

TECHNISCHE UNIVERSITEIT

Laboratorium voor

Scheepshydraulica

Archief

Mekelweg 2, 2628 CD Delft

Tel.: 015 - 786873 - Fax: 015 - 781636

**WELLENKRÄFTE ZWEITER ORDNUNG
AUF ROTATIONSSYMMETRISCHE KÖRPER
MIT VERTIKALER ACHSE**

Ioannis Thanos

**Wellenkräfte zweiter Ordnung auf rotationssymmetrische
Körper mit vertikaler Achse**

von der
Fakultät für Maschinenwesen
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
D o k t o r - I n g e n i e u r s
genehmigte Dissertation

von
Ioannis Thanos,
Diplomatouchos Michanikos
aus Istanbul (Konstantinopel)/Türkei

Referent : Univ. Prof. E. Krause, Ph. D.
Korreferent : Univ. Prof. Dr.-Ing. H. Söding

Tag der mündlichen Prüfung : 27. Juni 1989

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrgebiet Grundlagen der Meerestechnik an der RWTH Aachen.

Ich widme diese Arbeit meinem plötzlich verstorbenen Betreuer, Prof. Dr.-Ing. K. Kokkinowrachos, der diese Arbeit angeregt und großzügig unterstützt hat.

Ich möchte mich bei Herrn Prof. E. Krause Ph. D. für die weitere Betreuung und die moralische und tatkräftige Unterstützung zutiefst bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Söding für die fruchtbaren Diskussionen während der Erstellung der Arbeit sowie für die Übernahme des Korreferats.

Herrn Prof. Dr.-Ing., Dr. h.c. (H) H.Öry danke ich für die freundliche Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Für die wertvolle Hilfe beim Korrekturlesen möchte ich mich bei meinem Kollegen Dipl.-Ing. J. Herb herzlich bedanken.

Schließlich danke ich Herrn cand. ing. E. Zamboni für die großzügige Hilfe bei der Erstellung der Zeichnungen.

Bezeichnungen

$a = a_L = a_P$		Außenradius des Körpers.
a_1		Wasserlinienradius des Körpers.
a_l		Radius der vertikalen Wandung zweier benachbarter Makroelemente l und $l + 1$ vom Typ B (Abb. 2).
a_p		Radius der vertikalen Wandung zweier benachbarter Makroelemente p und $p + 1$ vom Typ C.
A_{m,α_l}	A_{m,α_l}^*	Ableitungen der Funktionen R_{m,α_l} bzw. R_{m,α_l}^* nach r am rechten Rand des Elementes l .
$B_m(r)$		r -abhängiger Anteil der Meeresoberflächenfunktion $\beta_2(r, \vartheta)$.
d		Wassertiefe
D		Maximaler Körperdurchmesser.
D_{m,α_l}	\bar{D}_{m,α_l}^*	Ableitungen der Funktionen R_{m,α_l} bzw. R_{m,α_l}^* nach r am linken Rand des Elementes l .
e		Abstand des Momentenbezugs punktes vom Meeresboden.
\bar{F}_i		Momentaner Wert der Kraftkomponente i . Ordnung in Richtung j ($i = 1, 2, j = 1, 3, 5$).
F_{ij}		Kraftkomponente in komplexer Form i . Ordnung in Richtung j .
F_{20j}		Driftkraft in Richtung j .
\mathcal{F}_{m,α_l}	$\mathcal{F}_{m,\alpha_l}^*$	Fourier-Koeffizienten im Ausdruck des Diffraktionspotentials.
\mathcal{F}_{m,n_p}	\mathcal{F}_{m,n_p}^*	Modifizierte Fourier-Koeffizienten (Elementtyp A)
$F_{m,\alpha}$		Fourier-Koeffizienten des Abstrahlpotentials Ψ_j
$F_{m,\xi}$	$F_{m,\xi}^*$	Fourier-Koeffizienten des Abstrahlpotentials Ψ_j
g		Erdbeschleunigung
$g_j(r, z)$		Partikuläre Lösung der Einflußfunktion $y_j(r, z)$ beim Abstrahlpotential $\Psi_j(r, \vartheta, z)$.
h_l		Abstand des Bodens des l . Elementes des Typs B vom Meeresboden. (Abb. 2)
h_p		Abstand des Daches des p . Elementes des Typs C vom Meeresboden. (Abb. 2)
$H/2$		Wellenamplitude der linearen ankommenden Welle.
$H_m^{(1)}(\dots)$	$H_m(\dots)$	Hankelsche Funktion erster Art und m . Ordnung.
$I(r)$		Meeresoberflächenintegral.

$I_m(\dots)$	Modifizierte Besselsche Funktion erster Art und m . Ordnung.
$J_m(\dots)$	Besselsche Funktion erster Art und m . Ordnung.
k	Wellenzahl, auf die Frequenz ω bezogen.
$K_m(\dots)$	Modifizierte Besselsche Funktion zweiter Art.
L bzw. P	Anzahl der Ringelemente des Typs B bzw. C. Das mittlere vollzylindrische Element wurde nicht mitgezählt.
$L_{m_1, \alpha_1}, \quad \mathcal{L}_{m_1, \alpha_1}$	Bei der Berechnung der Kräfte 2. Ordnung auftretende $-\cos$ und $-\sin$ Integrale.
M	Momentenbezugspunkt mit den Zylinderkoordinaten $(r, \vartheta, z) = (0, 0, e)$.
$M.E.$	Makroelement-Methode. (s.S. 70).
\vec{n}	Flächen-Normalenvektor (positiv nach außerhalb des Körpers zeigend).
N_{α_l}	Normierungskonstante der Funktion $Z_{\alpha_l}(z)$ mit $N_{\alpha_l} = 0.5[1 + \sin(2\alpha_l d_l)/2\alpha_l d_l]$; $d_l = d - h_l$.
p_j	Hydrodynamischer Druck ($j = 0, 1, 2$).
r, ϑ, z	Zylindrische Koordinaten.
S_B	Oberfläche des Meeresbodens.
S_F	Meeresoberfläche.
\tilde{S}_Q	Momentan benetzte Körperoberfläche.
S_Q	Mittlere (zeitunabhängige) benetzte Körperoberfläche.
S'_Q	Zeitlich veränderliche Körperoberfläche, die sich zwischen $z = d$ und $z = d - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ erstreckt.
t	Zeitvariable.
x, y, z	Kartesische Koordinaten.
$y_j(r, z)$	Einflußfunktion im Ansatz für das doppelharmonische Abstrahlpotential $\Psi_j(r, \vartheta, z)$ mit ($j = 1, 3, 5$).
$Y_m(\dots)$	Besselsche Funktion zweiter Art.
$Z_{\alpha_l}(z)$	Orthonormale Eigenwertfunktionen in z -Richtung. mit $Z_{\alpha_l}(z) = N_{\alpha_l}^{-1/2} \cos[\alpha_l(z - h_l)]$.
α_l	Wurzeln der transzendenten Gleichung $\alpha_l \tanh[\alpha_l(d - h_l)] + \omega^2/g = 0$
$\beta_2(r, \vartheta)$	Meeresoberflächenfunktion 2. Ordnung.
Γ	Wasserlinie für $z = d$.

δ_{ij}	Kroneckersches Symbol. ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$).
ε	Perturbationsparameter, $\varepsilon = kH/2$.
ε_m	Neumannsches Symbol mit $\varepsilon_m = 1$ für $m = 0$ und $\varepsilon_m = 2$ für $m > 1$, ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$).
$\zeta(r, \vartheta, t)$	Wellenerhöhung.
η_j	Generalisierter Richtungskosinus.
κ	Wellenzahl, auf die Frequenz 2ω bezogen.
λ	Wellenlänge.
$\Lambda_{m, \alpha_l}(r)$, $\Lambda_{m, \alpha_l}^*(r)$	r -abhängige Anteile der Einflußfunktion $\psi_m(r, z)$.
ξ_l	Wurzeln der transzendenten Gleichung $\xi_l \tanh[\xi_l(d - h_l)] + 4\omega^2/g = 0$
ρ	Wasserdichte
\sum_{α}	Summierung über Wurzeln α . (Bzw. eine imaginäre und unendlich viele reelle.)
$\varphi_1(r, \vartheta, z), \varphi_2(r, \vartheta, z)$	Oszillierender Anteil des Geschwindigkeitspotentials Φ_j mit $\Phi_1 = \text{Re}\{\varphi_1 e^{-i\omega t}\}$ und $\Phi_2 = \text{Re}\{\varphi_2 e^{-2i\omega t}\} + \varphi_{20}$ in komplexer Schreibweise.
$\varphi_2^S, \varphi_{20}^S$	Doppelharmonischer bzw. zeitunabhängiger Teil des Diffraktionspotentials 2. Ordnung Φ_2^S .
$\Phi_j^I(r, \vartheta, z, t)$, bzw.	Reelles (momentanes) Geschwindigkeitspotential der ankommenden (I), bzw. Diffraktions-Welle (S), j . Ordnung.
$\Phi_j^S(r, \vartheta, z, t)$	
$\psi_m(r, z)$	Einflußfunktion im Ansatz für das Geschwindigkeitspotential $\varphi(r, \vartheta, z)$.
$\Psi_j(r, \vartheta, z, t)$, bzw.	Lineares Abstrahlpotential in der Frequenz 2ω und in Richtung j , ($j = 1, 3, 5$). $\Psi_j = \text{Re}\{\Psi_j e^{-2i\omega t}\}$
$\Psi_j(r, \vartheta, z)$	
ω	Kreisfrequenz.
Ω	Kontrollvolumen.

Symbole:

$ z $	Betrag einer komplexen Zahl z .
$[\]$	Matrix
$\{ \}$	Spaltenvektor
$\lfloor \rfloor$	Reihenvektor
$'$	Ableitung nach dem Argument.
$\operatorname{Re}\{\dots\}$	Realteil einer komplexen Größe.
$\operatorname{Im}\{\dots\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe.
\bar{z}	Konjugiert Komplexe von z .
Δ	Laplacescher Operator.

INHALTSVERZEICHNIS

	Bezeichnungen	
1.	Einleitung	2
2.	<u>Allgemeine Formulierung des Randwertproblems für das Geschwindigkeitspotential</u>	9
2.1	Annahmen. Randbedingungen.	9
2.2	Randwertproblem erster und zweiter Ordnung.	11
2.3	Lösungsmethode.	17
2.4	Ermittlung der auf den Körper induzierten Kräfte	22
3.	<u>Analytische Lösung für den vertikalen Zylinder</u>	28
3.1	Anteile I bis IV der Kräfte und Momente 2.Ordnung auf den Zylinder	29
3.2	Integration der Meeresoberflächenfunktion	33
4.	<u>Numerisches Verfahren zur Ermittlung der Kräfte 2.Ordnung auf beliebige Rotationskörper</u>	36
4.1	Prinzipieller Aufbau des Makroelementverfahrens.	36
4.2	Kraft und Momentengrößen 2.Ordnung infolge des linearen Potentials.	42
4.3	Zeitunabhängige Kräfte 2.Ordnung.	63
5.	<u>Ermittlung des Meeresoberflächenintegrals und der Fernfeld-Lösung.</u>	70
5.1	Berechnung im Nahbereich durch finite Makroelemente.	71
5.2	Das Verfahren für das infinite Makroelement.	76
5.3	Asymptotische Lösung durch Fresnel Integrale..	84
6.	Numerische Ergebnisse	91
7.	Zusammenfassung	96
8.	Literatur	99
9.	Anhänge	107
10.	Bildanhang	125

1. EINLEITUNG

Die Belastung der Offshore-Bauwerke durch regelmäßige Wellen wird maßgebend durch Kräfte, die linear proportional zur Wellenhöhe sind und in der Frequenz der Erregungswelle oszillieren, die sogenannten Kräfte 1.Ordnung, beschrieben. Zusätzlich treten kleinere Kräfte, die proportional dem Quadrat der Wellenhöhe sind, die Kräfte 2.Ordnung, auf. Wegen ihrer primären Bedeutung wurden die Kräfte 1.Ordnung seit Beginn der sechziger Jahre intensiv erforscht und unter der Annahme kleiner Wellensteilheit mathematische Methoden entwickelt, mit deren Hilfe man sie für meeres technische Konstruktionen relativ genau ermitteln kann.

Bei Wellen finiter Steilheit jedoch oder auch für gewisse Verhältnisse der Körperabmessungen / Wellenlänge nehmen die Phänomene 2.Ordnung zu und können die Belastung solcher Strukturen erheblich erhöhen. Nichtlineares Verhalten infolge einer regelmäßigen Welle weisen auch die auf den Körper wirkenden zeitunabhängigen Kräfte, die sogenannten Driftkräfte auf, da sie sich als proportional dem Quadrat der Wellenhöhe erweisen. Sie können bei Bewegungsarten der Struktur, die keine oder kleine Rückstellkräfte aufweisen, große Bewegungen hervorrufen.

Die nichtlinearen Phänomene bei großvolumigen Körpern unter Wellenbelastung wurden in den letzten zwei Jahrzehnten erkannt und wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Sicherheit und Lebensdauer meeres technischer Konstruktionen Gegenstand der Forschung geworden.

Da eine explizite und vollständige Lösung des nichtlinearen Randwertproblems des durch den Körper induzierten Wellenfeldes für beliebige nichtlineare Wellen nicht möglich ist, beschränkt man sich auf Näherungslösungen unterschiedlicher Ordnungen, die mit Hilfe der Störungsrechnung gewonnen werden.

Stokes [56], [57] entwickelte die Störungsmethode (Perturbation method) für Schwerewellen endlicher Steilheit ohne die Präsenz eines

Körpers. Bei der Theorie von Stokes geht man davon aus, daß alle relevanten Größen wie z.B. Wellenhöhe, Wellenpotential u.s.w. als eine Reihensumme von kleinen Störungsglieder ausgedrückt werden können. Je höher der Anzahl der berücksichtigenden Störungsglieder (Ordnungen) ist, desto besser werden die Welleneigenschaften angenähert. Eine Nachbearbeitung von Stokes's Perturbationstheorie ist in den Veröffentlichungen von Kinsman [59] und Neuman und Pierson [60] vorhanden. Durch eine Entwicklung dieser Potenzreihen bis zum quadratischen Term und unter Vernachlässigung der höheren Potenzen entsteht dann das vollständige mathematische Randwertproblem zweiter Ordnung, das durch die Präsenz eines großvolumigen Körpers in den Wellen sehr kompliziert und aufwendig wird und bis heute Gegenstand der Forschung ist.

Für längsgestreckte schlanke Körper haben Lee [1], Potash [2], Söding [3], Parissis [4], Kiyosuka [5], Papanikolaou [6] zweidimensionale potentialtheoretische Verfahren entwickelt und Lösungen in geschlossener Form angewandt. Für das dreidimensionale Problem eines zuerst einfachen, vom Boden bis zur Meeresoberfläche ragenden Zylinders wurde in einer Fülle theoretischer Abhandlungen und experimenteller Untersuchungen der Versuch unternommen, das potentialtheoretische Problem zu lösen. Dabei wird die ankommende Welle als Stokessche Welle 2.Ordnung definiert, und gesucht wird das Geschwindigkeitspotential 2.Ordnung, das durch die Präsenz des Körpers entsteht (Diffraktionspotential). Die kombinierte nichtlineare Randbedingung an der Meeresoberfläche und die Randbedingung im Unendlichen haben deutlich gezeigt, daß die Lösung des Problems sogar bis zur 2.Ordnung sehr kompliziert wurde.

Yamaguchi und Tsuchiya gaben als erste eine Lösung in geschlossener Form [7] an. Raman [8], [9], [10] entwickelte eine numerische Methode für die Lösung des Diffraktionspotentials 2.Ordnung. Beide Lösungen konnten die Meeresoberflächen-Randbedingung nicht erfüllen. Diese Inkonsequenz wurde von Isaacson [11], Garrison [12], Chakrabarti [13], Wehausen [14] und Miloh [15] ausführlich kommentiert. Garrison hatte daher vorgeschlagen, daß das Randwertproblem 2.Ordnung als

eine Summe von zwei Randwertproblemen zu lösen sei, da die zwei inhomogenen Bedingungen auf der Meeresoberfläche und auf der benetzten Körperoberfläche mathematisch nicht gleichzeitig durch einen Ansatz hätten erfüllt werden können.

Die darauffolgenden Arbeiten einiger Autoren haben zwar diese Annahmen getroffen, eine physikalische Erklärung der Randbedingung im Unendlichen wurde aber entweder verschwiegen oder außer acht gelassen. In der Arbeit von Chen und Hudspeth z.B. [16] wurde eine Eigenfunktionen-Entwicklung mit Hilfe von rotationssymmetrischen Greenschen Funktionen benutzt und eine schwächere als die Sommerfeldsche [17] Bedingung im Unendlichen angenommen. Chakrabarti [34] entwickelte die beiden oben erwähnten Potentiale 2.Ordnung mit Hilfe von Fourierreihen und benutzte Chen's Randbedingung im Unendlichen. Diese Randbedingung ist physikalisch nicht korrekt. Da aber nur zwei der (nach Chakrabarti definierten) fünf Anteile der auf einen festgehaltenen Zylinder wirkenden Kräfte 2.Ordnung von dem Diffraktionspotential 2.Ordnung abhängig sind, ist diese Arbeit wertvoll, denn sie enthält ausführliche Ergebnisse der restlichen vom Potential 1.Ordnung abhängigen Kraftanteile.

Hunt [18], [19] formulierte eine komplette Lösung des Potentials 2.Ordnung in der Form eines Fourier-Bessel Integrals, die mit Hilfe einer Weber Transformation abgeleitet wurde. Die Fourier-Integrale anstatt Fourier-Reihen ergeben sich aus der Tatsache, daß der Definitionsbereich der Transformation die bis ins Unendliche ragende Meeresoberfläche ist. Obwohl diese Methode physikalisch überzeugend wirkt, muß nach Meinung des Autors eine Umformulierung vorgenommen werden, um die im folgenden diskutierten Überlegungen mitzuberechnen. Diese Methode scheint außerdem rechnerisch sehr aufwendig zu sein.

Basierend auf dem mathematischen Ausdruck der Meeresoberflächen-Randbedingung hat Molin [21], [22] das asymptotische Verhalten dieser Funktion im Fernfeld analysiert und daraus Folgerungen für die Eigenschaften der Diffraktionswelle 2.Ordnung abgeleitet. So ist rela-

tiv einfach zu zeigen, daß im Fernfeld zwei verschiedene Wellensysteme entstehen:

a. Die sogenannten "freien Wellen" (free waves), die sich im Fernfeld radial zum Körper und nach außen abklingend fortpflanzen. Diese Wellen erfüllen die Sommerfeldsche Randbedingung und ihre Geschwindigkeit ist unabhängig vom Orientierungswinkel ϑ .

b. Die in der Phase "gekoppelten" Wellen (locked waves). Ihr asymptotisches Verhalten ist von der Form:

$$\frac{L(\vartheta)}{r^{1/2}} e^{i[kr(1+\cos\vartheta)]} \quad (1-1)$$

wobei r , ϑ Polarkoordinaten mit ihrem Ursprung in der Nähe des Körpers sind. Diese Wellen pflanzen sich nach außen mit variabler Geschwindigkeit in ϑ fort und weisen unter anderem auch deshalb das Verhalten einer stehenden Welle in die genau entgegengesetzte Richtung der ankommenden Welle auf. Wegen ihrer richtungsabhängigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist es erforderlich, eine neue Randbedingung im Unendlichen in der Form eines Integrals über eine Fläche S_∞ im Fernfeld zu definieren, die aus der Erhaltung der Gesamtenergie abzuleiten ist.

Es kann gezeigt werden (Mei [23]), daß mit Hilfe eines doppelharmonischen Abstrahlpotentials Ψ , das die strenge Sommerfeldsche Randbedingung erfüllt, die gesuchte Abstrahlbedingung im Unendlichen für das Diffraktionspotential Φ_2^S die Form:

$$\iint_{S_\infty} \left(\Phi_2^S \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi_2^S}{\partial \vec{n}} \right) ds = 0 \quad (1-2)$$

annimmt, wobei \vec{n} der Einheitsvektor normal zur Fläche S_∞ ist. Diese Aussage wurde von Molin benutzt, um die Kräfte 2. Ordnung zu berechnen, ohne die komplette Lösung des Φ_2^S ermitteln zu müssen. Dabei wurden die "Newman-Haskind" Beziehungen [24] benutzt, was z.B. Söding [3] u.a. [4], [5] für das zweidimensionale Problem schon früher

getan haben. Gleichzeitig mit Molin, Lighthill veröffentlichte für dieselbe Lösung eine ähnliche detaillierte mathematische Analyse [25].

Rahman [26] hat die zuletzt erwähnte Fernfeld Methode von Molin angewandt. Er publizierte numerische Ergebnisse für einen einfachen vom Meeresboden bis zur Oberfläche ragenden Zylinder, die eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten von Modrige und Jamieson [27] aufweisen. In seine späteren Veröffentlichungen [28], [29] hat Rahman diese Methode unter Benutzung der Greenschen Funktionen etwas verallgemeinert. Auch Garrison [30] hat durch die Anwendung der Greenschen Funktionen das Potential 2.Ordnung ausgedrückt. Dabei hat er in seiner numerischen Behandlung auch auf der Meeresoberfläche Singularitäten verteilt. Der numerische Aufwand ist entsprechend groß, da Konvergenz erst nach einer feinen Unterteilung von Singularitätenelementen auf die große Kontrollfläche an der Meeresoberfläche erreicht wird.

Masuda und Kato [31] haben das Verfahren von Molin angewandt und Ergebnisse für eine Gruppe von zwei vom Boden bis zur Oberfläche ragenden Zylindern erzielt.

Nach Meinung des Autors erweist sich die Methode von Molin als ein leistungsfähiges Konzept frei von mathematischen Unvollständigkeiten und physikalischen Unzulänglichkeiten.

