Vakcode CT2100

Vloeistofmechanica

April 2002

Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen

Prof.dr.ir. J.A. Battjes

TU Delft Delft University of Technology

69310914
Bestelnummer: 06917280008

INHOUDSOPGAVE

1 INLEIDING 1

2 VLOEISTOFEIGENSCHAPPEN 5
2.1 Continuümmodel 5
2.2 Massadichtheid 5
2.3 Constitutieve vergelijkingen 6
2.4 Grensvlakspanning 15
2.5 Gelijkvormigheid en dimensie-analyse 17

3 HYDROSTATICA 23
3.1 Inleiding 23
3.2 Constitutieve betrekkingen 23
3.3 Evenwichtsvoorwaarden 24
3.4 Piëzometrisch niveau 28
3.5 Krachten op wanden 31

4 KINEMATICA 35
4.1 Snelheidsveld 35
4.2 Volumestroom en meevoering 41
4.3 Variaties in ruimte en tijd 47
4.4 Versnelling van een vloeistofdeeltje 50
APPENDIX - Versnelling van een vloeistofdeeltje 53

5 MASSABALANS EN VOLUMEBALANS 55
5.1 Balansvergelijkingen (algemeen) 55
5.2 Onsamendrukbaarheid 57
5.3 Volumebalans voor een stroombuis 58
5.4 Volumebalans voor een bekken 59

6 DYNAMICA VAN EEN DEELTJE 61
6.1 Impuls 61
6.2 Impulsoverdracht 61
6.3 Impulsbalans voor een deeltje 64
6.4 Piëzometrisch niveau 65
6.5 Vergelijking van Euler in natuurlijk assenstelstel 66
6.6 Toepassingen 72
6.7 Gelijkvormigheid 78

7 NIET-STATIONAIRE STROMEN 81
7.1 Leeg- en vollopen van reservoirs 81
7.2 Versnellende stroom in pijpleiding 85
7.3 Oscillerende stroming tussen twee reservoirs 91

8 **ENERGIEBALANS VOOR EEN STROOMBUIS** 95
8.1 Energie-overdracht 95
8.2 Energie-overdracht en energiehoogte 96
8.3 Energiebalans 98
8.4 Toepassingen 100

9 **IMPULSBALANS VOOR EEN STROOMBUIS** 109
9.1 Impulsoverdracht 109
9.2 Impulsbalans 112
9.3 Vloeistofstralen 113
9.4 Stroom over lange overlaat 116
9.5 Stromen in gesloten leidingen 119
9.6 Vertragingsverliezen in pijpleidingen 127

10 **SNEL VERANDERENDE STROMEN IN OPEN WATERLOPEN** 133
10.1 Inleiding 133
10.2 Impulsoverdracht 134
10.3 Energie-overdracht en energiehoogte 136
10.4 Kritische stroming 139
10.5 Toepassingen 139
APPENDIX Berekening voortplantingssnelheid lopende watersprong 153

11 **STROMING ROND EEN STAR LICHAAM** 155
11.1 Inleiding 155
11.2 Ideale-vloeistof benadering 156
11.3 Invloed viscositeit 158
11.4 Sterk-viskeuze stroming (Re << 1) 160
11.5 Zwak-viskeuze stroming (Re >> 1) 161
11.6 Sleepkracht 171
11.7 Valsnelheid 174

12 **EENPARIGE STROOM IN PIJPLEIDINGEN** 179
12.1 Inleiding 179
12.2 Ontwikkeling tot eenparige stroom 181
12.3 Parameters en stromingstypen 182
12.4 Evenwichtsvoorwaarden 185
12.5 Laminaire stroom 187
12.6 Turbulente stroom 191
12.7 Toepassingen 201
12.8 Leidingstelsels 202
APPENDIX - Berekening van gemiddelde snelheid en coëfficiënten α en β uit logaritmisch snelheidsprofiel 204

13 EENPARIGE STROOM IN OPEN WATERLOPEN 209
13.1 Inleiding 209
13.2 Tweedimensionale stroming met vrij oppervlak 210
13.3 Stroming in leiding met willekeurig dwarsprofiel 212
13.4 Empirische weerstandsformules 217
13.5 Slotopmerkingen 222

14 LANGZAAM VERANDERENDE STROMEN IN OPEN WATERLOPEN . 225
14.1 Inleiding 225
14.2 Notatie 226
14.3 Verhanglijnvergelijking 227
14.4 Typen verhanglijnen 230
14.5 Randvoorwaarden en interne aansluitvoorwaarden 232
14.6 Voorbeelden 233
14.7 Berekeningsmethoden 239
APPENDIX Afleiding verhanglijnvergelijking uit impulsbalans 243

LITERATUUR

RESUME FORMULES

1 INLEIDING

In de Civiele Techniek spelen stromen, golven en andere bewegingen van vloeistoffen en gassen een belangrijke rol. Niet alleen in de "natte" sector (Waterbouwkunde, Waterbeheersing) maar ook in de "droge"; denk aan belastingen op constructies, windhinder in de gebouwde omgeving, of klimaatregeling in gebouwen

Het merendeel van de civiel-technische stromingsproblemen heeft met waterbeweging te maken, deels in gesloten systemen (pijpleidingen), maar overwegend met een vrij oppervlak (waterbewegingen in kanalen, rivieren, estuaria en zeeën en door/over/rondom diverse daarin voorkomende constructies); daarnaast zijn problemen van grondwaterstroming van belang.

Mechanica is de leer van de beweging en vervorming van materie onder invloed van uitwendige krachten. Een belangrijk onderscheid is daarbij te maken tussen vaste stoffen enerzijds (Engels: "solids") en vloeistoffen ("liquids") en gassen ("gases") anderzijds (in het Engels gezamenlijk aangeduid als "fluids", d.w.z. stoffen die kunnen vloeien, ofwel stromen). Dit onderscheid is hierin gelegen dat een schuifspanning in vaste stoffen aanleiding geeft tot een eindige vervorming, en in vloeistoffen en gassen tot een voortgaande vervorming, zij het met een eindige snelheid. Dit is in feite de definitie van beide categorieën voorzover het hun mechanisch gedrag betreft.

De beweging van vloeistoffen en die van gassen kunnen voor een belangrijk deel op dezelfde manier worden behandeld. De leer van die bewegingen heet "stromingsleer" (Engels: "Fluid Mechanics"). Een principieel verschil tussen beide media, gezien uit het oogpunt van de stromingsleer, is dat alleen bij vloeistoffen sprake kan zijn van een vrij oppervlak. Een meer gradueel verschil is dat gassen meer compressibel zijn dan vloeistoffen.

Stromingen van vloeistoffen en gassen zijn vaak instabiel; de beweging krijgt daarbij veelal een chaotisch fluctuerend, wervelend karakter (turbulentie). Voor de bepaling van de (gemiddelde) eigenschappen van turbulente bewegingen moet een sterk beroep op het experiment worden gedaan (veel meer dan nodig is voor de bepaling van de vervorming van constructies). Gelijkvormigheidsbeschouwingen spelen daarbij een belangrijke rol. Een en ander resulteert veelal in wiskundige modellen van semi-theoretische aard, aangevuld met empirische informatie over de stroming.

Het vak CT2100 geeft een inleiding in de stromingsleer, gericht op civieltechnische problemen. De stof heeft daarom primair betrekking op vloeistofstromingen; dit komt ook in de naam van het vak tot uiting. Desalniettemin zijn de resultaten voor een deel wel van toepassing op bewegingen van gassen, zij het bij niet al te grote snelheden, zodat het gas nog

als onsamendrukbaar kan worden beschouwd. In het vervolg zal echter kortheidshalve niet steeds van "vloeistoffen en gassen" worden gesproken maar van "vloeistoffen".

Vereiste voorkennis voor CT2100 is vooral Analyse, in het bijzonder partiële afgeleiden en vectorrekening, en Dynamica I (kinematica van kromlijnige bewegingen, impuls en het behoud daarvan, kracht, arbeid en energie).

Het onderwijs in het vak CT2100 kent de volgende componenten en hulpmiddelen:

COMPONENT	PLAATS	HULPMIDDEL
mondelinge kennisoverdracht	colleges	handleiding
behandeling van vraagstukken	colleges	vraagstukkenbundel
demonstraties	colleges	demonstratieapparatuur
practicum	laboratorium	stroomgoten

Alle onderwijscomponenten betreffen hetzelfde onderwerp maar benaderen het vanuit verschillende invalshoeken en met verschillende accenten.

De kennisoverdracht in de colleges is gericht op hoofdlijnen van de theorie en op het ontwikkelen van fysisch inzicht. Volledigheid in (mathematische) formuleringen staat daarbij niet voorop; daarvoor is de handleiding een meer geschikt hulpmiddel, die daarom een wat meer formeel karakter heeft dan de behandeling van de stof in de colleges.

De behandeling van vraagstukken gebeurt geïntegreerd in de colleges om de theorie direct tot toepassing te brengen; dit bevordert de motivatie evenals het inzicht in de theorie en in de toepassingsmogelijkheden daarvan.

Als ondersteuning bij de mondelinge kennisoverdracht worden in de colleges regelmatig demonstraties gegeven van diverse typen stroming, gebruikmakend van in de collegezaal aanwezige faciliteiten. In veel gevallen gaat het zowel om een kwalitatieve indruk als om een kwantitatieve uitwerking op grond van de ter plekke gemeten grootheden.

Tenslotte is er een practicum dat door elke student moet worden voltooid. Hier gaat het er om dat de student zelf diverse stromingen waarneemt, daaraan metingen verricht, en de uitkomsten vergelijkt met theoretische betrekkingen. Dit verlaagt de drempel die bestaat voor het hanteren van de theorie in concrete situaties, en geeft enig inzicht in de voorspellende waarde en de beperkingen van de theorie.

Als hulpmiddel bij de studie en voor aanvullende oefeningen in toepassingen is een bundel beschikbaar met studievragen en vraagstukken voorzien van uitwerkingen of antwoorden.

Er zijn veel boeken beschikbaar die een inleiding geven in de vloeistofmechanica. Enkele daarvan worden genoemd in een overzicht aan het einde van deze handleiding.

2 VLOEISTOFEIGENSCHAPPEN

2.1 Continuümmodel

Theoretische modellen kunnen niet betrekking hebben op de totale complexiteit van de werkelijkheid, maar slechts op enkele aspecten daarvan die voor een bepaalde vraagstelling van belang worden geacht. Bovendien worden die aspecten min of meer benaderend, geïdealiseerd weergegeven (zie Modelvorming, CT1090).

Mechanische eigenschappen van de materie worden bepaald door de moleculaire massa's en hun onderlinge posities, bewegingen en wisselwerkingen. De afmetingen van technische systemen zijn veelal veel groter dan de moleculaire lengteschaal. Voor de mechanica van zulke systemen kunnen we daarom afzien van de moleculaire microstructuur en op macroniveau doen alsof de materie continu verdeeld is in de fysische ruimte. Wij spreken dan van een **continuümmodel** van de materie.

Een eigenschap die lokaal aan het continuüm wordt toegekend (bijv. massadichtheid) is in feite het resultaat van de bijdragen (bijv. massa's) van de moleculen in een klein gebiedje. Enerzijds moet zo'n gebiedje groot genoeg zijn om zo veel moleculen te bevatten dat de som van hun bijdragen statistisch stabiel is, anderzijds klein genoeg ten opzichte van de afmetingen van de beschouwde systemen om te kunnen spreken van de eigenschappen in een punt. (Het feit dat dit vaak mogelijk is vormt de basis van de continuümbenadering.) Die eigenschappen kunnen dus worden behandeld als functies van de continue fysische ruimte. Zulke functies heten **velden**. Voorbeelden daarvan zijn het veld van de temperatuur, de massadichtheid en de druk (z.g. scalarvelden) en het snelheidsveld (een vectorveld).

2.2 Massadichtheid

De massa per eenheid van volume heet de **(massa)dichtheid**, algemeen weergegeven door het symbool ρ. De dimensie van ρ volgt direct uit de definitie: $[\rho] = ML^{-3}$; de SI-eenheid ervan is 1 kg/m^3.

De massadichtheid van zuiver water en andere vloeistoffen zonder toevoegingen is slechts afhankelijk van de heersende temperatuur en druk. Voor de variatie met de temperatuur wordt verwezen naar handboeken zoals Hütte (1955). Daarop wordt hier niet ingegaan. De variatie van de massadichtheid met de druk komt in par. 2.3.2 aan de orde.

In de civieltechnische praktijk hebben we niet met zuiver water te maken, maar altijd met

oplossingen. Globale waarden van de dichtheid van zoet water respectievelijk zout water zijn $\rho = 1000$ kg/m^3 en $\rho = 1025$ kg/m^3.

Tenslotte vermelden we nog dat de dichtheid van lucht bij een temperatuur van 20 ^{0}C en een druk van 10^5 Pa (ca. 1 atmosfeer) ca. 1,2 kg/m^3 bedraagt (zie Hütte, 1955, voor meer gegevens).

2.3 Constitutieve vergelijkingen

Elke stof heeft een specifiek verband tussen de spanningen in de stof (bijvoorbeeld als gevolg van uitwendige krachten) en de daarmee samenhangende veranderingen van volume en vorm. Dit verband wordt in geïdealiseerde vorm weergegeven door zogenaamde **constitutieve vergelijkingen**. Een bekend voorbeeld daarvan zijn de vergelijkingen, genoemd naar Hooke, die het mechanisch gedrag beschrijven van vaste stoffen (in de idealisering van elasticiteit, isotropie en lineariteit).

2.3.1 Spanningen

De spanningstoestand in een punt van de materie wordt beschreven met een zogenaamde spanningstensor. De negen componenten hiervan ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxyz zijn te schrijven als σ_{xx}, σ_{xy}, enz. Hierin stellen de drie componenten σ_{xx}, σ_{yy} en σ_{zz} de normaalspanningen voor, en de overige zes de schuifspanningen, die paarsgewijs aan elkaar gelijk zijn ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, enz.).

Wanneer in een punt alle schuifspanningen gelijk zijn aan nul, ongeacht de oriëntatie van de beschouwde vlakjes, dan hebben alle normaalspanningen in dat punt dezelfde waarde, eveneens onafhankelijk van de stand van de beschouwde vlakjes: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. Men spreekt dan van een isotrope spanningstoestand. **Per definitie (van een vloeistof) kan in een stilstaande vloeistof geen schuifspanning heersen en is de spanning daarin isotroop (wet van Pascal).** ("Stilstaand" is relatief. Er mag sprake zijn van beweging ten opzichte van een of ander referentiestelsel, mits alle deeltjes dezelfde snelheid hebben, zodat zij ten opzichte van elkaar niet bewegen. Dan is een meebewegend referentiestelsel te definiëren ten opzichte waarvan de vloeistof stilstaat.)

In bewegende vloeistoffen en in vaste stoffen zijn de schuifspanningen in het algemeen niet nul, en is de spanning niet isotroop. We kunnen dan niet spreken van "de" normaalspanning in een punt. Men kan echter bewijzen dat het gemiddelde van de normaalspanningen in drie

onderling loodrechte vlakjes (notatie: $\sigma_o \equiv \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$) een waarde heeft die onafhankelijk is van de oriëntatie van die vlakjes. Dit gemiddelde vormt het isotrope deel van de spanning. De afwijkingen van de werkelijke spanningen ten opzichte van het isotrope deel heten deviatorspanningen (zie CT2030). De schuifspanningen behoren in hun totaliteit tot de deviatorspanningen.

Bij de gebruikelijke tekenafspraken in de mechanica van vaste stoffen komt een positieve waarde van een normaalspanning overeen met een trekspanning. In gassen en vloeistoffen komt trek echter niet respectievelijk vrijwel niet voor. Voor deze stoffen voert men daarom het begrip druk in (p), gedefinieerd als het isotrope deel van de drukspanningen:

$$p = -\sigma_o = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}).$$

Variaties in het isotrope deel van de spanning (trek en/of druk) veroorzaken volumeveranderingen, en de deviatorspanningen veroorzaken vormveranderingen. In de volgende twee paragrafen wordt op de constitutieve vergelijkingen voor deze twee aspecten afzonderlijk ingegaan.

2.3.2 Samendrukbaarheid

Bij verhoging van de druk worden gassen en - in veel mindere mate - ook vloeistoffen ("liquids") gecomprimeerd (samengedrukt). In eerste benadering kan dit als een zuiver elastisch proces worden benaderd. Dit houdt in dat het proces omkeerbaar is: de arbeid die wordt verricht in het comprimeren wordt als (elastische) inwendige energie opgeslagen, die bij herstel van de oorspronkelijke druk het volume weer tot zijn oorspronkelijke waarde doet toenemen. In geval van rechte evenredigheid tussen variaties in druk en volume spreken we van 'lineair elastisch'.

Het verband tussen dichtheid (ρ) en druk (p) voor gassen en vloeistoffen wordt in de lineaire benadering van elasticiteit uitgedrukt in termen van de z.g. **compressiemodulus K** volgens

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{K} \tag{2.1}$$

Gebruik makend van het behoud van massa (ρV = constant, ofwel $\rho\, dV + V\, d\rho = 0$) kan dit worden herleid tot een relatie tussen veranderingen van volume (V) en druk:

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{V}{K} \tag{2.2}$$

Blijkbaar heeft K dezelfde dimensie als een spanning; de SI-eenheid ervan is de Pascal ($1\ Pa = 1\ N/m^2 = 1\ kg\ m^{-1}\ s^{-2}$).

De waarde van K neemt toe met toenemende druk. In een groot bereik van de druk is K voor water (zonder gasbellen!) echter als een constante te beschouwen, met een waarde van ca. $2{,}2 \times 10^9$ Pa.

Voor gassen is de variatie van K met de druk niet verwaarloosbaar. Voor isothermische compressie geldt pV = constant, wat inhoudt dat $K = p$. Voor adiabatische compressie (waarbij geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaatsvindt) geldt pV/T = constant, wat kan worden herleid tot pV^{k_0} = constant ofwel p/ρ^{k_0} = constant, waarbij k_0 voor elk gas een constante is (voor lucht is $k_0 \cong 1{,}40$). Voor adiabatische compressie geldt dus $K = k_0 p$.

Dankzij het elastische karakter van de samendrukbaarheid kunnen drukgolven zich voortplanten in een samendrukbaar medium. Men kan aantonen dat voor de voortplantingssnelheid daarvan, de z.g. geluidssnelheid (c), geldt:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \tag{2.3}$$

Gebruik makend van (2.1) kan dit worden herleid tot

$$c^2 = \frac{K}{\rho} \tag{2.4}$$

Substitutie van bovengenoemde getalswaarden levert voor zuiver water $c \cong 1480$ m/s en voor lucht bij een druk van 1 atmosfeer (ca. 10^5 Pa) $c \cong 340$ m/s.

Stel nu dat in een gebied van een stationaire stroming van een vloeistof of gas de stroomsnelheid in de ruimte varieert tussen de waarden 0 en u. Zoals we nog zullen zien zal de druk in dat gebied dan variëren met een waarde (Δp) die ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{2}\rho u^2$ (Bernoulli; zie ook CT1021). Iets globaler uitgedrukt geldt dat Δp van de grootte-orde ρu^2 is (notatie: $\Delta p \sim \rho u^2$). De hiermee overeenkomende variatie van de massadichtheid ($\Delta\rho$) is volgens (2.1) van de orde $\rho u^2/c^2$.

De verhouding van stroomsnelheid (u) tot geluidssnelheid (c) heet **het kental van Mach** of **getal van Mach:** $Ma = u/c$. De relatieve dichtheidsvariatie ($\Delta\rho/\rho$) is dus van de grootte-orde u^2/c^2 ofwel Ma^2 (notatie: $\Delta\rho/\rho \sim u^2/c^2$ respectievelijk $\Delta\rho/\rho \sim Ma^2$). Stromingen van compressibele media heten subsoon als $Ma < 1$ en supersoon als $Ma > 1$.

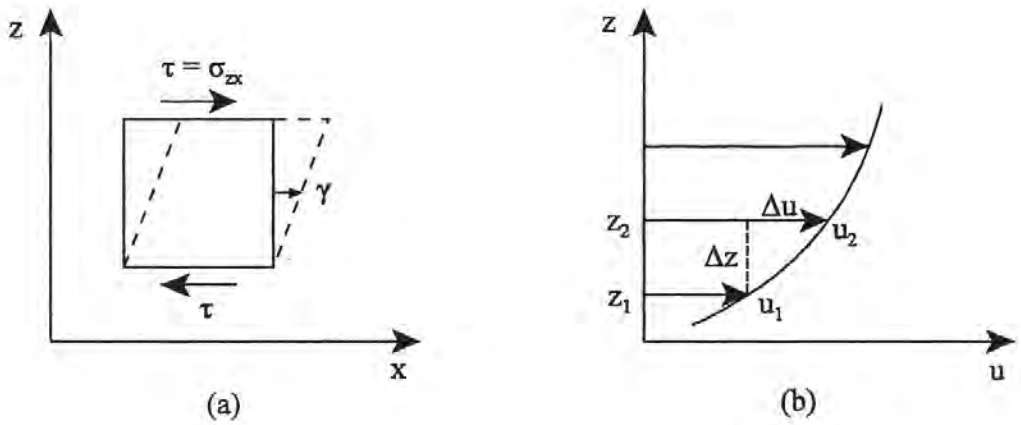
Als Ma << 1 geldt des te meer Ma^2 << 1, en zijn de relatieve dichtheidsverschillen verwaarloosbaar. In civieltechnische toepassingen is deze benadering vrijwel altijd geoorloofd. Nemen we u = 1,5 m/s voor stromend water en u = 35 m/s voor de wind (in geval van een orkaan), dan zijn de bijbehorende waarden van het getal van Mach ca. 10^{-3} respectievelijk 10^{-1}, overeenkomend met $\Delta\rho/\rho$ in de orde van 10^{-6} respectievelijk 10^{-2}. Het water respectievelijk de lucht zijn dan als **onsamendrukbaar** te benaderen. Merk op dat deze idealisering een oneindig grote waarde van K inhoudt, en dus ook van c. Een storing ergens aangebracht is volgens deze benadering instantaan in het hele gebied merkbaar. Fysisch is dat natuurlijk niet realistisch.

Dimensieloze kentallen zoals dat van Mach spelen een belangrijke rol in de stromingsleer. Het belang van diverse fysische grootheden in een stromingsprobleem is namelijk niet gelegen in de grootte ervan als zodanig (bijvoorbeeld de waarde van de stroomsnelheid u), maar in de verhouding daarvan tot een andere voor het probleem relevante parameter (zoals de geluidssnelheid) of combinatie van parameters (zoals $(K/\rho)^{1/2}$) van dezelfde dimensie. Dit leidt per probleemschematisatie tot één of meer kentallen. Die zijn per definitie dimensieloos. Hun waarde is dus onafhankelijk van de absolute groottes en ook van het gebruikte eenhedenstelsel. Twee stromingen waarvoor alle overeenkomstige relevante kentallen dezelfde waarde hebben (bijvoorbeeld in beide dezelfde waarde van het getal van Mach) zijn gelijkvormig, niet alleen in meetkundige zin maar ook in dynamische zin. Hierop berust het gebruik van schaalmodellen (zie par. 2.5).

2.3.3 Vloeibaarheid

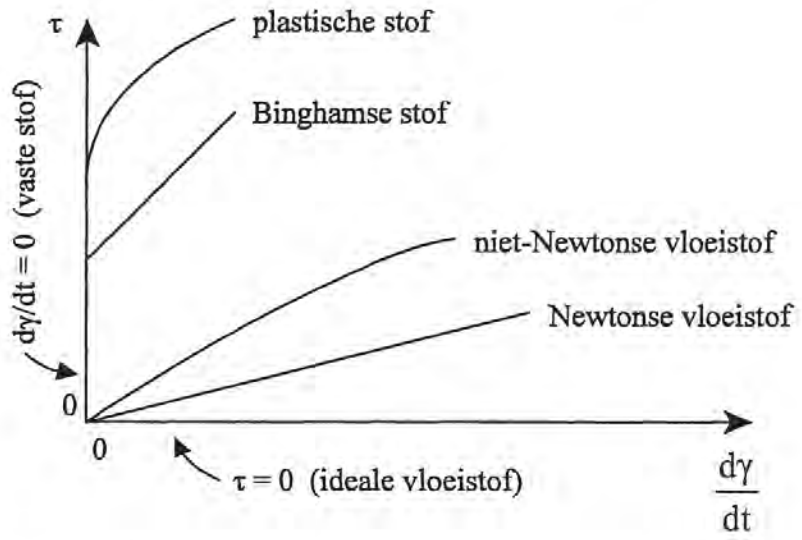
In vaste stoffen veroorzaakt een schuifspanning (hier kortheidshalve aangeduid met τ) een eindige vervorming. Als maat daarvoor nemen we de verandering (γ) van de hoek tussen twee vlakken die in onbelaste toestand haaks op elkaar staan, nl. het vlak van de afschuiving respectievelijk haaks daarop (Figuur 2.1a). In de lineaire benadering (wet van Hooke) zijn τ en γ recht evenredig aan elkaar; de evenredigheidsfactor heet glijdingsmodulus (G). In zo'n vaste stof geldt dus $\tau = G\gamma$.

Vloeistoffen en gassen daarentegen worden gekenmerkt door het feit dat een schuifspanning veroorzaakt dat de stof gaat vloeien, d.w.z. dat er zich een voortgaande vervorming voordoet met een eindige vervormingssnelheid ($d\gamma/dt$). De stroomsnelheid (u) varieert daarbij in dwarsrichting (Figuur 2.1b).



Figuur 2.1 Schuifspanning vs. hoekverandering (a) en snelheidsgradiënt (b)

Het verschillende gedrag van vaste stoffen enerzijds en vloeistoffen of gassen anderzijds, onder invloed van een schuifspanning, is geïllustreerd in Figuur 2.2.



Figuur 2.2 Relaties tussen schuifspanning en vervormingssnelheid voor diverse stoffen

Voor een vaste stof geldt $d\gamma/dt = 0$ ongeacht de waarde van τ, mits deze kleiner is dan een zekere kritieke waarde waarbij vloei gaat optreden (plastisch gedrag). Wanneer τ in het plastische gebied lineair varieert met $d\gamma/dt$ spreken we van een Binghamse stof. Tandpasta en

halfdroge modder zijn voorbeelden van stoffen die bij benadering Binghams zijn.

Voor vloeistoffen (en gassen) geldt (per definitie) dat $d\gamma/dt = 0$ alléén als $\tau = 0$. (Met verwijzing naar Figuur 2.2 kunnen we zeggen dat voor alle vloeistoffen de kromme die het verband weergeeft tussen τ en $d\gamma/dt$ door de oorsprong van dat diagram gaat. Zo niet, dan is geen sprake van een vloeistof.) In een stilstaande vloeistof (of gas) (eigenlijk: een vloeistof of gas zonder vervormingen) heersen dus geen schuifspanningen, en is de spanningstoestand isotroop (wet van Pascal).

Een schuifspanning heeft in een vloeistof of gas een voortgaande vervorming tot gevolg met een eindige vervormingssnelheid ($d\gamma/dt \neq 0$ zodra $\tau \neq 0$). Wanneer τ daarbij recht evenredig is met $d\gamma/dt$ spreken we van een **Newtonse vloeistof**. Dit is (o.a.) voor water een realistisch model. De evenredigheidsfactor tussen schuifspanning en vervormingssnelheid heet (coëfficiënt van) **dynamische viscositeit** (η):

$$\tau = \eta \frac{d\gamma}{dt} \tag{2.5}$$

Uit (2.5) volgt dat voor de dimensie van η geldt $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$. De SI-eenheid van η is $1\ \text{kg m}^{-1}\text{ s}^{-1} = 1\ \text{Pa s}$.

In sommige stromingsproblemen heeft de viscositeit slechts een zeer geringe invloed. Wanneer, in een mathematisch model van zulke stromingen, de viscositeit bij benadering gelijk aan nul wordt gesteld, geldt (in dat model) $\tau = 0$ ongeacht de waarde van $d\gamma/dt$. We spreken dan van (het model van) een niet-viskeuze of ideale vloeistof c.q. gas.

Het is gebruikelijk de schuifspanning in stromende vloeistoffen of gassen uit te drukken in gradiënten van de stroomsnelheid. Beschouw daartoe een vlakke parallelstroming, waarin de (x, y, z)-componenten van de snelheid de waarden (u, 0, 0) hebben, en waarin u slechts met z varieert. De stroomsnelheid in twee dicht bij elkaar gelegen vlakken $z = z_1$ en $z = z_2 = z_1 + \Delta z$ is u_1 respectievelijk $u_2 = u_1 + \Delta u$ (zie Figuur 2.1b). Het verschil in verplaatsing van de vloeistof in beide lagen in een tijd Δt is $\Delta s = (u_2 - u_1)\Delta t = \Delta u\, \Delta t$; dit geeft een draaiing van de normaal op het aanvankelijke vlakje $z = z_1$ over een hoek $\Delta\gamma = \Delta s/\Delta z$ ofwel $\Delta\gamma = \Delta u\, \Delta t/\Delta z$, overeenkomend met een hoeksnelheid $\Delta\gamma/\Delta t = \Delta u/\Delta z$. In de limiet $\Delta t \to 0$ en $\Delta z \to 0$ is $d\gamma/dt$ dus gelijk aan de **snelheidsgradiënt** du/dz (de z.g. "schering", in het Engels "rate of shear"). Voor de schuifspanning geldt dan

$$\sigma_{xz} = \tau = \eta \frac{du}{dz} \tag{2.6}$$

Meer dan (2.5) brengt deze formulering het fysische karakter van de viscositeit tot uitdrukking, namelijk dat door verschillen in stroomsnelheid tussen naburige vloeistoflagen (tangentiële) impuls wordt uitgewisseld tussen die lagen. De snelst stromende laag staat impuls af aan de langzamer stromende laag, waardoor snelheidsverschillen worden vereffend. Dit is een z.g. diffusieproces (vergelijkbaar met geleiding van warmte, waarbij gebieden met hogere temperatuur warmte afstaan aan gebieden met lagere temperatuur). De coëfficiënt van viscositeit heeft de betekenis van een diffusiecoëfficiënt voor impuls (vergelijkbaar met de coëfficiënt voor geleiding van warmte).

Voor de invloed van de viscositeit op de resulterende snelheid (de impuls per massa-eenheid) is niet zozeer de uitwisseling van impuls zelf van belang (τ) alswel de uitwisseling van impuls gedeeld door de massadichtheid (τ/ρ). Daarom wordt meestal niet gewerkt met de coëfficiënt van dynamische viscositeit maar met die van de zogenaamde **kinematische viscositeit**, gedefinieerd als

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{2.7}$$

Voor de dimensie van ν geldt $[\nu] = [\eta]/[\rho] = L^2\,T^{-1}$. De SI-eenheid ervan is 1 m^2/s.

De waarden van η en ν verschillen sterk tussen verschillende stoffen en variëren nogal met de temperatuur. Enkele waarden voor lucht en water zijn gegeven in bijgaande tabel.

Temperatuur		-20 °C	0 °C	10 °C	20 °C
Water	$\eta/(10^{-3}$ Pa.s)	–	1,80	1,33	1,00
	$\nu/(10^{-6}$ m^2/s)	–	1,80	1,33	1,00
Lucht	$\eta/(10^{-6}$ Pa.s)	16,2	17,2	17,2	18,1
	$\nu/(10^{-6}$ m^2/s)	11,6	13,3	14,2	15,1

De dynamische viscositeit van lucht bij 20°C is nog geen 2% van die van water bij dezelfde temperatuur, maar omdat de dichtheid van lucht ca. 800 keer kleiner is dan die van water is de kinematische viscositeit van lucht ca. 15 keer groter dan die van water (bij 20°C)!

Zoals al is opgemerkt aan het einde van par. 2.3.2 is het belang van diverse grootheden voor een stromingsprobleem niet gelegen in de waarden ervan als zodanig, maar in (dimensieloze) verhoudingsgetallen, de z.g. kentallen (zoals dat van Mach voor de compressibiliteit). We zullen dit uitwerken met betrekking tot de viscositeit. We gaan daarbij eenvoudigheidshalve

uit van de stroming rondom een voorwerp (bv. een vallende zandkorrel in water) dat met een constante snelheid beweegt in een naar alle richtingen oneindig uitgestrekte vloeistof in rust (afgezien van de verstoring aangebracht door het bewegende voorwerp). We gaan er van uit dat het stroombeeld geheel is bepaald door de volgende grootheden:

- massadichtheid (ρ) en dynamische viscositeit (η) van de vloeistof (die als onsamendrukbaar wordt geïdealiseerd);
- snelheid (U), afmeting (l), vorm en oriëntatie van het voorwerp.

Uit de dimensies van de grootheden ρ, η, U en l is af te leiden (zie Modelvorming, CT1090 en par. 2.5) dat die vier grootheden tot slechts één onafhankelijk, dimensieloos verhoudingsgetal zijn te groeperen, het z.g. **kental van Reynolds** of **getal van Reynolds**:

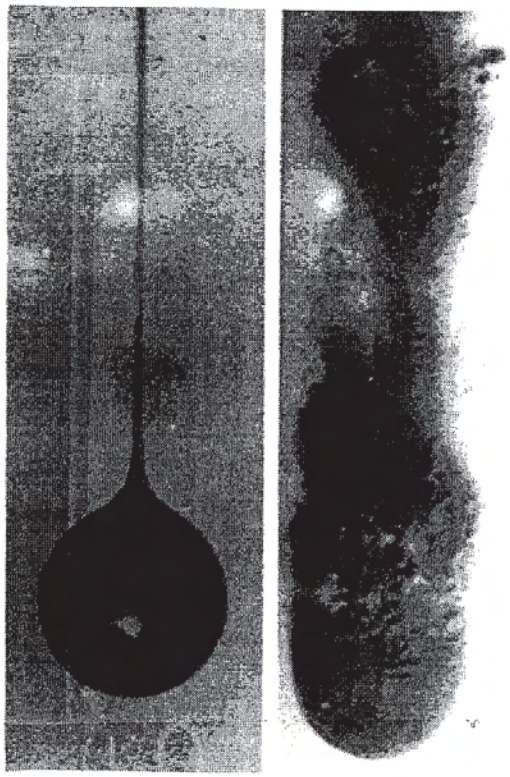
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U l}{\eta} \tag{2.8}$$

In termen van de kinematische viscositeit ($\nu = \eta/\rho$) wordt dit

$$\mathrm{Re} = \frac{U l}{\nu} \tag{2.9}$$

De vorm van het stroombeeld rondom het voorwerp wordt voor gegeven vorm en oriëntatie van het voorwerp dus bepaald door de waarde van Re, ongeacht de waarden van ρ, η, U en l afzonderlijk. Een voorbeeld van de variatie van een stroombeeld met Re is gegeven in Figuur 2.3 voor het geval van een bol (de getalwaarden van Re in deze figuur gelden voor l = D, de diameter van de bol, zodat Re = UD/ν).

Is Re klein t.o.v. één (Re << 1), zoals in Figuur 2.3a, dan is de invloed van de viscositeit groot t.o.v. die van de traagheid. We kunnen daarbij denken aan de langzame stroming van een stroperige vloeistof rond een klein voorwerp, maar de essentie van het kental van Reynolds is juist dat "langzaam", "stroperig" en "klein" relatieve begrippen zijn, die respectievelijk inhouden: $U \ll \nu/l$, $\nu \gg U\,l$ en $l \ll \nu/U$, alle samengevat in één voorwaarde Re << 1. Dit type stroming verloopt ordelijk, met glad verlopende deeltjesbanen (zie Figuur 2.3a). We noemen zulke stromingen **laminair** (letterlijke betekenis: in lagen). Voor Re >> 1 (Figuur 2.3b) geldt het tegendeel. Daarbij is de stroming chaotisch wervelend, ofwel **turbulent**.



(a) (b)

Figuur 2.3

Eenparige beweging van een bol in een vloeistof; stroombeeld zichtbaar gemaakt m.b.v. kleurstof.

Fig. (a):
Re = UD/ν = 0.25;

Fig. (b):
*Re = 1.2 * 10^4*

(Figuur ontleend aan Nakayama, 1988)

Osborne Reynolds (1883) was de eerste die wees op de betekenis van de naar hem genoemde dimensieloze parameter. Hij deed dat in de context van de stroming door een cirkelvormige buis. Reynolds constateerde dat deze stroming laminair of turbulent kan zijn, en dat het vóórkomen van het ene dan wel het andere type bepaald wordt door de waarde van UD/ν, waarin U de over het dwarsprofiel gemiddelde stroomsnelheid is en D de inwendige diameter van de buis. Voor Re = UD/ν < ca. 2300 is de buisstroming laminair; voor waarden van Re groter dan ca. 4000 wordt de stroming turbulent; een precieze waarde is niet aan te geven omdat de omslag van laminair naar turbulent een instabiliteitsverschijnsel is, en daarom erg gevoelig voor kleine, niet meetbare invloeden.

Voor stromingen met een vrij oppervlak en met een breedte die veel groter is dan de diepte is een getal van Reynolds te definiëren door voor "*l*" de diepte (d) te nemen. Zulke stromingen zijn laminair als Re = Ud/ν kleiner is dan ca. 500.

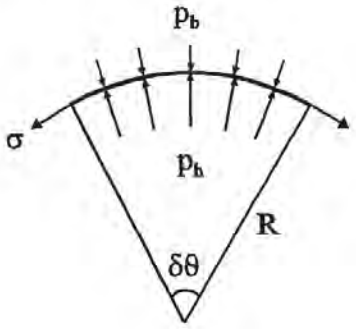
Door enkele realistische waarden te kiezen voor U en D of d is te zien dat voor de stroming van water in gesloten of open leidingen het kental van Reynolds al gauw de waarde 10^4 of zelfs 10^6 heeft, overeenkomend met turbulente stromen. Stroming van water of olie door een pakket van fijn zand is daarentegen in vrijwel alle gevallen laminair.

2.4 Grensvlakspanning

Aan weerszijden van een grensvlak tussen twee verschillende vloeistoffen, of tussen een vloeistof en een gas, heersen verschillende moleculaire attractiekrachten. Het effect hiervan uit zich op continuümniveau als een trekspanning in het grensvlak, de z.g. grensvlakspanning (σ), met de dimensie van een kracht per lengte-eenheid. Een alternatieve formulering is dat het grensvlak een potentiële energie heeft waarvan de waarde per eenheid van oppervlakte gelijk is aan σ. Het grensvlak zal daardoor een minimale oppervlakte aannemen (bijv. een bolvorm in geval van een druppel, in afwezigheid van uitwendige krachten). Om het uit zo'n configuratie te brengen moet arbeid worden verricht.

In het grensvlak tussen zuiver water en lucht, bij 20 ^{0}C, is σ = 0,073 N/m, ofwel σ = 0,073 J/m^2. De feitelijke waarde is erg gevoelig voor de aanwezigheid van andere stoffen, zoals een film van vuil op het water, of zeep in het water.

Waar het grensvlak gekromd is veroorzaakt de grensvlakspanning een grotere druk aan de holle zijde (p_h) dan aan de bolle (p_b).



Beschouw een infinitesimaal elementje van zo'n grensvlak, dat slechts in één richting gekromd is, met kromtestraal R en booglengte R$\delta\theta$ (zie schets). De krachten a.g.v. de grensvlakspanning aan beide randen hebben een naar het kromtemiddelpunt gerichte resultante die per eenheid van breedte nadert tot $\sigma\delta\theta$ als $\delta\theta \to 0$. Evenwicht vereist dan dat $(p_h - p_b)\, R\delta\theta = \sigma\delta\theta$ ofwel

$$p_h - p_b = \frac{\sigma}{R} \tag{2.10}$$

Bij kromming in twee richtingen, met hoofdkromtestralen R_1 en R_2, geldt

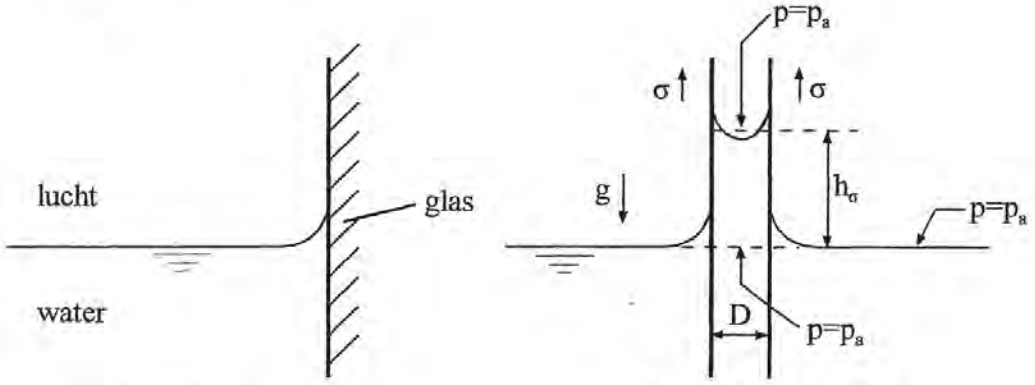
$$p_h - p_b = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]\sigma \tag{2.11}$$

Het relatieve belang van de grensvlakspanning σ voor een stroming met kenmerkende snelheid U en kenmerkende grootte van de kromtestraal van het grensvlak gelijk aan l is bepaald door het **kental vanWeber** of **getal van Weber**:

$$We = \frac{\rho U^2 l}{\sigma} \tag{2.12}$$

Voor het grensvlak water-lucht geldt $\sigma/\rho = 7{,}3 \times 10^{-5}$ m^3/s^2, zodat de grensvlakspanning alleen van belang kan zijn bij zeer kleinschalige en langzame bewegingen ($U^2 l = 7{,}3 \times 10^{-5}$ m^3/s^2 als We = 1). Rimpels aan het wateroppervlak met een golflengte van enkele millimeters of minder zijn daarvan een voorbeeld.

Bij de doorsnijding van een vloeistofoppervlak door een wand van vaste stof treedt adhesie op, d.w.z. onderlinge aantrekking tussen vloeistof en vaste stof. Daardoor wordt het grensvlak in de omgeving van de aanraking gekromd en ontstaat de z.g. meniscus (Figuur 2.4a). Voor het contact tussen water, lucht en glas is de meniscus hol naar de zijde van de lucht, en (voor zuiver water) rakend aan het glas. Hierdoor wordt water in een open, nauw buisje (een z.g. capillair) gezogen (Figuur 2.4b).



(a) meniscus (b) capillaire opstijging

Figuur 2.4 Meniscus (a) en capillaire opstijging in een nauwe buis (b)

In geval van evenwicht met het gewicht van het opgezogen water kan de capillaire stijghoogte h_σ bij benadering worden berekend uit

$$(\pi D)\sigma = \left(\tfrac{1}{4}\pi D^2 h_\sigma\right)\rho g$$

waaruit volgt

$$h_\sigma = \frac{4\sigma}{\rho g D}$$

Deze capillaire stijghoogte h_σ is dus omgekeerd evenredig met de diameter. (Voor water-lucht-glas en D = 1 mm is $h_\sigma \approx 3$ cm.) Ook hieruit volgt dat de grensvlakspanning alleen bij kleinschalige verschijnselen van belang is.

2.5 Gelijkvormigheid en dimensie-analyse

In de Inleiding (Hoofdstuk 1) is al opgemerkt dat het experiment onmisbaar is in de vloeistofmechanica. In sommige gevallen gaat het om principe-experimenten om het gedrag van stromingen of golven te zien en (beter) te begrijpen. In andere gevallen gaat het om schaalproeven waarin een z.g. prototype op kleinere of grotere schaal wordt nagebootst, zoals een te ontwerpen waterbouwkundige constructie, een vliegtuig of een schip, en waarin de stroming daardoor en/of omheen in het schaalmodel wordt gemeten om op grond daarvan uitspraken te kunnen doen over de prototypesituatie. In beide gevallen is het van belang dat de processen in het experiment representatief zijn voor wat men wil simuleren. We eisen daarom **gelijkvormigheid**, niet alleen in meetkundige betekenis maar ook t.a.v. de verplaatsingen, snelheden, versnellingen enz. (kinematisch) en t.a.v. drukken, krachten, enz. (dynamisch). Gelijksoortige grootheden moeten daarvoor in het model in dezelfde onderlinge verhoudingen staan als in het prototype, ofwel de betreffende dimensieloze verhoudingen moeten in model en prototype aan elkaar gelijk zijn.

Twee stromingen (verschillende vloeistoffen en/of verschillende afmetingen) zijn alleen dan gelijkvormig aan elkaar (geometrisch, kinematisch en dynamisch) wanneer elke relevante dimensieloze parameter dezelfde waarde heeft in beide stromingen.

Om vast te stellen welke dimensieloze parameters een rol spelen in een gegeven probleem wordt eerst op grond van de beschikbare vóórkennis een opsomming gemaakt van de belangrijk geachte onafhankelijke variabelen (zoals in par. 2.3.3 is gedaan voor de stroming om een voorwerp) waaruit vervolgens dimensieloze parameters worden geformeerd.

Voorbeeld. We lichten dit toe aan de hand van het voorbeeld van een stroming door een leiding, waarbij het gaat om de wandweerstand als afhankelijke grootheid. In concreto gaan we uit van een ruwe leiding met rechthoekige dwarsdoorsnede. We veronderstellen dat daarvoor de gemiddelde wandschuifspanning τ (gemiddeld over het hele wandoppervlak) slechts van de volgende onafhankelijke grootheden afhangt:

- inwendige breedte (b) en hoogte (h) van het dwarsprofiel;
- afmeting wandruwheid (k);
- massadichtheid (ρ) en viscositeit (η) van de vloeistof;
- de over het dwarsprofiel gemiddelde stroomsnelheid (U).

Symbolisch weergegeven:

$$\tau = f_1(b,\ h,\ k,\ \rho,\ \eta,\ U) \qquad (2.13)$$

Het gaat hier om de aanduiding dat τ een functie is van de overige genoemde onafhankelijke variabelen. Welke functie dat precies is doet er nu niet toe.

We gaan na wat de dimensies van de grootheden in (2.13) zijn, uitgedrukt in de **basis-dimensies M, L en T** voor massa, lengte en tijd:

$[\tau] = ML^{-1}\ T^{-2}$

$[b] = [h] = [k] = L$

$[\rho] = ML^{-3}$

$[\eta] = ML^{-1}\ T^{-1}$

$[U] = LT^{-1}$

Uit deze zeven grootheden gaan we dimensieloze parameters vormen. Het aantal basisdimensies dat er in voorkomt is drie (M, L, T). Het aantal te vormen onafhankelijke dimensieloze parameters is daarom drie kleiner dan het aantal grootheden, dus vier in totaal.

Omdat er hier drie basisdimensies zijn kiezen we drie onafhankelijken, en wel zó dat de basisdimensies daarin in verschillende verhoudingen voorkomen, bijv. h, U en ρ. De overige gaan we dimensieloos maken in termen van deze drie. Dat kan langs een formele weg maar ook via inspectie. De dimensie van de schuifspanning τ bijv. bevat M in de eerste macht. Van de drie variabelen (h, U, ρ) bevat alleen ρ de dimensie M, en wel in de eerste macht. We moeten τ dus delen door ρ om de dimensie M weg te werken. De verhouding τ/ρ heeft de dimensie $(ML^{-1}\ T^{-2})/ML^{-3} = L^2\ T^{-2}$; dit is juist de dimensie van U^2 zodat $\tau/\rho U^2$ de gezochte dimensie-loze grootheid is voor τ. Zo voortgaand gaat (2.13) over in de volgende dimensieloze vorm:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = f_2\left(\frac{b}{h}, \frac{k}{h}, \frac{\eta}{\rho U h}\right) \qquad (2.14)$$

Het linkerlid hierin noemen we de **weerstandsfactor** c_f (zodat $\tau = c_f \rho U^2$). Deze factor is in het gegeven geval dus uitsluitend afhankelijk van de vorm van het dwarsprofiel (b/h), de relatieve ruwheid (k/h) en een kental van Reynolds ($Re_h = \rho U h/\eta$). (In feite staat de reciproke van Re in (2.14) maar dat doet niets af aan deze uitspraak.) Er geldt dus

$$c_f = f_3\left(\frac{b}{h}, \frac{k}{h}, Re_h\right) \tag{2.15}$$

De betekenis van uitdrukkingen zoals deze is:

- zij maken expliciet welke de bepalende grootheden zijn en geven daardoor inzicht;
- zij worden gebruikt voor grafische weergave van experimentele resultaten;
- zij worden gebruikt in wiskundige betrekkingen tussen de diverse grootheden;
- zij bepalen de schaalregels voor gelijkvormigheid van model en prototype.

Wat het laatste betreft: de waarde van c_f in een (aan te leggen) leiding met gegeven (ontwerp)waarden van b/h, k/h en Re_h kan gemeten worden in een schaalmodel, mits in dat model deze drie dimensieloze parameters dezelfde waarden hebben als in het te simuleren prototype. Dit houdt o.a. in dat alle afmetingen in dezelfde verhouding moeten worden vergroot of verkleind (ook de ruwheid k). Om ook de waarde van $Re_h = Uh/\nu$ gelijk te krijgen moet, bij gebruik van hetzelfde stromende medium (bijv. lucht) bij dezelfde temperatuur (dus dezelfde waarde van ν) in het model als in het prototype, het product Uh in beide gevallen dezelfde waarde hebben. Bij een meetkundige verkleining van bijv. 1:10 moet de snelheid in het model dan het tienvoudige zijn van die in het prototype. Alleen dan is er volledige gelijkvormigheid en heeft c_f dezelfde waarde in het model als in het prototype. Uit (2.14) volgt dat τ in het model dan het honderdvoudige is van τ in het prototype.

In het bovenstaande waren de drie grootheden h, ρ en U gekozen om daarin alle andere uit te drukken. Dit had iets willekeurigs. We hadden bijv. b kunnen kiezen in plaats van h. In dat geval zou het volgende verband zijn ontstaan i.p.v. (2.15):

$$c_f = f_4\left(\frac{h}{b}, \frac{k}{b}, Re_b\right) \tag{2.16}$$

Dit verschilt uiterlijk van (2.15) maar is in wezen daaraan gelijkwaardig omdat de grootheden van (2.16) zijn uit te drukken in die van (2.15); immers,

$$\frac{h}{b} = \left(\frac{b}{h}\right)^{-1}; \quad \frac{k}{b} = \frac{k}{h}\left(\frac{b}{h}\right)^{-1}; \quad Re_b = \frac{b}{h} Re_h$$

Zolang we alle onafhankelijke grootheden in rekening brengen zijn dit soort omrekeningen mogelijk en doet het er in wezen niet toe welke variabelen we kiezen om de andere daarin uit te drukken. We kunnen dit toelichten met een voorbeeld van een rechthoek waarvan we de vorm en de grootte willen weten. Deze zijn volledig bekend als we de lengten van twee naastliggende

zijden kennen, zeg (a, b). Maar de lengten van bijv. de kortste zijde en van de diagonaal geven samen in wezen dezelfde informatie, of de twee grootheden (a, 1/b), of (a, a/b), of (a, α), waarin α de hoek is tussen de diagonaal en de zijde met lengte a, of de oppervlakte en de omtrek van de rechthoek, of ..... Zo kunnen we doorgaan. Het gaat er om dat twee onafhankelijke gegevens voldoende zijn om de vorm en de afmeting van de rechthoek vast te leggen. Welke twee doet er niet toe, mits zij onafhankelijk zijn (dus bijv. niet a en 2a). Dit verandert zodra we benaderingen gaan invoeren. Als bijvoorbeeld het rechthoekige profiel van het hierboven uitgewerkte voorbeeld heel breed is ($b/h \to \infty$ of $h/b \to 0$), zal de feitelijke breedte vrijwel geen invloed hebben op c_f. In (2.15) gaan we dan de invloed van b/h verwaarlozen:

$$c_f \to f_5\left(\frac{k}{h}, Re_h\right) \quad \text{als} \quad \frac{b}{h} \to \infty \tag{2.17}$$

Het zou echter onjuist zijn om in (2.16) de invloed te verwaarlozen van alle termen die b bevatten (dat zouden alle termen in het rechterlid zijn).

Een buis met cirkelvormig dwarsprofiel heeft geen variabele vormfactor; daarvoor geldt i.p.v. (2.15):

$$c_f = f\left(\frac{k}{D}, Re_D\right) \tag{2.18}$$

Hierin is D de inwendige diameter, en is $Re_D = \rho UD/\eta = UD/\nu$. Voor een gladde buis ($k/D \to 0$) resteert slechts het kental van Reynolds als onafhankelijke variabele (zie par. 2.3.3).

Waarden van de weerstandsfactor c_f voor buisleidingen zijn deels theoretisch, deels empirisch bepaald als functie van k/D en Re_D. In hoofdstuk 12 gaan we daar op in. Het weerstandsprobleem was hier slechts als voorbeeld gebruikt voor het werken met dimensiebeschouwingen en het denken in termen van dimensieloze grootheden en gelijkvormigheid. Dit is in de vloeistofmechanica van groot belang; we zullen er regelmatig mee in aanraking komen.

Tot slot van deze paragraaf over gelijkvormigheid noemen we de **zwaartekracht.** Deze is weliswaar niet een vloeistofeigenschap maar beïnvloedt de stroming wel, althans in aanwezigheid van dichtheidsverschillen zoals bij zout water onder zoet water, of bij stromen met een aan de atmosfeer blootgesteld oppervlak, z.g. vrije-oppervlaktestromen, die voor de civiele techniek uiterst belangrijk zijn. Bij deze stromingen speelt het **kental van Froude** of **getal van Froude** (Fr) een belangrijke rol in de gelijkvormigheid. Voor vrije-oppervlaktestromen met diepte d en stroomsnelheid U is dit gedefinieerd als

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}} \qquad (2.19)$$

We zullen zien dat $\sqrt{gd}$ de voortplantingssnelheid (c) is van relatief lange, lage oppervlakte-golven in water met diepte d. Evenals het getal van Mach heeft ook het getal van Froude dus de betekenis van de verhouding deeltjessnelheid/golfsnelheid (Fr = U/c). We zullen het in deze context nog uitvoerig tegenkomen (Hoofdstuk 10).

Het getal van Froude is genoemd naar de Engelse scheepsbouwer William Froude (1810-1879), die de golfweerstand van varende (ontwerp)schepen wilde bepalen uit schaalproeven. Hij beredeneerde dat de golfpatronen rondom het schip in model en prototype gelijkvormig zouden zijn, mits de scheeps*vorm* en de verhouding van de versnellingen in het water tot de zwaartekrachtsversnelling in het model dezelfde zouden zijn als in het prototype. Bij een scheepslengte l en een vaarsnelheid U ondergaan de waterdeeltjes bij het passeren van het schip versnellingen evenredig met U^2/l. De voorwaarde voor dynamische gelijkvormigheid van het golfpatroon rondom het varend schip werd daarmee dat U^2/gl dezelfde waarde moet hebben in model en prototype, dus dat het (later zo genoemde) getal van Froude dezelfde waarde moet hebben in beide systemen (bij een verkleining van de afmetingen met een factor 100 een verlaging van de snelheden met een factor 10, uitgaande van dezelfde g).

3 HYDROSTATICA

3.1 Inleiding

Het vak Vloeistofmechanica heeft voornamelijk betrekking op de **dynamica** van vloeistoffen, d.w.z. de leer van de betrekkingen tussen uit- en inwendige krachten op en in de vloeistof enerzijds en de resulterende vloeistofbewegingen anderzijds. Een bijzonder geval hiervan doet zich voor wanneer de vloeistof overal in evenwicht is, waarbij dus de resultante van uit- en inwendige krachten op elk deel van de vloeistof nul moet zijn; bij gegeven uitwendige krachten zijn hieruit de inwendige spanningen in de vloeistof te berekenen. Dit deelgebied van de vloeistof- of hydrodynamica heet "**Hydrostatica**".

In de Hydrostatica gaan we uit van een hoeveelheid vloeistof die, onder invloed van een uitwendig krachtveld, in een voortdurende staat van **rust** en **evenwicht** verkeert ten opzichte van een geschikt gekozen inertiaalreferentie. We bepalen de daarbij behorende inwendige spanningen en de krachten en momenten die de vloeistof uitoefent op begrenzingen (b.v. een schuif, een drijvend schip etc.) op grond van **evenwichtsbeschouwingen**. Om dit bij gegeven randvoorwaarden te kunnen doen zijn de volgende soorten gegevens nodig:
- uitwendig krachtveld;
- constitutieve betrekkingen

Als uitwendig krachtveld beschouwen we slechts het **zwaarteveld** met een constante zwaartekracht per eenheid van massa ($\vec{g}$).

3.2 Constitutieve betrekkingen

De z.g. constitutieve vergelijkingen voor een stof geven het (geïdealizeerde) verband weer voor die stof tussen spanningen en vervormingen. Omdat we in de Hydrostatica uitgaan van een **stilstaande vloeistof** (eigenlijk: vloeistof waarin geen snelheidsgradiënten voorkomen) zijn de **schuifspanningen nul**. De wet van Pascal is van toepassing, die inhoudt dat de normaalspanning in een willekeurig vlakje door een punt onafhankelijk is van de stand van dat vlakje (cirkel van Mohr gereduceerd tot een punt). De spanningstoestand in elk punt is geheel bepaald door één scalaire grootheid: "de" normaalspanning in dat punt, de druk p.

Vanwege de afwezigheid van afschuiving hebben we in de hydrostatica met ten hoogste één constitutieve betrekking te maken, nl. met die voor de compressibiliteit (par. 2.3.2). Voor water kan dit bij de in oceanen voorkomende diepteverschillen tot ca.10^4 m een rol spelen,

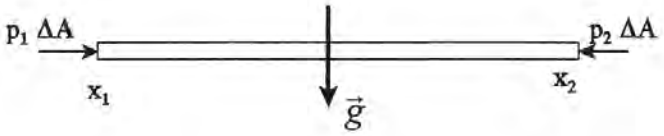
maar in civieltechnische problemen zijn deze effecten verwaarloosbaar. (Wat overigens niet betekent dat de dichtheid daar uniform is; denk aan variaties in temperatuur of zoutgehalte.) In de atmosfeer speelt de compressibiliteit wel een grote rol in de variatie van de druk met de hoogte (evenals de afhankelijkheid van dichtheid van temperatuur).

3.3 Evenwichtsvoorwaarden

Wij stellen nu evenwichtsvoorwaarden op voor geschikt te kiezen vloeistofmassa's, enerzijds onderhevig aan **drukkrachten** aan de begrenzingen, anderzijds aan de **zwaartekracht** die aangrijpt op de gehele massa. Voor elke vloeistofmassa moet de som van deze krachten gelijk zijn aan nul.

Horizontaal evenwicht

Wij beginnen met de voorwaarde voor evenwicht van de vloeistof in een cilindrisch gebied met infinitesimaal dwarsoppervlak ΔA en met de as evenwijdig aan een horizontale maar overigens willekeurig gekozen x-richting, dat zich uitstrekt van $x = x_1$ tot $x = x_2$ (Figuur 3.1).



Figuur 3.1 Horizontaal georiënteerd balansgebied

De zwaartekrachtscomponent in de (horizontale) x-richting heeft de waarde nul, zodat de som van de drukkrachten in x-richting eveneens gelijk moet zijn aan nul. De drukkrachten op het cilindrische manteloppervlak staan haaks op dit oppervlak en kunnen daarom niet bijdragen aan de kracht in x-richting. De drukkrachten op de twee dwarsvlakken aan beide uiteinden moeten elkaar dus opheffen. Omdat de afmetingen van de eindvlakken infinitesimaal zijn houdt dit in dat de drukken in de as ter plaatse van beide eindvlakjes aan elkaar gelijk zijn: $p_1 = p_2$. Dit geldt in feite voor elke richting in het horizontale vlak.

We kunnen dus concluderen: **de druk in een stilstaande vloeistof, in evenwicht onder invloed van het zwaarteveld, is constant in elk horizontaal vlak.**

In verband met latere toepassingen gaan we dit wiskundig formuleren. Daartoe nemen we het drukverschil $\Delta p = p_2 - p_1$ en delen dat door de lengte van het tussengelegen interval, Δx. Dit quotiënt nadert in de limiet voor $\Delta x \to 0$ tot de z.g. partiële afgeleide van p naar x:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} \tag{3.1}$$

Merk op dat hierbij alleen x wordt gevarieerd, terwijl y, z en t constant worden gehouden. Uit het evenwicht in x-richting volgt dat deze partiële afgeleide nul is. Dit geldt voor elke richting in het horizontale vlak, dus ook in de y-richting:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

Vanzelfsprekend geldt dit slechts binnen elk niet onderbroken vloeistofdomein, en niet voor gebieden die van elkaar zijn gescheiden door een wand of andere constructie die een horizontale kracht op kan nemen, zoals een sluisdeur.

Vertikaal evenwicht

Wij vervolgen met het vertikale evenwicht van de vloeistof in een cilindrisch gebied met dwarsoppervlak ΔA, met vertikale as, van een niveau $z = z_1$ tot $z = z_2$ (zie Figuur 3.3). De druk in beide horizontale eindvlakken is constant, met de waarden p_1 en p_2 in het ondervlak respectievelijk het bovenvlak. De voorwaarde voor vertikaal evenwicht luidt dan

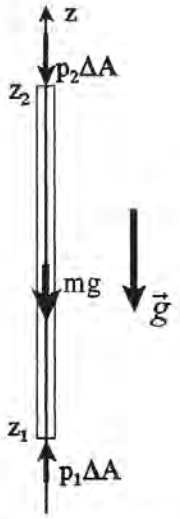
$$p_1 - p_2 = \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \tag{3.3}$$

Voor infinitesimale waarde van $(z_2 - z_1)$ gaat dit over in

$$p_1 - p_2 = -\Delta p = \rho g(z_2 - z_1) = \rho g \Delta z$$

ofwel, in de limiet $\Delta z \to 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \tag{3.4}$$



Deze uitdrukking geldt voor willekeurige variaties van ρ en g met z, en speelt bijv. een sleutelrol in de berekening van het evenwichtsprofiel van druk en dichtheid in de atmosfeer (aerostatica).

Figuur 3.2 Vertikaal georiënteerd balansgebied

Voorbeeld *We berekenen de vertikale variatie van de luchtdruk in de atmosfeer. We gebruiken de gaswet $p = R_s \rho T$, waarin R_s de specifieke gasconstante is, die voor lucht een waarde heeft van 290 J kg^{-1} K^{-1}. Invullen in (3.4) geeft*

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{R_s T} p = 0$$

De verhouding $R_s T/g$ is blijkbaar een lengteschaal voor de vertikale variatie van de atmosferische druk voor de hier beschouwde omstandigheden. Als de variatie hiervan met z bekend is kan deze differentiaalvergelijking naar z worden geïntegreerd. Veronderstellen we $R_s T/g$ binnen het beschouwde interval constant (praktisch gesproken: T constant) dan ontstaat

$$p(z) = p_o \exp[-\frac{gz}{R_s T}] \qquad (3.5)$$

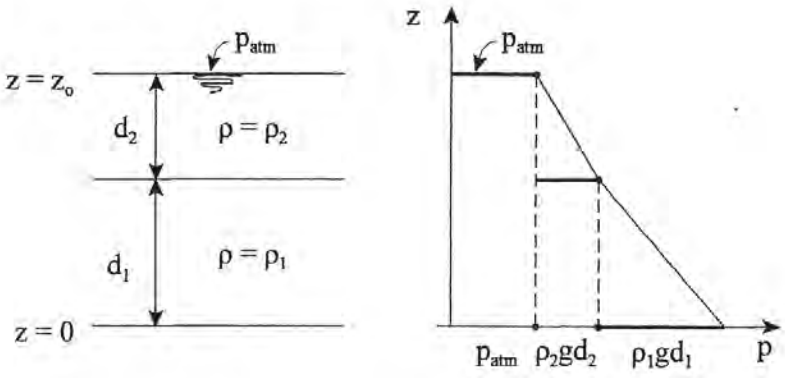
waarbij als randvoorwaarde is gebruikt dat $p = p_o$ waar $z = 0$. (Voor $T = 290$ K heeft $R_s T/g$ een waarde van ca. 8.4 km.)

Wanneer ρ en g binnen het beschouwde interval niet met z variëren vereenvoudigt (3.3) tot

$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1)$ ofwel

$$p + \rho g z = \text{constant} \qquad (3.6)$$

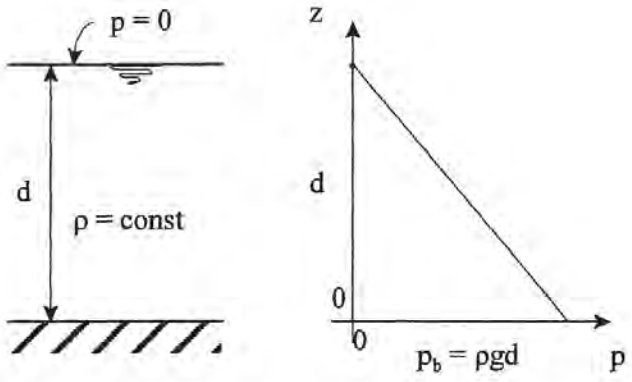
In Figuur 3.3 is een drukprofiel getekend voor een tweelagenvloeistof met een vrij oppervlak, waar $z = z_o$ en $p = p_{atm}$. In de bovenste laag is ρ = constant = ρ_2 en in de onderste laag is ρ = constant = ρ_1 waarbij $\rho_1 > \rho_2$. Merk op dat (3.6) voor beide lagen afzonderlijk geldt, want per laag is ρg constant, maar de constante heeft voor beide lagen een verschillende waarde.



Figuur 3.3 Hydrostatische drukverdeling in tweelagen-vloeistof met atmosferische druk aan het oppervlak

In de meeste toepassingen gaat het niet om de absolute druk maar is het voldoende te werken met de overdrukken t.o.v. de atmosferische druk. Dit wordt eenvoudig bereikt door $p_{atm} = 0$ te stellen. (Bij berekening van krachten op scheidingswanden tussen twee gebieden die niet beide aan de atmosferische druk zijn blootgesteld moet dit verschil uiteraard in rekening worden gebracht, bijv. door met absolute drukken te werken.) Bovendien is in veel situaties de dichtheid vrijwel uniform. In dit geval reduceert de drukfiguur tot een driehoekige vorm zoals getekend in Figuur 3.4. De daarbij horende horizontale drukkracht in een vertikaal vlak dat de hele diepte beslaat is p.e.v. breedte gelijk aan

$$K = \int_0^d p(z) = \frac{1}{2} p_b d = \frac{1}{2}(\rho g d)d = \frac{1}{2}\rho g d^2 \qquad (3.7)$$



Figuur 3.4 Hydrostatische druk in vloeistof van constante dichtheid; $p_{atm} = 0$ gesteld

3.4 Piëzometrisch niveau

In de civiele techniek komen stromen met een vrij oppervlak veel voor. Daarom is het gebruikelijk de drukken om te rekenen naar meters vloeistofkolom, zodat die kunnen worden vergeleken met een **verval**, d.w.z. een **niveauverschil tussen twee vrije vloeistofspiegels**. Daartoe delen we de druk door ρg. De verhouding p/ρg stelt de druk voor in hoogte vloeistofkolom, zoals de atmosferische druk op zeeniveau overeenkomt met ca 0.76 m kwikkolom of ca. 10 m waterkolom.

De druk p in een punt op niveau z (boven een willekeurig gekozen referentievlak z = 0) kan de vloeistof in dat punt doen stijgen, tegen de werking van de zwaartekracht in, tot een niveau z + p/ρg. Dat noemen we het **piëzometrisch niveau**. De hoogte ervan boven het referentievlak z = 0 geven we weer met het symbool h:

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \tag{3.8}$$

De eerste term in het rechterlid heet de de **plaatshoogte**, de tweede de **drukhoogte**. Is de vloeistof in rust en in evenwicht (hydrostatisch), en veronderstellen we ρg constant, dan is (3.6) van toepassing; die kunnen we schrijven als

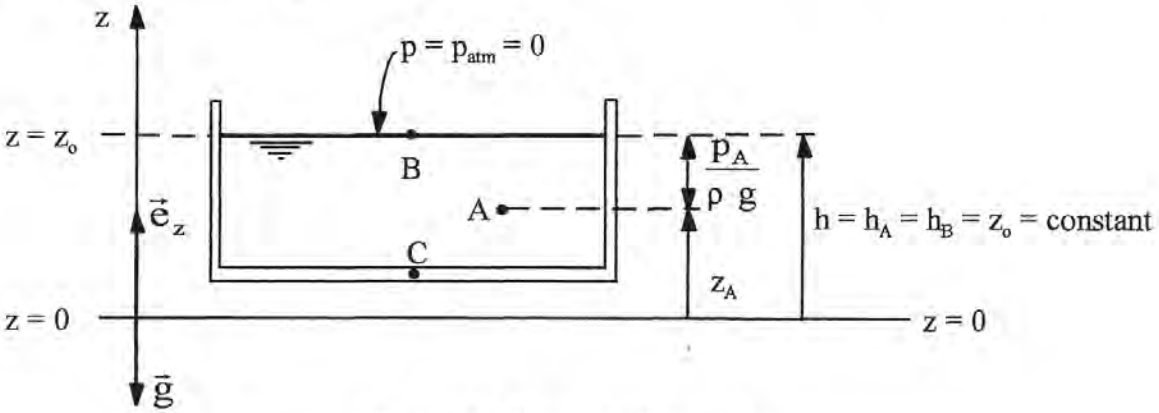
$$h = \text{constant} \tag{3.9}$$

Dit zegt dat bij stijging over een zekere hoogte Δz de drukhoogte afneemt met hetzelfde bedrag.

We passen het voorgaande eerst toe op een vloeistof in evenwicht met een vrij oppervlak, waar $z = z_o$ en $p = p_{atm}$ (zie Figuur 3.5). Alle punten in het oppervlak (en ook die daaronder, maar daar gaat het nu niet om) hebben hetzelfde piëzometrisch niveau, in dit geval $h = z_o + p_{atm}/\rho g$. Als in deze punten de (atmosferische) druk ook dezelfde waarde heeft hebben zij dus dezelfde plaatshoogte: het oppervlak is dan horizontaal (mits p_{atm} = constant).

Bij evenwicht onder niet-uniforme atmosferische druk geldt nog steeds $h = z_o + p_{atm}/\rho g$ = constant, waardoor z_o met de plaats varieert. Het vrije oppervlak is dan niet horizontaal. De zeespiegel is bijv. verhoogd onder de kern van een depressie, waar de atmosferische druk minimaal is. We spreken hier van het omgekeerde barometereffect. (Door de verplaatsing van de depressie kunnen zo schommelingen in het zeeniveau worden opgewekt.)

Vanaf nu veronderstellen we dat de atmosferische druk constant is, en stellen we de waarde ervan gelijk aan nul: $p_{atm} = 0$.



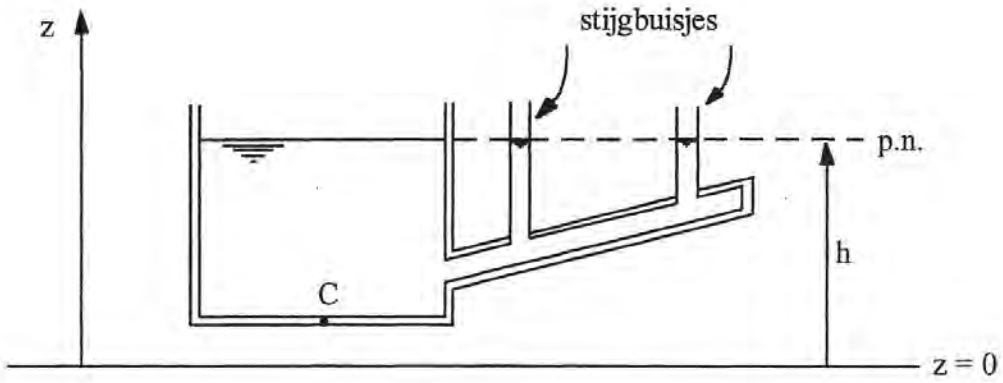
Figuur 3.5 Vat met stilstaand water

Nemen we een willekeurig punt A in de vloeistof, en een ander punt B ergens aan het vrije oppervlak (Figuur 3.5), dan geldt

$$h_A = h_B \quad \text{of} \quad h_A = z_B + \frac{p_B}{\rho g} = z_B = z_o \tag{3.10}$$

We zien: in de evenwichtssituatie ligt het piëzometrisch niveau van alle punten in de vloeistof in de vrije vloeistofspiegel (mits $p_a = 0$).

Het piëzometrisch niveau (afgekort: p.n.) is dat niveau waar de (eventueel geëxtrapoleerde) druk nul is. Immers, $z = h$ waar $p = 0$. Waar de vloeistof geen vrij oppervlak heeft, maar is ingesloten door vaste wanden, is het piëzometrisch niveau zichtbaar te maken door middel van open stijgbuisjes (Figuur 3.6). De vloeistof zal daarin opstijgen tot aan het piëzometrisch niveau ter plaatse. In geval van evenwicht stijgt de vloeistof in alle buisjes tot hetzelfde niveau.



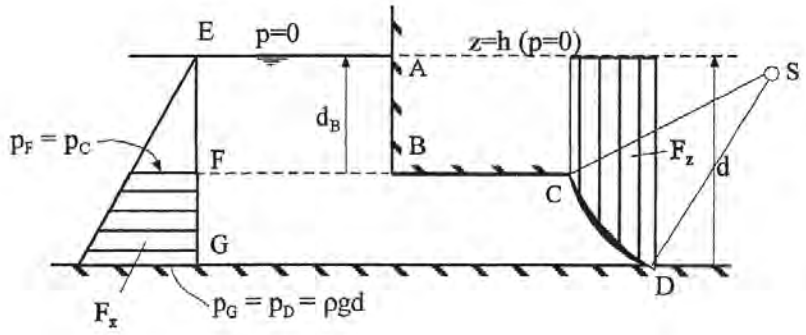
Figuur 3.6 Vat met stilstaand water en stijgbuizen

Door het openen van een klep in de bodem, bijv. bij punt C in Figuur 3.5 of 3.6, wordt het piëzometrisch niveau bij C verlaagd tot $h_C = z_C$ (want $p_C = p_{atm} = 0$). Het komt dus lager te liggen dan in de overige punten in het reservoir. Van een gemeenschappelijk piëzometrisch niveau voor alle punten in de vloeistof is dan geen sprake meer. De vloeistof wordt nu versneld in de richting van het lagere piëzometrisch niveau. Zie hierover Hoofdstuk 6.

Het gebruik van het piëzometrisch niveau is alleen zinvol in gebieden waarbinnen de dichtheid uniform is, omdat anders (3.6) niet geldt en dus (3.9) ook niet (verg. (3.4) blijft van kracht). Twee tegenvoorbeelden met variabele dichtheid laten zien dat daarin h niet constant is, ook al is er sprake van een statische toestand. De luchtdrukverdeling in de atmosfeer is er één van. De oplossing (3.5) voldoet aan de evenwichtsvoorwaarde (3.4) (zo is die afgeleid), maar het is eenvoudig na te gaan dat daarmee niet voldaan wordt aan (3.6) en dus ook niet aan (3.9). Het tweelagensysteem van Figuur 3.3 is een tweede voorbeeld. Per laag geldt (3.6). Het grensvlak tussen beide kent slechts één niveau (z) en één druk (p), maar de vloeistoffen aan weerszijden hebben twee verschillende waarden van de dichtheid Afhankelijk van de vraag of we het grensvlak benaderen vanuit de onderlaag of vanuit de bovenlaag heerst er dus een verschillend piëzometrisch niveau.

3.5 Krachten op wanden

We gaan het voorgaande toepassen voor de berekening van krachten op wanden. We maken daarbij onderscheid tussen de horizontale en de vertikale krachten, en nemen als voorbeeld een duiker (ABC) met cirkelvormige schuif (CD), een z.g. sectorschuif, draaibaar om een scharnier S in het middelpunt van de cirkel; zie Figuur 3.7.



Figuur 3.7 Horizontale en vertikale drukkracht op gekromde schuif

A en E liggen in de vrije vloeistofspiegel, waar we p = 0 stellen, dus in het vlak z = h. Dit is tevens het p.n. van alle punten in hetzelfde vloeistofdomein, zoals C en D. De druk daar is gelijk aan die in andere punten op hetzelfde niveau (F respectievelijk G).

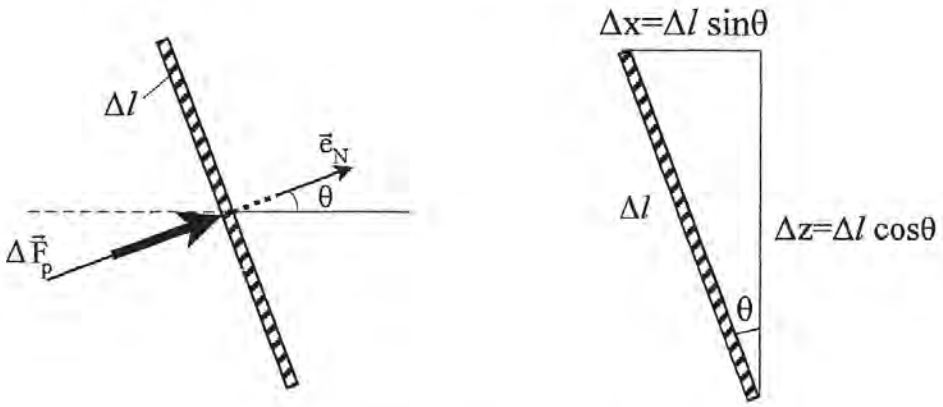
Omdat de vloeistof in het gebied CDGF in evenwicht verkeert, is de horizontale kracht op CD in grootte gelijk aan die op FG, welke gemakkelijk is te berekenen als

$$F_{CD_x} = F_{FG_x} = \int_{z_G}^{z_F} p \, dz = \frac{1}{2}(p_F+p_G)(z_F-z_G) = \frac{1}{2}\rho g(d^2-d_B^2) \qquad (3.11)$$

(per eenheid van breedte). Merk op dat hier de vorm van de schuif er niet toe doet, maar alleen de horizontale projectie ervan op een vertikaal. Dit komt omdat p onafhankelijk is van de horizontale positie en alleen varieert met z.

