan worden met de in de verplaatsingsafgeleiden lineaire termen, kan bovendien, met enkele de toepasselijkheid weinig benadelende restricties, ook voor het quasi-elastische geval het principe van Castigliano worden bewezen, met dien verstande dat thans in



de plaats van de spanningsenergie de complementaire spanningsenergie treedt. De complementaire spanningsenergie, uit te drukken in de spanningen, is daarbij bepaald door de som van de producten van bijbehorende spanningscomponenten en vervormingscomponenten, verminderd met de quasi-elastische energie; in het lineaire geval is de complementaire spanningsenergie gelijk aan de spanningsenergie zelf. Ook nu levert de combinatie van het potentiële energie-principe en van het principe van Castigliano een mogelijkheid om de nauwkeurigheid van benaderingen met deze principes te controleren, omdat ook thans de exacte waarden dezer minima elkaars tegengestelde zijn. De vooruitzichten voor het uitbreiden van ons inzicht in het gedrag van constructies in het plastische gebied mogen dan ook hoopvol worden geacht.

Voor vele taai, quasi-elastische materialen kan op grond van proeven bovendien worden aangenomen, dat de onderlinge verhouding der componenten van de spanningsdeviator, dat is het spanningscentrum verminderd met het hydrostatische deel der spanningen, dezelfde is als de onderlinge verhouding der componenten van de vervormingsdeviator, d.w.z. dat de componenten van de spanningsdeviator worden verkregen door de componenten van de vervormingsdeviator te vermenigvuldigen met eenzelfde factor, die uitsluitend afhangt van het plaatselijke belastingniveau. Bij verwaarlozing van de door het hydrostatische deel der spanningen veroorzaakte volumeverandering, welke bijna altijd klein is in verhouding tot de plastische vervormingen, heeft dit ten gevolge, dat in een ideaal doelmatige constructie, waarin het belastingniveau in alle punten bij definitie hetzelfde is, de spanningsverdeling dezelfde is als die in een lineair elastische constructie. Hoewel een ideaal doelmatige constructie niet te verwezenlijken is, wordt zij dikwijls redelijk benaderd, indien gewichtsbesparing van essentiële betekenis is, met het gevolg dat een sterkteberekening, waarbij de wet van Hooke tot aan de breuklast wordt aangenomen, in deze gevallen veelal nog treffend goede uitkomsten geeft.

De ernstige moeilijkheden, die het gevolg kunnen zijn van de onomkeerbaarheid van het plastische vervormingsproces, worden goed geïllustreerd door het plastische knikvraagstuk voor de prismatische staaf. Gedurende vele jaren werd de door Engesser en von Kármán aangegeven oplossing algemeen aanvaard. Eerst onlangs is door Shanley aangetoond, dat zij slechts geldt, indien de

staaf tijdens het opbrengen van de belasting zijdelings wordt gesteund en pas vrij wordt gelaten wanneer de eindbelasting is bereikt. In werkelijkheid is de staaf ook gedurende het opbrengen van de belasting vrij met het gevolg, dat knik eerder kan optreden dan de theorie van von Kármán aangeeft. De oorzaak hiervan is, dat bij de theorie van von Kármán tijdens het uitbuigen ontlasting van een deel der doorsnede optreedt, waarbij de spanningen veel sterker veranderen dan bij toenemende belasting, terwijl tijdens het uitbuigen onder toenemende drukbelasting geen ontlasting behoeft op te treden. Dientengevolge kan het buigend moment in de staaf, dat de rechte toestand poogt te herstellen, volgens von Kármán groter zijn dan in het geval van Shanley.

Ter afsluiting van de enkele blikken, die wij vanuit bereikte resultaten in verschillende richtingen hebben geworpen over de vooruitzichten voor de ontwikkeling der toegepaste mechanica, is het goed ons rekenschap te geven van de consequenties der opdracht, welke de toegepaste mechanica als ingenieurswetenschap is toebedeeld. De toegepaste mechanica zou deze taak misverstaan, indien zij er niet voortdurend op gericht zou zijn haar resultaten toegankelijk te maken voor de ingenieur. Mitsdien moet er grote betekenis aan worden gehecht deze resultaten op aanschouwelijke wijze weer te geven en zo mogelijk ook af te leiden.