Ziel dieser Arbeit ist die potentialtheoretische Erfassung und vor allem die numerische Ermittlung der Kräfte 2.Ordnung. Die numerischen Berechnungen dieser Kräfte werden für festgehaltene rotations-symmetrische Körper mit vertikaler Achse durchgeführt, da sie die meisten der meerestechnischen Strukturen in der geometrischen Form annähern.

In dieser Arbeit wurde das Verfahren von Molin, weiterentwickelt, um die Kräfte 2.Ordnung auf beliebige Rotationskörper mit vertikaler Achse zu bestimmen. Die dazu benötigten Ausdrücke des Abstrahlpotentials, des Diffraktionspotentials 1.Ordnung sowie deren Ableitungen wurden mit Hilfe der dafür am Lehrgebiet Grundlagen der Mee-

restechnik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen entwickelten Makroelementemethode [32], [33] gewonnen. Die zeitunabhängigen Kräfte 2.Ordnung (auch Driftkräfte genannt) wurden berücksichtigt und in das Rechenkonzept implementiert, um die Gesamtkräfte und -momente infolge einer ankommenden Stokesschen Welle 2.Ordnung als Überlagerung der Kräfte 1.Ordnung, Driftkräfte und Kräfte 2.Ordnung rechnerisch zu ermitteln.

Die Bewertung des rechnerischen und numerischen Aufwands im Vergleich zu den wenigen, manchmal auch zweifelhaften, Verfahren hat gezeigt, daß sich das in dieser Arbeit mit Hilfe von Makroelementen entwickelte mathematische Modell für die Berechnung der Kräfte bis zur 2.Ordnung als sehr vorteilhaft erweist, besonders in Bezug auf die Behandlung der Meeresoberflächenfunktion und deren Integration bis ins Unendliche.

In dem folgenden Abschnitt 2 wird die theoretische Formulierung des Randwertproblems für nichtlineare Wellen wiedergegeben und daraus die Theorie 2.Ordnung herangezogen. Eine komplette Lösungsmethode für die Berechnung der Kräfte 2.Ordnung wird detailliert abgeleitet.

Im Abschnitt 3 wird das vorher abgeleitete Verfahren für einen vom Meeresboden bis zur Meeresoberfläche ragenden Zylinder angewandt. Analytische Ausdrücke aller Kraft und Momentengrößen werden ermittelt und angegeben.

Im Abschnitt 4 wird die Lösungsmethode auf beliebige Rotationskörper mit vertikaler Achse erweitert. Zuerst wird die dafür entwickelte Makroelementmethode kurz präsentiert. Es werden die entgeltigen Formeln für die aus der linearen Potential abhängigen Kräfteanteile 2.Ordnung herangezogen und für sämtliche Elementtypen tabellarisch angegeben.

Im Kapitel 5 handelt sich um die aus der Diffraktionspotential 2.Ordnung resultierende Kräfteanteile. Dabei wird deren Berechnung – mit Hilfe eines Fernfeld Theorems – auf eine bis ins Unendlich ragende

numerische Integration der sogenannten Meeresoberflächenfunktion zurückgeführt. Die relativ aufwendige Quadratur wird, anhand der Makroelementformulierungen, halbanalytisch gelöst. Die asymptotische Lösung, die sich auf Fresnel-Integral-ähnlichen Ausdrücken zurückführen läßt wird abgeleitet.

Im Abschnitt 6 werden die berechneten Kräfte zuerst für einfache Zylindern dargestellt und mit aus der Literatur bekannten Ergebnissen verglichen. Weiterhin wird das Verfahren für im Offshorebereich typische Konstruktionen angewandt. Die rechnerisch ermittelten Kräfte 2.Ordnung für solche Konstruktionstypen werden ausführlich in Diagrammenform dargestellt und experimentellen Daten gegenübergestellt.

2. Allgemeine Formulierung des Randwertproblems für das Geschwindigkeitspotential

2.1 Annahmen. Randbedingungen

Das untersuchte Randwertproblem wird in der Abbildung 1 dargestellt. Ein starrer, rotationssymmetrischer Körper mit Außenradius a wird im Wasser mit endlicher und konstanter Wassertiefe d den Wellen ausgesetzt. Es wird ein ortsfestes Zylinderkoordinatensystem (r, ϑ, z) mit seinem Ursprung auf dem Meeresboden definiert. Unter Einwirkung einer regelmäßigen, von links nach rechts fortschreitenden Welle der Wellenlänge λ und Wellenamplitude $H/2$ wird der Körper erregt. Das Wasser wird als inkompressibel, homogen und wirbelfrei angenommen, seine Viskosität wird vernachlässigt.

Das Geschwindigkeitspotential $\Phi(r, \vartheta, z, t)$ muß die Laplacesche Differentialgleichung in dem gesamten Flüssigkeitsbereich erfüllen:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2-1)$$

Folgende Randbedingungen müssen zusätzlich noch erfüllt werden:

- die kinematische Randbedingung an der Meeresoberfläche [38]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{für } z = \zeta + d \quad \text{und } r \geq a_1 \quad (2-2)$$

$\zeta = \zeta(r, \vartheta, t)$ ist dabei die Wellenerhebung und a_1 der Wasserlinienradius des Körpers (Abb. 1).

- die dynamische Randbedingung an der freien Meeresoberfläche

$$g\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{für } z = \zeta + d \quad \text{und } r \geq a_1 \quad (2-3)$$

- die Randbedingung an der momentan benetzten Oberfläche \tilde{S}_Q des Körpers

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{auf } \tilde{S}_Q \quad (2-4)$$

(\vec{n} ist dabei der Einheitsvektor senkrecht zur Körperoberfläche mit Richtung nach außen.)

- Die Randbedingung am Meeresboden

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad (2-5)$$

- und eine Abstrahlbedingung im Unendlichen, auf die später eingegangen wird.

2.2 Randwertproblem erster und zweiter Ordnung.

Unter der Annahme kleiner Wellenamplituden ($H/2$) können das Potential Φ und die Wellenerhöhung ζ mit Hilfe der Störungsrechnung (perturbation method) als Potenzreihen eines kleinen Parameters ε ($\varepsilon = kH/2$, $k = 2\pi/\lambda$) bis zum quadratischen Term entwickelt werden, während Beiträge höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\Phi(r, \vartheta, z, t) = \varepsilon\Phi_1(r, \vartheta, z, t) + \varepsilon^2\Phi_2(r, \vartheta, z, t) \quad (2-6)$$

$$\zeta(r, \vartheta, t) = \varepsilon\zeta_1(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2\zeta_2(r, \vartheta, t) \quad (2-7)$$

Die Randbedingungen (2-2) und (2-3) sind an der unbekannten Wellenoberfläche $\zeta(r, \vartheta, t)$ zu erfüllen. Man umgeht diese Schwierigkeit, indem das in den Randbedingungen auftretende Potential (und seine Ableitungen) in eine Taylor-Reihe an der Stillwasserlinie $z = d$ entwickelt wird.

$$\Phi(r, \vartheta, \zeta + d, t) = \Phi(r, \vartheta, d, t) + \zeta(r, \vartheta, t) \left. \frac{\partial \Phi(r, \vartheta, z, t)}{\partial z} \right|_{z=d} \quad (2-8)$$

oder nach Einsetzen der Glg. (2-6) und (2-7) in (2-8):

$$\Phi(r, \vartheta, \zeta + d, t) = \varepsilon\Phi_1(r, \vartheta, d, t) + \varepsilon^2 \left[\Phi_2(r, \vartheta, d, t) + \zeta_1(r, \vartheta, t) \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(r, \vartheta, z, t) \right|_{z=d} \right] \quad (2-9)$$

Die Ausdrücke (2-6) bis (2-9) werden in die Gln. (2-1) bis (2-4) eingesetzt, die Gleichungen (2-2) und (2-3) zusammengefaßt und die entstehenden Gleichungen nach Potenzen von ε , d.h. nach Ordnungen sortiert bzw. gleichgestellt (Anhang I). Das Randwertproblem (2-1) bis (2-4) wird dadurch in zwei äquivalente Randwertprobleme getrennt, wobei jedes der beiden sukzessiv zu der Lösung des Potentials erster Ordnung Φ_1 und zweiter Ordnung Φ_2 führt:

Randwertproblem erster Ordnung :

Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi_1 &= 0 \quad \text{im gesamten Flüssigkeitsbereich} & (2-10.a) \\ g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{auf } z = d & (2-10.b) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vec{n}} &= 0 \quad \text{auf der benetzten Körperoberfläche} & (2-10.c) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= 0 \quad \text{für } z = 0 & (2-10.d)\end{aligned}$$

Weiterhin muß eine Abstrahlbedingung im Unendlichen erfüllt werden. Für die Lösung des Randwertproblems 1. Ordnung (auch als lineares Randwertproblem bekannt) wurden zahlreiche Arbeiten veröffentlicht. Es wird daher das Potential Φ_1 im weiteren als bekannt vorausgesetzt bzw. auf die Literatur verwiesen.

Randwertproblem zweiter Ordnung :

Es gilt:

$$\Delta \Phi_2 = 0 \quad \text{im gesamten Flüssigkeitsbereich} \quad (2-11.a)$$

$$\begin{aligned}g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} &= -2 \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial t} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \vartheta \partial t} \right) \right] \\ &+ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial t^2 \partial z} \right) \quad \text{für } z = d \quad (2-11.b)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{auf der benetzten Körperoberfläche} \quad (2-11.c)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{auf dem Meeresgrund } z = 0 \quad (2-11.d)$$

und eine Abstrahlbedingung im Unendlichen, wodurch die nach außen abklingende Fortpflanzung der Diffraktionswellen diktiert wird.

Es ist zweckmäßig, die Potentiale Φ_1 und Φ_2 als Summen

$$\Phi_1 = \Phi_1^I + \Phi_1^S \quad ; \quad \Phi_2 = \Phi_2^I + \Phi_2^S \quad (2-12)$$

auszudrücken, wobei Φ_1^I, Φ_2^I die Potentiale der ankommenden Welle und Φ_1^S, Φ_2^S die Diffraktionspotentiale sind. Die letzteren beschreiben das durch die Präsenz des Körpers entstehende Strömungsfeld.

Das Potential Φ_1^I der ungestörten Welle 1. Ordnung erfüllt die Glgn. (2-10.a), (2-10.b) und (2-10.d), wenn kein Körper vorhanden ist. Es ist bekannt als das Airysche Wellenpotential:

$$\Phi_1^I = \text{Re} \{ \varphi_1^I e^{-i\omega t} \} \quad (2-13.a)$$

mit

$$\varepsilon \varphi_1^I(r, \vartheta, z) = -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k \sinh(kd)} e^{ikz} = -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k \sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\vartheta) \quad (2-13.b)$$

Dabei wurde die Jacobische Entwicklung in Polarkoordinaten für die Funktion $e^{ikz} = e^{ikr \cos \vartheta}$ benutzt. ϵ_m ist das Neumannsche Symbol mit $\epsilon_m = 1$ für $m = 0$ und $\epsilon_m = 2$ für $m \geq 1$, und J_m die Besselsche Funktion erster Art und m -ter Ordnung. Zwischen der Wellenfrequenz ω und der Wellenzahl k gilt die Dispersionsgleichung, wie sie aus der Hydromechanik bekannt ist:

$$\omega^2 = kg \tanh(kd)$$

Das Wellenprofil ergibt sich dann zu:

$$\varepsilon \zeta_1^I(r, \vartheta, t) = \text{Re} \left\{ \frac{H}{2} e^{i(kr \cos \vartheta - \omega t)} \right\} \quad (2-14.a)$$

oder:

$$\epsilon_{\zeta_1^I}(r, \vartheta, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{H}{2} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\vartheta) \right\} \quad (2-14.b)$$

Das Potential 2.Ordnung der ungestörten (ankommenden) Welle wird entsprechend angegeben

$$\Phi_2^I = \operatorname{Re} \{ \varphi_2^I e^{-2i\omega t} \} + \delta_2 t \quad , \quad (2-15.a)$$

wobei δ_2 eine Integrationskonstante ist, die aus der Bedingung für die Gleichheit des Wasserspiegels im Ruhezustand ermittelt werden kann:

$$\delta_2 = -\frac{g}{2k \sinh(2kd)} \quad (2-15.b)$$

Weiterhin gilt

$$\epsilon^2 \varphi_2^I(r, \vartheta, z) = -\frac{3}{8} i\omega \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{\cosh(2kz)}{\sinh^4(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \epsilon_m J_m(2kr) \cos(m\vartheta). \quad (2-15.c)$$

Durch Einsetzen von Φ_1^I und Φ_2^I in die Gln. (2-10) bzw. (2-11) werden die Gln. für die Lösungen von Φ_1^S bzw. Φ_2^S ermittelt.

Die Gln. (2-10) und (2-11) in Zusammenhang mit den Gln. (2-13) und (2-15) bestimmen die Periodizität der Potentiale Φ_1^S und Φ_2^S :

$$\Phi_1^S = \operatorname{Re} \{ \varphi_1^S e^{-i\omega t} \} \quad (2-16)$$

Außerdem gilt für das Potential Φ_1^S die Sommerfeldsche Randbedingung [17], wie aus der Theorie 1.Ordnung bekannt ist:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \varphi_1^S = 0 \quad (2-17)$$

Betrachtet man die Randbedingung (2-11.b), so sind unter der rechten Seite die momentanen (reellen) Werte der Potentialfunktion Phi_1 und

ihrer Ableitungen zu verstehen. Für zwei beliebige komplexe Zahlen a, b gilt:

$$\operatorname{Re} \{ a e^{-i\omega t} \} \operatorname{Re} \{ b e^{-i\omega t} \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ a b e^{-2i\omega t} \} + \frac{1}{2} \{ a \bar{b} \} \quad (2-18)$$

wobei \bar{b} die konjugiert komplexe Zahl von b ist. Daraus ist ersichtlich, daß die rechte Seite der Glg. (2-11.b) und damit das Diffraktionspotential aus einem zeitunabhängigen und einem mit der Frequenz 2ω oszillierenden Teil bestehen muß.

$$\Phi_2^S = \operatorname{Re} \{ \varphi_2^S e^{-2i\omega t} \} + \varphi_{20}^S(r, \vartheta, z) \quad (2-19)$$

Die Glg. (2-11.b) kann weiterhin wie folgt formuliert werden:

$$g \frac{\partial \Phi_2^S}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2^S}{\partial t^2} = \beta_{20} + \operatorname{Re} \{ \beta_2 e^{-2i\omega t} \} \quad (2-20)$$

wobei

$$\beta_2 = -g \frac{\partial \varphi_2^I}{\partial z} + 4\omega^2 \varphi_2^I + i\omega \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\varphi_1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \right] \quad (2-20.a)$$

und

$$\beta_{20} = i\omega \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right) \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta}} \right) - \frac{\varphi_1}{2} \left(\frac{\partial^2 \overline{\varphi_1}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}} \right) \right] \quad (2-20.b)$$

ist.

Prüfung, bezeugt

Entsprechend ist β_2 für die Lösung von φ_2^S zuständig. Das Randwertproblem für φ_2^S und φ_{20}^S kann dann getrennt behandelt werden. Das Potential φ_{20}^S liefert erst Kräfte 3. Ordnung und wird hier im weiteren nicht berücksichtigt. In dem doppelharmonischen Teil β_2 bzw. auf der rechten Seite von (2-20.a) wird weiterhin $\varphi_1 = \varphi_1^I + \varphi_1^S$ gesetzt. Aus (2-20.a) folgt dann für diesen Anteil des Potentials in komplexer Schreibweise :

$$\begin{aligned}
 g \frac{\partial \varphi_2^S}{\partial z} - 4\omega^2 \varphi_2^S = & -g \frac{\partial \varphi_2^I}{\partial z} + 4\omega^2 \varphi_2^I + i\omega \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{(\varphi_1^I + \varphi_1^S)}{2} \\
 & \left. \times \left[\frac{\partial^2 \varphi_1^I}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1^S}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} \right) \right] \right\} \quad (2-21)
 \end{aligned}$$

Dadurch, daß die Gleichung (2-20) auch für das Potential der ankommenden Welle φ_2^I gilt, heben sich die Anteile der Gleichung, die φ_1^S und dessen Ableitungen nicht erhalten, gegenseitig auf. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 g \frac{\partial \varphi_2^S}{\partial z} - 4\omega^2 \varphi_2^S = & i\omega \left[2 \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1^S}{\partial r} \right) + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} \right) + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial \vartheta} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1^S}{\partial \vartheta} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\varphi_1^I}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^S}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} \right) - \frac{\varphi_1^S}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^I}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \varphi_1^I}{\partial z} \right) \right] \\
 & + i\omega \left[\left(\frac{\partial \varphi_1^S}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1^S}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\varphi_1^S}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^S}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} \right) \right] \\
 = & \beta_{IS} + \beta_{SS} = \beta_2 \quad (2-22)
 \end{aligned}$$

Dabei enthält β_{IS} die Summe von Produkten $\varphi_1^I \times \varphi_1^S$ und β_{SS} die Summe von Termen der Form $\varphi_1^S \times \varphi_1^S$.

2.3 Lösungsmethode

Nach Abkoppelung der Zeitvariablen aus der Glg. (2-11) kann man jetzt das Randwertproblem 2.Ordnung für das doppelharmonische Potential φ_2^S neu formulieren:

$$\Delta\varphi_2^S = \frac{\partial^2\varphi_2^S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2^S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_2^S}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\varphi_2^S}{\partial z^2} = 0 \quad (2-23)$$

$$\frac{\partial\varphi_2^S}{\partial\vec{n}} = -\frac{\partial\varphi_2^I}{\partial\vec{n}} \quad \text{auf dem Körper} \quad (2-24)$$

$$g\frac{\partial\varphi_2^S}{\partial z} - 4\omega^2\varphi_2^S = \beta_2 = \beta_{1S} + \beta_{SS} \quad \text{für } z=d \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial\varphi_2^S}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z=0 \quad (2-26)$$

und eine Abstrahlbedingung im Unendlichen für φ_2^S .

Aus mathematischer Sicht stellen die Gleichungen (2-24) und (2-25) zwei inhomogene Randbedingungen dar. Innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen kann daher, um eine komplette Lösung zu finden, φ_2^S in eine Summe von zwei Funktionen aufgespalten werden [12], $\varphi_2^S = \varphi_2^{SF} + \varphi_2^{SL}$, wobei jede Funktion nur eine inhomogene Randbedingung zu erfüllen hat. Somit lautet das Randwertproblem für das Potential φ_2^{SL} :

$$\Delta\varphi_2^{SL} = 0 \quad (2-27.a)$$

$$g\frac{\partial\varphi_2^{SL}}{\partial z} - 4\omega^2\varphi_2^{SL} = \beta_{1S} + \beta_{SS} \quad \text{für } z=d \quad (2-27.b)$$

$$\frac{\partial\varphi_2^{SL}}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z=0 \quad (2-27.c)$$

und eine Abstrahlbedingung im Unendlichen.

Das Randwertproblem für das Potential φ_2^{SF} kann dann wie folgt formuliert werden:

$$\Delta\varphi_2^{SF} = 0 \quad (2-28.a)$$

$$g \frac{\partial\varphi_2^{SF}}{\partial z} - 4\omega^2\varphi_2^{SF} = 0 \quad \text{für } z=d \quad (2-28.b)$$

$$\frac{\partial\varphi_2^{SF}}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z=0 \quad (2-28.c)$$

$$\frac{\partial\varphi_2^{SF}}{\partial\vec{n}} = -\frac{\partial\varphi_1^I}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial\varphi_2^{SL}}{\partial\vec{n}} \quad \text{auf dem Körper} \quad (2-28.d)$$

und eine Abstrahlbedingung im Unendlichen.

Das Potential φ_2^{SF} erfüllt unter anderem die homogene Randbedingung (2-28.b). Das asymptotische Verhalten von φ_2^{SF} für $r \rightarrow \infty$ ist daher einem linearen Diffraktionspotential ähnlich:

$$\varphi_2^{SF} \simeq \frac{L(\vartheta)}{\sqrt{\kappa r}} e^{i\kappa r} \cosh(\kappa z) \quad \kappa r \gg 1, \quad (2-29)$$

wobei κ und 2ω die Dispersionsgleichung:

$$4\omega^2 = \kappa g \tanh(\kappa d) \quad (2-30)$$

erfüllen.