De bepaling van de vertikale drukkracht kan via een Archimedes-argument worden beredeneerd. Denk de constructie ABCD geheel afwezig, zodat het water doorloopt naar rechts in Figuur 3.7. Dat verandert niets aan de drukken in het gebied waar het water al was, en dus ook niets aan de kracht in het kromme vlak CD (dat dan een denkbeeldig vlak is in de vloeistof). In deze gedachtengang stelt het vertikaal gearceerde gebied in Figuur 3.7 een moot water voor in evenwicht. De druk aan de bovenzijde is nul, want zo is dat niveau gekozen. Dat houdt in dat de vertikale kracht aan de onderzijde (d.w.z. langs CD) gelijk is aan het het gewicht van deze moot. Dit is tevens de gezochte vertikale kracht op de schuif CD.

Een meer formele manier om een uitdrukking voor de kracht op een scheve en/of kromme wand af te leiden gaat als volgt. Neem een vlakje met lengte Δl waarvan de normaal $\vec{e}_N$ een hoek θ met de horizontaal insluit (Figuur 3.6). De drukkracht op dit vlakje is $\Delta\vec{F}_p = p\vec{e}_N \Delta l$ (per eenheid van breedte; deze toevoeging wordt niet steeds herhaald). De x-component daarvan heeft de waarde $\Delta F_x = p\Delta l\cos\theta = p\Delta z$, waarin $\Delta z = \Delta l\cos\theta$ de vertikale afmeting is van het vlakje. Hier uit volgt dat F_x gelijk is aan de integraal van de druk over het betreffende vertikale interval, zoals we al hadden gezien in (3.11), en onafhankelijk is van de vorm of stand van het vlakje zolang de projectie daarvan op een vertikaal vlak dezelfde is.



Figuur 3.8 Drukkracht op scheve wand

Voor de vertikale component van de kracht op het vlakje van Figuur 3.8 geldt $\Delta F_z = p\Delta l\sin\theta = p\Delta x$, waar uit volgt dat de totale vertikale kracht op een wand gelijk is aan de integraal van de druk over het betreffende horizontale interval. De waarde van de druk in elk punt kan worden bepaald uit de hydrostatische drukverdeling. De drukhoogte in elk punt is gelijk aan de afstand van het punt tot het vlak waar $p = 0$ ofwel waar $z = h$. Met

gebruikmaking hiervan is de betreffende drukfiguur getekend in Figuur 3.7 (vertikaal gearceerd). De integraal daarvan levert F_z op, zoals we al hadden gezien via een Archimedes-argument. Merk op dat voor de vertikale kracht de vorm van de schuif er wel toe doet. Dit komt omdat p met z varieert.

Het voorgaande is goed te zien door de gekromde wand vervangen te denken door een trapjeslijn met afwisselend vertikale en horizontale "treden", waarop alleen horizontale respectievelijk vertikale drukkrachten werken (Figuur 3.9a respectievelijk b).

(a) *(b)*

Figuur 3.9 Horizontale en vertikale drukkracht op deelvlakjes van gekromde wand

Als F_x en F_z eenmaal bekend zijn is de resultante ervan ook bepaald ($F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$) evenals de richting (β = arctan F_z/F_x, waarin β de hoek is die de resultante maakt met de horizontaal). Het aangrijpingspunt kan worden gevonden via de momenten van de drukkrachten t.o.v. een geschikt te kiezen punt. In het voorbeeld van de sectorschuif in Figuur 3.7 is dat echter niet nodig. Omdat deze cirkelvormig is oefenen de drukkrachten erop geen moment uit ten opzichte van het middelpunt, zodat de werklijn van de resultante door dat punt gaat. Omdat de draaiingsas (S) samenvalt met het middelpunt is het moment t.o.v. de draaiingsas ook nul. Dat is uiteraard de reden voor de keuze van een cirkelvormige schuif met de draaiingsas in het middelpunt.

4 KINEMATICA

4.1 Snelheidsveld

De **stroomsnelheid** ($\vec{u}$) op een zeker tijdstip in een punt is gelijk aan de snelheid (t.o.v. de gekozen referentie) van het massacentrum van de materie die zich op het beschouwde tijdstip bevindt in een zeer kleine omgeving van het beschouwde punt. In het continuümmodel is de stroomsnelheid gedefinieerd als functie van de continue ruimte.

De verzameling vectoren $\vec{u}$ op een willekeurig tijdstip in een gebied G heet het **snelheidsveld** in G op dat tijdstip. We kunnen dat (o.a.) beschrijven in een rechthoekig assenstelsel (x, y, z), met eenheidsvectoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, waarbij $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$.

Wanneer de snelheid in een zeker gebied niet varieert met de plaats heet het snelheidsveld in dat gebied **uniform** of **homogeen**.

Wanneer het snelheidsveld in een zeker tijdsinterval niet met de tijd varieert heet de stroming gedurende dat interval **stationair**; daarbij is de snelheid in elk vast punt dus constant in de tijd. Bij een stationair maar niet-uniform snelheidsveld zal een bewegend waterdeeltje echter in de loop van de tijd wel een variërende snelheid kunnen hebben; de versnelling van de deeltjes is dan niet gelijk aan nul. Denk aan de stroming door een vernauwing. Op dit soort situaties komen we terug in par. 4.4.

Een beweging waarin de versnellingen nul zijn noemen we **eenparig**. Een voorbeeld daarvan is de stationaire, laminaire stroming door een prismatische leiding (bijv. een pijpleiding met constante diameter). (De snelheid varieert daarbij wel met de afstand uit de wand, zodat dit snelheidsveld niet uniform is volgens bovenstaande definitie; voor een deeltje, dat evenwijdig met de wand beweegt, is de snelheid echter constant.)

Turbulente stroming

In Hoofdstuk 2 is al opgemerkt dat een stroming laminair of turbulent kan zijn, afhankelijk van de waarde van het kental van Reynolds (zie par. 2.3). Alleen een laminaire stroming kan in strikte zin uniform en stationair zijn. Bij een turbulente stroming treden per definitie onregelmatige fluctuaties op in de momentane snelheid, zoals in windvlagen.

Het optreden van turbulentie heeft een sterke vergroting tot gevolg van menging en van energieverlies (eigenlijk: onomkeerbare omzetting van kinetische energie van macroscopische, geordende bewegingen in kinetische energie van kleinschalige, ongeordende wervelende bewegingen en uiteindelijk in warmte). Daardoor is het een belangrijk verschijnsel.

In de beschrijving van turbulentie maken we onderscheid tussen een gemiddelde waarde van de snelheid en de fluctuaties rondom dat gemiddelde. De definitie van de over een zekere tijd gemiddelde waarde van de snelheid ($\bar{u}$) in een punt kan geschreven worden als

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt \qquad (4.1)$$

Hierin is u(t) de momentane snelheid in een gekozen richting, t_0 het aanvangstijdstip van de middeling, en T de duur ervan (Figuur 4.1).

Figuur 4.1 Snelheid in turbulente stroom

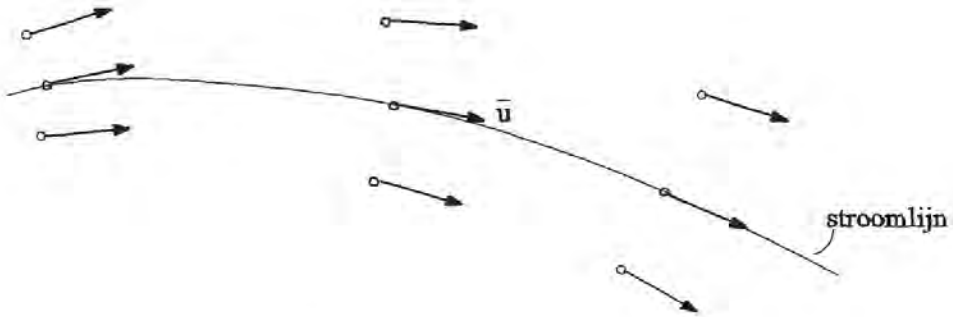
De middelingsduur T moet zo groot gekozen worden dat het resultaat van de middeling statistisch stabiel is. Een duur van enkele minuten is daartoe voor stromingen in open en gesloten leidingen veelal voldoende. Merk op dat het resultaat ($\bar{u}$) daarbij nog wel in de tijd (met t_0) kan variëren, bijvoorbeeld als gevolg van het getij of van het opsteken of gaan liggen van de wind.

Voorlopig gaan we ons beperken tot het over de turbulentie gemiddelde snelheidsveld. De hierboven ingevoerde begrippen zoals uniformiteit en stationariteit zullen ook daarop betrekking hebben. We zullen zelfs zonder meer over "de snelheid" spreken, en de overstreping weglaten, ook al bedoelen we in feite deze gemiddelde snelheid.

Stroomlijnen

Een belangrijke eigenschap van elke stroming is dat deze ergens heen gaat, m.a.w. een **stroomrichting** heeft. Een goed inzicht in de stroming begint dan ook met inzicht in de stroomrichtingen. Een hulpmiddel daarvoor is de z.g. **stroomlijn**, d.i. een lijn waaraan de snelheid raakt in elk punt ervan (Figuur 4.2). Een stroomlijn geeft dus een beeld van de richting van de stroomsnelheid (afgezien van het teken). **Een verzameling stroomlijnen geeft een goede indruk van de stroming in het betreffende gebied; het gebruik ervan is een onmisbaar hulpmiddel in de analyse van veel stromingsproblemen**, in het bijzonder die

van sterk niet-uniforme stromingen zoals die zich voordoen rondom constructies en bij abrupte veranderingen in het profiel van een leiding.



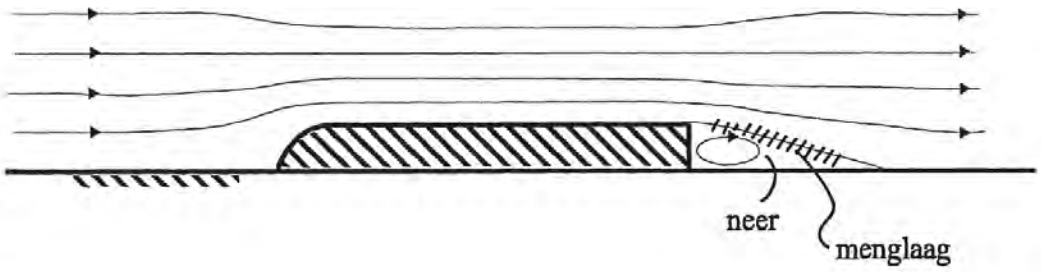
Figuur 4.2 Stroomlijn

Figuur 4.3 geeft enkele voorbeelden van stroomlijnen. Eén daarvan is afkomstig van Leonardo da Vinci (1452-1519), die veel stroombeelden heeft geobserveerd en getekend.

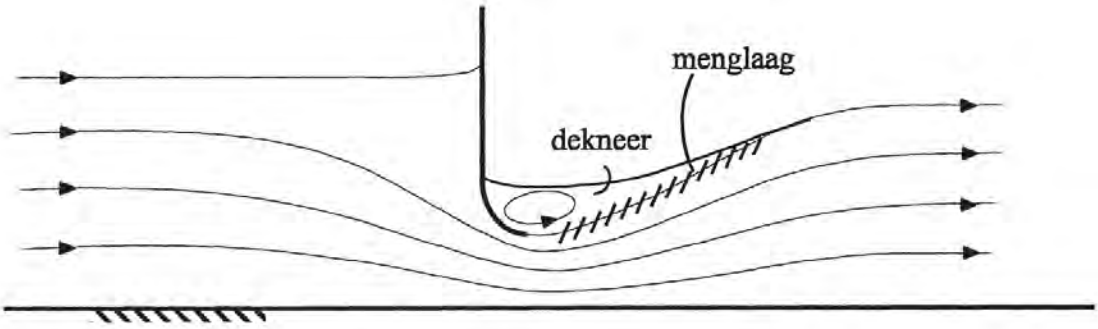
Opmerking: een stroomlijn geeft de *momentane* richtingen aan van de stroming. Alleen wanneer de stroming stationair is vallen de stroomlijnen samen met de baan van de vloeistofdeeltjes. Bij niet-stationaire stromen is dit niet het geval.

Bij abrupte veranderingen in het profiel zal de hoofdstroom **loslaten** van een vaste wand (Figuur 4.3). Er ontstaat daardoor naast de zone van de doorgaande stroom een gebied waarin geen doorgaande stroming plaats vindt, een z.g. stagnante zone. Het grensgebied tussen beide is een z.g. **menglaag** (gearceerd in Figuur 4.3a en b). Als gevolg van het snelheidsverschil in dwarsrichting ontstaan vrij sterke turbulente wervels in de menglaag, die zowel energieverlies betekenen voor de doorgaande beweging als overdwarse menging. Deze menging veroorzaakt o.a. dat de vloeistof in de stagnante zone in een vrij zwakke, draaiende beweging wordt gebracht door de hoofdstroom; we zeggen dat zich daar een z.g. **neer** vormt.

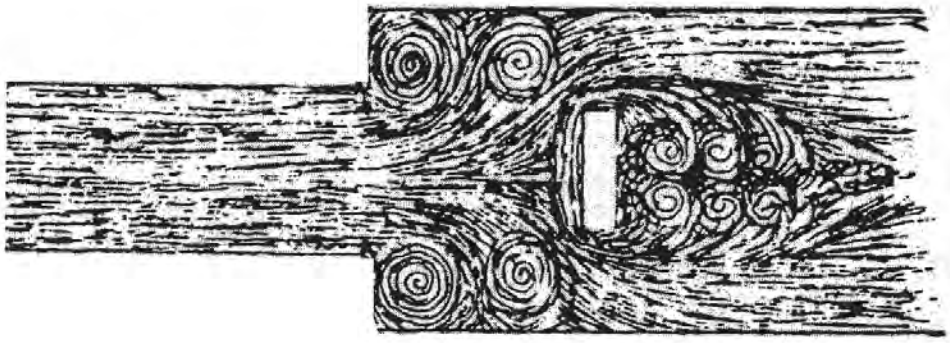
Door het schetsen van een bundel stroomlijnen kan voor situaties zoals hier beschreven een goed beeld van de stroming worden gegeven. Dat is een noodzakelijke stap in het opzetten van rekenmodellen.



Figuur 4.3 (a) Stroming over overlaat



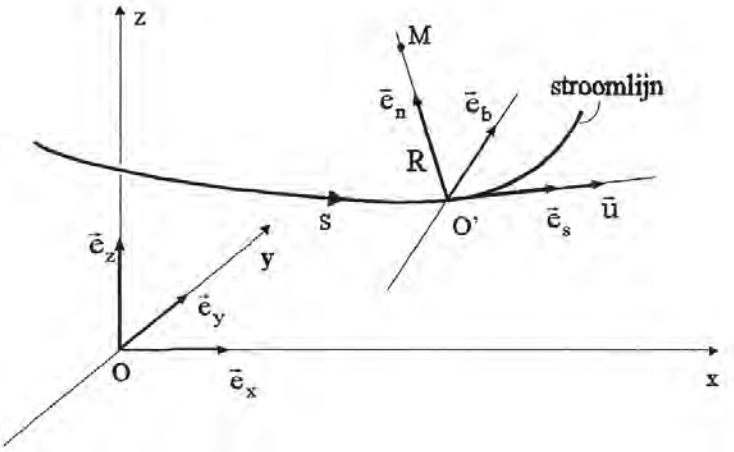
Figuur 4.3 (b) Stroming onder een schuif



Figuur 4.3 (c) Stroming in verwijding met obstakel, getekend door Leonardo da Vinci (ontleend aan Rouse en Ince, 1963)

Natuurlijk assenstelsel

Het Oxyz-assenstelsel mag een willekeurige oriëntatie hebben. Het is vaak inzichtelijker om daarnaast het z.g. natuurlijke assenstelsel (O'snb) te gebruiken, dat georiënteerd is ten opzichte van de stroomlijn in een kleine omgeving van het beschouwde punt O' (Figuur 4.4).



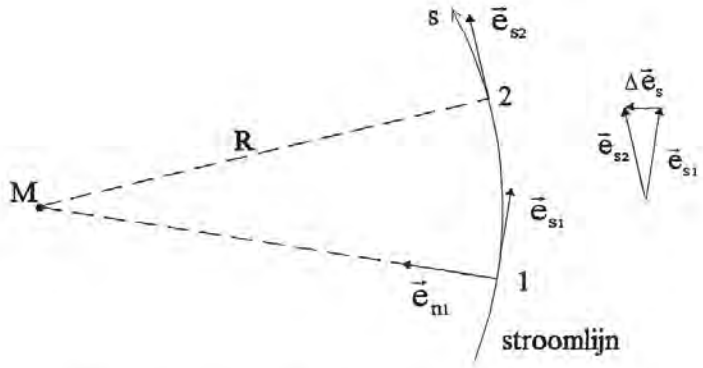
Figuur 4.4 Stroomlijn met natuurlijk assenstelsel

We kiezen een lengtecoördinaat s langs de stroomlijn, en een richting waarin deze toeneemt. In principe is dit willekeurig, maar het ligt voor de hand deze richting te laten samenvallen met de stroomrichting als deze ondubbelzinnig vastligt. De lokale richting van de stroomlijn wordt weergegeven door een eenheidsvector $\vec{e}_s$, wijzend in de richting van toenemende waarde van s. De verandering hiervan per eenheid van booglengte ($\partial\vec{e}_s/\partial s$) noemen we de **kromming**. Omdat de lengte van $\vec{e}_s$ (een eenheidsvector) constant is, betekent een verandering van $\vec{e}_s$ een draaiing, d.w.z. $\partial\vec{e}_s/\partial s$ is een vector die haaks staat op $\vec{e}_s$, wijzend in de richting waarheen de stroomlijn is gekromd. Deze richting geven we weer met een eenheidsvector $\vec{e}_n$, de z.g. **normaal.** De waarde van de kromming, met dimensie L^{-1}, geven we weer met 1/R, waarin R de z.g. **kromtestraal** is:

$$\frac{\vec{e}_n}{R} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial\vec{e}_s}{\partial s} \tag{4.2}$$

Hiermee worden $\vec{e}_n$ en R gedefinieerd (gegeven de stroomlijn), en dus ook het z.g. **kromtemiddelpunt** (M), het punt dat op afstand R van O' ligt in de richting van $\vec{e}_n$ (Figuur 4.5). In een kleine omgeving van O' ligt de gekromde stroomlijn in een plat vlak, het z.g. **osculatievlak**, zodanig dat zowel $\vec{e}_s$ als $\vec{e}_n$ daarin liggen.

Voor de definitie van het natuurlijke assenstelsel gebruiken we nu de basisvectoren $\vec{e}_s$, $\vec{e}_n$ en een derde ($\vec{e}_b$), haaks op deze twee ($\vec{e}_b = \vec{e}_s \times \vec{e}_n$), dus haaks op het osculatievlak, die (daarom) de **binormaal** wordt genoemd. Het lokale natuurlijke assenstelsel in O' is gericht langs deze vectoren, met coördinaten s, n, b.



Figuur 4.5 Stroomlijn met kromtemiddelpunt

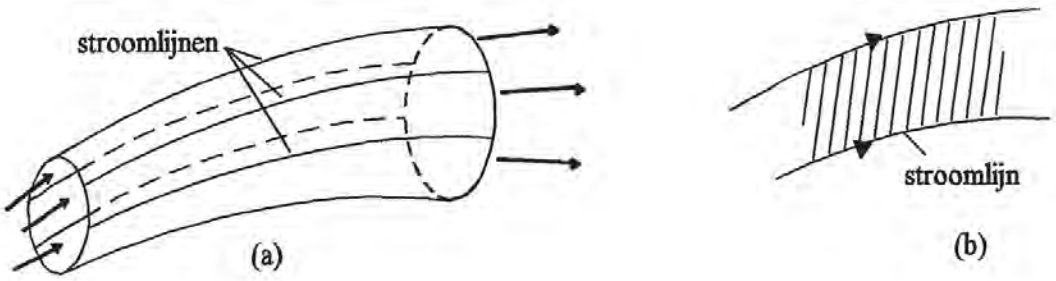
De waarde van de snelheidscomponent in de richting van $\vec{e}_s$ noemen we u_s (dus $\vec{u} = u_s\vec{e}_s$). Deze kan zowel positief zijn (bij stroming in de richting van $\vec{e}_s$) als negatief (bij stroming tegengesteld aan $\vec{e}_s$). De snelheidscomponenten in de richtingen van de (momentane) lokale normaal en binormaal hebben vanzelfsprekend de waarde nul ($u_n = 0$ en $u_b = 0$) omdat deze richtingen per definitie haaks staan op de lokale snelheid. Voor de absolute grootte van de snelheid (u) geldt $u = |\vec{u}| = |\vec{u}_s|$. (N.B. u_s kan negatief zijn, maar u niet.)

Stroombuis en stroomstrook

De stroomlijnen die door alle punten van een gesloten kromme (C) gaan vormen tezamen een buisvormig oppervlak dat een z.g. **stroombuis** insluit (Figuur 4.6a). (Hierbij is stilzwijgend aangenomen dat de kromme niet geheel in het vlak van de stroming ligt.)

Per definitie vindt er geen stroming plaats door de zijdelingse, buisvormige begrenzing van de stroombuis, ongeacht of deze begrenzing slechts een denkbeeldig vlak is, midden in de stromende materie, of een fysisch grensvlak zoals bodem, wand of oppervlak.

In sommige situaties vindt de stroming plaats in onderling evenwijdige platte vlakken, althans bij benadering. Een voorbeeld hiervan is de stroming haaks over een prismatische drempel op



Figuur 4.6 Stroombuis (a) en stroomstrook (b)

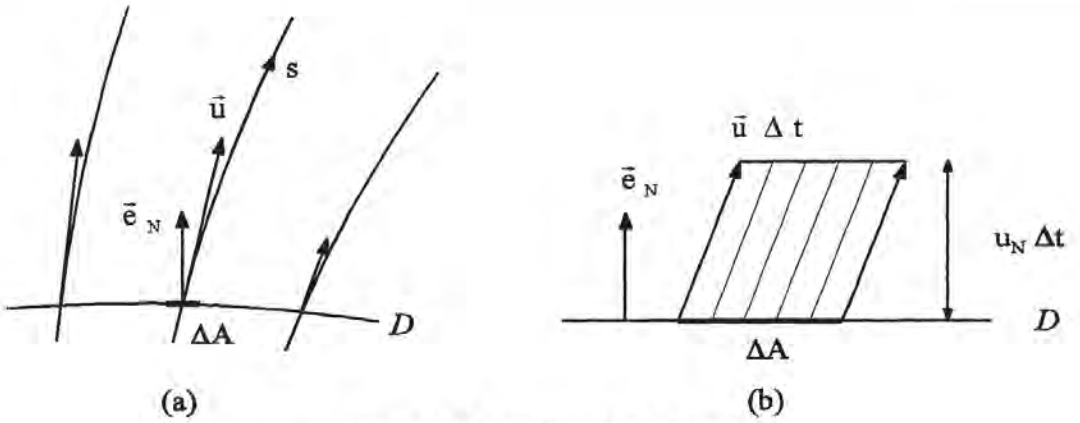
een horizontale bodem. In zulke gevallen van een z.g. tweedimensionale stroming werken we niet met een stroombuis maar met een **stroomstrook**, d.i. een deel van een vlak waarin de stroming plaatsvindt dat begrensd wordt door twee stroomlijnen (Figuur 4.6b).

4.2 Volumestroom en meevoering

In stromingsproblemen richt de aandacht zich niet altijd op de baan van een deeltje, maar op een bepaald deel van de ruimte (bijvoorbeeld een sluis, of een bocht in een rivier), dat in de loop van de tijd door steeds andere deeltjes wordt doorstroomd. Het is dan geschikt een vast deel van de ruimte te definiëren, een z.g. **balansgebied**, en te bepalen in hoeverre de daarin aanwezige massa, impuls, energie enz. variëren in de tijd (of constant blijven). Dit is een beschrijving volgens **Euler**. De overdracht van massa, impuls, energie enz. door de begrenzingen van het balansgebied heen speelt daarin een belangrijke rol. Voor een deel vinden deze overdrachten plaats in de vorm van **meevoering** of **advectie** met de stromende materie. We beginnen met de volumestroom.

Een vlak waardoorheen we de stroom bepalen noemen we een **doorgang** (*D*). De lokale stand ervan geven we aan met een normaalvector $\vec{e}_N$ (Figuur 4.7a). De waarde van de normaalcomponent van de lokale stroomsnelheid is $u_N = \vec{u} \cdot \vec{e}_N$ (inwendig product).

We bekijken de stroom door een infinitesimaal deel van de doorgang, met oppervlakte ΔA. De deeltjes die op een tijdstip $t = t_1$ in dit deelvlakje liggen ondergaan in een tijdsinterval met een infinitesimale duur Δt een verplaatsing $\vec{u}\,\Delta t$. De materie die in dat tijdsinterval door het vlakje stroomt vormt een prisma met grondvlak ΔA en hoogte (dwars op het grondvlak) $u_N\,\Delta t$



Figuur 4.7 Stroming door doorgang

(Figuur 4.7b). Het volume ervan is dus gelijk aan $\Delta V = u_N \, \Delta t \, \Delta A$. Het volume van de materie die per tijdseenheid door een doorgang gaat ($\Delta V/\Delta t$) noemen we de **volumestroom** (SI-eenheid: 1 m^3/s). Deze heeft voor het beschouwde deelvlakje dus de waarde

$$\Delta Q = u_N \, \Delta A \tag{4.3}$$

De volumestroom door de hele doorgang *D* wordt gevonden door sommatie van de bijdragen ΔQ over de doorgang. Bij een onbegrensd fijne verdeling is sprake van een integratie:

$$Q = \iint u_N \, dA \tag{4.4}$$

(Dit is in feite een bepaalde integraal, maar de integratiegrenzen worden kortheidshalve weggelaten.)

Bij stromingen door een leiding zoals een buis of een open waterloop ligt het voor de hand de totale stroom door de leiding te beschouwen; we leggen de begrenzingen van de doorgang dan in de fysische grensvlakken van de stroming (buiswand, bodem, oever, oppervlak e.d.). De volumestroom door zo'n doorgang noemen we het **debiet** of (vooral bij rivieren) de **afvoer.**

In leidingen valt de stroomrichting ongeveer samen met de as van de leiding. We kiezen de doorgang dan bij voorkeur dwars op de as, een z.g. **dwarsdoorgang**. Bij stroming in de richting van $\vec{e}_N$ geldt $u_N = u$, waarin u de grootte is van de snelheidsvector ($u = |\vec{u}|$). Voor het debiet kunnen we dan schrijven:

$$Q = \iint u \, dA \tag{4.5}$$

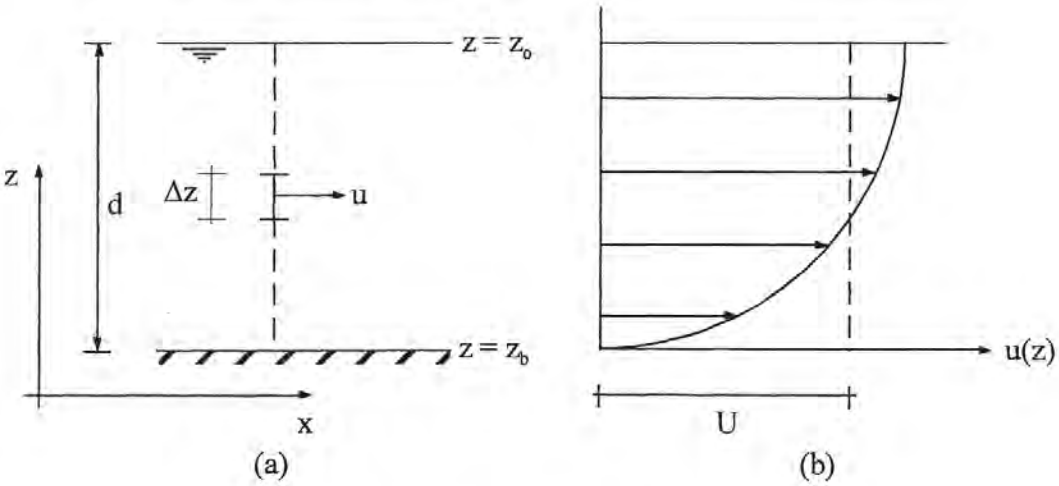
Delen we dit door het oppervlak (A) van het doorstroomde deel van het dwarsprofiel, dan krijgen we de over het dwarsprofiel gemiddelde waarde van de stroomsnelheid:

$$U = \frac{\iint u \, dA}{\iint dA} = \frac{Q}{A} \tag{4.6}$$

Wanneer we in een open waterloop de snelheid niet over het gehele dwarsprofiel integreren, maar slechts over de diepte, langs een vertikaal, dan krijgen we het debiet per eenheid van breedte (q):

$$q = \int_{z_b}^{z_o} u \, dz \tag{4.7}$$

Hierin is z een vertikale coördinaat, positief omhoog; de waarde hiervan bij de bodem en het oppervlak is z_b respectievelijk z_o (Figuur 4.8 a). De SI-eenheid van q is 1 $(m^3/s)/m$.



Figuur 4.8 Definitieschets (a) en snelheidsprofiel (b)

Delen we q door de plaatselijke diepte ($d = z_o - z_b$), dan krijgen we de over de vertikaal gemiddelde snelheid (Figuur 4.8b):

$$U = d^{-1} \int_{z_b}^{z_o} u \, dz = \frac{q}{d} \tag{4.8}$$

N.B. We gebruiken hiervoor hetzelfde symbool als in verg. (4.6). Per geval is uit het verband op te maken welke gemiddelde snelheid bedoeld wordt.

In een tweedimensionale stroming (geen zijdelingse variaties, bijvoorbeeld in een brede rivier met overdwars constante diepte) met een breedte B geldt

$$Q = qB \tag{4.9}$$

Meevoering

Voor de bepaling van de stromen van massa, energie enz. keren we nu terug naar de stroming beschouwd in Figuur 4.7. Het volume van de materie die in een tijd Δt door het vlakje met oppervlak ΔA stroomt is $\Delta V = u_N \Delta t \Delta A$. De massa ervan is $\Delta m = \rho \Delta V = \rho u_N \Delta t \Delta A$. De massa die per tijdseenheid een doorgang passeert noemen we de massastroom S, met dimensie [S] = M/T en met SI-eenheid 1 kg/s. Voor het infinitesimale vlakje heeft S de waarde

$$\Delta S = \rho u_N \Delta A = \rho \Delta Q$$

en voor de hele doorgang *D*:

$$S = \iint \rho u_N \, dA \tag{4.10}$$

Wanneer ρ uniform is in *D* reduceert deze uitdrukking voor de massastroom tot

$$S = \rho \iint u_N \, dA = \rho Q \tag{4.11}$$

Op analoge wijze kunnen we de stroom definiëren van andere meegevoerde grootheden met een (volumieke) dichtheid. Als voorbeeld noemen we de kinetische energie. De waarde daarvan voor een massa $\Delta m = \rho \Delta V$, met snelheid u, is $\frac{1}{2}(\Delta m)u^2 = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V$. De kinetische energie per eenheid van volume, ofwel de (volumieke) dichtheid van de kinetische energie, is dus gelijk aan $\frac{1}{2}\rho u^2$ (SI-eenheid: J/m^3). De stroom van kinetische energie door het infinitesimale vlakje (met SI-eenheid 1 $(J/m^3)(m^3/s) = 1$ J/s = 1 W) is dan

$$\Delta S_{kin} = (\tfrac{1}{2}\rho u^2)u_N \Delta A = \tfrac{1}{2}\rho u^2 \Delta Q$$

en die door de gehele doorgang

$$S_{kin} = \iint (\tfrac{1}{2}\rho u^2)u_N \, dA$$

Algemener gesteld geldt dat de stroom door een doorgang (meevoering per tijdseenheid) van een grootheid X, waarvan de volumieke dichtheid ρ_X is, gegeven is door

$$S_X = \iint \rho_X \, u_N \, dA \tag{4.12}$$

De dimensie hiervan is [X]/T.

Een **dwarsdoorgang** staat per definitie in elk punt ervan haaks op de lokale snelheid. Als $\vec{u}$ in de richting is van $\vec{e}_N$ (i.p.v. er recht tegen in; andere mogelijkheden zijn er niet bij een dwarsdoorgang) dan geldt $u_N = u$ en krijgen we de volgende uitdrukkingen voor de volumestroom en voor de meevoering van massa, impuls en kinetische energie:

Grootheid	Transport p.e.v. tijd door willek. doorgang	Idem door dwarsdoorgang met $u_N = u$	Idem bij ρ en $\vec{u}$ constant in D
volume	$Q = \iint u_N \, dA$	$\iint u \, dA$	$Q = S/\rho$
massa	$S = \iint \rho u_N \, dA$	$\iint \rho u \, dA$	S
impuls	$\vec{S}_{imp} = \iint \rho \vec{u} u_N \, dA$	$\iint \rho u^2 \, \vec{e}_N \, dA$	$\vec{S}_{imp} = S\vec{u}$
kin. en.	$S_{kin} = \iint \frac{1}{2} \rho u^2 u_N \, dA$	$\iint \frac{1}{2} \rho u^3 \, dA$	$S_{kin} = \frac{1}{2} Su^2$

Tot slot gaan we het debiet en de meevoering van impuls en van kinetische energie door een dwarsdoorgang berekenen voor een vrije-oppervlaktestroming waarin de snelheid toeneemt van $u = 0$ aan de bodem ($z = 0$) tot $u = u_{max}$ aan het vrije oppervlak ($z = d$), volgens de volgende machtswet:

$$u(z) = u_{max}(z/d)^n \tag{4.13}$$

Voor waarden van n van ca.1/7 is dit een realistisch snelheidsprofiel voor turbulente vrije-oppervlaktestromen.

Het diepte-geïntegreerde volumetransport per eenheid van (p.e.v.) breedte (het debiet p.e.v. breedte q) dat hoort bij (4.13) is

$$q = \int_{z=0}^{z=d} u(z) \, dz = \frac{1}{1+n} \, u_{max} d \tag{4.14}$$

Volgens (4.8) is dit gelijk aan Ud, waarin U de dieptegemiddelde snelheid is; deze is dus uit te drukken als

$$U = \frac{u_{max}}{1+n} \tag{4.15}$$

Voor de meevoering p.e.v. breedte van impuls (S_{imp}) door een vlak haaks op de stroming geldt evenzo, wanneer we ρ constant veronderstellen in de vertikaal,

$$S_{imp} = \int_{z=0}^{z=d} \rho[u(z)]^2 \, dz = \frac{1}{1+2n} \rho u_{max}^2 d \tag{4.16}$$

Met (4.14) kan dit worden uitgedrukt in de dieptegemiddelde snelheid als

$$S_{imp} = \frac{(1+n)^2}{1+2n} \rho U^2 d \tag{4.17}$$

De factor $(1+n)^2/(1+2n)$ heeft voor $n = 1/7$ de waarde 64/63 ofwel ca. 1,016. Als gevolg van de over de vertikaal variërende snelheid is het impulstransport blijkbaar groter dan wanneer de snelheid uniform zou zijn verdeeld, bij dezelfde gemiddelde waarde (U), hoewel het verschil hier minder is dan 2%.

Voor een willekeurig snelheidsprofiel kunnen we stellen

$$S_{imp} = \int_{z=0}^{z=d} \rho[u(z)]^2 \, dz = \alpha \rho U^2 d \tag{4.18}$$

Hierin is α een dimensieloze factor, per definitie gelijk aan

$$\alpha = \frac{S_{imp}}{\rho U^2 d} = \frac{1}{d} \int_{z=0}^{z=d} [\frac{u(z)}{U}]^2 \, dz \tag{4.19}$$

Altijd geldt $\alpha \geq 1$, waarbij het gelijkteken alleen van toepassing is als de snelheid uniform is ($u(z) = U$) over de hele vertikaal.

Voor het transport van kinetische energie (S_{kin}) geldt op dezelfde manier

$$S_{kin} = \int_{z=0}^{z=d} \frac{1}{2} \rho[u(z)]^3 \, dz = \beta \frac{1}{2} \rho U^3 d \tag{4.20}$$

De dimensieloze factor β hierin is gedefinieerd als

$$\beta = \frac{S_{kin}}{\frac{1}{2}\rho U^3 d} = \frac{1}{d}\int_{z=0}^{z=d} [\frac{u(z)}{U}]^3 \, dz \qquad (4.21)$$

Voor het snelheidsprofiel gegeven door (4.13) geldt $\beta = (1 + n)^3/(1 + 3n)$, met de waarde 512/490 ofwel ca. 1,045 voor $n = 1/7$.

Altijd geldt $\beta \geq 1$, waarbij het gelijkteken alleen van toepassing is als de snelheid uniform is ($u(z) = U$) over de hele vertikaal. Bovendien geldt voor matig niet-uniforme snelheidsprofielen dat β ca. 3x meer van de eenheid afwijkt dan α (zie bovenstaande getalwaarden voor het machtsprofiel met $n = 1/7$, en ook de Appendix van Hoofdstuk 12).

In turbulente stromen is de menging zo sterk dat de snelheidsprofielen daarin slechts matig niet-uniform zijn. In dergelijke gevallen zijn α en β slechts weinig groter dan 1. In de praktijk worden ze daarom vaak weggelaten (d.w.z., gelijk gesteld aan 1).

Voor laminaire stromen is de uitwisseling zwak, en zijn de afwijkingen van een uniforme snelheid veel groter dan in turbulente stromen (zie bijv. Figuur 12.3 voor enkele snelheidsprofielen in een buis), met overeenkomstig grotere waarden van α en β (zie Tabel 12.1). In vrije-oppervlaktestromen komt laminaire stroming echter vrijwel niet voor.

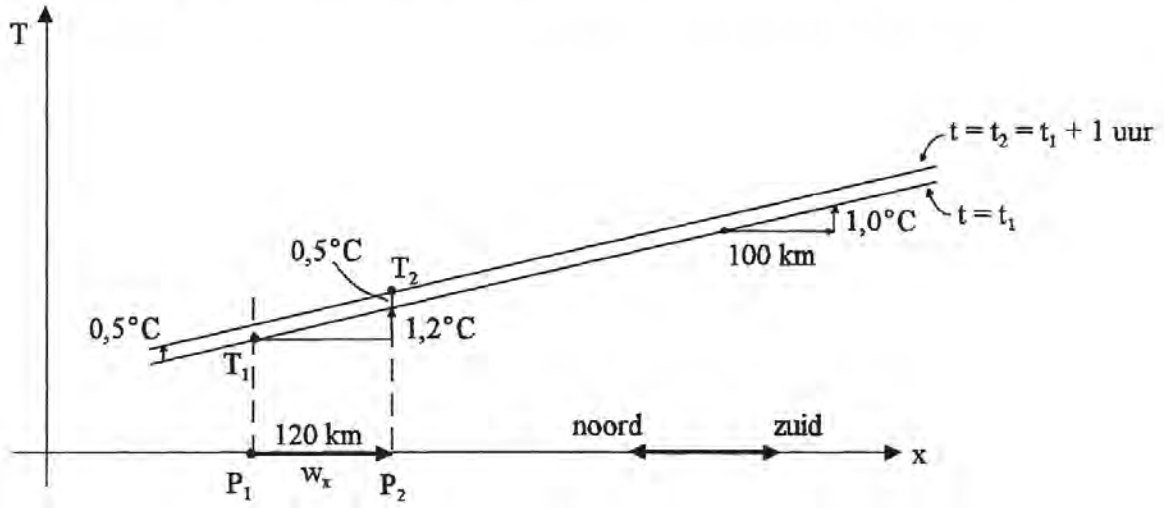
4.3 Variaties in ruimte en tijd

Stromingseigenschappen zoals waterstand en stroomsnelheid variëren in het algemeen zowel met de plaats (behalve in een uniforme stroom) als in de tijd (behalve in een stationaire stroom). Denk aan een op gang komende stroming in een vernauwing, aan getijstromen in een monding, aan windgolven enz. In de beschrijving van de stroming moeten we deze typen variaties (in ruimte en tijd) kunnen onderscheiden maar ook kunnen combineren. We nemen eerst een eenvoudig voorbeeld waarvan we de uitkomst redenerend bepalen en gaan deze aanpak daarna generaliseren en formeel opschrijven.

Voorbeeld 1

Een auto rijdt in de ochtend met een snelheid van 120 km/uur zuidwaarts in een gebied waar de temperatuur (T) zuidwaarts toeneemt met 1° per 100 km, en, in het hele gebied, in de tijd met 0,5° per uur. Bereken de toeneming per uur van de waargenomen buitentemperatuur.

Antwoord:
Per uur neemt T in het hele gebied toe met 0,5°. Bovendien komt de auto in een uur 120 km verder zuidelijk, wat overeenkomt met een temperatuurstijging van (120 km) (1°/100 km) = 1,2°. De waargenomen temperatuur stijgt dus met 1,7° per uur (zie Figuur 4.9).



Figuur 4.9 Temperatuur T_1 en T_2 waargenomen door een waarnemer op het tijdstip t_1 in positie P_1 respectievelijk op tijdstip $t_2 = t_1 + 1$ uur in positie P_2

We gaan dit nu formaliseren. Stel dat een waarnemer W beweegt en onderweg de lokale waarde meet van een beschouwde grootheid f, bijv. de druk. De snelheid van de waarnemer geven we weer met $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$ en zijn momentane positie met $x_W(t)$, $y_W(t)$, $z_W(t)$. De totale waargenomen toeneming van f in een kort tijdsinterval met duur Δt, waarin x_W toeneemt met $\Delta x_W = w_x(t)\Delta t$, en y_w en z_w analoog hieraan, is bij benadering

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_W + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_W + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_W \qquad (4.22)$$

Na deling door Δt krijgen we in de limiet voor $\Delta t \to 0$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}w_x + \frac{\partial f}{\partial y}w_y + \frac{\partial f}{\partial z}w_z \qquad (4.23)$$

We hadden deze uitdrukking ook ineens kunnen opschrijven, en wel door toepassing van de kettingregel van het differentiëren op de functie f(t, x, y, z) waarin $x = x_W(t)$, en idem voor y en z.

Bij waarneming in een vast punt resteert in het rechterlid van (4.23) slechts $\partial f/\partial t$, de z.g. **lokale afgeleide** (f(t, x, y, z) differentiëren naar t en daarbij x, y en z constant houden). De som van de overige termen, zoals $(\partial f/\partial x)w_x$, is de z.g. **advectieve afgeleide** (of convectieve

afgeleide), zo genoemd omdat deze voortkomt uit de beweging van de waarnemer. De totale variatie p.e.v. tijd gemeten door de waarnemer is de som van beide bijdragen, de z.g. **totale afgeleide** naar t voor deze waarnemer. Het onderscheid met de partiële afgeleiden in het rechterlid komt tot uiting in de notatie met rechte d's (linkerlid) in plaats van kromme.

N.B. de volgende combinatie van de ruimtelijke afgeleiden van een functie f(x, y, z) heet de **gradiënt** van f (geschreven als grad f of als ∇f):

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \qquad (4.24)$$

De gradiënt is een vector die haaks staat op vlakken waarin f constant is, wijzend in de richting van de sterkste toeneming van f. (In twee dimensies staat de gradiënt haaks op lijnen waarlangs f constant is, bijv. haaks op de isobaren.) We zien in (4.23) dat de advectieve afgeleide het inwendig product is van de snelheid $\vec{w}$ en de gradiënt van f (dus (4.23) kan geschreven worden als $df/dt = \partial f/\partial t + \vec{w}*\nabla f$). Dit product is nul als deze vectoren haaks op elkaar staan, wat het geval is bij beweging in een vlak waarin (of langs een lijn waarlangs) f constant is. Het spreekt vanzelf dat zo'n beweging geen verandering in de waargenomen waarde van f tot gevolg heeft.

De totale afgeleide is voor het ééndimensionale voorbeeld van de rijdende auto geïllustreerd in Figuur 4.9. De daar gegeven, beredeneerde uitkomst is formeel via (4.23) af te leiden: $\partial T/\partial t$ = 0,5°/uur, $\partial T/\partial x$ = 1°/100 km, w_x = 120 km/uur, w_y = 0 en w_z = 0, zodat dT/dt = 0,5°/uur + (120 km/uur)(1°/100 km) = 1.7°/uur.

Beredeneer zelf hoe de uitkomst van dit voorbeeld verandert wanneer de auto bijv. in zuid-oostelijke richting rijdt, en ga na dat dezelfde uitkomst wordt bereikt via (4.23).

Voorbeeld 2

Stel een druksensor wordt verplaatst met snelheid w_x = 1 m/s in een gebied waarin de druk sinusvormig varieert volgens $p = \hat{p} \sin(\omega t - kx)$ (dit is een golf die loopt in de x-richting, maar voor deze toepassing doet dat er niet toe) waarin de drukamplitude de waarde heeft $\hat{p}$ = 10 Pa, de frequentie ω = 2,5 rad/s en het z.g. golfgetal k = 1 rad/m ($k = 2\pi/L$, waarin L de golflengte is). Gevraagd:

(1) de lokale afgeleide van p in het punt x = 0 als functie van t;

(2) de totale afgeleide van p in het punt x = 2 m als functie van t en op het moment t = 10 s.

Antwoord:
(1) $\partial p/\partial t = \omega \hat{p} \cos(\omega t - kx)$. In $x = 0$ is dit $\omega \hat{p} \cos \omega t = (25\ Pa/s) \cos \omega t$ (antw.)

(2) $dp/dt = \partial p/\partial t + w_x \partial p/\partial x = \omega \hat{p} \cos(\omega t - kx) + w_x(-k\hat{p} \cos(\omega t - kx)) =$
$(\omega - kw_x)\hat{p} \cos(\omega t - kx) = (15\ Pa/s) \cos(\omega t - kx)$. In $x = 2$ m is dit $(15\ Pa/s) \cos(\omega t - 2\ rad)$.
Op $t = 10$ s is dit $(15\ Pa/s) \cos(25\ rad - 2\ rad) = (15\ Pa/s)(-0{,}53) = -8\ Pa/s$ (antw.)

Variaties ondergaan door een vloeistofdeeltje

Het is vaak van belang welke veranderingen een met de stroom meebewegend vloeistofdeeltje ondergaat. We denken dan aan het deeltje als "waarnemer", en vervangen daartoe de waarnemerssnelheid $\vec{w}$ in (4.23) door de vloeistofsnelheid $\vec{u}$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x\frac{\partial f}{\partial x} + u_y\frac{\partial f}{\partial y} + u_z\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (4.25)$$

Dit bijzondere geval van de totale afgeleide wordt **meebewegende afgeleide** genoemd, of ook **materiële afgeleide**, omdat we nu met de materie meebewegen. Vanwege de bijzondere betekenis ervan wordt deze met hoofdletters D geschreven.

In het natuurlijke assenstelsel (s, n, b) geldt $u_n = 0$ en $u_b = 0$. Als we lokaal x, y, en z in (4.25) vervangen door s, n en b dan krijgen we dus

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_s\frac{\partial f}{\partial s} \qquad (4.26)$$

Bovenstaande begrippen komen veel voor in de beschrijving en berekening van stromingen. Het is belangrijk zich er een goed beeld van te vormen.

4.4 Versnelling van een vloeistofdeeltje

Ook de stroomsnelheid varieert in het algemeen, zowel op een vast tijdstip met de plaats (behalve in een uniforme stroom) als in een vast punt met de tijd (behalve in een stationaire stroom). Een vloeistofdeeltje kan daardoor versnellingen ondergaan, deels doordat het in een gebied komt met andere snelheden (variatie met de plaats) en deels doordat in elk vast punt de toestand varieert in de tijd. Voor het bepalen van de **totale versnelling** van een vloeistofdeeltje moeten beide bijdragen in rekening worden gebracht. Formeel is dit niet anders dan de **meebewegende afgeleide (D/Dt) van de vloeistofsnelheid** ($\vec{u}$)**:**

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \tag{4.27}$$

Een formele uitwerking hiervan is gegeven in een Appendix van dit Hoofdstuk (p. 53/54).

Voor een minder formele manier gebruiken we bekende uitdrukkingen voor de versnelling van een puntmassa die beweegt langs een baan (zie CT1021). Een vloeistofdeeltje verplaatst zich langs de stroomlijn. We gaan daarom uit van het natuurlijke assenstelsel, met coördinaten s, n en b langs respectievelijk de stroomlijn, de normaal en de binormaal.

Veronderstel eerst dat de stroming *stationair* is, maar wel variërend in de ruimte. Stel dat over een kort traject langs de stroomlijn, met lengte Δs, de snelheid u_s in de stroomrichting toeneemt met de waarde Δu_s. Dat geeft een (over het traject gemiddelde) versnelling gelijk aan $\Delta u_s/\Delta t$, waarin $\Delta t = \Delta s/u_s$, ofwel een gemiddelde versnelling gelijk aan $u_s\, \Delta u_s/\Delta s$. In de limiet voor $\Delta s \to 0$ gaat dit over in

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\partial (u_s^2/2)}{\partial s} = \frac{\partial (u^2/2)}{\partial s} \tag{4.28}$$

In geval van beweging van een puntmassa over een baan noemt men dit de baanversnelling.

Bij beweging langs een kromlijnige baan verandert de snelheid van richting. Dit hangt samen met een versnelling haaks op de snelheid, in de richting van het kromtemiddelpunt, dus langs de normaal, de z.g. centripetale versnelling. De waarde hiervan is u^2/R, waarin R de lokale kromtestraal is.

Deze twee versnellingen treden op doordat het deeltje met de stroom wordt meegevoerd (geadvecteerd) en daardoor in een gebied kan komen met een andere snelheid dan waar het vandaan komt. Daarom heten zij **advectieve versnellingen**.

Bij een (infinitesimale) verplaatsing van het deeltje blijft het in het lokale vlak van de baankromming (in het osculatievlak), dus is de advectieve versnelling in de richting van de binormaal gelijk aan nul.

In *niet-stationaire stromen* komen er extra bijdragen omdat in elk vast punt de snelheid ook kan variëren in de tijd. (In de analogie van de puntmassa bewegend langs een vaste (acht)baan kan men zeggen dat er extra versnellingen optreden wanneer de baan in zijn totaliteit wordt versneld, zoals tijdens een aardbeving.) In het meest algemene geval geeft dat bijdragen in elk van de drie richtingen, respectievelijk

$$\frac{\partial u_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_b}{\partial t}$$

Dit zijn de z.g. **lokale versnellingen**. Deze tellen we op bij de hierboven genoemde advectieve bijdragen die het gevolg zijn van de verplaatsing van het deeltje (respectievelijk $u_s \partial u_s/\partial s$, u^2/R en 0). Daarmee krijgen we het volgende resultaat voor de componenten van de totale versnelling in de s-, n- en b-richting:

$$a_s = \frac{Du_s}{Dt} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial s} \qquad (4.29s)$$

$$a_n = \frac{Du_n}{Dt} = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} \qquad (4.29n)$$

$$a_b = \frac{Du_b}{Dt} = \frac{\partial u_b}{\partial t} \qquad (4.29b)$$

Deze uitdrukkingen worden in hierna volgende hoofdstukken gebruikt in de behandeling van de dynamica van stromingen.

Voorbeeld 3

We nemen ongeveer hetzelfde voorbeeld als nr. 2. Langs een bodem varieert de snelheid als gevolg van een lopende golf volgens $u_x = \hat{u}_x \sin(\omega t - kx)$, $u_y = 0$ en $u_z = 0$, waarin de snelheidsamplitude de waarde heeft $\hat{u}_x = 1$ m/s, de frequentie $\omega = 0{,}8$ rad/s en het golfgetal k $(=2\pi/L) = 0{,}1$ rad/m. Gevraagd:

(1) de lokale versnelling in het punt $x = 0$ als functie van t en op het moment $t = 5$ s;

(2) de totale versnelling in het punt $x = 0$ als functie van t en op het moment $t = 5$ s.

Antwoord:

(1) Lokale versnelling is $\partial u_x/\partial t = \omega \hat{u}_x \cos(\omega t - kx)$.

In $x = 0$ is dit $\omega \hat{u}_x \cos \omega t = (0{,}8\ m/s^2) \cos \omega t$ (antw.)

Op $t = 5$ s is $\omega t = 4$ rad en is de lokale versnelling $(0{,}8\ m/s^2)(-0{,}654) = -0{,}523\ m/s^2$ (antw.)

(2) $Du_x/Dt = \partial u_x/\partial t + u_x \partial u_x/\partial x = \omega \hat{u}_x \cos(\omega t - kx) + \hat{u}_x \sin(\omega t - kx)(-k\hat{u}_x \cos(\omega t - kx))$.

In $x = 0$ is dit $\omega \hat{u}_x \cos \omega t - k\hat{u}_x^2 \sin \omega t \cos \omega t = (0{,}8\ m/s^2) \cos \omega t - (0{,}1\ m/s^2) \sin \omega t \cos \omega t$ (antw.). Op $t = 5$ s is $\omega t = 4$ rad en heeft de totale versnelling de waarde $(0{,}8\ m/s^2)(-0{,}654) - (0{,}1\ m/s^2)(0{,}495) = -0{,}573\ m/s^2$ (antw.)

APPENDIX - Versnelling van een vloeistofdeeltje

De versnelling ($\vec{a}$) van een deeltje van de stromende materie is de meebewegende afgeleide van de snelheid van dat deeltje (zie (4.27):

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \tag{4.30}$$

Gebruikmakend van (4.25), met f vervangen door u_x, is de x-component hiervan uit te schrijven als

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{4.31}$$

De eerste term in het rechterlid is de **lokale versnelling** in de x-richting en de overige drie tezamen vormen de **advectieve versnelling** in die richting.Voor de y- en z-componenten van $\vec{a}$ gelden soortgelijke uitdrukkingen.

Voor de bepaling van de versnellingscomponenten t.o.v. het **natuurlijk assenstelsel** gaan we uit van de totale afgeleide volgens (4.26), waarin we f vervangen door $\vec{u}$:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + u_s\frac{\partial\vec{u}}{\partial s} \tag{4.32}$$

We behandelen de twee termen in het rechterlid afzonderlijk.

We substitueren $\vec{u} = u_s\vec{e}_s$ in de eerste term, de lokale versnelling, en passen vervolgens de "productregel" voor het differentiëren toe:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial(u_s\vec{e}_s)}{\partial t} = \frac{\partial u_s}{\partial t}\vec{e}_s + u_s\frac{\partial\vec{e}_s}{\partial t} \tag{4.33}$$

De eerste term in het rechterlid is de verandering p.e.v. tijd van de waarde van de snelheid in een vast punt; deze component van de versnelling is gericht langs de stroomlijn. De laatste term betekent een draaiing van de plaatselijke snelheidsvector. Immers, een eenheidsvector heeft een constante lengte; een verandering ervan kan alleen een draaiing inhouden. Daardoor ontstaan snelheidscomponenten in de aanvankelijke n- en b-richting. De richting van deze component van de versnelling is dus haaks op de stroomlijn. De lokale versnelling wordt daarmee in zijn meest algemene vorm (drie componenten):

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial u_s}{\partial t}\vec{e}_s + \frac{\partial u_n}{\partial t}\vec{e}_n + \frac{\partial u_b}{\partial t}\vec{e}_b \tag{4.34}$$

Voor de laatste term van (4.32), de advectieve versnelling, volgt evenzo

$$u_s \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = u_s \frac{\partial (u_s \vec{e}_s)}{\partial s} = u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} \vec{e}_s + u_s^2 \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} \tag{4.35}$$

In de laatste term vervangen we u_s^2 door u^2 en $\partial \vec{e}_s / \partial s$ door $\vec{e}_n / R$ (zie 4.2). Dit geeft:

$$u_s \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{u^2}{R} \vec{e}_n \tag{4.36}$$

Samennemen van de lokale versnelling volgens (4.34) en de advectieve versnelling volgens (4.36) geeft

$$\vec{a} = [\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s}] \vec{e}_s + [\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R}] \vec{e}_n + [\frac{\partial u_b}{\partial t}] \vec{e}_b \tag{4.37}$$

De uitdrukkingen hierin tussen de rechte haken zijn juist de totale versnellingen in respectievelijk de s-, n- en b-richting, overeenkomend met (4.29).

5 MASSABALANS EN VOLUMEBALANS

De berekening van een stroming gedurende een zekere tijd in een zeker gebied gaat uit van
- begin- en randvoorwaarden,
- balansen voor massa, impuls en energie (en eventuele meegevoerde stoffen, warmte etc.),
- constitutieve vergelijkingen.

In dit hoofdstuk gaan we in op de massabalans. Vooruitlopend daarop worden hier enkele opmerkingen gemaakt over balansvergelijkingen in het algemeen (zie ook Modelvorming, CT1090). Specifieke toepassingen komen in vervolghoofdstukken aan de orde.

5.1 Balansvergelijkingen (algemeen)

Een balans van een grootheid (bijv. energie) beschrijft de verandering van de hoeveelheid daarvan in een (eventueel variërend) gebied G gedurende een zeker tijdsinterval, in relatie tot de overdracht van de beschouwde grootheid door de begrenzingen van G, en tot de productie (of afbraak) in G.

Tijdsinterval
Een balans geldt voor een zeker tijdsinterval. Dat kan in principe willekeurig zijn; meestal worden bijdragen per eenheid van tijd gebruikt (balans opstellen voor tijdsinterval met infinitesimale duur Δt, delen door Δt, limiet bepalen voor $\Delta t \to 0$).

Balansgebied
Het balansgebied kan in principe eveneens willekeurig worden gekozen, eventueel variërend in de tijd, maar de kenmerken van een gegeven probleem zullen in de praktijk de keuze grotendeels bepalen. Twee voor de hand liggende mogelijkheden zijn:

(a) Een in ruimte en tijd variërend balansgebied dat steeds dezelfde materie bevat; met andere woorden, in de tijd volgen we een hoeveelheid materie. Er vindt in dit geval per definitie geen transport plaats van de beschouwde stromende materie door de begrenzing van het gebied, en dus ook geen meevoering door dat grensvlak van wat dan ook. We spreken hierbij van een beschrijving volgens **Lagrange**.

(b) Een ruimtelijk vast balansgebied; er vindt in dit geval massatransport plaats door de begrenzingen van het gebied, evenals meevoering van impuls, van energie, enz. We spreken in dit geval van een beschrijving volgens **Euler**.

Een Lagrange-benadering is in principe vooral geschikt voor (instationaire) stromen met bewegende grensvlakken (bijv. golven aan het oppervlak); die bestaan steeds uit dezelfde deeltjes. Een Euler-benadering daarentegen is meer geëigend voor (stationaire) problemen van stromen door leidingen of voor stromingen door, over of rondom een constructie (bv. door een sluis, over een stuw, rondom een brugpijler). In zulke gevallen is sprake van stationaire grensvlakken met een gegeven geometrie, een situatie die zich bij uitstek leent voor een Eulerse beschrijving.

Balansgebieden kunnen naar grootte worden onderscheiden in twee typen:
gebieden met infinitesimaal kleine afmetingen, en gebieden met eindige afmetingen.

Balansvergelijkingen voor een gebied van eindige afmetingen, bijv. een deel van een leiding tussen twee dwarsdoorsneden, leiden tot betrekkingen tussen geïntegreerde grootheden. Zij zijn geschikt voor het verkrijgen van resultaten voor het beschouwde (leiding)gedeelte in zijn totaliteit (bijv. de kracht die de stroming in een buis uitoefent op een bochtstuk).

Balansvergelijkingen voor infinitesimale gebieden leiden tot differentiaalvergelijkingen voor de veldgrootheden in een willekeurig punt. Zij zijn nodig voor een berekening van de lokale eigenschappen van een stroming (bijv. de lokale druk op de buiswand in een bochtstuk). Zij kunnen o.m. worden verkregen als limietgeval van een balans voor een gebiedje van infinitesimale afmetingen (balans delen door het volume, vervolgens de afmetingen tot nul laten naderen).

Bijdragen aan de balans
In de balans van een grootheid X (bijv. energie) spelen in het algemeen de volgende begrippen een rol:

- De hoeveelheid van de beschouwde grootheid X in het balansgebied G (de z.g. voorraad).
- De netto overdracht van X naar G door de grenzen van G heen.
- De interne productie (of afbraak) van X die plaatsvindt in G.

De balans voor de beschouwde grootheid in het gebied G drukt uit dat

$$\underset{\text{(I)}}{\textit{toeneming voorraad in } G} = \underset{\text{(II)}}{\textit{overdracht naar } G} + \underset{\text{(III)}}{\textit{productie in } G} \qquad (5.1)$$

Alle bijdragen hierin zijn netto waarden (bijv. netto overdracht naar G is overdracht naar binnen minus overdracht naar buiten) in hetzelfde tijdsinterval.

In het algemeen kunnen verschillende fysische processen aan de overdracht van een grootheid bijdragen, evenals aan de productie. Energie bijv. kan worden overgedragen door meevoering en door wisselwerkingen van de materie in het balansgebied met die er buiten. In de desbetreffende hoofdstukken komen wij hierop terug.

Een grootheid waarvoor de productie of afbraak (III) altijd gelijk is aan nul (bijv. massa) noemen we een behouden grootheid. De balansvergelijking daarvoor reduceert tot een **behoudsvergelijking**:

$$\underset{\text{(I)}}{\textit{toeneming voorraad in } G} = \underset{\text{(II)}}{\textit{overdracht naar } G} \tag{5.2}$$

We beperken ons nu tot een stationaire stroming en tot een ruimtelijk vast balansgebied. Dan is (I) gelijk aan nul. Wanneer we bovendien met een behouden grootheid te doen hebben, dan is ook (III) gelijk aan nul, en reduceert de balansvergelijking van de algemene gedaante (5.1) tot

$$\underset{\text{(II)}}{\textit{overdracht naar } G = 0} \tag{5.3}$$

Merk op dat dit niet inhoudt dat er geen overdracht plaatsvindt door elk deelvlakje; het betekent dat de netto overdracht naar binnen door het gehele begrenzende oppervlak van het gebied G gelijk is aan nul (evenveel ingaand als uitgaand).

Bovenstaande algemene begrippen omtrent balansvergelijkingen worden hieronder gehanteerd voor een massabalans (te reduceren tot een volumebalans) en in volgende hoofdstukken voor een energiebalans Hoofdstuk 8) respectievelijk een impulsbalans (Hoofdstuk 9). Daar zullen zij per geval een concrete invulling krijgen.

5.2 Onsamendrukbaarheid

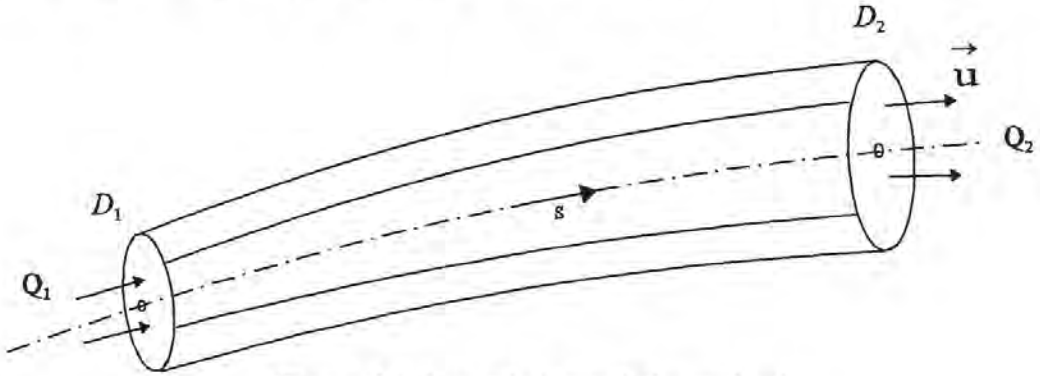
Massa is een behouden grootheid, waarvoor dus een behoudsvergelijking geldt. Voorzover de stromende materie als onsamendrukbaar mag worden benaderd kunnen we eveneens spreken van behoud van volume (zie vgl. 2.1). In de meeste civieltechnische stromingsproblemen is dit een goede benadering (zie par. 2.3.2), zeker voor vloeistofstromen met een vrij oppervlak, dat een sterk matigende invloed heeft op mogelijke drukvariaties. We zullen daarom hier de idealisering gebruiken van een **onsamendrukbaar** medium en daarvoor vergelijkingen

opstellen voor het **behoud van volume**. Deze worden vaak **continuïteitsvergelijkingen** genoemd.

Opgemerkt wordt dat het behoud van volume fysisch niet een fundamenteel karakter heeft zoals het behoud van massa of impuls. Het is een benadering die slechts geldt onder verwaarlozing van samendrukbaarheid.

5.3 Volumebalans voor een stroombuis

Als eerste voorbeeld nemen we een stationaire stroming, en als balansgebied G een ruimtelijk vast deel van een stroombuis tussen twee doorgangen D_1 en D_2 (Figuur 5.1). De doorgangen staan niet noodzakelijkerwijs dwars op de stroomrichting.



Figuur 5.1 Stroombuis met balansgebied

De volumestroom of het debiet dat door D_1 ingaat (naar G) noemen we Q_1, en het door D_2 uitgaande debiet noemen we Q_2. (Het in- of uitgaand moet gezien worden als tekenafspraken. In feite kan de stroom door D_1 uitgaand zijn, maar in dat geval is Q_1 negatief.)

Omdat er geen stroom plaatsvindt door de zijdelingse begrenzing van een stroombuis is de totale volumestroom naar G gelijk aan $Q_1 - Q_2$. Volgens (5.3) moet deze gelijk zijn aan nul:

$$Q_1 - Q_2 = 0$$

Omdat dit geldt voor willekeurige doorgangen kunnen we schrijven

Q is constant langs de stroombuis

ofwel

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \qquad (5.4)$$

waarin s een lengtecoördinaat is langs de as van de stroombuis.

Uit (5.4) kunnen we via U = Q/A bij gegeven Q de gemiddelde snelheid U berekenen in elke dwarsdoorsnede waar A bekend is. We zien dat convergentie van de stroomlijnen in de stroomrichting een versnelling van de vloeistofdeeltjes inhoudt in de stroomrichting (vergroting van de stroomsnelheid).

Als tweede geval bekijken we een stroming door een geheel gevulde, starre leiding. Ook wanneer deze stroming instationair is, waarbij U = U(s,t) en Q = Q(s,t), varieert het volume van de stromende materie in de leiding tussen twee doorgangen niet in de tijd. In dit geval geldt ondanks de instationariteit dus toch (5.4) (nog steeds onder de veronderstelling van onsamendrukbaarheid).

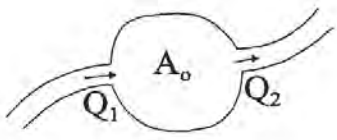
5.4 Volumebalans voor een bekken

We behandelen tenslotte de volumebalans voor een bekken of kom of ander reservoir met een vrije vloeistofspiegel die in de tijd kan variëren maar die we op elk moment als horizontaal kunnen beschouwen. Stel dat het instromende debiet Q_1 is en het uitstromende debiet Q_2. Het gedurende een kort tijdje Δt netto naar binnen gestroomde volume is dan $(Q_1 - Q_2)\Delta t$.

Bij netto instroming neemt het volume in het bekken toe. We noemen dit **berging**. Bij onsamendrukbaarheid van de vloeistof en starre wanden kan berging slechts plaatsvinden door stijging van de vrije vloeistofspiegel. Stel dat het momentane oppervlak daarvan A_o is, het z.g. **bergend oppervlak**. De hoogte van de vloeistofspiegel boven het referentievlak $z = 0$ noemen we z_o; deze neemt in het beschouwde tijdsinterval toe met Δz_o, zodat de berging in dat interval gelijk is aan $A_o \Delta z_o$. Gelijkstelling van berging aan netto instroom geeft

$$A_o \Delta z_o = (Q_1 - Q_2)\Delta t \qquad (5.5)$$

In de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ geeft dit



$$A_o \frac{dz_o}{dt} = Q_1 - Q_2 \qquad (5.6)$$

Dit passen we in Hoofdstuk 7 toe, nadat daar een verband tussen debiet en verval (z_o buiten - z_o binnen) is afgeleid.

We kunnen (5.6) ook toepassen op een segment van een open waterloop (stroomkanaal, rivier), met een breedte aan het vrije oppervlak (bergende breedte) B, tussen twee doorsneden met debiet Q_1 respectievelijk Q_2. Voor kleine lengte van het segment (Δs) geldt bij benadering $A_o = B\Delta s$ en $Q_2 = Q_1 + (\partial Q/\partial s)\Delta s$. Daarmee gaat (5.6) in de limiet $\Delta s \rightarrow 0$ over in

$$B \frac{\partial z_o}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \qquad (5.7)$$

Wanneer de waterloop een constante en relatief grote breedte heeft kan de stroming in sommige gevallen als tweedimensionaal worden beschouwd (zijdelings niet variërend). We kunnen dan een volumebalans opstellen voor een eenheid van breedte. Deze is direct op te stellen of uit (5.7) te verkrijgen door substitutie van $Q = Bq$, waarin $q = Ud$ het debiet is per eenheid van breedte (d is de waterdiepte) en we de breedte B constant veronderstellen (tweedimensionale stroming). Daarmee reduceert (5.7) tot

$$\frac{\partial z_o}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \qquad (5.8)$$

Deze vergelijkingen zijn van belang voor allerlei niet-stationaire stromingen in open waterlopen, zoals getijden of hoogwatergolven (zie het vervolgvak Stroming in waterlopen, CT3310).

6 DYNAMICA VAN EEN DEELTJE

In dit hoofdstuk behandelen we de dynamica van een deeltje (Lagrange-beschrijving voor een infinitesimaal kleine massa) op basis van een impulsbalans (tweede wet van Newton) in de vorm kracht = massa × versnelling.

6.1 Impuls

We beschouwen een infinitesimaal vloeistofpakketje dat we in zijn beweging zullen volgen. Het volume ervan is ΔV, de massa is $\Delta m = \rho \Delta V$, en de impuls is $\Delta \vec{I} = (\Delta m)\vec{u} = (\rho \vec{u})\Delta V$ ($\rho \vec{u}$ is de impulsdichtheid, ofwel de hoeveelheid impuls per eenheid van volume).

De massa van het beschouwde vloeistofpakketje varieert niet in de tijd, zodat de verandering van de impuls per eenheid van tijd gegeven is door

$$\frac{D}{Dt}(\Delta \vec{I}) = \frac{D}{Dt}(\Delta m\, \vec{u}) = \Delta m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \Delta V \qquad (6.1)$$

6.2 Impulsoverdracht

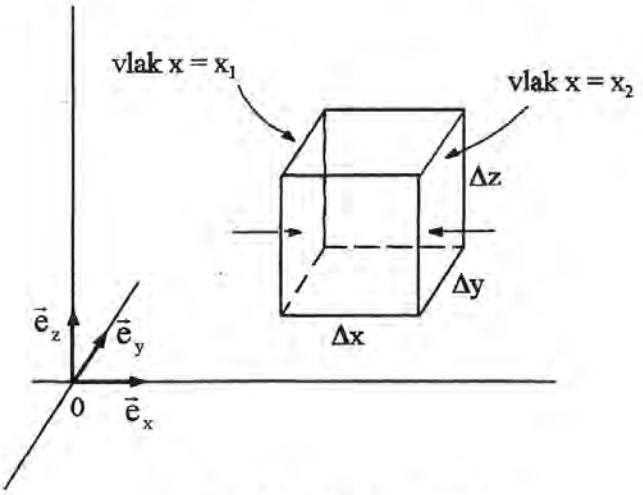
Omdat we het vloeistofpakketje volgen kan er slechts impuls aan worden overgedragen via wisselwerkingen met de overige materie. De uit deze wisselwerkingen resulterende overdracht per tijdseenheid van impuls naar het beschouwde pakketje duiden we aan met $\vec{F}_{ww}$. Anders gezegd: $\vec{F}_{ww}$ is de uitwendige kracht die op de betreffende massa wordt uitgeoefend.

We onderscheiden hier moleculaire wisselwerkingen en zwaartewisselwerkingen. De eerstgenoemde zijn slechts over zeer kleine afstanden werkzaam; hun bijdrage aan de overdracht van impuls naar het beschouwde vloeistofpakketje is op continuümniveau te modelleren als een spanning in het begrenzende oppervlak. Het zwaarteveld van de aarde (en van de hemellichamen) daarentegen strekt zich uit over afstanden die groot zijn vergeleken met de afmetingen van technische en geofysische stromingen, en de bijdrage ervan aan de impulsoverdracht is gelijkmatig over de gehele vloeistofmassa verdeeld.

Drukkracht

In de uitwerking van het bovenstaande m.b.t. de spanningen brengen we voorlopig slechts de **druk** in rekening, en gaan we de schuifspanningen verwaarlozen. (De toelaatbaarheid van deze ideale-vloeistof benadering komt later ter sprake.) We bepalen de resulterende **drukkracht** op het beschouwde vloeistofpakketje ($\vec{F}_p$) op een moment waarop dit de vorm heeft van een

rechthoekig parallelepipedum, met ribben evenwijdig aan de assen van een rechthoekig inertiaalstelsel Oxyz en met lengte Δx, Δy en Δz (Figuur 6.1).



Figuur 6.1 Balansgebied

Op het zijvlak $x = x_1$ werkt een drukkracht $p_1\ \Delta y \Delta z\ \vec{e}_x$, waarin p_1 de gemiddelde druk is in dat zijvlak. Evenzo werkt op het zijvlak $x = x_2$ een drukkracht $-p_2\ \Delta y \Delta z\ \vec{e}_x$. De resultante van beide is

$$\vec{F}_{p_x} = (p_1 - p_2)\ \Delta y \Delta z\ \vec{e}_x$$

Voor kleine Δx kan dit worden benaderd als

$$\vec{F}_{p_x} = \left(- \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z\ \vec{e}_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\ \vec{e}_x \right) \Delta V$$

We zien dat $\vec{F}_{p_x}$ evenredig is met de x-component van de gradiënt van p (zie Hoofdstuk 4 voor het begrip gradiënt). Omdat voor de y- en z-component van $\vec{F}_p$ overeenkomstige uitdrukkingen gelden kunnen we voor de resultante schrijven:

$$\vec{F}_p = -\left[\frac{\partial p}{\partial x}\ \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\ \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\ \vec{e}_z\right] \Delta V = - (\text{grad } p)\ \Delta V = (-\nabla p)\ \Delta V \qquad (6.2)$$

Hiermee is het volgende belangrijke resultaat verkregen: **de netto drukkracht op een klein elementje wordt bepaald door de lokale drukgradiënt** (en is per eenheid van volume daaraan gelijk, op het teken na).

Omdat hier slechts de gradiënt van de druk van belang is, kunnen we naar willekeur een constante aan de druk toevoegen. Daarom kunnen we het referentieniveau voor p willekeurig kiezen. Gemakshalve zullen we de atmosferische druk als referentie nemen voor de drukken in de vloeistof. De waarde van p zal dan niet de absolute druk voorstellen maar de (over)druk ten opzichte van de atmosferische druk. In de formulering is dit eenvoudig weer te geven door $p_{atm} = 0$ te stellen.

Zwaartekracht

De zwaartekracht per eenheid van massa schrijven we als $\vec{g}$. De zwaartekracht op het beschouwde vloeistofpakketje, met massa $\Delta m = \rho \Delta V$, is dan

$$\vec{F}_g = \rho \vec{g} \Delta V \tag{6.3}$$

De zwaartekracht is af te leiden van een zwaartepotentiaal (zie Algemene Mechanica, CT1021). Waar we g als constant kunnen beschouwen is deze potentiaal gelijk aan gz, waarin z een vertikale coördinaat is, positief omhoog, en geldt $\vec{g} = -\nabla gz$ (dus $g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = -g$). Deze formulering heeft het voordeel dat de zwaartekracht en de drukkracht beide in gradiëntvorm zijn te schrijven.

Totale kracht

De resultante van de drukkracht en de zwaartekracht op het deeltje is

$$\vec{F}_{ww} = (-\nabla p + \rho \vec{g}) \Delta V \tag{6.4}$$

Voeren we de zwaartepotentiaal in, en veronderstellen we bovendien dat de dichtheid uniform is, dan gaat dit over in

$$\vec{F}_{ww} = -\nabla(p + \rho gz) \Delta V \tag{6.5}$$

We zien dat de resulterende kracht (p.e.v. volume) op een deeltje, als gevolg van druk en zwaarte, bepaald is door de gradiënt van de som (p+ρgz). Deze som zijn we in Hoofdstuk 3, over Hydrostatica, ook al tegengekomen. Daar was het een constante. Hier zien we dat ruimtelijke variaties ervan de aandrijvende kracht leveren waardoor vloeistofdeeltjes versnellen of vertragen. Dat werken we uit in de volgende paragraaf.

6.3 Impulsbalans voor een deeltje

Volgens de tweede wet van Newton geldt

$$\frac{D}{Dt}(\Delta\vec{I}) = \vec{F}_{ww} \tag{6.6}$$

Substitutie hierin van (6.1) en (6.4) levert

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{g}} \tag{6.7}$$

(dus $\rho Du_x/Dt = -\partial p/\partial x + \rho g_x$, etc.). Deze z.g. **vergelijking van Euler** (1750) is de basisvergelijking voor de dynamica van (een deeltje van) een ideale vloeistof in het zwaarteveld.

In het geval van evenwicht zijn de versnellingen overal gelijk aan nul. In deze statische toestand spreken we van een **hydrostatische drukverdeling**. De daarbij horende druk (p_s) voldoet aan

$$-\nabla p_s + \rho\vec{g} = 0 \tag{6.8}$$

Kiezen we de z-as vertikaal (en dus de x-as en de y-as horizontaal), positief omhoog, dan kan dit worden uitgeschreven als

$$\frac{\partial p_s}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial p_s}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial p_s}{\partial z} + \rho g = 0$$

Dit komt overeen met (3.2) en (3.4). Voor een behandeling van vraagstukken uit de **hydrostatica** verwijzen we naar Hoofdstuk 3.

Wanneer we in elk punt de druk schrijven als de som van een hydrostatisch deel (p_s) en een dynamisch deel (p_d), zodat $p = p_s + p_d$, dan reduceert de vergelijking van Euler tot

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p_d \tag{6.9}$$

6.4 Piëzometrisch niveau

In de benadering van (6.5) kan de resultante van de drukkracht en de zwaartekracht op een deeltje worden uitgedrukt in de gradiënt van de **hoogte van het piëzometrisch niveau**, gelijk aan de som van de **plaatshoogte** z (boven het vlak z = 0) en de **drukhoogte** p/ρg (Hoofdstuk 3, verg. 3.8):

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \tag{6.10}$$

Hiermee wordt (6.5):

$$\vec{F}_{ww} = -\nabla(p+\rho gz)\Delta V = -\rho g \nabla h \, \Delta V = -(\Delta m) g \nabla h \tag{6.11}$$

De resulterende druk- en zwaartekracht op een vloeistofdeeltje p.e.v. massa is dus -g∇h, wat inhoudt dat deze in de richting is van de sterkste afneming van h in de ruimte.