Helaas kan aan deze laatste wens niet altijd worden voldaan. De moderne ontwikkeling van de theorie der toegepaste mechanica maakt steeds meer gebruik van abstracte methodes en deze ontwikkeling is onvermijdelijk voor het verkrijgen van nieuwe, voor de techniek belangrijke resultaten. In wezen is ook de aanschouwelijkheid in grote mate een verschijnsel van traditie. Vele methodes en theorieën, die thans aanschouwelijk worden geacht, behoorden een eeuw geleden tot datgene wat uiterst abstract moest worden genoemd en het lijdt geen twijfel, dat veel van hetgeen wij nu abstract noemen over een eeuw aanschouwelijk zal heten. Te strenge onderwerping aan de aanschouwelijkheidsgedachte zou verstarrend werken op de ontwikkeling der toegepaste mechanica met alle nadelen van dien voor de techniek. Evenmin als een industrie blijvend kan bloeien zonder gebruik te maken van steeds betere gereedschappen, machines en werkmethodes met veelal terzijdestelling van vroegere ervaring, kan de technische wetenschap haar

taak vervullen binnen het keurslijf van traditionele aanschouwelijkheid.

Daarentegen moet het toegankelijk maken van de resultaten als een gebiedende eis worden erkend. Terecht mag de techniek verlangen, dat haar de toepassing van de resultaten onzer wetenschap zo gemakkelijk mogelijk wordt gemaakt, en aan de bevrediging van dit verlangen behoeft niet te worden getwijfeld, indien de wetenschappelijke ingenieurs van nu en de toekomst hun plicht even goed beseffen als hun voorgangers.

*Dames en Heren,*

Bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Toegepaste Mechanica aan de Technische Hogeschool moge ik aan Hare Majesteit de Koningin mijn eerbiedige dank betuigen voor mijn benoeming.

*Mijne Heren Curatoren,*

Uw medewerking tot mijn benoeming stemt mij tot grote dankbaarheid. Ik moge U verzekeren, dat ik alle krachten, die in mijn vermogen liggen, zal aanwenden om mijn taak aan de Technische Hogeschool zo goed mogelijk te vervullen en het in mij gestelde vertrouwen niet te beschamen.

*Mijne Heren Professoren der Technische Hogeschool,*

Het is voor mij een voorrecht en een onderscheiding in Uw midden te worden opgenomen. Gaarne doe ik een beroep op Uw veelzijdige kennis, inzicht en ervaring om mij met Uw raad terzijde te staan, zoals velen onder U reeds tot mijn vorming hebben bijgedragen, terwijl ik U kan verzekeren, dat ik mijnerzijds zal trachten U een goed collega te zijn.

*Mijne Heren Hoogleraren van de Afdeling der Werktuigbouwkunde, Scheepsbouwkunde en Vliegtuigbouwkunde,*

Uw Afdeling, die ik nu met trots en erkentelijkheid ook de mijne mag noemen, heeft een buitengemeen belangrijk deel van de taak der opleiding van ingenieurs voor de industrialisatie van ons land. Ik hoop en vertrouw, dat ik in de vervulling van deze taak in prettige samenwerking met U mijn deel zal mogen bijdragen.

*Hooggeleerde Biezeno, Zeer gewaardeerde Leermeester,*

Onder allen die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen en aan wie ik deswege grote dank verschuldigd ben, neemt Gij de voorste plaats in. Uw bezielende voordrachten in de toegepaste mechanica hebben de richting bepaald, waarin ik met voorliefde werkzaam ben geweest en zal blijven werken. Met Uw uiterst scherpzinnige doch steeds opbouwende critiek hebt Gij mij de voortzetting van mijn studie der toegepaste mechanica na het behalen van mijn ingenieursdiploma aantrekkelijk, doch niet gemakkelijk gemaakt en ik zal U daarvoor steeds dankbaar blijven.