Bei der Gleichung (2-22) treten Produkte von Potentialen der Form $\varphi_1^I \times \varphi_1^S$ und $\varphi_1^S \times \varphi_1^S$ auf. Das asymptotische Verhalten von φ_1^S ist:

$$\varphi_1^S \simeq \frac{f_1(\vartheta)}{r^{1/2}} \cosh(kz) e^{i\kappa r} \quad (2-31)$$

Daraus folgt das asymptotische Verhalten von β_{SS} :

$$\beta_{SS} \simeq \frac{H(\vartheta)}{r} e^{i2kr} \quad (2-32)$$

und weiterhin :

$$\beta_{IS} \simeq \frac{G(\vartheta)}{r^{1/2}} e^{ikr(1+\cos\vartheta)} \quad (2-33)$$

Um für das Randwertproblem (2-27) eine Lösung für $r \rightarrow \infty$ zu finden, wird wiederum die Glg. (2-27.b) bzw. das Potential φ_2^{SL} in zwei Teile aufgespalten:

$$\varphi_{SL} = \varphi_{SLI} + \varphi_{SLS} \quad (2-34)$$

mit der Forderung nach Erfüllung der Meeresoberflächenrandbedingung:

$$g \frac{\partial \varphi_2^{SLI}}{\partial z} - 4\omega^2 \varphi_2^{SLI} = \beta_{IS} \quad (2-35.a)$$

bzw.

$$g \frac{\partial \varphi_2^{SLS}}{\partial z} - 4\omega^2 \varphi_2^{SLS} = \beta_{SS} \quad (2-35.b)$$

Die Funktion φ_2^{SLS} klingt für wachsendes r mit $1/r$ relativ schnell ab.

$$\varphi_2^{SLS} \simeq \frac{H(\vartheta)}{r} e^{i2kr} \cosh^2(kz) \quad (2-36)$$

Um eine asymptotische Lösung von φ_2^{SLI} zu finden, wird die Laplace'sche Differentialgleichung angenähert:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \varphi_2^{SLI} = o(r^{-1/2}) \quad (2-37)$$

Es kann leicht ermittelt werden, daß

$$\varphi_2^{SLI} \approx \frac{L(\vartheta)}{r^{1/2}} \cosh \left[k(2 + 2\cos\vartheta)^{1/2} z \right] e^{ikr(1+\cos\vartheta)} \quad (2-38)$$

die Glg. (2-37) erfüllt, weil

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \varphi_2^{SLI} = \left[-k^2(1 + \cos\vartheta)^2 + 2k^2(1 + \cos\vartheta) - k^2 \sin^2 \vartheta \right] \varphi_2^{SLI} + \alpha(r^{-1/2}) = \alpha(r^{-1/2}) \quad (2-39)$$

Um die Glg. (2-35.a) zu erfüllen, genügt es dann, $L(\vartheta)$ so zu wählen, daß

$$L(\vartheta) \{ g k(2 + 2\cos\vartheta)^{1/2} \sinh[k(2 + 2\cos\vartheta)^{1/2} d] - 4\omega^2 \cosh[k(2 + 2\cos\vartheta)^{1/2} d] \} = G(\vartheta) \quad (2-40)$$

Aus der Glg. (2-38) kann man entnehmen, daß das Potential φ_2^{SLI} bzw. die Wellen proportional zu β_{IS} für große Radien unterschiedliche Geschwindigkeiten in Abhängigkeit des Winkels ϑ aufweisen, was bedeutet, daß die Sommerfeldsche Randbedingung in Form der Glg. (2-17) für Φ_2^S nicht zutreffend ist. Es wird deshalb erforderlich, eine neue Randbedingung im Unendlichen zu definieren [23].

Physikalisch kann man diese Richtungsabhängigkeit wie folgt erklären:

Betrachten wir zuerst die Wellen 1.Ordnung in einem Punkt $(R \cos \vartheta, R \sin \vartheta)$ in einem großen Abstand R vom Körper. Sie überlagern sich durch die ankommenden Wellen in Richtung $\vec{k}_I = (k, 0)$ und die Diffraktionswellen, die sich in radialer Richtung fortpflanzen und in großem Abstand vom Körper als ebene Wellen mit einem Wellenzahlvektor $\vec{k}_S = (k \cos \vartheta, k \sin \vartheta)$ angenommen werden können. Beide Wellensysteme haben die gleiche Frequenz ω , pflanzen sich aber in verschiedenen Richtungen und mit verschiedenen Amplituden (z.B. H_I und H_S) fort.

Aus der inhomogenen Randbedingung (2-27.b) für das Potential 2.Ordnung φ_2^{SL} ist ersichtlich, daß drei Arten von Wellen entstehen, wobei alle mit der gleichen Frequenz oszillieren.

- a) Wellen, die proportional zu $(H_I)^2$ sind und einen Wellenzahlvektor $2\vec{k}_I$ aufweisen.
- b) Wellen mit der Amplitude $(H_S)^2$ und mit einem Wellenzahlvektor $2\vec{k}_S$
- c) Wellen, die proportional zu $(H_I)(H_S)$ sind und sich mit einem Wellenzahlvektor in einer zwischen \vec{k}_I und \vec{k}_S liegenden Richtung $\vec{k}_I + \vec{k}_S$ fortpflanzen.

Die erste Wellenart (a) wird durch das Wellenpotential φ_2^I beschrieben. Die Wellen der zweiten Art (b) sind für große Abstände nicht interessant, denn sie klingen proportional zu $1/r$ relativ schnell ab. (H_S klingt mit $1/\sqrt{r}$ ab). Die Amplitude der letzteren Wellen (c) klingt mit wachsendem r proportional zu $1/\sqrt{r}$ ab und ihr asymptotisches Verhalten wird durch die Glg. (2-38) beschrieben.

In einem sehr großen Abstand vom Körper existieren also zuletzt zwei Wellensysteme:

- I) die in radialer Richtung mit $1/\sqrt{r}$ abklingenden Wellen (Glg.(2-29)), die eine Wellenzahl κ aufweisen. Sie erfüllen die homogene Meeresoberflächenrandbedingung (2-28.b). Diese Wellen werden "freie Wellen" genannt -weil ihre Wellenzahl κ nicht identisch mit der der Wellen erster Ordnung k ist- und werden durch das Potential $\varphi_2^{S^F}$ beschrieben.
- II) die zur Welle 1.Ordnung "gekoppelten Wellen", deren Fortschreitungsrichtung in einem Punkt (R, ϑ) gleich $\vartheta/2$ ist. Ihr asymptotisches Verhalten wird durch die Glg. (2-38) beschrieben.

Das Verhalten der Wellen bzw. des Potentials 2.Ordnung im Unendlichen ist sehr nützlich für die Weiterbehandlung des Randwertproblems 2.Ordnung. Obwohl noch keine komplette Lösung des Potentials im Nahfeld vorliegt, sind diese Erkenntnisse über das asymptotische Verhalten von φ_2^S aussagekräftig genug, um die Kräfte 2.Ordnung vollständig zu ermitteln.

2.4 Ermittlung der auf den Körper induzierten Kräfte:

Der Druck an einem Punkt in der Flüssigkeit wird durch die Bernoulli'sche Gleichung angegeben:

$$p = \rho g(d - z) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + p_{Luft} \quad (2-41)$$

Ersetzt man Φ durch die mit der Störungsrechnung entwickelten Potentialausdrücke so bekommt man den Druck p nach Potenzen von ϵ sortiert:

$$p = p_{Luft} + p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2(p_2 + p_{20}) \quad (2-42)$$

wobei:

$$p_0 = \rho g(d - z) \quad (2-43)$$

$$\epsilon p_1 = \epsilon \rho \operatorname{Re} \{ i\omega \varphi_1 e^{-i\omega t} \} \quad (2-44)$$

$$\epsilon^2 p_2 = -\epsilon^2 \rho \operatorname{Re} \left\{ \left[-2i\omega \varphi_2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \right] e^{-2i\omega t} \right\} \quad (2-45)$$

$$\epsilon^2 p_{20} = -\frac{1}{4} \epsilon^2 \rho \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right) \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta}} \right) \right] \quad (2-46)$$

$\overline{\varphi_1}$ ist dabei die konjugiert Komplexe von φ_1 .

Es werden zunächst die Funktionen η_j ($j = 1, 2, 3 \dots 6$) an allen sechs Freiheitsgraden (drei translatorische $j = 1, 2, 3$ und drei rotatorische $j = 4, 5, 6$) bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $Mxyz$ definiert:

$$\eta_1 = \cos(\vec{n}, \vec{x}) \quad ; \quad \eta_2 = \cos(\vec{n}, \vec{y}) \quad ; \quad \eta_3 = \cos(\vec{n}, \vec{z}) \quad (2-47.a)$$

$$\eta_4 = y \cos(\vec{n}, \vec{z}) - z \cos(\vec{n}, \vec{y}) = y\eta_3 - z\eta_2 \quad (2-47.b)$$

$$\eta_5 = z \cos(\vec{n}, \vec{x}) - x \cos(\vec{n}, \vec{z}) = z\eta_1 - x\eta_3 \quad (2-47.c)$$

$$\eta_6 = x \cos(\vec{n}, \vec{y}) - y \cos(\vec{n}, \vec{x}) = x\eta_2 - y\eta_1 \quad (2-47.d)$$

wobei mit \vec{n} der Normalenvektor an einem Punkt (x, y, z) der Körperoberfläche \tilde{S}_Q und mit $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ die Einheitsvektoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ gemeint sind. Dadurch sind die Funktionen $\eta_j(x, y, z), j = 1, 2, \dots, 6$ durch die Gestalt der Fläche \tilde{S}_Q und die Wahl des Koordinatensystems $M(x, y, z)$ bestimmt.

Die auf den Körper wirkenden Kräfte F_j in Richtung $j, (j = 1, 2, 3)$ bzw. Momente $(j = 4, 5, 6)$ werden durch die Integration des Druckes über die momentan benetzte Oberfläche des Körpers \tilde{S}_Q errechnet. Eine Vereinfachung wird erreicht, indem man diese Fläche wie folgt aufspaltet: $\tilde{S}_Q = S'_Q + S_Q$. S_Q ist dabei eine zeitlich konstante Oberfläche, die sich bis an die Stillwasserlinie des Körpers mit $z = d$ erstreckt, und S'_Q ist eine zeitlich veränderliche Fläche, die sich zwischen $z = d$ und $z = d - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ erstreckt. Es ist:

$$F_j = - \iint_{\tilde{S}_Q} p \eta_j ds \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (2-48)$$

Beschränkt man sich auf Rotationskörper mit vertikaler Achse, mit einer in x -Richtung ankommenden Welle so gilt $F_2 = F_4 = F_6 = 0$. Im weiteren werden daher nur die Kräfte F_j für $j = 1, 3$ und 5 behandelt.

Setzt man die Ausdrücke (2-44) bis (2-46) für den hydrodynamischen Druck in die Formel (2-48) ein, so werden entsprechend die Kräfte bis zur zweiten Ordnung mit Hilfe der Wellenpotentiale ausgedrückt:

$$F_{1j} = \text{Re} \{ F_{1j} e^{-i\omega t} \} = \varepsilon \rho \iint_{S_Q} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \eta_j dS \quad j = 1, 3, 5 \quad (2-49)$$

$$F_{2j} = F_{20j} + \text{Re} \{ F_{2j} e^{-2i\omega t} \} = \varepsilon^2 \rho \iint_{S_Q} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \eta_j dS + \frac{\varepsilon^2 \rho}{2} \iint_{S_Q} (\nabla \Phi_1)^2 \eta_j dS + \rho \iint_{S'_Q} (gz + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}) \eta_j dS$$

$$= \varepsilon^2 \rho \iint_{S_Q} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \eta_j dS + \frac{\varepsilon^2 \rho}{2} \iint_{S_Q} (\nabla \Phi_1)^2 \eta_j dS - \varepsilon^2 \frac{\rho}{2g} \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 \eta_j d\Gamma \quad (2-50)$$

Das Linienintegral wird über die Stillwasserlinie Γ des Körpers in der Höhe $z = d$ gebildet. Durch die Benutzung der komplexen Schreibweise für die Potentiale Φ_1 und Φ_2 mit

$$\Phi_1 = \operatorname{Re}\{\varphi_1 e^{-i\omega t}\} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \operatorname{Re}\{\varphi_2 e^{-2i\omega t}\} + \Phi_{20} \quad (2-51)$$

wird aus der Glg. (2-50) die zeitunabhängige Kraft F_{20} –auch Driftkraft genannt– (bzw. das Driftmoment) und die komplexe, doppelharmonische Kraft (bzw. Moment) zweiter Ordnung F_2 gewonnen.

$$\begin{aligned} F_{20} &= \frac{\varepsilon^2 \rho}{4} \iint_{S_Q} (\nabla \varphi_1)(\nabla \bar{\varphi}_1) \eta_j dS + \varepsilon^2 \omega^2 \frac{\rho}{4g} \oint_{\Gamma} \varphi_1 \bar{\varphi}_1 \eta_j d\Gamma + \delta_{3j} \rho \varepsilon^2 \frac{g \pi a_1^2}{2k \sinh(2kd)} \\ &= F_{20j}^I + F_{20j}^{\Gamma} + F_{20j}^{III} \end{aligned} \quad (2-52)$$

Der Term mit dem Kronecker Symbol δ_{3j} ($\delta_{3j} = 1$ für $j = 3$, $\delta_{3j} = 0$ für $j \neq 3$) bedeutet den zusätzlichen Anteil der Driftkraft in vertikaler Richtung infolge der Glg. (2-15.b). a_1 ist dabei der Wasserlinienradius des Körpers.

Die doppelharmonische Kraft wird aus Gründen besserer Handhabung zuerst in weitere fünf Anteile zerlegt:

$$F_{2j} = \sum_{P=I}^V F_{2j}^P \quad (2-53)$$

Im folgenden Ablauf der Arbeit werden die fünf Anteile anhand der Glgn. (2-50) und (2-51) wie folgt vereinbart:

$$F_{2j}^I = -2i\omega\epsilon^2\rho \iint_{S_Q} \varphi_2^I \eta_j dS \quad (2-54)$$

$$F_{2j}^{II} = \frac{\epsilon^2\rho}{4} \iint_{S_Q} \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta} \right)^2 \right] \eta_j dS \quad (2-55)$$

$$F_{2j}^{III} = \frac{\epsilon^2\rho\omega^2}{4g} a_1 \int_0^{2\pi} \varphi_1^2 \eta_j d\vartheta \quad (2-56)$$

und

$$F_{2j}^{IV+V} = -2i\omega\epsilon^2\rho \iint_{S_Q} \varphi_2^S \eta_j dS \quad (2-57)$$

Die Ausdrücke (2-52) und (2-54) bis (2-56) enthalten das Potential $\varphi_1 = \varphi_1^I + \varphi_1^S$ und das Potential φ_2^I der ankommenden Welle. Das Potential φ_1 wird aus der Lösung 1. Ordnung gewonnen (in dieser Arbeit durch die Makroelementmethode) und wird daher als bekannt vorausgesetzt. φ_2^I wird durch die Glg. (2-15.c) angegeben und ist ebenfalls bekannt. Die Gleichung (2-57) enthält das unbekannte Diffraktionspotential 2. Ordnung. Molin hatte dafür ein von Haskind [24] stammendes Verfahren weiterentwickelt. Dieses Verfahren wurde auch von anderen Autoren für die Errechnung der Kräfte 2. Ordnung auf zweidimensionale Körper angewandt [3], [6], [35].

Man definiert zuerst ein hypothetisches, harmonisches Abstrahlpotential Ψ_j mit der Frequenz 2ω . Es beschreibt das Wellenfeld, das durch die erzwungene Oszillation des betrachteten Körpers im Wasser in Richtung j entsteht. Dieses lineare Potential hat folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$\Psi_j = \text{Re} \{ \Psi_j e^{-2i\omega t} \} \quad (2-58.a)$$

mit:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_j &= 0 && \text{in der gesamten Flüssigkeit} && (2-58.b) \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} &= \eta_j && \text{auf der benetzten Oberfläche } S_Q && (2-58.c) \end{aligned}$$

$$g \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} - 4\omega^2 \Psi_j = 0 \quad \text{an der Meeresoberfläche } z = d \quad (2-58.d)$$

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial z} = 0 \quad \text{am Meeresboden } z = 0 \quad (2-58.e)$$

und die Sommerfeldsche Randbedingung im Unendlichen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\kappa \right) \Psi_j = 0 \quad (2-58.f)$$

mit

$$4\omega^2 = \kappa g \tanh(\kappa d) \quad (2-59)$$

Durch Einsetzen der Glg. (2-58.c) in die Gleichung (2-57) ergibt sich:

$$F_{2j}^{IV+V} = -2i\omega\epsilon^2 \rho \iint_{S_Q} \varphi_2^S \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} dS \quad (2-60)$$

Durch die Anwendung des Greenschen Theorems für das Potential φ_2^S und Ψ in einem Kontrollvolumen, das durch die vier Teilflächen S_Q , S_F , S_B und S_∞ begrenzt wird (Abb.1), bekommt man:

$$\iint_{S_Q} \left(\varphi_2^S \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} - \Psi_j \frac{\partial \varphi_2^S}{\partial \vec{n}} \right) dS = \iint_{S_B + S_F + S_\infty} \left(\Psi_j \frac{\partial \varphi_2^S}{\partial \vec{n}} - \varphi_2^S \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (2-61)$$

(\vec{n} ist der in das Kontrollvolumen zeigende Normalenvektor)

Das Integral über den Meeresboden S_B auf der rechten Seite der Glg.(2-61) verschwindet, weil für $z = 0$ gelten muß:

$$\left. \frac{\partial \varphi_2^S}{\partial \vec{n}} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} \right|_{z=0} = 0$$

Wegen des asymptotischen Charakters von φ_2^S und durch die Methode der stationären Phase [23] kann gezeigt werden, daß das Integral über

S_∞ auch nach Null abklingt. Das Verschwinden dieses Integrals ist gleichzeitig eine physikalisch vollständige neue Randbedingung im Unendlichen und ersetzt die Sommerfeldsche Randbedingung für das Potential φ_2^S . Setzt man die Randbedingungen (2-22), (2-24) und (2-58.d) in die Gleichung (2-61) ein, so ergibt sich:

$$F_{2j}^{IV+V} = 2i\omega\epsilon^2\rho \left\{ \iint_{S_Q} \frac{\partial\varphi_2^I}{\partial\vec{n}} \Psi_j dS + \frac{1}{g} \iint_{S_F} \beta_2 \Psi_j dS \right\} \quad (2-62)$$

Im folgenden wird der erste Term der Glg. (2-62) als Teil IV und der zweite Term als Teil V der Kraft F_{2j} , 2.Ordnung angesprochen. Das lineare Abstrahlpotential Ψ_j ist leicht zu ermitteln, während β_2 durch die Glg. (2-22) gegeben wird. Die gesamte oszillierende Kraft 2.Ordnung wird dadurch (Glg. (2-54) bis (2-56) und Glg. (2-62)) mit Hilfe der Potentiale 1.Ordnung bzw. deren Ableitungen errechnet, und das komplizierte Diffraktionspotential 2.Ordnung φ_2^S wird nicht benötigt. Da für die Ermittlung des Potentials 1.Ordnung in der Literatur zahlreiche numerische Methoden und entsprechend entwickelte Rechenprogramme vorhanden sind (Singularitätenmethode, Finite-Elemente, Makroelemente u.s.w.), lassen sich die oben formulierten Kräfte 2.Ordnung durch eine aufwendige Routinearbeit mit Hilfe einer Rechenanlage errechnen. Es hat sich erwiesen, daß für die Ermittlung dieser Kräfte die zuerst benötigten Ausdrücke 1.Ordnung mit einer hohen Genauigkeit vorhanden sein müssen. Diese Rechengenauigkeit ist in den meisten Fällen höher, als sie für die Berechnung der Kräfte 1.Ordnung notwendig wäre. Weiterhin benötigt die Integration des fünften Anteils über die bis ins Unendliche ragende Meeresoberfläche S_F die Entwicklung eines besonders effektiven Integrationsverfahrens, um die Berechnungen im Rahmen einer kostenmäßig vertretbaren Rechenzeit zu halten.

3. Analytische Lösung für den vertikalen Zylinder

Für den Sonderfall eines vom Boden bis zur Meeresoberfläche ragenden Zylinders mit dem Radius a und der Wassertiefe d können die Ausdrücke des Diffraktionspotentials φ_1^S und des Abstrahlpotentials Ψ_i ($i = 1, 5$) und die daraus folgenden Formeln für die Kräfte 2. Ordnung analytisch ermittelt werden. Aus der klassischen Lösung von Mac Camy und Fuchs [45] bekommt man durch die Lösung des Randwertproblems 1. Ordnung das Diffraktionspotential unter den in Kap. 2 getroffenen Annahmen in folgender Form:

$$\Phi_1(r, \vartheta, z, t) = \operatorname{Re} \{ (\varphi_1^I + \varphi_1^S) e^{-i\omega t} \} \quad (3-1)$$

mit

$$\epsilon \varphi_1^I(r, \vartheta, z) = \frac{-i\omega H \cosh(kz)}{2k \sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\vartheta) \quad (3-2)$$

und

$$\epsilon \varphi_1^S(r, \vartheta, z) = \frac{-i\omega H \cosh(kz)}{2k \sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \left[-\frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m(kr) \right] \cos(m\vartheta) \quad (3-3)$$

Durch Einsetzen von φ_1^I und φ_1^S in die Glgn. (2-52) bis (2-56) und mit Hilfe der Glg. (2-15.c) für das ankommende Potential 2. Ordnung φ_2^I werden die entsprechenden Kraftanteile 2. Ordnung gewonnen. Im folgenden werden die so ermittelten Kraft- und Momenten-Anteile I - IV tabellarisch angegeben.