Het werken met het piëzometrisch niveau heeft vooral voordelen in geval van stromen met een vrij oppervlak, die in de waterbouwkunde en de waterbeheersing veel voorkomen. In zulke stromen komt de aandrijvende kracht als gevolg van druk en zwaarte vaak overeen met een niveauverschil van het vrije oppervlak, een z.g. **verval**. De helling van de waterspiegel t.o.v. de horizontaal (verval p.e.v. lengte) heet het **verhang**. De gradiënt van het piëzometrisch niveau is nauw daarmee verwant, in veel gevallen zelfs daaraan gelijk; in zulke gevallen spreken we van de *verhangkracht*.

Gebruik makend van (6.10) kan de vergelijking van Euler worden geschreven als

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g\nabla h \tag{6.12}$$

($Du_x/Dt = - g\partial h/\partial x$, etc.) In een ideale vloeistof (zonder weerstand) is de versnelling dus in de richting van de sterkste daling van het piëzometrisch niveau.

In situaties van evenwicht, waarvoor de versnellingen nul zijn, geldt ∇h = 0: alle punten in een vloeistof in evenwicht hebben hetzelfde piëzometrisch niveau. Dit komt overeen met de hydrostatische drukverdeling (zie Hoofdstuk 3).

6.5 Vergelijking van Euler in natuurlijk assenstelstel

Van de vergelijking van Euler nemen we achtereenvolgens de componenten in de richting van de stroomlijn ($\vec{e}_s$), de normaal ($\vec{e}_n$) en de binormaal ($\vec{e}_b$). Voor de componenten van de versnelling $D\vec{u}/Dt$ substitueren we (4.29). Doen we dit voor de vergelijking van Euler in termen van de dynamische druk (6.9) dan ontstaat:

$$\rho\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s\frac{\partial u_s}{\partial s}\right) = -\frac{\partial p_d}{\partial s} \tag{6.13s}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R}\right) = -\frac{\partial p_d}{\partial n} \tag{6.13n}$$

$$\rho\frac{\partial u_b}{\partial t} = -\frac{\partial p_d}{\partial b} \tag{6.13b}$$

Uitgedrukt in het piëzometrisch niveau (zie 6.12) is het resultaat:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s\frac{\partial u_s}{\partial s} = -g\frac{\partial h}{\partial s} \tag{6.14s}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g\frac{\partial h}{\partial n} \tag{6.14n}$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial b} \tag{6.14b}$$

We gaan in de volgende paragrafen de betekenis hiervan na, in het bijzonder voor het geval van stationaire stromingen. Enkele gevallen van niet-stationaire stroming worden behandeld in het volgende hoofdstuk.

6.5.1 Vergelijking langs de binormaal

In een stationaire stroming is $\partial u_b/\partial t = 0$ en reduceert de vergelijking van Euler langs de binormaal (6.14b) tot

$$\frac{\partial h}{\partial b} = 0 \qquad (6.15)$$

Het piëzometrisch niveau varieert hierbij dus niet in de richting van de binormaal, d.w.z. haaks op het vlak waarin lokaal de gekromde stroomlijn ligt (het osculatievlak). Nemen we als voorbeeld een stroming in een rivierbocht, en nemen we als benadering aan dat deze stroming horizontaal is, dan is de binormaal vertikaal, en hebben alle punten in een vertikaal hetzelfde piëzometrisch niveau, dat in de lokale waterspiegel ligt (bij $p_{atm} = 0$). De drukverdeling in elke vertikaal is dan dus hydrostatisch.

6.5.2 Vergelijking langs de normaal

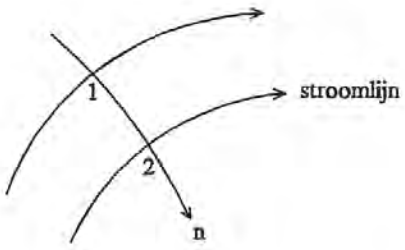
Voor een stationaire stroming reduceert de vergelijking van Euler langs de normaal (6.14n) tot

$$\frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n} \qquad (6.16)$$

Voor de component van de versnelling gericht naar het kromtemiddelpunt van de stroomlijn ($u^2 \vec{e}_n/R$) is een kracht nodig in die richting, overeenkomend met een verlaging van het piëzometrisch niveau in die richting volgens

$$\frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{u^2}{gR} \qquad (6.17)$$

Het verschil tussen de waarden van h in twee punten langs de normaal (Figuur 6.2) is hieruit te berekenen volgens



Figuur 6.2 Gekromde stroomlijnen met normaal

$$\Delta h = h_2 - h_1 = -\int_{n_1}^{n_2} \frac{u^2}{gR}\, dn \qquad (6.18)$$

Hierin kunnen zowel u als R met n variëren. Daar waar de stroomlijn recht is ($R \to \infty$) geldt $\partial h/\partial n = 0$. We zullen van deze eigenschap veel gebruik maken, vooral voor de stroming in een doorsnede waarin alle stroomlijnen recht zijn. Daarvoor geldt: **in een dwarsdoorsnede waar de stroomlijnen recht zijn is het piëzometrisch niveau constant** (mits ook $\partial u_n/\partial t = 0$ en $\partial u_b/\partial t = 0$).

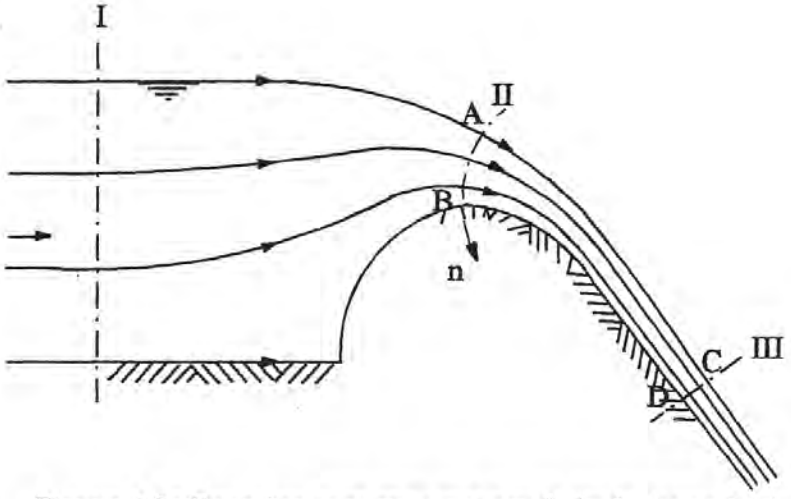
Voorbeeld 1 - Rivierbocht

Voor het al genoemde voorbeeld van de horizontale stroming in een rivierbocht volgde uit de vergelijking langs de binormaal dat het piëzometrisch niveau voor alle punten van een vertikaal in de lokale waterspiegel ligt. Uit de vergelijking langs de normaal (6.16 of 6.17) zien we nu dat dit niveau aan de holle zijde van de stroming lager ligt dan aan de bolle zijde. Het niveauverschil in een bocht in een 200 m brede rivier waarvoor $u \approx 1$ m/s en $R \approx 500$ m (globale waarden) is volgens (6.18) ca. 4 cm.

Voorbeeld 2 - Stuw

Als tweede voorbeeld nemen we de stationaire tweedimensionale stroming over een brede stuw (Figuur 6.3a). Om inzicht te krijgen in de stroming zijn enkele stroomlijnen getekend, en ook enkele doorgangen dwars daarop (I t/m III). Omdat de stroming stationair is, en tweedimensionaal, gaat door de doorsneden dezelfde afvoer per eenheid van breedte:

$$q_I = q_{II} = q_{III}$$

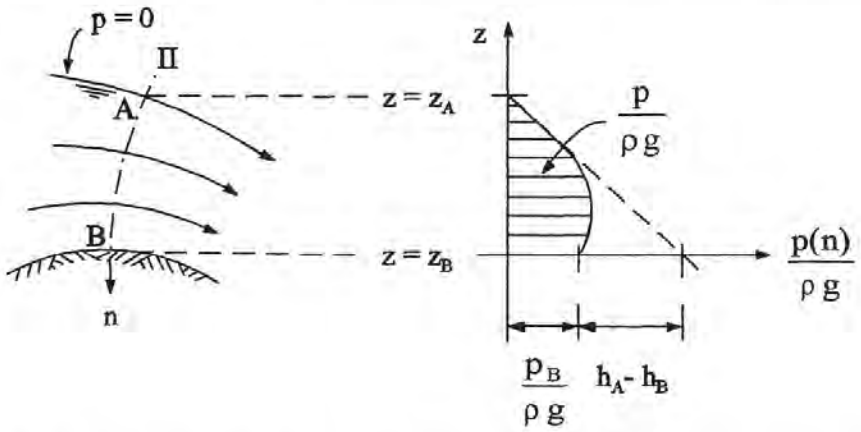


Figuur 6.3a Stroming over stuw met ronde kruin (overzicht)

Convergentie van de stroomlijnen houdt dus een vergroting van de stroomsnelheid in.

We passen de vergelijking langs de normaal toe in de doorgangen I, II en III.

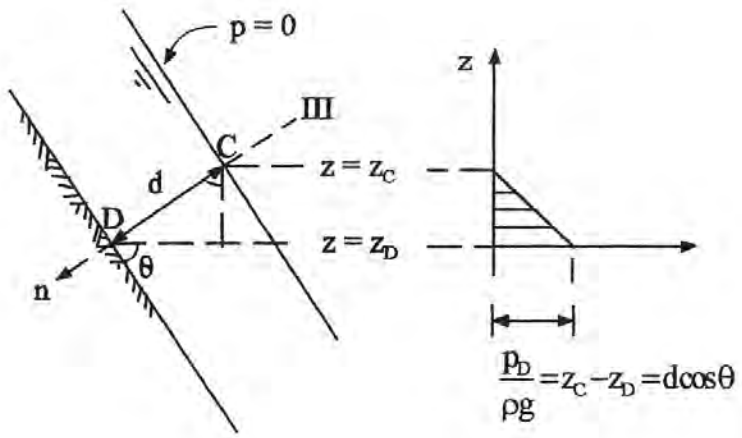
De stroomsnelheden in het diepe reservoir zijn onbetekenend, zodat hier het piëzometrisch niveau langs een normaal (I) nauwelijks zal variëren. Dit geldt voor alle doorsneden op voldoend grote afstand bovenstrooms van de stuw, d.w.z. op een afstand van ten minste enkele keren de diepte boven de kruin.



Figuur 6.3b Stroming over de ronde kruin van een stuw met niet-hydrostatische druk

In de omgeving van de kruin van de stuw zijn de snelheden aanzienlijk, en zijn de stroomlijnen sterk gekromd (in het geschetste voorbeeld is R van dezelfde grootte-orde als de plaatselijke diepte). Het piëzometrisch niveau zal daardoor langs een normaal (II) aanzienlijk afnemen in de richting van de kruin ($h_B < h_A$). De druk in punt B zal daarom significant lager zijn dan de hydrostatische waarde (zie getekend drukverloop langs de normaal in Figuur 6.3b), en kan bij voldoend grote snelheden en/of kromming zelfs negatief worden (t.o.v. p_{atm}).

In doorsnede III tenslotte zijn de snelheden weliswaar groot, maar zijn de stroomlijnen vrijwel recht ($R >> d$) waardoor het piëzometrisch niveau langs de normaal toch niet noemenswaard varieert. We kunnen dan stellen $h_D = h_C$, wat samen met $p_C = 0$ inhoudt dat $p_D = \rho g(z_C - z_D)$ (Figuur 6.3c). De druk op de stuwwand is dan uit te drukken in de plaatselijke laagdikte d (gemeten haaks op de wand) via $p_D = \rho g d \cos\theta$, waarin θ de hoek is die de wand en de stroomlijnen maken met het horizontale vlak. Dit volgt ook direct uit het evenwicht van de stromende laag water in de richting haaks op het hellende vlak.



Figuur 6.3c Stroming langs vlakke, hellende wand met hydrostatische druk

6.5.3 Vergelijking langs de stroomlijn (Bernoulli)

Van de vergelijkingen van Euler in het natuurlijk assenstelsel bekijken we als laatste de vergelijking langs een stroomlijn voor een stationaire stroom. Uitgaand van de formulering in termen van de dynamische druk (6.13s) is het resultaat

$$\rho u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = \rho \frac{\partial (u^2/2)}{\partial s} = - \frac{\partial p_d}{\partial s}$$

Dit houdt in (bij constante ρ):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}(p_d + \tfrac{1}{2}\rho u^2) = 0} \qquad (6.19a)$$

ofwel

$$p_d + \tfrac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant langs een stroomlijn} \qquad (6.19b)$$

Dit is (één gedaante van) de **vergelijking van Bernoulli** (1738).

In termen van het piëzometrisch niveau (6.14s) kan de vergelijking van Bernoulli worden geschreven in de gedaante

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\left(h + \frac{u^2}{2g}\right) = 0} \qquad (6.20a)$$

ofwel

$$h + \frac{u^2}{2g} \text{ is constant langs een stroomlijn} \qquad (6.20b)$$

De grootheid $u^2/2g$ hierin is de kinetische energie ($\frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V$) per eenheid van gewicht ($\rho g \Delta V$). Deze heeft de dimensie van een lengte, en heet **snelheidshoogte**. Door voor een gegeven punt deze hoogte toe te voegen aan het lokale piëzometrisch niveau ontstaat een nieuw niveau, het z.g. **energieniveau** behorend bij dat punt (in de figuren aan te duiden met e.n.). De hoogte hiervan boven het vergelijkingsvlak $z = 0$ heet de **energiehoogte** (H):

$$H = h + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \qquad (6.21)$$

Deze is dus de som van plaatshoogte, drukhoogte en snelheidshoogte. De vergelijking van Bernoulli is hiermee te schrijven in de vorm

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \qquad (6.22a)$$

ofwel

$$H \text{ is constant langs een stroomlijn} \qquad (6.22b)$$

of ook

$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \text{ is constant langs een stroomlijn}} \qquad (6.22c)$$

Het is van belang op te merken dat de vergelijkingen van Euler zijn afgeleid voor een **ideale** vloeistof in een **conservatief krachtveld**. In werkelijkheid zal er wrijving kunnen optreden. Die zal tegen de stroom in zijn gericht, en daardoor niet van invloed zijn op de geldigheid van de vergelijkingen van Euler langs de binormaal en langs de normaal, maar juist wel op die

langs de stroomlijn, d.i. op de vergelijking van Bernoulli; daarin manifesteert wrijvingsinvloed zich als een energieverlies. Bij de toepassing van deze vergelijking moeten we van geval tot geval dus goed nagaan of deze energieverliezen inderdaad verwaarloosbaar zijn. Wanneer dit niet het geval is moeten we die invloed apart in rekening brengen. Voor stromen met grote waarden van Re blijkt dit vooral nodig te zijn bij de volgende twee situaties:

(a) abrupte verwijding van een begrensd stroomprofiel, waarbij de stroming sterk wordt vertraagd (zie Figuur 4.3) en turbulentie wordt opgewekt, lokaal aanleiding gevend tot een z.g. **vertragingsverlies**;

(b) stroming over grote afstand langs een vaste wand, waarbij de cumulatieve invloed van wandweerstand van belang is, resulterend in **wrijvingsverlies**.

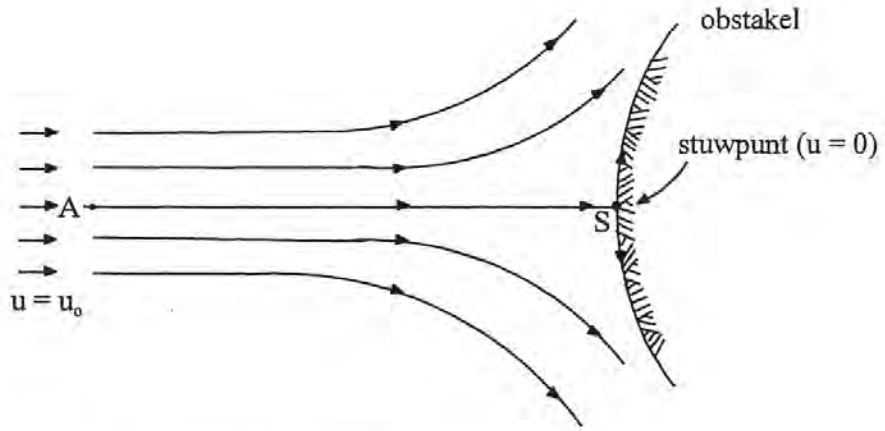
De verliezen zijn te verwaarlozen in gevallen van versnelling over een kort traject (mits Re >> 1). Dan kunnen we de vergelijking van Bernoulli goed toepassen. Voor de rest van dit hoofdstuk gaan we daar van uit. Verliezen komen in latere hoofdstukken aan de orde.

6.6 Toepassingen

6.6.1 Stuwpunt en stuwdruk

Als eerste toepassing bekijken we de stroming tegen een obstakel (Figuur 6.4). Aan de bovenstroomse zijde daarvan bevindt zich één stroomlijn die doorloopt tot aan het obstakel, en wel tot aan het z.g. stuwpunt (S in Figuur 6.4), waar de stroomlijn geknikt is ($R = 0$). Anders gezegd: de kromming is daar oneindig groot. Omdat de versnelling eindig is, dus ook u^2/R, moet de snelheid in het stuwpunt de waarde nul hebben. In een stuwpunt vallen het piëzometrisch niveau en het energieniveau dus samen ($h_s = H_s$).

We gaan de druk in het stuwpunt berekenen door toepassing van de vergelijking van Bernoulli op een stroomlijn van A naar S (Figuur 6.4). Deze toepassing is toelaatbaar, ondanks het feit dat het hier een vertragingsgebied betreft, omdat er geen sprake is van een abrupte verwijding van een begrensd stroomprofiel en er geen loslating of (verhevigde) werveling optreedt.



Figuur 6.4 Stroming in de omgeving van een stuwpunt (S)

Op grote afstand bovenstrooms van het obstakel is de snelheid constant in grootte (u_o) en richting; de dynamische druk (p_d) in dat gebied is dus constant (en kan gelijk aan nul worden gesteld). Toepassing van de vergelijking van Bernoulli (6.19) langs een stroomlijn van A naar S geeft

$$(p_d + \tfrac{1}{2}\rho u^2)_A = (p_d + \tfrac{1}{2}\rho u^2)_S$$

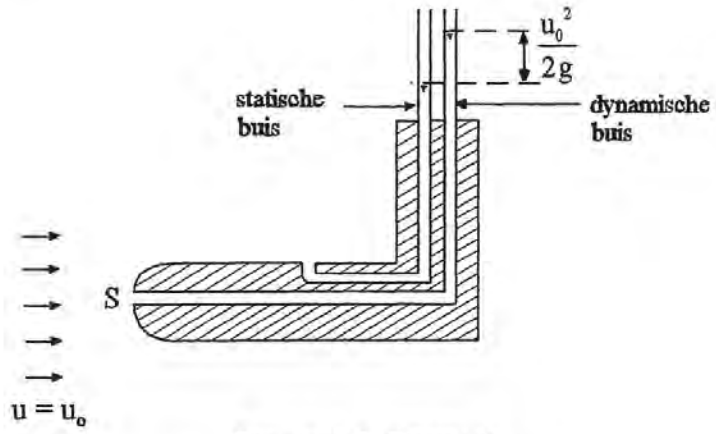
ofwel, met $u_A = u_o$ en $u_S = 0$:

$$p_{d_S} - p_{d_A} = \Delta p_{d_S} = \tfrac{1}{2}\rho u_o^2 \qquad (6.23)$$

Dit is de z.g. **stuwdruk**. Hiermee komt overeen een stijging van het piëzometrisch niveau met de waarde $u_o^2/2g$, zoals ook volgt uit (6.20). Door deze stijging in een stroming te meten kan de stroomsnelheid worden bepaald. Dat gebeurt in een z.g. **Pitotbuis** (Figuur 6.5).

Het gedeelte van de Pitotbuis eindigend in punt S (Figuur 6.5) wordt tegen de stroomrichting gekeerd. Daardoor ontstaat in S een stuwpunt, en ligt het piëzometrisch niveau daar in het energieniveau. Dit niveau wordt gemeten met een stijgbuisje dat met de opening in S is verbonden, de z.g. dynamische buis. Een tweede stijgbuis, de z.g. statische buis, eindigt in een opening in de zijwand waarlangs het water stroomt; daarmee wordt het piëzometrisch niveau in de ongestoorde stroom gemeten. Het verschil in stijghoogte in de twee peilbuizen is (theoretisch) gelijk aan de snelheidshoogte ($u_o^2/2g$) van de ongestoorde beweging. Zodoende kan een Pitotbuis worden gebruikt als snelheidsmeter (voor niet al te lage snelheden,

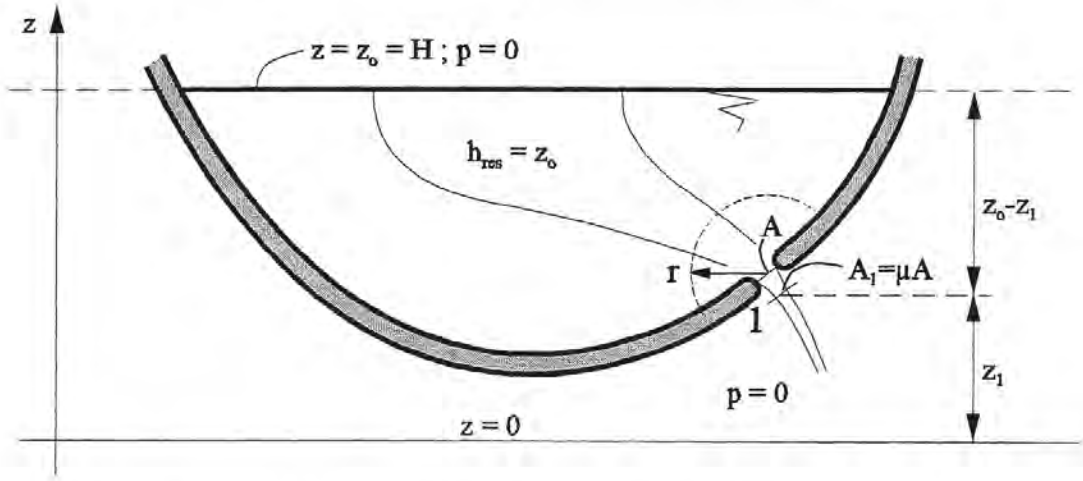
in verband met de nauwkeurigheid; voor $u_0 = 1$ m/s is $u_0^2/2g = 0{,}05$ m; voor $u_0 = 0{,}2$ m/s is $u_0^2/2g = 0{,}002$ m).



Figuur 6.5 Pitotbuis

6.6.2 Opening

Als tweede voorbeeld nemen we de stationaire stroming uit een reservoir via een relatief kleine opening naar de atmosfeer; zie Figuur 6.6. (De uitstroom moet gecompenseerd worden door een even grote instroom ergens anders om het peil constant te houden.)



Figuur 6.6 Stroming uit een reservoir via een kleine opening

Om de uitstroom te analyseren denken we ons in het reservoir een oppervlak dat min of meer de vorm van een halve bol heeft, met het middelpunt in de opening, zodanig dat het gehele uitstroomdebiet door dit oppervlak gaat. Bij toenemende straal r neemt de oppervlakte van dit

oppervlak toe evenredig met r^2. Omdat door elk van deze oppervlakken hetzelfde debiet Q gaat neemt de lokale stroomsnelheid af omgekeerd evenredig met r^2. De snelheidshoogte neemt dan af omgekeerd evenredig met r^4. Deze gaat dus heel snel naar nul met toenemende afstand vanaf de opening. In het grootste deel van het reservoir zijn de snelheden en versnellingen daarom onbetekenend, waardoor daar geldt $\nabla h = 0$ (h niet variërend in de ruimte). Het vrije oppervlak staat dan vrijwel horizontaal. De hoogte ervan boven het referentievlak $z = 0$ noemen we z_o. Dan geldt in het reservoir, buiten de directe invloed van de uitstroomopening, dat $H = h = z_o$ = constant (we stellen $p_{atm} = 0$).

Omdat H constant is langs elke stroomlijn, ook waar de versnellingen aanzienlijk zijn (zolang Bernoulli opgaat), en alle stroomlijnen beginnen in het reservoir waar H uniform is, is H uniform ($\nabla H = 0$) in het hele stroomveld. Alle punten in deze stroom hebben dus een gemeenschappelijk energieniveau, grafisch weer te geven door één energielijn, liggend in het niveau van het wateroppervlak in het reservoir. Hier is sprake van een stroming met **uniforme energie**.

Als gevolg van de zijdelingse toestroming naar de opening zijn de stroomlijnen gekromd en convergeren zij, ook over enige afstand voorbij de uitstroomopening. We noemen dit verschijnsel **contractie**. De stroomlijnen zijn pas weer min of meer parallel op een zekere afstand voorbij de uitstroomopening, zeg in doorsnede 1 in Figuur 6.6. Het oppervlak van de dwarsdoorsnede daar, zeg A_1, is dus kleiner dan dat van de opening zelf (A). De verhouding A_1/A wordt de **coëfficiënt van contractie** (μ) genoemd: $\mu = A_1/A$; de waarde ervan is afhankelijk van de vormgeving (stroomlijning of niet). Bij een ronde opening in een dunne wand is μ ca. 0,65.

Uit de vergelijking langs de normaal weten we dat in een doorsnede met gekromde stroomlijnen, zoals in de opening zelf en in de zone van contractie, het piëzometrisch niveau lager wordt in de richting naar het kromtemiddelpunt. Als H uniform is (niet alleen $\partial H/\partial s = 0$ maar ook $\partial H/\partial n = 0$) moet de snelheidshoogte toenemen in de richting van het kromtemiddelpunt, en wel even sterk als de hoogte van het piëzometrisch niveau afneemt; immers, $H = h + u^2/2g$. In de opening varieert de snelheid dus zowel in grootte als in richting met de positie. Maar verder benedenstrooms (zeg vanaf doorgang 1) is de kromtestraal zoveel groter dan de straaldikte dat het piëzometrisch niveau langs de normaal vrijwel constant is, en de grootte van de snelheid dus ook. Ook varieert de richting van de snelheid hier niet sterk met de positie in de dwarsdoorgang. Daarom leent doorgang 1 zich beter voor de berekening van het uitstroomdebiet dan de uitstroomopening zelf.

We passen nu de vergelijking van Bernoulli toe op een stroomlijn van een punt aan het vrije oppervlak in het reservoir (subscript o) tot aan doorsnede 1 (subscript 1):

$$H = z_o + \frac{p_o}{\rho g} + \frac{u_o^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}$$

Met $u_o^2/2g$ verwaarloosbaar t.o.v. $u_1^2/2g$ (kleine opening) en $p_o = p_1$ ($= p_{atm}$) resulteert dit in

$$u_1 = \sqrt{2g(z_o - z_1)} = \sqrt{2g\Delta z} \qquad (6.24)$$

Hierin is Δz het verschil in niveau van de waterspiegel in het reservoir en het niveau van de opening (formeel iets daar voorbij), het z.g. **verval**. De betrekking (6.24) is genoemd naar **Torricelli** (1643), die experimenteel vaststelde dat de uitstroomsnelheid in een opening evenredig is met de vierkantswortel uit het verval.

Voorbij doorsnede 1 is elk waterdeeltje in vrije val (want $p = p_{atm}$ = constant) en neemt de snelheid toe als $\sqrt{2g(z_o - z)}$.

Omdat (6.24) bij benadering geldt voor alle punten in doorsnede 1, en de stroomlijnen daar vrijwel recht zijn, geldt voor het debiet:

$$\boxed{Q = \mu A\sqrt{2g\Delta z}} \qquad (6.25)$$

N.B. 1. In de omgeving van de kleine opening neemt de snelheid over een korte afstand toe van vrijwel nul in het reservoir tot de waarde u_1. Als r_1 een kenmerkende afmeting is van de opening (bijvoorbeeld de straal ervan) dan zijn de (advectieve) versnellingen langs de stroomlijn ($u\partial u/\partial s = \partial(\frac{1}{2}u^2)/\partial s$) en langs de normaal ($u^2/R$) van de grootte-orde u_1^2/r_1, ofwel van de grootte-orde $g(z_o-z_1)/r_1$. Voor een relatief kleine opening ($r_1 << z_o-z_1$) is dit vele malen groter dan de zwaartekrachtsversnelling g. (Voorbeeld: de versnellingen in de omgeving van een opening met 1 cm diameter en een verval van 1 m zijn van de grootte-orde 10^2 g.)

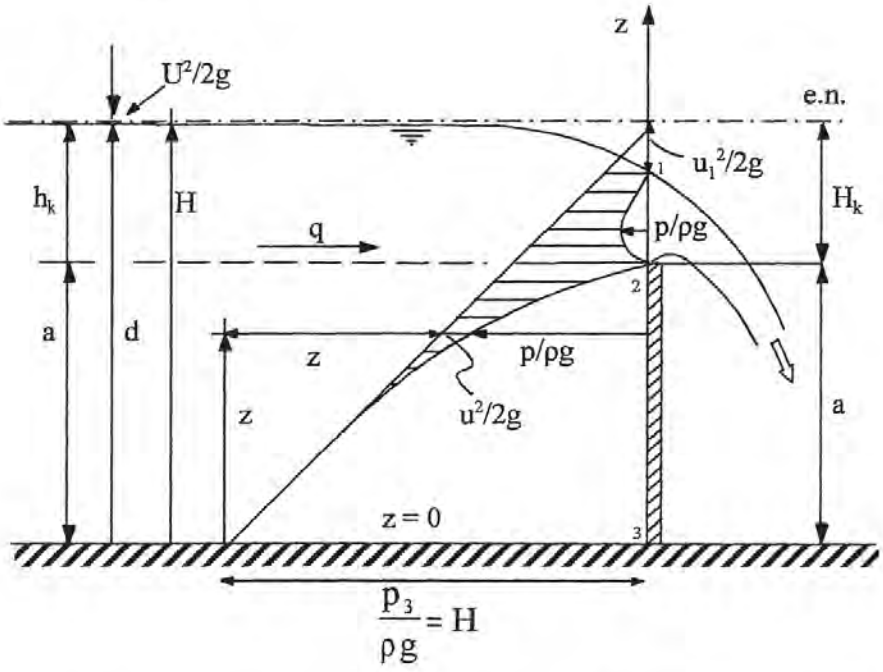
N.B. 2. In bovenstaand voorbeeld waren het bovenoppervlak van het water in het reservoir en de uittredende straal beide aan de atmosferische druk blootgesteld, waardoor $p_o - p_1$ uit de vergelijking van Bernoulli wegvalt. Als dit niet het geval is, bijv. doordat de straal uittreedt in de vloeistof in een ander reservoir (met lager gelegen vrij oppervlak), dan moet het verval Δz in bovenstaande uitdrukkingen voor uittreesnelheid en -debiet worden vervangen door Δh.

6.6.3 Stroming over scherpe overlaat

Door gebruik te maken van de eigenschap van uniforme energiehoogte kan een goede analyse van een stroming worden gemaakt. Figuur 6.7 geeft daarvan een (kwalitatief) voorbeeld voor de stroming over een stuw met een scherpe kruin.

In de punten 1 en 2 is $p = p_{atm} = 0$, en is de snelheidshoogte gelijk aan de plaatselijke waarde van H-z. Van 1 naar 2 neemt h af (gekromde stroomlijnen, zie ook Figuur 6.3b). Het drukverloop tussen beide punten is dus niet hydrostatisch maar ongeveer zoals geschetst.

Het hoekpunt tussen stuw en bodem (punt 3) is een stuwpunt, waar u = 0, zodat daar de drukhoogte gelijk is aan H-z (ofwel gelijk aan H, als we z = 0 kiezen in de bodem). Bovendien geldt in een wijdere omgeving van het stuwpunt dat de versnellingen daar klein zijn en h dus vrijwel constant is (en p hydrostatisch).



Figuur 6.7 Stroming over scherpe stuw met verdeling van snelheid en druk

6.7 Gelijkvormigheid

Naar aanleiding van het voorbeeld van Figuur 6.7 gaan we in op enkele aspecten van gelijkvormigheid van stromingen. We maken daarbij gebruik van par. 2.5.

De onafhankelijke grootheden die van belang worden geacht zijn ten eerste de hoogte van de stuw (a) en de zwaartekrachtsversnelling (g). M.b.t. de vloeistofeigenschappen gaan we de invloeden van samendrukbaarheid, viscositeit en grensvlakspanning verwaarlozen en slechts de traagheid in rekening brengen, via de massadichtheid (ρ). Tenslotte gaat het om een maat die bij gegeven waarden van a, g en ρ de intensiteit van de stroming bepaalt. We nemen daarvoor de hoogte van de bovenstroomse waterstand boven het niveau van de kruin (h_k).

Uit bovengenoemde vier onafhankelijke grootheden (a, g, ρ, h_k) is slechts één onafhankelijke dimensieloze parameter te formeren, en wel h_k/a. Het stroombeeld hangt bij gegeven waarde van h_k/a qua *vorm* dus niet af van ρ of g.

De afvoer p.e.v. breedte (q) is een afhankelijke grootheid. Deze is bijv. dimensieloos te maken tot $q/(gh_k^3)^{1/2}$. Er geldt dus

$$q = f_1(a, g, \rho, h_k) \tag{6.26}$$

en

$$\frac{q}{\sqrt{gh_k^3}} = f_2\left(\frac{h_k}{a}\right) \tag{6.27}$$

Voor gelijkvormigheid van de stroming in een schaalmodel van deze scherpe stuw met die in het prototype moeten we de verhouding h_k/a in beide dus dezelfde waarde geven (wat ook wel logisch is). Uit (6.27) volgt dat het dimensieloze debiet $q/(gh_k^3)^{1/2}$ dan in beide eveneeens dezelfde waarde heeft (zolang andere krachten dan de zwaartekracht geen rol spelen). Hoe die afhankelijkheid precies is kan niet uitsluitend op grond van dit soort beschouwingen van gelijkvormigheid worden gezegd. Daar zijn aanvullende theorieën en/of metingen voor nodig. In Hoofdstuk 10 gaan we daar op in.

Wanneer de verhouding h_k/a in het model dezelfde waarde heeft als in het prototype, en (daardoor) het dimensieloze debiet $q/(gh_k^3)^{1/2}$ eveneens, dan geldt dit ook voor andere dimensieloze afhankelijke variabelen zoals d/h_k, d/a, en in het bijzonder ook voor $U/(gd)^{1/2}$, het

z.g. **getal van Froude** of **kental van Froude** voor de aankomende stroming, waarin U de stroomsnelheid is gemiddeld over de diepte d (dus U = q/d) :

$$Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}} \tag{6.28}$$

Dit kental speelt een belangrijke rol in vrije-oppervlaktestromen onder invloed van de zwaartekracht. Voor gelijkvormigheid van dat type stromen moet Fr in de vergeleken systemen dezelfde waarde hebben.

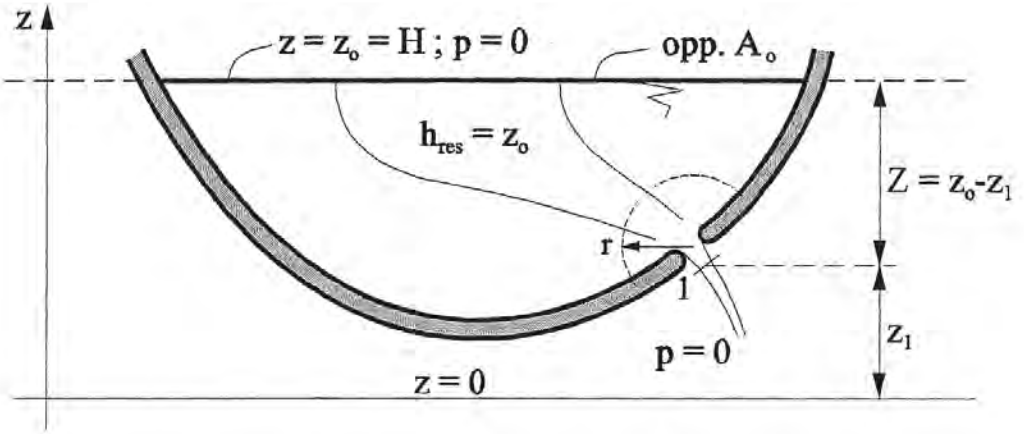
7 NIET-STATIONAIRE STROMEN

In dit hoofdstuk behandelen we enkele gevallen van niet-stationaire stromen, nl.:

- Leeg- en vollopen van reservoirs zoals vaten, sluiskolken etc.;
- Versnellende stroom in een pijpleiding als overgang naar stationaire stroom;
- Oscillerende stroom in een pijpleiding.

7.1 Leeg- en vollopen van reservoirs

In par. 6.6 is o.m. de stroming behandeld uit een reservoir door een relatief kleine opening (Figuur 7.1, herhaling van Figuur 6.6). Daarbij gingen we uit van een strikt stationaire toestand, dus ook met constant peil in het reservoir, te bereiken door toevoeging van een debiet gelijk aan het uitstroomdebiet (of iets meer en het surplus over de rand weg laten lopen). We gaan nu in op de situatie van alleen uitstroom, dus zonder toevoeging. Het reservoir loopt dan leeg. We gaan berekenen hoe dat verloopt en hoe lang dat duurt, maar geven eerst een grootte-orde beschouwing.



Figuur 7.1: Stroming uit een reservoir via een kleine opening

Bij de stationaire toestand, met een constant uitstroomdebiet Q en een constant volume water in het reservoir V (boven de opening), hoort een gemiddelde **verblijftijd** van de waterdeeltjes in het reservoir (τ) gelijk aan V/Q. In geval van leegloop (zonder toevoeging) en een aanvangsvolume V(0) (d.w.z. V(t) voor t = 0) zou bij een constant debiet, gelijk aan de aanvangswaarde Q(0), de leegloopduur gelijk zijn aan V(0)/Q(0). Bij leeglopen neemt het verval echter af en daarom Q ook. De leegloopduur is daardoor weliswaar langer dan V(0)/Q(0), maar wel evenredig daarmee en zelfs van dezelfde grootte-orde. In ieder geval kunnen we verwachten dat de leegloopduur van de onafhankelijke variabelen zal afhangen op de

manier zoals die voorkomen in de verhouding V(0)/Q(0). Voor een prismatisch reservoir met (constant) oppervlak van de waterspiegel A_o, netto uitstroomoppervlak μA en aanvangsverval $\Delta z(0)$ geldt dus dat de leegloopduur een (waarschijnlijk bescheiden) veelvoud zal zijn van

$$\tau \equiv \frac{V(0)}{Q(0)} = \frac{A_o \Delta z(0)}{\mu A \sqrt{2g\Delta z(0)}} = \frac{A_o}{\mu A}\sqrt{\frac{\Delta z(0)}{2g}} \qquad (7.1)$$

Een volledige berekening (zie hieronder) bevestigt dit en levert de evenredigheidsfactor. Voor niet-cilindervormige reservoirs is de uitdrukking voor V als functie van het vloeistofpeil wat ingewikkelder, maar blijft de evenredigheid tussen leegloopduur en V(0)/Q(0) (= τ) van kracht. Daarmee is een handig hulpmiddel beschikbaar voor een snelle grootte-ordeschatting zonder een differentiaalvergelijking op te hoeven stellen of te integreren.

Na bovenstaande grootte-ordebeschouwing gaan we de leegloopduur berekenen. Toepassing van de volumebalans op de voorraad water in het reservoir, gegeven in (5.6), geeft

$$A_o \frac{dz_o}{dt} = -Q \qquad (7.2)$$

Hierin is A_o de momentane oppervlakte van de (dalende) waterspiegel in het reservoir, z_o de momentane hoogte van de (vrijwel horizontale) waterspiegel boven het referentievlak z = 0, en Q het momentane uittredende debiet (Figuur 7.1). A_o kan via z_o met t variëren.

Door het dalen van de waterspiegel neemt het verval tussen de binnenwaterstand en het niveau van de opening af. Daardoor zal de snelheid van de uittredende stroom ook afnemen. De beweging is dan niet stationair, de lokale versnelling ($\partial u/\partial t$) is strikt genomen niet nul en Bernoulli gaat strikt genomen niet op. Maar, hoe kleiner de opening des te groter de advectieve versnelling (zie par. 6.6) en des te kleiner de lokale versnelling, want het leeglopen gaat daardoor langzamer. Daarom is voor een relatief kleine opening de lokale versnelling verwaarloosbaar t.o.v. de advectieve (ofwel: in de omgeving van de opening is de ruimtelijke variatie van de snelheid veel sterker dan de variatie met de tijd in een vast punt). Hoewel de situatie langzaam in de tijd varieert kunnen we *voor de berekening van de uittreesnelheid* op elk moment daarom toch doen alsof de toestand stationair is. Zo'n benadering heet **quasi-stationair.** Voor het debiet geldt dan op elk moment

$$Q = \mu A\sqrt{2g(z_o - z_1)} \tag{7.3}$$

ook al varieert z_o in de tijd.

Gemakshalve voeren we voor het verval z_o-z_1 het symbool Z in (zie Figuur 7.1). Eliminatie van Q uit (7.2) en (7.3) geeft

$$A_o\frac{dZ}{dt} + \mu A\sqrt{2gZ} = 0 \tag{7.4}$$

Dit is een gewone eerste-orde differentiaalvergelijking voor Z. De oplossing is inzichtelijk te maken m.b.v. een *lijnelementenveld* (zie Modelvorming, CT1090).

Voor een gegeven beginverval Z_1 voor $t = t_1$ is (7.4) te integreren en is het tijdstip (t_2) te bepalen waarop het verval is afgenomen tot een willekeurige geringere waarde Z_2:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_{Z_2}^{Z_1}\frac{A_o(Z)}{\sqrt{Z}}\,dZ \tag{7.5}$$

Wanneer het peil in het reservoir is gedaald tot het niveau van de opening (Z = 0) noemen we het reservoir "leeg". Dan geldt $Z_2 = 0$. De daarmee overeenkomende leegloopduur t_L volgt uit

$$t_L = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_{0}^{Z_1}\frac{A_o(Z)}{\sqrt{Z}}\,dZ \tag{7.6}$$

Voor elk gegeven reservoir is A_o bekend als functie van het reservoirpeil en dus van Z en zijn deze integralen bepaald, en daarmee de snelheid en de duur van het leeglopen.

Het voorgaande ging over een leeglopend reservoir. Voor het vollopen geldt in wezen hetzelfde, met dit verschil dat Z dan het verval is tussen het hoger gelegen reservoir en het vollopende, lager gelegen reservoir.

Voorbeeld: cilindervormig reservoir A_o = constant. De tijd nodig om het verval te reduceren van Z_1 tot een willekeurige waarde Z_2 is dan

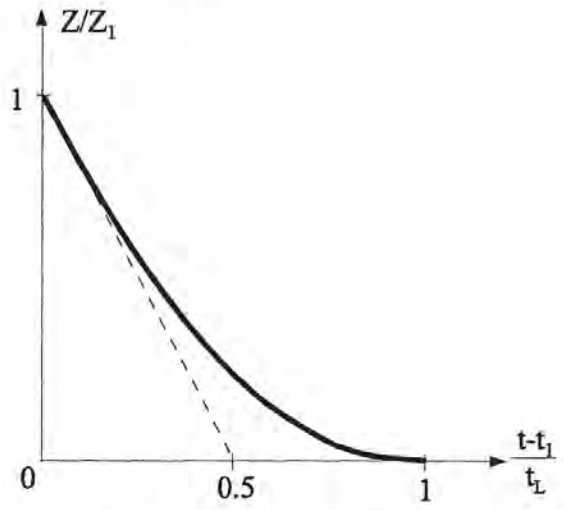
$$t_2 - t_1 = \frac{A_o}{\mu A\sqrt{2g}} \int_{Z_2}^{Z_1} \frac{1}{\sqrt{Z}}\, dZ = \frac{A_o}{\mu A}\left[\sqrt{\frac{2Z_1}{g}} - \sqrt{\frac{2Z_2}{g}}\right] \tag{7.7}$$

Het leeglopen verloopt dus parabolisch in de tijd. De leegloopduur is

$$t_L = \frac{A_o}{\mu A}\sqrt{\frac{2Z_1}{g}} \tag{7.8}$$

We zien aan deze uitdrukking voor de leegloopduur dat de onafhankelijke variabelen erin voorkomen zoals op grond van de verblijftijd (bij stationaire stroom) werd verwacht (zie verg. 7.1). Voor dit cilindervormige vat is de leegloopduur gelijk aan precies twee keer de verblijftijd. Bij andere reservoirvormen is de leegloopduur ook enkele keren de verblijftijd, maar heeft de evenredigheidsfactor een andere waarde, bepaald door de vorm van het reservoir (A_o als functie van z_o).

N.B. De grootheid $\sqrt{2Z_1/g}$ is de tijd die een deeltje nodig heeft om met beginsnelheid nul vrij te vallen over een hoogte Z_1 (zoals voor de waterdeeltjes het geval zou zijn als $A_o = \mu A$).



Figuur 7.2: Spiegeldaling van een leeglopend cilindervormig reservoir (voorbeeld: schutkolk)

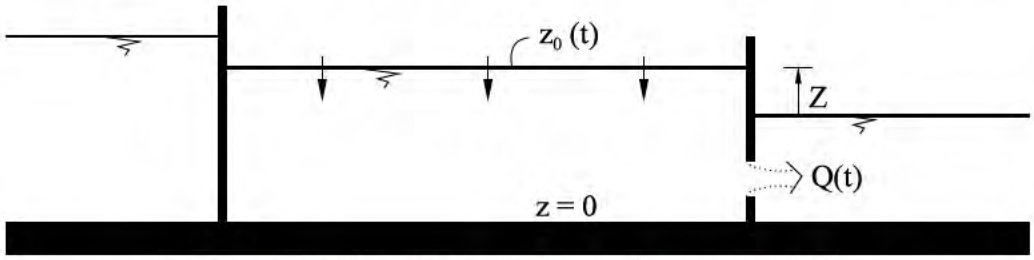
Vergelijking (7.7) kan in dimensieloze vorm worden geschreven als:

$$\frac{t-t_1}{t_L} = 1-\sqrt{\frac{Z}{Z_1}} \tag{7.9}$$

Hierin hebben we de index 2 laten vallen, zodat Z het verval is op een willekeurig tijdstip t bij een beginwaarde Z_1 op het tijdstip t_1. Dit is afgebeeld in Figuur 7.2. De stippellijn daarin is de raaklijn aan $Z(t)/Z_1$ op t = 0, en geeft het leegloopverloop weer als de snelheid van leeglopen constant zou blijven. De daarmee overeenkomende leegloopduur is (per definitie) de verblijftijd τ. De figuur laat zien dat deze de helft is van de feitelijke waarde.

Nivelleren van een schutkolk

Een schutkolk met vertikale wanden is een bijzonder geval van een cilindervormig reservoir. Het verschil is dat uitstroom niet plaats vindt in de atmosfeer maar in het lager gelegen kanaalpand (Figuur 7.3); dat is echter niet essentieel. Noemen we het momentane verval tussen het water in de schutkolk en het ontvangende water Z dan zijn bovenstaande uitdrukkingen van toepassing. Hetzelfde geldt voor het vullen van de schutkolk, alleen is Z dan de hoogte van het peil aan bovenstroomse zijde boven dat in de kolk.



Figuur 7.3: Nivellering van het peil in een schutkolk

Nemen we een schutkolk voor binnenscheepvaart met een lengte van 120 m, een breedte van 9 m, een verval van 4 m en een effectieve waarde van μA gelijk aan 2 m^2 dan is de nivelleringstijd volgens (7.8) gelijk aan ca. 490 s, ofwel ruim acht minuten.

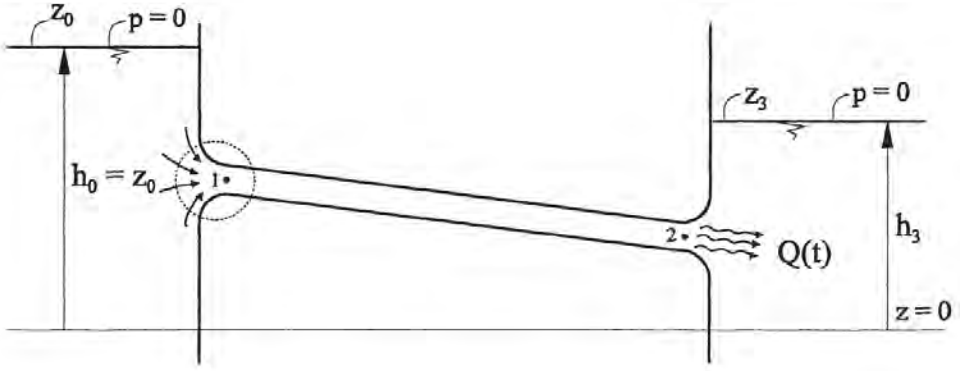
7.2 Versnellende stroom in pijpleiding

Twee reservoirs staan met elkaar in verbinding via een pijp met een constante diameter, een gestroomlijnde inloop (μ =1) en een afsluiter aan het benedenstroomse einde (punt 2 in Figuur 7.4). Aanvankelijk is alles in rust. Op t = 0 wordt de afsluiter abrupt geopend en kan het water

stromen. Het zal echter enige tijd nodig hebben om op gang te komen. Dat gaan we hier uitrekenen. Voorlopig laten we wandweerstand buiten beschouwing. Verder wordt het peil in beide reservoirs constant verondersteld. Dat is toelaatbaar als de reservoirs voldoende diep zijn en voldoende bergend oppervlak hebben.

In het gebied van de **instroming** in de leiding (het gebiedje binnen de gestippelde cirkel in Figuur 7.4) treedt **versnelling** op, hoofdzakelijk door de sterke verandering van de snelheid met de plaats (advectieve versnelling). Ten opzichte daarvan kunnen we in die kleine omgeving de lokale variatie van de snelheid in de tijd wel verwaarlozen, net als in het vorige voorbeeld.

In het instroomgedeelte kunnen we dus opnieuw een quasi-stationaire benadering gebruiken, **Bernoulli** toepassen, en stellen dat $h_1 = h_0 - U_1^2/2g = z_0 - U_1^2/2g$, waarin h_0 en h_1 de momentane hoogten zijn van de piëzometrische niveaus in het reservoir en in doorgang 1, en U_1 de (over het dwarsprofiel uniforme) snelheid is in doorgang 1 op hetzelfde tijdstip.



Figuur 7.4: Stroming tussen twee reservoirs via een pijpleiding

In tegenstelling tot het intreegebied kunnen we Bernoulli niet toepassen op de **uittredende stroom**. Daar treedt **vertraging** op, loslating, en vormt het uitstromende water een straal in het ontvangende water. Dit gaat gepaard met wervelingen. Dit kost energie (onvolledige omzetting van kinetische energie in potentiële energie; volgens Bernoulli zou die omzetting wel volledig zijn). We spreken hier van **uittreeverlies**. Het energieniveau daalt daardoor met een waarde die wordt uitgedrukt als een factor ξ_{uit} maal de lokale snelheidshoogte (dus als $\xi_{uit}U_2^2/2g$). Bij abrupte uittreding in een reservoir gaat vrijwel de gehele kinetische energie van het uitstromende water hieraan verloren ($\xi_{uit} = 1$), wat inhoudt dat het piëzometrisch niveau aan het

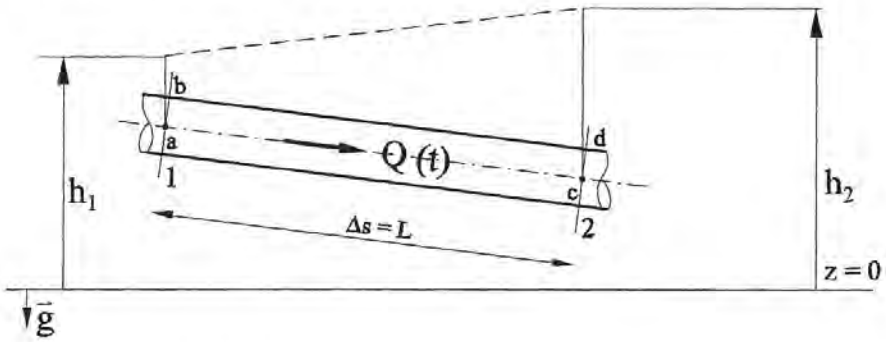
einde van de leiding (doorsnede 2) even hoog ligt als in het ontvangende water, d.w.z. in het peil van het benedenstroomse reservoir, ofwel $h_2 = h_3 = z_3$. (Zie Figuur 9.12.) N.B. Bij niet-gestroomlijnde instroom kan er ook een intreeverlies optreden, geschreven als $\xi_{in} U_1^2/2g$.

In de pijp zijn de stroomlijnen recht en zijn de versnellingen in dwarsrichting dus nul (de versnellingen zijn uitsluitend axiaal). Alle punten in elke dwarsdoorsnede hebben daarom op elk moment hetzelfde piëzometrisch niveau ($\partial h/\partial n = 0$, $\partial h/\partial b = 0$). We kunnen op elk tijdstip dus spreken van "het" piëzometrisch niveau voor een dwarsdoorsnede.

In de benadering van onsamendrukbaarheid is de stroming in de pijp **uniform**. Immers, $\partial Q/\partial s = 0$ (verg. 5.4); verder geldt $\partial A/\partial s = 0$ (constante diameter), zodat ook $\partial U/\partial s = 0$. In de bewegingsvergelijking voor een deeltje (Euler) langs de stroomlijn (6.13s) vervalt dan de advectieve versnelling, en blijft over (bij verwaarlozing van weerstand):

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial s} = 0 \qquad (7.10)$$

In deze vergelijking varieert u_s niet met s, en $\partial h/\partial s$ (het **verhang**) dus ook niet. Het verhang in de buis *op elk moment* varieert dus niet met de plaats. Het piëzometrisch niveau verloopt dan rechtlijnig met de positie langs de pijpas, tussen de waarde h_1 in doorgang 1 en de waarde h_2 in doorgang 2 (Figuur 7.5). Verder varieert h niet met n, en dus u_s ook niet (wandwrijving is buiten beschouwing gelaten). De vloeistof in de pijp beweegt dus als een **starre kolom**, met



Figuur 7.5: Rechtlijnig verlopend piëzometrisch niveau voor niet-stationaire stroming in pijpleiding

een voor alle deeltjes gemeenschappelijke, in de tijd variërende snelheid U, onder invloed van een gemeenschappelijk, in de tijd variërend verhang $\partial h/\partial s$. Integratie van (7.10) over de lengte van de pijp tussen de doorgangen 1 en 2 (L) is dan eenvoudig:

$$L\frac{dU}{dt} + g(h_2 - h_1) = 0 \qquad (7.11)$$

N.B. We hadden dit ook gekregen door K = ma toe te passen op de "starre kolom":

$$\rho gA(h_1 - h_2) = \rho AL\frac{dU}{dt} \qquad (7.12)$$

Dit lijkt sneller, maar moet eerst gemotiveerd worden met detailbeschouwingen zoals hierboven gegeven.

Substitutie van $h_1 = h_0 - U^2/2g = z_0 - U^2/2g$ en van $h_2 = h_3 = z_3$ levert

$$L\frac{dU}{dt} + \frac{U^2}{2} = g(h_0 - h_3) = g(z_0 - z_3) \qquad (7.13)$$

Interpretatie: Het beschikbare verval tussen beide reservoirs (z_0 - z_3) levert de aandrijvende kracht. Aanvankelijk is U = 0 en wordt het verval geheel besteed aan het op gang brengen van de massa in de pijp tussen de doorgangen 1 en 2. De aanvangsversnelling is dus gelijk aan $g(z_0 - z_3)/L$. Naarmate de snelheid toeneemt wordt een groter deel van het verval besteed aan het versnellen van het water in het overgangsgebied tussen het reservoir en de pijp (de term $U^2/2$). Op de duur ontstaat een stationaire toestand (dU/dt = 0) waarbij de snelheid een evenwichtswaarde heeft bereikt:

$$U_\infty = \sqrt{2g(z_0 - z_3)} \qquad (7.14)$$

De aanvangsversnelling is dus ook uit te drukken als $U_\infty^2/2L$. Daarbij hoort een tijdschaal van het systeem

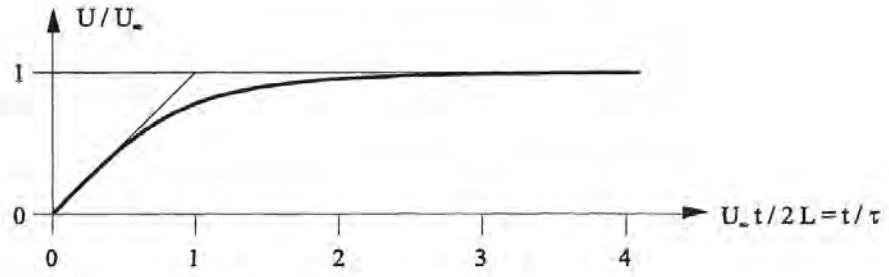
$$\tau = U_\infty/(dU/dt)_{t=0} = 2L/U_\infty \qquad (7.15)$$

Het verloop vanuit rust (U = 0 op t = 0) tot de evenwichtswaarde kan worden gevonden door (7.13) te integreren, met het resultaat (zie Handleiding Modelvorming CT1090, Appendix Hoofdstuk 5):

$$\frac{U}{U_\infty} = \tanh\frac{U_\infty t}{2L} = \tanh\frac{t}{\tau} \qquad (7.16)$$

(zie Figuur 7.6). Na een tijd gelijk aan 2τ respectievelijk 3τ heeft de snelheid de eindwaarde genaderd tot op 3,6% respectievelijk 0,5%.

Voorbeeld: bij een verval van 1 m ($U_\infty \approx 4{,}43$ m/s) en een pijplengte van 20 m is $\tau \approx 9$ s; na ongeveer 3 τ ofwel ca. een halve minuut is deze stroom vrijwel geheel op gang gekomen.



Figuur 7.6: Op gang komende stroomsnelheid in pijpleiding met kwadratisch inloopverval en/of kwadratische verliezen

In het voorgaande was **wandweerstand** buiten beschouwing gelaten. We gaan die nu in rekening brengen. Stel dat τ_w de schuifspanning is tussen de stromende vloeistof en de buiswand. Voor turbulente stroom stellen we $\tau_w = c_f \rho U^2$, waarin c_f een dimensieloze weerstandsfactor is met waarden van ca. 2 à 6 x 10^{-3} (zie Hoofdstuk 12).

De totale wandweerstand in de pijp is gelijk aan $W = (\pi DL)\tau_w$. Deze voegen we toe als extra kracht in de bewegingsvergelijking (7.12), waardoor deze overgaat in:

$$L\frac{dU}{dt} = g(h_1 - h_2) - 4c_f\frac{L}{D}U^2 \qquad (7.17)$$

Brengen we ook nog intree- en uittreeverliezen en eventuele andere lokale verliezen in rekening (zie Hoofdstuk 9), met een totaal verval gelijk aan $(\sum\xi)U^2/2g$, dan gaat (7.17) over in

$$L\frac{dU}{dt} + \chi\frac{U^2}{2} = g(z_0 - z_3) \qquad (7.18)$$

Hierin is χ een dimensieloze verliescoëfficiënt, zodanig gedefinieerd dat het totale verval door wandweerstand en vertragingsverliezen gelijk is aan $\chi U^2/2g$:

$$\chi = \Sigma\xi + 8c_f\frac{L}{D} \tag{7.19}$$

Hierdoor geldt

$$U_\infty = \sqrt{2g(z_0 - z_3)/\chi}\,, \quad \tau = \frac{2L}{\chi U_\infty} \quad \text{en} \quad \frac{U}{U_\infty} = \tanh\frac{t}{\tau} \tag{7.20}$$

In bovenstaand voorbeeld met alleen uittreeverlies gold $\chi = \sum\xi = \xi_{uit} = 1$. Voegen we wandweerstand toe voor het geval dat D = 0,4 m en $c_f = 0{,}003$, dan is $8c_fL/D = 1{,}2$ zodat $\chi = 2{,}2$, $U_\infty \approx 2{,}99$ m/s en $\tau \approx 6{,}1$ s. Door de wandweerstand is de eindsnelheid uiteraard lager dan zonder weerstand; het bereiken van die lagere eindwaarde duurt korter.

De drukvariaties in de pijp tijdens niet-stationaire stroom zonder weerstand, bijv. in de punten a en d in Figuur 7.5, kunnen als volgt worden berekend. Het piëzometrisch niveau varieert lineair tussen de doorsneden 1 en 2 (zie Figuur 7.5), zodat (zonder weerstand)

$$\frac{dU}{dt} = -g\frac{\partial h}{\partial s} = -g\frac{h_2 - h_1}{L} \tag{7.21}$$

ofwel

$$h_2 - h_1 = -\frac{L}{gA}\frac{dQ}{dt} \tag{7.22}$$

Omdat (op elk moment) het p.n. per dwarsdoorsnede constant is geldt $h_a = h_b = h_1$ en $h_c = h_d = h_2$. Bij gegeven variatie van Q met t kan het verschil tussen de gelijktijdige drukken in (bijv.) de punten a en d worden berekend uit

$$(\rho g z_d + p_d) - (\rho g z_a + p_a) = -\rho\frac{L}{A}\frac{dQ}{dt} \tag{7.23}$$

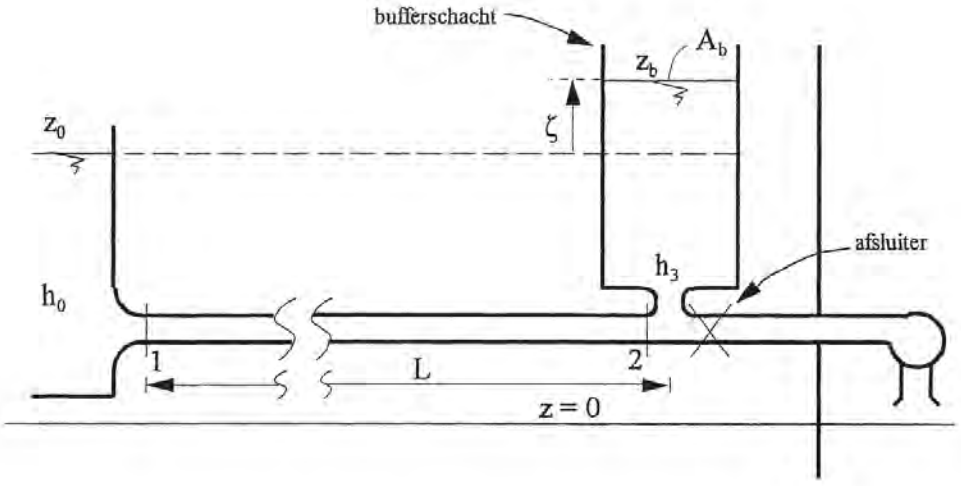
Deze betrekking geldt voor elke niet-stationaire stroom in de pijp (met verwaarloosde wandweerstand!), dus niet alleen voor het op gang komen maar bijv. ook voor een oscillerende stroom, zoals in de volgende paragraaf wordt behandeld.

7.3 Oscillerende stroming tussen twee reservoirs

In de voorgaande paragraaf hebben we de bergende oppervlakken in beide reservoirs, waartussen de pijpleiding de verbinding vormt, zo groot verondersteld dat het peil in elk reservoir onafhankelijk kon worden gesteld van in- of uitstroom. Nu gaan we uit van een situatie waarin één of beide reservoirs een kleiner bergend oppervlak heeft of hebben, zodat daar de variaties van het peil als gevolg van in- of uitstroom een rol gaan spelen.

Zodra een stroom op gang is gekomen zal het peil in het bovenstroomse reservoir zakken en dat in het benedenstroomse reservoir stijgen, en wel des te sneller naarmate het oppervlak van de vrije waterspiegel kleiner is. Het verval wordt daardoor kleiner en gaat naar nul, maar door de traagheid van de vloeistof in de leiding blijft de stroom doorgaan en verandert het verval van teken waardoor op de duur ook de stroom van richting omkeert. Zo kan er een schommeling ontstaan, een trilling waarvan we de eigenfrequentie gaan berekenen.

Een systeem zoals hierboven beschreven komt veel voor in (lange) drukleidingen, bijv. tussen een stuwmeer en een lager gelegen turbine, of tussen een waterinnamepunt en een verder gelegen pompstation. Stel nu dat in zo'n systeem tijdens stroming een klep abrupt wordt gesloten, als gevolg van een ongeval of met opzet. Als gevolg van de traagheid van de massa water in de (lange) leiding bouwen zich dan hoge drukken op in de leiding. Om deze te beperken wordt aan het benedenstroomse eind vaak een z.g. **bufferschacht** geplaatst, waarin het water weg kan, waardoor de drukken in de leiding veel geleidelijker en tot een kleinere hoogte oplopen (Figuur 7.7).



Figuur 7.7: Drukleiding met afsluiter en bufferschacht

Wij gaan uit van een bufferschacht met een vrije waterspiegel. (Men kan ook werken met een gesloten drukvat, waarbij de lucht boven de vloeistofspiegel als een extra veer werkt, waarbij de hoogte van de schacht minder groot hoeft te zijn.) De balans voor het volume water in de bufferschacht luidt

$$A_b \frac{dz_b}{dt} = Q = AU \tag{7.24}$$

Hierin is A_b de oppervlakte van de vrije waterspiegel in de bufferschacht, z_b het (variabele) peil ervan t.o.v. het referentievlak $z = 0$ en is $Q = AU$ het debiet in de drukleiding.

Voor de eenvoud van de berekening verwaarlozen we de weerstand en veronderstellen we dat de bufferschacht cilindrisch is, met constante A_b, en dat het stuwmeer zeer groot is en het peil daarin (z_0) onafhankelijk van de stroming in de pijpleiding. Voorlopig veronderstellen we nog wel dat de bufferschacht een veel groter dwarsoppervlak heeft dan de pijpleiding, zodat de vertikale snelheden en versnellingen erin klein zijn en de druk op elk moment hydrostatisch is (evenals in het stuwmeer). Voor het p.n. onder in de schacht, bij de in- of uitstroomopening van de pijp, maar nog wel buiten het invloedsgebied van de versnellingen daar, geldt dan $h_3 = z_b$.

Voor de bewegingsvergelijking gebruiken we (7.13), maar we beperken ons tot relatief kleine uitwijkingen en (dus) lage snelheden, zodanig dat de term $U^2/2$ verwaarloosbaar is t.o.v. $L\,dU/dt$. Dit is het geval wanneer, bij sinusvormige bewegingen met frequentie ω en snelheidsamplitude $\hat{U}$,

$$\frac{U^2}{2} \ll L\frac{dU}{dt} \quad \text{ofwel} \quad \frac{\hat{U}^2}{2} \ll L\omega\hat{U} \quad \text{ofwel} \quad \frac{\hat{U}}{\omega} \ll 2L \tag{7.25}$$

De grootheid $\hat{U}/\omega$ is gelijk aan de amplitude van de verplaatsing van de deeltjes in de pijp. Bovenstaande voorwaarde houdt dus in dat die klein moet zijn t.o.v. 2x de pijplengte. Wanneer hieraan is voldaan kunnen we de term $U^2/2$ in (7.13) verwaarlozen en stellen

$$L\frac{dU}{dt} = g(h_1 - h_2) \cong g(h_0 - h_3) \cong g(z_0 - z_b) \tag{7.26}$$

Kortheidshalve schrijven we $\zeta(t) = z_b(t) - z_0$, de hoogte van het (variabele) peil in de bufferschacht boven het (constante) peil in het stuwmeer. Met deze substitutie en na eliminatie van U uit (7.24) en (7.26) is het resultaat te schrijven als

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{A}{A_b}\frac{g}{L}\zeta = 0 \qquad (7.27)$$

Dit is de klassieke vergelijking voor een ongedempt massa-veersysteem, met eigenfrequentie

$$\omega_o = \sqrt{\frac{A}{A_b}\frac{g}{L}} \qquad (7.28)$$

(zie CT1021). Substitutie van de beginvoorwaarden $\zeta = 0$ en $U = U_o$ (dus $d\zeta/dt = (A/A_b)U_o$) op $t = 0$ en uitwerken geeft voor het peil in de bufferschacht:

$$\zeta(t) = \hat{\zeta} \sin \omega_o t \qquad (7.29)$$

waarin de amplitude gegeven is door

$$\hat{\zeta} = \frac{A}{A_b}\frac{U_o}{\omega_o} = \sqrt{\frac{A}{A_b}\frac{L}{g}}\,U_o \qquad (7.30)$$

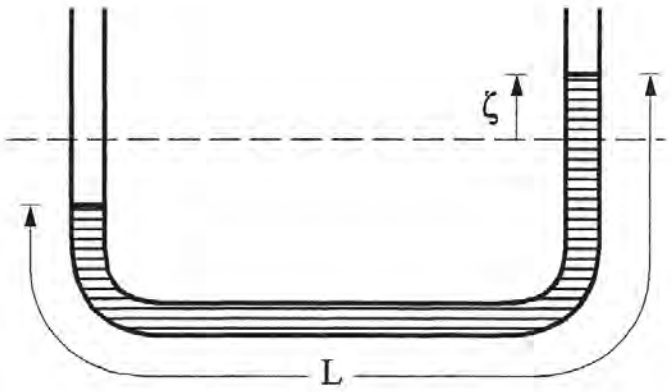
Opgave: toon aan dat deze waarde van de amplitude ook direct volgt uit een gelijkstelling van de aanvankelijke kinetische energie van de vloeistof in de pijpleiding aan de maximale potentiële energie (zwaarte-energie) van de vloeistof in de bufferschacht.

Als er sprake is van oscillerende stroming tussen twee gelijke reservoirs treedt bij een gegeven stroomsnelheid in de pijp een twee keer groter verval op dan in het geval waarin één van beide een constant peil heeft. Dat verhoogt de frequentie met een factor $\sqrt{2}$ (bij gelijke massa een twee keer grotere "veerstijfheid").

In het voorgaande is de bufferschacht zo ruim verondersteld dat de druk erin op elk moment als hydrostatisch kan worden beschouwd (evenals in het stuwmeer). Bij een afnemend dwarsprofiel gaat dat op de duur niet meer op. Niet alleen de traagheid van de vloeistofmassa in de pijp speelt dan een rol, maar ook die van de massa in de bufferschacht. (Door toepassing van een vergelijking zoals (7.13) op het water in de bufferschacht kan dit in rekening worden gebracht.) De eigenfrequentie daalt daardoor (meer traagheid in het systeem). Een bijzonder geval doet zich voor wanneer de "bufferschacht" (die dan niet meer zo moet heten) hetzelfde dwarsprofiel heeft als de pijp. In bovenstaande formulering houdt dat in dat $A_b = A$ en dat we voor L de totale lengte nemen van de pijp inclusief de "bufferschacht" tot aan het evenwichtsniveau. De

eigenfrequentie wordt dan $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ (eigenperiode $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$) (precies zoals voor een mathematische slinger met lengte L).

Voor een U-buis (Figuur 7.8) met een totale lengte van de vloeistofkolom gelijk aan L (zodat de massa vloeistof gelijk is aan ρAL), met gelijke berging en dus potentiële energie in beide opstaande poten, geldt $\omega_0 = \sqrt{2g/L}$.



Figuur 7.8: U-buis

8 ENERGIEBALANS VOOR EEN STROOMBUIS

In Hoofdstuk 6 is de vergelijking van Bernoulli afgeleid uit de vergelijking van Euler, dat wil zeggen uit de balans voor de impuls van een deeltje (de component daarvan langs een stroomlijn).

In dit hoofdstuk wordt een vergelijking afgeleid die verwant is aan die van Bernoulli, maar nu in de vorm van een integraalformulering voor de stroming door een leiding (gesloten of open). Begonnen wordt met de totale energie-overdracht door een doorgang. Hiermee is een soort energiehoogte te definiëren als eigenschap van de stroming in een gehele doorgang (dus niet in een punt, zoals in hoofdstuk 6). Vervolgens wordt een Eulerse energiebalans opgesteld voor een stroombuis. In afwezigheid van energieverliezen leidt dit tot een soortgelijke vergelijking als die van Bernoulli. Eventuele energieverliezen (of toevoegingen, zoals door een pomp) kunnen in principe eenvoudig in de formulering worden opgenomen.

8.1 Energie-overdracht

We gaan een uitdrukking afleiden voor de energie-overdracht per eenheid van tijd, ofwel de energieflux P (van "power", vermogen) door een doorgang *D*. Deze overdracht vindt plaats op twee manieren, nl. via wisselwerkingen tussen de materie aan weerszijden van de doorgang, en via meevoering.

Wisselwerkingen

Evenals bij de berekening van de impulsoverdracht is gedaan in Hoofdstuk 6 laten we ook hier schuifspanningen buiten beschouwing. De drukkracht op een infinitesimaal elementje van de doorgang, met oppervlakte ΔA en normaalvector $\vec{e}_N$ (zie Figuur 4.7) is $\Delta\vec{F}_p = p\vec{e}_N \Delta A$. Het vermogen dat deze kracht levert is kracht maal snelheid ofwel $\Delta P_{ww} = \Delta\vec{F}_p \cdot \vec{u}$, zodat

$$\Delta P_{ww} = p u_N \Delta A \tag{8.1}$$

Meevoering

We gaan de energie-overdracht door meevoering berekenen conform de algemene formulering voor meevoering die is gegeven in par. 4.2. De volumestroom door het beschouwde vlakje is $u_N \Delta A$. Per eenheid van volume is de zwaarte-energie gelijk aan $\rho g z$ (zie par. 6.2), en de kinetische energie gelijk aan $\frac{1}{2}\rho u^2$. Samen is dit $(\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2)$. De meevoering van potentiële

en kinetische energie per eenheid van tijd door het beschouwde vlakje heen is dus

$$\Delta P_{mv} = (\rho g z + \tfrac{1}{2}\rho u^2) u_N \Delta A \tag{8.2}$$

Totaal

Sommatie van de bijdragen geleverd door de drukkracht en door meevoering geeft voor de totale energie-overdracht per eenheid van tijd door het beschouwde vlakje heen:

$$\Delta P = (p + \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho u^2) u_N \Delta A$$

Voor de hele doorgang D is de overeenkomstige waarde

$$\boxed{P = \int\int (p + \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho u^2) u_N \, dA} \tag{8.3}$$

De dimensie hiervan is die van energie per tijd, ofwel die van een vermogen (SI-eenheid: 1 J/s ofwel 1 W).

Merk op dat deze energie-overdracht alleen kan plaatsvinden door een echte doorgang, dat wil zeggen een vlak waar de stroom doorheen gaat ($u_N \neq 0$). Er vindt volgens bovenstaande benadering geen energie-overdracht plaats door een vlak waarin de stroomlijnen liggen, zoals de zijdelingse begrenzing van een stroombuis, waar $u_N = 0$. (Schuifspanningen kunnen wel energie overdragen door zulke vlakken, maar die blijven voorlopig buiten beschouwing.)

8.2 Energie-overdracht en energiehoogte

De uitdrukking tussen haken in (8.3) is te schrijven als $\rho g H$, waarin H de lokale (per punt gedefinieerde) energiehoogte is. Daarmee is (8.3) te schrijven als

$$P = \int\int \rho g H \, u_N \, dA \tag{8.4}$$

Wanneer de stroming een uniforme energiehoogte heeft, zoals het geval is bij stroming vanuit rust onder invloed van de (conservatieve) zwaartekracht (zie par. 6.6), dan gaat (8.4) over in

$$P = \rho g H \int\int u_N \, dA$$

ofwel, gebruikmakend van (4.4), in

$$P = \rho g H Q \tag{8.5}$$

Wanneer H niet uniform is in de beschouwde doorgang (bv. als gevolg van wandweerstand) kunnen we toch voor die doorgang één energiehoogte definiëren (hier weer te geven als <H>):

$$\langle H \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{\rho g Q} \tag{8.6}$$

M.a.w., <H> is de verhouding van de p.e.v. tijd overgedragen energie (P) tot het gewicht (ρgQ) van de p.e.v. tijd doorgestroomde materie.

In termen van <H> is de totale energie-overdracht te schrijven als

$$P = \rho g Q \langle H \rangle \tag{8.7}$$

Met de definitie (8.6) is een belangrijke uitbreiding gegeven aan het begrip energiehoogte, omdat deze nu een eigenschap is van de totale stroom door een doorgang (omdat dat geldt voor P en Q), in plaats van slechts in een punt.

Substitutie van (8.4) en (4.4) in (8.6) geeft

$$\langle H \rangle = \frac{\iint H\, u_N\, dA}{\iint u_N\, dA} \tag{8.8}$$

We zien hieruit dat <H> een over de doorgang gemiddelde waarde van is H, gewogen met u_N. Vanzelfsprekend reduceert dit tot <H> = H voor stromingen waarin H uniform is.

Voor een dwarsdoorgang (waar $u_N = \pm u$) wordt (8.8)

$$\langle H \rangle = \frac{\iint H\, u\, dA}{\iint u\, dA}$$

We substitueren hierin $H = h + u^2/2g$. Wanneer de stroomlijnen in de dwarsdoorgang recht zijn is h constant in die doorgang, en reduceert de vergelijking tot

$$<H> = h + \frac{1}{2g}\frac{\iint u^3 dA}{\iint u dA} \tag{8.9}$$

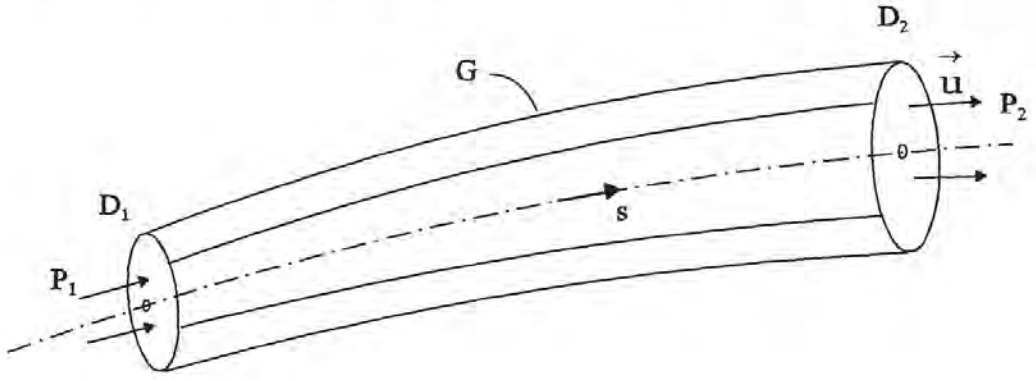
De laatste term hiervan is op een factor β na (zie verg. 4.20 en 4.21) gelijk aan de snelheidshoogte $U^2/2g$ horend bij de over de doorgang gemiddelde stroomsnelheid U (zie vgl. 4.6), waar uit volgt dat

$$<H> = h + \beta\frac{U^2}{2g} \tag{8.10}$$

Wanneer de parallelle stroming een uniforme energiehoogte heeft is u constant, gelijk aan U, en geldt $\beta = 1$. In gevallen waarin de niet-uniforme snelheidsverdeling uitsluitend het gevolg is van wandweerstand in een turbulente stroom wijkt u in het grootste deel van de doorgang relatief weinig van U af, en is β slechts weinig groter dan één (zie bv. Tabel 12.1); in die gevallen wordt β vaak eenvoudigheidshalve weggelaten (in feite gelijkgesteld aan één). Wij zullen dat in de hierna volgende toepassingen ook doen.