Ik ben mij bewust hoe zwaar het U is gevallen het vak Uwer liefde grotendeels vaarwel te zeggen om de hoge, door U niet gezochte taak van Rector Magnificus dezer Hogeschool op U te nemen. Dat U er zich mede heeft kunnen verenigen, dat ik in zekere zin als Uw opvolger werd benoemd, acht ik de grootste onderscheiding die mij te beurt kon vallen, doch tevens de zwaarste opdracht die op mijn schouders kon worden gelegd. Te goed besef ik immers Uw uitzonderlijk vermogen om bij al Uw studenten een letterlijk onuitwisbare indruk van Uw colleges in de toegepaste mechanica achter te laten, alsmede Uw strijdbaarheid in de voorste gelederen van hen die onze wetenschap vooruit brengen, om Uw taak lichtvaardig over te nemen. Alleen de zekerheid dat ik ook thans nog onvoorwaardelijk op Uw steun mag rekenen, heeft het mij mogelijk gemaakt mijn benoeming te aanvaarden.

*Hooggeleerde Koch,*

Ik beschouw het als een bijzonder voorrecht als Uw collega in de sub-afdeling der toegepaste mechanica te zijn opgenomen. Met dankbaarheid gedenk ik nog de tijd, die ik onder Uw directe leiding heb mogen werken in Uw laboratorium, waarbij ik gelegenheid had met Uw grote vindingrijkheid kennis te maken. De hartelijkheid, waarmede Gij mij welkom hebt geheten, heeft mij zeer getroffen en heeft mij de overtuiging geschonken, dat ik ook in de toekomst veel van Uw grote ervaring, inzicht en kennis zal mogen profiteren. Ik kan U hierbij de verzekering geven, dat ik ook van mijn kant alles zal doen ten bate van een aangename en vruchtbare samenwerking in het belang van het onderwijs in en de ontwikkeling van de toegepaste mechanica.

*Hooggeleerde van der Neut,*

In de vliegtuigbouw heeft de toegepaste mechanica een van haar vruchtbaarste toepassingsmogelijkheden gevonden. Grote erkentelijkheid draag ik U toe, zowel voor de wijze, waarop Gij mij hebt rondgeleid in dit domijn, toen ik na beëindiging van mijn studie enige jaren onder Uw leiding mocht werken, als voor de grote vrijheid, die Gij mij liet gedurende de laatste oorlogsjaren in de bewerking van de mij andermaal op Uw afdeling van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium toegevallen taak.

*Hooggeleerde van der Maas,*

Bijzondere dankbaarheid gevoel ik jegens U bij de herinnering aan onze samenwerking in het Nederlands Instituut voor Vliegtuigontwikkeling. Uw onverzettelijke volharding in moeilijkheden en grote werkkraft en inzicht hebben op mij een even diepe indruk gemaakt als Uw vriendschap en menselijkheid. Het is mij een grote voldoening dat ik ook thans nog, zij het in andere richting, met U mag samenwerken.

*Hooggeachte van Ede van der Pals,*

Met grote dankbaarheid kan ik terugzien op de periode die ik in de door U geleide Rijksluchtvaartdienst heb mogen werken. Gij hebt mij zeer aan U verplicht, niet alleen door het door U in mij gestelde vertrouwen, doch bovenal door Uw stimulerend voorbeeld van plichtsbetrachting en door Uw persoonlijke belangstelling.

*Hooggeachte Backer,*

Ook jegens U gevoel ik grote erkentelijkheid voor de kameraadschappelijke wijze waarop Gij de leiding over mijn werkzaamheden bij de Rijksluchtvaartdienst hebt uitgeoefend en in het bijzonder voor het vertrouwen waarvan Gij onmiddellijk na de aanvaarding van Uw functie blijk hebt gegeven.

*Hooggeachte de Winter,*

Slechts kort had onze samenwerking, waarbij Gij de leiding had, mogen duren toen het onheil ons land overviel en Gij reeds

spoedig tot andere werkzaamheid werd geroepen, doch lang genoeg om op mij vele van Uw principiële inzichten op luchtvaarttechnisch en industrieel gebied over te dragen. Veel dank ik aan onze vriendschappelijke discussies, die ook na het uiteenlopen van onze dagtaken gelukkig konden worden voortgezet.