3.1 Anteile I bis IV der Kräfte und Momente 2. Ordnung auf den Zylinder

a. Horizontale Erregungskraft:

$$\frac{F_{21}^I}{\rho g a (H/2)^2} = -\frac{3i\pi}{2 \sinh^2(kd)} J_1(2ka) \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_{21}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} = & \frac{2i}{\pi(ka)^2} \left\{ \left(1 - \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{H'_{m+1} H'_m} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(ka)^2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1)m}{H'_{m+1} H'_m} \right\} \quad (3-5) \end{aligned}$$

$$\frac{F_{21}^{III}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{4i}{\pi(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{H'_{m+1} H'_m} \quad (3-6)$$

dabei ist:

$$H'_m = \left. \frac{dH_m(kr)}{d(kr)} \right|_{r=a} \quad (3-7)$$

Für den IV. Anteil der horizontalen Kraft 2. Ordnung bzw. Glg. (2-62) wird das Abstrahlpotential Ψ_1 benötigt. Dieses kann leicht aus der Lösung des Randwertproblems 1. Ordnung, das die Glgn. (2-58) beschreiben, ermittelt werden. Es ist:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \text{Re} \{ \Psi_1 e^{-2i\omega t} \} \\ \Psi_1(r, \vartheta, z) &= \cos \vartheta \sum_{\xi} \frac{4 \sin(\xi d)}{(2\xi d + \sin(2\xi d))} \frac{K_1(\xi r)}{\xi K'_1(\xi a)} \cos(\xi z) \quad (3-8) \end{aligned}$$

Die Summe über ξ erstreckt sich über $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$. ξ_0 bzw. ξ_j ($j=1,2,3,\dots$) sind die eine imaginäre bzw. die unendlich vielen reellen Wurzeln der Gleichung:

$$4\omega^2 + \xi g \tan(\xi d) = 0$$

Der entsprechende Kraftanteil *IV* lautet:

$$\frac{F_{21}^{IV}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{-24i\pi J_1'(2ka)k^3}{\cosh(kd)} \sum_{\xi}^{\infty} \frac{\sin(2\xi d)}{(2\xi d + \sin(2\xi d))} \frac{K_1(\xi a)}{K_1'(\xi a)} \frac{1}{\xi(\xi^2 + 4k^2)} \quad (3-9)$$

b. Moment 2. Ordnung

Bezüglich eines Bezugspunktes mit den Koordinaten $(r, \vartheta, z) = (0, 0, e)$ können die Anteile I bis IV des Momentes 2. Ordnung analytisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{F_{2_5}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{-3i\pi J_1(2ka)}{2 \sinh^2(kd)} \left(\frac{d}{a}\right) \left[1 - \frac{e}{d} - \frac{\tanh(kd)}{2kd}\right] \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_{2_5}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= \frac{4i}{\pi(ka)^2} \left(\frac{d-e}{2a} - \frac{\tanh(kd)}{4ak}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{j(j+1)}{(ka)^2}\right) \frac{(-1)^j}{H'_{j+1} H'_j} \\ &+ \frac{4i}{\pi(ka) \sinh(2kd)} \left(\frac{d/2-e}{a}\right) \left(\frac{d}{a}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j(j+1)}{(ka)^2} - 1\right) \frac{(-1)^j}{H'_{j+1} H'_j} \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\frac{F_{2_5}^{III}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{4i}{\pi(ka)^2} \frac{(d-e)}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{H'_{j+1} H'_j} = \frac{(d-e)}{a} \frac{F_{2_5}^{III}}{\rho g a (H/2)^2} \quad (3-12)$$

Das für den IV. Anteil benötigte Abstrahlpotential Ψ_5 wird:

$$\Psi_5(r, \vartheta, z, t) = \operatorname{Re} \{ \Psi_5 e^{-2i\omega t} \}$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_5(r, \vartheta, z) &= \cos \vartheta \sum_{\xi}^{\infty} \frac{4}{(2\xi d + \sin(2\xi d))} \frac{K_1(\xi r)}{K_1(\xi a)} \\ &\times \left[\frac{d-e}{\xi} \sin(\xi d) + \frac{1}{\xi^2} \{ \cos(\xi d) - 1 \} \right] \cos(\xi z) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Den dazugehörigen Momentenanteil bekommt man in folgender Form:

$$\frac{F_{2_5}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = -\frac{48i\pi k^3 J_1'(2ka)}{a \cosh(kd)} \sum_{\xi}^{\infty} \frac{[(d-e) \sin(\xi d) + \xi^{-1} (\cos(\xi d) - 1)] \cos(\xi d)}{\xi^2 (4k^2 + \xi^2) (2\xi d + \sin(2\xi d))} \quad (3-14)$$

c. Driftkräfte:

Analog zu den oszillierenden Kräften 2. Ordnung werden auch die zeitunabhängigen Kräfte bzw. Driftkräfte auf einem festgehaltenen Zylinder mit Hilfe der Formel (2-52) gewonnen:

$$\begin{aligned} \frac{F_{20_1}^J}{\rho g a (H/2)^2} &= \frac{-2}{\pi (ka)^2} \left[\left(1 - \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{H'_{j+1} \overline{H'_j}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(ka)^2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)j}{H'_{j+1} \overline{H'_j}} \right\} \right] \quad (3-15) \end{aligned}$$

Das Linienintegral über Γ der Glg. (2-52) wird:

$$\frac{F_{20_1}^\Gamma}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{4}{\pi (ka)^2} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{H'_{j+1} \overline{H'_j}} \right\} \quad (3-16)$$

d. Driftmomente:

$$\begin{aligned} \frac{F_{20_s}^J}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= \frac{-4}{\pi (ka)^2} \left[\frac{d-e}{2a^2 k} - \frac{\tanh(kd)}{(2ka)^2} \right] \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(j+1)j}{(ka)^2} \right) \frac{1}{H'_{j+1} \overline{H'_j}} \right\} \\ &\quad - \frac{4d(d/2-e)}{\pi (ka)a^2 \sinh(2kd)} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(j+1)j}{(ka)^2} - 1 \right) \frac{1}{H'_{j+1} \overline{H'_j}} \right\} \quad (3-17) \end{aligned}$$

und

$$\frac{F_{20_s}^\Gamma}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{4(d-e)}{\pi (ka)^2 a} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{H'_{j+1} \overline{H'_j}} \right\} = \left(\frac{d-e}{a} \right) \frac{F_{20_1}^\Gamma}{\rho g a (H/2)^2}. \quad (3-18)$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{Im}\{\dots\}$ den imaginären Anteil einer komplexen Zahl.

3.2 Integration der Meeresoberflächenfunktion

Der V . Anteil der horizontalen Kraft bzw. des Moments auf den Zylinder wird mit Hilfe der Formel (2-62) für $j = 1$ bzw. $j = 5$ errechnet:

$$F_{2j}^V = \frac{2i\omega\epsilon^2\rho}{g} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \beta_2 \Psi_j r dr d\vartheta \quad (3-19)$$

Der dafür benötigte Ausdruck der Meeresoberflächenfunktion β_2 wird aus der Gleichung (2-22) entnommen. Werden die in der Glg. (2-22) auftretenden Potentiale φ_1^I , φ_1^S sowie deren Ableitungen aus den Formeln (3-1) bis (3-3) ersetzt, so bekommt man nach einigen Operationen die Funktion $\beta_2(r, \vartheta)$ in der Form einer trigonometrischen Reihe:

$$\beta_2(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(r) \cos(m\vartheta) \quad (3-20)$$

Aus der Glg. (3-19) in Verbindung mit den Gln. (3-8) bzw. (3-13) des Abstrahlpotentials Ψ_j ist ersichtlich, daß für die Ermittlung der Kraft F_{2j}^V nur der $\cos \vartheta$ Term bzw. B_1 der Glg. (3-20) benötigt wird.

Nach Durchführung einer Reihe von Operationen wird folgende Formel für $B_1(r)$ erhalten:

$$\begin{aligned} B_1(r) = & \frac{4\omega^3}{k^2 \tanh^2(kd)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[u_m J'_{m+1} H'_m + u_{m+1} J'_m H'_{m+1} \right. \right. \\ & + u_{m+1} u_m H'_{m+1} H'_m + \left. \left(\frac{m(m+1)}{(kr)^2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(kd) \right) \right. \\ & \left. \left. \times (u_m J_{m+1} H_m + u_{m+1} J_m H_{m+1} + u_{m+1} u_m H_{m+1} H_m) \right] \right\} \quad (3-21) \end{aligned}$$

dabei ist:

$$u_m = \frac{-J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \quad ; \quad J_m = J_m(kr) \quad ; \quad H_m = H_m(kr) \quad (3-22)$$

Die Funktion $B_1(r)$ wurde beispielhaft für einen Zylinder mit $d/a = 3$, $a = 10$ Meter und eine Wellenzahl $k = 0.15m^{-1}$ in der Abb. 3. gezeichnet.

Der Ausdruck (3-19) für die horizontale Kraft wird dadurch:

$$F_{2_1}^V = I(\infty) \quad (3-23)$$

mit

$$I(R) = \frac{2i\omega\epsilon^2\rho\pi}{g} \sum_{\xi} \frac{4 \sin(\xi d) \cos(\xi d)}{\xi(2\xi d + \sin(2\xi d))K_1'(\xi a)} \int_a^R B_1(r)K_1(\xi r)r dr \quad (3-24)$$

Entsprechendes gilt für das Moment:

$$F_{2_6}^V = \frac{2i\omega\epsilon^2\pi}{g} \sum_{\xi} \left\{ \frac{(d-e)}{\xi \sin(\xi d)} + \frac{1}{\xi^2} [\cos(\xi d) - 1] \right\} \times \frac{4 \cos(\xi d)}{[2\xi d + \sin(2\xi d)]K_1'(\xi a)} \int_a^{\infty} B_1(r)K_1(\xi r)r dr \quad (3-25)$$

für $\xi_0 = -i\kappa$ wird $K_1(\xi_0 r) = -0.5\pi H_1^{(1)}(\kappa r)$.

Wird das Meeresoberflächenintegral (3-24) bis zu einem Radius R integriert und wird das Ergebnis als eine Funktion von R aufgetragen, so kann festgestellt werden, daß diese Integral-Funktion mit einer Periode $\lambda_0 = 2\pi/\kappa$ oszilliert und sehr schlecht konvergiert. Indem aber der Mittelwert über die Periode λ_0 gebildet wird, können diese Oszillationen herausgefiltert werden, und so kann eine schnelle Konvergenz erreicht werden. In der Praxis wurde diese Konvergenz in den meisten Fällen für ca. $R_0 < 15a$ längst erreicht.

In der Abb.4 wurde für einen einfachen, vom Meeresboden bis zur Meeresoberfläche ragenden Zylinder der Verlauf des Meeresoberflächenintegrals als Funktion von r vor und nach dem Ausfiltern dieser Oszillationen aufgetragen. Es ist ersichtlich, daß das Herausfiltern der Oszillationen ein einfaches aber effizientes Mittel für die Bestimmung

dieses Integrales ist. In der Praxis wurde für diese numerische Integration die Simpsonsche Regel benutzt.

Um eine weitere Bestätigung der Richtigkeit numerischer Ergebnisse zu erzielen, wurde zusätzlich eine halbanalytische Methode für große Radien R entwickelt, die ausführlich im Kapitel 5 beschrieben wird. Beide Methoden lieferten die gleichen Ergebnisse bis auf zwei Dezimalstellen mit vergleichbaren Rechenzeiten. Für eine genauere Rechnung jedoch hat sich die halbanalytische Methode in Bezug auf Rechenzeit-Ersparnis als wesentlich effizienter erwiesen.

4. Numerisches Verfahren zur Ermittlung

der Kräfte 2.Ordnung auf beliebige Rotationskörper

4.1 Prinzipieller Aufbau des Makroelementverfahrens.

Für die numerische Behandlung des Problems 2.Ordnung wurden das Diffraktionspotential 1.Ordnung, seine Ableitungen und das Abstrahlpotential Ψ_j durch die Makroelementemethode numerisch ermittelt. Diese Methode wurde am Lehrgebiet Grundlagen der Meerestechnik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen entwickelt. Eine Zusammenfassung wird hier kurz präsentiert, um die Erfassung der numerischen Entwicklung des Randwertproblems 2.Ordnung zu ermöglichen. Für eine ausführliche Analyse wird auf die Literatur verwiesen ([32], [33], [39], [40], [42], [43]).

Unter Beibehaltung der Koordinatendefinitionen sowie der Annahmen, die im Kapitel 2 getroffen wurden, müssen das lineare Gesamtpotential $\Phi_1 = \Phi_1^I + \Phi_1^S$ die Gleichungen (2-10) und das Diffraktionspotential Φ_1^S zusätzlich die Abstrahlbedingung (2-17) im Unendlichen erfüllen. Bei der Makroelementemethode wird die Körperkontur durch eine Treppenkurve angenähert. Das Strömungsfeld im Bereich der Struktur wird in ringförmige Elemente aufgeteilt, die sogenannten Makroelemente, die durch die Horizontalflächen der Struktur-Stufen und die Meeresoberfläche bzw. den Meeresboden begrenzt werden (Abb. 2). Der äußere Bereich des Wasserkörpers wird durch ein infinites Ringelement beschrieben. Das in dem Kapitel 2 beschriebene Randwertproblem 1.Ordnung (2-10) läßt sich so für jedes Makroelement getrennt aufstellen. Durch diese Diskretisierung werden zwei zusätzliche Randbedingungen verlangt, nämlich die Gleichheit des Druckes und der horizontalen Geschwindigkeit an den vertikalen Rändern zweier benachbarter Elemente.

Die Kontinuitätsgleichung bzw. die Laplacesche Differentialgleichung (2-10.a) für das Potential 1.Ordnung Φ_1 bzw. nach Abkoppelung der Zeitvariable φ_1 ($\Phi_1 = \text{Re}\{\varphi_1 e^{-i\omega t}\}$), wird durch die Methode der "Trennung der Variablen" behandelt. Macht man nämlich den Lösungsansatz:

$$\varphi_1(r, \vartheta, z) = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} \sum_k^{\infty} R_i(r) \Theta_j(\vartheta) Z_k(z), \quad (4-1)$$

so wird das Problem bekanntlich [44] auf die Lösung folgender drei gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zurückgeführt:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + A^2 \Theta = 0 \quad (4-2)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - B^2 Z = 0 \quad (4-3)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(B^2 - \frac{A^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4-4)$$

Unter Berücksichtigung der für jedes Element geltenden Randbedingungen bekommt man aus der allgemeinen Lösung der Glgn. (4-2) bis (4-4) die Ansätze für die Funktion φ_1 für alle drei Elementtypen, wie in [33] hergeleitet wurde. Sie werden hier der Vollständigkeit halber wiedergegeben.

Durch die Wahl einer ankommenden harmonischen Elementarwelle der Form (2-13) (Airysche Welle) wird zuerst der allgemeine Ansatz für das gesamte Potential $\varphi_1 = \varphi_1^I + \varphi_1^S$ getroffen:

$$\varepsilon \varphi_1(r, \vartheta, z) = -i\omega \frac{H}{2} d \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left\{ \frac{1}{d} \psi_m(r, z) \right\} \cos(m\vartheta) \quad (4-5)$$

ε_m ist das Neumannsche Symbol mit $\varepsilon_m = 1$ für $m = 0$ und $\varepsilon_m = 2$ für $m \geq 1$. Die dimensionslosen Funktionen $\frac{1}{d} \psi_m(r, z)$ lauten für die drei Elementtypen:

Elementtyp A. (Infinites Ringelement):

$$\frac{1}{d}\psi_m(r, z) = \left\{ J_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m(ka)} H_m(kr) \right\} \frac{Z_k(z)}{dZ'_k(d)} + \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{m\alpha} \frac{K_m(\alpha r)}{K_m(\alpha a)} Z_{\alpha}(z) \quad (4-6)$$

$$Z_k(z) = N_k^{-1/2} \cosh(kz) \quad (4-7)$$

$$N_k = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sinh(2kd)}{2kd} \right] \quad (4-8)$$

wobei α die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\alpha \tan(\alpha d) + \frac{\omega^2}{g} = 0 \quad (4-9)$$

sind. Die Summe über α in der Glg.(4-6) erstreckt sich über die eine der beiden imaginären Wurzeln $\alpha_0 = -ik$, $k > 0$ (die konjugiert komplexe Wurzel $+ik$ erfüllt nicht die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung) und die unendlich vielen reellen Wurzeln der Glg. (4-9) α_i , ($i = 1, 2, \dots$). Die Einführung des Wertes $\alpha_0 = -ik$ in die Glg. (4-9) führt nämlich zu der Dispersionsgleichung. Weiterhin gilt:

$$Z_{\alpha}(z) = N_{\alpha}^{-1/2} \cos(\alpha z) \quad (4-10)$$

$$N_{\alpha} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin(2\alpha d)}{2\alpha d} \right] \quad (4-11)$$

K_m ist die modifizierte Besselsche Funktion zweiter Art, und $\mathcal{F}_{m\alpha}$ sind die noch unbekanntenen Fourierkoeffizienten.

Elementtyp B:

In dem Definitionsbereich $a_l \leq r \leq a_{l+1}$ und $h_l \leq z \leq d$ eines Elementes l des Typs B wird für die Funktion $\psi_m(r, z)$ folgender Ansatz gewählt:

$$\frac{1}{d} \psi_m(r, z) = \sum_{\alpha_l} \left[R_{m\alpha_l}(r) \mathcal{F}_{m\alpha_l} + R_{m\alpha_l}^*(r) \mathcal{F}_{m\alpha_l}^* \right] Z_{\alpha_l}(z) \quad (4-12)$$

mit

$$R_{m\alpha_l}(r) = \frac{I_m(\alpha_l a_l) K_m(\alpha_l r) - K_m(\alpha_l a_l) I_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l a_l) K_m(\alpha_l a_{l+1}) - I_m(\alpha_l a_{l+1}) K_m(\alpha_l a_l)}, \quad (4-13)$$

$$R_{m\alpha_l}^*(r) = \frac{K_m(\alpha_l a_{l+1}) I_m(\alpha_l r) - I_m(\alpha_l a_{l+1}) K_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l a_l) K_m(\alpha_l a_{l+1}) - I_m(\alpha_l a_{l+1}) K_m(\alpha_l a_l)} \quad (4-14)$$

wobei I_m die modifizierte Besselsche Funktion erster Art und m -ter Ordnung ist und α_l die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_l \tan[\alpha_l(d - h_l)] + \frac{\omega^2}{g} = 0 \quad (4-15)$$

sind. Weiterhin sind die in dem Bereich $z = [h_l, d]$ orthonormalen Funktionen $Z_{\alpha_l}(z)$ wie folgt definiert:

$$Z_{\alpha_l}(z) = N_{\alpha_l}^{-1/2} \cos[\alpha_l(z - h_l)] \quad (4-16)$$

$$N_{\alpha_l} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin[2\alpha_l(d - h_l)]}{2\alpha_l(d - h_l)} \right] \quad (4-17)$$

wobei α_l die reellen Wurzeln der Glg. (4-15) sind.

Für die erste Wurzel $\alpha_{l_0} = -ik_l$ wird die Funktion $Z_{\alpha_l}(z)$ entsprechend modifiziert:

$$Z_{k_l}(z) = N_{k_l}^{-1/2} \cosh[k_l(z - h_l)] \quad (4-18)$$

$$N_{k_l} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sinh[2k_l(d-h_l)]}{2k_l(d-h_l)} \right] \quad (4-19)$$

Elementtyp C:

$$\frac{1}{d} \psi_m(r, z) = \sum_{n_p} \epsilon_{n_p} \left[R_{mn_p}(r) \mathcal{F}_{mn_p} + R_{mn_p}^*(r) \mathcal{F}_{mn_p}^* \right] \cos \left(\frac{n_p \pi}{h_p} z \right) \quad (4-20)$$

($n_p = 0, 1, 2, \dots, \infty$)

mit

$$R_{m0}(r) = \frac{\left(\frac{r}{a_p}\right)^m - \left(\frac{a_p}{r}\right)^m}{\left(\frac{a_{p+1}}{a_p}\right)^m - \left(\frac{a_p}{a_{p+1}}\right)^m}, \quad R_{m0}^*(r) = \frac{\left(\frac{a_{p+1}}{r}\right)^m - \left(\frac{r}{a_{p+1}}\right)^m}{\left(\frac{a_{p+1}}{a_p}\right)^m - \left(\frac{a_p}{a_{p+1}}\right)^m}$$

für $n_p = 0,$ (4-21)

$$R_{mn_p}(r) = \frac{I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_p \right) K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} r \right) - K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_p \right) I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} r \right)}{I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_p \right) K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{p+1} \right) - I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{p+1} \right) K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_p \right)}, \quad (4-22)$$

$$R_{mn_p}^*(r) = \frac{K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{p+1} \right) I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} r \right) - I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{p+1} \right) K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} r \right)}{I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_p \right) K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{p+1} \right) - I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{p+1} \right) K_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_p \right)}$$

für $n_p = 1, 2, 3, \dots, \infty.$ (4-23)

Betrachtet man weiterhin den Sonderfall des mittleren Elementes des Typs B bzw. C mit $a_l \rightarrow 0$, bzw. $a_p \rightarrow 0$, so werden die Grenzwerte für die Funktionen R_m , R_m^* durch Einsetzen der Grenzwerte für die Besselschen Funktionen in die Formeln (4-13), (4-14), bzw. (4-22), (4-23) ermittelt [33]:

$$\lim_{a_l \rightarrow 0} R_{m\alpha_l} = \frac{I_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l a_{l+1})} \quad ; \quad \lim_{a_l \rightarrow 0} R_{m\alpha_l}^* = 0. \quad (4-24)$$

$$\lim_{a_p \rightarrow 0} R_{mn_p} = \frac{I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} r \right)}{I_m \left(\frac{n_p \pi}{h_p} a_{l+1} \right)} \quad ; \quad \lim_{a_p \rightarrow 0} R_{mn_p}^* = 0. \quad (4-25)$$

Die Potentialfunktionen ψ_m , wie sie in den Gln. (4-6), (4-12), (4-20) dargestellt wurden, haben den Vorteil, daß sie an den vertikalen Rändern $r = a_l$ ($l = 1, 2, \dots, L$), $r = a_p$ ($p = 1, 2, \dots, P$) und $r = a$ durch einfache Fourier-Reihen wie folgt ausgedrückt werden können:

$$\frac{1}{d} \psi_m(a, z) = \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{m\alpha} Z_{\alpha}(z), \quad \text{für } 0 \leq z \leq d$$

$$\frac{1}{d} \psi_m(a_l, z) = \sum_{\alpha_l} \mathcal{F}_{m\alpha_l}^* Z_{\alpha_l}(z), \quad \text{für } h_l \leq z \leq d$$

$$\frac{1}{d} \psi_m(a_{l+1}, z) = \sum_{\alpha_l} \mathcal{F}_{m\alpha_l} Z_{\alpha_l}(z), \quad \text{für } 0 \leq z \leq d$$

$$\frac{1}{d} \psi_m(a_p, z) = \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} \mathcal{F}_{mn_p}^* \cos \left(\frac{n_p \pi}{h_p} z \right), \quad \text{für } 0 \leq z \leq h_p$$

$$\frac{1}{d} \psi_m(a_{p+1}, z) = \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} \mathcal{F}_{mn_p} \cos \left(\frac{n_p \pi}{h_p} z \right), \quad \text{für } 0 \leq z \leq h_p \quad (4-26)$$

Die Ansätze der Gln. (4-6), (4-12) und (4-20) erfüllen *a priori* die kinematischen Randbedingungen an den horizontalen Rändern der idealisierten Struktur (Typ B, C) am Meeresboden (Typ A, C) und an der Meeresoberfläche (Typ B, C). Der Ansatz der Glg. (4-6) erfüllt zusätzlich die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung im Unendlichen.