8.3 Energiebalans

We stellen een balans op voor de stromingsenergie in een ruimtelijk vast deel G van een stroombuis tussen twee doorgangen D_1 en D_2 (zie Figuur 8.1). We beschouwen een stationaire situatie. De energievoorraad in G varieert dan niet in de tijd.



Figuur 8.1 Stroombuis met overdracht van massa (volume) en energie (P)

Wanneer er geen toevoer of onttrekking is van energie van buitenaf (zoals in een pomp of turbine), en we de inwendige energieverliezen verwaarlozen (waarover later meer), dan geldt voor de energie een behoudswet in de eenvoudige gedaante (5.3), inhoudende dat de netto

overdracht van energie naar G gelijk moet zijn aan nul. De energie-overdracht naar binnen door de bovenstroomse doorgang D_1 , met de waarde P_1, moet dan gelijk zijn aan de overdracht naar buiten door de benedenstroomse doorgang D_2, met de waarde P_2. (Door de zijdelingse begrenzing vindt geen energie-overdracht plaats, omdat die in elk punt evenredig is aan u_N.) Door elke doorgang van de stroombuis wordt dus evenveel energie overgedragen. Dit houdt in dat

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial(\rho g Q\langle H\rangle)}{\partial s} = 0 \qquad (8.11)$$

Hierin is s een lengte-coördinaat langs de as van de stroombuis.

Vanwege het behoud van volume, en het constant zijn van ρg, geldt $\partial(\rho g Q)/\partial s = 0$. Daarmee volgt uit (8.11) dat

$$\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial s} = 0 \qquad (8.12)$$

ofwel

$\langle H\rangle$ is constant langs een stroombuis (8.13)

Hiermee is een vergelijking verkregen die nauw verwant is aan die van Bernoulli. De hier gebruikte formulering heeft de volgende voordelen ten opzichte van de oorspronkelijke:

- de formulering geldt voor een stroombuis met eindige dwarsdoorsnede, en is daarom meer geschikt voor toepassing op leidingen dan de vergelijking van Bernoulli, die betrekking heeft op een individuele stroomlijn.
- de formulering is in termen van energie-overdracht en kan daarom gebruikt worden in een energiebalans; eventuele toevoegingen (pomp), onttrekkingen (turbine) of inwendige verliezen (turbulentie, viscositeit) van energie kunnen in zo'n balans in rekening worden gebracht, en zo worden vertaald in variaties van de energiehoogte.

Merk op dat (8.12) reduceert tot de vergelijking van Bernoulli in zijn oorspronkelijke vorm wanneer we als balansgebied een stroombuis nemen van infinitesimale dwarsafmetingen. Dan zijn H en u_N in (8.8) namelijk te beschouwen als constanten in elke infinitesimaal kleine doorgang, en geldt in die doorgangen $\langle H\rangle = H$.

8.4 Toepassingen

In de hierna te geven toepassingen op gesloten en open leidingen zal de coëfficiënt β gelijk aan één worden gesteld in elke doorsnede met rechte stroomlijnen. In zulke doorsneden geldt dan bij benadering

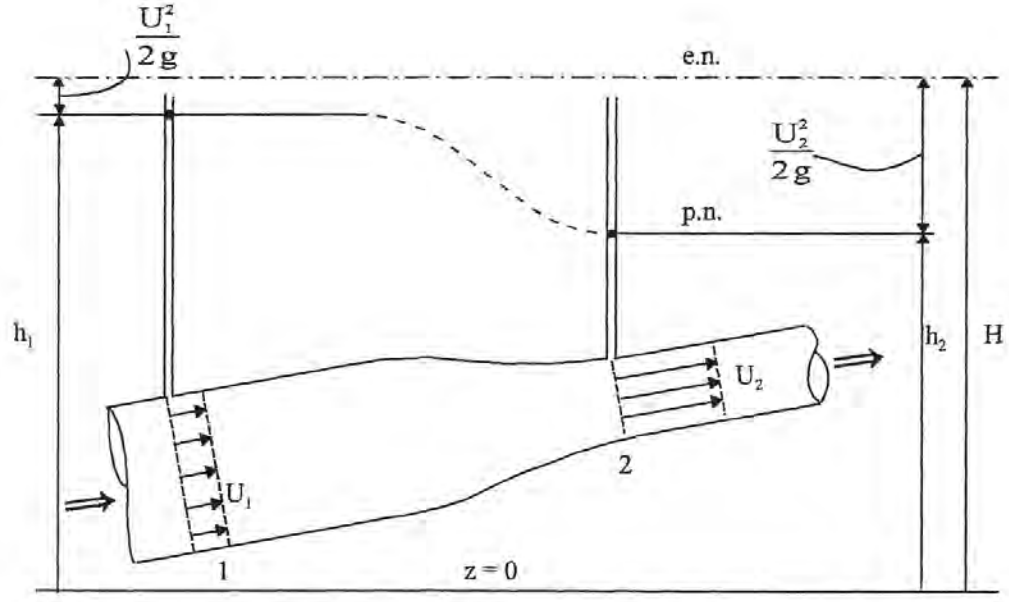
$$<H> = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 \qquad (8.14)$$

Elke grootheid hierin heeft slechts één waarde per doorsnede, hetzij per definitie (A, Q, U, <H>), hetzij als gevolg van de beperking tot rechte stroomlijnen (h).

De over een doorgang gemiddelde energiehoogte <H> wordt ter wille van een eenvoudige notatie in het vervolg met H aangeduid. In alle toepassingen in deze paragraaf wordt de stroming stationair verondersteld.

8.4.1 Vernauwing

Als eerste toepassing behandelen we de stroom door een pijpleiding in de omgeving van een gestroomlijnde vernauwing als verbinding tussen twee buizen van constante maar verschillende diameter (Figuur 8.2).



Figuur 8.2 Gestroomlijnde vernauwing

Voor de hele leiding, ook in de zone van de vernauwing, geldt

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \tag{8.15}$$

Voor elk van de leidinggedeelten met constante diameter geldt bovendien $\partial A/\partial s = 0$, dus $\partial U/\partial s = 0$, en vanwege (8.15) dan ook $\partial h/\partial s = 0$. Elk van deze leidinggedeelten heeft dus een constante snelheidshoogte en (bij verwaarloosde wrijving!) een constant piëzometrisch niveau.

In de vernauwing, waar de snelheid groter wordt, neemt h af, maar op een verschillende manier voor verschillende stroomlijnen omdat deze daar gekromd zijn. Het verloop van h in de vernauwing is in de figuur slechts schetsmatig weergegeven (met een onderbroken lijn).

Gelijkstelling van Q respectievelijk H in de doorsneden 1 en 2, levert

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{ofwel} \quad U_1 A_1 = U_2 A_2 = Q$$

respectievelijk

$$H_1 = H_2 \quad \text{ofwel} \quad h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

zodat

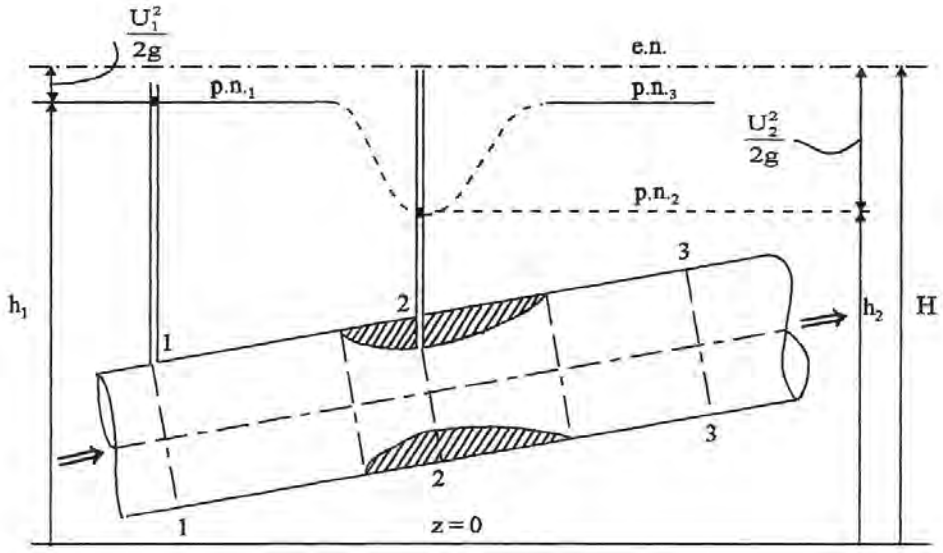
$$h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g}[A_2^{-2} - A_1^{-2}] \tag{8.16}$$

Bij bekende waarden van A_1 en A_2 en een gemeten waarde van het piëzometrisch niveauverschil $(h_1 - h_2)$ kan Q hieruit worden berekend.

Merk op dat de helling van de leiding in bovenstaande uitdrukkingen niet voorkomt. In een gesloten, gevulde leiding hebben variaties in piëzometrisch niveau (bij gegeven debiet) namelijk geen enkele relatie met de hoogteligging van de leiding in het zwaarteveld (in tegenstelling tot variaties in de druk). Dit is bij een stroming met een vrij oppervlak totaal anders, omdat daar het piëzometrisch niveau nauw verband houdt met het niveau van de waterspiegel (en daar in veel gevallen zelfs mee samenvalt).

8.4.2 Venturimeter

In pijpleidingen kan voor het doel van debietmeting een gestroomlijnde lokale vernauwing zijn aangebracht, waarbij het verschil tussen de piëzometrische niveaus in een doorsnede vlak bovenstrooms van de meter en in de nauwste doorsnede (de keel) wordt gemeten (Figuur 8.3). Men noemt dit een **Venturimeter**.



Figuur 8.3 Venturimeter

In de keel zijn de stroomlijnen enigszins gekromd waardoor h afneemt en u toeneemt van de as van de buis naar de wand. De invloed hiervan is te verdisconteren door een z.g. afvoercoëfficiënt (m) op te nemen in de theoretische betrekking (8.16) voor Q die zou gelden voor rechte stroomlijnen:

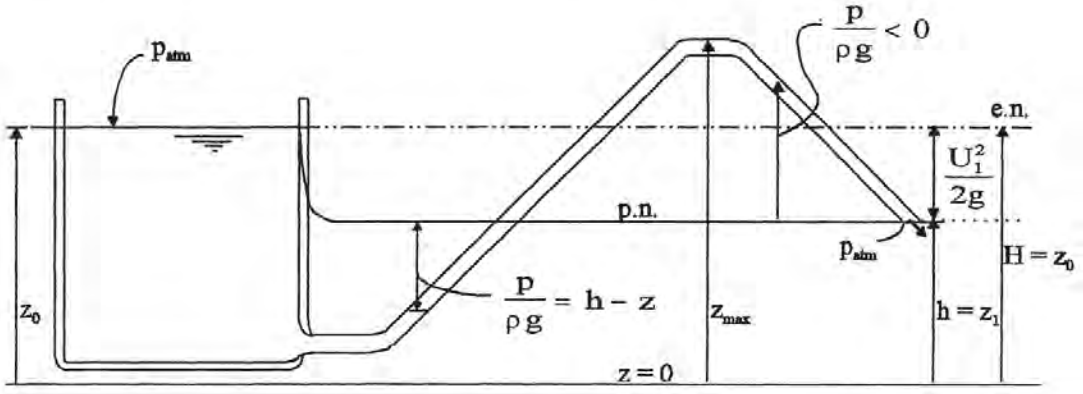
$$Q = m \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{(A_2^{-2} - A_1^{-2})}} \qquad (8.17)$$

De waarde van de coëfficiënt m wordt normaliter empirisch bepaald.

De absolute druk in de keel van de Venturimeter moet groter blijven dan de dampdruk van de vloeistof om de vorming van dampbellen ("cavitatie") te voorkomen.

8.4.3 Hevel

Een hevel is een gesloten leiding waardoorheen onder natuurlijk verval vloeistof kan stromen van een reservoir met een vrije vloeistofspiegel naar een gebied met een lager piëzometrisch niveau, waarbij de leiding plaatselijk boven het niveau van de hooggelegen vloeistofspiegel ligt. Daardoor is de druk in de leiding plaatselijk lager dan de atmosferische druk.



Figuur 8.4 Hevel

De in Figuur 8.4 getekende hevel bestaat uit een buis van constante diameter. Het piëzometrisch niveau in de hevel is daarom constant, afgezien van lokale afwijkingen in de bochtstukken (en, zoals steeds in dit hoofdstuk, afgezien van weerstand). In het voorbeeld vindt aan het einde van de hevel vrije uitstroming plaats in de atmosfeer; het piëzometrisch niveau in de hevel ligt daarom op de hoogte van (het midden van) de uitstroomopening (z_1). De snelheid in de hevel is dan gelijk aan $\sqrt{2g(z_0 - z_1)}$ (Torricelli). De drukhoogte $p/\rho g = h - z$ is negatief (onderdruk t.o.v. p_{atm}) in punten boven het piëzometrisch niveau. De minimumdruk treedt op boven in het hoogste deel van de hevel, waar $z = z_{max}$. De drukhoogte daar is negatief, en gelijk aan $p_{min}/\rho g = h - z_{max}$. Dit is t.o.v. p_{atm}. De absolute minimumdruk is gelijk aan $p_{min} + p_{atm}$; deze moet groter zijn dan de dampdruk om vorming van dampbellen in de vloeistof (z.g. cavitatie) te voorkomen.

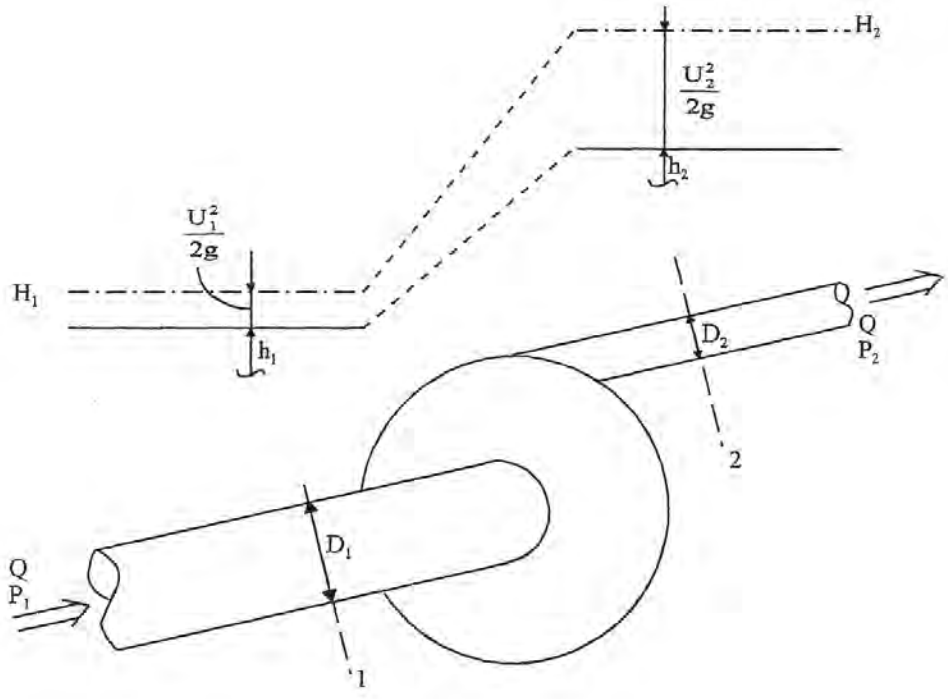
8.4.4 Pomp of turbine

Een pomp in een gesloten leiding voegt een vermogen (P_{pomp}) toe aan de stroming. Dat vermogen is te behandelen als een productieterm in een energiebalans (zie Hoofdstuk 5). De energiebalans voor het leidinggedeelte tussen twee doorsneden 1 en 2 vlak bovenstrooms respectievelijk benedenstrooms van de pomp (Figuur 8.5), waar het doorgevoerde vermogen P_1 respectievelijk P_2 is, luidt

$$P_1 + P_{pomp} = P_2 \tag{8.18}$$

Omdat een pomp in een gesloten leiding geen massa toevoegt of onttrekt aan de stroming (zodat ρQ = constant) geeft de pomp een stijging van het energieniveau gelijk aan

$$H_2 - H_1 = \frac{P_{pomp}}{\rho g Q}$$



Figuur 8.5 Pomp

Hiermee kan eenvoudig de opvoerhoogte van de pomp worden berekend, ook als de diameters aan weerszijden van de pomp verschillen, zoals in Figuur 8.5.

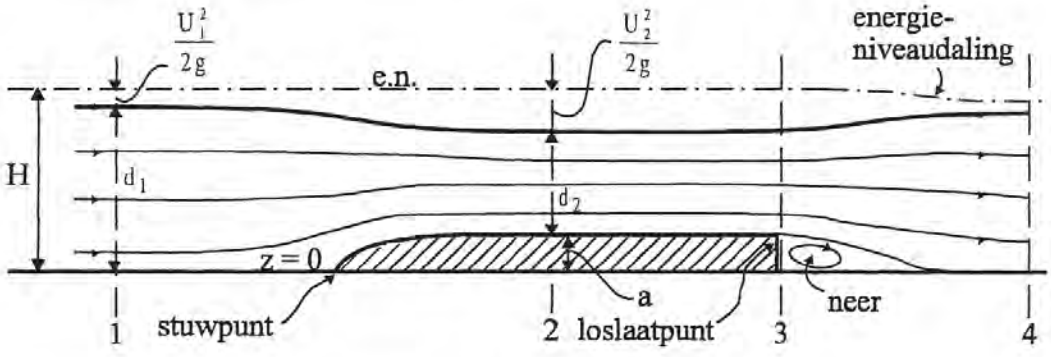
N.B. In het bovenstaande stelt P_{pomp} het vermogen voor dat effectief aan de stroming wordt toegevoegd. Vanwege een totale efficiëntie van motor, overbrenging en pomp kleiner dan 100% is in feite een groter motorvermogen nodig.

In geval van onttrekking van vermogen aan de stroom met een turbine kan de berekening vanzelfsprekend op overeenkomstige manier plaatsvinden als hierboven.

8.4.5 Lange overlaat

Als vijfde toepassing behandelen we de tweedimensionale stroming (d.w.z. geen zijdelingse variaties) in een open leiding (kanaal of rivier) over een lokale verhoging, een z.g. overlaat (Figuur 8.6). De berekening hiervan verloopt in principe analoog aan die voor de stroming door een vernauwing in een gesloten leiding, maar een belangrijk verschil is dat in een gevulde gesloten leiding de geometrie van de doorstroomprofielen vast ligt en het piëzometrisch niveau zich aan profielvariaties aanpast via variaties in de druk, terwijl bij stromen met een vrije vloeistofspiegel de druk aan het oppervlak constant is en het piëzometrisch niveau zich slechts kan aanpassen aan profielvariaties via verhogingen of verlagingen van de vloeistofspiegel. Deze hebben op hun beurt een bijkomende profielvariatie tot gevolg, die niet à priori bekend is.

De hierna te geven berekening van de stroom gaat uit van een z.g. **lange overlaat**, d.i. een overlaat met een vlakke kruin die zo lang is (in de richting van de stroming) dat de stroomlijnen erboven als vrijwel recht kunnen worden beschouwd, en de druk dus als hydrostatisch is te benaderen.



Figuur 8.6 Lange overlaat

Toepassing van de behoudswetten voor volume en energie op het versnellingsgebied tussen de doorsneden 1 en 2, waar de stroomlijnen recht zijn (Figuur 8.6), levert

$$q = U_1 d_1 = U_2 d_2$$

(wegens tweedimensionale stroming) en

$$H = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

De hoogte van de piëzometrische niveaus moet vanzelfsprekend worden gemeten ten opzichte van een horizontaal vergelijkingsvlak. Leggen we dat in de kanaalbodem dan geldt

$$h_1 = d_1 \text{ en } h_2 = a + d_2$$

waarin a de hoogte is van de overlaat boven de bodem (Figuur 8.6).

Bovenstaand stelsel bestaat uit zes vergelijkingen voor negen variabele grootheden (g wordt als een gegeven constante beschouwd). Wanneer drie daarvan bekend zijn (waaronder meestal de hoogte (a) van de overlaat) zijn de overige te berekenen, eventueel iteratief.

Merk op dat het piëzometrisch niveau in de doorsneden 1 en 2 weliswaar in de lokale waterspiegel ligt, maar dat de hoogte ervan boven het (horizontale!) vergelijkingsvlak in het algemeen niet gelijk is aan de plaatselijke diepte. Dit zou alleen kunnen wanneer de bodem overal even hoog ligt.

Bovenstaande vergelijking voor het behoud van volume (q = constant) geldt slechts voor een tweedimensionale stroom. Wanneer er bijv. sprake is van een breedtevariatie, van een waarde B_1 tot een waarde B_2, geldt

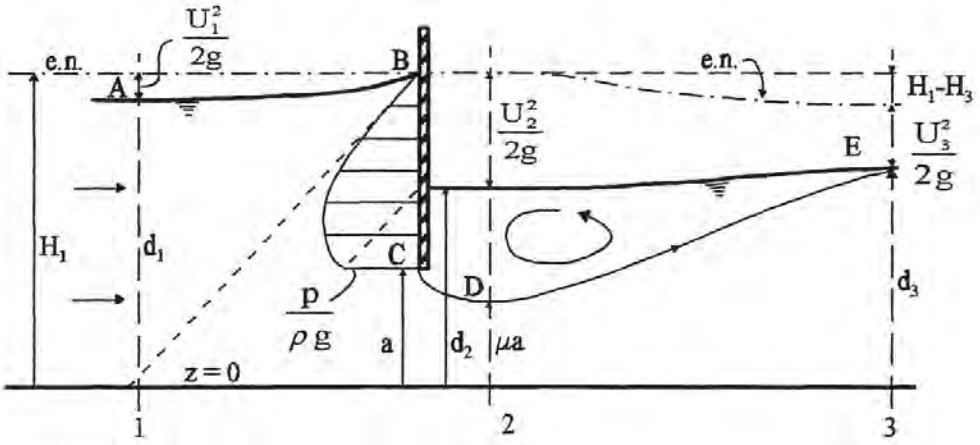
$$Q = U_1 d_1 B_1 = U_2 d_2 B_2$$

De gegeven betrekkingen voor H en h blijven daarbij onverminderd van kracht.

De berekening van de stroming in het vertragingsgebied (3→4) komt in het volgende hoofdstuk aan de orde.

8.4.6 Schuif

Als laatste toepassing van de energiebalans voor een leiding berekenen we het debiet door een opening onder een vertikale schuif boven een horizontale bodem, bij gegeven waterdiepten aan weerszijden (Figuur 8.7). De stroming wordt tweedimensionaal verondersteld.



Figuur 8.7 Schuif

Ten gevolge van de neerwaartse stroming langs de schuif vindt voorbij het punt waar de stroom loslaat van de schuif (C) contractie plaats tot aan een punt (D) waar de stroomrichting weer horizontaal is. De gegeven waterstand onmiddellijk benedenstrooms van de schuif ligt hoger dan dit punt, waardoor voorbij punt D (doorsnede 2) de hoofdstroom vertraagt, en zich boven de stroomlijn CDE een z.g. dekneer vormt, waarin het water relatief langzaam en sterk wervelend rondgaand beweegt. Omdat deze bewegingen relatief langzaam zijn kunnen we voor het effect van de neer op de hoofdstroom doen alsof de drukverdeling in de neer hydrostatisch is. Volgens deze benadering ligt het piëzometrisch niveau van de punten van de stroomlijn CDE in de waterspiegel erboven.

De hoofdstroom versnelt tot aan de doorgang 2, waar de doorstroomoppervlakte minimaal is (de "vena contracta"). In het korte versnellingsgebied tussen de doorgangen 1 en 2 zijn de energieverliezen verwaarloosbaar, en kunnen we H constant stellen. Met verwaarlozing van de invloed van de kromming van de stroomlijnen in de vena contracta resulteert dit in

$$H = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

Uit het behoud van volume volgt

$$q = U_1 d_1 = U_2 \mu a$$

Kiezen we $z = 0$ in de (horizontale) bodem dan geldt bovendien

$$h_1 = d_1 \text{ en } h_2 = d_2$$

(maar niet $h_2 = \mu a$!). Hiermee is een stelsel van zes vergelijkingen verkregen waaruit (bijv.) bij gegeven waarden van g, a, μ, d_1 en d_2 de zes grootheden h_1, h_2, q, U_1, U_2 en H zijn te berekenen.

Zoals gezegd is de druk in de neer aan de benedenstroomse zijde van de schuif vrijwel hydrostatisch. De drukhoogte in punt C, aan de onderkant van de schuif, is dus vrijwel gelijk aan de hoogte van de neer tegen de schuif, ofwel $p_C/\rho g = d_2 - a$. Als we de dwarsafmeting van de schuif verwaarlozen moet de drukhoogte aan bovenstroomse zijde in punt C dezelfde waarde bereiken.

De vertikale verdeling van de drukhoogte aan de bovenstroomse zijde is geschetst in Figuur 8.7. In het bovenste punt, B, is $p = 0$ en dus $h = z$ (zoals in alle punten aan het vrije oppervlak). Ook is de stroomlijn daar geknikt en dus de snelheid nul. Punt B is dus een stuwpunt, waar $H = h$ en dus ook $z = H$. In de omgeving van het stuwpunt B zijn de snelheden laag, de (vertikale) versnellingen onbetekenend en de drukverdeling dus vrijwel hydrostatisch (zie het bovenste deel van de de getrokken lijn in Figuur 8.7) Verder naar beneden wijkt de drukverdeling meer en meer af van de hydrostatische, tot aan de waarde $p/\rho g = d_2 - a$ in punt C.

Het getekende verloop van de drukhoogte aan bovenstroomse zijde, tussen de gegeven raaklijn in B en de gegeven waarde in C, is slechts een schets. Het is mogelijk deze drukverdeling te berekenen, maar dat vereist meer geavanceerde methoden dan hier worden behandeld (zie het vervolgvak Stroming in waterlopen, CT3310).

De totale kracht die het water op de schuif uitoefent is veel eenvoudiger te berekenen, nl. door het opstellen van een impulsbalans voor het gebied tussen doorsneden 1 en 2. Verder is uit de volumebalans en de impulsbalans voor het vertragingsgebied tussen doorsneden 2 en 3 de diepte in doorsnede 3 te berekenen. Hoe dit kan gebeuren wordt in het volgende hoofdstuk behandeld.

9 IMPULSBALANS VOOR EEN STROOMBUIS

In dit hoofdstuk wordt de impulsbalans behandeld voor een ruimtelijk **vast gebied** (**Euler-balans**) van **eindige afmetingen** (in tegenstelling tot Hoofdstuk 6, waarin het ging om de impulsbalans van een infinitesimaal waterdeeltje dat in zijn beweging werd gevolgd). We beperken ons daarbij tot **stationaire stromen**, en nemen als balansgebied G een deel van een stroombuis tussen twee doorgangen (zie Figuur 5.1 of 8.1). De impulsvoorraad in dit ruimtelijk vaste gebied varieert niet in de tijd; de balans reduceert tot de uitspraak dat de netto overdracht van impuls naar G nul is (zie vergelijking 5.3).

9.1 Impulsoverdracht

De overdracht van impuls naar het gebied G bestaat uit een bijdrage van het gewicht ($\vec{F}_g$), een bijdrage van de druk (schuifspanningen blijven hier buiten beschouwing) en een bijdrage van de meevoering. De druk draagt bij aan de impulsoverdracht zowel via de doorgangen als via het zijdelingse oppervlak van de stroombuis. (Let hier op het verschil met de energie-overdracht, waarbij het vermogen geleverd door de drukkrachten, evenredig aan pu_N, nul is in de zijdelingse begrenzing van de stroombuis, die immers uit stroomlijnen bestaat, zodat daar $u_N = 0$.) De meevoering vindt uiteraard alleen plaats via de doorgangen.

In toepassingen is het handig de totale bijdragen door de doorgangen en die via het zijdelingse oppervlak apart te beschouwen (zie Figuur 9.1).

De totale (druk)kracht die via het zijdelingse oppervlak wordt uitgeoefend op de materie in G noemen we $\vec{R}$.

De totale overdracht van impuls naar G via een doorgang noemen we $\vec{F}$, waarbij $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_{mv}$.

Drukkracht

Voor de formulering van de drukkracht die de aangrenzende materie uitoefent op de materie in G (via het zijdelingse oppervlak of via een doorgang) voeren we in elk punt van de begrenzing van G een naar binnen gerichte eenheidsnormaalvector $\vec{e}_N$ in. De drukkracht op de materie in G, uitgeoefend in een infinitesimaal deel van de begrenzing met oppervlakte ΔA, is dan

$$\Delta\vec{F}_p = p\vec{e}_N \Delta A$$

Het totaal hiervan over een eindig deel van het oppervlak dat het gebied G insluit is

$$\vec{F}_p = \iint p\vec{e}_N dA \tag{9.1}$$

De integratie hierin strekt zich uit over het beschouwde deel van het begrenzend oppervlak van G. Wanneer we daarvoor het gehele zijdelingse oppervlak nemen noemen we het resultaat $\vec{R}$.

Meevoering

De naar binnen gerichte volumestroom door een infinitesimaal vlakje is $u_N \Delta A$. De impuls per eenheid van volume is $\rho\vec{u}$, zodat de impuls die per tijdseenheid naar G wordt meegevoerd door dit vlakje heen gelijk is aan $\Delta\vec{F}_{mv} = (\rho\vec{u})u_N \Delta A$ (zie ook par. 4.2).

In een **dwars**doorgang geldt $\vec{u} = u_N\vec{e}_N$, waarbij u_N positief kan zijn (stroming naar binnen) of negatief (stroming naar buiten). De absolute grootte van u_N in een dwarsdoorgang is gelijk aan die van $\vec{u}$ zelf: $|u_N| = |\vec{u}| = u$. Hiermee geldt

$$\Delta\vec{F}_{mv} = (\rho\vec{u})u_N \Delta A = \rho u_N^2 \vec{e}_N \Delta A = \rho u^2 \vec{e}_N \Delta A$$

ofwel

$$\vec{F}_{mv} = \iint \rho u^2 \vec{e}_N dA \tag{9.2}$$

We zien dat $\vec{F}_{mv}$ in een dwarsdoorgang altijd naar binnen is gericht, ongeacht het teken van u_N (dus ongeacht of de snelheid naar binnen is gericht of naar buiten). **De meevoering van impuls door een dwarsdoorgang heeft dus dezelfde werking als een drukwisselwerking.**

De totale impulsoverdracht p.e.v. tijd door een dwarsdoorgang is

$$\boxed{\vec{F} = \iint (p + \rho u^2)\vec{e}_N dA} \tag{9.3}$$

De integratie hierin strekt zich uit over het doorstroomde oppervlak van een enkele doorgang. Ook in (9.3) zien we dat de meevoering van impuls door een dwarsdoorgang equivalent is aan een verhoging van de druk, ongeacht of de snelheid naar binnen of naar buiten is gericht.

In toepassingen kiezen we de dwarsdoorgangen bij voorkeur daar waar de stroomlijnen recht zijn (dynamische druk c.q. piëzometrisch niveau constant) en evenwijdig ($\vec{e}_N$ = constant). In

dit geval kan de meevoering van impuls door een hele doorgang uitgedrukt worden in de over de doorgang gemiddelde snelheid (U) (zie Hoofdstuk 4):

$$\vec{F}_{mv} = \iint \rho u^2 \vec{e}_N dA = \rho \vec{e}_N \iint u^2 dA = \alpha \rho U^2 A \vec{e}_N \qquad (9.4)$$

In wezen staat hier de definitie van de in Hoofdstuk 4 ingevoerde factor α.

Met gebruikmaking van (9.4) geldt voor de grootte van de *totale impulsoverdracht door een dwarsdoorgang met evenwijdige stroomlijnen*:

$$F = \iint (p + \rho u^2) dA = \iint p\, dA + \alpha \rho U^2 A$$

ofwel

$$F = \iint p\, dA + \alpha \rho Q U$$

In een horizontale stroming met een vrij oppervlak en diepte d, en een hydrostatische druk variërend van p = 0 aan het oppervlak tot p = ρgd aan de bodem, is de waarde van F p.e.v. breedte:

$$F = \tfrac{1}{2}\rho g d^2 + \alpha \rho U^2 d \qquad (9.5)$$

ofwel

$$F = \tfrac{1}{2}\rho g d^2 + \alpha \rho q U = \tfrac{1}{2}\rho g d^2 + \alpha \rho q^2 / d \qquad (9.6)$$

N.B. In deze stroming met een vrij oppervlak dragen meevoering en druk bij aan de impulsoverdracht in de verhouding (gemakshalve α = 1 stellend)

$$\frac{\rho U^2 d}{\tfrac{1}{2}\rho g d^2} = 2 Fr^2$$

Hier zien we een specifieke betekenis van het kental van Froude, waarvan het belang meer in het algemeen al in Hoofdstuk 2 en Hoofdstuk 6 was aangegeven. In het algemeen geldt voor vrije-oppervlaktestromen: hoe groter Fr, hoe dynamischer de stroming.

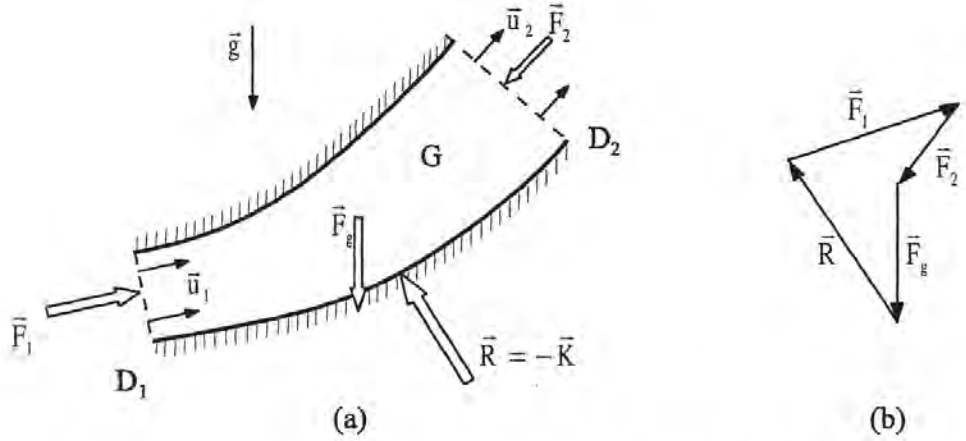
9.2 Impulsbalans

Omdat de stroming stationair is verondersteld verandert de impulsvoorraad in G niet met de tijd en is de netto overdracht van impuls naar G gelijk aan nul:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = 0 \tag{9.7}$$

(zie Figuur 9.1). Voor de kracht $\vec{K}$ die de vloeistof in G op de zijdelingse begrenzing (b.v. een buiswand) uitoefent ($\vec{K} = -\vec{R}$) geldt dan

$$\vec{K} = \vec{F}_g + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{9.8}$$



Figuur 9.1 Stroombuis met balansgebied tussen D_1 en D_2

In de volgende twee paragrafen worden enkele toepassingen gegeven van het voorgaande. De toepassingen en de manier van behandeling ervan zijn zo gekozen dat zij niet alleen illustraties geven van de theorie maar ook aanvullingen daarop.

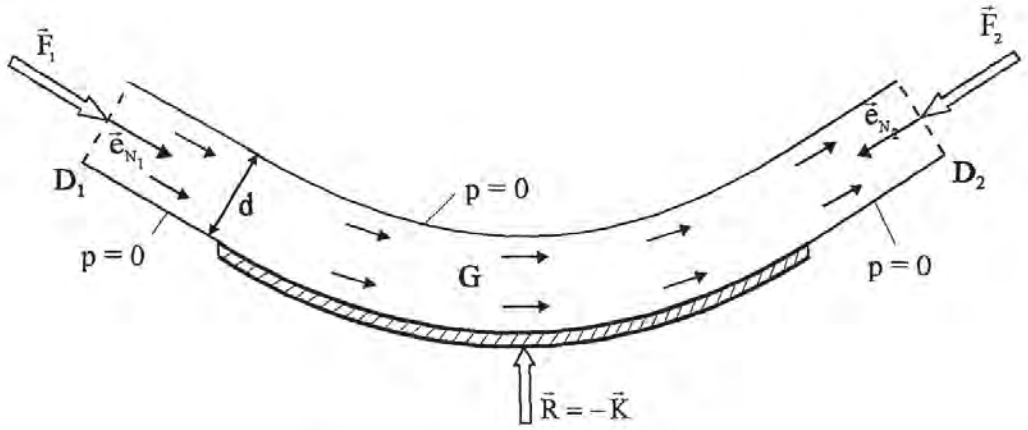
Het gaat in alle gevallen vooral om een correcte opstelling van de verschillende balansen, en niet om de algebraïsche uitwerking (hoewel die volledigheidshalve en voor het gebruiksresultaat wel wordt gegeven waar dat mogelijk is).

In de hier te geven toepassingen gaat het om snel veranderende stromen waarvoor de lokale wandwrijving mag worden verwaarloosd.

9.3 Vloeistofstralen

9.3.1 Straal tegen schoep

Een vrije vloeistofstraal met gegeven dikte d_1 en snelheid U_1 wordt door een stilstaande schoep van richting veranderd (Figuur 9.2). De beweging mag als tweedimensionaal in het horizontale vlak worden beschouwd. Gevraagd: de kracht $\vec{K}$ door de straal op de schoep uitgeoefend p.e.v. breedte. (De toevoeging "p.e.v. breedte" wordt in het volgende niet steeds herhaald.)



Figuur 9.2 Straal tegen schoep

In de doorgangen 1 en 2 zijn de stroomlijnen recht, zodat h = constant, en horizontaal, zodat z = constant, zodat ook p = constant = p_{atm} = 0. Hieruit volgt $\vec{F}_1 = \rho U_1^2 d_1 \vec{e}_{N_1}$ en idem voor $\vec{F}_2$. De kracht $\vec{K}$ is te bepalen uit een impulsbalans voor het gebied G:

$$\vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

of

$$\vec{K} = \rho U_1^2 d_1 \vec{e}_{N_1} + \rho U_2^2 d_2 \vec{e}_{N_2}$$

Hierin komen naast de gegeven grootheden d_1 en U_1 ook de onbekenden d_2 en U_2 voor. Er zijn dus twee aanvullende vergelijkingen nodig. Die baseren we op het behoud van volume en het behoud van energie (daarin komt $\vec{K}$ overigens niet voor want $\vec{K}$ verricht geen arbeid in geval van een stilstaande, wrijvingsloze schoep).

Uit het behoud van energie (Bernoulli met p = 0 en z = constant) volgt $U_1 = U_2$ (= U).

Uit het behoud van volume (q = constant) volgt dan $d_1 = d_2$ (= d).

Met bovenstaande resultaten voor snelheid en laagdikte wordt $\vec{K}$:

$$\vec{K} = \rho U^2 d(\vec{e}_{N_1} + \vec{e}_{N_2}) = \rho q U(\vec{e}_{N_1} + \vec{e}_{N_2})$$

N.B. In een vrije straal in het zwaarteveld kan de beweging eigenlijk niet geheel in het horizontale vlak liggen. Bij voldoend snelle veranderingen is de zwaartekracht echter te verwaarlozen, nl. wanneer

$$Fr^2 = \frac{U^2}{gR} >> 1$$

waarin R de straal van de schoep is. Wanneer $Fr^2 >> 1$ is de lokale invloed van de zwaarte te verwaarlozen en doet de oriëntatie van de stroming t.o.v. het zwaarteveld er niet meer toe.

9.3.2 Straal tegen vlakke wand

Een vrije vloeistofstraal met gegeven dikte d_1 en snelheid u_1 stroomt tegen een vlakke wand, onder een hoek θ met de normaal (Figuur 9.3). De beweging mag als tweedimensionaal in het horizontale vlak worden beschouwd.

Gevraagd: de kracht $\vec{K}$ door de straal op de wand uitgeoefend (p.e.v. breedte), en de laagdikten d_2 en d_3.

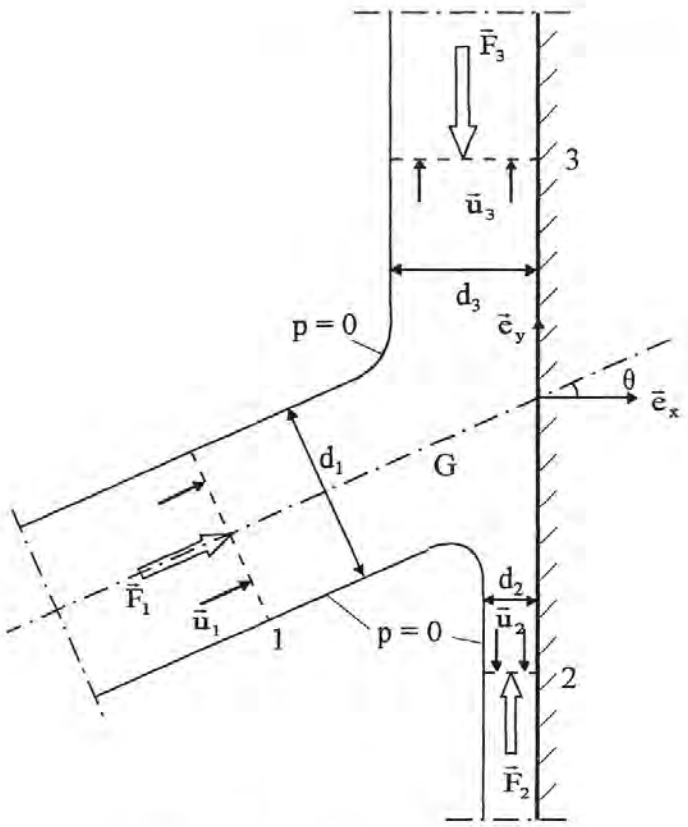
Evenals in het voorgaande voorbeeld is p = 0 in de doorgangen met rechte stroomlijnen (hier 1, 2 en 3) zodat $\vec{F}$ in die doorgangen slechts uit meevoering van impuls bestaat. Evenzo geldt hier $U_1 = U_2 = U_3$ (= U) wegens behoud van energie (Bernoulli met p = 0 en z = constant).

Wegens behoud van volume geldt hier

$$q = U_1 d_1 = U_2 d_2 + U_3 d_3$$

zodat

$$d_1 = d_2 + d_3$$



Figuur 9.3 Straal tegen vlakke wand

De kracht $\vec{K}$ volgt uit de impulsbalans

$$\vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Aan de component haaks op de wand (richting $\vec{e}_x$) dragen $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ niet bij zodat

$$K_x = F_{1_x} = \rho U_{1_x} U_1 d_1 = \rho(U_1 \cos\theta) U_1 d_1 = \rho U_1^2 d_1 \cos\theta = F_1 \cos\theta$$

(N.B.: niet $\rho U_{1_x}^2 d_1$!). Voor de component evenwijdig aan de wand (richting $\vec{e}_y$) volgt uit de impulsbalans

$$K_y = \Sigma F_y = F_1 \sin\theta + F_2 - F_3 = \rho U_1^2 d_1 \sin\theta + \rho U_2^2 d_2 - \rho U_3^2 d_3$$

Wegens verwaarlozing van de wandwrijving moet $K_y = 0$ zijn. Omdat $U_1 = U_2 = U_3$ (zie boven) voldoen de straaldikten dus aan

$$d_1 \sin\theta + d_2 - d_3 = 0$$

Samen met $d_1 = d_2 + d_3$ volgt hieruit

$$d_2 = \frac{1}{2} d_1 (1 - \sin\theta)$$

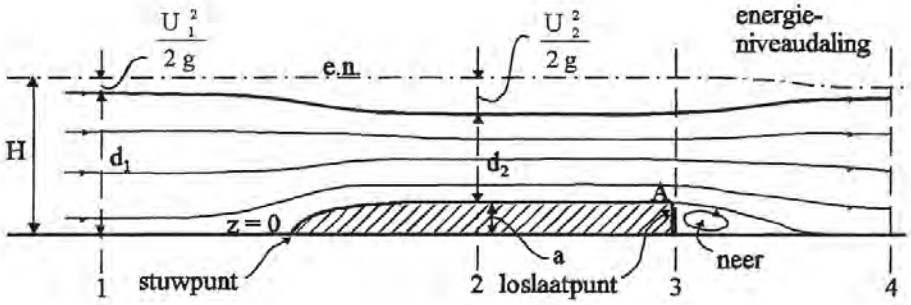
$$d_3 = \frac{1}{2} d_1 (1 + \sin\theta)$$

Omdat $K_y = 0$ is de totale kracht gegeven door

$$\vec{K} = K_x \vec{e}_x = (\rho U_1^2 d_1 \cos\theta)\vec{e}_x$$

9.4 Stroom over lange overlaat

We bekijken opnieuw de stroming over een lange overlaat, zoals behandeld in voorbeeld 5 van par. 8.4. Voor de duidelijkheid wordt Figuur 8.6 hier gereproduceerd (Figuur 9.4).



Figuur 9.4 Lange overlaat

In par. 8.4 werden betrekkingen afgeleid tussen (d_1, U_1) enerzijds en (d_2, U_2) anderzijds (bij gegeven drempelhoogte a). Deze waren gebaseerd op het behoud van volume en van energie in het versnellingsgebied (G_{1_2}). Door vervolgens de bekende waarden van diepte en snelheid in de doorgangen 1 en 2 te gebruiken in een impulsbalans voor hetzelfde gebied kan de horizontale kracht worden berekend die het water op de voorkant van de overlaat uitoefent (K_{1_2}):

$$K_{1-2} = F_1 - F_2$$

ofwel (zie ook (9.5)):

$$K_{1-2} = (\tfrac{1}{2}\rho g d_1^2 + \rho U_1^2 d_1) - (\tfrac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho U_2^2 d_2)$$

In het vertragingsgebied G_{3_4} benedenstrooms van de overlaat treden z.g. vertragings-energieverliezen op; in dat gebied kunnen we daarom niet van behoud van energie uitgaan voor berekening van de benedenstroomse diepte en snelheid. In dit geval biedt de impulsbalans daarvoor een mogelijkheid. Dankzij de rechte stroomlijnen boven de overlaat en de neer met lage snelheden er achter kunnen we namelijk de druk in de hele doorsnede 3 hydrostatisch veronderstellen, zodat we de drukkracht in die doorsnede kennen (inclusief die aan de achterkant van de overlaat). De waarde daarvan p.e.v. breedte is $\frac{1}{2}\rho g(a+d_2)^2$.

De meevoering van impuls door doorsnede 3 vindt slechts plaats in het gedeelte boven punt A, met de waarde $\rho U_2^2 d_2$. Daarmee wordt de impulsbalans voor gebied G_{3_4}:

$$\tfrac{1}{2}\rho g(a+d_2)^2 + \rho U_2^2 d_2 = \tfrac{1}{2}\rho g d_4^2 + \rho U_4^2 d_4$$

Uit het behoud van volume volgt

$$U_2 d_2 = U_4 d_4$$

Bij gegeven waarden van U_2 en d_2 (naast a, ρ en g) zijn d_4 en U_4 uit deze twee vergelijkingen te berekenen.

Nu in doorsnede 4 de diepte en de stroomsnelheid bekend zijn, en dus ook H_4, kunnen we door toepassing van de energiebalans het vermogen ΔP_v berekenen dat in het vertragingsgebied wordt gedissipeerd (d.w.z. verloren gaat voor de hoofdstroom):

$$\Delta P_v = P_3 - P_4$$

ofwel

$$\Delta P_v = \rho g Q(H_3 - H_4)$$

waarbij $H_3 = H_2 = H_1$. Het energieverlies in het vertragingsgebied is een gevolg van een niet-volledige omzetting van kinetische energie in potentiële energie; een deel van de kinetische energie van de aankomende stroom wordt bij vertraging omgezet in energie van wervelende, turbulente fluctuaties en uiteindelijk in warmte (via de viscositeit). Deze omzetting is niet omkeerbaar en is daarom voor de mechanische energie van de doorgaande stroom een verliespost.

We zien in dit voorbeeld dat in een sterk vertragende stroom de wandwrijving weliswaar verwaarloosbaar kan zijn als bijdrage in de impulsbalans, maar dat er desondanks wel een significant (inwendig) energieverlies kan optreden, dat in de energiebalans in rekening moet worden gebracht. (Zie impulsbalans en energiebalans voor een stelsel van deeltjes met niet-conservatieve wisselwerkingen, behandeld in het vak Dynamica I, CT1021, zoals een "wolk" van botsende kleideeltjes.)

Merk op dat voor beide gebruikte balansgebieden (van 1 naar 2 en van 3 naar 4) behalve de volumebalans zowel de balans van impuls als die van energie wordt gebruikt. Het verband is als volgt.

In G_{1_2} zijn de drukken op de overlaat niet bekend. De daaruit resulterende drukkracht verricht echter geen arbeid op de stroming ($p\vec{e}_N$ haaks op $\vec{u}$); deze komt dus niet voor in de energiebalans, die we daarom eerst toepassen om - met behoud van energie - de grootheden in doorsnede 2 te berekenen uit de gegeven grootheden bovenstrooms. De daarna resterende onbekende kracht is vervolgens uit de impulsbalans voor G_{1_2} te bepalen.

In G_{3_4} is ΔP_v niet a priori bekend, maar er is wel een goede benadering te geven voor de drukken tegen de overlaat. Ondanks het inwendige energieverlies blijft de impuls van de stroom in G_{3_4} behouden (bij verwaarloosde wandwrijving). Daaruit kunnen de grootheden benedenstrooms worden bepaald, waarna de dan resterende onbekende ΔP_v uit de energiebalans is te berekenen.

Het is belangrijk bovenomschreven systematiek goed te begrijpen, te kennen en te kunnen toepassen.

N.B. De totale horizontale kracht (K) op de overlaat kan worden bepaald als de resultante van de inmiddels bekende krachten op de bovenstroomse respectievelijk de benedenstroomse zijde; vanzelfsprekend wordt hetzelfde resultaat verkregen door toepassing van de impulsbalans op het gebied G_{1_4}:

$$K = F_1 - F_4$$

Voor de energiedissipatie in het vertragingsgebied geldt evenzo

$$\Delta P_v = P_1 - P_4$$

9.5 Stromen in gesloten leidingen

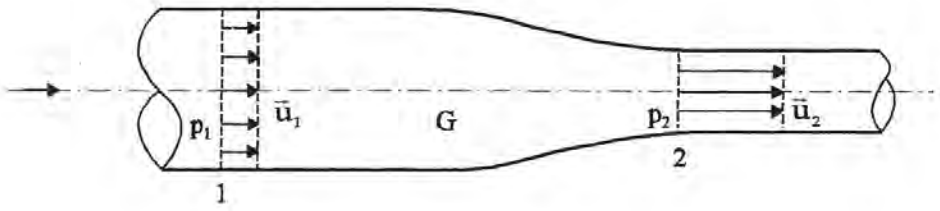
Bij stroming in een gevulde, starre, gesloten leiding is het doorstroomprofiel onafhankelijk van de stroomsnelheid, en past de druk zich aan profielvariaties aan (in tegenstelling tot stromen met een vrij oppervlak). Wanneer bovendien de vloeistof als niet-samendrukbaar kan worden beschouwd is de waarde van de massa in de leiding niet afhankelijk van de stroomsnelheid. De zwaartekracht op deze massa, en het daarmee overeenkomende, hydrostatische deel van de druk, kunnen dus worden bepaald alsof de vloeistof in rust en in evenwicht is (hydrostatica). In de aanpak van de dynamica van de stroming kunnen zij vervolgens gezamenlijk buiten beschouwing blijven (alsof g = 0). In dat geval geldt in plaats van (9.7):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_d = 0$$

Hierin stelt $\vec{R}_d$ de bijdrage aan $\vec{R}$ voor, geleverd door het dynamische (stromingsafhankelijke) deel van de druk. In de volgende toepassingen wordt deze formulering steeds gebruikt. De dynamische druk zal kortheidshalve echter met p worden weergegeven.

9.5.1 Vernauwing

Een gestroomlijnd verloopstuk in een leiding verbindt twee buizen (Figuur 9.5) waarvan de dwarsprofielen een oppervlakte hebben van A_1 respectievelijk A_2 ($A_1 > A_2$). De leiding is gevuld met vloeistof die stroomt in de richting van 1 naar 2. De druk bovenstrooms en benedenstrooms van het verloopstuk is p_1 respectievelijk p_2. Gevraagd: het debiet (Q) en de kracht ($\vec{K}$) die door de vloeistof op het verloopstuk wordt uitgeoefend.



Figuur 9.5 Gestroomlijnde vernauwing

Balansgebied: leidinggedeelte tussen dwarsdoorgangen 1 en 2.

Behoud van volume:

$$Q_1 = Q_2 \ (= Q) \quad \text{ofwel} \quad U_1 A_1 = U_2 A_2 = Q$$

Behoud van energie (Bernoulli met $p = p_d$):

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho U_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho U_2^2$$

Hieruit volgt

$$Q^2 = 2\frac{p_1 - p_2}{\rho}[A_2^{-2} - A_1^{-2}]^{-1}$$

Door bij gegeven waarden van ρ, A_1 en A_2 het drukverschil te meten kan Q hieruit worden bepaald (zie vb. 1 par. 8.4).

Behoud van impuls:

$$\vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ zijn axiaal gericht en $\vec{K}$ dus ook; de waarde ervan is

$$K = F_1 - F_2 = (p_1 + \rho U_1^2)A_1 - (p_2 + \rho U_2^2)A_2$$

Dit is te schrijven in termen van Q als

$$K = p_1A_1 - p_2A_2 + \rho Q^2(A_1^{-1} - A_2^{-1})$$

Eliminatie van Q geeft na enig herleiden

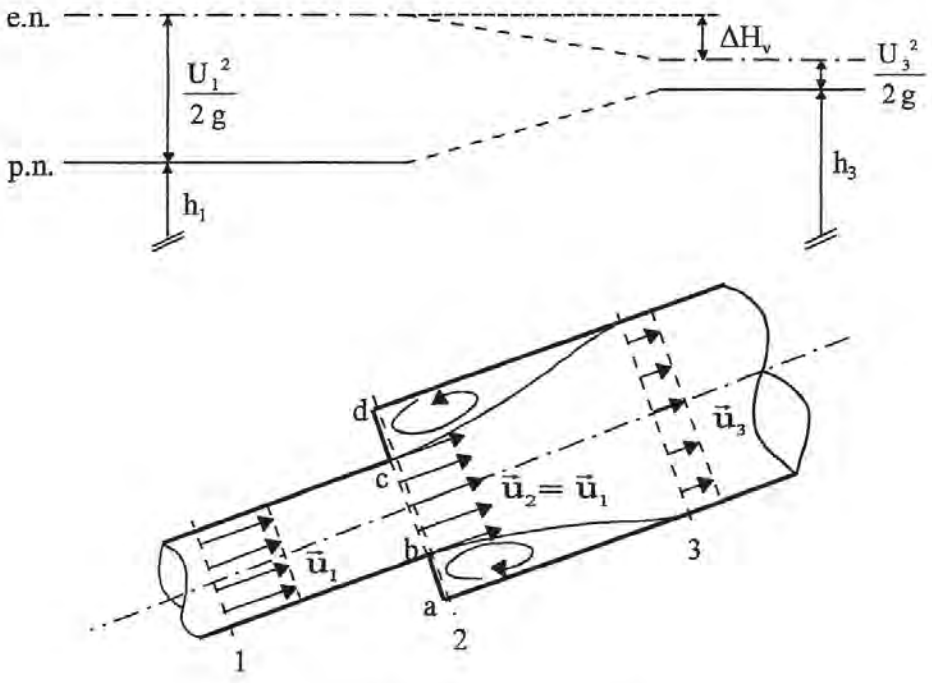
$$K = (p_1A_1 + p_2A_2)\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

9.5.2 Abrupte verwijding

We behandelen nu het geval van een abrupte verwijding, waarbij twee buizen van verschillende diameter met een platte flens aan elkaar zijn verbonden (Figuur 9.6). De druk en de gemiddelde snelheid in de buis met de kleinste diameter zijn gegeven (p_1 respectievelijk U_1). De waarden daarvan benedenstrooms van de verwijding moeten worden berekend, evenals het verlies van energie in het vertragingsgebied.

Vanwege de abrupte verwijding laat de stroom los van de wand en vormt zich een (ringvormige) neer in de zône pal benedenstrooms van de flens (Figuur 9.6). De doorgaande stroom verwijdt geleidelijk tot het volle beschikbare profiel.

We onderscheiden drie dwarsdoorsneden 1, 2 en 3: bovenstrooms van de flens (1), pal benedenstrooms van de flens (2) en verder benedenstrooms, zodanig dat daar de stroom weer nagenoeg uniform is in het dwarsprofiel (3). We stellen balansen op voor het gebied G_{2_3}.



Figuur 9.6 Abrupte verwijding

In de doorsneden 1 en 3 is de stroomsnelheid min of meer uniform, maar in doorsnede 2 is dat slechts het geval voor de kern (bc). De snelheid en de druk in die kern hebben dezelfde waarde als in doorgang 1 ($u_{bc} = U_1$ en $p_{bc} = p_1$). Wanneer we de (dynamische) druk tegen de flens (ab en cd) constant veronderstellen, gezien de relatief lage snelheden in de neer, geldt in de gehele doorsnede 2: $p = \text{constant} = p_2 = p_1$. De totale impulsoverdracht p.e.v. tijd in doorsnede 2 heeft dus de waarde (afgezien van de statische druk)

$$F_2 = \int\int_{A_2} (p + \rho u^2)\, dA = p_2 A_2 + \rho U_1^2 A_1$$

Omdat $p_2 = p_1$ en $A_2 = A_3$ is dit te schrijven in termen van de gegeven grootheden als

$$F_2 = p_1 A_3 + \rho U_1^2 A_1$$

De impulsbalans voor het leidinggedeelte tussen de doorsneden 2 en 3 (met verwaarloosde wandwrijving) luidt $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$, zodat

$$F_2 - F_3 = 0$$

ofwel

$$(p_1A_3 + \rho U_1^2 A_1) - (p_3A_3 + \rho U_3^2 A_3) = 0$$

Uit de volumebalans

$$U_1A_1 = U_3A_3$$

is U_3 bekend, waarna p_3 uit bovenstaande impulsbalans is te berekenen. Voor de drukstijging in het vertragingsgebied volgt dan

$$p_3 - p_1 = \Delta p = \rho(U_1U_3 - U_3^2) = \rho U_3(U_1 - U_3) \tag{9.9}$$

In geval van energiebehoud (Bernoulli) zou deze stijging groter zijn, nl.

$$\Delta p_{Bern} = \tfrac{1}{2}\rho(U_1^2 - U_3^2) = \rho\,\frac{U_1+U_3}{2}\,(U_1-U_3) \tag{9.10}$$

Het tekort aan drukstijging, het z.g. **drukverlies**, is $\Delta p_v = \Delta p_{Bern} - \Delta p$. Substitutie hierin van (9.9) en (9.10) geeft

$$\boxed{\Delta p_v = \tfrac{1}{2}\rho(U_1 - U_3)^2} \tag{9.11}$$

Dit komt overeen met een energieverlies in het vertragingsgebied. De waarde daarvan p.e.v. tijd (het gedissipeerde vermogen) volgt uit de energiebalans

$$P_1 - P_3 = \Delta P_v$$

zodat (zie (8.3))

$$\Delta P_v = [(p_1 + \tfrac{1}{2}\rho U_1^2) - (p_3 + \tfrac{1}{2}\rho U_3^2)]\,Q$$

Substitutie hierin van (9.9) geeft

$$\boxed{\Delta P_v = \tfrac{1}{2}\rho(U_1 - U_3)^2 Q} \tag{9.12}$$

Het energieverlies is in termen van het tekort aan drukstijging te schrijven als

$$\Delta P_v = (\Delta p_v) Q \tag{9.13}$$

Zoals gezegd is de zwaartekracht niet van belang voor de dynamica van de hier beschouwde stroming, omdat deze ingesloten is (geen vrij oppervlak). In bovenstaande formulering is g daarom buiten beschouwing gelaten, en stelt p de dynamische druk voor. Wanneer we dit niet doen veranderen weliswaar de uitdrukkingen voor de druk p (de hydrostatische druk komt er bij) en die voor de energie-overdracht P (de meevoering van zwaarte-energie komt er bij), maar de uitdrukkingen voor de verliezen (Δp_v en ΔP_v) blijven onveranderd.

Ook al is de zwaartekracht niet van belang voor de dynamica van de ingesloten stroming, daarom kunnen we er nog wel gebruik van maken om de optredende variaties in energie-overdracht en druk uit te drukken in niveauverschillen (bijv. voor een meting met stijgbuisjes), nl. via het energieniveau ($H = P/\rho gQ$) en het piëzometrisch niveau ($h = p_d/\rho g$). Zodoende komt met (9.12) een daling van het energieniveau overeen van

$$\boxed{\Delta H_v = \frac{(U_1 - U_3)^2}{2g}} \tag{9.14}$$

(Dit is de z.g. regel van **Carnot**.)

Merk op dat h weliswaar stijgt in het vertragingsgebied, namelijk met de waarde $U_3(U_1-U_3)/g$ (zie (9.9)), maar minder dan zonder verlies. Het verlies is het tekort aan stijging: $\Delta h_v = \Delta H_v$. Het verloop van het energieniveau en van het piëzometrisch niveau is in Figuur 9.6 schetsmatig weergegeven.

Wanneer er sprake is van een abrupte en zeer sterke verwijding is $A_3 >> A_1$ en dus ook $U_3 << U_1$. Dan geldt bij benadering

$$\Delta p_v = \tfrac{1}{2}\rho U_1^2$$

respectievelijk

$$\Delta H_v = \frac{U_1^2}{2g} \tag{9.15}$$

In dit geval gaat vrijwel de gehele kinetische energie van de aankomende stroom verloren. Dit doet zich bijvoorbeeld voor bij uitstroming in een relatief groot reservoir. Het vertragingsverlies dat daarbij optreedt heet het **uittreeverlies**.

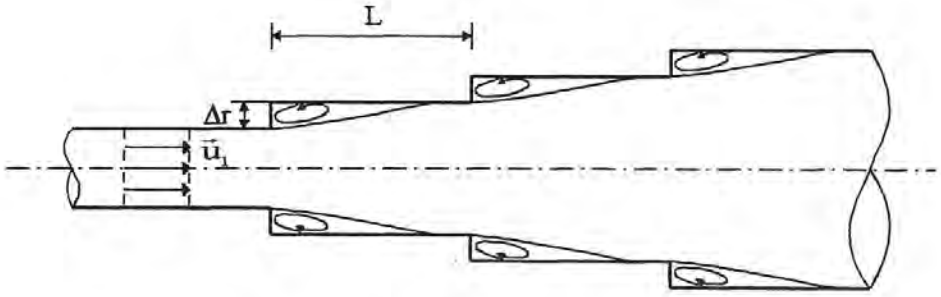
9.5.3 Geleidelijke verwijding

In een geleidelijke verwijding (diffusor) is het totale verlies kleiner dan in een abrupte verwijding. Dit kan plausibel worden gemaakt met de regel van Carnot. We gaan daarbij eerst het geval bekijken van een abrupte maar relatief kleine verwijding, van A_1 tot $A_3 = A_1 (1 + \varepsilon)$, waarbij $\varepsilon << 1$.

Dan geldt bij benadering

$$(U_1 - U_3)^2 = U_1^2[1 - \frac{A_1}{A_3}]^2 = U_1^2[\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}]^2 \approx \varepsilon^2 U_1^2$$

Stel nu dat enkele van zulke relatief kleine verwijdingen op elkaar volgen, zodanig dat een getrapt toenemend doorstroomprofiel ontstaat (Figuur 9.7). De totale relatieve profielvergroting is $\Sigma\varepsilon$. Het totale verlies daarentegen neemt toe in evenredigheid met $\Sigma\varepsilon^2$; dit nadert tot nul als we het aantal trappen vergroten bij gelijkblijvende totale profielvergroting (gelijkblijvende waarde van $\Sigma\varepsilon$).



Figuur 9.7 Geleidelijke verwijding

Een getallenvoorbeeld: het verlies in een abrupte verwijding van A_1 tot $A_3 = 2A_1$ is $1/4\ (U_1^2/2g)$. Bij tussenvoeging van één trap, met bijv. $A_2 = 3/2\ A_1$, is het totale verlies volgens de regel van Carnot te berekenen als

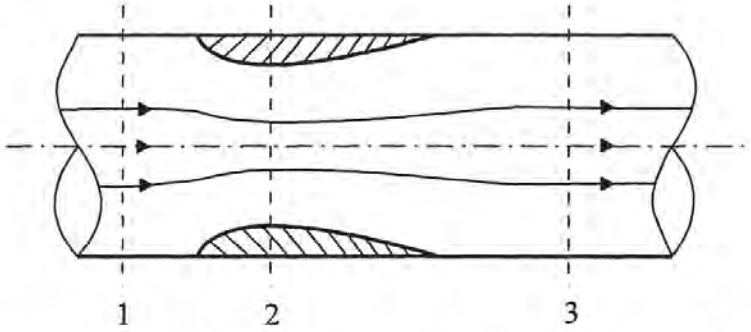
$$\frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + \frac{(U_2 - U_3)^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g}[(1 - \frac{A_1}{A_2})^2 + (\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_1}{A_3})^2]$$

De waarde hiervan is $(5/36)\ (U_1^2/2g)$, ofwel een factor 5/9 kleiner dan zonder tussentrap.

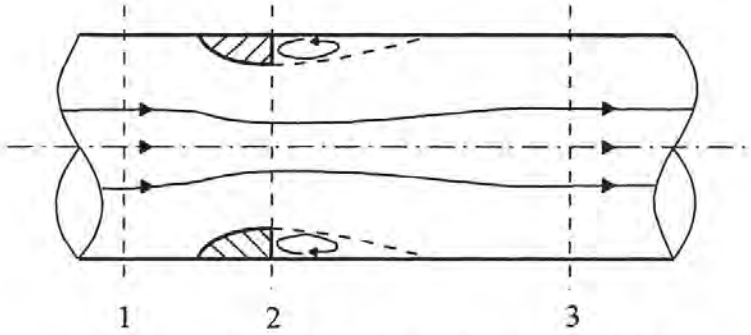
In het bovenstaande is verondersteld dat per trap de regel van Carnot geldt. Daarvoor moet elke trap tenminste zo lang zijn dat de stroom weer vrijwel uniform over het volle beschikbare profiel is verdeeld. De hiervoor benodigde traplengte (L) is ca. 8 x de trap"hoogte" (Δr). De verhouding van 1:8 is tevens (globaal) de maat voor de maximale hoek van divergentie (θ) van een continue, geleidelijke verwijding (als in een z.g. **diffusor**) waarbij de stroomlijnen nog blijven aanliggen (hierin is θ de hoek tussen de zijwand en de as van de leiding). Hierin ligt de betekenis van stroomlijning (geleidelijke verwijding): reductie van het vertragingsverlies, dat daardoor beperkt blijft tot een kleine fractie van het Carnotverlies dat zou gelden bij een abrupte verwijding van begin- naar eindprofiel.

9.5.4 Lokale vernauwing

We behandelen nu de stroming door een lokale vernauwing in een overigens cilindervormige leiding. We beschouwen opnieuw een kort leidinggedeelte waarin de wandschuifspanning te verwaarlozen is. We gaan in op het energieverlies en de weerstand in twee gevallen, een z.g. **Venturimeter** (een vernauwing gevolgd door een diffusor, Figuur 9.8a) en een vernauwing van dezelfde vorm tot aan de keel, gevolgd door een **abrupte verwijding** (Figuur 9.8b). Beide typen vernauwing kunnen worden gebruikt voor debietmeting, gebaseerd op Bernoulli (tot aan de vena contracta).



Figuur 9.8a Meetflens met geleidelijke verwijding (Venturimeter)



Figuur 9.8b Meetflens met abrupte verwijding

We stellen balansen op van volume, energie en impuls voor de leidinggedeelten tussen de doorsneden 1 en 3. Voor beide gevallen schrijven we deze balansen in de vorm

$$Q_1 - Q_3 = 0$$
$$F_1 - F_3 = K$$
$$P_1 - P_3 = \Delta P_v$$

Hierin stelt K de grootte voor van de axiale kracht die de vloeistof op de wand uitoefent tussen de doorsneden 1 en 3 (dus, het totaal over voorzijde en achterzijde van de plaatselijke vernauwing).

Omdat Q = constant en $A_1 = A_3$ (= A) geldt $U_1 = U_3$ (= U). De impulsbalans reduceert dan tot

$$(p_1 - p_3)A = K$$

en de energiebalans tot

$$(p_1 - p_3)Q = \Delta P_v$$

zodat ook geldt

$$\Delta P_v = (K/A)Q = KU$$

In het ideale geval van volledig drukherstel in het vertragingsgebied is $p_3 = p_1$. Dan geldt dus ook $\Delta P_v = 0$ (geen energieverlies) en K = 0 (netto axiale kracht gelijk aan nul). Dit is bij benadering het geval voor de Venturimeter.

In het geval van de abrupte verwijding is het drukherstel niet volledig en is $p_1 - p_3$ gelijk aan het drukverlies Δp_v, te berekenen met Carnot:

$$\Delta p_v = \tfrac{1}{2}\rho(U_2 - U_3)^2$$

Hierin is U_2 de gemiddelde snelheid in de keel. In dit geval zijn ΔP_v en K ongelijk aan nul. De vloeistof oefent dan een netto axiale kracht uit op de vernauwing, en wel een kracht in de richting van de stroming. We kunnen ook zeggen dat de vloeistofstroming een weerstand ondervindt met een grootte (W) gelijk aan K:

$$\boxed{W = (\Delta p_v)A} \qquad (9.16)$$

Merk op dat deze weerstand uitsluitend het gevolg is van een tekort aan drukherstel, en niet van de lokale wandwrijving (a.g.v. schuifspanningen); die was immers verwaarloosd. Voor het gedissipeerde vermogen geldt blijkbaar

$$\Delta P_v = WU \tag{9.17}$$

We kunnen het voorgaande als volgt samenvatten:

- in een sterk vertragende stroom is het drukherstel onvolledig;
- het tekort aan drukherstel komt in de impulsbalans tot uiting als een lokale weerstand die de stroom ondervindt;
- in het vertragingsgebied treden energieverliezen op;
- het vermogen geleverd door de stroom om de weerstand te overwinnen is gelijk aan het energieverlies p.e.v. tijd in de vertraging.

Weerstand die - zoals hierboven - het gevolg is van onvolledig drukherstel aan de lijzijde heet **vormweerstand**. Deze kan door stroomlijning worden gereduceerd. Daarnaast kan in principe ook de schuifspanning een netto sleepkracht of weerstand tussen vloeistof en (vaste) wand veroorzaken; deze bijdrage aan de totale weerstand (hierboven verwaarloosd) heet **huidweerstand**. Die wordt door stroomlijning in het algemeen vergroot, maar is vaak ondergeschikt. In Hoofdstuk 11 gaan we hier uitvoeriger op in.

9.6 Vertragingsverliezen in pijpleidingen

9.6.1 Inleiding

In het voorgaande hebben we gezien hoe energieverlies en stromingsweerstand kunnen ontstaan door abrupte vergroting van het stromingsprofiel. Deze **vertragingsverliezen** uiten zich in een lokale daling van het energieniveau (ΔH_v), die bij benadering evenredig is met het kwadraat van de stroomsnelheid. Soortgelijke effecten doen zich voor bij allerlei abrupte veranderingen in het profiel of de oriëntatie van een pijpleiding. Enkele van die gevallen worden in deze paragraaf behandeld. Elk lokaal vertragingsverlies wordt geschreven in de vorm

$$\Delta H_v = \xi \frac{U^2}{2g} \tag{9.18}$$

De coëfficiënt ξ hierin is in hoofdzaak afhankelijk van de lokale geometrie, maar zal tevens afhangen van de aanstroomcondities en van de waarde van het kental van Reynolds voor de

pijpstroming, Re = UD/ν. Langs empirische weg zijn waarden van ξ bepaald voor een groot aantal praktisch voorkomende geometrieën. Zonder volledigheid te willen nastreven worden enkele resultaten daarvan hier gepresenteerd. Daarbij gaan we er van uit dat de aanstroming eenparig is en dat Re zó groot is dat ξ er niet meer mee varieert.

9.6.2 Abrupte verwijding

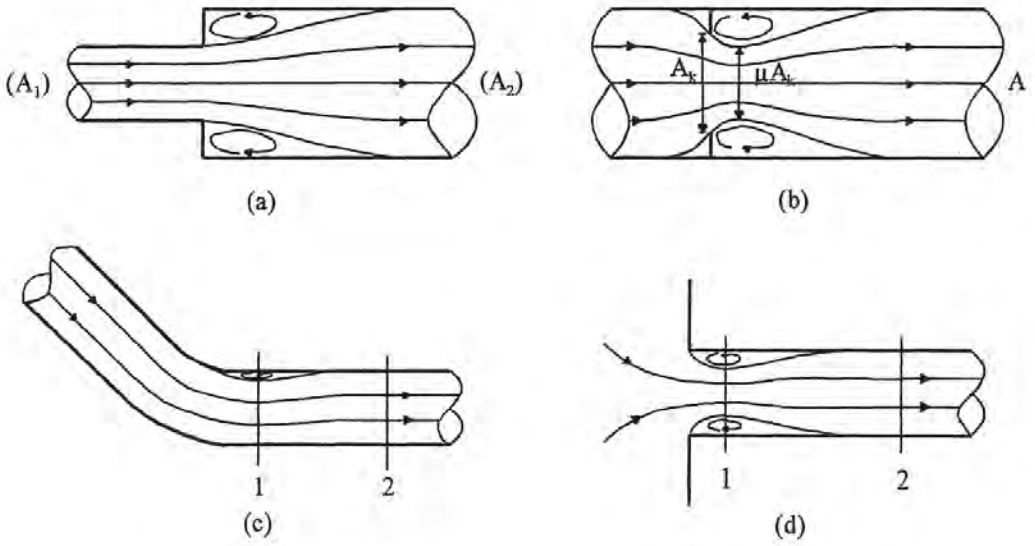
Voor een abrupte verwijding van een gesloten leiding (Figuur 9.9a) is de waarde van ΔH_v gegeven door de regel van **Carnot** (9.14), die we met gebruikmaking van $Q = U_1A_1 = U_2A_2$ als volgt schrijven:

$$\Delta H_v = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{U_1^2}{2g}$$

Hieruit volgt voor ξ:

$$\xi = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Deze uitdrukking voor ξ geldt in combinatie met U_1. (Bij gebruik van U_2 moeten A_1 en A_2 worden verwisseld.)

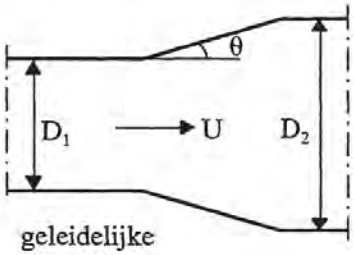


Figuur 9.9 *Stroomvertraging na abrupte vergroting van diameter (a), na contractie achter een flens (b), achter een knik (c) en bij intree (d)*

9.6.3 Geleidelijke verwijding

Empirische waarden van ξ voor een aantal gevallen van geleidelijke verwijding zijn gegeven in Tabel 9.1a, als functie van de diameterverhouding en de hoek van divergentie.

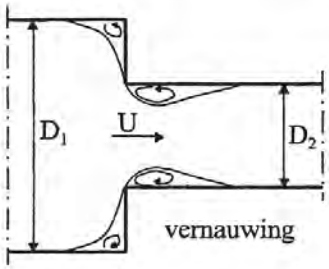
(a)



geleidelijke verwijding

D_2/D_1 \ θ	5°	10°	15°	20°
1,1	0,03	0,10	0,16	0,19
1,5	0,06	0,24	0,39	0,48
1,8	0,07	0,28	0,44	0,54
2,0	0,07	0,29	0,46	0,56
>3	0,08	0,31	0,49	0,60

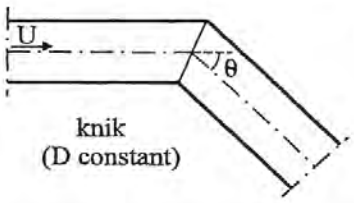
(b)



vernauwing

A_2/A_1	0,01	0,20	0,60	0,80
μ	0,60	0,62	0,70	0,77
ξ	0,49	0,42	0,22	0,13

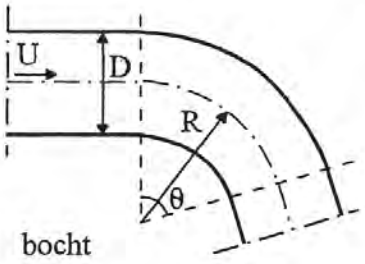
(c)



knik (D constant)

θ	10°	30°	60°	90°
glad	0,034	0,130	0,47	1,13
ruw	0,045	0,16	0,69	1,3

(d)



bocht

$\xi = f(\frac{R}{D}, \frac{R}{k}, \theta)$ globaal gemiddelde:

θ \ R/D	1	2	3	
90°	0,21	0,15	0,12	
45°	0,13	0,10	0,08	
30°	0,09	0,07	0,05	

Tabel 9.1 Plaatselijk energieverlies buisleidingen (ξ-waarden)

N.B. Bovenstaande ξ-waarden komen overeen met de definities $\xi = \Delta H_v / (U_1^2/2g)$ in geval (a) en $\xi = \Delta H_v / (U_2^2/2g)$ in geval (b) (in beide gevallen de grootste van de twee snelheidshoogten aan weerszijden).

9.6.4 Abrupte verkleining van de diameter

Tabel 9.1b geeft enkele waarden van de contractiecoëfficiënt μ en de verliesfactor ξ voor abrupte verkleiningen van de pijpdiameter.