*Hooggeachte Koning,*

Met grote erkentelijkheid moge ik hier ook gewagen van Uw aandeel in mijn wetenschappelijke vorming in beide perioden van mijn werkzaamheid op Uw laboratorium en van de vriendschap en hulpvaardigheid, waarmede Gij mij steeds tegemoet zijt getreden.

*Mijne Heren Collega's en Medewerkers bij de Rijksluchtvaartdienst,*

Onze samenwerking heeft thans een einde genomen alvorens het merendeel der bij Uw Dienst na de oorlog aangesneden vraagstukken zijn oplossing heeft verkregen. Uitermate zwaar is dan ook nog steeds de taak die op Uw schouders rust. Het afscheid van deze taak is mij zeer moeilijk gevallen, niet het minst omdat zij dank zij Uw effectieve medewerking altijd een aangename opdracht is geweest. Het is mij een behoefte U van deze plaats mijn dank hiervoor te betuigen en ik kan U niet beter toewensen dan dat U er in zult slagen in eendrachtige samenwerking Uw zware doch schone taak te volvoeren.

*Mijne Heren Vertegenwoordigers van Burgerluchtvaart, Militaire Luchtvaart, Vliegtuigindustrie, Nederlands Instituut voor Vliegtuigontwikkeling en Nationaal Luchtvaartlaboratorium,*

Vele zijn de banden die mij met U hebben verbonden en ik weiger te geloven dat deze nu ook alle zijn verscheurd; daarvoor voel ik mij te veel jegens U verplicht, terwijl mij ook nog een, zij het bescheiden, aandeel in de opleiding van Uw ingenieurs is toe- vertrouwd.

De Nederlandse luchtvaart verkeert nog altijd in een uiterst kritieke toestand. De burgerluchtvaart heeft een steeds feller concurrentiestrijd met het buitenland te voeren, waarbij de wapens der luchtvaartpolitiek, waarmede ons land slecht is toegerust, in

toenemende mate worden gebruikt, terwijl zij haar veiligheidsniveau nog aanzienlijk zal moeten verhogen. De militaire luchtvaart staat pas aan het begin van haar opbouw. Aanzienlijke krachtsinspanningen zullen nog zijn vereist om onze luchtvaart tot een harmonisch geheel op te bouwen, waarin ook de vliegtuig-industrie, de vliegtuigontwikkeling en het luchtvaartonderzoek de hun toekomstige plaats zullen moeten innemen. Ik moge U toewensen dat het U zal gelukken in eendrachtige samenwerking deze doeleinden te verwezenlijken.

*Dames en Heren Studenten,*

Wanneer ik U zeg, dat het slagen van de algemeen als noodzakelijk erkende industrialisatie van Nederland mede afhankelijk is van aantal en hoedanigheid van de beschikbaar komende ingenieurs, vertel ik U niets nieuws. Het grote aantal van U, dat deze roep heeft verstaan en zich heeft laten inschrijven aan onze Hogeschool, stemt tot dankbaarheid. Ik mag U echter niet verhelen dat Uw aantal nog niet de vereiste hoedanigheid waarborgt, integendeneel soms door overvulling van laboratoria en tekenzalen het verkrijgen daarvan bemoeilijkt. Te groter beroep wordt er dan ook op Uw eigen werkzaamheid en studie gedaan om het gestelde doel te bereiken. Ik reken het mij tot een voorrecht U hierin terzijde te mogen staan.

*Zeer geachte Toehoorders,*

Het is voor mij een diepe teleurstelling geweest dat Zij, die mij het naaste staat en die ook voor mijn werk steeds een onmisbare steun is geweest, door langdurige ziekte niet in de gelegenheid was deze plechtigheid bij te wonen. Ik moge besluiten met mijn dierbaarste wens uit te spreken, dat Zij spoedig volledig herstel van Haar gezondheid mag vinden.

Ik heb gezegd.