Durch die noch zu erfüllenden Randbedingungen der Gleichheit des Potentials und seiner ersten Ableitungen an den vertikalen Rändern

zweier benachbarter Elemente sowie der kinematischen Randbedingung (2-10.c) an den vertikalen Rändern der idealisierten Struktur, gelangt man mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens (Fehlerminimierung) zur Lösung eines Gleichungssystems mit den Fourier-Koeffizienten $F_{m\alpha}$, $F_{m\alpha_1}$, $F_{m\alpha_1}^*$, F_{mn_p} und $F_{mn_p}^*$ als den einzigen Unbekannten. Wird dieses Gleichungssystem gelöst, so sind das Potential $\varepsilon\varphi_1$ und seine Ableitungen in dem gesamten Flüssigkeitsbereich bekannt.

Für die Ermittlung des mit der Frequenz 2ω oszillierenden Abstrahlungspotentials Ψ bzw. Ψ , das durch das Randwertproblem (2-58) beschrieben wird, kann analog wie bei der Lösung des Randwertproblems 1.Ordnung (2-10) verfahren werden. Es wird lediglich die Randbedingung auf der Körperoberfläche geändert und die Frequenz verdoppelt. Über die Lösung dieses Abstrahlungspotentials durch die Makroelementemethode wurde in früheren Arbeiten ausführlich berichtet [32], [33]. Hier werden nur die für jeden Elementtyp geltenden Ausdrücke von Ψ wiedergegeben:

$$\Psi_j(r, \vartheta, z, t) = \operatorname{Re} \{ \Psi_j(r, \vartheta, z) e^{-2i\omega t} \} \quad (4-27)$$

mit

$$\Psi_1(r, \vartheta, z) = y_1(r, z) \cos \vartheta$$

$$\Psi_3(r, \vartheta, z) = y_3(r, z)$$

$$\Psi_5(r, \vartheta, z) = y_5(r, z) \cos \vartheta$$

Für y_j , ($j = 1, 3, 5$) gilt weiterhin:

Elementtyp A:

$$\frac{1}{\delta_j} y_j(r, z) = \sum_{\xi}^{\infty} F_{m,\xi} \frac{K_m(\xi r)}{K_m(\xi a)} Z_{\xi}(z) \quad (4-28)$$

2^o ordie stromungspotential ψ mit zelfoe methode bepalen!

mit

$$\delta_1 = \delta_3 = d \quad \delta_5 = d^2 \quad (4-28.a)$$

und $m = 0$ für $j = 3$; $m = 1$ für $j = 1, 5$.

Elementtyp B:

elementen boven

$$\frac{1}{\delta_j} y_j(r, z) = g_j(r, z) + \sum_{\xi_i}^{\infty} [R_{m, \xi_i} F_{m, \xi_i} + R_{m, \xi_i}^* F_{m, \xi_i}^*] Z_{\xi_i}(z) \quad (4-29)$$

mit

$$g_1(r, z) = 0.$$

$$g_3(r, z) = \frac{1}{d} \left[(z-d) + \frac{g}{4\omega^2} \right]$$

$$g_5(r, z) = -\frac{r}{d^2} \left[(z-d) + \frac{g}{4\omega^2} \right] \quad (4-29.a)$$

und δ_j bzw. m entsprechend Glg. (4-28.a). ξ_i sind die Wurzeln der Gleichung $\xi_i \tan[\xi_i(d-h_i)] + \frac{4\omega^2}{g} = 0$ mit $\xi_{i0} = -i\kappa_i$ und ξ_{ij} ($j = 1, 2, 3, \dots$) reelle Zahlen.

Elementtyp C:

elementen onder

$$\frac{1}{\delta_j} y_j(r, z) = g_j(r, z) + \sum_{n_p=0}^{\infty} [R_{m, n_p} F_{m, n_p} + R_{m, n_p}^* F_{m, n_p}^*] \cos\left(\frac{n_p \pi}{h_p} z\right) \quad (4-30)$$

mit

$$g_1(r, z) = 0 \quad ; \quad g_3(r, z) = \frac{z^2 - 0.5r^2}{2h_p d} \quad ; \quad g_5(r, z) = \frac{-r(z^2 - 0.25r^2)}{2h_p d^2} \quad (4-30.a)$$

4.2 Kraft und Momentengrößen 2.Ordnung infolge des linearen Potentials

In diesem Abschnitt werden die endgültigen Formeln für die numerische Berechnung der auftretenden doppelharmonischen horizontalen und vertikalen Kräfteanteile $I-IV$ 2.Ordnung sowie des Moments in y -Richtung in tabellarischer Form wiedergegeben. Sie wurden mit Hilfe der durch die Makroelementmethode ermittelten Potentialausdrücke 1.Ordnung aus den Glgn. (2-54) bis (2-57) und (2-62) hergeleitet. Die Ausdrücke der Driftkräfte F_{20j} aus der Glg. (2-52) werden ebenfalls ermittelt.

Die Teile I , III und IV lassen sich durch analytische Ausdrücke in Form von Fourierreihen herleiten. Teil II wird durch die Integration der Druckanteile, die aus dem Quadrat der Geschwindigkeit bei der Bernoullischen Gleichung entstehen, bestimmt. Während für die horizontale Richtung ($j = 1$) des II -ten Teils eine analytische Integration möglich ist, können Ergebnisse in vertikaler Richtung ($j = 3$) erst nach einer numerischen Integration gewonnen werden.

Teil V wird durch eine numerische Integration des Ausdrucks der Meeresoberflächenfunktion über die bis ins Unendliche ragende freie Oberfläche S_F gewonnen. Diese Integration ist relativ aufwendig und empfindlich bezüglich numerischer Ungenauigkeiten. Sie wird daher in einem getrennten Kapitel behandelt.

Mit Hilfe der Potentialausdrücke (4-5), (4-6), (4-12) und (4-20) für die drei Elementtypen A , B und C sowie der generalisierten Richtungskosinusse für die idealisierte Strukturgeometrie (Treppenkurve) in den Glgn. (2-54) bis (2-57) und nach Durchführung der Operationen erhält man für jede Berandung den entsprechenden Kräfteanteil.

Für die Kräfteanteile in horizontaler Richtung sind nur die vertikalen Wandungen, für die Kräfteanteile in vertikaler Richtung sind nur die

horizontalen Wandungen relevant, während sich die Integration der Druckanteile zur Ermittlung des Momentes über alle Wandungen des Körpers erstreckt. Im folgenden werden die Formeln für jeden Anteil je nach Wandungsform tabellarisch angegeben. Durch das Aufsummieren über alle relevanten Berandungen erhält man dann den gesamten entsprechenden Anteil. Für eine detaillierte Herleitung wird auf Anhang IV verwiesen.

4.2.1 Oszillierende Kräfte 2.Ordnung:

a. Horizontale Erregungskraft:

Teil I:

Dieser Anteil wird aus der Integration der Druckanteile, die infolge des ankommenden Potentials 2.Ordnung Φ_2^I entstehen, ermittelt. Da das Potential 2.Ordnung der ankommenden Welle bekannt ist, bekommt man für diesen Kräfteanteil eine analytische Formulierung.

Für eine vertikale Wandung, die sich zwischen den Elementhöhen h_j und h_{j-1} erstreckt, einen Radius a_j aufweist und für die $h_j > h_{j-1}$ gilt, bekommt man unabhängig vom Elementtyp:

$$\frac{F_{21}^I}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{-3i\pi}{2 \sinh^2(kd)} \left(\frac{a_j}{a}\right) J_1(2ka_j) \left[\frac{\sinh(2kh_j) - \sinh(2kh_{j-1})}{\sinh(2kd)} \right] \quad (4-31)$$

Teil II:

Dieser Anteil wird durch die Integration der Druckanteile, die aus dem Quadrat der Geschwindigkeit bei der Bernoullischen Gleichung stammen, hergeleitet (Glg. (2-55)).

II.a Elementtyp A:

An der vertikalen Wandung mit dem maximalen Radius des Behälters $r = a$:

$$\begin{aligned} \frac{F_{21}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} &= -kd \tanh(kd) i\pi \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{m+1,\alpha} \sum_{\beta} \mathcal{F}_{m,\beta} \\ &\times \left[(\alpha d)(\beta d) L_{\alpha\beta}^{s_0} + m(m+1) \left(\frac{d}{a}\right)^2 L_{\alpha\beta}^{cc} \right]. \end{aligned} \quad (4-32)$$

Dabei sind α bzw. β die Wurzeln der Glg. (4-9) mit $\alpha_0 = \beta_0 = -ik$ und

$$L_{\alpha\beta}^{ss} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d} \int_{h_P}^{h_L} \sin(\alpha z) \sin(\beta z) dz$$

$$L_{\alpha\beta}^{cc} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d} \int_{h_P}^{h_L} \cos(\alpha z) \cos(\beta z) dz \quad (4-33)$$

II.b Elementtyp B:

Für eine Wandung mit $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$:

$$\frac{F_{2_l}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} = -kd \tanh(kd) i\pi \left(\frac{a_l}{a}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_l}^* \sum_{\beta_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m, \beta_l}^*$$

$$\times \left[(\alpha_l d)(\beta_l d) L_{\alpha_l \beta_l}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_l}\right)^2 L_{\alpha_l \beta_l}^{cc} \right], \quad (4-34)$$

wobei α_l bzw. β_l die entsprechenden Wurzeln der Glg. (4-15) und

$$L_{\alpha_l \beta_l}^{ss} = \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2} N_{\beta_l}^{-1/2}}{d} \int_{h_P}^{h_{l-1}} \sin[\alpha_l(z - h_l)] \sin[\beta_l(z - h_l)] dz$$

$$L_{\alpha_l \beta_l}^{cc} = \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2} N_{\beta_l}^{-1/2}}{d} \int_{h_P}^{h_{l-1}} \cos[\alpha_l(z - h_l)] \cos[\beta_l(z - h_l)] dz \quad (4-35)$$

sind. Ähnlich bekommt man für eine Wandung $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$:

$$\frac{F_{2_l}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} = -kd \tanh(kd) i\pi \left(\frac{a_l}{a}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha_{l-1}}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_{l-1}} \sum_{\beta_{l-1}}^{\infty} \mathcal{F}_{m, \beta_{l-1}}$$

$$\times \left[(\alpha_{l-1} d)(\beta_{l-1} d) L_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_l}\right)^2 L_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{cc} \right], \quad (4-36)$$

mit

$$L_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}}^{ss} = \frac{N_{\alpha_{l-1}}^{-1/2} N_{\beta_{l-1}}^{-1/2}}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \sin[\alpha_{l-1}(z - h_{l-1})] \sin[(\beta_{l-1}(z - h_{l-1}))] dz$$

$$L_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}}^{cc} = \frac{N_{\alpha_{l-1}}^{-1/2} N_{\beta_{l-1}}^{-1/2}}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \cos[\alpha_{l-1}(z - h_{l-1})] \cos[(\beta_{l-1}(z - h_{l-1}))] dz \quad (4-37)$$

II.c Elementtyp C:

Für eine Wandung mit $r = a_p$ und $h_{p-1} < h_p$ wird ermittelt:

$$\frac{F_{2i}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} = -kd \tanh(kd) i\pi \left(\frac{a_p}{a}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n_p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_p}^* \sum_{j_p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m, j_p}^*$$

$$\times \left[\left(\frac{n_p \pi}{h_p} d\right) \left(\frac{j_p \pi}{h_p} d\right) L_{n_p j_p}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p}\right)^2 L_{n_p j_p}^{cc} \right], \quad (4-38)$$

wobei:

$$L_{n_p j_p}^{ss} = \frac{\epsilon_{n_p} \epsilon_{j_p}}{d} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \sin\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{j_p \pi z}{h_p}\right) dz$$

$$L_{n_p j_p}^{cc} = \frac{\epsilon_{n_p} \epsilon_{j_p}}{d} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{j_p \pi z}{h_p}\right) dz \quad (4-39)$$

während für eine Wandung mit $r = a_p$ und $h_{p-1} > h_p$ gilt:

$$\frac{F_{2i}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} = -kd \tanh(kd) i\pi \left(\frac{a_p}{a}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_{p-1}} \sum_{j_{p-1}=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m, j_{p-1}}$$

$$\times \left[\left(\frac{n_{p-1} \pi d}{h_{p-1}}\right) \left(\frac{j_{p-1} \pi d}{h_{p-1}}\right) L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p}\right)^2 L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{cc} \right] \quad (4-40)$$

mit:

$$L_{n_{p-1}j_{p-1}}^{ss} = \frac{\epsilon_{n_{p-1}} \epsilon_{j_{p-1}}}{d} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \sin\left(\frac{n_{p-1}\pi z}{h_{p-1}}\right) \sin\left(\frac{j_{p-1}\pi z}{h_{p-1}}\right) dz$$

$$L_{n_{p-1}j_{p-1}}^{cc} = \frac{\epsilon_{n_{p-1}} \epsilon_{j_{p-1}}}{d} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \cos\left(\frac{n_{p-1}\pi z}{h_{p-1}}\right) \cos\left(\frac{j_{p-1}\pi z}{h_{p-1}}\right) dz \quad (4-41)$$

Teil III:

Teil III entsteht aus der Integration des Wellenprofils über den zeitlich veränderlichen Anteil der benetzten Oberfläche S_Q^0 und bezieht sich nur auf das Element, das den Wasserlinienradius a_l ($l=1$) enthält.

III Elementtyp B:

$$\frac{F_{2_1}^{III}}{\rho g a (H/2)^2} = -i\pi (kd)^2 \tanh^2(kd) \left(\frac{a_l}{a}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m$$

$$\times \sum_{\alpha_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_l}^* Z_{\alpha_l}(d) \sum_{\beta_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m, \beta_l}^* Z_{\beta_l}(d) \quad (4-42)$$

α_l, β_l sind dabei die Wurzeln der Gleichung (4-15) mit $l=1$. Die Formel (4-42) gilt auch für den Elementtyp A, wenn man die Ausdrücke (α_l, β_l) durch die Wurzeln α, β der Glg. (4-9) und die Fourier-Koeffizienten ($\mathcal{F}_{m+1, \alpha_l}^*, \mathcal{F}_{m, \beta_l}^*$) durch die des äußeren Feldes ($\mathcal{F}_{m+1, \alpha}, \mathcal{F}_{m, \beta}$) ersetzt.

Teil IV:

IV.b Elementtyp B:

Für eine Wandung mit $r = \alpha_r$ und $h_{l-1} < h_l$ gilt:

$$\frac{F_{2_1}^{IV}}{\rho g a (H/2)^2} = -\frac{3(kd)^2 \tanh(kd) i\pi}{\sinh^4(kd)} \left(\frac{a_r}{a}\right) J_1'(2ka_l) \sum_{\xi_{l-1}}^{\infty} F_{1, \xi_{l-1}}$$

$$\times \frac{1}{d} \int_{h_{l-1}}^{h_l} \cosh(2kz) Z_{\xi_{l-1}}(z) dz \quad (4-43)$$

und für $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$

$$\frac{F_{2_1}^{IV}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{3(kd)^2 \tanh(kd) i \pi}{\sinh^4(kd)} \left(\frac{a_l}{a}\right) J_1'(2ka_l) \sum_{\xi_{l-1}}^{\infty} F_{1,\xi_l}^* \times \frac{1}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \cosh(2kz) Z_{\xi_l}(z) dz \quad (4-44)$$

ξ_l sind die Wurzeln der Gleichung

$$\xi_l \tan[\xi_l(d - h_l)] + \frac{4\omega^2}{g} = 0 \quad (4-45)$$

und

$$Z_{\xi_l}(z) = N_{\xi_l}^{-1/2} \cos[\xi_l(d - h_l)] \quad ; \quad N_{\xi_l} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin[2\xi_l(d - h_l)]}{2\xi_l(d - h_l)} \right] \quad (4-46)$$

Die Summe über ξ_l erstreckt sich über die erste imaginäre Wurzel $a_{l0} = -i\kappa_l$ und die unendlich vielen reellen Wurzeln der Glg. (4-45). $F_{1,\xi_{l-1}}$ bzw. F_{1,ξ_l}^* sind die aus der Lösung des doppelharmonischen Abstrahlpotentials Ψ_1 errechneten Fourier-Koeffizienten.

IV.c Elementtyp C:

In analoger Weise bekommt man die horizontalen Kraftanteile IV für eine Wandung $r = a_p$:

a) für $h_p - 1 < h_p$

$$\frac{F_{2_1}^{IV}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{3(kd)^2 \tanh(kd) i \pi}{\sinh^4(kd)} \left(\frac{a_p}{a}\right) J_1'(2ka_p) \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} F_{1,n_p}^* \times \frac{1}{d} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \cosh(2kz) \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) dz \quad (4-47)$$

und

b) für $h_{p-1} > h_p$

$$\begin{aligned} \frac{F_{2_1}^{IV}}{\rho g a (H/2)^2} = & - \frac{3(kd)^2 \tanh(kd) i \pi}{\sinh^4(kd)} \left(\frac{a_p}{a} \right) J_1'(2ka_p) \sum_{n_{p-1}}^{\infty} \epsilon_{n_{p-1}} F_{1, n_{p-1}} \\ & \times \frac{1}{d} \int_{h_p}^{h_{p-1}} \cosh(2kz) \cos\left(\frac{n_{p-1} \pi z}{h_{p-1}}\right) dz \end{aligned} \quad (4-48)$$

Hier sind wiederum $F_{1, n_{p-1}}$, F_{1, n_p}^* die aus der Lösung von Ψ_1 ermittelten Fourier-Koeffizienten.

b. Vertikale Erregungskraft 2.Ordnung:

Teil I:

Durch die Integration über eine Ringfläche mit Radius r : $a_l < r < a_{l+1}$ und eine Elementhöhe $z = h_l$ werden folgende Formeln gewonnen:

I.b Elementtyp B:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a (H/2)^2} = -\frac{3\pi \cosh(2kh_l)}{2 \sinh(2kd) \sinh^2(kd)} \left[\frac{a_{l+1}}{a} J_1(2ka_{l+1}) - \frac{a_l}{a} J_1(2ka_l) \right] \quad (4-49)$$

I.c Elementtyp C:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{3\pi \cosh(2kh_p)}{2 \sinh(2kd) \sinh^2(kd)} \left[\frac{a_{p+1}}{a} J_1(2ka_{p+1}) - \frac{a_p}{a} J_1(2ka_p) \right] \quad (4-50)$$

Teil II:

Die Berechnung dieses Kraftanteiles benötigt die Durchführung einer einfachen numerischen Integration in radialer Richtung.

II.b Elementtyp B:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2s}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} &= -\frac{\omega^2 \pi d^2}{2ga} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-1)^m \sum_{\alpha_l}^{\infty} N_{\alpha_l}^{-1/2} \sum_{\beta_l}^{\infty} N_{\beta_l}^{-1/2} \\ &\times \int_{a_l}^{a_{l+1}} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,\alpha_l}(r) \Lambda_{m,\beta_l}(r) + \Lambda'_{m,\alpha_l}(r) \Lambda'_{m,\beta_l}(r) \right] r dr \end{aligned} \quad (4-51)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Lambda'_{m,\alpha_l}(r) &= \frac{\partial \Lambda_{m,\alpha_l}(r)}{\partial r} \quad , \\ \Lambda_{m,\alpha_l}(r) &= R_{m\alpha_l}(r) \mathcal{F}_{m\alpha_l} + R_{m\alpha_l}^*(r) \mathcal{F}_{m\alpha_l}^* \end{aligned} \quad (4-52)$$

ist. (Siehe auch Glg. (4-13) und (4-14)).

II.c Elementtyp C:

$$\frac{F_{23}^{II}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2 g a} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{m+n_p+j_p} \\ \times \int_{a_p}^{a_p+1} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,n_p}(r) \Lambda_{m,j_p}(r) + \Lambda'_{m,n_p}(r) \Lambda'_{m,j_p}(r) r \right] dr \quad (4-53)$$

entsprechendes gilt für

$$\Lambda'_{m,n_p}(r) = \frac{\partial \Lambda_{m,n_p}(r)}{\partial r}$$

und

$$\Lambda_{m,n_p}(r) = R_{m n_p}(r) \mathcal{F}_{m n_p} + R_{m n_p}^*(r) \mathcal{F}_{m n_p}^* \quad (4-54)$$

wobei die Funktionen $R_{m n_p}(r)$ und $R_{m n_p}^*(r)$ aus den Gleichungen (4-21) bis (4-23) zu entnehmen sind.

Teil III:

Es wird vorausgesetzt, daß die idealisierte Struktur in der Nähe der Wasserlinie eine vertikale Wand aufweist. Da der Richtungscosinus der Integrationsfläche S'_Q Null wird, wird der Kraftanteil *III* ebenfalls Null.

Teil IV:

IV.b Elementtyp B:

$$\begin{aligned} \frac{F_{23}^{IV}}{\rho g a (H/2)^2} &= \frac{6\pi \sinh(2kh_l)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{d}{a}\right) \left[P_l + \sum_{\xi_l}^{\infty} N_{\xi_l}^{-1/2} \left(\frac{k^2}{4k^2 + \xi_l^2} \right) \right. \\ &\times \left\{ \left[A_{0,\xi_l}^* J_0(2ka_{l+1}) - D_{0,\xi_l}^* J_0(2ka_l) - 2ka_l J_1(2ka_l) \right] F_{0,\xi_l}^* \right. \\ &\left. \left. + \left[A_{0,\xi_l} J_0(2ka_{l+1}) - D_{0,\xi_l} J_0(2ka_l) + 2ka_{l+1} J_1(2ka_{l+1}) \right] F_{0,\xi_l} \right\} \right] \quad (4-55) \end{aligned}$$

mit

$$P_l = \frac{1}{2} \left(\frac{h_l}{d} + \frac{g}{4\omega^2 d} - 1 \right) \left[ka_{l+1} J_1(2ka_{l+1}) - ka_l J_1(2ka_l) \right] \quad (4-56)$$

und

$$A_{m,\xi_l} = a_{l+1} \frac{\partial R_{m,\xi_l}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_{l+1}} ; \quad A_{m,\xi_l}^* = a_{l+1} \frac{\partial R_{m,\xi_l}^*(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_{l+1}} \quad (4-57)$$

$$D_{m,\xi_l} = a_l \frac{\partial R_{m,\xi_l}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_l} ; \quad D_{m,\xi_l}^* = a_l \frac{\partial R_{m,\xi_l}^*(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_l} \quad (4-58)$$

Die Eigenwerte ξ_l sind der Gleichung (4-45) zu entnehmen. Weiterhin sind F_{0,ξ_l} , F_{0,ξ_l}^* die Fourier-Koeffizienten, die aus der Lösung des doppelharmonischen Abstrahlpotentials Ψ_3 gewonnen werden.