9.6.5 Lokale vernauwing

Het geometrische doorstroomprofiel in een pijp met dwarsoppervlak A wordt plaatselijk vernauwd tot A_k (zie Figuur 9.9b). Wegens contractie is het kleinste doorstroomoppervlak kleiner dan A_k, zeg gelijk aan μA_k, waarin μ de contractiecoëfficiënt is, en is de grootste stroomsnelheid U_k gelijk aan $Q/(\mu A_k)$. Carnot geeft dan

$$\Delta H_v = \frac{(U_k - U)^2}{2g} = \left(\frac{A}{\mu A_k} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

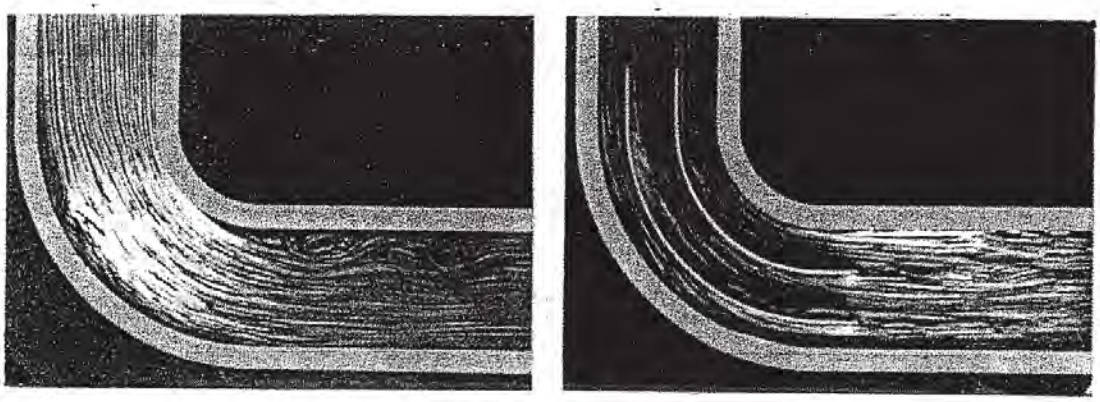
ofwel

$$\xi = \left(\frac{A}{\mu A_k} - 1\right)^2$$

Empirisch bepaalde waarden van μ en ξ zijn voor diverse vernauwingen verzameld in handboeken (zie bijv. Idelchik, 1986).

9.6.6 Bochten en knikken

In een (te) abrupte bocht van een leiding treedt loslating op, gevolgd door contractie ($\mu<1$) en vertraging (Figuur 9.9c en 9.10 links). Dan zal $\xi > 0$ zijn, ook als er geen sprake is van variatie van de pijpdoorsnede. De waarde van ξ is daarbij afhankelijk van de verhouding van de bochtstraal tot de pijpdiameter en van de ingesloten hoek (θ). Empirische waarden voor veel gevallen zijn verzameld in handboeken zoals dat van Idelchik. Tabel 9.1c en d geven enkele daarvan.



Figuur 9.10 Stroming door bocht zonder en met geleideschoepen. Bron: Nakayama, 1988

Door het aanbrengen van geleideschoepen in een krappe bocht of een knik wordt de loslating tegengegaan (Figuur 9.10 rechts), resulterend in aanmerkelijk lagere verliezen. Dit wordt vooral toegepast waar een ruimere bocht van de leiding niet aanvaardbaar is vanwege de beperkte beschikbare ruimte.

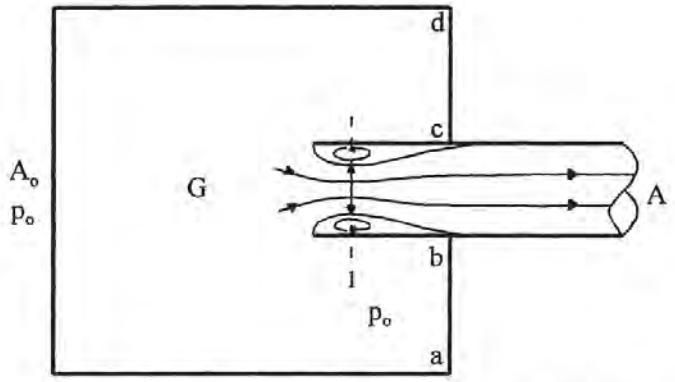
9.5.7 Intree

Intree van de stroming vanuit een reservoir in een pijp is een bijzonder geval van abrupte verkleining van diameter (Tabel 9.1b). De stroming kan loslaten, contraheren ($\mu < 1$) en daarna vertragen (Figuur 9.9d). Toepassing van Carnot geeft in dit geval

$$\xi = (\frac{1}{\mu} - 1)^2$$

Bij een goed gestroomlijnde aansluiting treedt geen contractie op en dus ook geen vertraging, in welk geval $\mu = 1$ en $\xi = 0$. Voor de rechthoekige aansluiting getekend in Figuur 9.9d is $\mu \simeq 0{,}6$ zodat $\xi \simeq 0{,}45$.

Wanneer de pijp door de wand van het reservoir naar binnen steekt (zie Figuur 9.10) treedt een sterke contractie op, die als volgt is te berekenen.



Figuur 9.11 Reservoir met buisje van Borda

In het reservoir zijn de versnellingen alleen van betekenis in de omgeving van de instroomopening van de pijp. Daarbuiten is de dynamische druk (en dus het piëzometrisch niveau) constant (stel gelijk aan p_o). In de dwarsdoorsnede van de vena contracta stellen we de dynamische druk eveneens constant (gelijk aan p_1). Volgens Bernoulli geldt dan

$$p_o = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho U_1^2 \quad \text{ofwel} \quad \frac{p_o - p_1}{\rho U_1^2} = \frac{1}{2}$$

We stellen verder een impulsbalans op voor het gebied G, bestaande uit het reservoir plus het daarin stekende buisgedeelte tot aan de vena contracta (zie Figuur 9.11), en gaan er daarbij van uit dat over de hele wand van het reservoir, ook die waar de pijp doorheen steekt (abcd), de dynamische druk gelijk is aan de ongestoorde waarde (p_o). De impulsbalans $F_o = F_I$ geeft dan

$$p_o A_o = p_o(A_o - A) + p_I A + \rho U_I^2 \mu A$$

ofwel

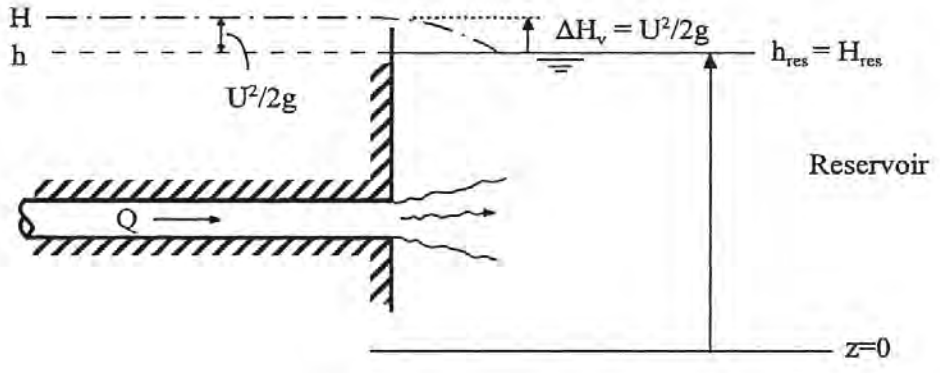
$$\mu = \frac{p_o - p_I}{\rho U_I^2} = \frac{1}{2}$$

Dit resultaat is oorspronkelijk door Borda (1776) afgeleid; het naar binnen gestoken pijpgedeelte wordt het **buisje van Borda** genoemd. De bijbehorende coëfficiënt voor het intreeverlies is gelijk aan

$$\xi = (\frac{1}{\mu} - 1)^2 = 1$$

9.5.8 Uittree

Bij een abrupte profielvergroting geldt Carnot. In geval van een abrupte, sterke profielvergroting, zoals bij uitstroming in een reservoir, kan U_2 daarin worden verwaarloosd t.o.v. U_1. Dan geldt bij benadering $\Delta H_v = U_1^2/2g$, ofwel $\xi = 1$. De gehele meegevoerde kinetische energie gaat dan verloren. Het piëzometrisch niveau in de pijp, aan het uitstroomeind, ligt dan in het piëzometrisch niveau benedenstrooms van de uitstroomopening; bij uitstroming in een reservoir is dat het reservoirpeil (mits $p_o = p_{atm} = 0$). Zie Figuur 9.12.



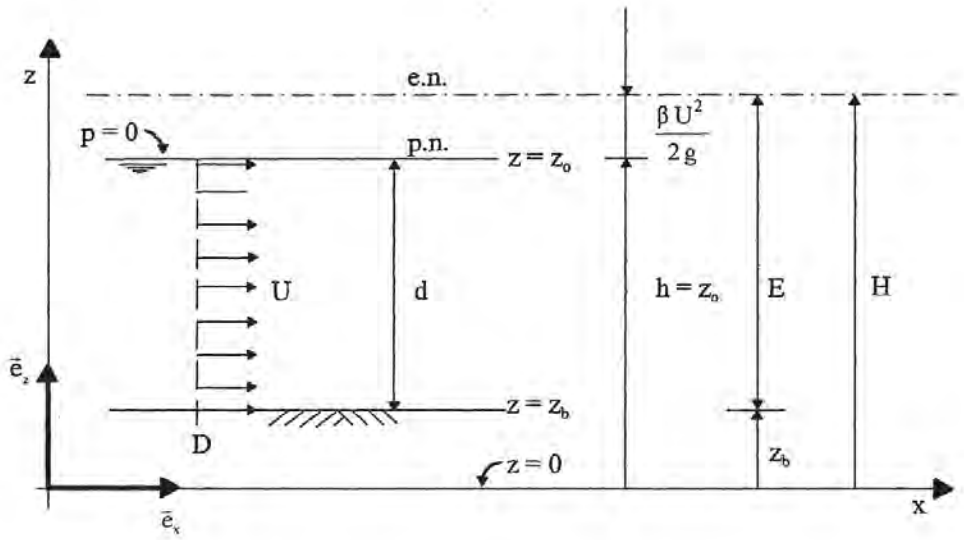
Figuur 9.12 Uitstroming in een reservoir

10 SNEL VERANDERENDE STROMEN IN OPEN WATERLOPEN

10.1 Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken 6 t/m 9 zijn diverse problemen behandeld van snel veranderende stromen; daarvoor kon wandwrijving worden verwaarloosd. Enkele van die problemen hadden betrekking op open waterlopen. Wij gaan in dit hoofdstuk uitvoeriger in op die categorie. Daarbij komen aspecten aan de orde die specifiek samenhangen met een vrij oppervlak. De aanwezigheid daarvan is een complicerende factor doordat de positie ervan, en daarmee de grootte van het doorstroomoppervlak, niet a priori bekend is maar als deel van de oplossing moet worden bepaald.

We beperken ons voorlopig tot tweedimensionale stromen en we beginnen met de overdracht in de stroomrichting van impuls en energie door een dwarsdoorgang *D* met (vrijwel) rechte, horizontale stroomlijnen (Figuur10.1). De te gebruiken symbolen zijn in Figuur 10.1 aangegeven.



Figuur 10.1 Definitieschets

De hoogte van de bodem en die van de waterspiegel boven het willekeurig gekozen vergelijkingsvlak $z = 0$ is z_b respectievelijk z_0; het verschil tussen beide is de diepte: $d = z_0 - z_b$. Alleen wanneer de bodem in het gehele beschouwde gebied horizontaal ligt is het mogelijk het vergelijkingsvlak daarmee te laten samenvallen.

Omdat we uitgaan van een doorgang met rechte stroomlijnen ligt het piëzometrisch niveau in alle punten van de beschouwde doorgang in de plaatselijke waterspiegel (waar p = 0). Voor de hoogte ervan boven het vlak z = 0 geldt

$$h = z_o = z_b + d$$

De volumestroom of het debiet per eenheid van (p.e.v.) breedte is

$$q = \int_{z_b}^{z_o} u\,dz = Ud$$

10.2 Impulsoverdracht

De impulsoverdracht p.e.v. tijd en p.e.v. breedte door de doorgang *D* van Figuur 10.1 heeft de waarde (zie 9.5)

$$F = \tfrac{1}{2}\rho g d^2 + \alpha \rho U^2 d \qquad (10.1)$$

We gaan na hoe F met d varieert bij constante q. Uitgedrukt in q, en met de benadering $\alpha = 1$, wordt (10.1):

$$F = \tfrac{1}{2}\rho g d^2 + \rho \frac{q^2}{d} \qquad (10.2)$$

Deze variatie van F met d bij een constante q is getekend in Figuur 10.2. De kromme geldt voor één waarde van q. Voor verschillende waarden van q ontstaat een familie van onderling gelijkvormige krommen, elk voor een constante q.

We zien dat F bij constante q een minimum heeft voor een zekere waarde van d. Om de ligging daarvan te bepalen berekenen we de afgeleide van F naar d (bij constante q):

$$\frac{dF}{dd} = \rho g d - \rho q^2/d^2 = \rho g d\left(1 - \frac{q^2}{gd^3}\right) \qquad (10.3)$$

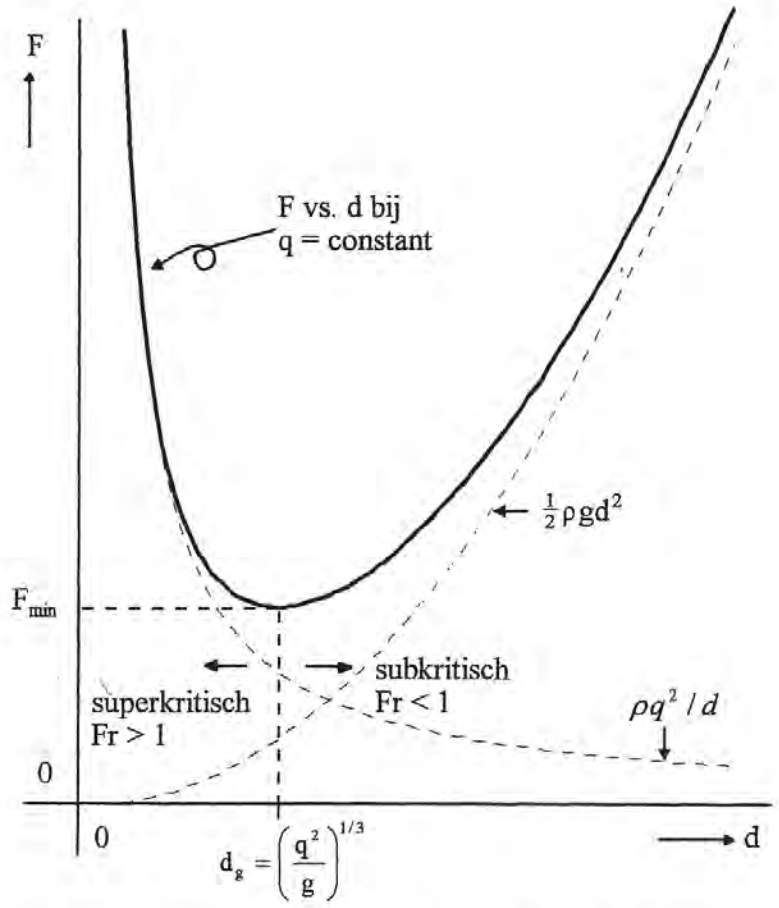
Omdat $q = Ud$ en $Fr = U/\sqrt{gd}$ (het getal van **Froude**) geldt $q^2/gd^3 = Fr^2$, zodat

$$\frac{dF}{dd} = \rho g d(1 - Fr^2)$$

Het minimum van F treedt dus op voor Fr = 1 (dus als $U = \sqrt{gd}$), ofwel als $d = (q^2/g)^{1/3}$, de z.g. **grensdiepte** d_g (Engels: *critical depth*). Dat minimum van F heeft de waarde

$$F_{min} = \tfrac{3}{2}\rho g d_g^2 \qquad (10.4)$$

Bij gegeven waarden van debiet (q) en impulsoverdracht (F) is blijkbaar parallelle stroming mogelijk bij twee verschillende diepten (mits $F > F_{min}$). Welk van beide typen zich voordoet wordt door de randvoorwaarden bepaald. We komen hierop terug in de toepassingen, na behandeling van de energie-overdracht.



Figuur 10.2 Impulsoverdracht (F) versus diepte (d) bij constante afvoer (q), beide per eenheid van breedte

10.3 Energie-overdracht en energiehoogte

De energie-overdracht p.e.v. tijd en p.e.v. breedte door de doorgang *D* in Figuur 10.1 is te schrijven als (zie 8.7)

$$P = \rho g q H \tag{10.5}$$

Hierin is H de over de dwarsdoorgang gemiddelde energiehoogte (eigenlijk <H>). De waarde hiervan boven het vlak z = 0 is gelijk aan

$$H = h + \beta\frac{U^2}{2g} = z_b + d + \beta\frac{U^2}{2g}$$

De som van de laatste twee termen is de energiehoogte boven de bodem (Figuur 10.1). Deze z.g. **specifieke energiehoogte** krijgt een apart symbool (E):

$$E = d + \beta\frac{U^2}{2g} \tag{10.6}$$

Hiermee geldt

$$H = z_b + E$$

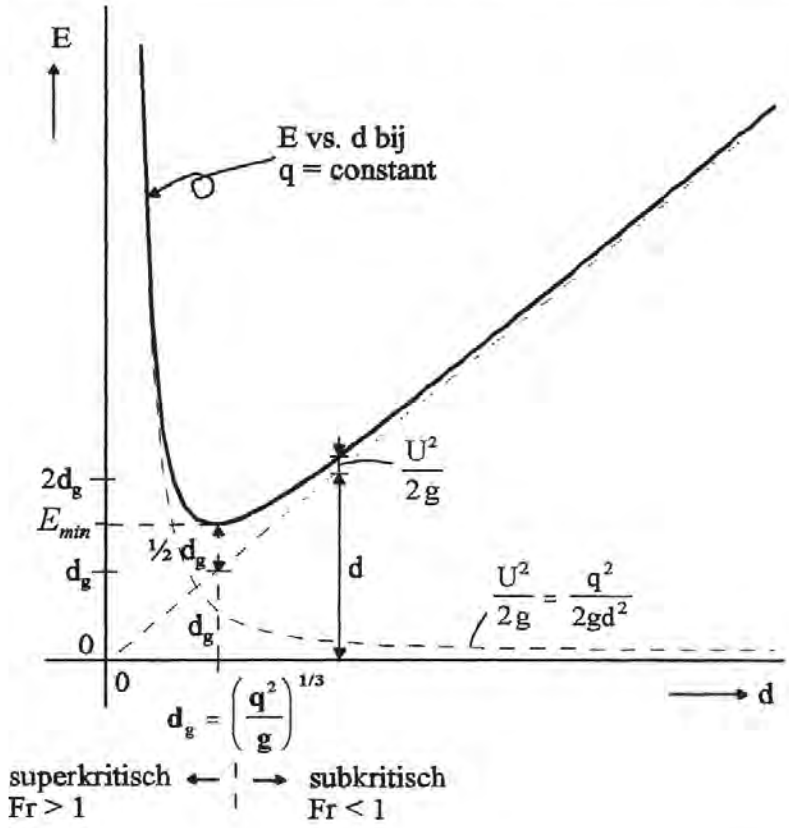
We gaan na hoe de energie-overdracht (P) varieert met de diepte (d) bij constant debiet (q). Uit (10.5) volgt dat het daarvoor voldoende is na te gaan hoe de energiehoogte met d varieert. We doen dit in het bijzonder voor de energiehoogte boven de bodem (E). De vergelijking daarvoor (10.6) is in termen van q, en met de benadering $\beta = 1$, te schrijven als

$$E = d + \frac{q^2}{2gd^2} \tag{10.7}$$

Deze variatie van E met d bij constante q is getekend in Figuur 10.3. De kromme geldt voor één waarde van q. Voor verschillende waarden van q ontstaat een familie van onderling gelijkvormige krommen, elk voor een constante q.

Evenals F heeft E (en dus ook H en P) een minimum bij een zekere diepte. De afgeleide van E naar d bij constante q is

$$\frac{dE}{dd} = 1 - \frac{q^2}{gd^3} = 1 - Fr^2 \tag{10.8}$$



Figuur 10.3 Energiehoogte (E) versus diepte (d) bij constante afvoer (q)

Het minimum van E treedt dus op voor Fr = 1 (dus als $U = \sqrt{gd}$), ofwel voor $d = d_g = (q^2/g)^{1/3}$, de grensdiepte, en heeft de waarde

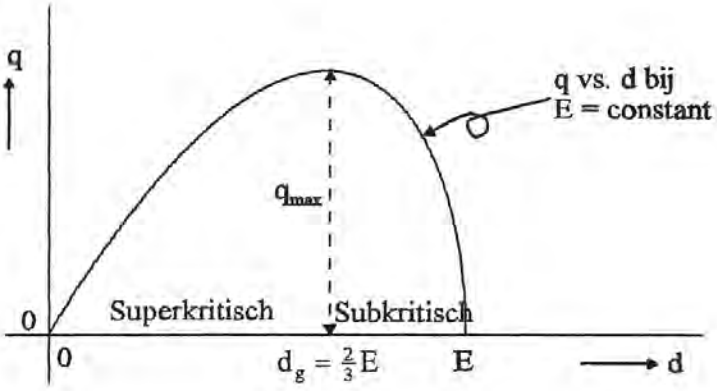
$$E_{min} = \frac{3}{2}d_g \qquad (10.9)$$

We zien dat bij gegeven debiet (q) en energie-overdracht (P) respectievelijk energiehoogte (H of E) parallelle stroming mogelijk is bij twee verschillende diepten, evenals in het geval van gegeven debiet en impulsoverdracht.

Na de variatie van E (en eerder ook F) met d voor constante q bekijken we nu de variatie van q met d voor vaste E. Deze relatie is eveneens gegeven in (10.7), nu geschreven in de vorm

$$q = \sqrt{2g(Ed^2 - d^3)} \qquad (10.10)$$

We zien hieruit dat q = 0 zowel voor d = 0 (geen water, dus geen debiet) als voor d = E (snelheidshoogte nul, dus stilstaand water). De variatie van q met d bij vaste E is gegeven in Figuur 10.4.



Figuur 10.4 Debiet (q) versus diepte (d) bij constante energiehoogte (E)

Het debiet bereikt een maximum voor $d = d_{q_{max}} = 2E/3 = d_g$, dus als de diepte gelijk is aan de grensdiepte, met de waaarde

$$q_{max} = \frac{2}{3}E\sqrt{g\frac{2}{3}E} \tag{10.11}$$

Omdat $q = Ud$ en $d_{q_{max}} = 2E/3 = d_g$ is de bijhorende stroomsnelheid gelijk aan

$$U_{q_{max}} = \sqrt{g\frac{2}{3}E} = \sqrt{gd_{q_{max}}} = \sqrt{gd_g} \tag{10.12}$$

Dat de conditie van maximum q (bij gegeven E) optreedt bij de grensdiepte volgt ook uit Figuur 10.3, wanneer we ons daarin de familie van gelijkvormige krommen denken van E vs d bij q = constant, elk voor één waarde van q (waarvan er slechts één is getekend). Variatie van d bij constante E komt overeen met een "horizontale" doorsnijding van dat stelsel lijnen, waarbij de bijhorende q een maximum krijgt als $d = d_g$.

10.4 Kritische stroming

In het bovenstaande is bewezen dat de impulsoverdracht en de energie-overdracht, bij variatie van d voor constante q, beide een minimum hebben voor Fr = 1, terwijl omgekeerd q maximaal is bij variatie van d voor constante E als Fr = 1. Wanneer deze bijzondere situatie zich voordoet spreken we van **kritische stroming**. De bijbehorende diepte heet de **kritische diepte** of de **grensdiepte** (d_g) (Engels: *critical depth*):

$$d = d_g = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}E \quad \text{als Fr} = 1 \qquad (10.13)$$

Omdat Fr = 1 bij kritische stroming geldt $U_g = \sqrt{gd_g}$. De snelheidshoogte is dan de helft van de diepte.

Wanneer **Fr < 1** spreken we van **subkritische stroming** (Engels: *tranquil flow*). Daarbij is $d > d_g$ en $U < \sqrt{gd}$ (dus $U^2/2g < \frac{1}{2}d$); zie Figuur 10.3. Voor **Fr > 1** spreken we van **superkritische** stroming (of **schietend** water; Engels: *rapid flow*). Daarbij is $d < d_g$ en $U > \sqrt{gd}$ (dus $U^2/2g > \frac{1}{2}d$); zie Figuur 10.3.

De stroming in natuurlijke waterlopen is meestal subkritisch, behalve in steile bergbeken en bij plaatselijke overstorten etc. In de Nederlandse rivieren bijv. zijn U = 1 m/s en d = 4 m representatieve waarden; daarbij is Fr ≈ 0,16, dus ver onder de kritische waarde.

10.5 Toepassingen

In de hierna te geven toepassingen wordt de stroom stationair en tweedimensionaal verondersteld, tenzij anders vermeld. Omdat in alle gevallen slechts een kort traject wordt behandeld, waarin de stroming snel verandert, is de wandwrijving verwaarloosbaar. Is de stroming daarbij versnellend dan zijn de energieverliezen in het inwendige over dat korte traject eveneens verwaarloosbaar. Bij sterk vertragende stromen zal dat niet het geval zijn.

(1) Stroming onder schuif

Gegeven: het debiet p.e.v. breedte (q) en de hoogte van de opening onder de schuif (a) (Figuur 10.5a). Aan de benedenstroomse zijde is vrije afstroming mogelijk. Voor de diepte d_2 geldt $d_2 = \mu a$, waarin μ de contractiecoëfficiënt is. (De waarde daarvan neemt toe met

toenemende relatieve opening, van ca. 0,61 (theoretisch $\pi/(\pi+2)$ voor zeer kleine waarden van a/E_1, via bijv. de waarde 0,68 als a/E_1 = ca. 0,5 tot vrijwel 1 als a nadert tot E_1; in veel gevallen heeft μ een waarde van 0,65 à 0,70.)

Gevraagd: de diepte bovenstrooms van de schuif (d_1) en de waarde van de horizontale kracht p.e.v. breedte door het water op de schuif uitgeoefend (K).

Balansgebied: tussen de doorgangen 1 en 2 (Figuur 10.5a). Dit is een kort versnellingsgebied, dus energieverliezen zijn verwaarloosbaar.

Balansvergelijkingen:

$q_1 - q_2 = 0$ (volume)
$P_1 - P_2 = 0$ (energie)
$F_1 - F_2 = K$ (impuls)

ofwel

$$U_1 d_1 = U_2 d_2 = q \tag{10.14a}$$

$$E_1 = d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = E_2 = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2} \tag{10.14b}$$

$$\tfrac{1}{2}\rho g d_1^2 + \rho\frac{q^2}{d_1} - (\tfrac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho\frac{q^2}{d_2}) = K \tag{10.14c}$$

Dit zijn zes vergelijkingen in acht variabelen (ρ en g zijn gegeven constanten). Wanneer twee hiervan zijn gegeven (in dit voorbeeld waren dat q en d_2) zijn de overige bepaald. De oplossing kan in dit geval analytisch worden uitgewerkt. Uit (10.14b) volgt

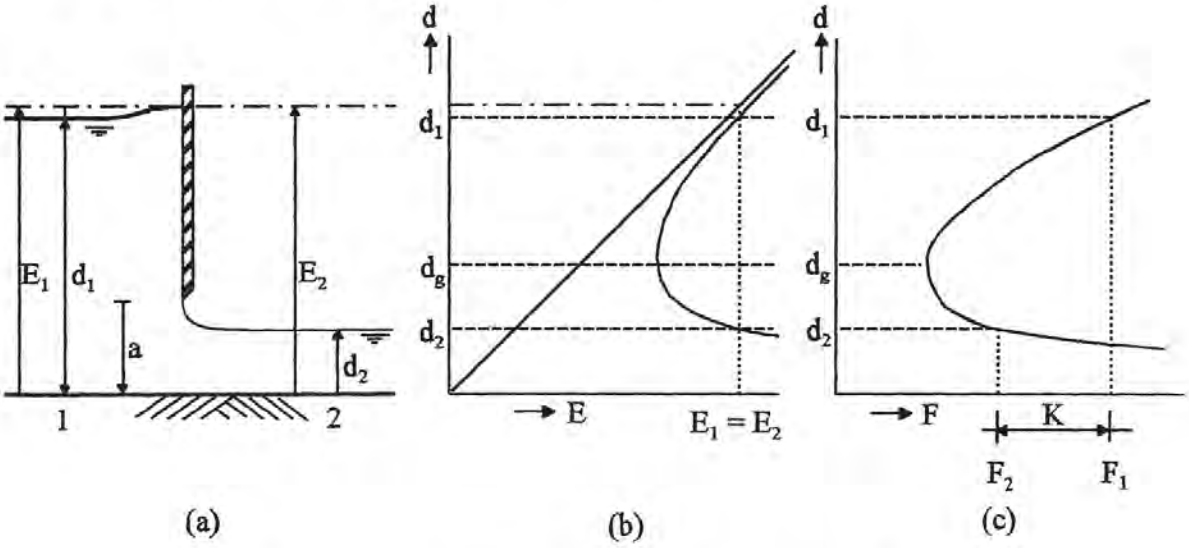
$$\frac{d_1^2 d_2^2}{\frac{1}{2}(d_1 + d_2)} = \frac{q^2}{g} \; (= d_g^3) \tag{10.15}$$

Bij gegeven q en d_2 (of d_1) is dit een vierkantsvergelijking in d_1 (of d_2) waaruit de oplossing voor d_1 (of d_2) kan worden bepaald.

Substitutie van (10.15) in (10.14c) geeft na enig herleiden

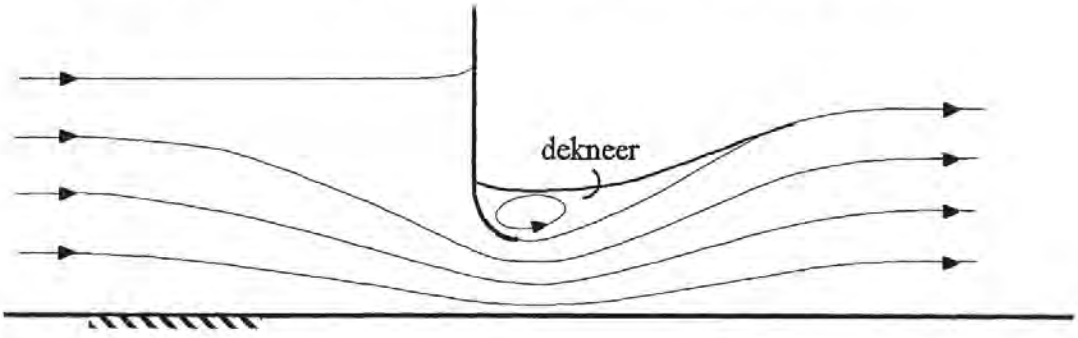
$$K = \tfrac{1}{2}\rho g \frac{(d_1 - d_2)^3}{d_1 + d_2} \tag{10.16}$$

De oplossing is grafisch toegelicht in Figuur 10.5. De schuif veroorzaakt een **overgang van subkritische naar superkritische stroming** bij gelijkblijvende energie-overdracht (P) en gelijkblijvende energiehoogte boven de bodem (E) (Figuur 10.5b). De impulsoverdracht (F) kan daarbij niet dezelfde waarde hebben aan weerszijden van de schuif; het verschil (K) wordt door de schuif opgenomen (Figuur 10.5c).



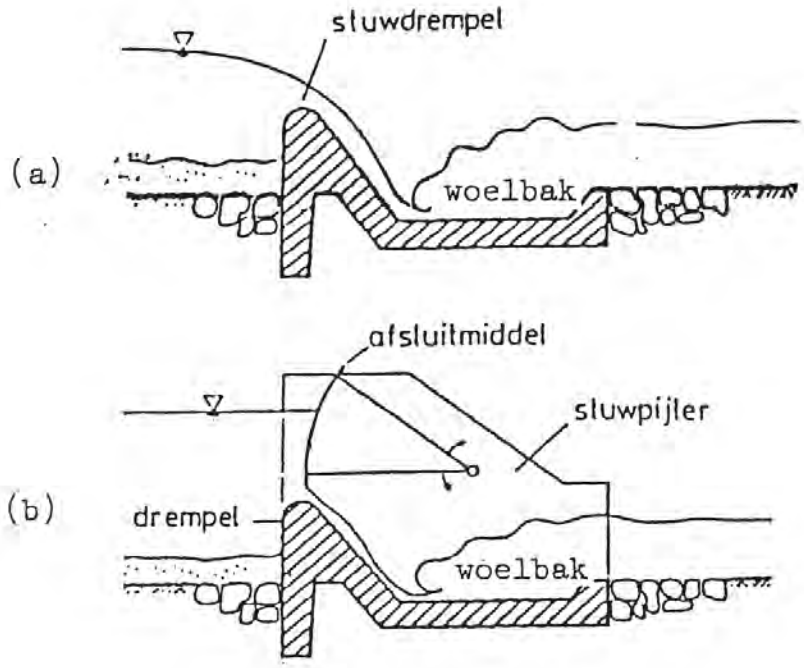
Figuur 10.5 Onderspuier met vrije afvoer

In dit voorbeeld is aan de benedenstroomse zijde sprake van vrije, superkritische uitstroming. Meestal wordt op enige afstand benedenstrooms van de schuif (of een andere constructie die superkritische stroming veroorzaakt) de stroming abrupt subkritisch in een z.g. watersprong (zie volgend voorbeeld). Bij voldoend hoge waterstand aan benedenstroomse zijde komt de watersprong tegen de schuif aan te liggen (z.g. "verdronken watersprong"), zoals geschetst in Figuur 10.6. De stroming is dan subkritisch aan weerszijden van de schuif.



Figuur 10.6 Stroming onder een schuif bij gestuwde afvoer

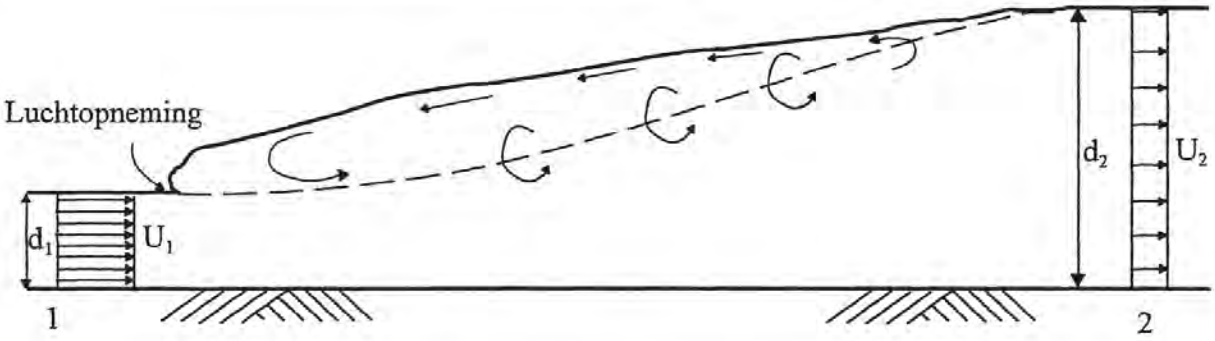
In veel gevallen wordt de plaats van de watersprong gefixeerd in een z.g. woelbak, die dan een integraal deel vormt van de gehele constructie (zie Figuur 10.7 voor een voorbeeld).



Figuur 10.7 Stuw met woelbak

(2) Stationaire watersprong

In tegenstelling tot het voorgaande behandelen we nu de **overgang van superkritische naar subkritische stroming**; deze overgang vindt altijd plaats in de vorm van een z.g. **watersprong** (Engels: *hydraulic jump*) (Figuur 10.8). In een watersprong vindt een vrij sterke vertraging en luchtopneming plaats, samengaand met intensieve wervelingen en een niet te verwaarlozen energieverlies. Daarbij blijven de massa en de impuls behouden. Hieruit is een betrekking af te leiden tussen de diepten aan weerszijden (d_1 en d_2) en het (constante) debiet p.e.v. breedte (q). Vervolgens kan uit de energiebalans het energieverlies in de watersprong worden berekend.



Figuur 10.8 Watersprong

We gaan uit van een horizontale bodem en een verwaarloosbare bodemweerstand over het relatief korte traject tussen de doorsneden 1 en 2 aan weerszijden van de sprong, waar de stroomlijnen (nog juist of net weer) vrijwel recht zijn (Figuur 10.8 of 10.9a). (N.B.: de watersprong is in Figuur 10.9a slechts schetsmatig en niet op schaal weergegeven.)

Balansvergelijkingen:

$q_1 - q_2 = 0$ (volume)
$F_1 - F_2 = 0$ (impuls)
$P_1 - P_2 = \Delta P_v$ (energie)

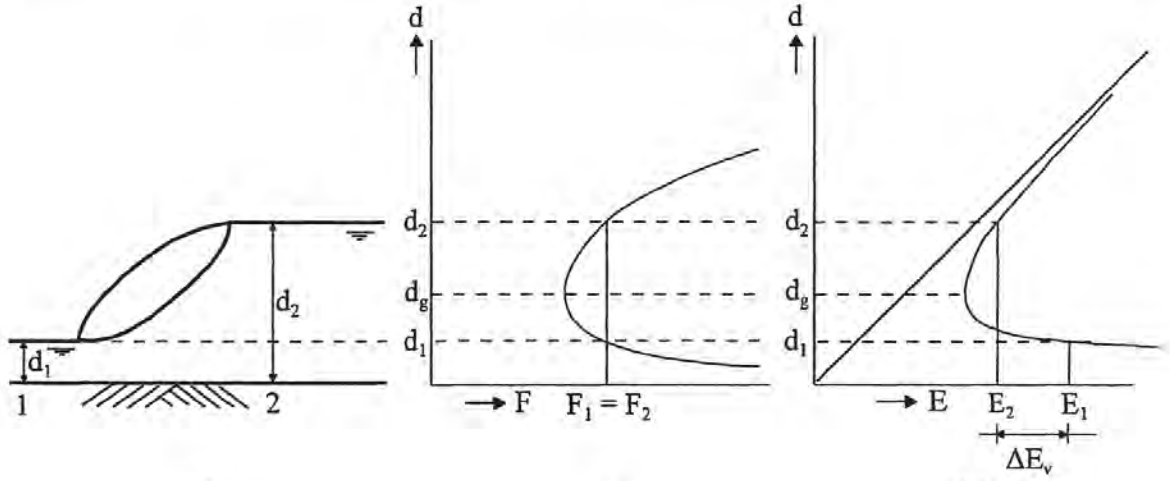
ofwel

$$U_1 d_1 = U_2 d_2 = q \qquad (10.17a)$$

$$\tfrac{1}{2}\rho g d_1^2 + \rho \frac{q^2}{d_1} = \tfrac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho \frac{q^2}{d_2} \qquad (10.17b)$$

$$\frac{\Delta P_v}{\rho g q} = E_1 - E_2 = d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} - \left(d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}\right) \qquad (10.17c)$$

Voor het aantal onbekenden en variabelen in dit stelsel geldt hetzelfde als wat hierboven in het geval van de stroming onder de schuif is gezegd. Ook hier zijn bij gegeven ρ en g slechts twee onafhankelijke variabelen, bv. d_1 en d_2, of d_1 en q, of d_1 en Fr_1 ($=U_1/\sqrt{g d_1}$).



Figuur 10.9 Watersprong

Ook hier is een expliciete analytische oplossing mogelijk. Uit (10.17b) volgt

$$\frac{d_1+d_2}{2}d_1d_2 = \frac{q^2}{g} \quad (= d_g^3) \tag{10.18}$$

Bij gegeven waarde van q en d_1 (of d_2) is d_2 (of d_1) uit deze vierkantsvergelijking te berekenen; voor de verhouding d_2/d_1 is het resultaat

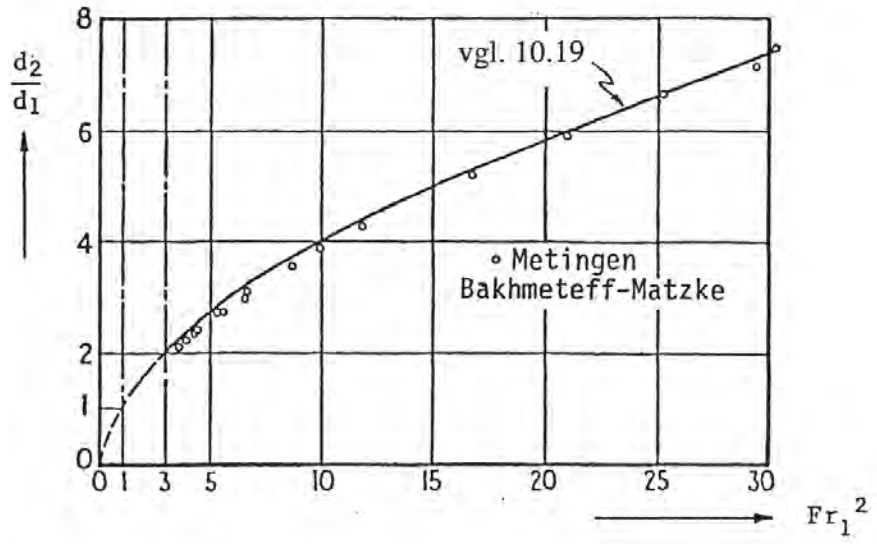
$$\frac{d_2}{d_1} = \tfrac{1}{2}[(1+8Fr_1^2)^{\frac{1}{2}}-1] \quad \text{waarin} \quad Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gd_1}} \tag{10.19}$$

Een vergelijking van (10.19) met meetwaarden is gegeven in Figuur 10.10. De overeenstemming tussen theorie en meetresultaat is goed.

De twee diepten d_1 en d_2, die - bij gegeven q - volgens (10.18) ofwel (10.19) van elkaar afhangen, worden elkaars **geconjugeerde** genoemd.

Voor de stroomsnelheid aan weerszijden (U = q/d) volgt uit (10.18)

$$U_1 = \sqrt{g\frac{d_1+d_2}{2}\frac{d_2}{d_1}} \quad \text{en} \quad U_2 = \sqrt{g\frac{d_1+d_2}{2}\frac{d_1}{d_2}} \tag{10.20}$$



Figuur 10.10 Experimentele en theoretische waarden van de diepten aan weerszijden van een watersprong. Bron: Rouse (1938)

In een watersprong gaat energie verloren van de doorgaande stroom. Om dit te berekenen substitueren we (10.18) in (10.17c). Na enig herleiden vinden we dan voor het gedissipeerde vermogen (p.e.v. breedte):

$$\Delta P_v = \tfrac{1}{4}\rho g\left[\frac{g(d_1+d_2)}{2d_1d_2}\right]^{\frac{1}{2}}(d_2-d_1)^3 \qquad (10.21)$$

en voor het verlies aan energiehoogte ($\Delta H_v = \Delta P_v / \rho g q$):

$$\Delta H_v = \Delta E_v = E_1 - E_2 = \frac{(d_2-d_1)^3}{4d_1d_2} \qquad (10.22)$$

De oplossing is grafisch toegelicht in Figuur 10.9.

De watersprong vormt een abrupte overgang van superkritische naar subkritische stroming bij gelijkblijvend debiet (q) en impulsoverdracht (F) (Figuur 10.9b). De energie-overdracht (P) kan daarbij niet dezelfde waarde hebben aan weerszijden van de sprong; het verschil wordt gedissipeerd (Figuur 10.9c).

N.B. Een eventuele tekenwisseling van de snelheden (stroming van grotere naar kleinere diepte) zou in de vergelijkingen voor het behoud van volume (10.17a) en van impuls (10.17b) niet merkbaar zijn, maar in de energiebalans (10.17c) wèl. In dat geval zou ΔP_v nl. negatief worden, d.w.z. het doorgevoerde vermogen van de stroom zou toenemen bij het passeren van de sprong. Dat is niet mogelijk. Daardoor is de oplossing ondubbelzinnig: van superkritisch overgaand in subkritisch (vertragend).

(3) Lopende watersprong

Zoals hierboven is opgemerkt wordt de plaats van de watersprong bij een waterloopkundige constructie meestal gefixeerd. Lopende watersprongen komen ook voor. Zo zijn er in de wereld enkele baaien of estuaria met een sterk getij waar zich bij opkomend water een (spectaculaire) lopende watersprong vormt (een z.g. vloedsprong; Engels: "tidal bore"). Bekende voorbeelden zijn de vloedsprongen in de estuaria van de Severn (Engeland) en van de Qian Tang (China).

In een Appendix van dit Hoofdstuk worden volume- en impulsbalansen opgesteld voor een lopende watersprong, en wordt daaruit de voortplantingssnelheid (c) van de sprong berekend. Hier geven we een afleiding uit de uitkomsten voor de stilstaande sprong, door een transformatie van het referentiestelsel. De z.g. "stilstaande" sprong (zie vorig voorbeeld) is beschreven in een assenstelsel ten opzichte waarvan het water bovenstrooms een (superkritische) snelheid U_1 heeft. In een met dit water meebewegend assenstelsel zien we een lopende sprong die een gebied met stilstaand water inloopt met een snelheid (c) gelijk aan $U_1 = q/d_1$ uit de stationaire oplossing (verg. 10.20), waar uit volgt

$$c = \sqrt{g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1}}$$

Voor een lage sprong ($d_2 \approx d_1 = d$) geldt de benadering

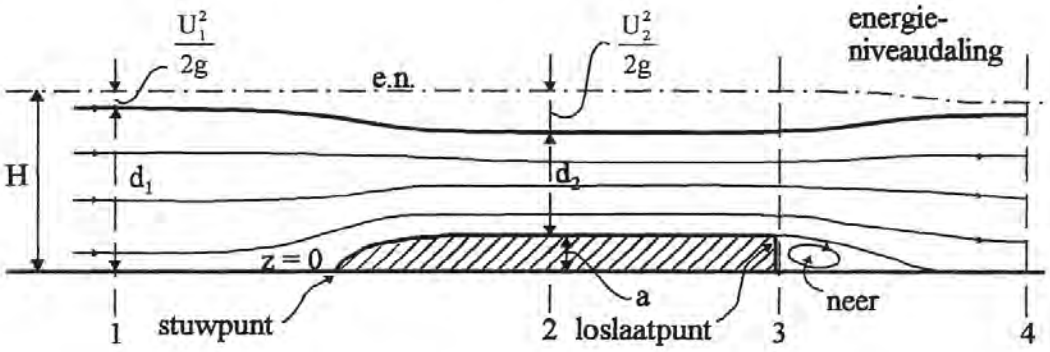
$$\boxed{c = \sqrt{gd}} \qquad (10.23)$$

Dit is de **voortplantingssnelheid** (ten opzichte van het water ervoor) **van een lage storing in open water** (met hydrostatische druk). Hiermee is bewezen dat het **kental van Froude** voor de stroom in een open waterloop de betekenis heeft van **verhouding van stroomsnelheid tot golfvoortplantingssnelheid** ($Fr = U/\sqrt{gd} = U/c$), zoals het kental van Mach die betekenis heeft voor compressibele stromen.

De golfsnelheid t.o.v. de bodem, bij stroming met snelheid U, is U ± c. In een subkritische stroming (Fr < 1) is U < c; een storing hierin kan zich in bovenstroomse richting voortplanten. In super-kritische stroming (Fr > 1) is dat echter niet mogelijk (voor een lage storing) omdat daar U > c. **Hierin ligt de wezenlijke betekenis van het onderscheid tussen beide typen stroming.**

(4) Overlaten

Als laatste toepassing behandelen we opnieuw de stroming over een z.g. **lange overlaat**, waarbij het nu vooral gaat om het al dan niet vóórkomen van kritische stroom. Zie Figuur 10.11.



Figuur 10.11 Lange overlaat met gestuwde of onvolkomen afvoer

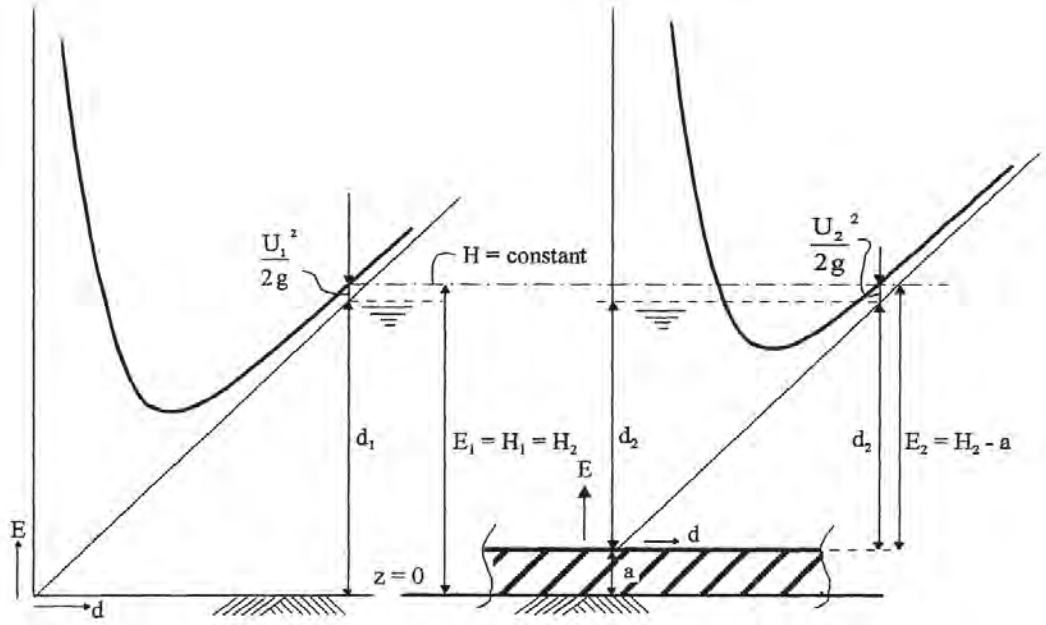
Tussen de doorgangen 1 en 2 ligt een kort versnellingsgebied waarin de energieverliezen te verwaarlozen zijn, zodat (zie ook Hoofdstuk 8)

$$H_1 = H_2$$

ofwel

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = a + d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2} \qquad (10.24)$$

Uit deze betrekking tussen d_1, d_2 en q is één van deze grootheden te berekenen wanneer de twee andere gegeven zijn (a en g worden bekend verondersteld).



Figuur 10.12 Lange overlaat met gestuwde of onvolkomen afvoer

Voor het geval van subkritische stroming in het hele gebied, zoals getekend in Figuur 10.11, is de oplossing grafisch geïllustreerd in Figuur 10.12 met behulp van het E-d diagram. Ondanks het feit dat $H_1 = H_2$ geldt hier niet $E_1 = E_2$ omdat $z_{b_1} \neq z_{b_2}$. Daarom zijn er twee E-d diagrammen getekend, één voor doorsnede 1 met E = 0 in de bodem van het kanaal, en één voor doorsnede 2 met E = 0 in de kruin van de overlaat (voor dezelfde q, dus met dezelfde waarde van d_g).

We gaan nu na wat er gebeurt wanneer bij gelijkblijvend energieniveau bovenstrooms (bijvoorbeeld bij stroming vanuit een diep reservoir) de benedenstroomse waterstand iets wordt verlaagd en daarna weer constant wordt gehouden. Omdat in de beschouwde situatie de stroming overal subkritisch is kan deze verlaging zich in bovenstroomse richting voortplanten. Daarmee neemt d_2 af. Het debiet q neemt daardoor toe (E = constant; zie Figuur 10.4, subkritische deel) totdat de nieuwe stationaire situatie zich heeft ingesteld waarvoor vergelijking (10.24) geldt. In deze situatie heeft de benedenstroomse waterstand dus invloed op het debiet. We spreken hierbij van een **onvolkomen afvoer** of **gestuwde afvoer.**

Wanneer de benedenstroomse waterstand steeds verder wordt verlaagd zal aanvankelijk de diepte boven de overlaat (d_2) blijven afnemen, en dus ook de voortplantingssnelheid $c_2 = \sqrt{g d_2}$. Doordat tegelijk q toeneemt neemt $U_2 = q/d_2$ in sterkere mate toe, en het kental van Froude $Fr_2 = U_2/c_2$ in nog sterkere mate, totdat dit de waarde één bereikt ($Fr_2 = 1$) en de stroming boven de overlaat kritisch wordt. Een verdergaande verlaging van de benedenstroomse waterstand kan zich dan boven de overlaat niet in stroomopwaartse richting voortplanten. De stroming boven de overlaat en bovenstrooms daarvan is daardoor niet meer afhankelijk van de benedenstroomse waterstand. We spreken in deze gevallen van een z.g. **vrije afvoer** of **volkomen afvoer** (zie Figuur 10.13). **De stroming boven de overlaat is dan kritisch** (en de afvoer is - bij gegeven E - dan maximaal, zie Figuur 10.4), waarbij

$$d_2 = d_g = \tfrac{2}{3} E_k$$

en

$$U_2 = \sqrt{g d_2} = \sqrt{g d_g} = \sqrt{g \tfrac{2}{3} E_k} \qquad \left(\text{dus } \frac{U_2^2}{2g} = \tfrac{1}{2} d_2 = \tfrac{1}{3} E_k\right)$$

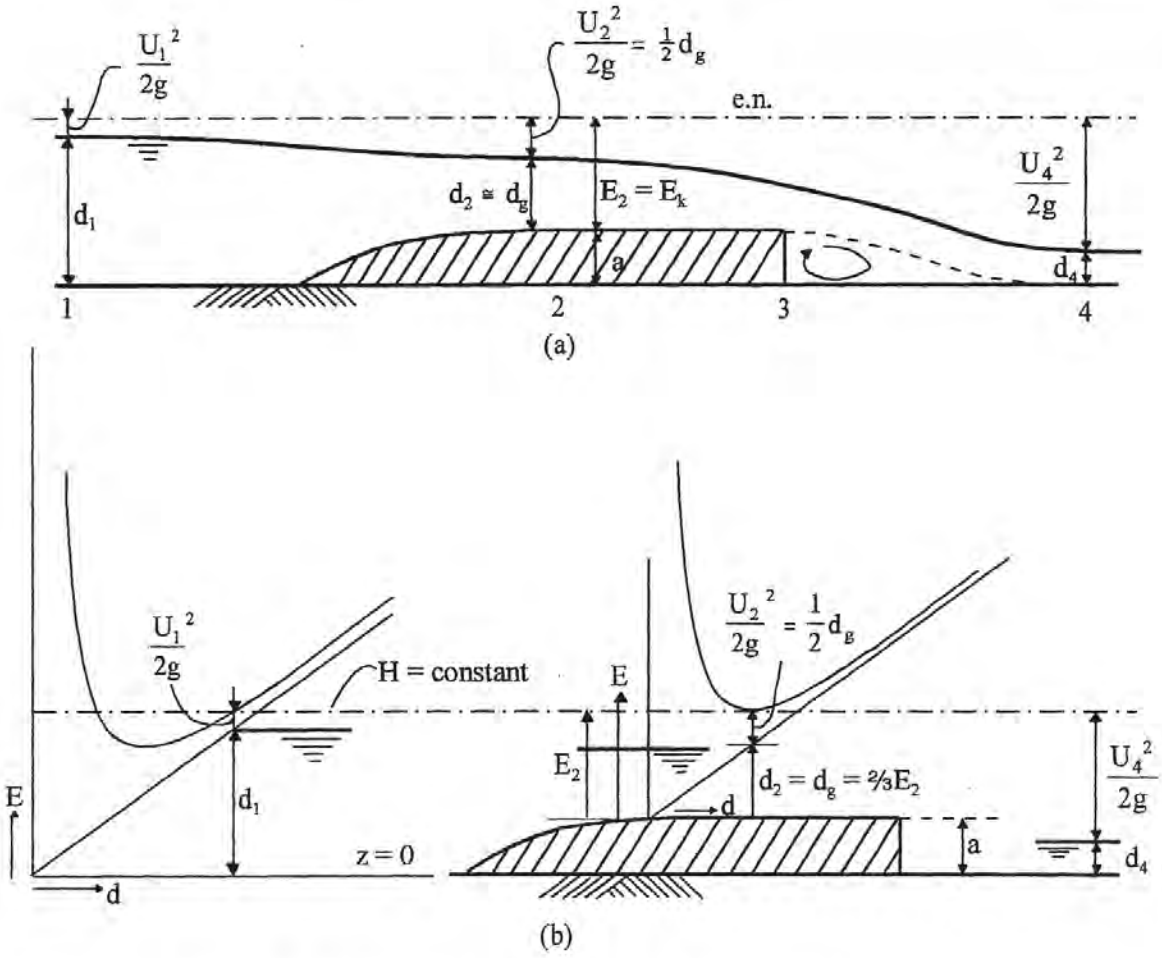
In deze uitdrukkingen is het subscript "2" vervangen door "k" voor "kruin", om te herinneren aan het gebruik van de kruin als referentieniveau. Voor de afvoer geldt dan

$$\boxed{q = \tfrac{2}{3} E_k \sqrt{\tfrac{2}{3} g E_k}} \quad (\cong 1{,}70 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} \;\; E_k^{\frac{3}{2}}) \qquad (10.25)$$

waarin

$$E_k = E_2 = H - a$$

In het bovenstaande is de aankomende stroom subkritisch ($Fr < 1$), zoals meestal het geval is. Daarvoor resulteert een vermindering van E (zoals tussen de doorgangen 1 en 2, als gevolg van het oplopen van de bodem) in een vermindering van de diepte (zie het E-d diagram) en dus in een versnelling van de stroom. Voor een superkritische stroming geldt het tegendeel. Als bovenstrooms van de overlaat de stroom superkritisch is dan treedt tussen 1 en 2 een vertraging op van de stroom en een stijging van de waterspiegel. (Om ook bij superktitische aanstroming een glad verlopende, aanliggende stroming te verkrijgen is een gestroomlijnde vormgeving aan bovenstroomse zijde nodig vanwege de hoge snelheden, die sterke dynamische effecten kunnen veroorzaken zoals het omhoogschieten van een straal water tegen een te abrupt stijgende voorkant.)



Figuur 10.13 Lange overlaat met vrije of volkomen afvoer

Overlaten komen o.a. voor tijdens de uitvoering van afsluitingen, bijv. van een getijgeul. Door opbouw van een drempel over de volle breedte wordt het stroomprofiel verkleind en neemt het verval toe, evenals de lokale maximale snelheden. Zodra de stroming boven de overlaat kritisch is geworden nemen de snelheden weer af met toenemende kruinhoogte (bij een zelfde buitenwaterstand). Het materiaal waaruit de drempel wordt opgebouwd kan qua stroombestendigheid worden gekozen voor de condities waarbij de stroming juist kritisch wordt.

In irrigatiesystemen komen permanent geïnstalleerde overlaten voor die worden gebruikt voor debietmetingen. Toepassing met gestuwde afvoer heeft daarbij het voordeel van een gering energieverlies, tegenover de nadelen van de noodzaak van twee peilregistraties en een geringe nauwkeurigheid. Bij vrije of volkomen afvoer treedt meer energieverlies op maar daarbij is alleen het bovenstroomse peil bepalend voor het debiet, en is een hoge(re) nauwkeurigheid te bereiken.

Voor debietmetingen worden vaak z.g. korte overlaten gebruikt, i.h.b. met een scherpe kruin. Daarbij zijn de stroomlijnen boven de kruin significant gekromd, en is het piëzometrisch niveau pal boven de kruin lager dan het niveau van de waterspiegel er boven (zie Figuur 6.3 respectievelijk 6.7 voor een korte overlaat met ronde respectievelijk scherpe kruin). De stroomsnelheden zijn daardoor groter dan zij zouden zijn boven een lange overlaat. Voor het debiet geldt hetzelfde. Dit wordt in rekening gebracht door het rechterlid van (10.25) te vermenigvuldigen met een empirisch te bepalen afvoercoëfficiënt (m):

$$q = m\tfrac{2}{3}E_k\sqrt{\tfrac{2}{3}gE_k} \qquad (10.26)$$

Voor korte overlaten geldt in het algemeen $m > 1$, i.v.m. de straalkromming. Voor lange overlaten speelt dat geen rol maar kan de weerstand invloed hebben, resulterend in $m < 1$.

In toepassingen is het gebruik van het bovenstroomse waterpeil boven de kruin (h_k) handiger dan dat van het energieniveau. Het verschil (de bovenstroomse snelheidshoogte) wordt dan via een aapassing van m verwerkt, die dan een functie wordt van h_k/a, waarin a de hoogte is van de kruin van de stuw boven de bovenstroomse bodem (Figuur 6.7). Voor de **Rehbock-stuw** (Figuur 10.14a) met beluchte straal ($p = p_{atm}$ ook onder de straal) is het resultaat te schrijven als

$$q = m'\tfrac{2}{3}h_e\sqrt{\tfrac{2}{3}gh_e} \quad \text{waarin} \quad m' = 1.045 + 0.141\frac{h_e}{a} \qquad (10.27)$$

en waarin h_e een z.g. effectief peilverschil is dat in de plaats is gekomen van de feitelijke, direct te meten waarde h_k volgens

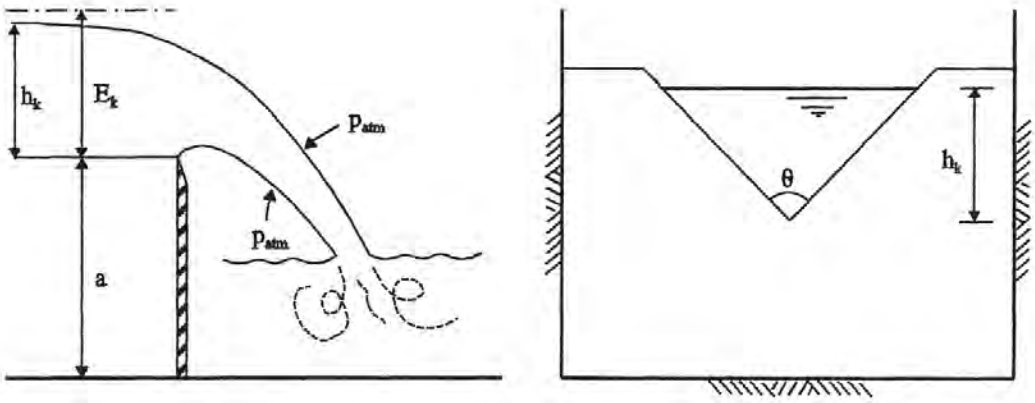
$$h_e = h_k + 1{,}1\,\text{mm} \qquad (10.28)$$

De correctieterm 1,1 mm brengt op empirische manier enige invloed van viscositeit en oppervlaktespanning in rekening voor meetstuwen in het laboratorium, en houdt een afwijking in van perfecte gelijkvormigheid volgens Froude. De waarde van h_k moet gemeten worden op een afstand van minstens 2a bovenstrooms van de stuw, en moet minstens 15 mm zijn (om kleven van de straal aan de stuw te voorkomen).

Wanneer relatief kleine debieten gemeten moeten worden is het voor de nauwkeurigheid gunstig de stroming te vernauwen, en wel zó dat de breedte van het doorstroomprofiel afneemt met afnemend debiet. Een voorbeeld daarvan is de V-stuw (Thomson-stuw), getekend in Figuur 10.14b. Voor het (totale) debiet daaroverheen geldt

$$Q = m(\tan\frac{\theta}{2})g^{\frac{1}{2}}h_k^{\frac{5}{2}} \qquad (10.29)$$

Meestal gebruikt men $\theta = \pi/2$; daarvoor is $m \approx 0.45$.



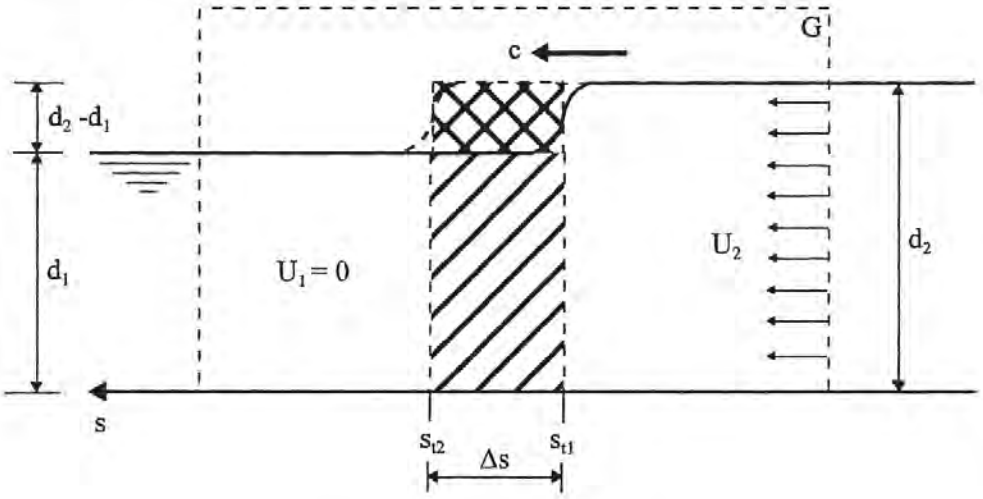
Figuur 10.14 Rehbock-stuw (a) en V-stuw of Thomson-stuw (b)

Voor beschrijvingen van de vele typen meetstuwen die zijn ontworpen en voor de daarbij horende afvoerformules en coëfficiënten wordt verwezen naar de desbetreffende boeken.

APPENDIX Berekening voortplantingssnelheid lopende watersprong (schokgolf)

Uitgaande van een sprong die zonder vormverandering en met constante snelheid een gebied inloopt met stilstaand water zullen we de waarde van de loopsnelheid (c) berekenen. De watersprong wordt als een discontinuïteit (schok) behandeld. Vóór de sprong is $U = U_1 = 0$ en $d = \text{constant} = d_1$; achter de sprong is $U = \text{constant} = U_2$ en $d = \text{constant} = d_2$. De massadichtheid stellen we in het hele gebied constant.

We kiezen een balansgebied G dat gedurende een zekere tijd de sprong bevat en stellen daarvoor balansen op van massa en impuls voor een tijdsinterval van t_1 tot $t_2 = t_1 + \Delta t$ (zie Figuur 10.15).



Figuur 10.15 Lopende schokgolf

Massabalans (berging = netto overdracht naar binnen; zie dubbelgearceerd gebied in Figuur):

$$\rho(d_2 - d_1)\Delta s = \rho U_2 d_2 \Delta t$$

Impulsbalans (berging van bodem tot oppervlak):

$$\rho U_2 d_2 \Delta s = (F_2 - F_1)\Delta t$$

waarin

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\rho g d_1^2 \quad \text{en} \quad F_2 = \tfrac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho U_2^2 d_2$$

Substitutie van $\Delta s = c\,\Delta t$ en uitwerken (elimineren van U_2) geeft

$$c^2 = g\frac{d_1 + d_2}{2}\frac{d_2}{d_1}$$

Dit komt overeen met de uitdrukking die op pag.146 met behulp van een bewegend assenstelsel is afgeleid uit de relaties tussen stroomsnelheden en diepten aan weerszijden van een stilstaande sprong.

11 STROMING ROND EEN STAR LICHAAM

11.1 Inleiding

In dit hoofdstuk behandelen we de stroming rondom een lichaam of voorwerp, bijv. een deel van een waterbouwkundige constructie, zowel om inzicht te krijgen in het verschijnsel als om de kracht te kunnen berekenen die de vloeistof en het voorwerp op elkaar uitoefenen. Toepassingen in de civiele techniek waarin die krachtswisselwerking van belang is zijn bijv.

- belasting door stroom en golven van offshore constructies;
- belasting door wind van (hoge) constructies;
- stromingsweerstand als gevolg van brugpijlers;
- stabiliteit en beweging van losse elementen (zandkorrel, betonblok) in stromend water.

Voor de wisselwerkingen tussen vloeistof en voorwerp is hun beweging t.o.v. elkaar van belang, en niet de eventuele beweging (of rust) van beide t.o.v. een andere referentie, bijv. de aarde. We maken hier daarom geen onderscheid tussen een "stilstaande" constructie in stromend water en een voorwerp dat door overigens "stilstaand" water beweegt. Voor beide categorieën gebruiken we een referentiestelsel dat vast aan het voorwerp is verbonden, zodat ten opzichte daarvan het voorwerp in rust is en alleen de vloeistof beweegt.

De component van de kracht van de vloeistof op het voorwerp in de richting van de relatieve stroomsnelheid is de z.g. **sleepkracht** ($\vec{F}_w$) (Engels: *drag force*); die in de dwarsrichting is de z.g. **liftkracht** ($\vec{F}_l$). (De sleepkracht kan ook worden gezien als een **weerstand** die het voorwerp en de vloeistof van elkaar ondervinden.)

We gaan uit van de volgende veronderstellingen:

- het lichaam of voorwerp is star en ondoorlatend;
- de massadichtheid en de viscositeit van de vloeistof zijn constant;
- de vloeistof strekt zich in alle richtingen zover uit dat de stroming om het voorwerp geen invloed ondergaat van eventuele andere begrenzingen dan die van het beschouwde voorwerp, zoals nabije vaste wanden of een vrij oppervlak (eventuele golfvorming, zoals bij stroming rond een brugpijler, blijft buiten beschouwing)
- de stroming is stationair (in een referentiestelsel ten opzichte waarvan het voorwerp in rust is).

De twee laatstgenoemde veronderstellingen houden in dat de vloeistofsnelheid ($\vec{u}$) op grote afstand van het voorwerp constant is in richting en grootte (u = constant = U).

Omdat we afzien van de invloed van een eventuele vrije vloeistofspiegel kan de zwaartekracht buiten beschouwing blijven; we werken dan met de dynamische druk, die we kortheidshalve met p weergeven (i.p.v. met p_d). In de ongestoorde stroming op grote afstand van het voorwerp is p constant (geen versnellingen).

Op grond van bovenstaande veronderstellingen is de stroming volledig bepaald door de volgende grootheden (zie ook par. 2.3.3):
- (dynamische) viscositeit (η),
- massadichtheid (ρ),
- ongestoorde snelheid (U),
- kenmerkende afmeting voorwerp (ℓ),
- vorm en oriëntatie van het voorwerp.

Uit de vier eerstgenoemde grootheden kan het dimensieloze kental van Reynolds worden geformeerd:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{U l}{\nu}$$

waarin $\nu = \eta/\rho$, de kinematische viscositeit. De vorm van het stroombeeld is hierbij uitsluitend een functie van Re en van de vorm en oriëntatie van het voorwerp (zie bijv. Figuur 2.3 voor de stroming rondom een bol bij twee verschillende waarden van Re).

De viscositeit is van groot belang voor het stroombeeld dat zich vormt rondom een voorwerp, maar de precieze rol ervan is lang onbegrepen gebleven. Voorafgaand aan een behandeling daarvan geven we eerst een samenvatting van enkele eigenschappen van de stroming van een niet-viskeuze (ideale) vloeistof om een voorwerp.

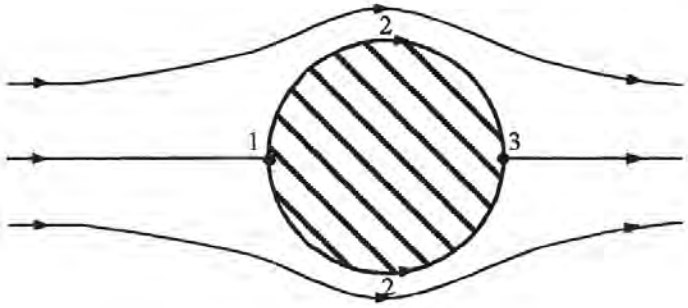
11.2 Ideale-vloeistof benadering

De beschouwde stroming is stationair en op grote afstand van het voorwerp ook uniform. In deze paragraaf gaan we bovendien uit van een ideale vloeistof; de stroming heeft dan een **uniforme energie** (zie par. 6.6), ook in de omgeving van het voorwerp en stroomafwaarts daarvan.

In de idealisering van een niet-viskeuze vloeistof vervalt η als parameter, en Re dus ook. In dit geval is het stroombeeld dus slechts afhankelijk van de vorm en oriëntatie van het voorwerp, ongeacht de waarden van ρ, U en ℓ.

In het grensvlak tussen het voorwerp en de vloeistof geldt voor de snelheid de randvoorwaarde dat de normaalcomponent ervan gelijk moet zijn aan nul ($u_N = 0$) vanwege de ondoorlatendheid en het stilstaan van het voorwerp. Voor een ideale (wrijvingsloze) vloeistof wordt aan de relatieve tangentiële component (u_t) aan het oppervlak van het voorwerp geen beperking opgelegd, ofwel: **slip** is toegestaan. (Maar een een viskeuze vloeistof "kleeft".)

Het stroombeeld in een ideale vloeistof rond een cirkelcilinder is getekend in Figuur 11.1.



Figuur 11.1 Stroombeeld ideale vloeistof rond cirkelcilinder

Een typerend kenmerk van zo'n ideale-vloeistofstroming is dat het stroombeeld omkeerbaar is: de oplossing voor de stroomlijnen en die voor de druk veranderen niet bij omkering van de stroomrichting (bij tekenwisseling van de snelheden). De stroming is symmetrisch t.o.v. een vlak haaks op de ongestoorde stroomrichting als het voorwerp dat ook is. In tegenstelling tot wat in de fysische werkelijkheid in veel gevallen wordt waargenomen laat de ideale-vloeistofstroom niet los van het voorwerp, maar blijft deze aanliggen vanaf het bovenstroomse stuwpunt (punt 1 in Figuur 11.1) tot aan het stuwpunt aan benedenstroomse zijde (punt 3).

We gaan nu na hoe de dynamische druk p varieert langs de stroomlijn door de stuwpunten. We gebruiken daarvoor de wet van Bernoulli in de vorm

$$p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant} = p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U^2$$

Langs de beschouwde stroomlijn neemt de dynamische druk bovenstrooms van het voorwerp in de stroomrichting toe tot aan het stuwpunt 1, waar $u = 0$ en $\Delta p = p - p_\infty = \tfrac{1}{2}\rho U^2$ (stuwdruk). Van dit punt tot aan de plaats van de grootste dwarsdoorsnede (2-2) versnelt de stroom tot snelheden groter dan U (bij een dwars aangestroomde cirkelcilinder tot 2U; zie Figuur 11.4a), zodat daar een onderdruk heerst ($\Delta p < 0$; bij een cirkelcilinder $\Delta p = -\tfrac{3}{2}\rho U^2$). Voorbij de

grootste dwarsdoorsnede vertraagt de stroom en neemt de druk toe, tot opnieuw de stuwdruk is bereikt ($\Delta p = \frac{1}{2}\rho U^2$) in het benedenstroomse stuwpunt (3) waar $u = 0$. Vandaar versnelt de stroom in stroomafwaartse richting tot deze asymptotisch weer de constante snelheid $u = U$ bereikt, waar $\Delta p = 0$.

Bovenstaande **ideale-vloeistof benadering** leidt via $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant}$ tot een **volledig drukherstel** aan de achterzijde. De bijbehorende drukkracht aan de achterzijde compenseert volledig die aan de voorzijde, zodat in deze benadering de netto sleepkracht nul is ($F_w = 0$). (Zie ook par. 9.5.4.) Dit resultaat, dat in strijd is met de ervaring, staat bekend als de **paradox van d'Alembert**. De paradox is pas opgeheven met de onderkenning van de rol van de viscositeit.

11.3 Invloed viscositeit

Als gevolg van de viscositeit wordt stromingsenergie gedissipeerd (in warmte omgezet) in gebieden met snelheidsgradiënten. Daardoor neemt $p + \frac{1}{2}\rho u^2$ af in de stroomrichting en is het stroombeeld niet omkeerbaar.

Een viskeuze vloeistof blijkt niet te kunnen slippen, in tegenstelling tot wat wordt gesteld voor een ideale vloeistof. De snelheid is een continue functie van de positie, zowel in de vloeistof zelf als in grensvlakken met andere materie. Ter plaatse van een stilstaande vaste wand geldt naast de voorwaarde van ondoorlatendheid (normaalcomponent $u_N = 0$) daarom voor een echte vloeistof (viscositeit niet gelijk aan nul) de z.g. **kleefconditie** (tangentiële component $u_t = 0$).

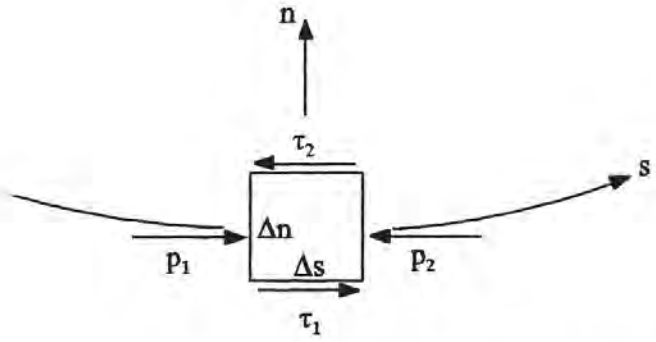
Als gevolg van de kleefconditie is het stroombeeld wezenlijk anders dan bij een niet-viskeuze vloeistof, hoe klein (relatief gezien) de viscositeit ook mag zijn, m.a.w., hoe groot Re ook mag zijn. Het stroombeeld is in de limiet voor tot nul naderende viscositeit ($\eta \to 0$, $Re \to \infty$) dus wezenlijk anders dan wanneer à priori de viscositeit nul wordt gesteld ($\eta = 0$).

Als gevolg van de viscositeit is de sleepkracht ongelijk aan nul ($F_w \neq 0$). Er is een directe bijdrage van de viscositeit aan F_w via de schuifspanning aan het oppervlak van het voorwerp (F_τ) en er is een indirecte bijdrage (F_p) via de druk omdat $p + \frac{1}{2}\rho u^2$ afneemt in de stroomrichting, zodat er geen of geen volledig drukherstel is aan de achterzijde. In totaal geldt $F_w = F_\tau + F_p$.

Het relatieve belang van schuifkrachten en drukkrachten in de stroom is o.m. afhankelijk van de waarde van het kental van Reynolds. Om daarin inzicht te krijgen geven we een dynamische interpretatie van Re. Daartoe gaan we uit van de vergelijking van Euler in de

$$\rho u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial \tau}{\partial n} \qquad (11.2)$$

stroomrichting (6.12s) waaraan we een viscositeitsterm toevoegen:
Hierin is τ de viskeuze schuifspanning ($\tau = \eta \partial u_s/\partial n$) en is $-\partial\tau/\partial n$ de daaruit resulterende kracht p.e.v. volume (zie Figuur 11.2).



$$p_2 - p_1 \approx \frac{\partial p}{\partial s}\Delta s$$

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \frac{\partial \tau}{\partial n}\Delta n$$

Figuur 11.2 Definitieschets

In de omgeving van het voorwerp, met kenmerkende afmeting ℓ, heersen over afstanden van grootte-orde ℓ snelheidsverschillen van grootte-orde U. De term $\rho u_s \partial u_s/\partial s$ (traagheid p.e.v. volume) is dan van de grootte-orde $\rho U^2/\ell$ (notatie: $\rho u_s \partial u_s/\partial s \sim \rho U^2/\ell$). Voor τ (schuifspanning) en $\partial\tau/\partial n$ (schuifkracht p.e.v. volume) geldt dan $\tau \sim \eta U/\ell$ respectievelijk $\partial\tau/\partial n \sim \eta U/\ell^2$. De verhouding van de traagheid tot de schuifkracht is dan van de grootte-orde

$$\frac{\text{traagheid}}{\text{schuifkracht}} \sim \frac{\rho U^2/\ell}{\eta U/\ell^2} = \frac{\rho U \ell}{\eta} = \text{Re}$$

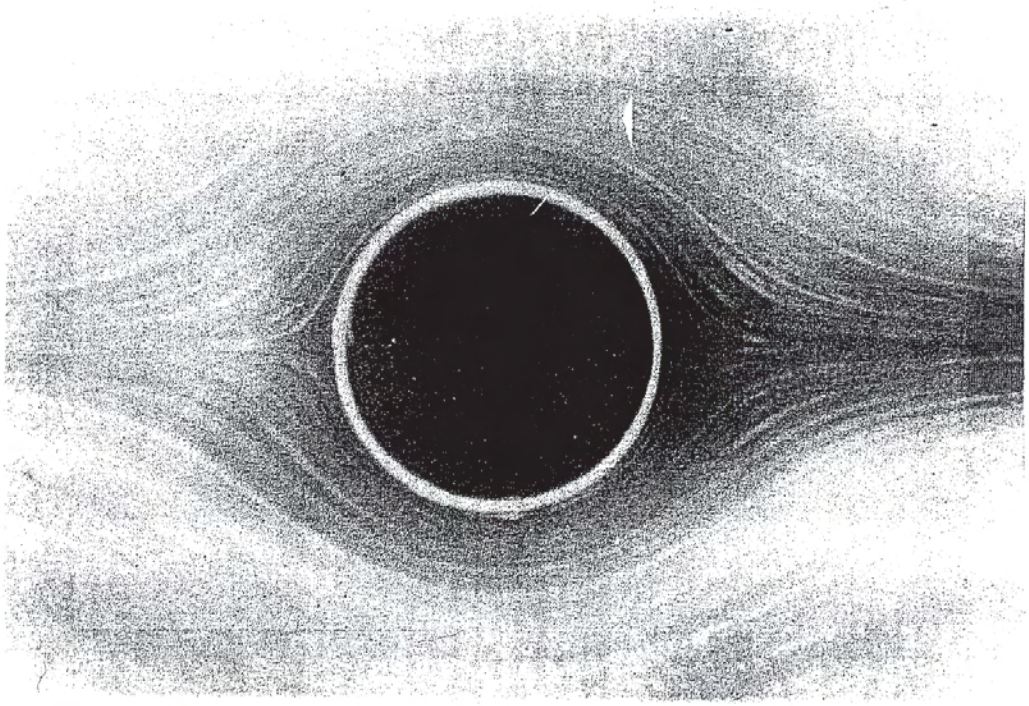
We zien hieruit de betekenis van Re voor de dynamica van de stroming. Als $\text{Re} << 1$ is de traagheid verwaarloosbaar en (zie (11.1)) is de drukgradiënt vrijwel in balans met de viscositeitsterm. Zulke stromen noemen we sterk-viskeus (bijv. grondwaterstroming in fijn zand; denk ook aan een gletsjer). Als $\text{Re} >> 1$ is de lokale invloed van de viscositeit verwaarloosbaar in het gebied waar bovenstaande grootte-ordes gelden, en is de drukgradiënt daar vrijwel in balans met de traagheidsterm (Bernoulli). We laten deze twee hoofdtypen achtereenvolgens de revue passeren.

11.4 Sterk-viskeuze stroming (Re << 1)

Figuur 11.3a geeft een voorbeeld van een sterk-viskeuze stroming rond een cirkelcilinder. De stroming blijft aanliggen. De variatie van de snelheid met de afstand uit de wand is voor de grootste dwarsdoorsnede geschetst in Figuur 11.4b. De snelheid neemt geleidelijk toe van de waarde u = 0 aan de wand (kleefconditie) tot u ≈ U op een afstand van enkele diameters daarvan (voor een willekeurig voorwerp: enkele malen de kenmerkende afmeting ℓ). De schuifspanningen in dit gebied zijn daarom van de orde $\eta U/\ell$. Hetzelfde geldt voor de drukvariaties, want $\partial p/\partial s$ en $\partial \tau/\partial n$ maken (bijna) evenwicht als Re << 1 (dus traagheid verwaarloosbaar). De respectievelijke bijdragen aan de sleepkracht op het voorwerp zijn in grootte-orde dan gegeven door $F_\tau \sim \tau\ell^2 \sim \eta\ell U$ en $F_p \sim \Delta p\ell^2 \sim \eta\ell U$, zodat ook $F_w = F_\tau + F_p \sim \eta \ell U$. Met de invoering van een dimensieloze coëfficiënt γ kunnen we dit schrijven als

$$F_w = \gamma \eta \ell U \tag{11.2}$$

Deze coëfficiënt γ is slechts afhankelijk van de vorm en oriëntatie van het voorwerp. Merk op dat de massadichtheid hierin niet voorkomt. Dat is logisch, want de traagheid is verwaarloosd omdat Re << 1.



Figuur 11.3a Stroming van links naar rechts om cirkelcilinder bij Re =0,16

Als voorbeeld van het bovenstaande geven wij enkele resultaten van Stokes (1851) die de sterk-viskeuze stroming rondom een bol heeft berekend. Stokes vindt voor de maximale schuifspanning de waarde $6\eta U/r_o$ (waarin r_o de straal is van de bol). De druk aan het boloppervlak blijkt monotoon af te nemen in de stroomrichting (dus ook aan de benedenstroomse zijde, i.t.t. stromen met geringe invloed van de viscositeit). Voor de totale sleepkracht vindt Stokes:

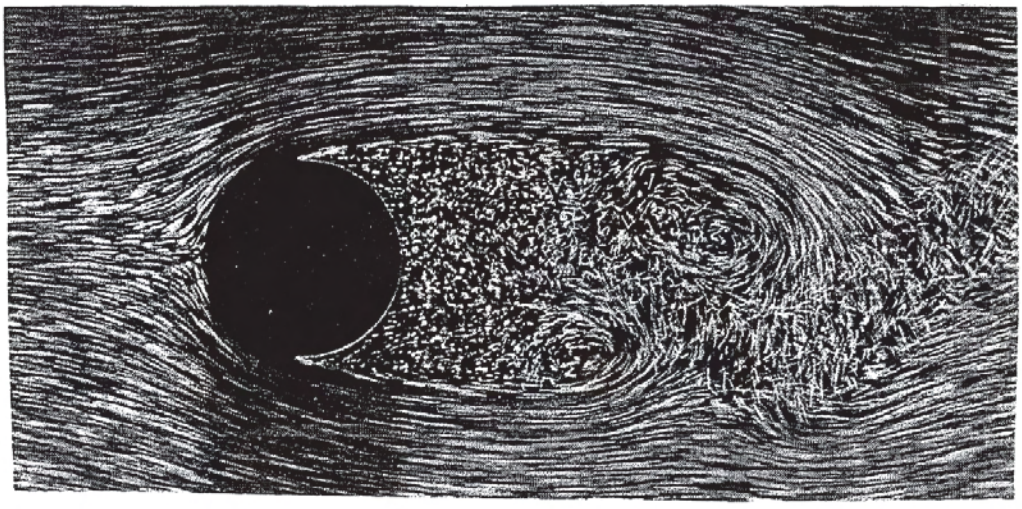
$$F_w = 6\pi\eta r_o U \tag{11.3}$$

Dit resultaat, afgeleid voor $Re \to 0$, blijkt empirisch geldig te zijn voor $Re <$ ca. 1 (zie par. 11.6).

Stokes' resultaat (11.3) wordt vooral gebruikt voor berekening van de valsnelheid van een bol (bijv. een klein sedimentkorreltje) in een viskeuze vloeistof. In par. 11.7 gaan we daar op in.

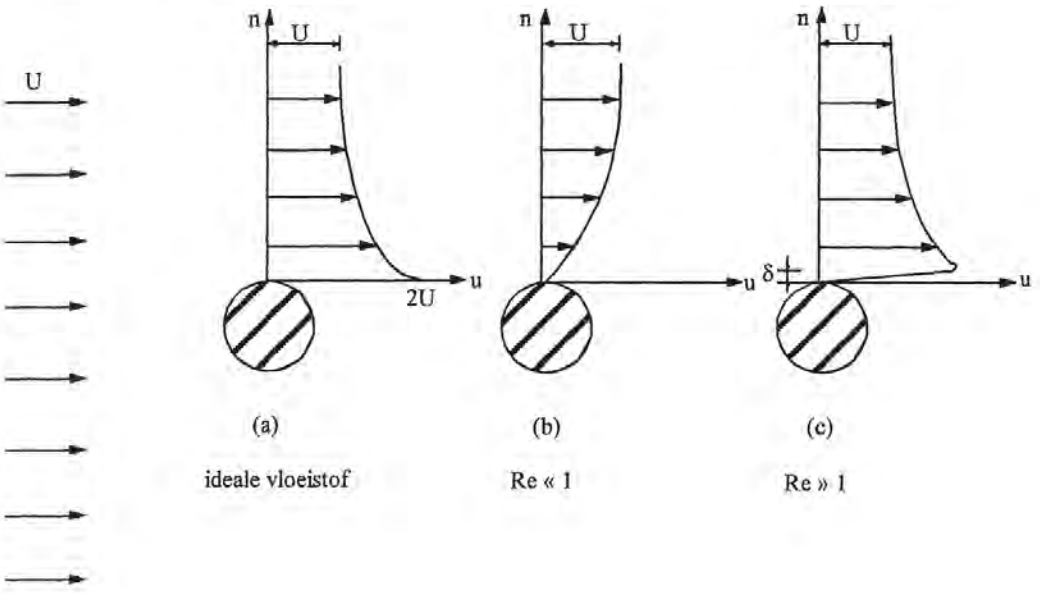
11.5 Zwak-viskeuze stroming (Re >> 1)

Figuur 11.3b geeft een voorbeeld van een zwak-viskeuze stroming (Re = 2000) rond een cirkelcilinder. Het stroombeeld is wezenlijk verschillend van het beeld bij een sterk-viskeuze stroming (Figuur 11.3a) en ook van dat in het ideale-vloeistof model (Figuur 11.1).



Figuur 11.3b Stroming van links naar rechts om cirkelcilinder bij Re=2000

Ook voor de zwak-viskeuze stroming geldt de kleefconditie, zodat u = 0 ter plaatse van de wand. Het verschil met de sterk-viskeuze stroming is dat in een zwak-viskeuze stroming om een voorwerp de snelheid varieert in een dunne laag, grenzend aan het voorwerp, van de waarde nul ter plaatse van het voorwerp tot de snelheid in het buitengebied (Figuur 11.4c). In deze z.g. **grenslaag** heerst dus een sterke snelheidsgradiënt, veel sterker dan die in het buitengebied. Alleen in deze dunne grenslaag zijn de schuifspanningen van betekenis. Het was **Prandtl** (1904) die dit idee introduceerde en die daarmee belangrijk heeft bijgedragen aan de ontwikkeling van de stromingsleer.

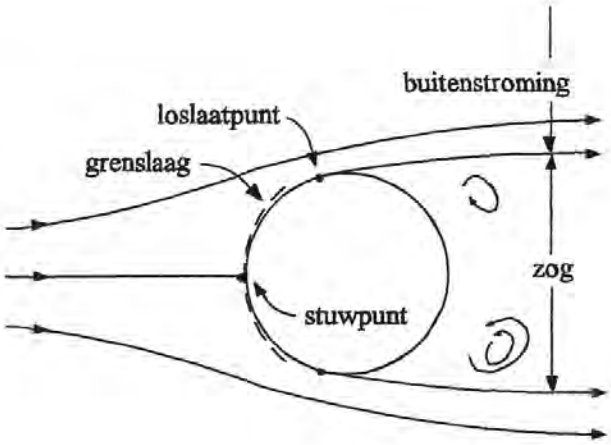


Figuur 11.4 Snelheidsprofielen naast cirkelcilinder

Hoe geringer de viscositeit, hoe groter het kental van Reynolds, en (zoals we zullen zien) hoe dunner de grenslaag (relatief). Maar, de kleefconditie blijft en daarmee ook het essentiële verschil tussen de stroming van een ideale vloeistof (Figuur 11.4a) en die van een viskeuze vloeistof (Figuur 11.4c; grenslaagdikte overdreven groot getekend).

Een principeschets van de zwak-viskeuze stroming rond een niet-gestroomlijnd voorwerp is gegeven in Figuur 11.5. We onderscheiden daarin de volgende gebieden:

(a) een relatief dunne **grenslaag** van de voorzijde tot ongeveer de grootste dwarsdoorsnede;
(b) een zone van **loslating** van de grenslaagstroming;
(c) een **zog** benedenstrooms van het voorwerp, voorbij de loslaatpunten;
(d) een **buitengebied** buiten grenslaag en zog.



Figuur 11.5 Schetsmatig stroombeeld Re>>1

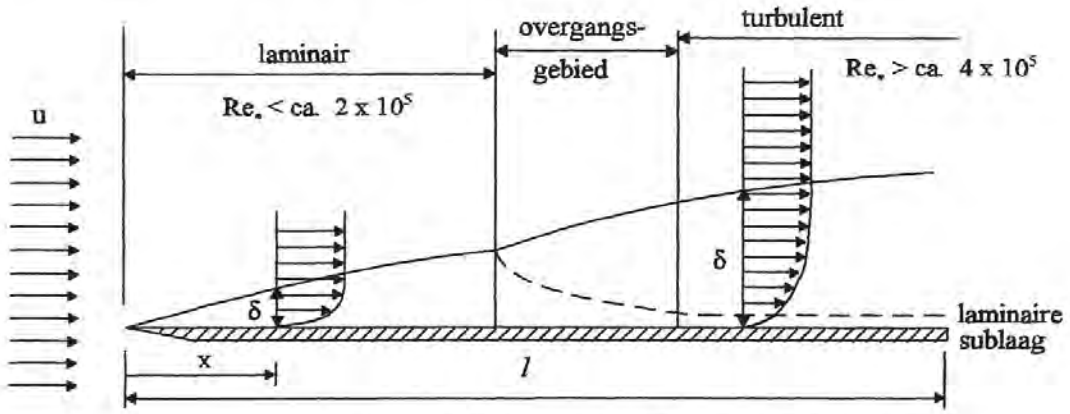
Buitenstroming

In het buitengebied varieert de snelheid met een waarde ~ U over afstanden ~ ℓ. Het feit dat $Re = U\,\ell/\nu >> 1$ houdt dus in dat in de buitenstroming de schuifspanningen verwaarloosbaar zijn. In deze benadering heeft de buitenstroming een uniforme energie (vergelijk Figuur 11.4a met Figuur 11.4c, buitengebied). De drukvariaties in de buitenstroming voldoen dan vrijwel aan $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant}$ en zijn daarom van de grootte-orde $\frac{1}{2}\rho u^2$.

Ondanks het bovenstaande kan niet gezegd worden dat de buitenstroming identiek is aan die van een ideale vloeistof rond hetzelfde voorwerp. De begrenzing ervan is immers anders, vooral als gevolg van de loslating van de grenslaagstroming en de zogvorming; deze verschijnselen zelf zijn het gevolg van de werking van de viscositeit. Voor een begrip ervan gaan we in op het fenomeen "grenslaag", om te beginnen voor de stroming langs een vlakke plaat.

Grenslaag langs vlakke plaat

We gaan uit van een vlakke, gladde plaat die in zijn vlak wordt aangestroomd (Figuur 11.6). De druk in de buitenstroming is daarbij constant. Langs de plaat bestaat een relatief dunne zone, de z.g. grenslaag, waarin de snelheid varieert in dwarsrichting van $u = 0$ op de plaat (kleef) tot $u = U$ in de buitenstroming. In elke dwarsdoorsnede (afstand x benedenstrooms van de bovenstroomse rand) is aan de grenslaag een zekere dikte (δ) toe te kennen (bijv. $\delta_{99\%}$, de afstand van de plaat tot het punt waar $u = 0{,}99\,U$). De snelheidsgradiënt overdwars ($\partial u/\partial n$) in de grenslaag is dus van de grootte-orde U/δ, en de wandschuifspanning (τ_o) is van de grootte-orde $\eta U/\delta$ (zolang de grenslaagstroom laminair is).



Figuur 11.6 Grenslaag langs vlakke plaat

Als gevolg van de wandweerstand neemt de snelheid van de vloeistofdeeltjes die dicht langs de plaat stromen af in de stroomrichting. Deze deeltjes remmen vervolgens de vloeistof op wat grotere afstand. Dit leidt ertoe dat met toenemende afstand benedenstrooms de grenslaagdikte (δ) toeneemt (zie Figuur 11.7), waardoor de dwarse snelheidsgradiënt ($\partial u/\partial n \sim U/\delta$) en dus de (wand)schuifspanning ($\tau_o \sim \eta U/\delta$) in die richting afnemen.

De grenslaaggroei is af te leiden uit een impulsbalans. Langs de vlakke plaat is de druk in het buitengebied constant. De wandweerstand over een afstand x vanaf de bovenstroomse rand (evenredig met $\tau_o x$ ofwel $(\eta U/\delta)x$) is daarom in balans met de vermindering van impulsoverdracht over die lengte (evenredig met $\rho U^2\delta$). Hieruit volgt (in grootte-orde)

$$\delta^2 \sim \frac{\nu x}{U}$$

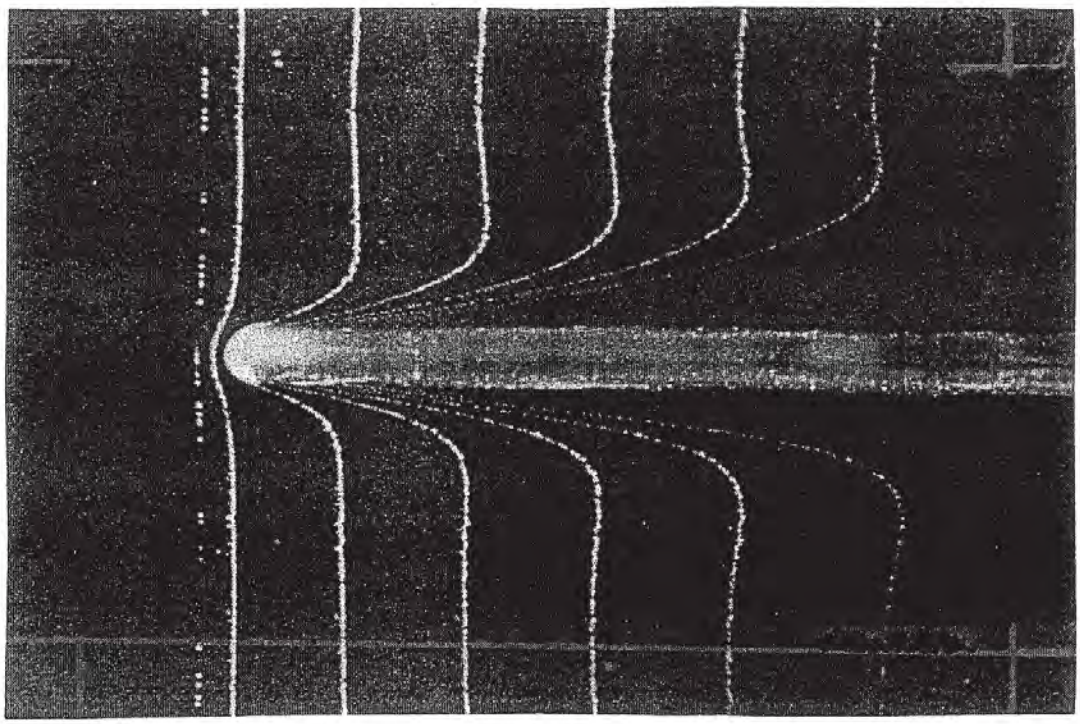
De grenslaagdikte neemt dus toe evenredig met de vierkantswortel uit de afstand benedenstrooms van de aanstroomrand (zie Figuur 11.6 en 11.7). Blasius (zie Schlichting, 1958) heeft berekend dat $\delta_{99\%} \cong 5\sqrt{\nu x/U}$. Metingen hebben de geldigheid hiervan bevestigd.

Voor de grootte-orde van de maximale grenslaagdikte, aan het benedenstroomse einde van de plaat, waar $x = \ell$, geldt

$$\delta \sim \left(\frac{\nu \ell}{U}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ofwel

$$\frac{\delta}{\ell} \sim \left(\frac{U\ell}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} = Re_\ell^{-\frac{1}{2}} \qquad (11.4)$$



Figuur 11.7 *Groei van grenslaagdikte bij aanstroming van een 0,5 mm dikke plaat, zichtbaar gemaakt door een aanvankelijk rechte lijn van waterstofbelletjes op een aantal tijdstippen te fotograferen. Bron: Nakayama (1988).*

Hieruit zien we dat voor een zwak-viskeuze stroming ($Re_\ell >> 1$) de grenslaag inderdaad relatief dun is ($\delta/\ell << 1$), zoals hierboven al werd gesteld (in de figuren is de grenslaagdikte zwaar overdreven). Ook volgt hieruit dat de schuifspanningen in de grenslaag ($\sim \eta U/\delta$) veel groter zijn dan die in de buitenstroming ($\sim \eta U/\ell$); hierop berust in feite het belang van het concept van de grenslaag.

Omdat de grenslaagdikte δ toeneemt in benedenstroomse richting evenredig met $x^{1/2}$, neemt de wandschuifspanning af omgekeerd evenredig met $x^{1/2}$:

$$\tau_o \sim \eta U/\delta \sim \eta U(\nu x/U)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} \rho U^2$$

Voor de over de plaatlengte (ℓ) gemiddelde schuifspanning $<\tau_o>$ geldt dan

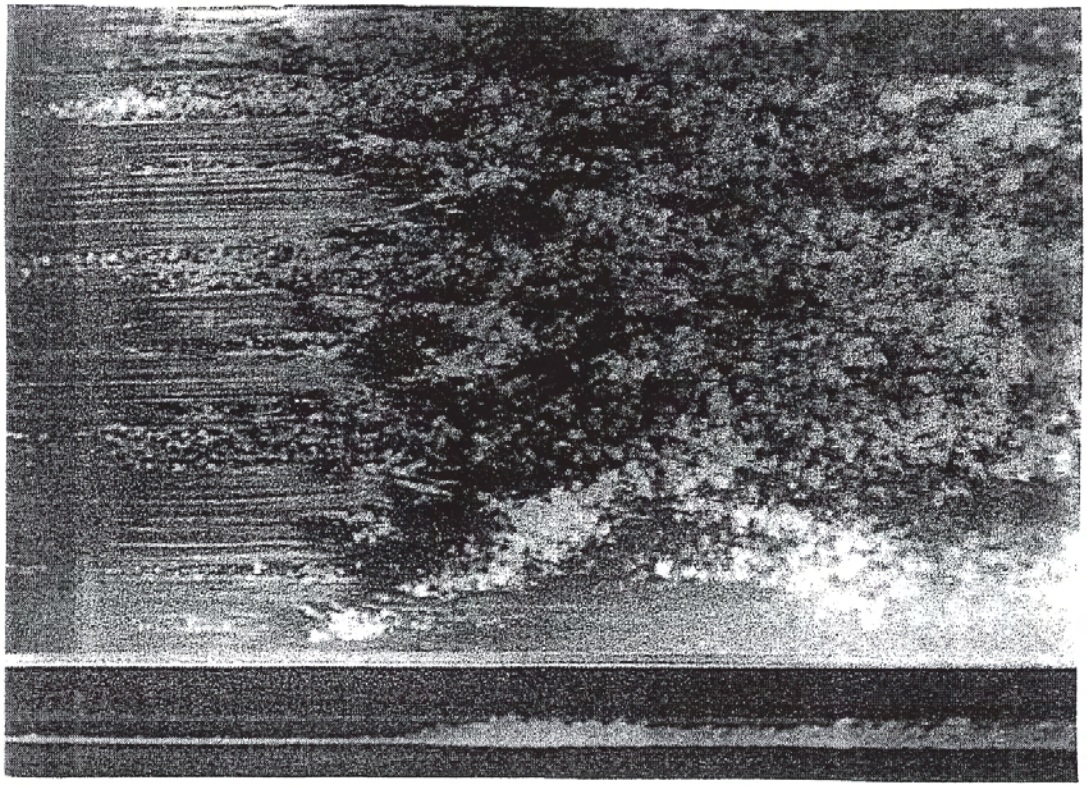
$$<\tau_o> \sim \left(\frac{U\ell}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} \rho U^2 = Re_\ell^{-\frac{1}{2}} \rho U^2$$

ofwel

$$\langle\tau_0\rangle = c_\tau \rho U^2 \tag{11.5}$$

waarin de wrijvingscoëfficiënt c_τ van de grootte-orde $Re_\ell^{-1/2}$ is (volgens Blasius geldt $c_\tau = 0{,}664/\sqrt{Re_\ell}$). We zien dat de wandschuifspanning in een zwak-viskeuze stroming ($Re_\ell >> 1$, dus $c_\tau << 1$) veel kleiner is dan de stuwdruk ($\frac{1}{2}\rho U^2$).

Het bovenstaande is gebaseerd op laminaire stroming in de grenslaag. Waar $Re_x = Ux/\nu$ een waarde van ca. 2×10^5 overschrijdt, bij stroming langs een gladde wand, slaat de grenslaagstroming echter om naar turbulent (zie Figuur 11.8), afgezien van een laminaire sublaag vlak bij de wand. De grotere menging die daarvan het gevolg is brengt hoge-snelheid vloeistof (met snelheid ongeveer gelijk aan U) tot dicht bij de plaat; de snelheidsgradiënt $\partial u/\partial n$ vlak bij de plaat wordt daardoor groter dan voor de laminaire stroming, en de wandschuifspanning en c_τ ook.



Figuur 11.8 Overgang van laminaire stroom naar turbulente stroom in grenslaag op vlakke plaat in bovenaanzicht (boven) en in zijaanzicht (onder). Bron: Nakayama (1988).

N.B.1 In stromingen van water door/over/rondom civieltechnische constructies is de lengte van de eventuele laminaire zone onbetekenend. Neem bijv. stromend water met U = 2 m/s; dan is al voldaan aan $Re > 2 \times 10^5$ voor $x > 0{,}1$ m; die afstand is verwaarloosbaar t.o.v. afmetingen van civieltechnische constructies. Bovendien is daarbij de aankomende stroming zelf al turbulent, en gaat het vaak om ruwe oppervlakken. Er is dan altijd sprake van turbulente grenslaagstroming.

N.B. 2 De dikte van een turbulente grenslaag neemt toe in benedenstroomse richting, met als gevolg een in die richting afnemende schuifspanning. Dit doet zich bijv. voor in de grenslaag bij de bodem benedenstrooms van een schuif waar water onderdoor stroomt; daarbij is het afnemen van de schuifspanning bij de bodem van belang voor het ontwerp van de benodigde lengte en opbouw van een eventuele bodembescherming; die kan uit minder stabiele, lichtere elementen bestaan op grotere afstand benedenstrooms.

Grenslaag bij voorwerp met dwarsafmeting

In tegenstelling tot de in zijn vlak aangestroomde vlakke plaat bekijken we nu een voorwerp met een dwarsafmeting (zie bijv. Figuur 11.3b). Daarbij is de druk in de buitenstroming niet constant maar varieert deze volgens Bernoulli. Deze druk, met variaties Δp van de grootte-orde $\frac{1}{2}\rho U^2$, werkt door over de hele grenslaagdikte omdat die relatief klein is.

De drukgradiënt in de stroomrichting ($\partial p/\partial s$) beïnvloedt de groei van de grenslaag. Aan de voorzijde (bovenstroomse zijde) van het voorwerp, waar de buitenstroom versnelt (d.w.z. tussen punt 1 en punt 2 in Figuur 11.1), werkt de drukkracht op een deeltje in de richting van de stroom ($\partial p/\partial s < 0$). Dit compenseert voor een deel de invloed van de wandweerstand, zodat de stroming in de grenslaag minder vertraagt en de grenslaag dus minder sterk groeit dan bij de vlakke plaat (waar $\partial p/\partial s = 0$). Aan de benedenstroomse zijde, waar in de ideale-vloeistof benadering de druk weer toeneemt ($\partial p/\partial s > 0$), werkt de drukkracht tegen de stroomrichting in. Dat versterkt de werking van de wandweerstand, resulterend in een versterkte vertraging van de stroming in de grenslaag en een versterkte groei van de grenslaagdikte.

Loslating van de stroom

De door de tegenwerkende drukgradiënt versterkte vertraging leidt ertoe dat de grenslaagstroming het in Figuur 11.1 gemerkte punt 3 niet haalt, maar eerder tot stilstand komt; verder benedenstrooms veroorzaakt de drukgradiënt langs het voorwerp zelfs een stroom tegen de oorspronkelijke richting in. Het punt waar de snelheid langs de wand van teken omkeert is een stuwpunt; daar laat de stroom los van de wand. Uit het bovenstaande

volgt: **loslating is het gevolg van de combinatie van wandweerstand en een (te sterke) vertragende drukgradiënt.**

N.B. De in zijn vlak aangestroomde vlakke plaat geeft wel weerstand, maar omdat in dat geval de drukgradiënt gelijk is aan nul treedt daar geen loslating op. Bij sterk-viskeuze stromingen rond een voorwerp is aan benedenstroomse zijde zelfs sprake van een in de stroomrichting afnemende druk (zie par. 11.4); om die reden treedt in die stromingen evenmin loslating op, zoals te zien is in Figuur 2.3a en Figuur 11.3a.

Bij toenemende waarden van Re wordt de grenslaag weliswaar relatief dunner, maar hij verdwijnt niet omdat het verschijnsel kleef blijft. Evenmin zal de stroming bij een bepaalde grote waarde van Re weer gaan aanliggen i.p.v. loslaten. Daarom is de stroming van een echte vloeistof, ook als $\eta \to 0$ en $Re \to \infty$, totaal anders dan die van een ideale vloeistof.

Wervelvorming en loslating

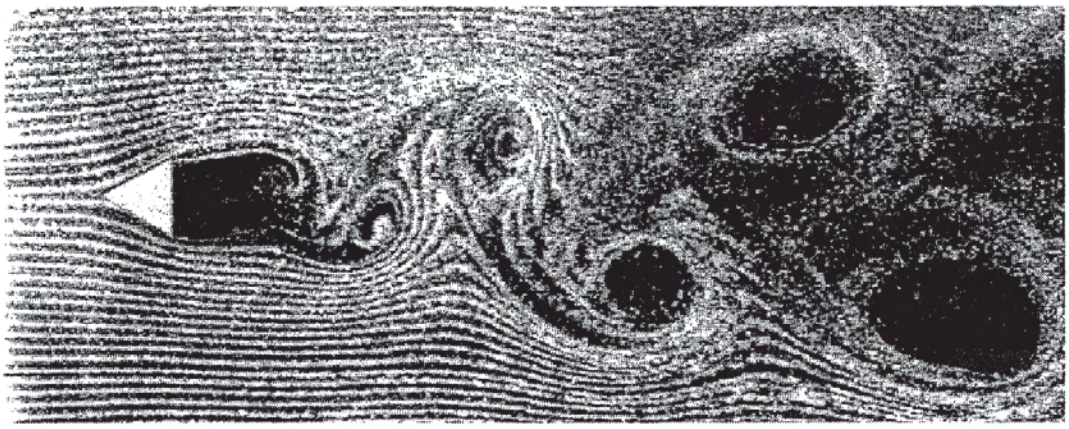
Bij niet al te lage waarden van Re vormen zich ter plaatse van het loslaatpunt voortdurend **wervels** die groeien, loslaten en dan stroomafwaarts worden meegevoerd, waarna het proces zich herhaalt. In de overgangszone tussen zog en buitenstroming, benedenstrooms van het loslaatpunt, bevindt zich daardoor een rij van wervels, een z.g. **wervelstraat**. Voor matig grote waarden van Re is het proces van groei en loslating van wervels vrijwel periodiek. De frequentie (f) ervan wordt dimensieloos gemaakt tot het zg. **kental van Strouhal**:

$$St = \frac{f\ell}{U}$$

De waarde hiervan is afhankelijk van Re en van de vorm en oriëntatie van het voorwerp. Voor stroming rond cirkelcilinders met diameter D is $St = fD/U$, met een waarde die voor Re tussen ca. 10^2 en 10^4 vrijwel constant is en gelijk aan ca. 0,21 (dus f = ca. 0,21 U/D).

In min of meer twee-dimensionale stromen rondom langwerpige voorwerpen (bijv. schoorsteenpijpen, poten van offshore platforms) alterneren de groei en loslating van de kjwervels aan de ene zijde van het voorwerp met die aan de andere zijde (Figuur 11.9) als gevolg van de onderlinge beïnvloeding van de wervels. Dit leidt tot een cyclisch variërende asymmetrie in snelheden en drukken, met als gevolg fluctuerende krachten, ook haaks op de stroomrichting (lift). In de respons hierop kan het voorwerp, indien dit elastisch is of elastisch wordt ondersteund, overdwars gaan trillen (soms hoorbaar als het "zingen" van kabels in de wind). Wanneer de loslaatfrequentie samenvalt met de eigenfrequentie van de elastische constructie kan dit ernstige gevolgen hebben.

Wegens het alternerend loslaten van de wervels aan weerszijden van een dwars omstroomd langgerekt voorwerp liggen de twee wervelstraten versprongen t.o.v. elkaar (Figuur 11.9). Dit is theoretisch onderzocht door Von Karman, die aantoonde dat een symmetrische configuratie instabiel is en dat er één stabiele, asymmetrische configuratie is. Deze wordt daarom de **wervelstraat van Von Karman** genoemd.



Figuur 11.9 Momentopname van een stroming rondom een driehoekig prisma bij Re = 170, zichtbaar gemaakt m.b.v. waterstofbelletjes. Bron: Nakayama, 1988.

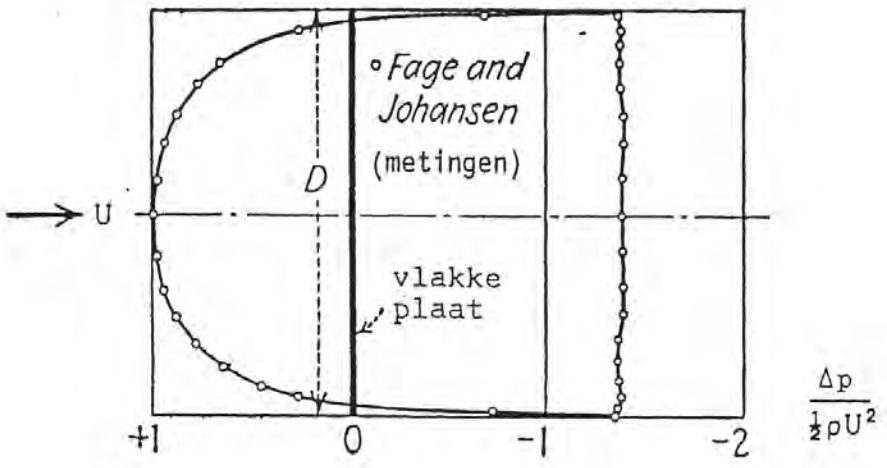
Op relatief korte afstand van de loslaatpunten kunnen de bewegingen in de wervels heftig zijn. In de waterbouwkunde is dit vooral bekend i.v.m. de aantasting van de bodem die daarvan het gevolg kan zijn benedenstrooms van landhoofden, kribkoppen etc., en waartegen over een zekere afstand een bodembescherming nodig kan zijn. Met toenemende afstand benedenstrooms worden de wervels groter en zwakker en ook minder goed gedefinieerd.

Zogstroming

Het gevolg van loslating is het ontstaan van een zog met relatief lage snelheden en met een relatief lage, vrijwel constante druk aan de achterzijde van het voorwerp. Er is geen drukherstel meer tot aan de stuwdruk; de drukken aan voorzijde en achterzijde zijn niet meer gelijk, waardoor een bijdrage aan de sleepkracht ontstaat evenredig aan $\frac{1}{2}\rho U^2$ (naast die van de schuifspanning).

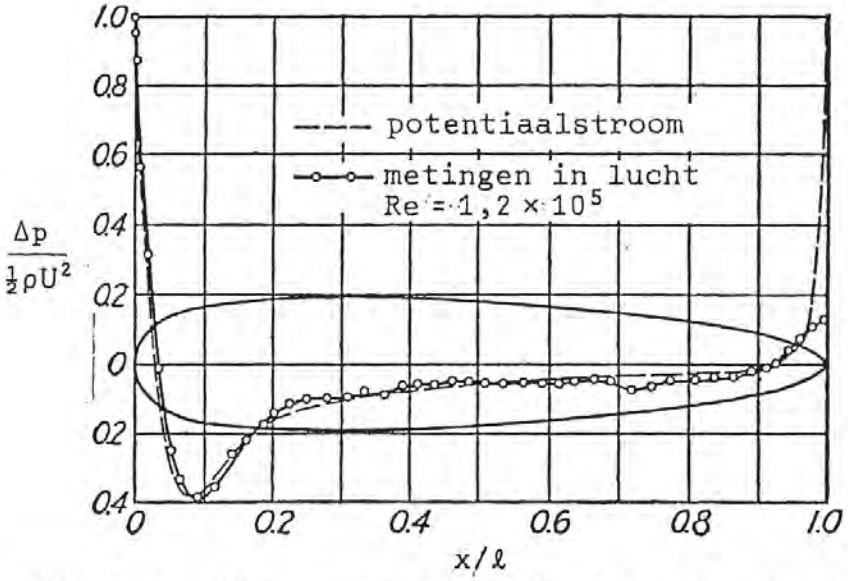
De plaats van loslating is bij gegeven Re nog afhankelijk van de vorm en oriëntatie van het voorwerp. Bij een abrupte beëindiging aan benedenstroomse zijde, zoals bij een hoekig dwarsprofiel (bijv. vierkante staaf), zou bij niet-loslaten een sterke vertraging optreden,

gepaard gaande met een sterk tegenwerkende drukgradiënt. Die veroorzaakt dan juist loslating. In dat geval is van enig drukherstel aan benedenstroomse zijde geen sprake (zie Figuur 11.10), en is er een relatief grote sleepkracht.



Figuur 11.10 Drukverdeling langs vlakke plaat haaks op de stroming. Bron: Rouse (1938)

Door stroomlijning (geleidelijk reducerende dwarsafmeting aan de achterzijde) wordt de tegenwerkende drukgradiënt gereduceerd en kan de stroming over een zekere afstand blijven aanliggen in het vertragingsgebied, waarbij eveneens nog een zeker drukherstel optreedt (Figuur 11.11).



Figuur 11.11 Drukverdeling langs gestroomlijnd profiel Bron: Rouse (1938)

11.6 Sleepkracht

We gaan nu na wat het voorgaande inhoudt voor de sleepkracht. Deze bestaat uit de som van de bijdragen van schuifspanning en druk, geïntegreerd over het oppervlak van het voorwerp, waarbij de component van de kracht in de (relatieve) stroomrichting moet worden genomen.

Sterk-viskeuze stroming (Re << 1)
In dit geval zijn de schuifspanningen en de drukvariaties van dezelfde grootte-orde, gegeven door $\tau \sim \Delta p \sim \eta U/\ell$. Voor de totale sleepkracht geldt dan $F_w \sim \eta U \ell$ (zie par. 11.4).

Zwak-viskeuze stroming (Re >> 1)
In dit geval is $\tau_o \sim \eta U/\delta \sim c_\tau \rho U^2$, waarin $c_\tau \sim Re_\ell^{-1/2}$, en is $\Delta p \sim \frac{1}{2}\rho U^2$. Omdat $c_\tau << 1$ (want $Re_\ell >> 1$) is $\tau_o << \Delta p$ en zal F_p ver overheersen (behalve bij zeer langgerekte dwarsprofielen). Daarom stellen we F_w evenredig aan $\frac{1}{2}\rho U^2$ en aan de oppervlakte (A) van het voorwerp, geprojecteerd in de stroomrichting (vaak is dit de oppervlakte van de grootste dwarsdoorsnede):

$$F_w = c_w \tfrac{1}{2}\rho U^2 A \qquad (11.6)$$

De z.g. sleep- of weerstandscoëfficiënt c_w (Engels: "*drag coefficient*", c_d) is een functie van de vorm en oriëntatie van het voorwerp en van de waarde van Re.

Hoewel vergelijking (11.6) bedoeld is voor zwak-viskeuze stromen is het gebruikelijk deze in het hele bereik van Re toe te passen. Voor lage waarden van Re, waar de stroming in feite sterk viskeus is, geldt dan

$$F_w \sim \eta U \ell \sim c_w \tfrac{1}{2}\rho U^2 \ell^2$$

ofwel

$$c_w \sim \frac{\eta}{\rho U \ell} = \frac{1}{Re}$$

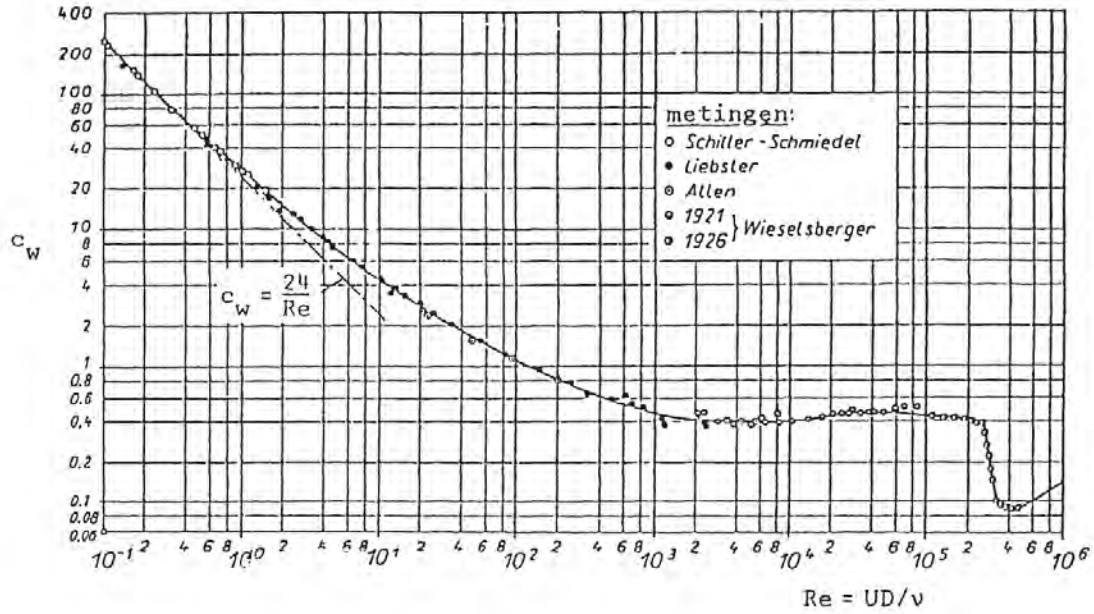
Voor een bol bijvoorbeeld geldt in het sterk viskeuze regime (zie vgl. (11.3)):

$$F_w = 3\pi\eta D U = c_w(\tfrac{1}{2}\rho U^2)(\frac{\pi}{4}D^2)$$

waar uit volgt

$$c_w = 24\frac{\eta}{\rho UD} = \frac{24}{Re} \qquad (11.7)$$

Het oneigenlijke gebruik van (11.6) voor sterk-viskeuze stromen wordt zodoende gecompenseerd door c_w omgekeerd evenredig met Re te laten variëren.

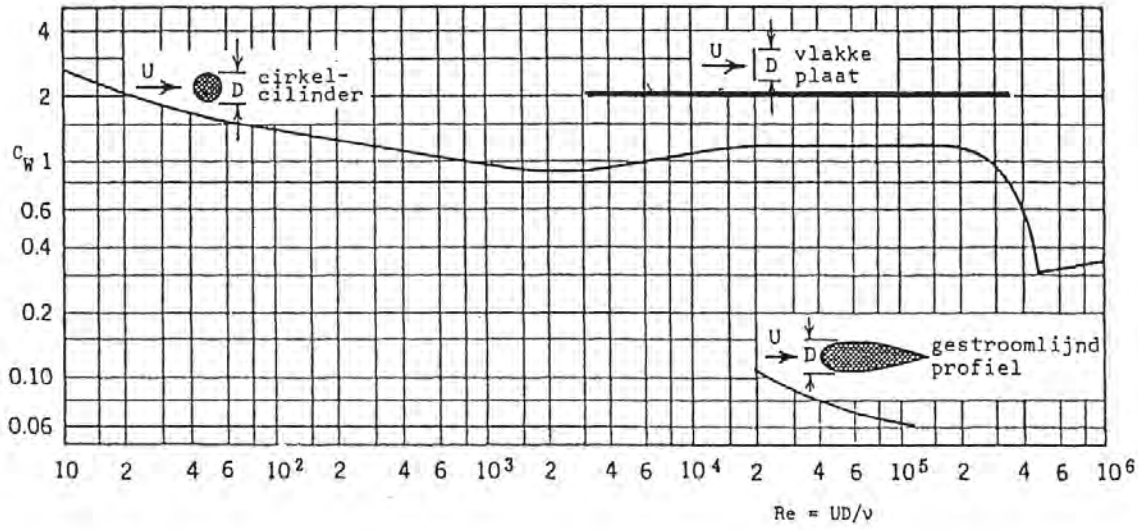


Figuur 11.12 Weerstandscoëfficiënt c_w voor bol

Figuur 11.12 geeft gemeten waarden van c_w voor een bol als functie van Re. We merken daarbij het volgende op:

- Vgl. (11.7) stemt goed met de meetwaarden overeen voor Re < ca. 1. Dit bevestigt de geldigheid van de theorie van Stokes en legt het toepassingsgebied ervan vast.
- Met toenemende waarden van Re van ca. 1 tot ca. 10^3 neemt de gevoeligheid van c_w voor Re af; dit is het gevolg van het toenemend relatieve belang van de traagheid. Voor Re tussen ca. 10^3 en ca. 2×10^5 is c_w zelfs vrijwel onafhankelijk van Re; in dat gebied is F_w dus vrijwel evenredig met U^2.
- Voor Re tussen ca. 2×10^5 en ca. 3×10^5 vertoont c_w een scherpe en sterke daling (de z.g. "drag crisis"). Dit is het gevolg van de omslag van de grenslaagstroming van laminair naar turbulent (vergelijk met Figuur 11.8). Dankzij de daardoor vergrote menging van hoge-snelheid vloeistof uit de buitenstroming met de langzamere grenslaag-vloeistof leidt dit tot een langer aanliggen van de stroom, een smaller zog en

daarin een hogere druk dan bij de laminaire grenslaagstroming. (Deze omslag vindt bij een ca. tien keer lagere waarde van Re plaats als het oppervlak van de bol ruw is, zoals dat van een golfbal.)



Figuur 11.13 *Weerstandscoëfficiënt c_w voor cirkelcilinder, vlakke plaat (dwars) en gestroomlijnd profiel.*

Figuur 11.13 geeft gemeten waarden van c_w voor enkele andere profielen. We merken daarbij het volgende op:

- Voor de cirkelcilinder gelden m.b.t. de loslaatpunten soortgelijke opmerkingen als voor de bol.
- In de stroming rond de dwars-aangestroomde vlakke plaat zijn de loslaatpunten gefixeerd, en is de vorm van de drukverdeling (zoals gegeven in Figuur 11.10) constant voor Re > ca. 10^3. Hetzelfde geldt dan voor de waarde van c_w. Dit is in het algemeen het geval voor hoekige profielen.
- In geval van een gestroomlijnd profiel is de tegenwerkende drukgradiënt zwak, waardoor de stroom lang kan blijven aanliggen en er een significant drukherstel optreedt (zie Figuur 11.11). Daardoor kan de c_w-waarde blijkbaar met meer dan een factor 10 worden gereduceerd t.o.v. de waarde voor niet-gestroomlijnde profielen.

Omdat F_p sterk samenhangt met de vorm van het voorwerp noemt men deze de **vormweerstand**. De bijdrage F_τ noemt men de **huidweerstand**. Zoals hierboven al is opgemerkt is $\tau_o << \Delta p$ voor zwak-viskeuze stromen; daardoor is de vormweerstand in de meeste gevallen veel groter dan de huidweerstand. Alleen gestroomlijnde profielen (waarvoor de dwarsoppervlakte A klein is t.o.v. de feitelijke oppervlakte) kunnen hierop een uitzondering maken, en dat te meer naarmate Re lager is (grotere c_τ).

In schaalmodellen van (grotere) prototypen kan men de c_w-waarden van de prototypen bepalen mits er sprake is van geometrische gelijkvormigheid (gelijke vorm en oriëntatie), gelijkvormige aanstroming, en dynamische gelijkvormigheid (gelijke waarde van Re). In geval van hoekige profielen, waarbij c_w constant is voor Re > ca. 10^3, hoeft de modelwaarde van Re niet gelijk te zijn aan de prototypewaarde, mits in beide gevallen Re > ca. 10^3. Voor ronde profielen geldt iets analoogs, mits de grenslaagstroming turbulent is. In schaalmodellen van de stroming rondom constructies in open water, met invloed van een vrij oppervlak, wordt er meestal voorrang aan gegeven in het model dezelfde waarde te hebben van het kental van Froude als in het prototype, en wordt er water in de wijn gedaan m.b.t. het kental van Reynolds.

Energieverlies

Als gevolg van de weerstand gaat stromingsenergie "verloren" (omgezet in warmte). Het gedissipeerde vermogen is

$$P_{diss} = F_w U$$

of

$$P_{diss} = c_w \tfrac{1}{2} \rho U^3 A \qquad (11.8)$$

Omgekeerd moet dit vermogen geleverd worden om het voorwerp door een vloeistof of gas te bewegen (luchtweerstand van vliegtuigen, auto's etc.). Het energieverlies door stromingsweerstand bij overbrugging van een gegeven afstand L met snelheid U is $F_w L$; dit varieert bij hoge waarden van Re (waarvoor $c_w \approx$ constant) dus ongeveer kwadratisch met U.

11.7 Valsnelheid

Een voorwerp dat door de zwaartekracht in een vloeistof valt ondervindt een weerstand. Bij een eenparige beweging maakt het gewicht minus de opwaartse hydrostatische drukkracht

evenwicht met de weerstand. De snelheid waarbij dit gebeurt is de **valsnelheid (w)**. Stel M is de massa van het voorwerp en V het volume, dan geldt in de stationaire toestand (versnelling nul):

$$(M-\rho V)g = F_w$$

Voor een massief voorwerp met uniforme massadichtheid ρ_s wordt dit

$$(\rho_s-\rho)gV = F_W \tag{11.9}$$

Voor een bol met diameter D kan dit worden uitgewerkt tot

$$(\rho_s-\rho)g\tfrac{\pi}{6}D^3 = c_w\tfrac{1}{2}\rho w^2\tfrac{\pi}{4}D^2$$

zodat

$$w^2 = \frac{4}{3c_w}\Delta g D \tag{11.10}$$

waarin $\Delta = (\rho_s - \rho)/\rho$. Met gebruikmaking van het bekende verband tussen c_w en $Re = wD/\nu$ (Figuur 11.12) kan w hieruit worden berekend bij gegeven waarden van Δ, g, D en ν. Omdat c_w o.m. van de valsnelheid w afhangt is het handig om (11.10) eerst als volgt dimensieloos te maken:

$$c_w\frac{w^2D^2}{\nu^2} = c_wRe^2 = \frac{4}{3}\frac{\Delta gD^3}{\nu^2} \tag{11.11}$$

Hierin is het linkerlid uitsluitend een functie van Re, zodat

$$Re = \frac{wD}{\nu} = f_1\left(\frac{\Delta gD^3}{\nu^2}\right) \tag{11.12}$$

Empirisch bepaalde waarden van deze functie zijn gegeven in Figuur 11.14. Deze kan worden gebruikt om zonder itereren w te bepalen (via Re) bij gegeven waarden van Δ, g, D en ν.

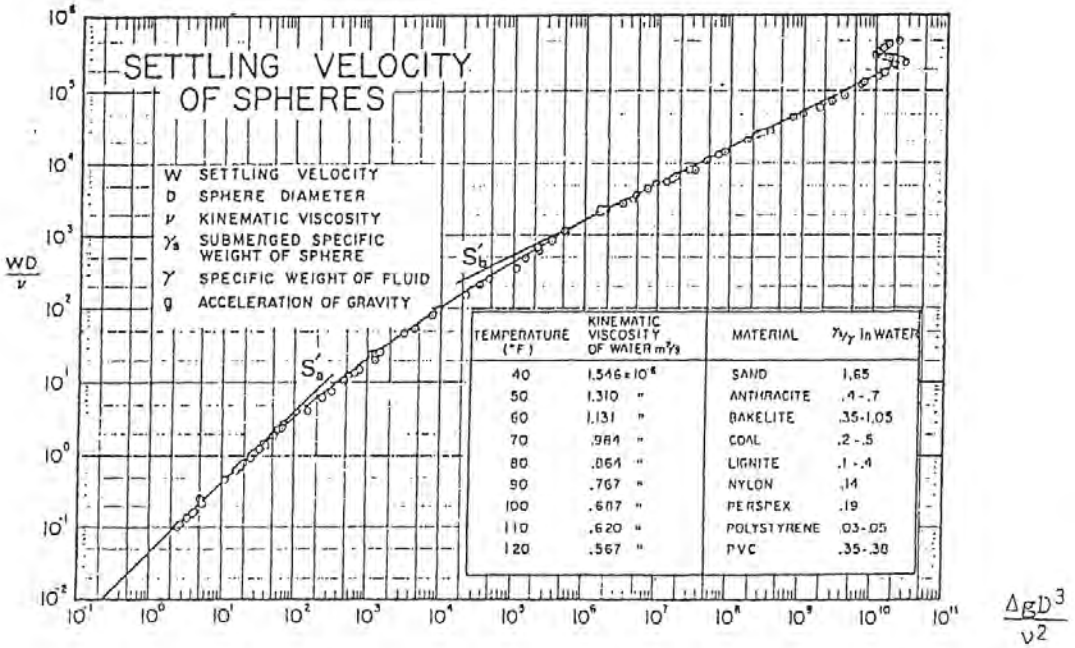
In het Stokes regime ($Re <$ ca. 1) geldt (11.3), in welk geval $F_w = 3\pi\eta Dw$ en de valsnelheid gegeven is door

$$w = \frac{1}{18}\frac{\Delta gD^2}{\nu} \tag{11.13}$$

Deze is dus evenredig met D^2. De bijbehorende waarde van Re is

$$Re = \frac{wD}{\nu} = \frac{1}{18}\frac{\Delta g D^3}{\nu^2} \qquad (11.14)$$

Deze evenredigheid is in Figuur 11.14 te zien als de tak S'_a, die voor Re < ca. 1 de meetpunten goed weergeeft. Stellen we inderdaad Re = 1 als bovengrens voor het Stokes regime (zie ook Figuur 11.12), dan is de bijbehorende diameter gelijk aan $(18\nu^2/\Delta g)^{1/3}$. Voor een zandkorrel in water ($\Delta \approx 1{,}65$) van ca. 20°C ($\nu \approx 10^{-6}$ m²/s) is dit een diameter van ca. 0,1 mm.



Figuur 11.14 Dimensieloos valsnelheidsdiagram voor een bol (figuur overgenomen uit Yalin, 1972). (Notatie: $\gamma_s/\gamma = (\rho_s - \rho)/\rho = \Delta$).

Voor waarden van Re tussen ca. 10^3 en ca. 2×10^5 is c_w vrijwel constant (zie Figuur 11.12), in welk geval w evenredig is met $D^{1/2}$ (zie verg.11.10), en Re^2 evenredig is met $\Delta g D^3/\nu^2$ (zie verg. 11.11 en de tak S_b' in Figuur 11.14). Gebruiken we voor dit bereik $c_w \approx 0{,}4$ (zie Figuur 11.12) dan gaat (11.10) over in

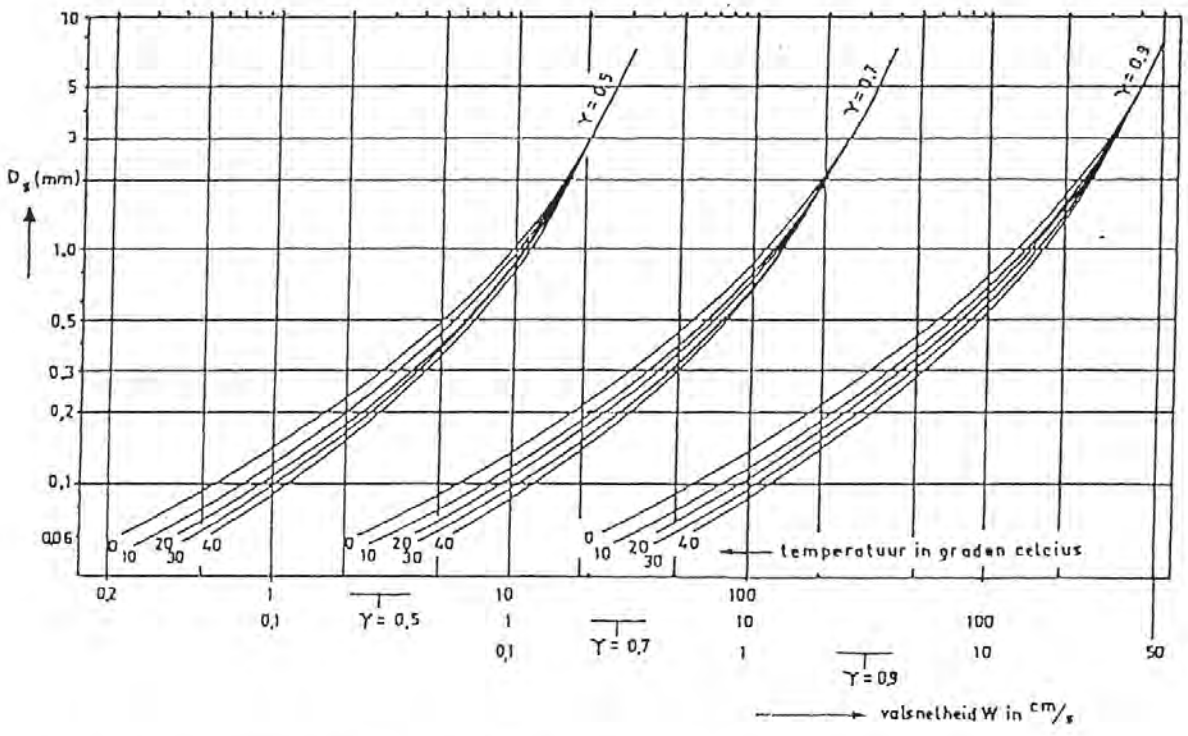
$$w = 1{,}83\sqrt{\Delta g D} \qquad (11.15)$$

Voor kwarts in water ($\Delta = 1{,}65$) reduceert dit verder tot

$$w = 2{,}35\sqrt{g\,D} \qquad (11.16)$$

Stellen we $Re = 10^3$ als ondergrens hiervoor, dan moet D minstens ca. 3 mm zijn (voor Δ = 1,65).

Figuur 11.15 geeft de valsnelheid van kwartskorrels in water als functie van de temperatuur van het water (die invloed heeft op de viscositeit) voor verschillende korrelvormen, uitgedrukt in een maat γ gelijk aan $a/\sqrt{(bc)}$ waarin a, b en c respectievelijk de kleinste, middelste en grootste lengte zijn van de drie onderling loodrechte hoofdassen van de korrel. (De drie groepen van krommen, elk voor een constante waarde van γ, zijn voor de leesbaarheid onderling met een factor tien verschoven; zie de drie schaalverdelingen langs de "horizontale" as.) Voor een bol geldt $\gamma = 1$; voor natuurlijk gevormd kwarts is $\gamma = 0.7$ een veel voorkomende waarde.



Figuur 11.15 Valsnelheid van natuurlijke kwartskorrels in water als funtie van (zeef)diameter, vormfactor en watertemperatuur

Elke kromme uit Figuur 11.15 komt overeen met de dimensieloze kromme uit Figuur 11.14, afgezien van de variaties in de vormparameter γ. De gedeelten voor D < ca. 0.1 mm respectievelijk D > ca. 3 mm komen overeen met de regimes van sterk-viskeuze respectievelijk zwak-viskeuze stromen. In laatstgenoemd regime heeft de viscositeit geen invloed en is de valsnelheid onafhankelijk van de temperatuur.

Door Rubey is een expliciete uitdrukking gegeven voor de valsnelheid van onregelmatig gevormde korrels, waarvan de weerstandsfactor groter is dan die voor een bol, vooral voor de grotere afmetingen. Voor kwartskorrels met een diameter kleiner dan ca. 0,1 mm, vallend in water, geldt Stokes (11.14). Voor het overgangsgebied naar volledig ontwikkelde turbulentie geeft Rubey de volgende benadering:

$$w = \frac{10\nu}{D}\left[\sqrt{1 + \frac{\Delta g D^3}{100\nu^2}} - 1\right] \quad \text{voor } 0{,}1\text{mm} < D < 1\text{mm} \tag{11.17}$$

en voor de grotere korrels/stenen in het niet-viskeuze regime

$$w \approx 1{,}1\sqrt{\Delta g D} \quad \text{voor } D > 1\text{mm} \tag{11.18}$$

(De gegeven geldigheidsintervallen zijn voor kwartskorrels/stenen vallend in water.) De coëfficiëntwaarden hierin zijn iets anders dan voor bolvormige deeltjes. Zie bijv. de evenredigheidsfactor in (11.18), die significant kleiner is dan die in (11.15), die geldt voor een bol.

12 EENPARIGE STROOM IN PIJPLEIDINGEN

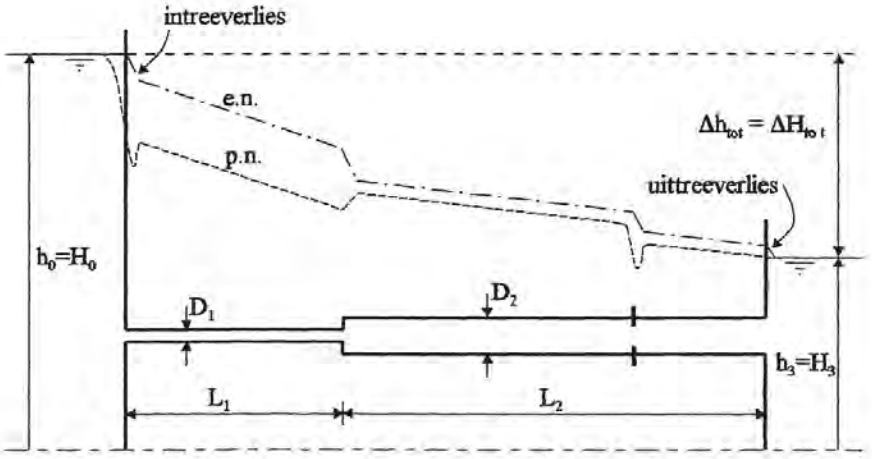
12.1 Inleiding

Het onderwerp van dit hoofdstuk is stromingsweerstand in leidingen. We beperken ons tot stationaire stromen in geheel gevulde pijpleidingen van constante diameter, afgezien van plaatselijke profielvariaties zoals bij splitsingspunten, pompen, afsluiters etc. Het gaat om het verband tussen weerstand en debiet.

In aansluiting op het voorgaande hoofdstuk verdelen we de totale stromingsweerstand (W) in een leiding in twee typen bijdragen:

- **vormweerstand** (vertragingsverliezen) en
- **huidweerstand** (wandwrijving).

Het eerstgenoemde type weerstand doet zich alleen voor bij lokale, niet-gestroomlijnde profielvariaties, knikken enz., en is voor elk daarvan in rekening te brengen als een sprongsgewijze daling van het energieniveau, het z.g. **vertragingsverlies** ΔH_v. Dit type verliezen is behandeld in Hoofdstuk 9. De tweede bijdrage is continu verdeeld over de leidinglengte en geeft een gelijkmatige daling van het energieniveau, met een **wrijvingsverhang** (verval p.e.v. lengte) i_w gelijk aan -dH/ds. De berekening daarvan is het onderwerp van dit hoofdstuk.



Figuur 12.1 Pijpleiding tussen twee reservoirs, met plotselinge vergroting van pijpdiameter en met een uitstekende flens in deel 2.

Figuur 12.1 geeft een schets van een leiding tussen twee reservoirs. Vertragingsverliezen treden in dit voorbeeld op bij de intree, bij een abrupte verwijding, bij een lokale vernauwing en bij de uittree. Elk van deze lokale verliezen ΔH_v wordt uitgedrukt in de plaatselijke snelheidshoogte, met een (dimensieloze) verliescoëfficiënt als evenredigheidsfactor (zie Hoofdstuk 9):

$$\Delta H_v = \xi \frac{U^2}{2g} \tag{12.1}$$

Wrijvingsverliezen treden op over de hele lengte van de leiding. Voor een leidinggedeelte met constante diameter D wordt het wrijvingsverhang (i_w = - dH/ds) evenredig gesteld aan de verhouding van snelheidshoogte tot leidingdiameter (zie afleiding hierna):

$$i_w \equiv -\frac{dH}{ds} = f\frac{U^2}{2gD} \tag{12.2a}$$

Hierin is f een nog te bepalen weerstandscoëfficiënt, de z.g. coëfficiënt van **Darcy-Weisbach**.

Het totale wrijvingsverlies over een uniform leidinggedeelte met lengte L is

$$\Delta H_w = i_w L = f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g} \tag{12.2b}$$

Voor het totale verlies in een leiding bestaande uit enkele in serie geschakelde uniforme leidinggedeelten, zoals in Figuur 12.1, geldt

$$\Delta H_{tot} = \Sigma \Delta H_v + \Sigma \Delta H_w$$

In een gesloten leiding heeft het debiet Q dezelfde waarde in alle doorsneden, ook al verschillen die in diameter. We substitueren daarom U = Q/A in elke verliesterm, waarbij Q constant is maar A per term een andere waarde kan hebben. Dan resulteert het gezochte verband tussen het totale verlies en het debiet:

$$\Delta H_{tot} = \frac{Q^2}{2g}\left[\Sigma\frac{\xi}{A^2} + \Sigma\, f\frac{L}{D}\frac{1}{A^2}\right] \tag{12.3}$$

Bij een relatief korte leiding met veel knikken, vernauwingen etc. overheersen de vertragingsverliezen en kan de wandwrijving worden verwaarloosd. Is daarentegen sprake van een lange pijpleiding met overwegend eenparige beweging, dan zijn de vertragingsverliezen verwaarloosbaar.

Voor het totale verlies aan energiehoogte in Figuur 12.1 geldt

$$\Delta H_{tot} = H_0 - H_3 = h_0 - h_3$$

Dit is gelijk aan het verval (h_0-h_3) tussen de reservoirs, omdat de snelheidshoogte in een reservoir verwaarloosbaar is.

Het hangt van de toepassing af welke van de grootheden in (12.3) gegeven zijn en welke de afhankelijke variabele is. Schematisch weergegeven:

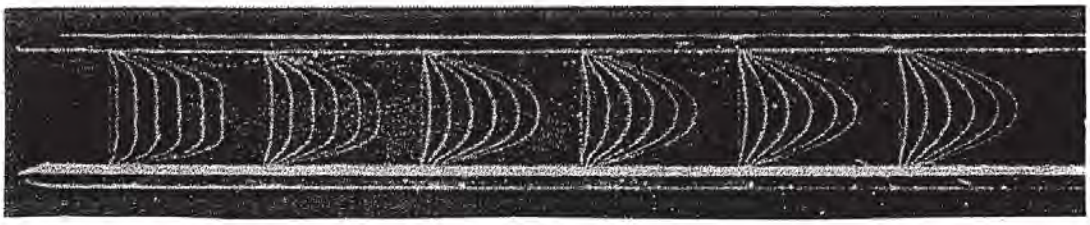
gegeven verval en leiding → debiet
gegeven leiding en debiet → verval
gegeven verval en debiet → leiding(diameter)

In sommige gevallen zal de oplossing iteratief moeten worden bepaald. In de praktijk zijn hiervoor standaard software-pakketten beschikbaar.

Met de waarden van de vertragingsverliezen gegeven in Hoofdstuk 9 resteert ons voor de toepassing van het bovenstaande "slechts" de bepaling van de weerstandscoëfficiënt f. Dat is het doel van de rest van dit hoofdstuk.

12.2 Ontwikkeling tot eenparige stroom

Bij vloeistofstroming vanuit een reservoir in een pijpleiding ontwikkelt zich een grenslaag langs de pijpwand, aanvankelijk te vergelijken met de grenslaag die zich vormt in de stroming langs een vlakke plaat (zie Hoofdstuk 11). In het centrale deel van de leiding, tussen de grenslagen, is het snelheidsveld aanvankelijk vrijwel uniform (Figuur 12.2 links).



Figuur 12.2 Instroming tussen twee parallelle platen bij Re = 640. Grenslaaggroei en overgang naar parabolisch snelheidsprofiel zichtbaar gemaakt d.m.v. waterstofbelletjes. Bron: Nakayama (1988).

Vanaf een zekere afstand benedenstrooms van de instroom begint de grenslaaggroei echter merkbaar beïnvloed (belemmerd) te worden door de eindige pijpdoorsnede, totdat op nog grotere afstand (tientallen diameters) geen groei meer plaatsvindt en het snelheidsprofiel vanaf daar constant blijft. Pas dan is de stroming echt eenparig (versnelling nul).

De hierna te geven behandeling van wandweerstand heeft betrekking op eenparige stroming (na middeling over de eventuele turbulentie), en is strikt gesproken niet van toepassing op bovengenoemd inloopgedeelte. In de praktijk wordt met dit verschil echter meestal geen rekening gehouden.

12.3 Parameters en stromingstypen

In par. 2.5 is al ingegaan op de parameters die bepalend zijn voor de weerstand bij eenparige stroming door een leiding. Volledigheidshalve doen we dat hier opnieuw en voegen we daar enkele opmerkingen aan toe.

We gaan uit van een eenparige stroming van een vloeistof met constante massadichtheid (ρ) en viscositeit (η) door een pijpleiding met constante inwendige diameter D. Het debiet is Q en de over de dwarsdoorsnede gemiddelde snelheid is $U = Q/A = Q/(\pi D^2/4)$.

De binnenkant van de pijpwand kan ruw zijn als gevolg van het fabrikageproces, corrosie, bio-activiteit, sedimentatie en eventueel andere oorzaken. Gemakshalve doen we hier alsof de ruwheid is weer te geven door slechts één karakteristieke lengtemaat ervan, die we met k aanduiden. In de hierna te noemen proeven van Nikuradse bestond de ruwheid uit kleine, aaneengesloten zandkorrels van vrijwel eenzelfde diameter, gelijmd op de wand, en stelt k de diameter van deze korreltjes voor.

Het bovenstaande houdt in dat de beschouwde eenparige stroming slechts afhankelijk is van de volgende onafhankelijke variabelen:

$$(D,\ k,\ \rho,\ \eta,\ U)$$

Deze zijn te combineren tot twee onafhankelijke dimensieloze parameters:

$$(\mathrm{Re},\ \frac{k}{D})$$

Hierin is $\mathrm{Re} = \rho UD/\eta = UD/\nu$ het kental van **Reynolds**, gebaseerd op de pijpdiameter; k/D is de **relatieve ruwheid**.

Op het microniveau van de individuele ruwheidselementen versnelt en vertraagt de stroom en is er een sleepkracht op de ruwheidselementen die deels uit huidweerstand en deels uit vormweerstand kan bestaan. Op het macroniveau van de totale stroming door de pijp zien we daar echter van af, beschouwen we de stroom als eenparig en als radiaal-symmetrisch, en noemen we de totale axiale kracht, op de wand uitgeoefend p.e.v. oppervlak daarvan, de wandschuifspanning (τ_o). We definiëren nu een (dimensieloze) weerstandscoëfficiënt c_f als de verhouding van τ_o tot ρU^2 (vergelijk met c_τ in Hoofdstuk 11). M.a.w., we stellen

$$\tau_o = c_f \rho U^2 \tag{12.4}$$

Deze definitie (van c_f) is algemeen bruikbaar maar niet uniek. Het is gebruikelijk om voor pijpstroming een 8x grotere factor te definiëren, hier weergegeven met het symbool f, de **weerstandscoëfficiënt van Darcy-Weisbach**. In termen daarvan geldt

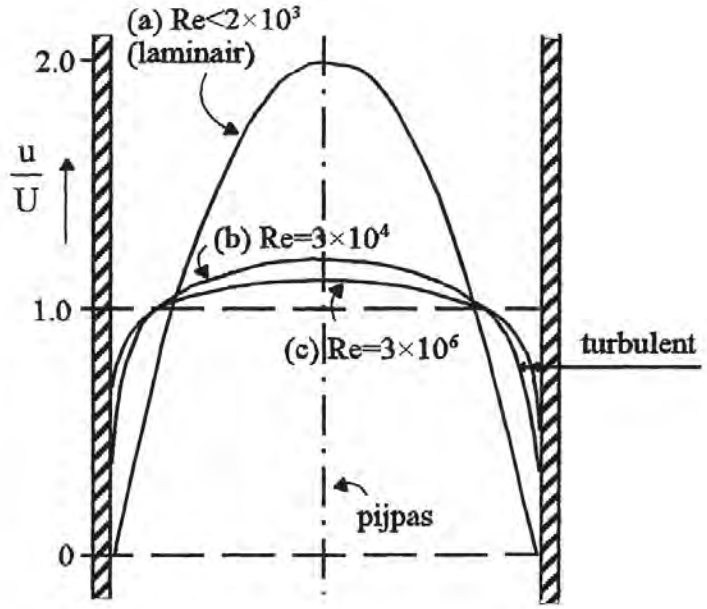
$$\tau_o = \frac{f}{8} \rho U^2 \tag{12.5}$$

Uit bovenstaande dimensie-analyse volgt dat c_f en f voor een eenparige stroom in een pijp slechts een functie kunnen zijn van Re en k/D (zie Figuur 12.7 en 12.8):

$$c_f = f_1(Re, \frac{k}{D}), \quad f = f_2(Re, \frac{k}{D}) \tag{12.6}$$

De waarde van c_f c.q. f hangt samen met de vorm van het snelheidsprofiel, die er op zijn beurt sterk van afhangt of de stroming in de pijp laminair is of turbulent. Figuur 12.3 laat zien waardoor die afhankelijkheid ontstaat: in turbulente stromen varieert de snelheid in het grootste deel van het dwarsprofiel aanzienlijk minder dan in laminaire stromen; dit is het gevolg van de door de turbulentie veroorzaakte laterale menging. Anders gezegd: als gevolg van de turbulentie komt hoge-snelheidsvloeistof uit de omgeving van de pijpas tot dicht bij de wand. Hier moet bij een gegeven gemiddelde snelheid natuurlijk een sterkere gradiënt bij de wand tegenover staan, resulterend in een hogere wandweerstand dan bij laminaire stroom.

De snelheidsprofielen in Figuur 12.3 zijn voor een gladde buis waarbij c_f slechts van Re afhangt. De bijbehorende waarden van Re en c_f zijn gegeven in Tabel 12.1, evenals die van de snelheidsverdelingscoëfficiënten α en β. (De bepaling van die waarden komt nog aan de orde.)



Figuur 12.3 Snelheidsprofielen in gladde buis voor laminaire stroom (a) en voor twee gevallen van turbulente stroom (b en c). Zie Tabel 12.1 voor enkele bijbehorende waarden.

Nr.	Re	c_f	α	β
a	$< 2x10^3$	-	4/3	2
b	$3x10^4$	0,0029	1,022	1,063
c	$3x10^6$	0,0012	1,009	1,027

Tabel 12.1 *Getalswaarden behorend bij Figuur 12.3; Re gegeven; c_f (= f/8) conform (12.37) c.q. Figuur 12.8; voor de turbulente stroom zijn α en β bepaald conform de Appendix (A.5 en A.6).*

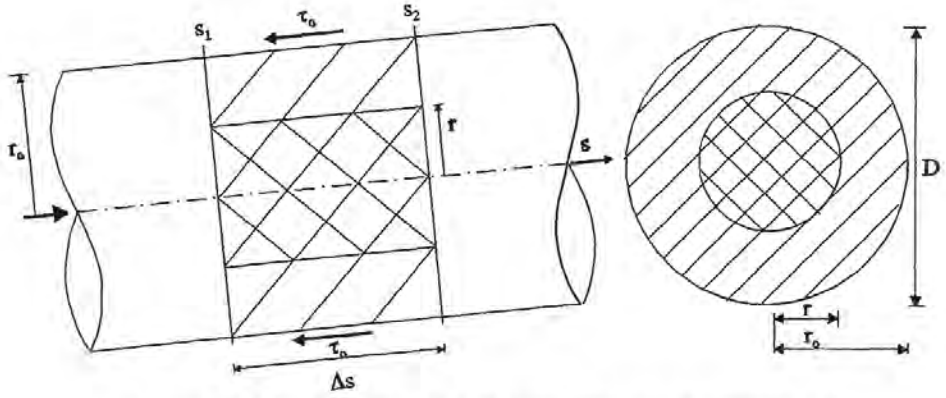
Gezien de grote verschillen tussen laminaire en turbulente stromen worden deze twee gevallen afzonderlijk behandeld. Eerst gaan we evenwichtsvoorwaarden opstellen. Die zijn geldig of de stroming laminair is (Re < ca. 2300) dan wel turbulent (Re > ca. 4000).

12.4 Evenwichtsvoorwaarden

De drijvende kracht voor de stroming wordt geleverd door de gradiënt van de dynamische druk p_d (werking van zwaartekracht en feitelijke druk) ofwel ρg maal de gradiënt van het piëzometrisch niveau (h) (zie Hoofdstuk 6).