IV.c Elementtyp C:

$$\frac{F_{23}^{JV}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{-6\pi \sinh(2kh_p)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{d}{a}\right) \left[P_p + \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} (-1)^{n_p} \left(\frac{k^2}{4k^2 + \left(\frac{n_p\pi}{h_p}\right)^2} \right) \right. \\ \times \left\{ \left[A_{0,n_p}^* J_0(2ka_{p+1}) - D_{0,n_p}^* J_0(2ka_p) - 2ka_p J_1(2ka_p) \right] F_{0,n_p}^* \right. \\ \left. + \left[A_{0,n_p} J_0(2ka_{p+1}) - D_{0,n_p} J_0(2ka_p) + 2ka_{p+1} J_1(2ka_{p+1}) \right] F_{0,n_p} \right\} \quad (4-59)$$

mit

$$P_p = \frac{a_{p+1}[2(kh_p)^2 - (ka_{p+1})^2 + 1]}{8h_p kd} J_1(2ka_{p+1}) - \frac{a_p[2(kh_p)^2 - (ka_p)^2 + 1]}{8h_p kd} J_1(2ka_p) \\ = \frac{a_{p+1}^2 J_0(2ka_{p+1}) - a_p^2 J_0(2ka_p)}{8h_p d} \quad (4-60)$$

und

$$A_{m,n_p} = a_{p+1} \left. \frac{\partial R_{m,n_p}(r)}{\partial r} \right|_{r=a_{p+1}} \quad ; \quad A_{m,n_p}^* = a_{p+1} \left. \frac{\partial R_{m,n_p}^*(r)}{\partial r} \right|_{r=a_{p+1}} \quad (4-61)$$

$$D_{m,n_p} = a_p \left. \frac{\partial R_{m,n_p}(r)}{\partial r} \right|_{r=a_p} \quad ; \quad D_{m,n_p}^* = a_p \left. \frac{\partial R_{m,n_p}^*(r)}{\partial r} \right|_{r=a_p} \quad (4-62)$$

4.2.2 Oszillierende Momente 2.Ordnung:

Teil I:

I.a Elementtyp A:

Für $r = a$ gilt:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{-3i\pi J_1(2ka)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{d}{a}\right) \frac{1}{4kd} \left[2k(h_L - e) \sinh(2kh_L) - 2k(h_P - e) \sinh(2kh_P) - \cosh(2kh_L) + \cosh(2kh_P) \right] \quad (4-63)$$

I.b Elementtyp B:

Für $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$ oder $h_l < h_{l-1}$ folgt:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{-3i\pi J_1(2ka_l)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{a_l d}{a^2}\right) \frac{1}{4kd} \left[2k(h_{l-1} - e) \sinh(2kh_{l-1}) - 2k(h_l - e) \sinh(2kh_l) - \cosh(2kh_{l-1}) + \cosh(2kh_l) \right] \quad (4-64)$$

Für $a_l \leq r \leq a_{l+1}$ und $z = h_l$ gilt:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{3i\pi \cosh(2kh_l)}{2 \sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left[\left(\frac{a_{l+1}}{a}\right)^2 J_2(2ka_{l+1}) - \left(\frac{a_l}{a}\right)^2 J_2(2ka_l) \right] \quad (4-65)$$

I.c Elementtyp C:

Für $r = a_p$ und $h_{p-1} < h_p$ oder $h_p < h_{p-1}$ bekommt man:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{-3i\pi J_1(2ka_p)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{a_p d}{a^2}\right) \frac{1}{4kd} \left[2k(h_p - e) \sinh(2kh_p) - 2k(h_{p-1} - e) \sinh(2kh_{p-1}) - \cosh(2kh_p) + \cosh(2kh_{p-1}) \right] \quad (4-66)$$

Für $a_p \leq r \leq a_{p+1}$ und $z = h_p$ gilt:

$$\frac{F_{2s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{3i\pi \cosh(2kh_p)}{2 \sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left[\left(\frac{a_{p+1}}{a} \right)^2 J_2(2ka_{p+1}) - \left(\frac{a_l}{a} \right)^2 J_2(2ka_p) \right] \quad (4-67)$$

Teil II:

II.a Elementtyp A:

Für $r = \alpha$ und $h_p \leq z \leq h_L$ wird ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2s}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = & -i\pi kd \tanh(kd) \left(\frac{d}{a} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1,\alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \mathcal{F}_{m,\beta} \\ & \times \left[(\alpha d)(\beta d) \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a} \right)^2 \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{cc} \right] \end{aligned} \quad (4-68)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{ss} &= \frac{N_{\alpha}^{-1/2} N_{\beta}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_p}^{h_L} (z-e) \sin(\alpha z) \sin(\beta z) dz \\ \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{cc} &= \frac{N_{\alpha}^{-1/2} N_{\beta}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_p}^{h_L} (z-e) \cos(\alpha z) \cos(\beta z) dz \end{aligned} \quad (4-69)$$

II.b Elementtyp B:

Für $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$ wird ebenfalls ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2s}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = & -i\pi kd \tanh(kd) \left(\frac{a_l d}{a^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1,\alpha_l}^* \sum_{\beta_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m,\beta_l}^* \\ & \times \left[(\alpha_l d)(\beta_l d) \mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_l} \right)^2 \mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{cc} \right] \end{aligned} \quad (4-70)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{ss} &= \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2} N_{\beta_l}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e) \sin[\alpha_l(z-h_l)] \sin[\beta_l(z-h_l)] dz \\ \mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{cc} &= \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2} N_{\beta_l}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e) \cos[\alpha_l(z-h_l)] \cos[\beta_l(z-h_l)] dz\end{aligned}\quad (4-71)$$

Für $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$ folgt:

$$\begin{aligned}\frac{F_{2s}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= -i\pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_l d}{a^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha_{l-1}}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_{l-1}} \sum_{\beta_{l-1}}^{\infty} \mathcal{F}_{m, \beta_{l-1}} \\ &\times \left[(\alpha_{l-1} d)(\beta_{l-1} d) \mathcal{L}_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_l}\right)^2 \mathcal{L}_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{cc} \right]\end{aligned}\quad (4-72)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{ss} &= \frac{N_{\alpha_{l-1}}^{-1/2} N_{\beta_{l-1}}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e) \sin[\alpha_{l-1}(z-h_{l-1})] \sin[\beta_{l-1}(z-h_{l-1})] dz \\ \mathcal{L}_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{cc} &= \frac{N_{\alpha_{l-1}}^{-1/2} N_{\beta_{l-1}}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e) \cos[\alpha_{l-1}(z-h_{l-1})] \cos[\beta_{l-1}(z-h_{l-1})] dz\end{aligned}\quad (4-73)$$

Für eine horizontale Wandung mit $z = h_l$ und $a_l \leq r \leq a_{l+1}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F_{2s}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= i\pi k d \tanh(kd) \left(\frac{d}{a'}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha_l}^{\infty} N_{\alpha_l}^{-1/2} \sum_{\beta_l}^{\infty} N_{\beta_l}^{-1/2} \\ &\times \frac{1}{d} \int_{a_l}^{a_{l+1}} [m(m+1) \Lambda_{m+1, \alpha_l}(r) \Lambda_{m, \beta_l}(r) + r^2 \Lambda'_{m+1, \alpha_l}(r) \Lambda'_{m, \beta_l}(r)] dr\end{aligned}\quad (4-74)$$

II.c Elementtyp C:

Für $r = a_p$ und $h_{p-1} < h_p$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2_s}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= -i\pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_p d}{a^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n_p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_p}^* \sum_{j_p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m, j_p}^* \\ &\times \left[\left(\frac{n_p \pi}{h_p} d \right) \left(\frac{j_p \pi}{h_p} d \right) \mathcal{L}_{n_p, j_p}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p} \right)^2 \mathcal{L}_{n_p, j_p}^{cc} \right] \quad (4-75) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n_p, j_p}^{ss} &= \frac{\epsilon_{n_p} \epsilon_{j_p}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e) \sin\left(\frac{n_p \pi}{h_p} z\right) \sin\left(\frac{j_p \pi}{h_p} z\right) dz \\ \mathcal{L}_{n_p, j_p}^{cc} &= \frac{\epsilon_{n_p} \epsilon_{j_p}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e) \cos\left(\frac{n_p \pi}{h_p} z\right) \cos\left(\frac{j_p \pi}{h_p} z\right) dz \quad (4-76) \end{aligned}$$

Für $r = a_p$ und $h_{l-1} > h_l$ wird ähnlich ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2_k}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= -i\pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_p d}{a^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_{p-1}} \sum_{j_{p-1}=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m, j_{p-1}} \\ &\times \left[\left(\frac{n_{p-1} \pi}{h_{p-1}} d \right) \left(\frac{j_{p-1} \pi}{h_{p-1}} d \right) \mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p} \right)^2 \mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}^{cc} \right] \quad (4-77) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}^{ss} &= \frac{\epsilon_{n_{p-1}} \epsilon_{j_{p-1}}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e) \sin\left(\frac{n_{p-1} \pi}{h_{p-1}} z\right) \sin\left(\frac{j_{p-1} \pi}{h_{p-1}} z\right) dz \\ \mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}^{cc} &= \frac{\epsilon_{n_{p-1}} \epsilon_{j_{p-1}}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e) \cos\left(\frac{n_{p-1} \pi}{h_{p-1}} z\right) \cos\left(\frac{j_{p-1} \pi}{h_{p-1}} z\right) dz \quad (4-78) \end{aligned}$$

Für eine horizontale Wandung mit $z = h_p$ und $a_p \leq r \leq a_{p+1}$ wird:

$$\frac{F_{2a}^{II}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = -i\pi k d \tanh(kd) \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} (-1)^{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{j_p} \\ \times \frac{1}{d} \int_{a_p}^{a_p+1} \left[m(m+1) \Lambda_{m+1, n_p}(r) \Lambda_{m, j_p}(r) + r^2 \Lambda'_{m+1, n_p}(r) \Lambda'_{m, j_p}(r) \right] dr \quad (4-79)$$

Teil III:

Dieser Anteil entsteht durch die Integration des Druckes über die zeitlich veränderliche Körperoberfläche S'_Q . Er bezieht sich nur auf das Element mit $l = 1$

$$\frac{F_{2a}^{III}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = -i\pi (kd)^2 \tanh^2(kd) \frac{\alpha_l (d-e)}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\alpha_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_l}^* Z_{\alpha_l}(d) \\ \times \sum_{\beta_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m, \beta_l}^* Z_{\beta_l}(d) = \left(\frac{d-e}{a}\right) \frac{F_{2a}^{III}}{\rho g a (H/2)^2} \quad (4-80)$$

Teil IV:

IV.a Elementtyp A:

Für $r = a$ gilt:

$$\frac{F_{2a}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{6i\pi (kd)^2}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{d}{a}\right) J_1'(2ka) \\ \times \sum_{\xi}^{\infty} F_{1, \xi} \frac{1}{d} \int_{h_p}^{h_L} \cosh(2kz) Z_{\xi}(z) dz \quad (4-81)$$

wobei ξ die Wurzeln der Gleichung

$$\xi \tan(\xi d) + \frac{4\omega^2}{g} = 0$$

sind, mit der imaginären Wurzel $\xi_0 = -i\kappa$, und den unendlich vielen reellen Wurzeln ξ_j ($j = 1, 2, 3, \dots$).

IV.b Elementtyp B:

Für $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$ gilt:

$$\frac{F_{2_5}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{6i\pi(kd)^2 J_1'(2ka_l)}{\sinh^2(kd)\sinh(2kd)} \frac{a_l d}{a^2} \left\{ \frac{a_l}{d^3} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \left[\left(d - \frac{g}{4\omega^2} \right) - z \right] \cosh(2kz) dz \right. \\ \left. + \sum_{\xi_l}^{\infty} F_{1,\xi_l}^* \frac{1}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \cosh(2kz) Z_{\xi_l}(z) dz \right\} \quad (4-82)$$

Für $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$ folgt:

$$\frac{F_{2_5}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = - \frac{6i\pi(kd)^2 J_1'(2ka_l)}{\sinh^2(kd)\sinh(2kd)} \frac{a_l d}{a^2} \left\{ \frac{a_l}{d^3} \int_{h_{l-1}}^{h_l} \left[\left(d - \frac{g}{4\omega^2} \right) - z \right] \cosh(2kz) dz \right. \\ \left. + \sum_{\xi_{l-1}}^{\infty} F_{1,\xi_{l-1}} \frac{1}{d} \int_{h_{l-1}}^{h_l} \cosh(2kz) Z_{\xi_{l-1}}(z) dz \right\} \quad (4-83)$$

Für eine horizontale Wandung mit $z = h_l$ und $a_l \leq r \leq a_{l+1}$ wird folgende Formel ermittelt:

$$\frac{F_{2_5}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{3i\pi \sinh(2kh_l)}{2 \sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{d}{a} \right)^2 \left[P_l + \sum_{\xi_l}^{\infty} N_{\xi_l}^{-1/2} \left(\frac{4k^2}{4k^2 + \xi_l^2} \right) \right. \\ \times \left\{ [J_1(2ka_{l+1})A_{1,\xi_l}^* - J_1(2ka_l)(D_{1,\xi_l}^* - 1) - 2ka_l J_2(ka_l)] F_{1,\xi_l}^* \right. \\ \left. + [J_1(2ka_{l+1})(A_{1,\xi_l} - 1) - J_1(2ka_l)D_{1,\xi_l} + 2ka_{l+1} J_2(2ka_{l+1})] F_{1,\xi_l} \right\} \left. \right] \quad (4-84)$$

wobei

$$P_l = \frac{-2}{kd} \left(\frac{h_l}{d} + \frac{g}{4\omega^2 d} - 1 \right) \left[(ka_{l+1})^2 J_2(2ka_{l+1}) - (ka_l)^2 J_2(2ka_l) \right] \quad (4-85)$$

ist.

IV.c Elementtyp C:

Für $r = a_p$ und $h_{p-1} < h_p$ wird analog ermittelt:

$$\frac{F_{2s}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \frac{6i\pi (kd)^2 J_1'(2ka_p)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \frac{a_p d}{a^2} \left\{ \frac{a_p}{2h_p d^3} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \left(\frac{1}{4} a_p^2 - z^2 \right) \cosh(2kz) dz \right. \\ \left. + \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} F_{1,n_p}^* \frac{1}{d} \int_{h_{p-1}}^{h_p} \cosh(2kz) \cos\left(\frac{n_p \pi}{h_p} z\right) dz \right\} \quad (4-86)$$

Für $r = a_p$ und $h_{p-1} > h_l$ folgt:

$$\frac{F_{2s}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = - \frac{6i\pi (kd)^2 J_1'(2ka_p)}{\sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \frac{a_p d}{a^2} \left\{ \frac{a_p}{2h_{p-1} d^3} \int_{h_p}^{h_{p-1}} \left(\frac{1}{4} a_p^2 - z^2 \right) \cosh(2kz) dz \right. \\ \left. + \sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} \epsilon_{n_{p-1}} F_{1,n_{p-1}} \frac{1}{d} \int_{h_p}^{h_{p-1}} \cosh(2kz) \cos\left(\frac{n_{p-1} \pi}{h_{p-1}} z\right) dz \right\} \quad (4-87)$$

Für $z = h_l$ und $a_p \leq r \leq a_{p+1}$ kann man errechnen:

$$\frac{F_{2s}^{IV}}{\rho g a^2 (H/2)^2} = - \frac{3i\pi \sinh(2kh_p)}{2 \sinh^2(kd) \sinh(2kd)} \left(\frac{d}{a} \right)^2 \left[P_p + \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} (-1)^{n_p} \left(\frac{4k^2}{4k^2 + \left(\frac{n_p \pi}{h_p}\right)^2} \right) \right. \\ \times \left\{ [J_1(2ka_{p+1}) A_{1,n_p}^* - J_1(2ka_p) (D_{1,n_p}^* - 1) - 2ka_p J_2(ka_p)] F_{1,n_p}^* \right. \\ \left. + [J_1(2ka_{p+1}) (A_{1,n_p} - 1) - J_1(2ka_p) D_{1,n_p} + 2ka_{p+1} J_2(2ka_{p+1})] F_{1,n_p} \right\} \left. \right] \quad (4-88)$$

wobei

$$P_p = \frac{a_{p+1}^2 J_2(2ka_{p+1})}{4kh_p d^2} [(ka_{p+1})^2 - 4(kh_p)^2 - 2] - \frac{a_p^2 J_2(2ka_p)}{4kh_p d^2} [(ka_p)^2 - 4(kh_p)^2 - 2] \\ - \frac{a_{p+1}^3 J_1(2ka_{p+1}) - a_p^3 J_1(2ka_p)}{4h_p d^2} \quad (4-89)$$

ist. Die Koeffizienten A_{1,n_p} , A_{1,n_p}^* , D_{1,n_p} und D_{1,n_p}^* werden durch die Glgn. (4-61) und (4-62) definiert.

4.3 Zeitunabhängige Kräfte 2.Ordnung:

Die auf einen festgehaltenen Körper zeitunabhängig (statisch) wirkende Kraft infolge einer monochromatischen Welle (hier eine Stokesche Welle 2.Ordnung) ist als die mittlere Driftkraft (mean drift-force) bekannt. Nach Einsetzen der für ihren Definitionsbereich geltenden Potentialfunktionen φ_1 der Glg. (4-5) bzw. (4-6), (4-12) und (4-20) in den Ausdruck (2-52) werden diese Kräfte relativ einfach ermittelt.

Setzt man in der Glg. (2-52) den entsprechenden Richtungskosinus in einer der Richtungen $j = 1, 3$ oder 5 sowie das φ_1 für den geeigneten Elementtyp ein und führt man die Integrationen durch, so bekommt man die Driftkraft für $j = 1, 3$ bzw. das Moment ($j=5$) in Form von programmierfähigen Summenreihen als Funktion der als bekannt vorausgesetzten Fourier-Koeffizienten.

Im folgenden werden die Formeln für die Errechnung dieser Kräfte in allen drei Richtungen und für jeden Elementtyp bzw. für jede Wandung der idealisierten Struktur wiedergegeben. Die gesamte Driftkraft in einer Richtung bekommt man dann durch das Aufsummieren über die gesamte Anzahl der in Frage kommenden Stufen (Wandungen). Sämtliche einfach zu rechnenden trigonometrischen Integrationen wurden aus Platzgründen nicht aufgeführt.

4.3.1 Driftkräfte auf einen festgehaltenen Körper:

Horizontale Driftkraft:

Für die zeitunabhängige Kraft 2.Ordnung sind nur die vertikalen Wandungen relevant. Weiterhin gilt für den Richtungskosinus an den Stufen der idealisierten Struktur: $\eta_1 = \cos \vartheta$ für $(h_{l-1} > h_l ; r = a_l)$ und $(h_{p-1} < h_l ; r = a_p)$ bzw. $\eta_1 = -\cos \vartheta$ für $(h_{l-1} < h_l ; r = a_l)$ und $(h_{p-1} > h_l ; r = a_p)$.

a. Elementtyp A:

$$\frac{F_{20_1}^I}{\rho g a (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta}} \right. \\ \left. \times \left[(\alpha d)(\beta d) L_{\alpha\beta}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a} \right)^2 L_{\alpha\beta}^{cc} \right] \right\} \quad (4-90)$$

$L_{\alpha\beta}^{ss}$, $L_{\alpha\beta}^{cc}$ sind in der Glg. (4-33) gegeben. $\overline{\mathcal{F}}$ ist die konjugiert Komplexe von \mathcal{F} .

b. Elementtyp B:

In analoger Weise gilt für $h_{l-1} > h_l$; $r = a_l$:

$$\frac{F_{20_1}^I}{\rho g a (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_l}{a} \right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_l}^* \sum_{\beta_l}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta_l}^*} \right. \\ \left. \times \left[(\alpha_l d)(\beta_l d) L_{\alpha_l \beta_l}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_l} \right)^2 L_{\alpha_l \beta_l}^{cc} \right] \right\} \quad (4-91)$$

mit $L_{\alpha_l \beta_l}^{cc}$, $L_{\alpha_l \beta_l}^{ss}$ nach Gleichung (4-35) und für $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$:

$$\frac{F_{20_1}^I}{\rho g a (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_l}{a} \right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_{l-1}}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_{l-1}} \sum_{\beta_{l-1}}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta_{l-1}}} \right. \\ \left. \times \left[(\alpha_{l-1} d)(\beta_{l-1} d) L_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_l} \right)^2 L_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{cc} \right] \right\} \quad (4-92)$$

mit $L_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{cc}$, $L_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{ss}$ nach Gleichung (4-37).