Bij eenparige stroming (zoals hier verondersteld) zijn de stroomlijnen recht en is het piëzometrisch niveau constant in elke dwarsdoorsnede. (Weerstand werkt alleen tegen de stroomrichting in en is daarom niet van invloed op de geldigheid van deze uitspraak.)

Omdat we uitgaan van eenparige stroming zijn de versnellingen nul, ook in axiale richting, en is er in die richting evenwicht tussen de aandrijvende kracht en de weerstand. We passen dit eerst toe op een cilindervormige moot tussen twee dwarsdoorsneden $s = s_1$ en $s = s_2 = s_1 + \Delta s$, in radiale richting (coördinaat r) begrensd door de pijpwand, waar $r = r_o = \frac{1}{2}D$ (Figuur 12.4). (N.B.: de in deze figuur dubbel gearceerde moot ($r < r_o$) komt later ter sprake, vgl. 12.12.)



Figuur 12.4 Balansgebieden met lengte Δs en straal r of r_o

Omdat de stroming eenparig is (U = constant) heffen de meevoeringen van impuls naar en uit het balansgebied door de doorgangen $s = s_1$ en $s = s_2$ elkaar op (evenveel in als uit). Ook geldt dan $\partial h/\partial s = \partial H/\partial s$. De resulterende dynamische drukkracht op de moot is dan te schrijven als

$$F_1 - F_2 = (p_{d_1} - p_{d_2})A \simeq -\frac{dp_d}{ds}A\Delta s = -\rho g\frac{dh}{ds}A\Delta s = -\rho g\frac{dH}{ds}A\Delta s$$

Deze stellen we gelijk aan de wandwrijving (ΔW) op de moot. Dat geeft

$$-\frac{dh}{ds} = -\frac{dH}{ds} = i_w = \frac{\Delta W}{\rho g A\Delta s} \qquad (12.7)$$

Hierin is i_w het z.g. **wrijvingsverhang** (weerstand p.e.v. gewicht van de stromende vloeistof).

De omtrek (perimeter) waarover de wandwrijving werkt (in een dwarsdoorsnede) geven we weer met het symbool P; daarmee geldt $\Delta W = \tau_o P \Delta s$, en gaat (12.7) over in

$$\tau_o = \rho g(A/P) i_w = \rho g R i_w \qquad (12.8)$$

Hierin is R gedefinieerd als de verhouding A/P, de z.g. **hydraulische straal**. Voor de pijp geldt $R = \frac{1}{4}D = \frac{1}{2}r_o$, zodat

$$\tau_o = \tfrac{1}{2}\rho g r_o i_w \qquad (12.9)$$

N.B. Door substitutie van (12.8) in (12.4) en (12.5) ontstaat de volgende uitdrukking voor het wrijvingsverhang (zie ook (12.2)):

$$i_w = \frac{\tau_o}{\rho g R} = c_f \frac{U^2}{gR} = f \frac{U^2}{2gD} \qquad (12.10)$$

Over een pijplengte L geeft dit een wrijvingsverval gelijk aan $i_w L$ ofwel

$$\Delta H_w = \Delta h_w = i_w L = f \frac{U^2}{2g} \frac{L}{D} \qquad (12.11)$$

Dit is de z.g. **formule van Darcy-Weisbach**.

Voor de hierna volgende berekening van het snelheidsprofiel moet de schuifspanningsverdeling bekend zijn als functie van de radiale coördinaat r. Toepassing van dezelfde redenering die leidde tot (12.8), nu op het in Figuur 12.4 dubbel gearceerde mootje met willekeurige straal r i.p.v. r_o, geeft

$$\tau(r) = \frac{\rho g A(r) i_w}{P(r)} = \tfrac{1}{2}\rho g r i_w = \tau_o \frac{r}{r_o} \qquad (12.12)$$

De schuifspanning neemt dus lineair toe van de waarde nul in de pijpas tot τ_o aan de wand.

De schuifspanningsverdeling gegeven door (12.12) is geldig zowel voor laminaire als (gemiddeld) voor turbulente stroom. Maar die beide typen verschillen sterk in het verband tussen schuifspanning en (gemiddelde) snelheidsgradiënt zodat ze vanaf hier afzonderlijk worden behandeld, te beginnen met het relatief eenvoudige geval van de laminaire stroom.

12.5 Laminaire stroom

12.5.1 Inleiding

De afleiding van de betrekking tussen debiet en verhang of verval verloopt in een aantal stappen (zie overzicht op pag. 190). De evenwichtsvoorwaarden leveren de interne schuifspanningsverdeling bij gegeven verhang. Via een constitutieve betrekking wordt de schuifspanning vertaald in een snelheidsgradiënt die vervolgens wordt geïntegreerd om het snelheidsprofiel te verkrijgen. Integratie hiervan over het dwarsprofiel levert het debiet en daaruit de over het profiel gemiddelde snelheid. Hiermee is tevens de weerstandsfactor bepaald die het verband geeft tussen wandschuifspanning en gemiddelde snelheid. Zie het schema op pag. 190.

12.5.2 Constitutieve betrekking

Voor laminaire pijpstroming (Re < ca. 2300) geldt

$$\tau(r) = \eta \frac{du}{dn} = -\eta \frac{du}{dr} \qquad (12.13)$$

12.5.3 Snelheidsprofiel

Substitutie van (12.13) in (12.12) geeft

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\tau}{\eta} = -\frac{\tau_o}{\eta r_o} r$$

Integratie hiervan naar r en gebruikmaking van de voorwaarde dat u = 0 aan de wand (waar $r = r_o$) (kleefconditie) resulteert in het volgende, parabolische snelheidsprofiel:

$$u(r) = \frac{\tau_o}{2\eta r_o} (r_o^2 - r^2) \qquad (12.14)$$

Dit is een axiaalsymmetrisch, parabolisch profiel (zie Figuur 12.3, kromme a). Voor de maximale snelheid geldt $u_{max} = \frac{1}{2}\tau_o r_o/\eta$.

Het snelheidsprofiel kan worden geschreven als functie van de afstand uit de wand, $y \equiv r_o - r$:

$$u(y) = \frac{\tau_o}{2\eta r_o} y (2r_o - y)$$

Voor relatief korte afstanden uit de wand, $y << r_o$, gaat dit bij benadering over in een rechtlijnig profiel (zie ook Figuur 12.3):

$$u(y) = \frac{\tau_o y}{\eta} \quad \text{voor } y << r_o \qquad (12.15)$$

12.5.4 Gemiddelde snelheid

Om τ_o uit te kunnen drukken in de gemiddelde snelheid berekenen we eerst het debiet uit de berekende lokale snelheid volgens (12.14):

$$Q = \int_0^{r_o} 2\pi r\, u\, dr = \frac{\pi}{4} \frac{\tau_o r_o^3}{\eta} \tag{12.16}$$

Hieruit volgt via U = Q/A:

$$U = \frac{\tau_o r_o}{4\eta} \left(= \frac{1}{2} u_{max}\right) \tag{12.17}$$

en ook

$$\tau_o = \frac{4}{\pi} \frac{\eta}{r_o^3} Q = 4\eta \frac{U}{r_o} \tag{12.18}$$

N.B.1 De evenredigheden in bovenstaande betrekkingen voor Q, U en τ_o volgen ook uit dimensiebeschouwingen alléén.

N.B.2 Substitutie van (12.14) en (12.17) in de definities van de coëfficiënten α en β voor de meevoering van impuls respectievelijk kinetische energie (zie Hoofdstuk 4 en Appendix Hoofdstuk 12) geeft als resultaat $\alpha = 4/3$ en $\beta = 2$. Deze waarden wijken aanzienlijk af van de eenheid, veel meer dan in eenparige turbulente stromen, waar de lokale gemiddelde snelheden minder variëren in het dwarsprofiel (behalve vlak bij de wand), als gevolg van de turbulente menging (zie Figuur 12.3 en de daarbij behorende waarden van α en β in Tabel 12.1).

12.5.5 Wrijvingsverhang

Door substitutie van het in (12.18) gevonden verband tussen τ_o en U in de evenwichtsvergelijking (12.10) volgt voor het verband tussen i_w en U:

$$i_w = \frac{8}{\pi} \frac{\nu Q}{g r_o^4} = \frac{8\nu U}{g r_o^2} \tag{12.19}$$

De evenredigheden hierin zijn oorspronkelijk - onafhankelijk van elkaar - experimenteel vastgesteld door Hagen (1839) en Poiseuille (1841), maar (12.19), en ook de laminaire stroming door een buis zelf, wordt gewoonlijk slechts naar **Poiseuille** genoemd ("Poiseuille flow").

Stroming van grondwater door fijn zand is laminair en voldoet aan een soortgelijke betrekking als (12.19). Het is daarbij gebruikelijk de snelheid uit te drukken als een zogenaamde doorlatendheid (K) maal het verhang (i) (wet van Darcy). Deze K heeft de dimensie van een

snelheid. Uit (12.19) volgt dat K evenredig moet zijn met gD^2/ν, waarin D een kenmerkende korrelgrootte is (die bepalend is voor de dwarsafmeting van de poriën). Bij constante ν en g hangt K slechts van D af, maar de waarden van K die voor grondwaterstromen worden gegeven als functie van D moeten voor toepassing op stromen van andere vloeistoffen (bijv. olie) worden omgerekend via $K \sim gD^2/\nu$.

12.5.6 Weerstandsfactor uit parabolisch snelheidsprofiel

De laminaire stroming is strikt eenparig (geen turbulente fluctuaties) en daarom komt ρ niet voor in (12.18). Bovendien is τ_o in (12.18) evenredig met U, niet met U^2. Op beide punten wijkt (12.18) af van (12.5). Passen we de laatste desondanks toe op de laminaire stroming dan geldt

$$\tau_o = \frac{f}{8}\rho U^2 = 4\eta \frac{U}{r_o}$$

ofwel

$$f = 32\frac{\eta}{\rho U r_o} = \frac{64}{Re} \qquad (12.20)$$

Het oneigenlijke gebruik van (12.5) in het viskeuze (laminaire) regime wordt gecompenseerd door de coëfficiënt omgekeerd evenredig met Re te laten variëren (evenals bij de sleepkracht op een bol in het Stokes-regime; zie Hoofdstuk 11).

12.5.7 Weerstandsfactor uit metingen

Figuur 12.7 geeft meetwaarden van f vs Re voor gladde en ruwe buizen. In het laminaire gebied ($Re = UD/\nu <$ ca. 2300) stemt de theoretische betrekking (12.20) voortreffelijk met de meetwaarden overeen.

12.5.8 Overzicht

Een overzicht van de verschillende stappen die in het voorgaande zijn gezet en van de bereikte resultaten is gegeven op pag. 190. Voor de hierna te behandelen turbulente stroom volgen we zoveel mogelijk dezelfde lijn, maar op (belangrijke) onderdelen zijn significante verschillen onontkoombaar. Alles wordt wat minder zeker maar ook ingewikkelder. Juist daarom is dit overzicht van belang, want dat geeft houvast voor de hoofdlijnen.

- Weerstandscoëfficiënt $f = 8\,\frac{\tau_o}{\rho U^2}$ (def.)
- Evenwicht $\tau(r) = \frac{r}{r_o}\,\tau_o$ en $\tau_o = \rho g R i_w = \frac{1}{4}\rho g D i_w$
- Weerstandsverhang $i_w = f\,\frac{U^2}{2gD}$
- Weerstandsverval $i_w\,L = \Delta H_w = f\,\frac{U^2}{2g}\frac{L}{D}$ (Darcy-Weisbach)

Stromingstype	**Laminair**	**Turbulent**
Constitutieve betrekking	$\tau = -\rho\nu\frac{du}{dr}$ ν = constant	$\tau = \rho\nu_t\frac{du}{dy}$ $(y = r_o - r)$ $\nu_t = \kappa\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\,y = \kappa u_* y$ bij de wand
Snelheidsgradiënt	$\frac{du}{dr} = -\frac{\tau_o}{\eta}\frac{r}{r_o}$	$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa}\frac{1}{y}$ bij de wand
Snelheidsprofiel	$u(r) = \frac{1}{2}\frac{\tau_o}{\eta r_o}(r_o^2 - r^2)$ $(u=0 \text{ in } r=r_o)$	$u(y) = \frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{y}{y_o}$ $(u=0 \text{ in } y=y_o)$
Gemiddelde snelheid	$U = \frac{\tau_o r_o}{4\eta}$	$U = \frac{u_*}{\kappa}\ln(e^{-\frac{3}{2}}\frac{r_o}{y_o})$
Weerstandscoëfficiënt	$f = \frac{64}{Re}$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(e^{-\frac{3}{2}}\frac{r_o}{y_o})$ White-Colebrook: $y_o \cong 0.11\frac{\nu}{u_*} + \frac{k}{30}$

Overzicht van stappen in afleiding snelheidsprofiel en weerstandscoëfficiënt voor pijpstroming

12.6 Turbulente stroom

12.6.1 Inleiding

Voor waarden van Re boven ca. 4000 is de pijpstroming turbulent. De ongeordende, wervelende, in tijd en ruimte fluctuerende snelheden zijn niet in detail te voorspellen. De berekening van turbulente stromen is daarom zeer veel moeilijker dan die van laminaire. Theorievorming is slechts globaal, gedeeltelijk gebaseerd op beschouwingen van grootte-ordes en gelijkvormigheid. Er is een sterk beroep nodig op het experiment voor verificatie en evenredigheidsfactoren.

De behandeling van turbulentietheorie valt buiten het bestek van dit inleidende vak. (Zie het vervolgvak "*Turbulentie in de waterloopkunde*".) We volstaan daarom met schetsmatige beschouwingen, aangevuld met een resumé van de belangrijkste gebruiksresultaten.

We maken onderscheid tussen de stroming in de onmiddellijke omgeving van de pijpwand ($r \approx r_o$) en die in de turbulente hoofdstroom daarbuiten. Voor de beschrijving van beide gebruiken we als coördinaat de afstand uit de pijpwand ($y = r_o - r$).

Wandwrijving is het gevolg van zijdelingse overdracht, tussen vloeistof en pijpwand, van voorwaartse impuls. Deze overdracht kan op verschillende manieren plaatsvinden, afhankelijk van de relatieve ruwheid van de wand.

Vlak bij een gladde wand kan de stroom niet turbulent zijn, en is er een dunne laminaire sublaag (dikte δ) tussen de wand en de turbulente hoofdstroom. De impulsoverdracht tussen vloeistof en wand vindt dan plaats via een viskeuze schuifspanning zoals uitgedrukt in vergelijking 12.13; dit is **huidweerstand**. Bij een relatief ruwe wand steken de ruwheidselementen (hoogte: k) door tot in de turbulente stroom. De impulsoverdracht op microschaal vindt dan plaats via de **vormweerstand** van de ruwheidselementen.

Wanneer de ruwheidselementen niet tot in de turbulente stroom doordringen maar verzonken blijven in de laminaire sublaag, m.a.w. wanneer $k << \delta$, heeft een geometrisch ruwe wand op de hoofdstroom eenzelfde effect als een gladde wand. "Glad" of "ruw" is dus relatief. We spreken dan ook van **hydraulisch glad** respectievelijk **hydraulisch ruw.** Welk van deze typen zich voordoet wordt bepaald door de waarde van k/δ.

In het volgende gaan we in op de **turbulente hoofdstroom,** d.w.z. de stroom buiten de laminaire sublaag (bij hydraulisch gladde wandconditie) c.q. buiten de wandruwheids-elementen (bij hydraulisch ruwe wandconditie). We volgen in principe dezelfde stappen als voor de laminaire stroom (zie het schema op pag. 190).

12.6.2 Evenwichtsvoorwaaarde

Evenals in de laminaire stroom neemt de (gemiddelde) schuifspanning in de turbulente stroom lineair toe van de waarde nul in de as tot τ_0 aan de wand; zie (12.12) .

12.6.3 Constitutieve betrekking

De gemiddelde schuifspanning in de turbulente hoofdstroom wordt evenredig verondersteld aan de gemiddelde snelheidsgradiënt, evenals in laminaire stroom, maar nu met een z.g. **turbulentieviscositeit** ($\eta_t = \rho\nu_t$) als evenredigheidscoëfficiënt in plaats van de moleculaire viscositeit:

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_t \frac{du}{dy} \tag{12.21}$$

In tegenstelling tot ν is ν_t niet een vloeistofeigenschap maar een *stromingseigenschap*, en dus een deel van de te bepalen oplossing. De waarde van ν_t wordt bepaald door de snelheid (u_t) en de afmeting (l_t) van de turbulente wervels die de menging veroorzaken, en is in grootte-orde gelijk aan het product van beide: $\nu_t = O(u_t\, l_t)$. De waarde van u_t op zijn beurt is vooral afhankelijk van de schuifspanning in de omgeving, en is op grond van dimensiebeschouwingen evenredig te stellen aan de z.g. **schuifspanningssnelheid**, gedefinieerd door

$$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho} \tag{12.22}$$

De afmetingen van de wervels worden verondersteld evenredig met de afstand uit de wand toe te nemen, althans in de omgeving van de wand (niet tot aan de as van de buis), ofwel $l_t \sim y$. Dit leidt tot $\nu_t \sim u_* y$ ofwel

$$\nu_t = \kappa u_* y \tag{12.23}$$

waarin κ een evenredigheidsconstante is (genoemd naar Von Karman), waarvan de waarde experimenteel is vastgesteld op ca. 0.4 (zie hierna). Substitutie hiervan in (12.21) geeft

$$\frac{\tau}{\rho} = \kappa u_* y \frac{du}{dy} \tag{12.24}$$

12.6.4 Snelheidsprofiel

In de omgeving van de wand is de lokale schuifspanning bij benadering gelijk te stellen aan de schuifspanning aan de wand ($\tau \approx \tau_0 = \rho u_*^2$). Daarmee gaat (12.24) over in

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa}\frac{1}{y}$$

Na integratie levert dit het volgende, logaritmische snelheidsprofiel op:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \qquad (12.25)$$

Hierin is y_0 een integratieconstante, zodanig dat $u = 0$ in $y = y_0$. De waarde van y_0 wordt bepaald door de wandcondities, op een manier die hieronder aan de orde komt.

De geldigheid van het logaritmische profiel (12.25) is experimenteel onderzocht (en bevestigd) door Nikuradse (1932, 1933), die ook empirisch de waarden van κ en y_0 bepaalde. Een resumé van zijn belangrijk(st)e resultaten wordt hieronder gegeven.

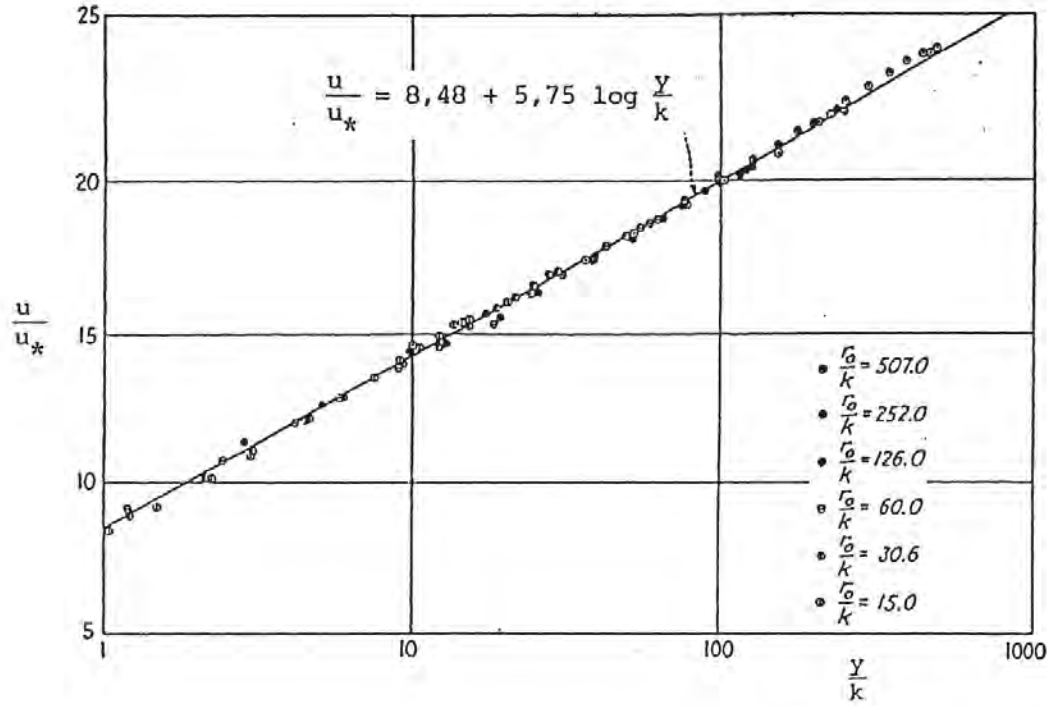
Nikuradse verrichtte gedetailleerde metingen van snelheidsprofielen en weerstand in eenparige stroom in gladde en ruwe buizen. De ruwheidselementen bestonden uit dicht opeengepakte zandkorrels van vrijwel dezelfde diameter (k), gelijmd tegen de binnenwand van de buis. (Deze dichte pakking en gelijke diameter maken dat de effectieve ruwheidsmaat veel kleiner is dan de diameter, k.) Zijn metingen voor turbulente hoofdstroom bestreken het bereik van hydraulisch gladde wandcondities via een overgangsregime tot hydraulisch ruwe wandcondities.

Hydraulisch ruwe wandcondities

Op grond van dimensiebeschouwingen kan y_0 voor hydraulisch ruwe wandcondities alleen evenredig zijn met de ruwheidsmaat k. De verhouding y/y_0 in (12.25) wordt daarmee evenredig aan y/k. De door Nikuradse gemeten snelheidsprofielen voor deze condities zijn in Figuur 12.5 weergegeven in de vorm van u/u_* (lineair) tegen y/k (logaritmisch). Het rechtlijnig verloop van de meetpunten bevestigt de geldigheid van het logaritmische profiel vanaf $y/k = 1$, d.w.z. vanaf de bovenkant van de ruwheidskorreltjes, tot vrijwel aan de as van de buis. (Het laatste is meer dan men zou mogen verwachten omdat de afleiding beperkt was tot de omgeving van de wand.) Bepaling van twee coëfficiënten uit de rechte lijn door de meetpunten levert $\kappa = 0{,}4$ en

$$y_0 \approx 0{,}033k \approx k/30 \quad \text{(ruw)} \qquad (12.26)$$

Deze waarde is aanzienlijk kleiner dan de hoogte van de ruwheidselementjes. Op het niveau $y = y_0$, "diep" tussen de korreltjes, geldt het logaritmische profiel in het geheel niet. De betekenis van y_0 is dat daar het *geëxtrapoleerde* logprofiel een snelheid nul zou opleveren.

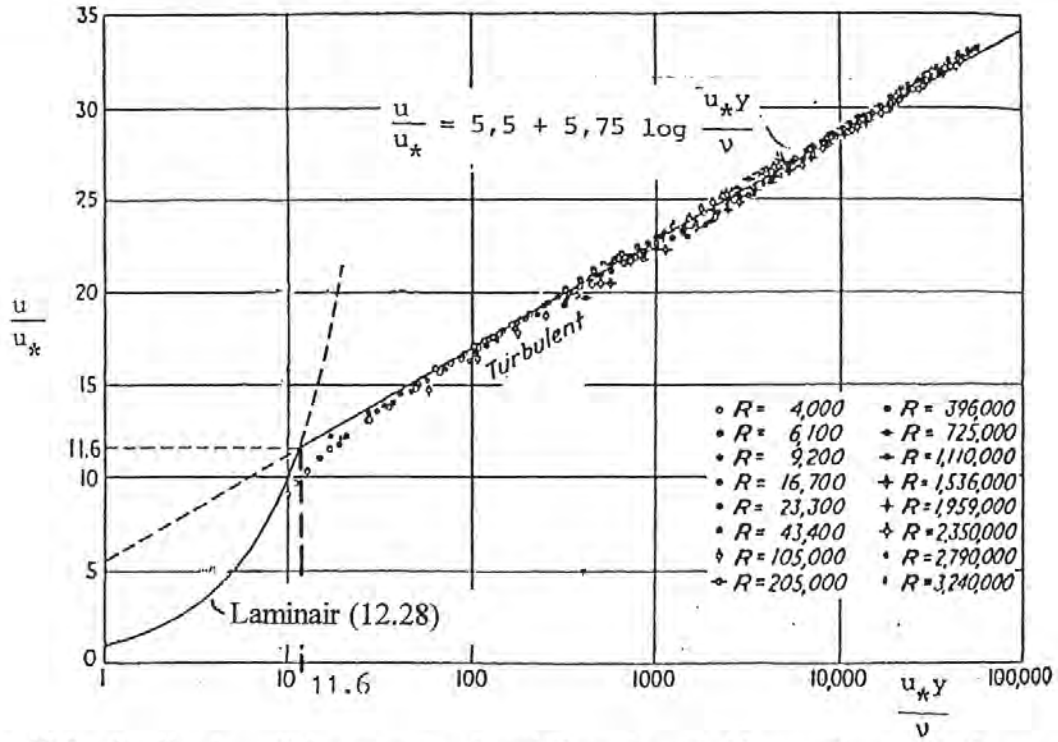


Figuur 12.5 Snelheidsprofielen gemeten door Nikuradse; ruwe wandstroming (Figuur ontleend aan Rouse, 1938).

Hydraulisch gladde wandcondities

Op grond van dimensiebeschouwingen kan y_0 voor hydraulisch gladde wandcondities alleen evenredig zijn met δ, de dikte van de laminaire sublaag. De waarde hiervan is, weer op grond van dimensiebeschouwingen, evenredig te stellen aan $\nu/\sqrt{(\tau_0/\rho)}$, ofwel ν/u_*. De verhouding y/y_0 in (12.25) wordt dan evenredig aan y/δ, ofwel aan u_*y/ν. De door Nikuradse gemeten snelheidsprofielen voor turbulente hoofdstroom en hydraulisch gladde wandcondities staan op semi-logaritmische schaal in Figuur 12.6 in de vorm u/u_* (lineair) tegen u_*y/ν (logaritmisch). Het rechtlijnig verloop van de meetpunten bevestigt de geldigheid van het logaritmisch snelheidsprofiel. Uit de helling en positie van de rechte lijn door de meetpunten is af te leiden dat $\kappa = 0.4$ (evenals voor de ruwe wandconditie) en

$$y_0 \simeq 0{,}11\nu/u_* \simeq (\nu/u_*)/9 \quad \text{(glad)} \tag{12.27}$$



Figuur 12.6 Snelheidsprofielen gemeten door Nikuradse; gladde wandstroming (figuur ontleend aan Rouse, 1938).

In de laminaire sublaag is het lineaire profiel gegeven door (12.15) van kracht. Met gebruikmaking van u_* wordt dit

$$u(y) = \frac{\tau_o y}{\eta} = \frac{\rho u_*^2 y}{\eta} = \frac{u_*^2 y}{\nu} \quad \text{ofwel} \quad \frac{u(y)}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \tag{12.28}$$

Deze betrekking is eveneens weergegeven in Figuur 12.6. (Dit lineaire profiel wordt in het semi-logaritmische diagram van Figuur 12.6 kromlijnig afgebeeld.) De overgang tussen het logaritmische profiel in de hoofdstroom en het lineaire profiel in de laminaire sublaag verloopt geleidelijk. "De" dikte van de laminaire sublaag bestaat daarom niet. Het is gebruikelijk de *nominale dikte* van de laminaire sublaag (δ) gelijk te stellen aan de afstand van het snijpunt van beide profielen uit de wand. Dit resulteert in

$$\delta = 11{,}6\frac{\nu}{u_*} \tag{12.29}$$

Voor de waarde van y_o (zie 12.27) volgt hieruit

$$y_o = \frac{\delta}{105} \tag{12.30}$$

We zien hieruit dat het niveau $y = y_0$ "diep" in de laminaire sublaag ligt. Het log-profiel is bij deze kleine waarde van y_0 niet geldig, evenmin als voor de ruwe wandcondities, en y_0 heeft ook hier slechts betekenis als de afstand uit de (gladde) wand waar de snelheid volgens het *geëxtrapoleerde* log-profiel gelijk is aan nul.

N.B. Welk wandstromingsregime zich voordoet (ruw, overgang, glad) wordt bepaald door k/δ; omdat δ evenredig is met ν/u_* kunnen we ook zeggen dat dit wordt bepaald door u_*k/ν ofwel door Re_*, een getal van Reynolds dat kenmerkend is voor de stroming in de omgeving van de wand, gedefinieerd als $Re_* = u_*k/\nu$.

12.6.5 Gemiddelde snelheid

Door integratie over de pijpdoorsnede van de logaritmisch verlopende snelheid (zie verg. 12.25) kan het debiet Q worden berekend en vervolgens U = Q/A, met als resultaat (zie Appendix van dit hoofdstuk):

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_0}{y_0}\right) \qquad (12.31)$$

12.6.6 Weerstandscoëfficiënt bepaald uit logaritmisch snelheidsprofiel

Omdat $\tau_0 = \rho u_*^2 = c_f \rho U^2$ geldt

$$\frac{u_*}{U} = \sqrt{c_f} \qquad (12.32)$$

Hiermee levert (12.31) de volgende uitdrukking voor de weerstandsfactor c_f:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_0}{y_0}\right) \qquad (12.33)$$

Na substitutie hierin van $\kappa = 0.4$ en $f = 8c_f$ en overgaan op de logaritme met grondtal 10 ontstaat, na enige afronding,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_0}{y_0}\right) \qquad (12.34)$$

De variatie van f met k/D (voor ruwe wandcondities) en Re (voor gladde wandcondities) is hiermee te berekenen door substitutie van Nikuradse's resultaten voor y_0.

Voor *hydraulisch ruwe wandcondities* geldt $y_0 \approx k/30$ (zie 12.26). Daarmee gaat de algemene uitdrukking (12.34), voor hydraulisch ruwe condities, en na een kleine aanpassing van de coëfficiënten aan directe metingen van f (zie hierna), over in

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (3{,}7 \frac{D}{k}) = -2 \log (0{,}27 \frac{k}{D}) \qquad (12.35)$$

Hieruit blijkt expliciet dat f in het hydraulisch ruwe regime slechts van de relatieve ruwheid k/D afhangt (zoals ook volgt uit de algemenere betrekking (12.6)).

Voor *hydraulisch gladde wandcondities* geldt $y_o \approx 0{,}11\ \nu/u_*$ (zie 12.27). Substitutie hiervan in (12.34) geeft na een kleine aanpassing van de coëfficiënten voor betere aansluiting aan meetwaarden van f:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (1{,}1 \frac{u_* D}{\nu}) \qquad (12.36)$$

Omdat $u_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = \sqrt{f/8}\, U$ is dit ook te schrijven als

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (0{,}4\ Re \sqrt{f}) \qquad (12.37)$$

Deze impliciete vergelijking voor f - bij gegeven Re - kan goed worden benaderd met de volgende expliciete uitdrukking, die gemakkelijker is in het gebruik:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong 1{,}8 \log \frac{Re}{7} \qquad (12.38)$$

Deze uitdrukkingen laten zien dat f in het hydraulisch gladde regime slechts van Re afhangt, zoals ook volgt uit de algemenere betrekking (12.6) voor het geval $k/D \to 0$.

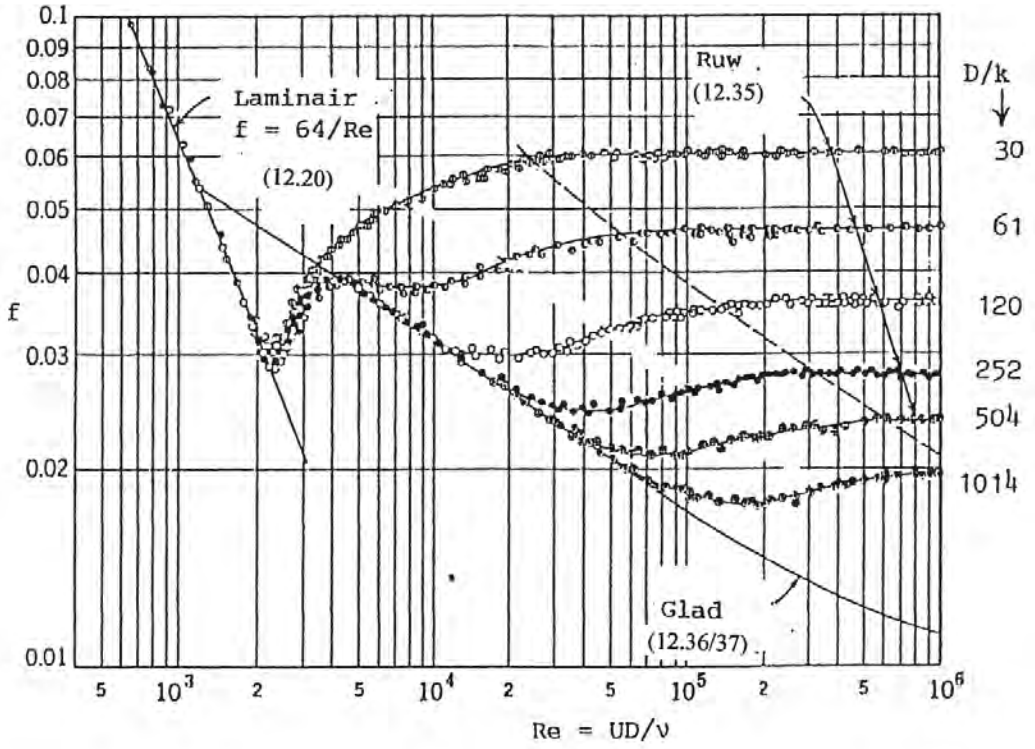
Substitutie van $\delta = 11.6\ \nu/u_*$ in (12.36) geeft tenslotte

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (12 \frac{D}{\delta}) \qquad (12.39)$$

N.B Ondanks hun verschillende gedaante komen (12.36 t/m 12.39) op hetzelfde neer, afgezien van kleine numerieke verschillen wegens afrondingen. De varianten worden gegeven deels omdat ze alle in de praktijk voorkomen en ook omdat de éne vorm handiger is dan de andere, afhankelijk van welke variabelen gegeven zijn en welke te berekenen is.

12.6.7 Weerstandscoëfficiënt uit metingen van Nikuradse

De weerstandscoëfficiënt f (Darcy-Weisbach) is slechts afhankelijk van de relatieve ruwheid (k/D) en het kental van Reynolds, Re = UD/ν; zie verg. (12.6). Nikuradse heeft dit verband empirisch vastgesteld; zijn resultaten staan in Figuur 12.7 in de vorm van f tegen Re voor een aantal waarden van D/k.



Figuur 12.7 Meetresultaten van Nikuradse; f vs Re voor een reeks van waarden van D/k (figuur ontleend aan Rouse, 1938)

Merk op dat het verloop van f vs Re bij gegeven k/D sterk lijkt op dat van c_w vs Re voor een gegeven voorwerp (zie Hoofdstuk 11). In wezen gaat het ook om overeenkomstige stromingsverschijnselen.

Het laminaire regime doet zich voor als Re < ca. 2.3 x 10^3; daar geldt f = 64/Re. Voor het turbulente regime (van de hoofdstroom) (Re > ca. 4 x 10^3) zijn in Figuur 12.7 drie subregimes te onderscheiden:

- f varieert met k/D, onafhankelijk van Re (hydraulisch ruw) (12.35)
- f varieert met Re, onafhankelijk van k/D (hydraulisch glad) (12.36 t/m 12.39)
- overgang tussen bovengenoemde

De hierboven gegeven uitdrukkingen voor f gelden voor het hydraulisch ruwe respectievelijk gladde gebied, maar niet voor het overgangsregime. Daarover gaat de volgende paragraaf.

12.6.8 Weerstandsfactor uit metingen van White-Colebrook

Nikuradse voerde zijn proeven uit in buizen met een kunstmatig aangebrachte ruwheid, bestaande uit dicht gepakte zandkorrels van vrijwel eenzelfde (zeef)diameter (k). In praktische toepassingen gaat het om ruwheid die het onbedoelde gevolg is van technische en natuurlijke processen; daarbij is sprake van aanzienlijke variatie in vorm en afmeting van de ruwheidselementen. We spreken hier van technische ruwheid om het onderscheid met de academische situatie in de proeven van Nikuradse aan te geven. Om bovenstaande resultaten daarbij toch te kunnen gebruiken is voor verschillende typen ruwheid empirisch een waarde van k bepaald die voor de bepaling van f (bij hydraulisch ruwe condities) equivalent is aan die van Nikuradse.

Colebrook en White (1937) hebben nagegaan hoe f verloopt in de overgang van gladde naar ruwe condities, als functie van Re bij constante relatieve ruwheid. Zij vonden dat f bij technisch-ruwe pijpen veel geleidelijker verloopt dan in Nikuradse's resultaten, en ook monotoon, in tegenstelling tot de resultaten van Nikuradse waarbij f een minimum heeft in het overgangsgebied. Colebrook (1939) vond dat deze monotone variatie van f op eenvoudige manier is te benaderen, zodanig dat de limietgevallen van gladde en ruwe condities correct worden weergegeven, nl. door voor y_o in de algemene uitdrukking (12.34) de som te substitueren van de waarde voor de ruwe wandstroming en die voor de gladde wandstroming, dus $y_o = 0{,}033k + 0{,}11\nu/u_*$. Dan ontstaat (met enige afronding)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left[\frac{e^{-\frac{3}{2}} r_o}{0{,}03k + 0{,}1 \frac{\nu}{u_*}} \right] . \qquad (12.40)$$

Dit is tot diverse andere vormen te herleiden, zoals

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3{,}7 D}{k + \frac{\delta}{3{,}5}} \qquad (12.41)$$

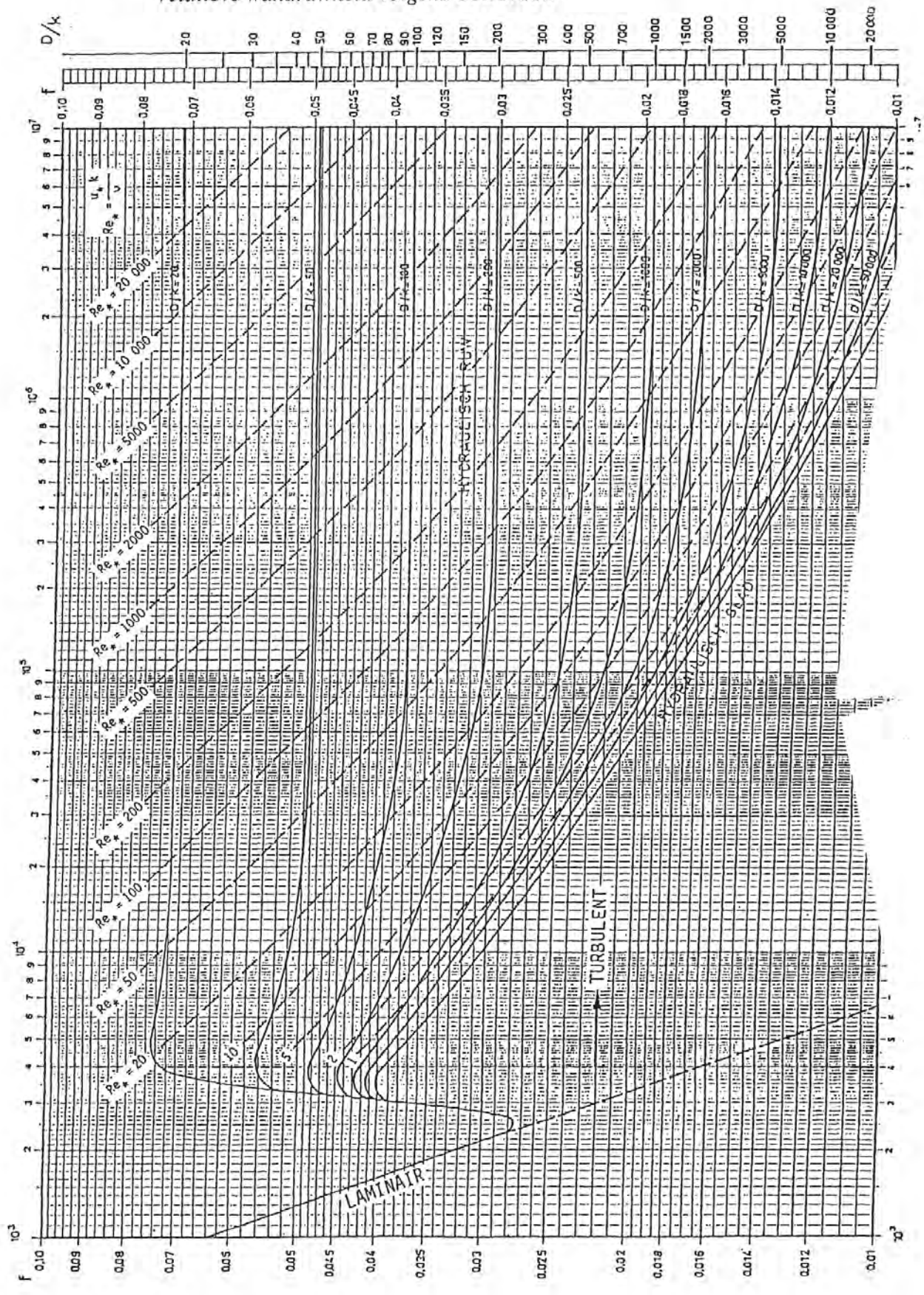
of

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0{,}27 \frac{k}{D} + \frac{2{,}5}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad (12.42)$$

of

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[0{,}27 \frac{k}{D} \left(1 + \frac{3{,}3}{Re_*}\right) \right] \qquad (12.43)$$

Figuur 12.8 Waarde van de wrijvingscoëfficiënt f als functie van het getal van Reynolds en de relatieve wandruwheid volgens Colebrook



Dit type weerstandsformules wordt genoemd naar **White-Colebrook**. Een grafische weergave ervan is gegeven in Figuur 12.8, waar f is uitgezet tegen Re met D/k als parameter (zie 12.42).

Voor elke combinatie van Re en D/k is f bepaald en dus ook de waarde van Re_*. Immers,

$$Re_* = \frac{u_* k}{\nu} = \sqrt{\frac{f}{8}}\frac{Uk}{\nu} = \sqrt{\frac{f}{8}}\frac{k}{D}\frac{UD}{\nu} = \sqrt{\frac{f}{8}}\frac{k}{D}Re$$

Daardoor is het mogelijk lijnen te tekenen in het diagram van Figuur 12.8 waarlangs Re_* constant is. In de figuur is direct af te lezen dat de wandstroming vrijwel ruw is voor $Re_* >$ ca. 70. Hij is vrijwel glad voor $Re_* <$ ca. 0.15; zie ook 12.43.

Een overzicht van diverse uitdrukkingen voor de eenparige pijpstroming is gegeven in een formuleblad aan het eind van de handleiding.

12.7 Toepassingen

Wanneer bij gegeven pijp (k, D) en vloeistof (ρ, η ofwel ρ, ν) het debiet is gegeven (dus ook U) kan f worden afgelezen in Figuur 12.8 via $Re = UD/\nu$ en D/k. (Bij gebruikmaking van één van de formules (12.40 - 12.43) zou itereren nodig zijn, omdat u_* niet tevoren bekend is.) Daarna volgt het wrijvingsverval via de formule van Darcy-Weisbach (12.11).

Is daarentegen het verhang gegeven en moet U worden berekend, dan wordt eerst u_* bepaald volgens $u_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = \sqrt{gRi_w} = \frac{1}{2}\sqrt{g\,Di_w}$, waarna $Re_* = u_* k/\nu$ bekend is. Samen met de gegeven waarde van de relatieve ruwheid (k/D) kan f vervolgens direct (zonder iteratie) worden berekend uit (12.43), of in Figuur 12.8 worden afgelezen, waarna $U = u_*/\sqrt{f/8}$ eveneens bekend is.

Voorbeeld
Bereken i_w voor de stroming van water ($\nu = 10^{-6}$ m^2/s) met een debiet Q = 0,1 m^3/s door een pijp met D = 0,3 m met een vrij geringe ruwheid k = 0,1 mm (a) respectievelijk een vrij grote ruwheid k = 1,5 mm (b).

Opl.: $A = \pi D^2/4 = 0{,}071$ m^2 → $U = Q/A = 1{,}41$ m/s → $Re = UD/\nu = 4{,}2 \times 10^5$.

Geval (a)
$k = 0{,}1$ mm → $D/k = 3000$; met $Re = 4{,}2 \times 10^5$ → Figuur 12.8 → $f = 0{,}017$ →

$$i_w = f \frac{U^2}{2gD} = 5{,}8 \times 10^{-3} \quad \text{(antw.)}$$

N.B.1 $u_* = \sqrt{f/8}\, U = 0{,}065$ m/s → $\delta = 11{,}6\, \nu/u_* = 0{,}18$ mm.
Merk op dat δ inderdaad zeer klein is t.o.v. de straal van de pijp. (Voor $y_0 \approx \delta/105 \approx 2 \times 10^{-6}$m geldt dit nog sterker.)

N.B.2 In dit geval zijn δ en k van dezelfde grootte-orde, maar de invloed van δ overheerst. ($Re_* \approx 7$, dus duidelijk in het overgangsgebied tussen ruw en glad; zie ook de ligging van het punt $Re = 4{,}2 \times 10^5$ en $D/k = 3000$ in Figuur 12.8.)

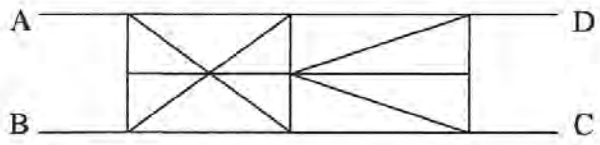
Geval (b)
$k = 1{,}5$ mm → $D/k = 200$; met $Re = 4{,}2 \times 10^5$ → Figuur 12.8 → $f = 0{,}030$ →

$$i_w = f \frac{U^2}{2gD} = 1{,}0 \times 10^{-2} \quad \text{(antw.)}$$

N.B. $u_* = 0{,}086$ m/s → $\delta = 0{,}13$ mm ofwel vrijwel verwaarloosbaar t.o.v. k – ruwe regime (volgt ook uit $Re_* = 129$; zie voorts de ligging van het punt met $Re = 4{,}2 \times 10^5$ en $D/k = 200$ in Figuur 12.8).

12.8 Leidingstelsels

We geven in het kort weer hoe bovenstaande resultaten kunnen worden gebruikt voor de berekening van de debieten en de piëzometrische niveaus in een stelsel van leidingen, bestaande uit z.g. takken (i = 1, 2, ...) die samenkomen in knooppunten (zie Figuur 12.9).



Figuur 12.9 Leidingstelsel (principeschets)

Elke tak wordt verondersteld een constante diameter en ruwheid te hebben, zodat de stroming per tak eenparig is, met een verval van knooppunt 1 tot knooppunt 2 gegeven door

$$\Delta h_{1,2} = h_1 - h_2 = X_i Q_i |Q_i| \tag{12.44}$$

waarin

$$X_i = \frac{f_i}{2g} \frac{L_i}{D_i A_i^2} = \frac{8}{\pi^2 g} \frac{f_i L_i}{D_i^5}$$

en waar $Q_i > 0$ bij stroming van 1 naar 2 en $Q_i < 0$ bij stroming van 2 naar 1.

Voor een knooppunt geldt dat de som van de debieten ernaartoe, inclusief een eventueel (bekende) toevoer Q_{ext} van buitenaf, gelijk is aan nul:

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i + Q_{ext} = 0 \tag{12.45}$$

Hierin is m het aantal takken die in het betreffende knooppunt samenkomen.

Met verwaarlozing van de verschillen in snelheidshoogte en van lokale verliezen in de knooppunten geldt bovendien in elk knooppunt dat in alle pijpeinden die op het knooppunt zijn aangesloten het piëzometrisch niveau gelijk is:

$$h_1 = h_2 = ... = h_m \tag{12.46}$$

Dit zijn (m-1) vergelijkingen voor h_1 t/m h_m. Samen met (12.45) levert dit m vergelijkingen per knooppunt, evenveel als het aantal takken dat er samenkomt. Per tak zijn er twee knooppunten. Samen met (12.44) zijn er dus drie vergelijkingen per tak, juist genoeg voor bepaling van de drie variabelen h_1, h_2 en Q per tak. We gaan er hierbij van uit dat de piëzometrische niveaus bij de systeemgrens gegeven zijn (punten A, B, C en D in Figuur12.9).

Het totale stelsel vergelijkingen is niet lineair vanwege de kwadratische weerstand, en - wanneer de stroming niet overal hydraulisch ruw is - vanwege de variatie van de weerstandscoëfficiënt f_i met Q_i (via Re_i of via δ_i). In de ontwerppraktijk zijn diverse softwarepakketten beschikbaar voor de oplossing ervan.

APPENDIX - Berekening van gemiddelde snelheid en coëfficiënten α en β uit logaritmisch snelheidsprofiel

De meevoering van massa, impuls en kinetische energie door een dwarsdoorgang in een parallelstroom is gegeven door respectievelijk

* massa: $\iint \rho u \, dA = \rho U A$
* impuls: $\iint \rho u^2 \, dA = \alpha \rho U^2 A$
* kin.en.: $\iint \frac{1}{2} \rho u^3 \, dA = \beta \frac{1}{2} \rho U^3 A$

Deze betrekkingen definiëren respectievelijk

* de gemiddelde stroomsnelheid:

$$U = \frac{1}{A} \iint u \, dA$$

* de snelheidsverdelingscoëfficiënt voor meevoering van impuls:

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint (u/U)^2 \, dA$$

* de snelheidsverdelingscoëfficiënt voor meevoering van kinetische energie:

$$\beta = \frac{1}{A} \iint (u/U)^3 \, dA$$

We gaan deze grootheden berekenen voor een logaritmisch snelheidsprofiel, gegeven door

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \qquad (A.1)$$

waarbij y de afstand is uit de vaste wand.

In de berekening van de totale transporten passen we (A.1) toe op het interval $y_0 \leq y \leq r_0$. Feitelijk is het logprofiel niet geldig tot aan $y = y_0$, maar daar zien we van af, omdat de zone van significante afwijking zeer dun is t.o.v. de buisdiameter c.q. de waterdiepte. Het transport in de zone $0 < y < y_0$ wordt eveneens verwaarloosd. Dat is geoorloofd omdat deze zone relatief uiterst dun is ($y_0 << r_0$) en de snelheden daar gering zijn.

(I) BUISSTROMING

(a) Gemiddelde snelheid

Voor een axiaalsymmetrische buisstroming met logaritmisch snelheidsprofiel in het interval $y_o \leq y \leq r_o$ (waarbij $y_o << r_o$) geldt

$$Q = \iint u \, dA = \int_0^{r_o} u \, 2\pi r \, dr \simeq \frac{u_*}{\kappa} \int_0^{r_o - y_o} (\ln \frac{y}{y_o}) \, 2\pi r \, dr$$

ofwel

$$Q = 2\pi \frac{u_*}{\kappa} \int_{y_0}^{r_o} (\ln \frac{y}{y_o}) \, (r_o - y) \, dy$$

Gebruikmaking van de onbepaalde integralen

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x \qquad \text{en} \qquad \int x \ln x \, dx = \tfrac{1}{2} x^2 (\ln x - \tfrac{1}{2})$$

en uitwerken geeft

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_o^2} = \frac{u_*}{\kappa} \left[\ln \frac{r_o}{y_o} - \tfrac{3}{2} + 2 \frac{y_o}{r_o} - \tfrac{1}{4} (\frac{y_o}{r_o})^2 \right]$$

Omdat $y_o << r_o$ kan dit worden benaderd als

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \left[\ln \frac{r_o}{y_o} - \tfrac{3}{2} \right] = \frac{u_*}{\kappa} \ln (e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_o}{y_o}) \qquad \text{(A.2)}$$

(b) Weerstandscoëfficiënt

Omdat $\tau_o = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2$ volgt de weerstandscoëfficiënt c_f uit

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} (\ln \frac{r_o}{y_o} - \tfrac{3}{2}) = \frac{1}{\kappa} \ln (e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_o}{y_o}) \qquad \text{(A.3)}$$

(c) Vorm snelheidsprofiel

De maximumsnelheid treedt op in de as, waar $y = r_o$ (zie A1):

$$u_{max} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{r_o}{y_o}$$

Samen met (A.3) volgt hieruit

$$\frac{u_{max}}{U} = 1 + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{c_f}}{\kappa}$$

Dit laat zien hoe met afnemende weerstandsfactor (c_f) het snelheidsprofiel tot een uniforme verdeling nadert (zie ook Figuur 12.3, krommen b en c).

(d) Snelheidsverdelingscoëfficiënten

Omdat $u_* = \sqrt{c_f}\, U$ kan het snelheidsprofiel (A.1) worden geschreven als

$$\frac{u}{U} = \frac{\sqrt{c_f}}{\kappa} \ln \frac{y}{y_o} \qquad (A.4)$$

Met gebruikmaking hiervan wordt α:

$$\alpha = \frac{1}{\pi r_o^2} \frac{c_f}{\kappa^2} \int_{y_o}^{r_o} (\ln \frac{y}{y_o})^2 \, 2\pi(r_o - y)\, dy$$

Dit kan worden uitgewerkt m.b.v. de onbepaalde integralen

$$\int \ln^2 x \, dx = x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$$

$$\int x \ln^2 x \, dx = \tfrac{1}{2} x^2 (\ln^2 x - \ln x + \tfrac{1}{2})$$

In het resultaat worden die termen verwaarloosd die tenminste een factor (y_o / r_o) kleiner zijn dan de overige (evenals in de afleiding van (A.2)). Waar in de resterende termen de factor $\ln(r_o/y_o)$ voorkomt wordt deze geëlimineerd door substitutie van (A.3). Het resultaat is

$$\alpha = 1 + \frac{5}{4} \frac{c_f}{\kappa^2} \qquad (A.5)$$

Evenzo leidt berekening van β tot

$$\beta = 1 + \frac{15}{4}\frac{c_f}{\kappa^2} - \frac{9}{4}\left(\frac{c_f}{\kappa^2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (A.6)$$

Daarbij is gebruik gemaakt van de onbepaalde integralen

$$\int \ln^3 x\, dx = x\,(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)$$

$$\int x \ln^3 x\, dx = \frac{1}{2}x^2(\ln^3 x - \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x - \frac{3}{4})$$

Omdat $c_f << \kappa^2$ geldt de benadering $(\beta - 1) \approx 3(\alpha - 1)$. M.a.w., bij benadering wijkt β drie keer meer af van de eenheid dan α (bijv. $\beta \approx 1{,}03$ en $\alpha \approx 1{,}01$).

(II) TWEEDIMENSIONALE STROMING

Vooruitlopend op Hoofdstuk 13 geven we hier een soortgelijke bewerking als de bovenstaande, nu voor een tweedimensionale stroming met een vrij oppervlak en diepte d; hierbij is y de afstand boven de bodem en geldt $y_o << d$.

(a) Gemiddelde snelheid

$$q = \int_0^d u\, dy \approx \frac{u_*}{\kappa}\int_{y_o}^d \ln\frac{y}{y_o}\, dy$$

ofwel

$$q = \frac{u_* d}{\kappa}\left[\ln\frac{d}{y_o} - 1 - \frac{y_o}{d}\right] \approx \frac{u_* d}{\kappa}\left[\ln\frac{d}{y_o} - 1\right]$$

zodat

$$U = \frac{q}{d} = \frac{u_*}{\kappa}\left[\ln\frac{d}{y_o} - 1\right] = \frac{u_*}{\kappa}\ln(e^{-1}\frac{d}{y_o}) \qquad (A.7)$$

(b) Weerstandscoëfficiënt

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa}\left[\ln \frac{d}{y_o} - 1\right] = \frac{1}{\kappa} \ln (e^{-1} \frac{d}{y_o}) \qquad (A.8)$$

(c) Vorm snelheidsprofiel

De maximumsnelheid treedt op aan het vrije oppervlak, waar y = d:

$$u_{max} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{d}{y_o}$$

Samen met (A.8) volgt hieruit

$$\frac{u_{max}}{U} = 1 + \frac{\sqrt{c_f}}{\kappa}$$

Dit laat zien hoe met afnemende weerstandsfactor (c_f) het snelheidsprofiel tot een uniforme verdeling nadert.

(d) Snelheidsverdelingscoëfficiënten

Op analoge manier als voor de buisstroming is gedaan is af te leiden dat voor de tweedimensionale stroming geldt

$$\alpha = 1 + \frac{c_f}{\kappa^2} \qquad (A.9)$$

$$\beta = 1 + 3\frac{c_f}{\kappa^2} - 2\left(\frac{c_f}{\kappa^2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (A.10)$$

Ook hier blijkt dat $\beta-1 \approx 3(\alpha-1)$.

13 EENPARIGE STROOM IN OPEN WATERLOPEN

13.1 Inleiding

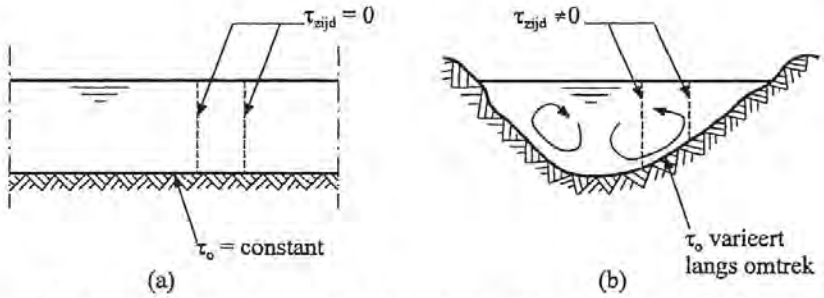
In het vorige hoofdstuk is de eenparige stroom door een buisleiding behandeld. In dit hoofdstuk gaan we in op eenparige stroom in leidingen met een willekeurig dwarsprofiel, in het bijzonder open waterlopen.

In een eenparige stroom variëren de snelheid en de schuifspanning niet in de stroomrichting. Voor de berekening ervan kunnen we dus volstaan met een enkele dwarsdoorsnede.

De eenparige stroom in een buisleiding is axiaalsymmetrisch, wat o.m. inhoudt:
- de snelheid (u) varieert alleen in radiale (r) richting, niet in tangentiële (θ) richting;
- in axiale vlakken (door de pijpas) heerst geen schuifspanning;
- de wandschuifspanning (τ_o) varieert niet met θ (is constant langs de omtrek).

Daardoor reduceert het probleem van de bepaling van de verdeling van schuifspanning en snelheid in het hele dwarsprofiel van de buis in feite tot een ééndimensionaal probleem langs een straal vanuit het middelpunt ($0 \leq r \leq r_o$), ofwel langs een loodlijn vanuit de wand ($0 \leq y \leq r_o$) (zie Hoofdstuk 12).

Een soortgelijke vereenvoudiging doet zich voor bij een eenparige stroom over een vlakke bodem wanneer daarbij in zijdelingse richting geen variaties optreden in de diepte of de snelheid, zoals bij benadering het geval kan zijn in een brede, open waterloop. In deze situaties heersen er geen zijdelingse schuifspanningen in vertikale vlakken in de stroomrichting, en varieert de bodemschuifspanning niet in zijdelingse richting (zie Figuur 13.1a).



Figuur 13.1 Dwarsdoorsnede van een stroming met vrij oppervlak; (a): tweedimensionale stroom; (b): willekeurig dwarsprofiel; secundaire stromen aanwezig zoals geschetst.

In eenparige tweedimensionale stromen zoals geschetst in Figuur 13.1a (dezelfde beweging in alle vertikale vlakken evenwijdig aan de stroomrichting, niet variërend in stroomafwaartse richting) kunnen we volstaan met een ééndimensionale berekening van schuifspanning en snelheid in een enkele vertikaal (paragraaf 13.2).

Voor waterlopen met een willekeurig dwarsprofiel is een vereenvoudiging tot een één-dimensionaal probleem niet mogelijk. In de open waterloop in Figuur 13.1b bijvoorbeeld zijn de stroomsnelheden in de diepere delen groter dan in de ondiepere, resulterend in zijdelingse schuifspanningen en in variaties van de bodemschuifspanning langs de omtrek. Strikt gesproken moet dan een tweedimensionale berekening voor het gehele dwarsprofiel worden uitgevoerd voor de bepaling van de lokale snelheden en de schuifspanningen. De beschikbare kennis van de turbulentie is daarvoor echter nauwelijks voldoende, nog afgezien van de rekeninspanningen die per geval nodig zouden zijn. In de praktijk beperkt men zich tot meer grove, quasi ééndimensionale benaderingen. Voor zover dat enigszins theoretisch gebeurt, uitgaande van een logaritmische snelheidsverdeling, gaan we daar in paragraaf 13.3 op in. Enkele oude, empirische formuleringen komen aan de orde in paragraaf 13.4.

N.B. Als gevolg van variaties van τ_0 langs de omtrek heeft de tijdsgemiddelde snelheid een relatief kleine component in het vlak van de dwarsdoorsnede; deze z.g. secundaire stromen (zie Figuur13.1b) herverdelen de stroomafwaartse snelheid in het dwarsprofiel, en zijn ook van belang voor de ontwikkeling van de bodemligging in het dwarsprofiel. Zij blijven hier echter buiten beschouwing.

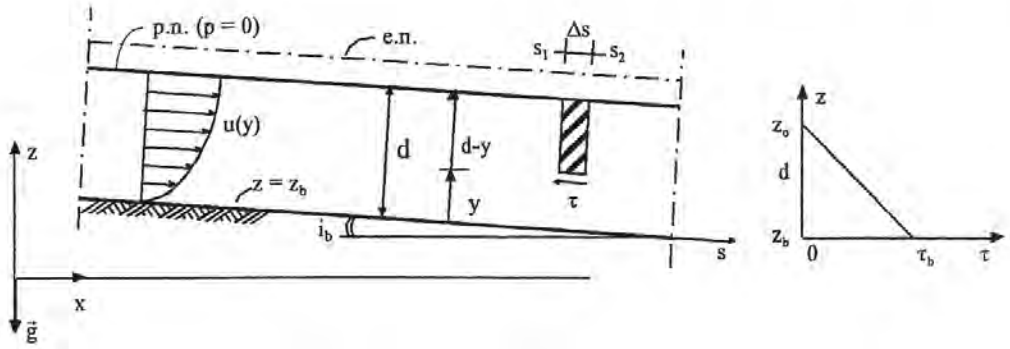
13.2 Tweedimensionale stroming met vrij oppervlak

Voor de behandeling van wandwrijving in stromen met een vrij oppervlak beginnen we met het eenvoudigste geval, nl. een eenparige, tweedimensionale stroom (d.w.z. geen variaties in dwarsrichting, dus ook geen invloed van zijwanden of oevers). We beschrijven deze stromen in een willekeurig vertikaal vlak in de stroomrichting, zeg het x,z-vlak.

We gaan uit van een flauwe bodemhelling ($\tan i_b = - dz_b/dx << 1$; zie Figuur 13.2), waarvoor geldt

$$\cos i_b \approx 1 \qquad \text{en} \qquad \tan i_b \approx \sin i_b \approx i_b \tag{13.1}$$

Is de stroming eenparig dan variëren snelheid en diepte niet in de stroomrichting. Dit houdt in dat de energielijn en de piëzometrisch-niveaulijn parallel lopen aan elkaar en aan de bodem, ofwel $i_w = i_b$.



Figuur 13.2 Definitieschets

We stellen een impulsbalans op (in dit geval een evenwichtsvoorwaarde) voor een kolom (gearceerd in Figuur 13.2) die zich uitstrekt van een afstand y uit de bodem tot aan het vrije oppervlak, waar y = d. De drukkracht en de meevoering van impuls door de vlakken $s = s_1$ en $s = s_2$ heffen elkaar op, omdat de stroming eenparig is. De component in de stroomrichting van het gewicht p.e.v. breedte is $(\rho g \sin i_b)(d - y)\,\Delta s \approx \rho g i_b (d - y)\,\Delta s$. Deze maakt evenwicht met de schuifkracht p.e.v. breedte werkend in het ondervlak van de kolom ($\tau \Delta s$), zodat

$$\tau(y) = \rho g i_b (d - y) = \tau_b \left(1 - \frac{y}{d}\right) \tag{13.2}$$

De schuifspanning varieert dus lineair van $\tau = 0$ aan het oppervlak tot de waarde

$$\tau_b = \rho g d i_b \tag{13.3}$$

aan de bodem (Figuur 13.2 rechts). De lineaire variatie van τ tussen het oppervlak en de bodem in open water is dezelfde als die van de as tot aan de wand in een cirkelvormige buis. Als de vrije-oppervlakte stroming laminair zou zijn, zou het snelheidsprofiel identiek zijn aan dat voor laminaire buisstroming, d.w.z. parabolisch. In de civiele praktijk doet dit zich echter niet voor.

In tweedimensionale turbulente stroming met een vrij oppervlak kan de turbulente menging anders zijn dan in de axiaalsymmetrische turbulente stroming in een pijp. Ondanks het gelijke (lineaire) verloop van de schuifspanning in beide gevallen zouden de snelheidsprofielen dus kunnen verschillen. We zien daar echter van af en gaan hier eveneens uit van het logaritmische snelheidsprofiel in de turbulente hoofdstroom:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \tag{13.4}$$

Door dit over de diepte (d) te integreren vinden we het debiet p.e.v. breedte (q) en daaruit de

gemiddelde snelheid U = q/d. In de Appendix van Hoofdstuk 12 staan de tussenstappen. (Ook worden daar uitdrukkingen gegeven voor de snelheidsverdelingscoëfficiënten α en β.) Het resultaat m.b.t. U is

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln (e^{-1} \frac{d}{y_o}) \tag{13.5}$$

(zie A.7 in Hoofdstuk 12, Appendix). Stellen we ook hier $\tau_b = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2$ dan volgt

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln (e^{-1} \frac{d}{y_o}) \tag{13.6}$$

Voor de uitwerking hiervan kunnen we voor κ en y_o de resultaten gebruiken die Nikuradse en White-Colebrook vonden voor turbulente pijpstroming (zie Hoofdstuk 12). Daarmee is c_f bepaald. Het wrijvingsverhang, gegeven door

$$i_w = c_f \frac{U^2}{gd}, \tag{13.7}$$

is dan bij gegeven U, d, k en ν te berekenen. Bij eenparige stroom (zoals hier verondersteld) is dit gelijk aan het verhang van de bodem ($i_w = i_b$) en van de waterspiegel. Bij niet-eenparige stroom zijn die drie echter onderling verschillend (zie Hoofdstuk 14).

13.3 Stroming in open leiding met willekeurig dwarsprofiel

We gaan nu in op de weerstand van een eenparige stroom door een open of gesloten prismatische leiding met een willekeurig dwarsprofiel. In Hoofdstuk 12 (vergelijking 12.7) is het wrijvingsverhang (i_w) gedefinieerd als

$$i_w = \frac{\Delta W}{\rho g A \Delta s} \tag{13.8}$$

d.w.z. als de verhouding van de weerstand op een schijf vloeistof in een leiding, met lengte Δs, tot het gewicht van die schijf. Deze definitie geldt ongeacht de vorm van het dwarsprofiel, voor stromen met of zonder vrij oppervlak.

De weerstand ΔW is de integraal van de lokale wandschuifspanning τ_b over het weerstand-leverende oppervlak, met omtrek P. Als τ_b constant is over die omtrek, zoals in de buis of in de twee-dimensionale stroming, geldt eenvoudig $\Delta W = \tau_b P \Delta s$. In alle andere dwarsprofielen zal τ_b echter variëren langs de omtrek. We werken dan met de waarde van τ_b, gemiddeld over de omtrek waarin τ_b werkt, gedefinieerd als

$$\langle \tau_b \rangle = \frac{\Delta W}{P \Delta s} \tag{13.9}$$

Uit de combinatie van (13.8) en (13.9) volgt

$$\boxed{\langle \tau_b \rangle = \rho g R i_w = \rho g R i_b} \tag{13.10}$$

waarin R = A/*P*, de hydraulische straal.

Om ook nu een verband te leggen tussen weerstand en gemiddelde snelheid kunnen we formeel stellen (als definitie van c_f respectievelijk u_*):

$$\langle \tau_b \rangle = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 \tag{13.11}$$

zodat (zie ook 12.10):

$$i_b = c_f \frac{U^2}{gR} \qquad \text{of} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{c_f}} \sqrt{g R i_b} \tag{13.12}$$

De eenvoud van deze uitdrukkingen is echter voor een deel schijn, omdat de coëfficiënt c_f hierin op een onbekende manier afhangt van de vorm van het dwarsprofiel (in tegenstelling tot de twee bijzondere gevallen van axiaalsymmetrische stroming en tweedimensionale stroming).

Een eerste benadering voor een praktische oplossing van dit probleem bestaat uit de veronderstelling dat het dwarsprofiel van een leiding slechts via zijn hydraulische straal (R) van invloed is op de weerstand. De invloed van verschillen in vorm wordt hiermee dus verwaarloosd. Om dit uit te werken gaan we eerst de uitdrukkingen voor de weerstandscoëfficiënt voor pijpstroming respectievelijk voor tweedimensionale stroming met een vrij oppervlak schrijven in termen van R.

Voor een pijp met straal r_o geldt $R = \frac{1}{2} r_o$, en kan (12.33) geschreven worden als

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-\frac{3}{2}} \frac{2R}{y_o} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(0{,}44 \frac{R}{y_o} \right) \tag{13.13}$$

In een rechthoekig kanaal met breedte B, diepte d en een vrij oppervlak geldt:
$R = Bd/(B + 2d) = d/(1 + 2d/B)$. In een zeer breed kanaal ($B/d \to \infty$, tweedimensionale stroming) geldt dus bij benadering R = d, en kan (13.6) geschreven worden als

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-1} \frac{R}{y_o}\right) \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left(0{,}37 \frac{R}{y_o}\right) \tag{13.14}$$

Om een uitdrukking te krijgen voor $1/\sqrt{c_f}$ voor een leiding met een willekeurig dwarsprofiel gebruiken we nu een globaal midden tussen de coëfficiënten van R/y_o voor een cirkel (zie 13.13) en voor een breed kanaal (zie13.14), zeg 0,40:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(0{,}40 \frac{R}{y_o}\right) \tag{13.15}$$

Substitueren we hierin Nikuradse's waarden $y_o \approx k/30$ voor ruwe condities en $y_o \approx \delta/105$ voor gladde condities, en passen we de optelling hiervan toe volgens Colebrook, dan ontstaat

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{12R}{k + \delta/3{,}5}$$

ofwel

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5{,}75 \log \frac{12R}{k + \delta/3{,}5}} \tag{13.16}$$

Hierin is $\delta = 11{,}6\, \nu/u_*$ en $u_* = \sqrt{c_f}U = \sqrt{gRi_b}$. Met betrekking tot het onderscheid glad vs. ruw en met betrekking tot de berekening van c_f uit deze vergelijking geldt hetzelfde als wat daarover is gezegd voor de stroming in een cirkelvormige buis.

Bovenstaande veralgemenisering van de formule van Colebrook wordt zowel op gesloten als op open leidingen toegepast. Gesloten leidingen met een niet-cirkelvormig profiel komen o.a. voor in ventilatiesystemen, waar de luchtkokers vaak een rechthoekig profiel hebben. Vanwege de relatief geringe wandruwheid zal de viscositeit daar via δ van invloed kunnen zijn (bovendien is ν_{lucht} ca. $15 \times \nu_{water}$).

In natuurlijke open waterlopen in alluviaal materiaal, waarbij bovendien in de meeste gevallen bodemribbels of andere beddingvormen aanwezig zijn, is de stroming vrijwel altijd hydraulisch ruw, en kan (13.16) worden benaderd met

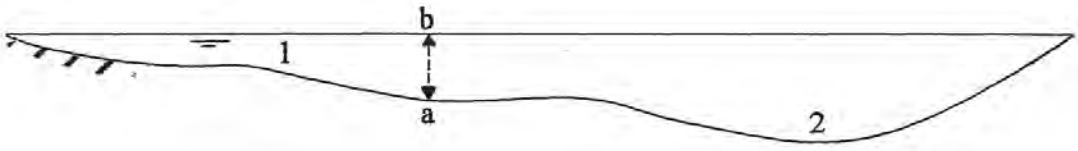
$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5{,}75 \log \frac{12\,R}{k} \qquad (13.17)$$

Hierin is c_f slechts afhankelijk van de relatieve ruwheid (k/R). In een behoorlijk bereik van waarden van R/k die in de praktijk voorkomen varieert het rechterlid van (13.17) ongeveer met de 1/6-e machtswortel van R/k (zie Figuur 13.4). Dit komt overeen met de oudere, empirische uitdrukkingen van Manning en Strickler voor de snelheid in eenparige stroom, die neerkomen op een evenredigheid van $1/\sqrt{c_f}$ tot $(R/k)^{1/6}$. In par. 13.4 komt dit aan de orde.

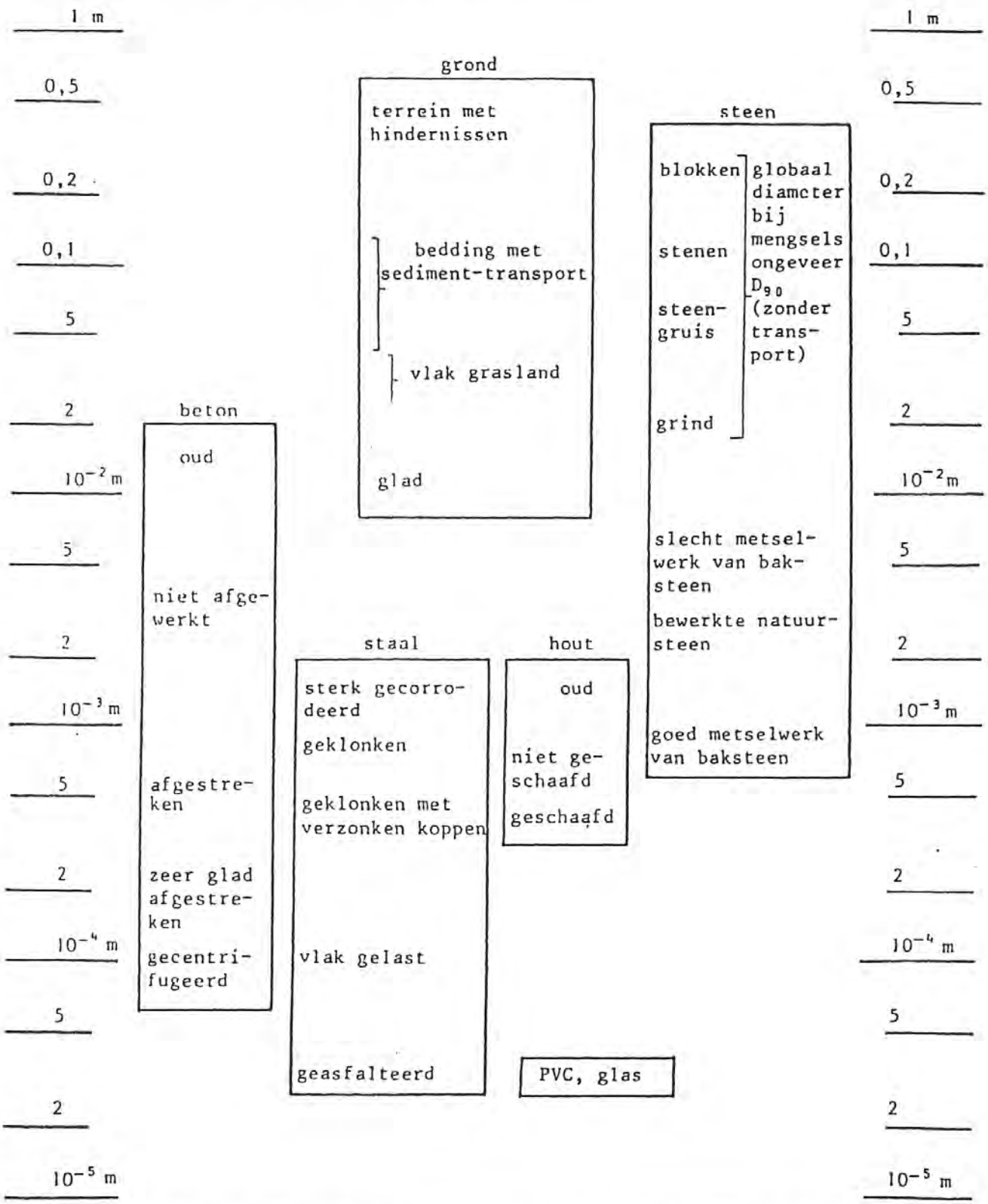
In geval van beddingen bestaande uit korrelig materiaal (zand, grind, rotsblokken) van niet-uniforme diameter, zoals die in de natuur voorkomen, of in aanwezigheid van bodemvormen zoals ribbels, kan men een equivalente k definiëren, nl. die waarde van k die, ingevuld in (13.17), dezelfde waarde van c_f geeft als de optredende waarde. Deze equivalente k blijkt voornamelijk afhankelijk te zijn van de relatief grote elementen, in afwezigheid van bodemvormen bijv. de zeefdiameter waar 90% van het materiaal doorheen gaat (D_{90}). Omdat deze elementen niet alle in elkaars luwte liggen, wat bij de dichtgepakte en vrijwel uniforme korrels van Nikuradse wel het geval was, is het effect ervan op de weerstand groter dan bij uniform materiaal met dezelfde diameter. Uit onderzoek is gebleken dat $k \approx 3\,D_{90}$.

Een indicatie van equivalente Nikuradse k-waarden voor diverse materialen is gegeven in Tabel 13.1.

Zoals gezegd komt de specifieke vorm van een gegeven dwarsprofiel in bovenstaande globale aanpak niet tot uiting, en stellen we één gemiddelde snelheid en één gemiddelde wand-schuifspanning representatief voor het hele dwarsprofiel. Dit is niet altijd een acceptabele benadering. Een voorbeeld waar dit niet opgaat is een rivier met een relatief diepe geul en een relatief ondiep naastgelegen deel, zoals geschetst in Figuur 13.3.