Das Linienintegral der Glg. (2-52) ergibt einen zusätzlichen Kraftanteil in horizontaler Richtung, der bei den Formeln (4-91) und (4-92)

nicht berücksichtigt wurde. Die Integration wird über den Wasserlinienradius $a_l = a_1$ durchgeführt.

$$\frac{F_{20_1}^F}{\rho g a (H/2)^2} = \pi (kd)^2 \tanh^2(kd) \left(\frac{a_1}{a}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_1}^* Z_{\alpha_1}(d) \sum_{\beta_1}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta_1}^*} Z_{\beta_1}(d) \right\} \quad (4-93)$$

c. **Elementtyp C:** Für $r = a_p$ und $h_{p-1} < h_p$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{20_1}^I}{\rho g a (H/2)^2} &= \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_p}{a}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_p}^* \sum_{j_p=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, j_p}^*} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{n_p \pi}{h_p} d\right) \left(\frac{j_p \pi}{h_p} d\right) L_{n_p j_p}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p}\right)^2 L_{n_p j_p}^{cc} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4-94)$$

mit $L_{n_p j_p}^{ss}$, $L_{n_p j_p}^{cc}$ nach Glg. (4-39),

bzw. für $r = a_p$ und $h_{p-1} > h_p$:

$$\begin{aligned} \frac{F_{20_1}^I}{\rho g a (H/2)^2} &= \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_p}{a}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_{p-1}} \sum_{j_{p-1}=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, j_{p-1}}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{n_{p-1} \pi d}{h_{p-1}}\right) \left(\frac{j_{p-1} \pi d}{h_{p-1}}\right) L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p}\right)^2 L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{cc} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4-95)$$

mit $L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{ss}$ und $L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{cc}$ nach Glg. (4-41).

Vertikale Driftkraft:

Hierbei bekommt man ähnliche Ausdrücke wie beim Teil II der doppelharmonischen Kräfte. Sie werden hier vollständigshalber wiedergegeben:

b. Elementtyp B:

$$\frac{F_{20_3}^I}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2 g a} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sum_{\alpha_1}^{\infty} N_{\alpha_1}^{-1/2} \sum_{\beta_1}^{\infty} N_{\beta_1}^{-1/2} \\ \times \int_{a_1}^{a_1+1} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,\alpha_1}(r) \overline{\Lambda_{m,\beta_1}(r)} + \Lambda'_{m,\alpha_1}(r) \overline{\Lambda'_{m,\beta_1}(r)} r \right] dr \quad (4-96)$$

Λ_{m,α_1} , und Λ_{m,β_1} sind durch die Glg. (4-54) gegeben.

c. Elementtyp C:

Für $r=a_p$ und $a_p \leq r \leq a_{p+1}$ kann man folgendes herleiten:

$$\frac{F_{20_3}^I}{\rho g a (H/2)^2} = -\frac{\omega^2 \pi d^2}{2 g a} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{n_p+j_p} \\ \times \int_{a_p}^{a_{p+1}} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,n_p}(r) \overline{\Lambda_{m,j_p}(r)} + \Lambda'_{m,n_p}(r) \overline{\Lambda'_{m,j_p}(r)} r \right] dr \quad (4-97)$$

Für $\Lambda_{m,n_p}(r)$ siehe Glg. (4-54). Weiterhin muß für die Driftkraft in vertikaler Richtung ($j=3$) der letzte Term der Glg. (2-52) berücksichtigt werden, während das Linienintegral derselben Gleichung keinen Beitrag liefert.

4.3.2 Driftmomente:

Durch die Integration der Geschwindigkeitsquadrate aus der Bernoullischen Gleichung wird aus der Glg. (2-52) für $j=5$ das Driftmoment hergeleitet.

a. Elementtyp A: An der Wandung mit $r=a$ und $h_p < z < h_L$ und $\eta_5 = (z-e) \cos \vartheta$ bekommt man:

$$\frac{F_{20s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{d}{a}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta}} \right. \\ \left. \times \left[(\alpha d)(\beta d) \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a}\right)^2 \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{cc} \right] \right\} \quad (4-98)$$

mit

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}^{ss} = \frac{N_{\alpha}^{-1/2} N_{\beta}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_p}^{h_L} (z-e) \sin(\alpha z) \sin(\beta z) dz \\ \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{cc} = \frac{N_{\alpha}^{-1/2} N_{\beta}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_p}^{h_L} (z-e) \cos(\alpha z) \cos(\beta z) dz \quad (4-99)$$

b. Elementtyp B:

Das Teil-Driftmoment an der Wandung mit $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$ wird wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{F_{20s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \pi k \bar{d} \tanh(kd) \left(\frac{a_l \bar{d}}{a^2}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_l}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_l}^* \sum_{\beta_l}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta_l}^*} \right. \\ \left. \times \left[(\alpha_l \bar{d})(\beta_l \bar{d}) \mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{\bar{d}}{a_l}\right)^2 \mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{cc} \right] \right\} \quad (4-100)$$

$\mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{ss}$ und $\mathcal{L}_{\alpha_l \beta_l}^{cc}$ sind aus der Glg. (4-71) zu entnehmen.

Ähnlich folgt für einen Rand mit $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$:

$$\frac{F_{20s}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_l d}{a^2}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_{l-1}}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_{l-1}} \sum_{\beta_{l-1}}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta_{l-1}}} \right. \\ \left. \times \left[(\alpha_{l-1} d)(\beta_{l-1} d) \mathcal{L}_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_b}\right)^2 \mathcal{L}_{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}^{cc} \right] \right\} \quad (4-101)$$

wobei die $\mathcal{L}_{\alpha_l, \beta_l}$ durch die Glg. (4-73) definiert werden.

Weiterhin bekommt man für eine Wandung mit $z = h_l$ und $a_l \leq r \leq a_{l+1}$:

$$\frac{F_{20_p}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = -\pi k d \tanh(kd) \left(\frac{d}{a}\right)^2 \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_l}^{\infty} N_{\alpha_l}^{-1/2} \sum_{\beta_l}^{\infty} N_{\beta_l}^{-1/2} \right. \\ \left. \times \frac{1}{d} \int_{a_l}^{a_{l+1}} \left[m(m+1) \Lambda_{m+1, \alpha_l}(r) \overline{\Lambda_{m, \beta_l}(r)} + r^2 \Lambda'_{m+1, \alpha_l}(r) \overline{\Lambda'_{m, \beta_l}(r)} \right] dr \right\} \quad (4-102)$$

c. Elementtyp C:

Für einen Rand mit $r = a_p$ und $h_{p-1} < h_p$ folgt:

$$\frac{F_{20_p}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_p d}{a^2}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_p}^* \sum_{j_p=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, j_p}^*} \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{n_p \pi}{h_p} d\right) \left(\frac{j_p \pi}{h_p} d\right) \mathcal{L}_{n_p, j_p}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p}\right)^2 \mathcal{L}_{n_p, j_p}^{cc} \right] \right\} \quad (4-103)$$

\mathcal{L}_{n_p, j_p} sind einfache Integrale, die durch die Gleichung (4-76) definiert werden.

Weiterhin gilt für den Rand mit $r = a_p$ und $h_{p-1} > h_p$:

$$\frac{F_{20_p}^I}{\rho g a^2 (H/2)^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_p d}{a^2}\right) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, n_{p-1}} \sum_{j_{p-1}=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, j_{p-1}}} \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{n_{p-1} \pi}{h_{p-1}} d\right) \left(\frac{j_{p-1} \pi}{h_{p-1}} d\right) \mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}^{ss} + m(m+1) \left(\frac{d}{a_p}\right)^2 \mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}^{cc} \right] \right\} \quad (4-104)$$

Die Integrale $\mathcal{L}_{n_{p-1}, j_{p-1}}$ sind der Glg. (4-78) zu entnehmen.

Schließlich wird das Driftmoment aus den Quadraten der Geschwindigkeit bei der Bernoullischen Gleichung an einer horizontalen Wandung mit $z = h_p$ und $a_p \leq r \leq a_{p+1}$ durch folgende Formel errechnet:

$$\begin{aligned} \frac{F_{20_s}^J}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{d}{a}\right)^2 \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} (-1)^{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{j_p} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{d} \int_{a_p}^{a_{p+1}} \left[m(m+1) \Lambda_{m+1, n_p}(r) \overline{\Lambda_{m, j_p}(r)} + r^2 \Lambda'_{m+1, n_p}(r) \overline{\Lambda'_{m, j_p}(r)} \right] dr \right\} \end{aligned} \quad (4-105)$$

Das Linienintegral der Glg. (2-52) ergibt einen Driftmomentenanteil:

$$\begin{aligned} \frac{F_{20_s}^{\Gamma}}{\rho g a^2 (H/2)^2} &= \pi (kd)^2 \tanh^2(kd) \frac{a_1(d-e)}{a^2} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1}^{\infty} \mathcal{F}_{m+1, \alpha_1}^* Z_{\alpha_1}(d) \sum_{\beta_1}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_{m, \beta_1}^*} Z_{\beta_1}(d) \right\} \\ &= \frac{(d-e)}{a} \frac{F_{20_s}^{\Gamma}}{\rho g a (H/2)^2} \end{aligned} \quad (4-106)$$

5. Ermittlung des Meeresoberflächenintegrals und die Fernfeld-Lösung.

Der in der Gleichung (2-62) auftretende V . Kräfteanteil in Richtung j erfordert den Ausdruck der Meeresoberflächenfunktion β_2 sowie des Abstrahlpotentials Ψ_j .

$$F_{2j}^V = 2i\omega\epsilon^2 \frac{\rho}{g} \iint_{S_F} \beta_2 \Psi_j dS \quad (5-1)$$

Die Funktion β_2 wird aus den Gln. (2-20.a) bzw. (2-22) hergeleitet, während das doppelharmonische Abstrahlpotential Ψ_j durch die Gleichungen (4-27) bis (4-30) gegeben wird. Die Ausdrücke des Potentials für das Diffraktionsproblem, die durch die ME-Methode gewonnen wurden, liegen für den inneren Bereich bzw. für $r < a$ als Gesamtpotentiale φ_1 vor. Für $r > a$ bzw. im äußeren Bereich sind solche Ausdrücke als Potential der ankommenden Welle φ_1^i bzw. der Diffraktionswelle φ_1^s getrennt vorhanden. Es ist daher zweckmäßig, bei der Gleichung (5-1) die Funktion β_2 im inneren Bereich durch den Ausdruck der Glg. (2-20.a) und im äußeren Bereich durch den Ausdruck (2-22) zu ersetzen. Die beiden Bereiche werden im folgenden getrennt behandelt.

5.1 Berechnung im Nahbereich durch finite Makroelemente.

Der innere Bereich der Wellenoberfläche wurde als die Fläche für $z = d$ und $r \leq a$ definiert, wobei a der maximale Radius des Behälters ist. Das Potential 1. Ordnung φ_1 wird in diesem Bereich durch die Makroelemente des Typs B im Definitionsbereich jedes Elementes l als Gesamtpotential $\varphi_1^l(r, \vartheta, z)e^{-i\omega t}$ angesprochen. Zuerst werden die in der Gl. (2-20.a) auftretenden Potentialausdrücke in der Form von Reihen über m zugrundegelegt.

$$\varphi_2^l = -\frac{3\omega \cosh(2kd)}{8k^2 \sinh^4(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(2kr) \cos(m\vartheta) \quad (5-2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2^l}{\partial z} \right|_{z=d} = -\frac{3i\omega \sinh(2kd)}{4k \sinh^4(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(2kr) \cos(m\vartheta) \quad (5-3)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1^l(r, \vartheta, d) &= -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \sum_{\alpha_l} \Lambda_{m, \alpha_l}(r) Z_{\alpha_l}(d) \cos(m\vartheta) \\ &= -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m R_m(r) \cos(m\vartheta) \end{aligned}$$

mit $R_m(r) = \sum_{\alpha_l} \Lambda_{m, \alpha_l}(r) Z_{\alpha_l}(d)$ (5-4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^l}{\partial r} &= -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m R'_m(r) \cos \vartheta \\ \text{mit } R'_m(r) &= \sum_{\alpha_l} \Lambda'_{m, \alpha_l}(r) Z_{\alpha_l}(d) \end{aligned} \quad (5-5)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1^l}{\partial z} \right|_{z=d} = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \cos(m\vartheta) \sum_{\alpha_l} (-\alpha_l) N_{\alpha_l}^{-1/2} \sin(\alpha_l d) \Lambda_{m, \alpha_l}(r)$$

$$= -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m S_m(r) \cos(m\vartheta) \quad ;$$

$$\text{mit} \quad S_m(r) = \sum_{\alpha_l} (-\alpha_l) N_{\alpha_l}^{-1/2} \Lambda_{m, \alpha_l}(r) \sin(\alpha_l d) \quad (5-6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi_1^l}{\partial z^2} \right|_{z=d} = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \cos(m\vartheta) Q_m$$

$$\text{mit} \quad Q_m = -\sum_{\alpha_l} \alpha_l^2 N_{\alpha_l}^{-1/2} \cos(\alpha_l d) \Lambda_{m, \alpha_l}(r) \quad (5-7)$$

und

$$\frac{\partial \varphi_1^l}{\partial \vartheta} = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m (-m) \sin(m\vartheta) R_m(r) \quad (5-8)$$

Für das Produkt von zwei konvergierenden trigonometrischen Reihen und mit Hilfe eines Additionstheorems können folgende Formeln hergeleitet werden (s. Anhang II):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\vartheta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \cos(m\vartheta) \right) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=m}^{\infty} (a_j b_{j-m} + a_{j-m} b_j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} \right\} \cos(m\vartheta) \quad (5-9) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin(m\vartheta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \sin(m\vartheta) \right) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=m}^{\infty} (a_j b_{j-m} + a_{j-m} b_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} \right\} \cos(m\vartheta) \quad (5-10) \end{aligned}$$

dabei ist $\epsilon_m = 1$ für $m = 0$ und $\epsilon_m = 2$ für $m > 0$.

Die Anwendung der Formeln (5-9) und (5-10) auf die Produkte von Potentialausdrücken der Glg. (2-62) führt zu einem Ausdruck der Funktion β_2 in Form einer trigonometrischen Reihe:

$$\beta_2 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(m\vartheta) \quad (5-11)$$

z.B. wird für das Produkt $(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}) \times (\frac{\partial \varphi_1}{\partial r})$ wie folgt verfahren:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{-i\omega d}{k}\right)^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m R_m \cos(m\vartheta)\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j i^j R_j \cos(j\vartheta)\right)$$

Aus (5-9) folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)^2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega d}{k}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^m \epsilon_j \epsilon_{m-j} i^{2j} R'_j R'_{m-j} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_m \sum_{j=m}^{\infty} [\epsilon_j \epsilon_{j-m} i^{2j-m} R'_j R'_{j-m}] \right\} \cos(m\vartheta) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E_m \cos(m\vartheta) \end{aligned} \quad (5-12)$$

Durch Entwickeln der restlichen im Ausdruck von β_2 auftretenden Produkte bekommt man β_2 in der Form (5-11). Nach Einsetzen der trigonometrischen Reihe (5-11) und des Potentials Ψ_j in die Gleichung (5-1) ist ersichtlich, daß nur die Terme B_0 (für die Kräfte in vertikaler Richtung) und B_1 (für die Kräfte in horizontaler Richtung und die Momente) der Glg. (5-11) einen Beitrag liefern, denn es gilt folgendes für das Integral über ϑ :

$$\frac{\epsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\vartheta) \cos(j\vartheta) d\vartheta = \delta_{mj} \quad (5-13)$$

mit $\delta_{mj} = 1$ für $m = j$ bzw. $\delta_{mj} = 0$ für $m \neq j$.

Dies vereinfacht wesentlich die Berechnungen. Die rechte Seite der Gleichung (5-12) wird dann

für $m = 0$:

$$E_0 = - \left(\frac{\omega d}{k} \right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j (-1)^j (R'_j)^2 \quad (5-14)$$

und für $m = 1$:

$$E_1 = - \left(\frac{\omega d}{k} \right)^2 4i \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j (-1)^j R'_{j+1} R'_j. \quad (5-15)$$

Nach Durchführung der Operationen für alle Terme von β_2 bekommt man so den nullten und ersten Term der Gleichung (5-11) bzw. B_0 und B_1 :

$$B_0 = \frac{3i\omega[kg \sinh(2kd) - 2\omega^2 \cosh(2kd)] J_0(2kr)}{4k^2 \sinh^4(kd)} - \frac{i\omega^3 d^2}{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \epsilon_j \left\{ 2 \left(R_j'^2 + S_j^2 + \frac{j}{r^2} R_j^2 \right) = R_j Q_j + \frac{\omega^2}{g} R_j S_j \right\} \quad (5-16)$$

$$B_1 = - \frac{3\omega[kg \sinh(2kd) - 2\omega^2 \cosh(2kd)] J_1(2kr)}{2k^2 \sinh^4(kd)} - \frac{\omega^3 d^2}{k^2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left\{ 4 \left(R_j' R'_{j-1} + S_j' S'_{j-1} + \frac{j(j-1)}{r^2} R_j R_{j-1} \right) - (R_j Q_{j-1} + R_{j-1} Q_j) + \frac{\omega^2}{g} (R_j S_{j-1} + R_{j-1} S_j) \right\} \quad (5-17)$$

R_m, R'_m, Q_m und S_m sind durch die Gleichungen (5-4) bis (5-7) gegeben.

Aus der Gleichung (5-1) folgt nun:

$$F_{2_1}^V = \frac{2i\omega\varepsilon^2\rho}{g} \left\{ \pi \sum_{l=1}^{L-1} \int_{a_l}^{a_{l+1}} B_{1y_1}(r, d)r dr + \int_0^{2\pi} \int_{a_L}^{\infty} \beta_2 \Psi_1 r dr \right\} \quad (5-18)$$

$$F_{2_3}^V = \frac{4i\omega\varepsilon^2\rho}{g} \left\{ \pi \sum_{l=1}^{L-1} \int_{a_l}^{a_{l+1}} B_{0y_3}(r, d)r dr + \int_0^{2\pi} \int_{a_L}^{\infty} \beta_2 \Psi_3 r dr \right\} \quad (5-19)$$

$$F_{2_5}^V = \frac{2i\omega\varepsilon^2\rho}{g} \left\{ \pi \sum_{l=1}^{L-1} \int_{a_l}^{a_{l+1}} B_{1y_5}(r, d)r dr + \int_0^{2\pi} \int_{a_L}^{\infty} \beta_2 \Psi_5 r dr \right\} \quad (5-20)$$

In den Gln. (5-18) bis (5-20) und für den Bereich $r \leq a_L$ treten Integrale in der Form

$$\int_{a_l}^{a_{l+1}} \mathfrak{S}_m(\alpha_l r) \mathfrak{S}_n(\alpha_l r) \mathfrak{S}_q(\xi_k r) r dr$$

auf, wobei \mathfrak{S}_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$; $\nu = m, n, q$) eine der Besselschen Funktionen I_ν , K_ν , J_ν oder H_ν sind. Da diese im endlichen Bereich $a_l < r < a_{l+1}$ analytisch kaum integrierbar sind, wurde für die Berechnungen eine numerische Integration (Gauss'sche Quadratur) herangezogen.

Für den äußeren Bereich mit $r > a_L = \alpha$ wurde ein etwas modifiziertes Verfahren zugrundegelegt.

5.2 Das Verfahren für das infinite Makroelement.

Für den äußeren Bereich liegt das Potential φ_1 als Summe des ankommenden und des Diffraktionspotentials vor. Setzt man den Ausdruck $\varphi_1 = \varphi_1^I + \varphi_1^S$ in die Glg. (2-20.a) ein, so wird das Potential φ_2^I der ankommenden Welle, wie schon gezeigt wurde, aus dieser Gleichung eliminiert und man bekommt für β_2 den Ausdruck (2-22). Dieser Ausdruck ist einfacher zu handhaben und wird für den äußeren Bereich bzw. beim zweiten Summanden auf der rechten Seite der Gln. (5-18) bis (5-20) verwendet.