Figuur 13.3 Dwarsprofiel met geul en ondiep gedeelte ($i_{b1} = i_{b2}$)



Tabel 13.1 Gegevens k-waarden (equivalente zandruwheid volgens Nikuradse)

In beide delen (1 en 2) is de diepte klein t.o.v. de breedte (de diepten zijn in Figuur 13.3 sterk overdreven getekend), zodat de weerstand in beide overwegend door de bodem wordt bepaald, en wel door de plaatselijke diepte en ruwheid. Ten opzichte daarvan kan de schuifspanning tussen beide delen (het longitudinale vlak door de lijn a-b) wel worden verwaarloosd. Het grensvlak a-b draagt dan niet bij aan de weerstandleverende omtrek van elk van de twee delen (P_1 respectievelijk P_2). Op deze basis berekenen we voor beide delen afzonderlijk een hydraulische straal (R_1 respectievelijk R_2) en daarbij een waarde van c_f (c_{f1} respectievelijk c_{f2}), bijv. volgens (13.17). Het verhang in beide delen is gelijk aan de (gemeenschappelijke) bodemhelling:

$$i_b = i_w = c_{f_1} \frac{U_1^2}{gR_1} = c_{f_2} \frac{U_2^2}{gR_2}$$

Bij gegeven i_b volgen hieruit de waarden van U_1 en U_2, zodat met de bekende A_1 en A_2 ook de totale afvoer $Q = U_1 A_1 + U_2 A_2$ is te berekenen.

13.4 Empirische weerstandsformules

Al vele eeuwen worden leidingstelsels aangelegd voor het transport van water, aanvankelijk voor irrigatie en huishoudelijk gebruik, later ook voor de industrie. Ten behoeve van het ontwerp daarvan is veel empirisch onderzoek verricht van de afvoercapaciteit van open en gesloten leidingen, vooral in Europa in de 18e en de 19e eeuw (zie Rouse en Ince (1963) voor een historisch overzicht). De ontwikkeling van een theoretische basis voor de aanpak van het probleem van de stromingsweerstand in leidingen is pas in de 20e eeuw tot stand gekomen.

Het empirisch onderzoek heeft geleid tot tientallen formules voor de afvoercapaciteit van leidingen c.q. de stromingsweerstand daarvan. We presenteren hier slechts de drie meest bekende, die ook nu nog veel worden gebruikt, ondanks het feit dat ze niet homogeen zijn in de dimensies. We zullen ook aangeven hoe die in verband staan met de meer recente resultaten die in het voorgaande zijn behandeld.

Formule van Chézy

Chézy beredeneerde (ca. 1770) dat de gemiddelde snelheden bij eenparige stroom in twee verschillende open waterlopen met een gegeven vorm van het dwarsprofiel evenredig zouden moeten zijn aan de respectievelijke waarden van $(Ai_b/P)^{1/2}$, ofwel van $(Ri_b)^{1/2}$. Later is deze evenredigheid geschreven in de vorm van een gelijkheid, na invoering van een coëfficiënt:

$$\boxed{U = C\sqrt{Ri_b}} \qquad (13.18)$$

Hoewel de vergelijking in deze vorm niet van Chézy afkomstig is wordt hij wel naar hem genoemd, en heet C de **Chézy-coëfficiënt**.

C is niet dimensieloos; de dimensie ervan is $L^{½}/T$, met eenheid $m^{½}/s$ in het S.I.-stelsel. De herkomst van deze dimensie is te zien aan (13.12):

$$U = \frac{1}{\sqrt{c_f}}\sqrt{gRi_b} \qquad (13.19)$$

Blijkbaar geldt

$$C = \sqrt{g/c_f} \qquad \text{of} \qquad c_f = g/C^2 \qquad (13.20)$$

De dimensie van C is dus die van $\sqrt{g}$. De oorzaak hiervan ligt in het feit dat niet een factor $\sqrt{g}$ is opgenomen in (13.18) toen destijds de evenredigheid, gegeven door Chézy, in deze vergelijking voor U werd omgezet; daardoor is C een verborgen factor $\sqrt{g}$ gaan bevatten.

Voor de gemiddelde bodemschuifspanning geldt (13.11):

$$\langle\tau_b\rangle = c_f\rho U^2 \qquad (13.21)$$

In plaats hiervan wordt ook wel geschreven, gebruikmakend van de z.g. Chézy-coëfficiënt:

$$\langle\tau_b\rangle = \frac{g}{C^2}\rho U^2$$

Deze uitdrukking suggereert ten onrechte dat g van betekenis zou zijn voor het verband tussen $\langle\tau_b\rangle$ en U. Beter is het (13.21) te gebruiken, met een dimensieloze coëfficiënt die niet g bevat (zoals ook gebruikelijk is voor de sleepkracht en liftkracht, zie Hoofdstuk 11, en voor de schuifspanning tussen wind en water).

Ondanks het feit dat er al een eeuw lang formuleringen beschikbaar zijn die fysisch meer zinvol zijn en dimensioneel correct (Darcy-Weisbach, Nikuradse, Colebrook) is in de waterbouwkunde het gebruik van de oudere formuleringen nog steeds gangbaar, en wordt de18e-eeuwse evenredigheid van Chézy veel gebruikt, met de naar hem genoemde, dimensiedragende coëfficiënt. De compactheid ervan is een voordeel in routinematig rekenwerk. Toen de nieuwe(re) uitdrukkingen voor c_f (c.q. f van Darcy-Weisbach)

beschikbaar kwamen is dit niet benut om C af te schaffen. Integendeel, men heeft de oude C in een nieuw jasje gestoken door substitutie van de Nikuradse-Colebrook uitdrukkingen voor c_f in (13.20). Voor open waterlopen in natuurlijke materialen is de complete uitdrukking (13.16), inclusief k en δ, nodeloos ingewikkeld, omdat de stroming daarin altijd in het ruwe regime is. Daarvoor is (13.17) meer geschikt. Substitutie daarvan in (13.20) geeft

$$C = 5{,}75 \sqrt{g} \log (12 \frac{R}{k}) \qquad (13.22)$$

ofwel

$$C = (18\ m^{\frac{1}{2}}/s) \log (12 \frac{R}{k}) \qquad (13.23)$$

(In de praktijk wordt de eenheid $m^{1/2}/s$ ten onrechte vaak weggelaten.) De waarde van R/k ligt in veel (niet alle) gevallen tussen 50 en 500; dit geeft c_f-waarden van ca. 4×10^{-3} tot ca. 2×10^{-3} en C-waarden van ca. 50 $m^{1/2}/s$ tot ca. 68 $m^{1/2}/s$. (Merk op dat een hogere C-waarde minder weerstand betekent. C is dus geen weerstandsfactor maar een "gladheids"-factor.)

N.B.: De uitdrukkingen (13.22) en (13.23) worden vaak ten onrechte aan Colebrook (1939) toegeschreven. In feite maakte deze geen gebruik van de z.g. Chézy-coëfficiënt (die ook al niet van Chézy afkomstig is).

Formule van Manning

Manning (1890) toonde aan dat de beschikbare meetgegevens betreffende eenparige stromen in open en gesloten leidingen goed konden worden weergegeven met een uitdrukking

$$U = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} i_w^{\frac{1}{2}} \qquad (13.24)$$

Deze formule is slechts geldig voor hydraulisch ruwe condities, en de factor n hangt dan ook - behalve van g - slechts van de ruwheid van het wand- of bodemoppervlak af, onafhankelijk van de viscositeit. Uitvoerige tabellen hiervoor staan bijv. in Chow (1959). Tabel 13.2 geeft een verkorte weergave.

De factor n heeft de dimensie $L^{-1/3}T$; de getabelleerde waarden gelden in feite voor het m,s-stelsel, hoewel de eenheden er meestal niet bij worden vermeld. Bij conversie van de meter naar de voet als lengte-eenheid is men zelfs dezelfde getalswaarden voor n blijven hanteren, en werd als compensatie een vermenigvuldigingsfactor toegevoegd gelijk aan $(1\ m/1\ ft)^{1/3} = 3{,}28^{1/3} = 1{,}4865.....$, resulterend in

$$U = \frac{1{,}49}{n} R^{\frac{2}{3}} i_w^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(ft,s - stelsel)} \qquad (13.25)$$

Deze vorm wordt zeer veel gebruikt in Engelstalige landen.

Glass, plastic, machined metal	0.010
Dressed timber, joints flush	0.011
Sawn timber, joints uneven	0.014
Cement plaster	0.011
Concrete, steel troweled	0.012
Concrete, timber forms, unfinished	0.014
Untreated gunite	0.015–0.017
Brickwork or dressed masonry	0.014
Rubble set in cement	0.017
Earth, smooth, no weeds	0.020
Earth, some stones and weeds	0.025
Natural river channels:	
Clean and straight	0.025–0.030
Winding, with pools and shoals	0.033–0.040
Very weedy, winding and overgrown	0.075–0.150
Clean straight alluvial channels	$0.031d^{1/6}$ (d = D-75 size in ft.)

Tabel 13.2 Waarden van de factor n van Manning (in $m^{-1/3}$ s). Bron: Henderson, 1966.

We weten dat U in open water evenredig moet zijn aan (o.a.) $\sqrt{g}$. Deze factor is kennelijk verborgen in 1/n. Halen we die eruit dan is de resterende dimensie (die van n $\sqrt{g}$) gelijk aan $L^{1/6}$. De lengtemaat hierin is natuurlijk die van de ruwheid van het bodem- of wandmateriaal. Blijkbaar is n evenredig met de 1/6e-macht daarvan (zie de onderste regel in Tabel 13.2). We kunnen ook zeggen dat n^6 evenredig is aan de afmeting van de bodem- of wandruwheid, bijv. die van Nikuradse.

Omdat n de absolute ruwheidsafmeting bevat is de waarde ervan, in combinatie met de waarde van de hydraulische straal R, te transformeren naar een relatieve ruwheid en dus naar een waarde van de dimensieloze weerstandsfacor c_f. Uit (13.18), (13.19) en (13.24) volgt

$$c_f = \frac{gn^2}{R^{1/3}} \qquad \text{en} \qquad C = \frac{R^{1/6}}{n} \qquad (13.26)$$

Formule van Strickler

Onafhankelijk van Manning kwam Strickler (1923), eveneens uit analyse van waarnemingen in open en gesloten leidingen, tot een uitdrukking zoals (13.24), nl.

$$U = K R^{\frac{2}{3}} i_w^{\frac{1}{2}} \qquad (13.27)$$

Voor stroming over een ruwe bodem, met een (mediane?) steen"diameter" of hoogte van de bodemoneffenheden D_m, geeft Strickler de uitdrukking $K = 21{,}1\ D_m^{-1/6}$, waarbij de coëfficiënt 21,1 slechts geldig is in het m,s-eenhedenstelsel. Ook hier is sprake van een verborgen factor $\sqrt{g}$. Halen we die uit de coëfficiënt 21,1 (volgens $21{,}1\ m^{1/3}/s = 6{,}74\ \sqrt{g}$) dan ontstaat de dimensioneel correcte uitdrukking

$$U = 6{,}74\ (\frac{R}{D_m})^{1/6} \sqrt{gRi_b} = 6{,}74\ (\frac{R}{D_m})^{1/6} u_* \qquad (13.28)$$

(De coëfficiënt 6,74 is dus dimensieloos.) Het verband met Manning's n is blijkbaar dat $1/n = K = 6{,}74\ \sqrt{g}\ D_m^{-1/6}$. Dit bevestigt de hierboven gedane uitspraak dat n evenredig moet zijn met de 1/6e-machtswortel uit de ruwheidshoogte. De uitdrukking (13.28) komt voor de dimensieloze weerstandsfactor c_f, gelijk aan $(u_*/U)^2$, overeen met

$$c_f = 0{,}022\ (\frac{D}{R})^{1/3} \qquad (13.29)$$

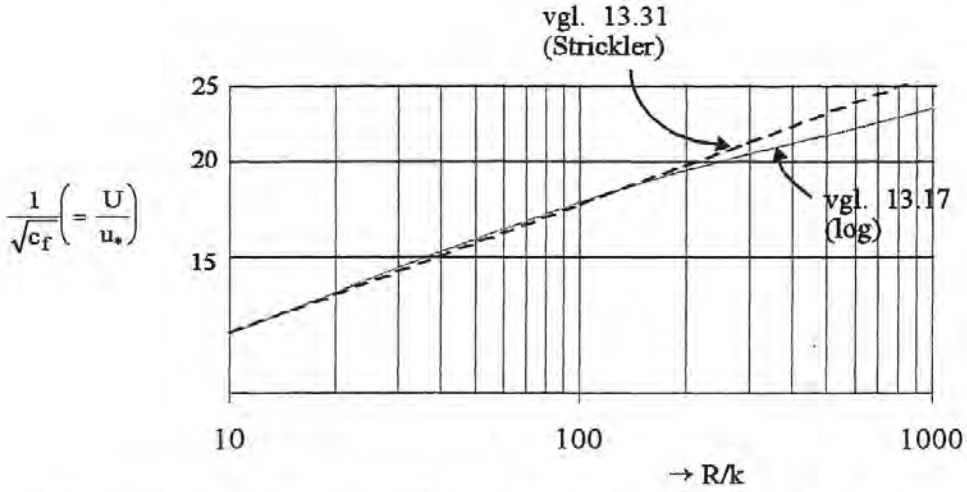
en voor de Chezy-coëfficiënt met

$$C = \frac{\sqrt{g}}{c_f} = 6{,}74\ \sqrt{g}\ (\frac{R}{D})^{1/6} = (21{,}1\ m^{1/2}/s)\ (\frac{R}{D})^{1/6} \qquad (13.30)$$

(Hierin is kortheidshalve D geschreven voor D_m.) Hoewel deze uitdrukkingen direct bruikbaar zijn bij gegeven afmeting van de (mediane) bodumruwheid (D) worden ze vaak omgezet in termen van de Nikuradse ruwheid k. De verhouding k/D is echter niet een constante maar hangt o.m. af van de vorm van de korrels en van de gradatie. Empirisch blijkt dat $k \approx 3{,}5\ D$ (waarin $D = D_m$). Substitueren we dat in (13.29) en (13.30) dan gaan deze over in

$$c_f = 0{,}015\ (\frac{k}{R})^{1/3} \quad \text{resp.} \quad C = 8{,}3\ \sqrt{g}\ (\frac{R}{k})^{1/6} = 26\ m^{1/2}/s\ (\frac{R}{k})^{1/6} \qquad (13.31)$$

Een vergelijking van de variatie van $1/\sqrt{c_f}$ met R/k volgens de logaritmische uitdrukking (13.17) en de machtsformule van Strickler volgens (13.31) is op dubbellogaritmische schalen gegeven in Figuur 13.4. De machtsformule volgens Strickler (een rechte lijn in die figuur) geeft in een belangrijk interval van R/k vrijwel dezelfde waarden als de logaritmische betrekking, maar is gemakkelijker in het gebruik.



Figuur 13.4 Vergelijking van $1/\sqrt{c_f}$ vs R/k volgens logaritmische uitdrukking (——— , vgl 13.17) en volgens machtsformule van Strickler (- - - - -, vgl. 13.31)

13.5 Slotopmerkingen

Bovenstaande formuleringen gaan uit van een eenparige hoofdstroom. De ruwheid wordt geacht relatief klein te zijn, zodat alleen op deze microschaal sprake is van niet-eenparige stroom; de weerstand van de individuele ruwheidselementen wordt daarbij op de macroschaal van de hoofdstroom in rekening gebracht als een bodemschuifspanning, met een coëfficiënt die geacht wordt slechts van de relatieve ruwheid (k/R) af te hangen (zie bovenstaande vergelijkingen).

Bij de berekening van de stromingsweerstand in (natuurlijke) waterlopen in loskorrelig materiaal doen zich echter enkele problemen voor die in bovengenoemde aanpak niet tot uiting komen.

Eén probleem is de voorspelling van de effectieve bodemruwheid (k), die bijv. in rivieren en getijwateren varieert met de stromingscondities vanwege het ontstaan of weer verdwijnen van beddingvormen in het loskorrelige bodemmateriaal (ribbels, duinen enz.).

Een tweede probleem is dat natuurlijke waterlopen niet recht zijn, zodat alleen al daardoor de hoofdstroom niet eenparig kan zijn. De bochten veroorzaken gecompliceerde spiraalstromen met een verhoogde weerstand.

Ten derde is er ook op macroschaal vaak sprake van een opeenvolging van natuurlijke of kunstmatige profielvariaties (ondiepten en geulen; variabele afstand tussen oevers; dammen; kribben enz.) van zodanig grote afmetingen dat zij niet zinvol als een relatief kleine ruwheid in rekening kunnen worden gebracht. Anderzijds zijn er te veel van en volgen zij elkaar te dicht op om er individueel het lokale verlies conform een Carnot-formulering aan toe te kennen. In feite is hier voor de hoofdstroom geen ondubbelzinnig onderscheid te maken tussen deze macro-vertragingsverliezen en de wand(bodem)wrijving. Empirisch bepaalde weerstandsfactoren weerspiegelen slechts het totale effect. Uitdrukkingen zoals die van Colebrook, Manning of Strickler verliezen daarbij hun betekenis.

Dit alles leidt ertoe dat het vraagstuk van de totale weerstand aanzienlijk gecompliceerder is voor (natuurlijke) waterlopen in loskorrelig materiaal dan voor (pijp)leidingen met gegeven ruwheid. Voor praktische toepassingen zal zoveel mogelijk gestreefd moeten worden naar een ijking op grond van lokale metingen.

14 LANGZAAM VERANDERENDE STROMEN IN OPEN WATERLOPEN

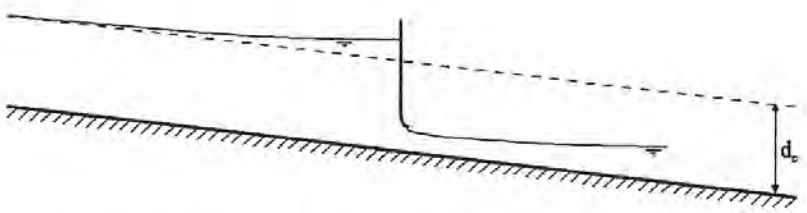
14.1 Inleiding

Stroming in open waterlopen verloopt in het algemeen nogal geleidelijk, behalve in de onmiddellijke omgeving van lokale storingen, bijv. bij waterbouwkundige kunstwerken zoals sluizen of stuwen, bij een kunstmatige of van nature aanwezige lokale vernauwing, etc., waar de stroming snel varieert (zie Hoofdstuk 10).

In **snel variërende stromen** treden **significante horizontale en vertikale versnellingen** op; de druk is niet hydrostatisch verdeeld, en wand- of bodemweerstand speelt lokaal een ondergeschikte rol vanwege het korte traject waarop dit stromingstype zich voordoet (afstand horizontaal hooguit enkele keren de diepte). Enkele gevallen van dit soort stroming zijn behandeld in Hoofdstuk 10. Het resultaat is o.m. een betrekking tussen debiet en waterstanden aan boven- en benedenstroomse zijde van het kunstwerk, de vernauwing etc.

Stationaire stroming in prismatische waterlopen is op voldoend grote afstand van lokale storingen vrijwel **eenparig**: versnellingen nul, druk in elke vertikaal hydrostatisch. In eenparige stroming is bodemweerstand essentieel. Deze maakt daarin evenwicht met de aandrijvende kracht a.g.v. de drukgradiënt, die op zijn beurt het gevolg is van de zwaartekracht in aanwezigheid van een hellende waterspiegel (verhang). Dit type evenwichtstroming is behandeld in Hoofdstuk 13.

In aansluiting op de twee hierboven genoemde gevallen gaan we in dit hoofdstuk in op de **geleidelijk variërende stationaire stroming in open waterlopen.** Dit type stromen doet zich voor in de (langgerekte) overgangszones tussen de snel veranderende stroming bij een lokale storing, en de eenparige stroming op grote afstand daarvan (zie Figuur 14.1). Het lengteprofiel van de geleidelijk variërende waterspiegel noemen we een **verhanglijn** (of **stuwkromme**) (Engels: *backwatercurve*).



Figuur 14.1 Verhanglijnen in rivier bij gestuwde afvoer. De streeplijn stelt de waterspiegel voor bij eenparige stroming.

Het is belangrijk verhanglijnen te kunnen berekenen, m.n. om te weten hoever stroomopwaarts of stroomafwaarts de invloed reikt van een aan te leggen kunstwerk of een andere ingreep. Een vernauwing bijv. zal in het algemeen bovenstrooms een waterstandsverhoging veroorzaken, die tot dijkverhoging noopt. Om te beslissen tot welke hoogte en over welke afstand moet het verloop van de (opgestuwde) waterspiegel berekend worden. Voor waterstandsverlagingen geldt iets soortgelijks, maar dan in verband met ongewenste reducties van beschikbare vaardiepte.

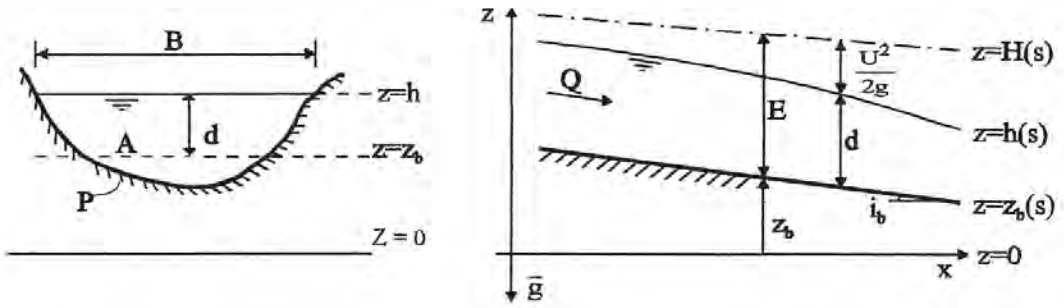
Qua krachtenspel houdt de geleidelijk variërende stroming enigszins het midden tussen de snel variërende stroming en de eenparige (niet variërende) stroming. Wegens het langzaam variërende ofwel bijna-eenparige karakter is de bodemweerstand belangrijk; anderzijds spelen versnellingen ook enige rol wegens het niet geheel eenparig zijn van de stroming. Omdat het vrijwel ondoenlijk is beide invloeden voor 100% in rekening te brengen voeren we benaderingen in.

Het onderwerp van de verhanglijnen is een deel van wat men noemt "Open Channel Hydraulics"; daarover zijn diverse boeken geschreven, waarin en detail op de stof wordt ingegaan (zie bijv. Chanson, 1999; Chaudry, 1994; Ven Te Chow, 1959, 1970; Henderson, 1957, 1966; French, 1985).

Niet-stationaire stromen in open waterlopen, zoals die zich voordoen bij hoogwatergolven in rivieren of bij getijvoortplanting in estuaria, worden behandeld in het vak "Stroming in waterlopen" (CT3310). Verhanglijnen zijn daarvan een bijzonder geval.

14.2 Notatie

Om aanvankelijk de geometrie eenvoudig te houden gaan we uit van een prismatische, licht hellende leiding. Het dwarsprofiel mag willekeurig zijn. Een definitieschets is gegeven in Figuur 14.2. Daarin zijn voor een dwarsprofiel aangegeven de grootheden A (oppervlakte doorstroomde dwarsdoorsnede), B (breedte waterspiegel), P (weerstand leverende omtrek of perimeter), z_b (gemiddelde bodemhoogte in het dwarsprofiel boven z = 0) en h (hoogte waterspiegel boven z = 0, gelijk aan hoogte piëzometrisch niveau boven z = 0). We voeren verder in de hydraulische straal $R = A/P$ en de gemiddelde diepte $d = A/B = h - z_b$.



Figuur 14.2 Definitieschets

We beperken ons tot flauwe bodemhellingen (i_b) waarvoor geldt

$$i_b \approx \tan i_b = -\frac{dz_b}{dx} \approx -\frac{dz_b}{ds} = \sin i_b \qquad (14.1)$$

In eenparige stroom hebben bodem, waterspiegel en energielijn dezelfde helling, maar bij de hier te beschouwen niet-eenparige stroom verschillen deze van elkaar. Daarbij is de helling van de waterspiegel die van het piëzometrisch niveau, terwijl de helling van de energielijn met het wrijvingsverhang (i_w) overeenkomt.

14.3 Verhanglijnvergelijking

We leiden nu een differentiaalvergelijking af voor de stroomafwaartse variatie van de diepte, $d(s)$. Figuur 14.2 laat zien dat per definitie geldt: $H(s) = z_b(s) + E(s)$. Verder geldt, eveneens per definitie: $dz_b/ds = -i_b$ en $dH/ds = -i_w$, zodat

$$\frac{dE}{ds} = i_b - i_w \qquad (14.2)$$

Bij constante Q en gegeven dwarsprofiel hangt E slechts van de lokale diepte d af, via $E = d + U^2/2g = d + Q^2/2gA^2$, zodat $dE/ds = (dE/dd)(dd/ds)$. In Hoofdstuk 10 is aangetoond dat $dE/dd = 1 - Fr^2$. (De afleiding daar was voor tweedimensionale stromen, maar het resultaat geldt voor willekeurige dwarsprofielen, mits de diepte gelijk wordt gesteld aan de gemiddelde diepte $d = A/B$, waarin B de breedte is van de vrije waterspiegel, dus $Fr^2 = \alpha U^2/gd = \alpha Q^2 B/2gA^3$. Zie Appendix.) Substitutie hiervan in (14.2) geeft

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - Fr^2} \quad \text{mits } Fr \neq 1 \tag{14.3}$$

Dit is de gezochte **verhanglijnvergelijking.** Voluit geschreven:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f Q^2 P/gA^3}{1 - \alpha Q^2 B/gA^3} \quad \text{(idem)} \tag{14.4}$$

Dit is de vergelijking van **Bélanger** (1828). Voor een gegeven bodemhelling, dwarsprofiel, bodemruwheid (alle een bekende functie van s) en afvoer (constant verondersteld) zijn alle grootheden in het rechterlid van (14.3/4) bekend als functie van de lokale diepte, omdat deze de waarden van A, P en B bepaalt.

In een Appendix van dit Hoofdstuk is een afleiding van de verhanglijnvergelijkig gegeven gebaseerd op de impulsbalans.

Symbolisch geschreven is de verhanglijnvergelijking van de vorm

$$\frac{dd}{ds} = f(d;s) \tag{14.5}$$

Dit is een 1e orde gewone differentiaalvergelijking. Integratie hiervan naar s, bij gegeven randwaarde $d = d_o$ voor $s = s_o$, levert de verhanglijn op.

Bijzondere gevallen doen zich voor wanneer teller of noemer in het rechterlid van (14.3/4) gelijk is aan nul. De stroming is dan eenparig respectievelijk kritisch.

De teller in het rechterlid van (14.3/4) is nul wanneer $i_w = i_b$; dan is $dd/ds = 0$ en is de stroom **eenparig**; de bijbehorende **evenwichtsdiepte** d_e is te berekenen uit

$$i_w = i_b \quad \text{ofwel} \quad c_f \frac{Q^2 P}{gA^3} = i_b \quad \text{voor} \quad d = d_e \tag{14.6}$$

Bij gegeven dwarsprofiel zijn A en P bekend als functie van de diepte. Die diepte waarbij aan bovenstaande voorwaarde wordt voldaan - bij de gegeven Q - is de evenwichtsdiepte.

De noemer in het rechterlid van (14.3/4) is nul wanneer $Fr^2 = 1$; de stroom is dan **kritisch**. De bijbehorende **grensdiepte** d_g is te berekenen uit

$$Fr_g^2 = \alpha\frac{U_g^2}{gd_g} = 1 \quad \text{ofwel} \quad \alpha\frac{Q^2B_g}{gA_g^3} = 1 \tag{14.7}$$

De vergelijkingen (14.6) en (14.7) bevatten de onbekenden d_e respectievelijk d_g impliciet. Voor tweedimensionale stromen (geen zijdelingse variaties) zijn expliciete uitdrukkingen te geven, door substitutie van $P = B$, $A = Bd$ en $Q = Bq$. Vergelijking (14.4) reduceert dan tot

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f q^2/gd^3}{1 - \alpha q^2/gd^3} \tag{14.8}$$

waar uit volgt

$$d_e^3 = \frac{c_f}{i_b}\frac{q^2}{g} \quad \text{en} \quad d_g^3 = \alpha\frac{q^2}{g} \tag{14.9}$$

M.b.t. d_e is er hierbij van uit gegaan dat c_f niet met de diepte varieert. Brengt men zo'n afhankelijkheid wel in rekening, bijv. via Manning of Strickler, dan ontstaat een iets andere uitdrukking voor d_e (ga dat zelf na).

Eenparige stroom is alleen mogelijk als $i_b > 0$. Dan kan (14.8) worden geschreven als

$$\frac{dd}{ds} = i_b\frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (\text{mits } i_b > 0 \text{ en } Fr \neq 1) \tag{14.10}$$

Wij zullen hiermee verder werken, omdat hierin de variatie van het rechterlid met de diepte expliciet zichtbaar is. Eigenlijk gaat het om de meer algemene uitdrukking (14.4), maar de oplossing daarvan verschilt niet wezenlijk van die van (14.10).

Opgave: teken het lijnelementenveld dat hoort bij deze vergelijking (zie Modelvorming, CT1090). Doe dit zowel voor $d_e > d_g$ als voor $d_e < d_g$

14.4 Typen verhanglijnen

Verhanglijnen worden ingedeeld in typen, afhankelijk van de relatieve bodemhelling (weer te geven met een lettercode) en van het type stroming (weer te geven met een cijfercode).

Eenparige stroming ($i_b > 0$)
De relatieve bodemhelling bepaalt of de **eenparige stroming** subkritisch is of superkritisch. Om dit te zien berekenen we Fr_e^2:

$$Fr_e^2 = \frac{\alpha U_e^2}{g d_e} = \alpha \frac{R_e}{d_e} \frac{U_e^2}{g R_e} = \alpha \frac{R_e}{d_e} \frac{i_b}{c_f} \qquad (14.11)$$

In turbulente stromen is α veelal slechts weinig groter dan 1, en in natuurlijke waterlopen geldt veelal $B >> d$, wat inhoudt dat R_e/d_e slechts weinig kleiner is dan 1, zodat dan in goede benadering geldt

$$Fr_e^2 = \frac{i_b}{c_f} \qquad (14.12)$$

Als $\mathbf{Fr_e^2 < 1}$ (of, bij benadering, $\mathbf{i_b < c_f}$) spreken we van een **flauwe bodemhelling (M-type, Mild slope)**. De *eenparige* afstroming daarvoor is subkritisch ($Fr_e^2 < 1$, $d_e > d_g$). (Dit zegt niets over de feitelijke stroming, die immers van de randvoorwaarden afhangt.)

Als $\mathbf{Fr_e^2 > 1}$ (of, bij benadering, $\mathbf{i_b > c_f}$) nspreken we van een **steile bodemhelling (S-type, Steep slope).** De *eenparige* afstroming daarvoor is superkritisch ($Fr_e^2 > 1$, $d_e < d_g$). (Dit zegt niets over de feitelijke stroming, die immers van de randvoorwaarden afhangt.)

Steile hellingen in bovenstaande betekenis komen bijv. voor in bergbeken ("stortbeken"). Benedenrivieren zijn altijd van het M-type. Zo geldt voor de Rijn: $i_b \cong 10^{-4}$ en $c_f \cong 4 \times 10^{-3}$.

Men onderscheidt verder hellingen van type C ($i_b = c_f$, Critical), A ($i_b < 0$, Adverse), H ($i_b = 0$, Horizontal). De verhanglijnen op de diverse typen helling worden aangeduid met het overeenkomstig symbool (S, C, M, H, A).

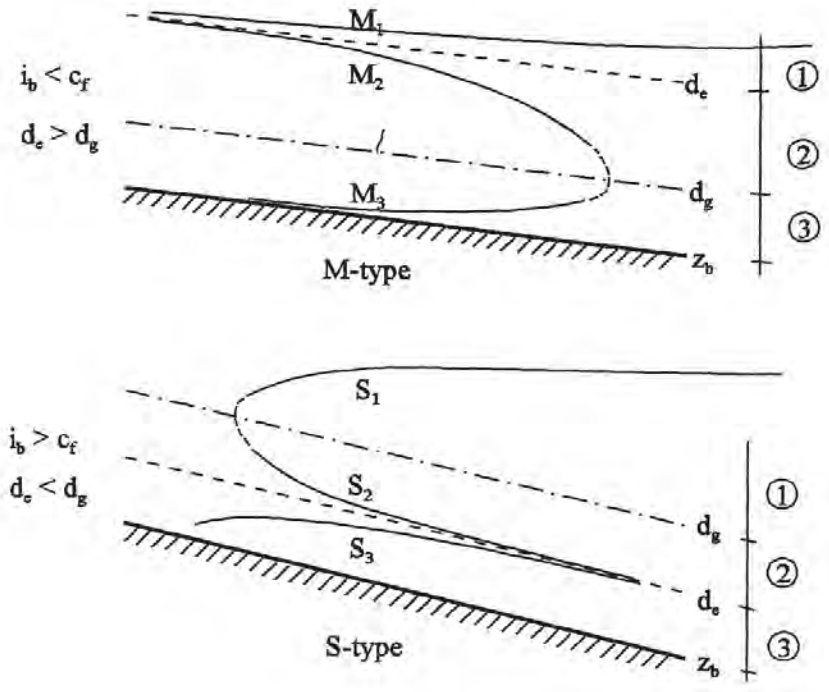
Merk op dat het type bodemhelling bij gegeven i_b slechts door c_f wordt bepaald, en niet door de afvoer (Q) of door de lokale stromingstoestand (d, A, U, ...).

Langzaam variërende stroming

Lokale storingen, bijv. veroorzaakt door een stuw of een vernauwing, hebben tot gevolg dat de stroming afwijkt van de eenparige toestand, en daar pas op afstand weer toe nadert. Dit gebeurt asymptotisch. Immers, als $d \to d_e$ geldt $i_w \to i_b$ en dus $dd/ds \to 0$ (zie de vergelijking van Bélanger). Daarentegen geldt dat $dd/ds \to \pm \infty$ als $d \to d_g$ (als $Fr^2 \to 1$). De stroming gaat dus zeer snel variëren waar de kritische toestand wordt benaderd. De verhanglijnvergelijking gaat in die gebieden niet meer op, omdat die is beperkt tot geleidelijk variërende stromen.

Verhanglijnen in niet-eenparige stromen worden in drie typen onderscheiden, aangeduid met de cijfercode 1, 2 of 3:

- type 1: $d>d_e$ èn $d>d_g$, dus $i_w< i_b$ en $Fr^2 <1$. Teller en noemer in rechterlid van (14.3/4) (of 14.10, dat is hetzelfde) zijn dan beide positief, dus $dd/ds > 0$. Zie de bovenste krommen (M1 en S1) in Figuur 14.3. Merk op dat bij M1 en bij S1 de diepte d monotoon toeneemt in stroomafwaartse richting, zodat $i_w \to 0$ en $Fr^2 \to 0$, dus $dd/ds \to i_b$ (horizontale waterspiegel; denk aan stuwmeer).
- type 2: d tussen d_e en d_g. Teller en noemer tegengesteld van teken, dus $dd/ds < 0$. Zie de middelste krommen (M2 en S2) in Figuur 14.3.
- type 3: $d<d_e$ èn $d<d_g$, dus $i_w> i_b$ en $Fr >1$. Teller en noemer in (14.16) (of 14.5) zijn dan beide negatief, dus $dd/ds > 0$. Zie de onderste krommen (M3 en S3) in Figuur 14.3.



Figuur 14.3 Typen verhanglijnen op flauwe (M) en op steile (S) helling

Een "verhanglijn" bij eenparige afstroming krijgt als aanduiding het subscript "e", zoals M_e of S_e (dit is niet een internationale conventie).

Welk type verhanglijn zich in een gegeven traject voordoet wordt bepaald door de randvoorwaarden Dit wordt in de volgende paragraaf behandeld.

14.5 Randvoorwaarden en interne aansluitvoorwaarden

De verhanglijnvergelijking is van de eerste orde, dus in één punt (s) (lees: één dwarsdoorsnede) is een waarde van de diepte nodig (en voldoende) als randvoorwaarde (r.v.w.). Het is hierbij van belang dat de diepte in een punt de verhanglijn naar slechts één zijde bepaalt, stroomopwaarts òf stroomafwaarts. Dit hangt samen met de fysische (on)mogelijkheid van beïnvloeding:

Superkritische stroom is bepaald door de bovenstroomse r.v.w., want in superkritische stromen kunnen storingen, bijv. als gevolg van het (iets) heffen van een stuw, zich alleen in stroomafwaartse richting voortplanten (denk aan waterval).

Subkritische stroom is bepaald door de benedenstroomse r.v.w. (denk aan stuwmeer).

Op voldoend grote afstand van een plaatselijke storing, bijv. als gevolg van een stuw, moet de stroming eenparig zijn (in afwezigheid van andere storingen). Op een M-type helling is de eenparige stroom *subkritisch*, en die voorwaarde geldt dan als *benedenstroomse* r.v.w. (in het oneindige) voor het benedenstroomse traject. Daar geldt $d = d_e$ en dus ook $dd/ds = 0$. M.a.w., de toestand in het gehele traject benedenstrooms van de meest benedenstrooms gelegen storing op een M-type helling is eenparig (M_e). Op soortgelijke manier is te zien dat op een S-type helling de stroming bovenstrooms van de meest bovenstrooms gelegen storing eenparig moet zijn (S_e).

In het voorgaande is er (stilzwijgend) van uit gegaan dat de afvoer gegeven is (anders zijn d_e en d_g niet bekend). Het kan ook zijn dat de afvoer niet a priori bekend is. In zulke gevallen moet er een extra randvoorwaarde zijn voor de diepte, bijv. niet alleen aan benedenstroomse maar ook aan bovenstroomse zijde van een traject met subkritische stroom. (In feite moet dan een verval gegeven zijn waaruit de afvoer volgt; zie voorbeeld 5 hierna.)

Subkritische en superkritische stromen kunnen in elkaar overgaan. Daarvoor geldt:

De overgang van subkritische naar superkritische stroom kan alleen plaatsvinden bij discontinuïteiten in het systeem (zoals een stuw, een sterke knik in de bodem, etc.). De plaats hiervan ligt vast. (In het Engels spreekt men hier van *control section*).

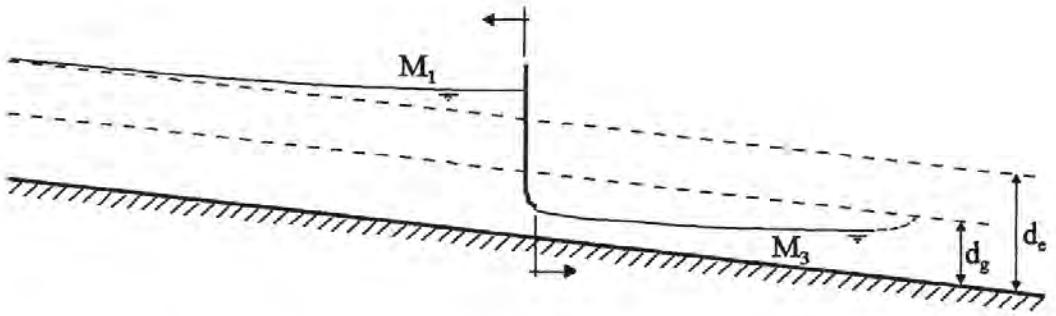
De overgang van superkritische naar subkritische stroom kan alleen plaatsvinden in een watersprong; de plaats hiervan wordt bepaald door de randvoorwaarden.

Ter plaatse van dit soort overgangen is sprake van snel veranderende stromen (zie Hoofdstuk 10) en geldt de verhanglijnvergelijking niet, maar deze is wel van toepassing op de trajecten aan weerszijden. Die worden aan elkaar gekpoppeld via aansluitvoorwaarden die bepaald worden door het type overgang, zoals een debiet-waterstandsrelatie voor een stuw, of de relaties tussen de stromen aan weerzijden van een watersprong.

De toepassing van het voorgaande wordt verduidelijkt aan de hand van enkele voorbeelden.

14.6 Voorbeelden

Voorbeeld 1: stuw op flauwe helling.



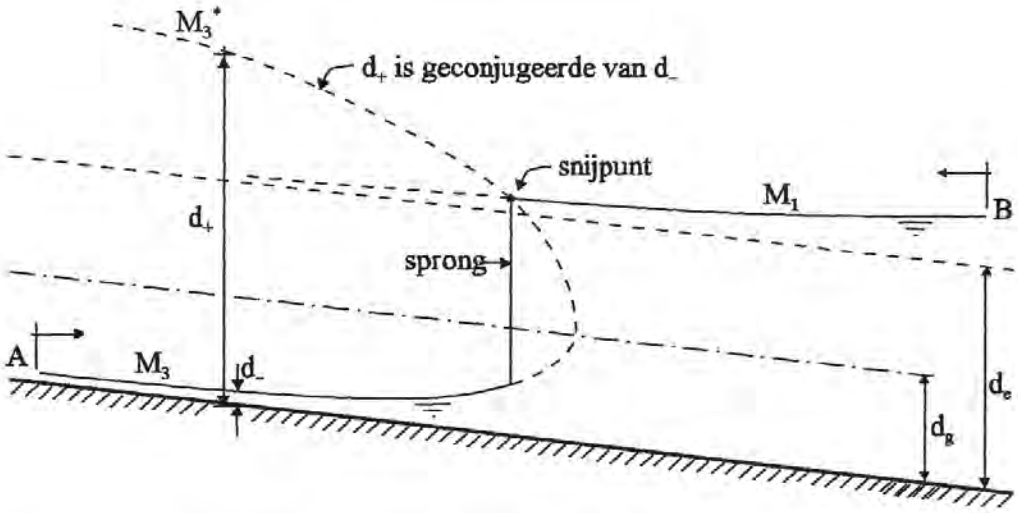
Figuur 14.4 Verhanglijnen op flauwe helling met stuw. De pijlen wijzen naar het traject waarvoor de bijbehorende waterstand de randvoorwaarde is.

Figuur 14.4 geeft een voorbeeld van de invloed van een stuw op de stroming in een flauw hellende waterloop (M-type). De stuw veroorzaakt een overgang van subkritische naar superkritische stroom. Bij vrije afstroming is de benedenstroomse waterdiepte bepaald door de stuwopening. De lokale stroming in de onmiddellijke omgeving van de stuw is snel variërend; wrijving heeft daarop nauwelijks invloed. Bij gegeven afvoer kan de waterdiepte aan bovenstroomse zijde dan worden bepaald met Bernoulli (zie Hoofdstuk 10). Deze diepten

dienen als randvoorwaarden voor de trajecten aan weerszijden. De opgestuwde waterstand onmiddellijk bovenstrooms van de stuw is de benedenstroomse randvoorwaarde voor de verhanglijn M_1; naar bovenstrooms nadert de stroming daar asymptotisch tot de eenparige toestand. De superkritische stroom in het traject benedenstrooms van de stuw (verhanglijn M_3) wordt bepaald door de verlaagde waterstand direct benedenstrooms van de stuw (zie de pijlen).

Voorbeeld 2: watersprong

In Figuur 14.4 is te zien dat op zekere afstand benedenstrooms van de stuw de diepte nadert tot de grensdiepte. Volgens de verhanglijnvergelijking (die daar overigens niet meer geldig is) zou de waterspiegel ter plaatse van $d = d_g$ *vertikaal* staan! Voordat het zover zou komen doet zich in werkelijkheid een watersprong voor waarin de stroming overgaat van superkritisch naar subkritisch. Figuur 14.5 brengt dat in beeld.



Figuur 14.5 Plaatsbepaling watersprong. M_3^* is de aan M_3 geconjugeerde kromme.

Bovenstrooms van de sprong (diepte d_-) is de **stroming superkritisch**, bepaald door een verder **bovenstrooms gelegen r.v.w.** (punt A). Benedenstrooms van de sprong (diepte d_+) is de **stroming subkritisch**, bepaald door een verder **benedenstrooms gelegen r.v.w.**, bijv. een stuwpeil in punt B. De invloedsgebieden van de benedenstroomse en de bovenstroomse randvoorwaarden overlappen elkaar, wat tot meerwaardige oplossingen zou leiden. Dat is niet mogelijk. De oplossing van deze "machtsstrijd" ligt in de vorming van de watersprong, waarmee de oplossing quasi-discontinu van de bovenstroomse tak (M_3) overgaat in de benedenstroomse tak (M_1).

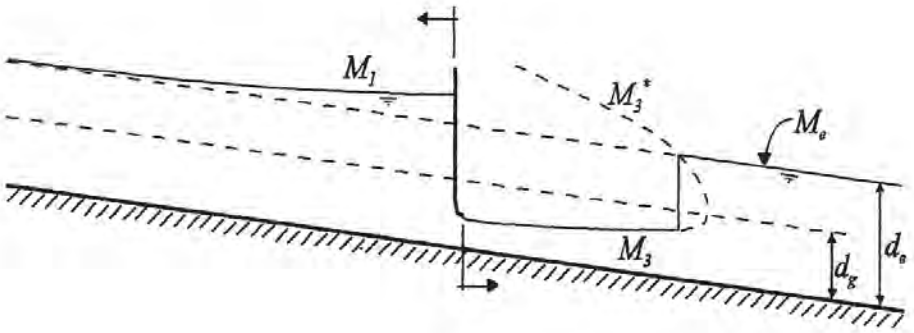
Het voorgaande maakt duidelijk dat de positie van een watersprong afhangt van de randvoorwaarden.Wanneer die stationair zijn, zoals hier is aangenomen, neemt de sprong een stationaire evenwichtspositie in, bepaald door de voorwaarde dat zowel het debiet Q (of q) als de impulsoverdracht (F) aan weerszijden van de sprong dezelfde waarde hebben (Hoofdstuk 10):

$$F = \frac{1}{2}\rho g d_-^2 + \rho q^2/d_- = \frac{1}{2}\rho g d_+^2 + \rho q^2/d_+ \qquad (14.13)$$

ofwel (zie vergelijking 10.18):

$$\frac{1}{2}(d_- + d_+)\, d_-\, d_+ = \frac{q^2}{g} = d_g^3 \qquad (14.14)$$

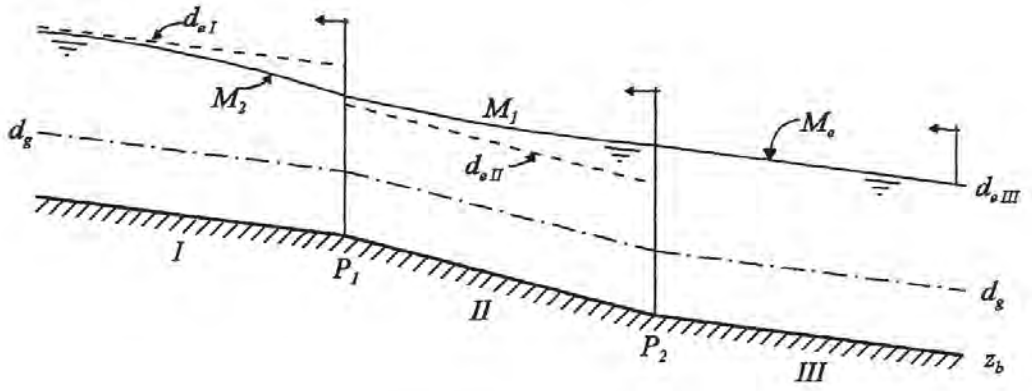
De combinaties van d_- en d_+ die hieraan voldoen heten elkaars **geconjugeerde**. Deze zijn aangegeven in Figuur 14.5. De stuwkromme M_3 is de verzameling *mogelijke* waarden d_- (alle kleiner dan d_g) als functie van s. Het gestreepte vervolg daarvan voor diepten groter dan d_g, aangeduid als M_3*, is de verzameling waarden d_+ die bij de gegeven s de geconjugeerde zijn van de lokale d_-, d.w.z. de *mogelijke* stroomafwaartse diepten. Waar de kromme die de *mogelijke* waarden van d_+ weergeeft (d.w.z. M_3*) de benedenstroomse stuwkromme M_1 snijdt is de berekende *feitelijke* plaats van de sprong. E.e.a. is geïllustreerd in Figuur 14.5 (waarin de sprong is aangegeven als een discontinuïteit in de diepte). Als het stuwmeer dat het benedenstromse peil bepaalt (punt B in Figuur 14.5) zeer ver stroomafwaarts ligt (quasi-∞) dan ligt de sprong in de eenparige-stroom asymptoot van de kromme M_1 uit Figuur 14.5, en is de toestand benedenstrooms van de watersprong eenparig (M_e). De sprong komt dan op de plaats waar M_3^* de lijn $d = d_e$ snijdt (de "stuwkromme" M_e); dit is aangegeven in Figuur 14.6.



Figuur 14.6 Verhanglijnen op flauwe helling met stuw inclusief watersprong. M_3^* is de aan M_3 geconjugeerde kromme

Voorbeeld 3: geknikte bodem

We gaan uit van een M-type helling met een steiler traject (nog steeds M) tussen twee flauwere (I en III) die beide zeer lang zijn (theoretisch semi-∞). Zie Figuur 14.7. Per traject zijn d_e en d_g constant. De grensdiepte (d_g) is onafhankelijk van de helling en heeft in de drie trajecten dezelfde waarde. De evenwichtsdiepte (d_e) is kleiner op de steilere helling dan op de flauwere, hoewel nog steeds groter dan d_g (volgt uit het gegeven dat de helling overal van het M-type is). Ter plaatse van discontinuïteiten (punten P_1 en P_2) maken we onderscheid tussen de waterstanden aan bovenstroomse zijde (h_-) en aan benedenstroomse zijde (h_+). In dit voorbeeld is het waterpeil continu en geldt $h_{1-} = h_{1+}$ en dus ook $d_{1-} = d_{1+}$ (idem voor P_2).



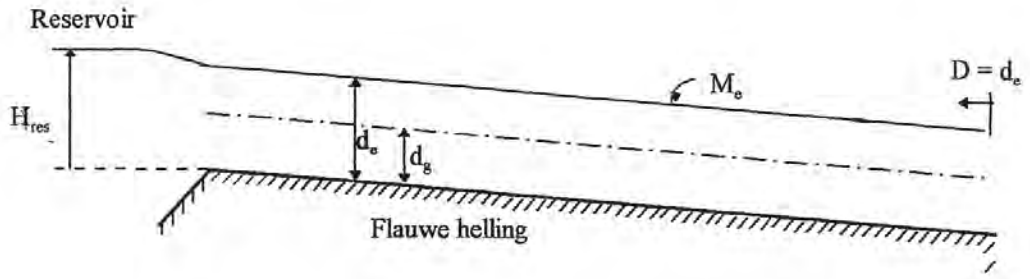
Figuur 14.7 Verhanglijnen op flauwe helling met knikken in de bodem

Op voldoend grote afstand van de knikken in de bodem (s → ± ∞) is de stroming eenparig. Vanwege het M-type is deze eenparige stroming subkritisch, en dus bepaald door de r.v.w. aan benedenstroomse zijde (s →∞). Daar is $d = d_e$ en dus $dd/ds = 0$; in het hele traject III geldt daarom $d = d_{eIII}$ (zie ook Figuur 14.6). Dit is tevens de benedenstroomse r.v.w. ($d_{2-} = d_{eIII}$) voor de verhanglijn in traject II, omdat $d_{eIII} > d_g$ en de stroming in traject II dus ook subkritisch is (bij de knik). Omdat $d_{2-} > d_{eII}$ stelt zich in traject II een verhanglijn in van type M_1 tot aan de knik bij P_1, waar de diepte $d = d_{1+}$ bepaald wordt door M_1 . Deze is gelijk aan d_{1-} (waterpeil continu), wat de benedenstroomse r.v.w. oplevert voor traject I.

Omdat $d_g < d_{1-} < d_{eI}$ stelt zich in traject I een M_2-type verhanglijn in, waarbij de diepte stroomopwaarts asymptotisch nadert tot de evenwichtsdiepte.

Voorbeeld 4: uitstroom uit reservoir in prismatische leiding

Water stroomt via een korte, vloeiende overgang uit een reservoir in een prismatische leiding met gegeven bodemhelling i_b en weerstandsfactor c_f. De hoogte van het reservoirpeil boven de bodem van de leiding ter plaatse van de aansluiting is h_{res}. Het debiet is in dit geval een afhankelijke variabele.



Figuur 14.8 Uitstroom uit reservoir met eenparige afstroming

We veronderstellen aanvankelijk dat $i_b < c_f$, m.a.w. dat de helling flauw is (M-type) (Figuur 14.8). Dan is de stroming in de leiding eenparig in het hele traject benedenstrooms van de aansluiting aan het reservoir ($d = d_e$), met een stroomsnelheid die voldoet aan

$$U = U_e = \sqrt{\frac{g d_e i_b}{c_f}} \tag{14.15}$$

Hierin is d_e nog onbekend. Omdat de overgang tussen het reservoir en de leiding kort en vloeiend is kunnen we daar Bernoulli op toepassen. Dat levert de aansluitvoorwaarde

$$d = d_e = h_{res} - \frac{U_e^2}{2g} = h_{res} - \frac{1}{2}\frac{i_b}{c_f} d_e \tag{14.16}$$

De evenwichtsdiepte is hiermee bepaald:

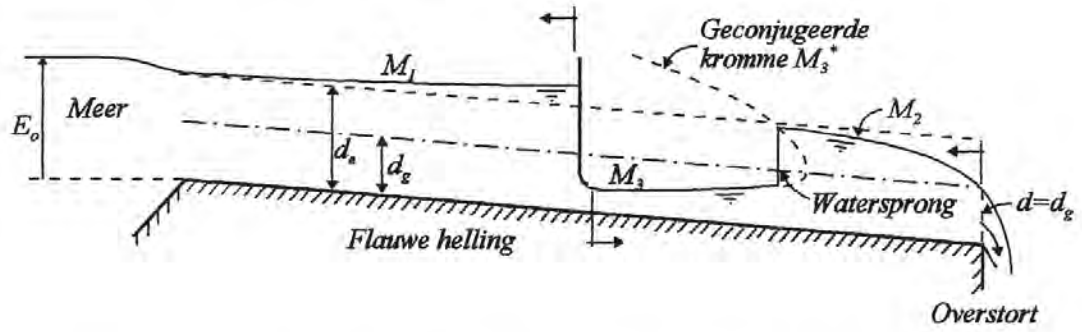
$$d_e = \frac{h_{res}}{1 + \frac{1}{2}\frac{i_b}{c_f}} \tag{14.17}$$

Het bijbehorende debiet volgt dan uit (14.15).

Stel dat de helling zo flauw en/of ruw is dat $i_b << c_f$. Dan is d_e slechts weinig kleiner dan h_{res}, ofwel de snelheidshoogte van de stroom is relatief gering en het debiet dus ook. Doordat de helling heel flauw en/of ruw is kan het water niet goed weg. Naarmate de helling steiler wordt, en/of minder ruw (i_b/c_f neemt toe), neemt het debiet toe en d_e af. Dit gaat door tot $i_b = c_f$. De helling is dan van het C-type en d_e is gelijk aan $(2/3)h_{res}$, precies de grensdiepte. De stroming in de leiding is dan overal kritisch: $d = d_e = d_g$. Voor $i_b > c_f$ is de helling van het S-type, waarvoor de eenparige afstroming, verder benedenstrooms, superkritisch is. De randvoorwaarde ligt dan bovenstrooms, aan het einde van het instroomtraject, waar de diepte gelijk is aan de grensdiepte. De overgang tussen $d = d_g$ en $d = d_e$ vindt plaats via een S_2-stuwkromme. Wanneer de steilheid van de helling nog groter wordt zal de benadering van (14.1) niet meer opgaan en moet de vergelijking van Bélanger worden gecorrigeerd met factoren sin i_b en cos i_b. Bij zeer steile hellingen ontstaat een waterval.

Voorbeeld 5: gestuwde afvoer uit reservoir

We nemen nu de situatie van afvoer uit een reservoir via een M-type helling met een stuw, en een vrije overstort aan het bendenstroomse einde. Zie Figuur 14.9.

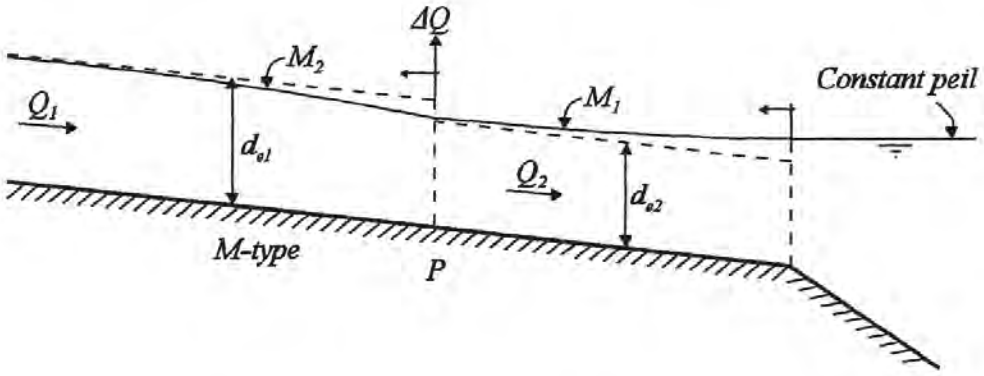


Figuur 14.9 Verhanglijnen op flauwe helling met gestuwde afvoer uit stuwmeer

Ook hier is de afvoer niet gegeven. Daarom is iteratie nodig: schat q → bereken de diepte bovenstrooms van de stuw via Bernoulli → M_1-kromme bepaald; controleer of H daarvan bij de inlaat samenvalt met het stuwpeil (Bernoulli). Herhaal dit zo nodig met andere schatting van q tot een voldoende nauwkeurigheid is bereikt. Dan is q bekend en ook de verhanglijn benedenstrooms van de stuw (M_3), evenals M_2 (vanuit $d = d_g$ t.p.v. de overstort). De plaats van de watersprong wordt bepaald via de geconjugeerde diepten. Bij voldoend grote afstand tussen het reservoir en de stuw heeft de laatste geen invloed op de uitstroom uit het reservoir, dus ook niet op het debiet, dat dan is bepaald zoals in Voorbeeld 4. Bij voldoend korte afstand tussen de stuw en de overstort is er geen watersprong maar strekt M_3 zich uit tot aan de overstort.

Voorbeeld 6: lokale onttrekking van debiet

Een rivier met bovenafvoer Q_1 en M-type helling mondt uit in een stuwmeer met gegeven peil. Op enige afstand bovenstrooms van het stuwmeer (in punt P) wordt water aan de rivier onttrokken (bijv. via een inlaatwerk voor irrigatie of voor drinkwatervoorziening, of splitst zich een zijarm af) met een constant debiet ΔQ (zie Figuur 14.10).



Figuur 14.10 Verhanglijnen op flauwe helling met wateronttrekking bij P

Bovenstrooms van P is $Q = Q_1$ met bijbehorende evenwichtsdiepte d_{e1} ; benedenstrooms van P is $Q = Q_2 = Q_1 - \Delta Q$; de bijbehorende evenwichtsdiepte d_{e2} is kleiner dan d_{e1}. Beide zijn groter dan de bijbehorende grensdiepte (M-type). De stroming is subkritisch, dus de benedenstroomse r.v.w. is bepalend. Voor traject 2 is dat het stuwpeil. Daarmee ligt de M_1 verhanglijn tussen stuwmeer en P vast, en dus ook de diepte in P. Deze is vervolgens de benedenstroomse r.v.w. voor de verhanglijn bovenstrooms van P, die van het M_2-type is. Op grote afstand bovenstrooms van P wordt de stroming eenparig (asymptotisch).

14.7 Berekeningsmethoden

In de praktijk worden altijd numerieke methoden gehanteerd, alleen al vanwege de niet analytisch weer te geven geometrie. (Bovendien is in toepassingen meestal sprake van niet-stationaire stromen; zie daarvoor het vervolgvak "Stroming in waterlopen", in het derde cursusjaar.) De geometrie is echter wel bekend (in arrays) zodat het rechterlid in verg. (14.4) bij gegeven Q bekend is als functie van de diepte (d) voor elk dwarsprofiel (elke s). Symbolisch weergegeven:

$$\frac{dd}{ds} = f(d;s) \qquad (14.18)$$

Hier is f een voor de betreffende waterloop bekende functie van d en s. (Voor prismatische (gedeelten van) waterlopen varieert f alleen met s via d.) Integratie hiervan kan met standaardprocedures gebeuren, bijv. Runge-Kutta of een predictor-corrector methode. Stel $d = d_j$ is bekend voor $s = s_j$. Een eerste schatting (predictor) $d^{(1)}_{j+1}$ van d_{j+1} voor $s = s_{j+1} = s_j + \Delta s$ kan worden gemaakt op basis van

$$\Delta d^{(1)} = f(d_j;s_j)\ \Delta s \tag{14.19}$$

waarmee $d^{(1)}_{j+1} = d_j + \Delta d^{(1)}$ bekend is. De corrector, $d^{(2)}_{j+1} = d_j + \Delta d^{(2)}$, volgt uit

$$\Delta d^{(2)} = \frac{1}{2}\,[f(d^{(1)}_{j+1};s_{j+1}) + f(d_j;s_j)]\ \Delta s \tag{14.20}$$

Voor niet-prismatische waterlopen kan de s-variatie van d_e en d_g direct in rekening worden gebracht, zowel in de predictor als in de corrector. Bij subkritische stroom rekent men stroomopwaarts, bij superkritische stroom stroomafwaarts.

Analytische methoden van integratie zijn ontwikkeld voor meer eenvoudige of sterker geschematiseerde situaties, in het bijzonder op basis van de vergelijking van Bélanger voor tweedimensionale stroming met constante parameters (i_b, d_e, d_g). Op de algemene exacte oplossing daarvan gaan we hier niet in. In plaats daarvan behandelen we hier:
(a) een benaderende oplossing voor de complete vergelijking
(b) een exacte oplossing voor horizontale bodem

(a) Voor relatief **kleine afwijkingen van de evenwichtsdiepte** varieert de waarde van de afwijking ongeveer exponentieel met s. Dit is als volgt te zien en te berekenen.

Als d relatief weinig van d_e afwijkt ($d = d_e + \Delta d$ met $|\Delta d| << d_e$) geldt

$$d^3 - d_e^3 = (d - d_e)\,(d^2 + dd_e + d_e^2) \approx 3d_e^2\ \Delta d.$$

Als ook geldt $d^3 - d_g^3 \approx d_e^3 - d_g^3$ wordt de vergelijking van Bélanger:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{d(\Delta d)}{ds} \approx i_b\,\frac{3d_e^2}{d_e^3 - d_g^3}\,\Delta d = L^{-1}\,\Delta d \tag{14.21}$$

Hierin is de (aanpassings)lengte L gedefinieerd als

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{d_e^3 - d_g^3}{3i_b d_e^2} = \frac{1 - Fr_e^2}{3i_b} d_e = \frac{1 - i_b/c_f}{3i_b} d_e \qquad (14.22)$$

waarin Fr_e het kental van Froude is bij evenwichtsstroming ($Fr_e^2 = i_b/c_f$).

Als we L in het beschouwde traject als een constante lengte beschouwen kan (14.21) worden geïntegreerd tot

$$\Delta d = \Delta d_o \exp\left(\frac{s - s_o}{L}\right) \qquad (14.23)$$

waarbij als r.w.v. is gebruikt: $\Delta d = \Delta d_o$ waar $s = s_o$. De grootheid L is blijkbaar een kenmerkende lengte van dit type verhanglijn, nl. de lengte waarover een relatief kleine afwijking van de evenwichtsdiepte varieert met een factor e. Deze afstand is zeer vele malen ($\sim i_b^{-1}$) groter dan de diepte.

Voorbeeld: Stel $i_b = 10^{-4}$, $c_f = 0{,}004$ ($C = 50\ m^{1/2}/s$), $q = 4(m^3/s)/m$. Er geldt $i_b < c_f$ dus de helling is van het M-type; $d_e = (c_f q^2/g i_b)^{1/3} = 4$ m; $Fr_e^2 = i_b/c_f = 0{,}025$ → L = 13 km. Stel dat een stuw een lokale verhoging van de waterspiegel geeft van $\Delta d_o = 0.5$ m. Op een afstand 10 km bovenstrooms ($s - s_o = -10$ km) is dan $\Delta d = 0{,}23$ m. De verhoging is gereduceerd tot 0,05 m ($0{,}1\ \Delta d_o$) waar $s - s_o = L\ ln(\Delta d/\Delta d_o) = L\ ln\ (0{,}1) = -2{,}3\ L = -29{,}9$ km, ofwel ca 30 km bovenstrooms van de stuw.

(b) Op een **horizontale bodem** ($i_b = 0$) geldt (14.10) niet, en reduceert de verhanglijn-vergelijking voor tweedimensionale stroming (14.8) tot

$$\frac{dd}{ds} = \frac{-c_f q^2/g d^3}{1 - \alpha q^2/g d^3} = -c_f \frac{d_g^3}{d^3 - d_g^3} \qquad (14.24)$$

Integratie hiervan naar s geeft

$$\frac{1}{4}d^4 - d_g^3 d + c_f d_g^3 s = \text{constant} = \frac{1}{4}d_o^4 - d_g^3 d_o + c_f d_g^3 s_o \qquad (14.25)$$

De waarde van de constante volgt uit de randvoorwaarde $d = d_o$ waar $s = s_o$. Bij elke aangenomen d volgt de bijbehorende s. Zie de vraagstukkenbundel voor toepassingen.

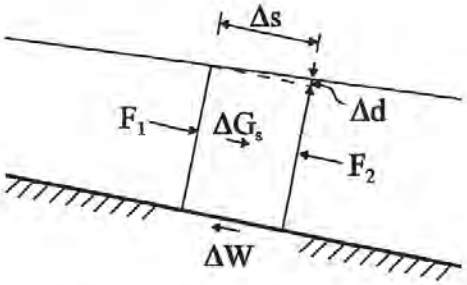
APPENDIX Afleiding verhangvergelijking uit impulsbalans

Voor stationaire stromen varieert het debiet Q niet met s, dus Q = AU = constant.

Voor de balans van vertikale en overdwars gerichte impuls is het van belang dat de stroming slechts langzaam varieert, waardoor de kromming van de waterspiegel en van de stroomlijnen zwak is. Vertikale en overdwars gerichte versnellingen worden dus verwaarloosd. Dit houdt in dat voor de berekening van verhanglijnen het piëzometrisch niveau in elke dwarsdoorsnede als vrijwel constant wordt benaderd (**hydrostatische druk**). De hoogte hiervan boven het referentievlak (h) hoeft dus slechts als functie van de stroomafwaarts gerichte coördinaat (s) te worden bepaald. De formulering zal echter worden gegeven in termen van de lokale gemiddelde diepte (*d*), in plaats van h.

In de balans van stroomafwaarts gerichte impuls (s-richting) brengen we de volgende bijdragen in rekening (zie Figuur 14.11):

- de impulsoverdracht door de twee dwarsdoorsneden die het balansgebied G aan bovenstroomse en benedenstroomse zijde begrenzen ($F = F_1$ resp. $F = F_2 = F_1 + \Delta F$);
- de s-component van het gewicht ($\Delta G_s = i_b\, \Delta G$ waarin $\Delta G = \rho g A \Delta s$);
- de bodemweerstand ($\Delta W = \langle \tau_b \rangle P \Delta s = c_f\, \rho U^2 P \Delta s$).



Figuur 14.11 Balansgebied

De impulsbalans luidt dan:

$$F_1 + \Delta G_s = F_2 + \Delta W$$

of

$$\Delta F = i_b\, \Delta G - \Delta W \qquad (14.26)$$

In **eenparige stroming** geldt $F_1 = F_2$, ofwel $\Delta F = 0$, en maakt de weerstand evenwicht met de verhangkracht. Dit is de situatie die is bekeken in Hoofdstuk 13 (zie bijv. Figuur 13.2). In het bijzonder geldt daarvoor dat het wrijvingsverhang i_w, gegeven door

$$i_w \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta W}{\Delta G} = \frac{\langle\tau\rangle}{\rho g R} = c_f \frac{U^2}{gR} = c_f \frac{Q^2}{gRA^2} = c_f \frac{Q^2 P}{gA^3} \qquad (14.27)$$

gelijk is aan de bodemhelling: $i_w = i_b$. De diepte waarbij deze situatie zich voordoet, voor gegeven afvoer Q en waterloop (dwarsprofiel, bodemhelling i_b en weerstandsfactor c_f), noemen we de **evenwichtsdiepte** d_e.

Waar als gevolg van een lokale storing de diepte afwijkt van de evenwichtsdiepte is er geen evenwicht en moeten we in (14.25) de stroomafwaartse variatie (ΔF) van de impulsoverdracht (F) in rekening brengen. F bestaat uit een bijdrage van de druk (F_p) en van de meevoering (F_{mv}), zie Hoofdstuk 9.

Een toeneming van de diepte over een afstandje Δs met de waarde Δd (zie Figuur 14.11) geeft een drukverhoging $\Delta p = \rho g \Delta d$, wat een bijdrage geeft aan ΔF gelijk aan $\Delta F_p = A\Delta p = \rho g A \Delta d$. De toeneming van de diepte leidt echter (bij constante Q) tot een afneming van de snelheid U, en dus tot een afneming van F_{mv}.

Voor een twee-dimensionale stroming is in Hoofdstuk 10 bewezen dat $\Delta F_{mv} = -Fr^2 \Delta F_p$ (zie par. 10.2). Dit bewijs is eenvoudig te generaliseren voor stroming in waterlopen met een willekeurig dwarsprofiel (zie voetnoot[1]), zodat de totale variatie van F met de diepte, bij gegeven Q, gegeven is door

$$\Delta F = \Delta F_p + \Delta F_{mv} = \rho g A (1 - Fr^2) \Delta d \qquad (14.28)$$

Opm. 1: In par. 13.2 is F de impulsoverdracht per eenheid van breedte; de hier gebruikte F is de impulsoverdracht door het gehele dwarsprofiel.

---

[1] $\Delta A = B\,\Delta d = (A/d)\Delta d$
$\Delta F_p = \rho g A \Delta d$
$\Delta Q = \Delta(UA) = 0$ dus $A\Delta U = -U\Delta A$
$\Delta F_{mv} = \Delta(\alpha\rho U^2 A) = \alpha\rho U A \Delta U = -\alpha\rho U^2 \Delta A = -\alpha\rho U^2 (A/d)\Delta d$
Met de definitie $Fr^2 = \alpha U^2/gd$ volgt
$\Delta F_{mv} = -Fr^2 (\rho g A \Delta d) = -Fr^2 \Delta F_p$, q.e.d.

Opm. 2: Bij relatief zwakke stroomsnelheden ($Fr^2 << 1$) is de bijdrage van de druk aan (de variatie van) F overheersend en kan de bijdrage van de meevoering daaraan worden verwaarloosd, d.w.z. de term Fr^2 in (14.13) geschrapt.

Voor de bodemweerstand (ΔW) in niet-eenparige stroom gebruiken we dezelfde uitdrukkingen als in de eenparige (14.26); dit is geoorloofd vanwege het geleidelijk variëren van de stroom. Wanneer de stroming niet eenparig is zal het wrijvingsverhang (i_w) echter niet gelijk zijn aan de bodemhelling (i_b): als lokaal $d>d_e$ geldt ook $R>R_e$ en $U<U_e$, dus $i_w<i_b$, en omgekeerd.

Substitutie van (14.26) en (14.27) in de impulsbalans (14.25) geeft na deling door $\rho g A$

$$(1-Fr^2)\Delta d = (i_b - i_w)\Delta s \qquad (14.29)$$

Wanneer we kritische stroming uitsluiten ($Fr^2 \neq 1$) volgt hieruit voor de longitudinale (stroomafwaartse of stroomopwaartse) variatie van de diepte, in de limiet $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - Fr^2} \qquad (14.30)$$

Dit is de gezochte verhanglijnvergelijking.

LITERATUUR

Batchelor, G.K., 1967. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press. Cambridge

Chow, V.T., 1959. *Open Channel Hydraulics*. Mcgraw-Hill, New York

Chaudry, M.H., 1994. *Open-channel flow.* Prentice-Hall, New York

Francis, J.R.D., 1975. *Fluid Mechanics for engineering students*. Edward Arnold Ltd., London, 4e druk 370 pp

French, R.H., 1985. *Open-Channel Hydraulics*. Mcgraw-Hill, New York

Henderson, F.M., 1966. *Open-Channel Flow*. McMillan, New York

Huisman, L., 1955. *Stromingsweerstand in buisleidingen*. Kiwa, Den Haag

Hütte, 1955. *Des Ingenieurs Taschenbuch. Deel 1: Theoretische Grundlagen*. 28e druk, Berlijn, 1668 pp

Idelchik, I.E., 1986. *Handbook of Hydraulic Resistance*. Springer, Berlijn

Nakayama, Y, Woods, W.A. en Clark, D.G., 1988. *Visualized Flow; Fluid motion in basic and engineering situations revealed by flow visualization.* Pergamon Press, Oxford

Putte, L.A. van de, 1975. *Stromingsleer*. Agon-Elsevier, Amsterdam, 183 pp

Roberson, J.A. en C.T. Crowe, 1993. *Engineering Fluid Mechanics, Fifth Edition*. Houghton Miffin Company, Boston, 785 pp

Rouse, H., 1938. *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*. Dover, New York

Rouse, H. en S. Ince, 1963. *History of hydraulics*. Dover Publ., New York

Schlichting, H., 1958. *Grenzschichttheorie*. Verlag G. Braun, Karslruhe

Thijsse, J. Th., 1951. *Hydraulica*. In: Technische Vraagbaak, deel W, Kluwer, Deventer, pp. 95-134

Vennard, J.K. en R.L. Street, 1982. *Elementary Fluid Mechanics*. Wiley, New York (6th edition)

Formules Vloeistofmechanica CT2100

IDEALE-VLOEISTOFSTROMING

Euler (bewegingsvergelijkingen in termen van hoogte p.n. $h = z + p/\rho g$):

$$a_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{1}{2}u^2\right) = -g\frac{\partial h}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g\frac{\partial h}{\partial n}$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial b}$$

Torricelli (stroming uit reservoir via kleine opening):

$$Q = \mu A\sqrt{2g\Delta h}$$

waarin Δh de hoogte is van het piëzometrisch niveau in het bovenstroomse reservoir boven dat in de uittredende straal.

LOKAAL VERTRAGINGSVERLIES

Carnot (abrupte verwijding van diameter D_1 tot D_2 in pijpstroming)

stijging p.n. $= h_2 - h_1 = \Delta h = U_2(U_1 - U_2)/g$; daling e.n. $= H_1 - H_2 = \Delta H_v = (U_1 - U_2)^2/2g$

WANDWRIJVING IN EENPARIGE STROOM

Buisstroming: diameter $D = 2r_o$; hydraulische straal $R = D/4$; ruwheid k; kinematische viscositeit ν; gemiddelde snelheid U ($= Q/A$); wandschuifspanning τ_o.

Algemeen: $\tau_o = c_f \rho U^2 = \frac{f}{8}\rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w$ zodat $i_w = \frac{f}{8}\frac{U^2}{gR} = f\frac{U^2}{2gD}$

$\Delta H_w = i_w L = f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}$; $f = f(\mathrm{Re}, \frac{k}{D})$; zie diagram of onderstaande vergelijkingen

* **Poiseuille** (Re < ca. 2300, laminair):

$$\tau_o = 4\eta U/r_o \text{ zodat } i_w = 8\nu U/g r_o^2 \text{ en } f = 64/\mathrm{Re}$$

* **White-Colebrook** (Re > ca. 4000, turbulent):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(0{,}27\frac{k}{D} + \frac{2{,}5}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) = 2\log\frac{3{,}7\,D}{k(1+3{,}3/\mathrm{Re}_*)} = 2\log\frac{3{,}7\,D}{k+\delta/3{,}5}$$

waarin $\delta = 11{,}6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k/\nu$ en $u_* = \sqrt{gRi_w} = \frac{1}{2}\sqrt{gDi_w}$

Willekeurig dwarsprofiel (gesloten of open); doorstroomd oppervlak A; weerstandleverende omtrek *P*; schuifspanning, gemiddeld over *P*, is $<\tau_o>$; hydraulische straal $R = A/P$; turbulente hoofdstroom ($Re = UR/\nu >$ ca. 600). Open waterlopen: $i_w = i_b$

$$<\tau_o> = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w;\ i_w = c_f \frac{U^2}{gR};$$

$$U = \sqrt{gRi_w/c_f};\ \Delta H_w = i_w L = c_f \frac{U^2}{gR} L$$

* **White-Colebrook** met gegeneraliseerde coëfficiënten voor willekeurige dwarsprofielvorm:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{gRi_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5{,}75 \log \frac{12\ R}{k(1+3{,}3/Re_*)} = 5{,}75 \log \frac{12\ R}{k+\delta/3{,}5}$$

waarin $\delta = 11{,}6\ \nu/u_*$, $Re_* = u_* k/\nu$ en $u_* = \sqrt{gRi_w}$

Idem hydraulisch ruw ($Re_* >$ ca. 70):

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{gRi_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5{,}75 \log 12\frac{R}{k} \approx 8{,}3 \left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{1}{6}}$$

* **Chézy**: $U = C\sqrt{Ri_w}$ waarin $C = \sqrt{g/c_f}$; turbulent, ruw:

$$C = 5{,}75\sqrt{g} \log 12\frac{R}{k} = (18\frac{\sqrt{m}}{s}) \log 12\frac{R}{k} \approx 26(\frac{\sqrt{m}}{s}) (\frac{R}{k})^{1/6}$$

* **Manning/Strickler**: $U = \frac{1}{n} R^{2/3} i_w^{1/2} = K R^{2/3} i_w^{1/2}$ waarin volgens Strickler

$K = (21{,}1\ m^{1/2}/s)D^{-1/6} = 6{,}74\ g^{1/2} D^{-1/6} \approx 8{,}3\ g^{1/2} k^{-1/6}$ ofwel $c_f = 0{,}022(D/R)^{1/3} \approx 0{,}015(k/R)^{1/3}$

VERHANGLIJNEN IN OPEN WATERLOPEN

Bélanger:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - Fr^2} = \frac{i_b - c_f Q^2 P/gA^3}{1 - \alpha Q^2 B/gA^3} = \frac{i_b - c_f q^2/gd^3}{1 - \alpha q^2/gd^3} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (d \neq d_g \text{ en } i_b >$$

(de laatste twee voor tweedimensionale stroom, waarin $d_e^3 = (c_f/i_b)q^2/g$ en $d_g^3 = q^2/g$). Oplossing voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand:

$$\Delta d = \Delta d_0 \exp(\frac{s - s_0}{L}) \quad \text{waarin} \quad L = \frac{1 - i_b/c_f}{3i_b} d_e$$

Oplossing op horizontale bodem:

$$\frac{1}{4}d^4 - d_g^3\ d + c_f\ d_g^3\ s = \text{constant}$$