Wir führen die abgekürzte Schreibweise $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = \varphi_{1i}$ (für $i = r, z, \vartheta$) ein. Aus der Meeresoberflächen-Randbedingung 1.Ordnung (2-10.b) und aus den Gln. (2-12) und (2-13) folgt:

$$\frac{\partial \varphi_1^I}{\partial z} = \varphi_{1z}^I|_{z=d} = \gamma \varphi_1^I; \quad \frac{\partial \varphi_1^S}{\partial z} = \varphi_{1z}^S|_{z=d} = \gamma \varphi_1^S; \quad \gamma = \frac{\omega^2}{g} \quad (5-21)$$

da die Randbedingung 1.Ordnung an der Meeresoberfläche auch für das Potential φ_1^I der ankommenden Welle gilt. Werden diese Ausdrücke in die Glg. (2-22) eingesetzt, so bekommt man nämlich

$$g\varphi_{2z}^S - 4\omega^2\varphi_2^S = i\omega \left[2\varphi_{1r}^I\varphi_{1r}^S + \frac{2}{r^2}\varphi_{1\vartheta}^I\varphi_{1\vartheta}^S + 3\gamma^2\varphi_{1z}^I\varphi_{1z}^S - \frac{1}{2}(\varphi_{1z}^I\varphi_{1zz}^S + \varphi_{1z}^S\varphi_{1zz}^I) + (\varphi_{1r}^S)^2 + \frac{1}{r^2}(\varphi_{1\vartheta}^S)^2 + \frac{3}{2}\gamma^2(\varphi_{1z}^S)^2 - \frac{\varphi_{1z}^S}{2}\varphi_{1zz}^S \right]. \quad (5-22)$$

Mit Hilfe der Gleichung (2-13.b) kann das ankommende Potential φ_1^I wie folgt formuliert werden:

$$\varphi_1^I|_{z=d} = \cosh(kd)f(r, \vartheta) \quad (5-23); \quad \varphi_{1zz}^I|_{z=d} = k^2 \cosh(kd)f(r, \vartheta) = k^2\varphi_1^I \quad (5-24)$$

$$\text{wobei } f(r, \vartheta) = \left(-\frac{\omega d}{k}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m i^{m+1}}{kd} J_m(kr) \cos(m\vartheta) \text{ ist.} \quad (5-25)$$

Aus den Gln. (4-5) und (4-6) bekommt man für das Diffraktionspotential eine entsprechende Formulierung. Zuerst wird das Diffraktionspotential im äußeren Bereich aus der Makroelemente-Formulierung entnommen:

$$\varphi_1^S = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\epsilon_m i^m \left\{ -\frac{J_m(ka)}{H_m(ka)} H_m(kr) \right\} \frac{Z_k(z)}{dZ'_k(d)} + \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{m\alpha} \frac{K_m(\alpha r)}{K_m(\alpha a)} Z_{\alpha}(z) \right] \times \cos(m\vartheta) \quad (5-26)$$

Die Reihe über α erstreckt sich dabei über die eine imaginäre Wurzel $\alpha_0 = -ik$ und über die unendlich vielen reellen Wurzeln α_j ($j = 1, 2, \dots$) der Glg. (4-9). Es gilt zusätzlich folgende Beziehung:

$$\frac{K_m(-ikr)}{K_m(-ika)} = \frac{H_m(kr)}{H_m(ka)} \quad (5-27)$$

Dadurch kann der erste Summand der Glg. (5-26) in die Reihe mit-einbezogen werden:

$$\varphi_1^S = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{m\alpha} \frac{K_m(\alpha r)}{K_m(\alpha a)} N_{\alpha}^{-1/2} \cos(\alpha z) \cos(m\vartheta), \quad (5-28)$$

nachdem die neuen Fourier-Koeffizienten $\mathcal{F}_{m\alpha}$ des infiniten Elementes wie folgt definiert wurden:

$$\mathcal{F}_{m\alpha_0} = -\frac{J_m(ka)}{dZ'_k(d)} + \mathcal{F}_{m\alpha_0}; \quad \mathcal{F}_{m\alpha_j} = \mathcal{F}_{m\alpha_j} \quad (j = 1, 2, 3 \dots) \quad (5-29)$$

Es wird abgekürzt:

$$\varphi_1^S \Big|_{z=d} = \sum_{\alpha} \cos(\alpha d) e_{\alpha}(r, \vartheta) \quad (5-30)$$

mit

$$e_{\alpha}(r, \vartheta) = \left(\frac{-\omega d}{k} \right) N_{\alpha}^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{m+1} F_{m\alpha} \frac{K_m(\alpha r)}{K_m(\alpha d)} \cos(m\vartheta) \quad (5-31)$$

und

$$\varphi_{1zz}^S = - \sum_{\alpha} \alpha^2 \cos(\alpha d) e_{\alpha}(r, \vartheta) \quad (5-32)$$

Mit Hilfe der Definitionen (5-23), (5-24), (5-30) und (5-32) erhält man für die Stelle $z = d$:

$$\begin{aligned} 3\gamma^2 \varphi_1^I \varphi_1^S - \frac{1}{2} (\varphi_1^I \varphi_{1zz}^S + \varphi_1^S \varphi_{1zz}^I) &= \frac{1}{2} \cosh(kd) f \left\{ \sum_{\alpha} (6\gamma^2 + \alpha^2 - k^2) \cos(\alpha z) e_{\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \varphi_1^I \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^2 \cos(\alpha z) e_{\alpha} = \frac{1}{2} \varphi_1^I p(r, \vartheta) \quad (5-33) \end{aligned}$$

mit

$$\delta_{\alpha}^2 = 6\gamma^2 + \alpha^2 - k^2, \quad (5-34)$$

$$p(r, \vartheta) = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^2 \cos(\alpha z) e_{\alpha} \quad (5-35)$$

Ähnlich wird abgekürzt:

$$\frac{3}{2} \gamma^2 (\varphi_1^S)^2 - \frac{\varphi_1^S}{2} \varphi_{1zz}^S = \frac{1}{2} \varphi_1^S \sum_{\alpha} (3\gamma^2 + \alpha^2) e_{\alpha} \cos(\alpha d) = \frac{1}{2} \varphi_1^S q \quad (5-36)$$

mit

$$q(r, \vartheta) = \sum_{\alpha} \zeta_{\alpha}^2 e_{\alpha} \cos(\alpha d) \quad (5-37)$$

bzw.

$$\zeta_{\alpha}^2 = 3\gamma^2 + \alpha^2 \quad (5-38)$$

Die Gleichung (5-22) kann dann umgeschrieben werden:

$$g\varphi_{2z}^S - 4\omega\varphi_2^S = i\omega \left[\varphi_{1r}^I \varphi_{1r}^S + \frac{2}{r^2} \varphi_{1\vartheta}^I \varphi_{1\vartheta}^S + \frac{1}{2} \varphi_{1p}^I \right. \\ \left. + (\varphi_{1r}^S)^2 + \frac{1}{r^2} (\varphi_{1\vartheta}^S)^2 + \frac{1}{2} \varphi_{1q}^S \right] \quad (5-39)$$

Weiterhin gilt für die Ableitungen des Potentials φ_1^I nach r und nach ϑ :

$$\varphi_{1r}^I = \cosh(kd) f_r \quad (5-40)$$

$$\varphi_{1\vartheta}^I = \cosh(kd) f_{\vartheta} \quad (5-41)$$

Aus der Glg. (5-39) bekommt man dann:

$$g\varphi_{2z}^S - 4\omega\varphi_2^S = i\omega \left[2 \cosh(kd) \left(f_r \varphi_{1r}^S + \frac{1}{r^2} f_{\vartheta} \varphi_{1\vartheta}^S + \frac{1}{4} \varphi_{1p}^S \right) \right. \\ \left. + (\varphi_{1r}^S)^2 + \frac{1}{r^2} (\varphi_{1\vartheta}^S)^2 + \frac{1}{2} \varphi_{1q}^S \right] \quad (5-42)$$

Die Funktionen f , f_r , f_{ϑ} , φ_1^S , φ_{1r}^S , $\varphi_{1\vartheta}^S$, p und q können als Reihen über m umgeformt werden:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} R_m \cos(m\vartheta) \quad (5-43)$$

$$f_r = \sum_{m=0}^{\infty} R'_m \cos(m\vartheta) \quad (5-44)$$

$$f_{\vartheta} = - \sum_{m=0}^{\infty} m R_m \sin(m\vartheta) \quad (5-45)$$

Dabei ist:

$$R_m = - \left(\frac{\omega d}{k} \right) \epsilon_m i^{m+1} T_m \quad (5-46)$$

$$T_m = \frac{1}{kd \sinh(kd)} J_m(kr) \quad (5-46.a)$$

$$R'_m = - \left(\frac{\omega d}{k} \right) \epsilon_m i^{m+1} T'_m \quad (5-47)$$

$$T'_m = \frac{J'_m(kr)}{d \sinh(kd)} \quad (5-47.a)$$

Weiterhin kann umformuliert werden:

$$\varphi_1^S = \sum_{m=0}^{\infty} L_m \cos(m\vartheta) \quad (5-48)$$

$$\varphi_{1r}^S = \sum_{m=0}^{\infty} L'_m \cos(m\vartheta) \quad (5-49)$$

$$\varphi_{1\vartheta}^S = - \sum_{m=0}^{\infty} m L_m \sin(m\vartheta) \quad (5-50)$$

mit

$$L_m = \left(- \frac{\omega d}{k} \right) \epsilon_m i^{m+1} l_m \quad (5-51)$$

bzw.

$$l_m = \sum_{\alpha} \cos(\alpha d) N_{\alpha}^{-1/2} \frac{F_{m\alpha}}{K_m(\alpha a)} K_m(\alpha r) \quad (5-52)$$

und

$$p(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(r) \cos(m\vartheta) \quad (5-53)$$

$$q(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(r) \cos(m\vartheta) \quad (5-54)$$

mit

$$P_m(r) = \left(-\frac{\omega d}{k}\right) \epsilon_m i^{m+1} p_m(r) \quad (5-55)$$

$$p_m(r) = \sum_{\alpha} (6\gamma^2 + \alpha^2 - k^2) N_{\alpha}^{-1/2} \cos(\alpha d) \frac{F_{m\alpha}}{K_m(\alpha a)} K_m(\alpha r) \quad (5-55.a)$$

$$Q_m(r) = \left(-\frac{\omega d}{k}\right) \epsilon_m i^{m+1} q_m(r) \quad (5-56)$$

$$q_m(r) = \sum_{\alpha} (3\gamma^2 + \alpha^2) N_{\alpha}^{-1/2} \cos(\alpha d) \frac{F_{m\alpha}}{K_m(\alpha a)} K_m(\alpha r) \quad (5-56.a)$$

Werden diese Reihen über m in die Gleichung (5-42) eingesetzt und die Formeln (5-9), (5-10) benutzt, so wird nach der Durchführung der Operationen folgendes ermittelt:

$$\begin{aligned} g\varphi_{2z}^S - 4\omega^2 \varphi_2^S &= \frac{i\omega}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^m \left[2 \cosh(kd) \left\{ R_j' L_{m-j}' + R_j \left(\frac{j(j-m)}{r^2} L_{m-j} + \frac{P_{m-j}}{4} \right) \right\} \right. \right. \\ &+ L_j' L_{m-j}' + L_j \left(\frac{j(j-m)}{r^2} L_{m-j} + \frac{Q_{m-j}}{2} \right) \left. \right] + \frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=m}^{\infty} \left[2 \cosh(kd) \right. \\ &\times \left\{ (R_j' L_{j-m}' + R_{j-m}' L_j') + R_j \left(\frac{j(j-m)}{r^2} L_{j-m} + \frac{P_{j-m}}{4} \right) + R_{j-m} \left(\frac{j(j-m)}{r^2} L_j + \frac{P_j}{4} \right) \right\} \\ &+ 2L_j' L_{j-m}' + L_j \left(\frac{j(j-m)}{r^2} L_{j-m} + \frac{Q_{j-m}}{2} \right) + L_{j-m} \left(\frac{j(j-m)}{r^2} L_j + \frac{Q_j}{2} \right) \left. \right] \Big\} \cos(m\vartheta) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m(r) \cos(m\vartheta) \quad (5-57) \end{aligned}$$

Für die Ermittlung der Kräfte sind nur $B_0(r)$ und $B_1(r)$ von Interesse. Diese Funktionen folgen aus der Gleichung (5-57):

für $m=0$:

$$B_0 = i\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_j} \left[2 \cosh(kd) \left\{ R'_j L'_j + R'_j \left(\frac{j^2}{r^2} L_j + \frac{P_j}{4} \right) \right\} + L_j'^2 + L_j \left(\frac{j^2}{r^2} L_j + \frac{Q_j}{4} \right) \right] \quad (5-58)$$

und für $m=1$:

$$B_1 = i\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_j} \left[2 \cosh(kd) \left\{ (R'_{j+1} L'_j + R'_j L'_{j+1}) + \frac{j(j+1)}{r^2} (R_{j+1} L_j + R_j L_{j+1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (R_{j+1} P_j + R_j P_{j+1}) \right\} \right. \\ \left. + 2L'_{j+1} L'_j + \frac{2}{r^2} L_{j+1} L_j + \frac{1}{2} (L_{j+1} Q_j + L_j Q_{j+1}) \right] \quad (5-59)$$

Schließlich kann aus den Gln. (5-58) und (5-59) der Faktor $(-\frac{\omega d}{k}) \epsilon_m i^{m+1}$ herausgezogen werden:

$$B_0 = i\omega \left(\frac{\omega d}{k} \right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j \left[2 \cosh(kd) \left\{ T'_j l'_j + T_j \left(\frac{j^2}{r^2} l_j + \frac{p_j}{4} \right) \right\} \right. \\ \left. + l'_j 2_j + l_j \left(\frac{j^2}{r^2} l_j + \frac{q_j}{2} \right) \right] \quad (5-60)$$

und

$$B_1 = 2i\omega \left(\frac{\omega d}{k} \right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ 2 \cosh(kd) \left[(T'_{j+1} l'_j + T'_j l'_{j+1}) + \frac{j(j+1)}{r^2} (T_{j+1} l_j + T_j l_{j+1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (T_{j+1} p_j + T_j p_{j+1}) + 2l'_{j+1} l'_j \right] + \frac{2}{r^2} l_{j+1} l_j + \frac{1}{2} (l_{j+1} q_j + l_j q_{j+1}) \right\} \quad (5-61)$$

Die ermittelten Ausdrücke B_0 und B_1 , die in dem Definitionsbereich $a_L \leq r \leq \infty$ des infiniten Elementes A gelten, kommen beim Meeresoberflächenintegral im Integranden vor. Ferner wurde die numerische Integration bis zu einem großen Radius R durchgeführt. Ab diesem Radius R bis ins Unendliche wurden dann asymptotische Lösungen gesucht. Man kann dabei die für den einfachen Zylinder angewendete Methode des "Herausfilterns der Oszillationen" anwenden, um den Wert für das Meeresoberflächenintegral bzw. den V . Kräfteanteil zweiter Ordnung numerisch zu ermitteln. Eine genauere und gleichzeitig Rechenzeit sparende Methode, die auf einem halbanalytischen Verfahren beruht, wurde jedoch zusätzlich für die Ermittlung des asymptotischen Wertes des Integrals entwickelt.

5.3 Asymptotische Lösung durch Fresnel Integrale

Durch Herausfiltern der in dem Meeresoberflächenintegral auftretenden Oszillationen bekommt man eine Aussage über den asymptotischen Wert dieses Integrales, aber dadurch kann noch kein ingenieurmäßig genauer Wert im Rahmen einer kostenmäßig vertretbaren Rechenzeit bestimmt werden. Um einen exakten Wert mit hoher Genauigkeit zu erzielen sowie um durch eine numerische Integration feinsten Aufteilung hervorgerufene große Rechenzeit zu vermeiden, wurde eine halbanalytische Methode entwickelt. Obwohl diese Entwicklung und die Programmierung relativ kompliziert sind, wird dadurch viel Rechenzeit erspart.

Für das infinite Element A wurde zuerst das Meeresoberflächenintegral bis zu einem Radius R numerisch integriert. Ab diesem Radius R wurde dann eine analytische Integration vorgenommen, nachdem die asymptotischen Ausdrücke der Besselschen Funktionen J_m und H_m eingeführt wurden. In diesem Zusammenhang muß R groß genug gewählt werden, so daß die in der integrierenden Funktion auftretenden modifizierten Besselschen Funktionen K_m keinen Beitrag mehr liefern. Die modifizierten Besselschen Funktionen $K_m(\alpha r)$ weisen für große Werte αr bzw. z folgendes asymptotisches Verhalten auf:

$$K_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\} \quad (5-62)$$

mit $\mu = 4m^2$ und einer reellen Zahl z . D.h. sie klingen für wachsendes z exponentiell mit e^{-z} sehr schnell ab. Bei der Potentialfunktion beschreiben diese Funktionen die in der Nähe des Körpers auftretenden lokalen Phänomene.

Für die Besselschen Funktionen $J_m(z)$, $Y_m(z)$ und $H_m(z)$ erhält man für grosse Werte von z , wie bekannt [49], asymptotische Ausdrücke der Form:

$$J_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_m(z) \cos \chi - Q_m(z) \sin \chi \right\} \quad (5-63)$$

$$Y_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_m(z) \sin \chi + Q_m(z) \cos \chi \right\} \quad (5-64)$$

und

$$H_m^{(k)}(z) = J_m(z) + iY_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_m(z) + iQ_m(z) \right\} e^{i\chi} \quad (5-65)$$

dabei ist $\chi = z - \frac{1}{2} \left(m + \frac{\pi}{2} \right)$.

Mit der Abkürzung $\mu = 4m^2$ sind weiterhin die Funktionen $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ wie folgt definiert ([49]):

$$P_m(z) = 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \dots \quad (5-66)$$

und

$$Q_m(z) = \frac{(\mu-1)}{(8z)} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \quad (5-67)$$

Nach Aufsummieren der Funktion $P_m(z)$ über k Terme und für positiv ganze Zahlen m und positiv reelle Zahlen z ist der Restbetrag kleiner als der $(k+1)$ te Term und weist sogar das gleiche Vorzeichen auf, vorausgesetzt es gilt: $k > \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}$. Dasselbe gilt auch für die Funktion $Q_m(z)$ unter der Bedingung: $k > \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}$.

Aus den Gleichungen (5-60), (5-61) für B_0 bzw. B_1 sowie aus dem Ausdruck des Potentials Ψ_j und nachdem die Terme mit K_m -Funktionen für große Radien R abgeklungen sind, kommen für die weitere Analyse nur Terme der Form:

$$I = \int_R^\infty \mathfrak{S}_\mu(\kappa r) \mathfrak{S}_\nu(\kappa r) \mathfrak{S}_\lambda(\kappa r) r dr \quad (5-68)$$

in Betracht. Dabei sind $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, \dots$ und \mathfrak{S}_m Besselsche Funktionen J_m oder Hankelsche Funktionen $H_m^{(1)}(\dots) = J_m(\dots) + iY_m(\dots)$. Es wird zunächst die Entwicklung der Formel (5-68) für den Fall

$$\mathfrak{S}_\mu = J_\mu; \quad \mathfrak{S}_\nu = J_\nu; \quad \mathfrak{S}_\lambda = J_\lambda \quad (5-69)$$

fortgesetzt, die restlichen Kombinationen sind analog durchzuführen.

Werden die Besselschen Funktionen (5-69) bzw. ihre Näherungsformeln (5-63) in die Glg. (5-68) eingesetzt, so wird zuerst

$$I = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{k\sqrt{\kappa}} \int_R^\infty (P_\mu \cos \chi_\mu + Q_\mu \sin \chi_\mu)(P_\nu \cos \chi_\nu + Q_\nu \sin \chi_\nu) \\ \times (P_\lambda \cos \chi_\lambda + Q_\lambda \sin \chi_\lambda) r^{-1/2} dr \quad (5-70)$$

abgeleitet. Weiterhin bekommt man für den Ausdruck:

$$A = (P_\mu \cos \chi_\mu + Q_\mu \sin \chi_\mu)(P_\nu \cos \chi_\nu + Q_\nu \sin \chi_\nu)(P_\lambda \cos \chi_\lambda + Q_\lambda \sin \chi_\lambda) \\ = \frac{1}{4} \{ B_1 \cos(\chi_\mu - \chi_\nu + \chi_\lambda) + B_2 \cos(-\chi_\mu + \chi_\nu + \chi_\lambda) + B_3 \cos(\chi_\mu + \chi_\nu - \chi_\lambda) \\ + B_4 \cos(-\chi_\mu - \chi_\nu - \chi_\lambda) + B_5 \sin(\chi_\mu - \chi_\nu + \chi_\lambda) + B_6 \sin(-\chi_\mu + \chi_\nu + \chi_\lambda) \\ + B_7 \sin(\chi_\mu + \chi_\nu - \chi_\lambda) + B_8 \sin(-\chi_\mu - \chi_\nu - \chi_\lambda) \} \quad (5-71)$$

mit:

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1 + b_2 + b_3 - b_4 & B_5 &= c_1 + c_2 + c_3 - c_4 \\ B_2 &= b_1 + b_2 - b_3 + b_4 & B_6 &= c_1 + c_2 - c_3 + c_4 \\ B_3 &= b_1 - b_2 + b_3 + b_4 & B_7 &= c_1 - c_2 + c_3 + c_4 \\ B_4 &= b_1 - b_2 - b_3 - b_4 & B_8 &= c_1 - c_2 - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (5-71.a)$$

und

$$\begin{aligned} b_1 &= P_\mu P_\nu P_\lambda & c_1 &= Q_\mu Q_\nu Q_\lambda \\ b_2 &= Q_\mu Q_\nu P_\lambda & c_2 &= P_\mu P_\nu Q_\lambda \\ b_3 &= P_\mu Q_\nu Q_\lambda & c_3 &= Q_\mu P_\nu P_\lambda \\ b_4 &= Q_\mu P_\nu Q_\lambda & c_4 &= P_\mu Q_\nu P_\lambda \end{aligned} \quad (5-71.b)$$

Setzt man weiterhin $\chi_\mu = \kappa r - \frac{1}{2}(\mu + \frac{\pi}{2})$, $\chi_\nu = \kappa r - \frac{1}{2}(\nu + \frac{\pi}{2})$ und $\chi_\lambda = \kappa r - \frac{1}{2}(\lambda + \frac{\pi}{2})$ und wendet das Additionstheorem für die Kosinus-Funktionen an, so bekommt man die Glg. (5-71) als eine Summe von trigonometrischen Funktionen einfacher Variablen, die in Matrixform formuliert werden kann:

$$A \equiv \frac{1}{4} [B_i]_{(1,8)} [D_{ij}]_{(8,8)} \{K_j\}_{(8,1)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (5-72)$$

Die B_i sind in der Glg. (5-71.a) definiert. Die Matrix D_{ij} hat die Form:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} [C] & -[S] \\ [S] & [C] \end{bmatrix} \quad (5-73)$$

wobei

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos[\frac{\pi}{2}(\mu - \nu + \lambda + \frac{1}{2})] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[\frac{\pi}{2}(\mu + \nu + \lambda + \frac{1}{2})] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos[\frac{\pi}{2}(\mu + \nu - \lambda + \frac{1}{2})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos[\frac{\pi}{2}(\mu - \nu - \lambda - \frac{3}{2})] \end{bmatrix}$$

und

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sin[\frac{\pi}{2}(\mu - \nu + \lambda + \frac{1}{2})] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin[\frac{\pi}{2}(\mu + \nu + \lambda + \frac{1}{2})] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin[\frac{\pi}{2}(\mu + \nu - \lambda + \frac{1}{2})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin[\frac{\pi}{2}(\mu - \nu - \lambda - \frac{3}{2})] \end{bmatrix}$$

ist.

Die Elemente der Matrix D_{ij} haben den Wert $D_{ij} = \pm \sqrt{2}/2$ bzw. $D_{ij} = 0$. Schließlich lautet die Spalte $\{K_j\}_{(8,1)}$:

$$\{K_j\} = \left\{ \begin{array}{c} \cos(\kappa r) \\ \cos[(2k - \kappa)r] \\ \cos(\kappa r) \\ \cos[-(2k + \kappa)r] \\ \sin(\kappa r) \\ \sin[(2k - \kappa)r] \\ \sin(\kappa r) \\ \sin[-(2k + \kappa)r] \end{array} \right\} \quad (5-74)$$

Die Terme b_1 bis b_4 bzw. c_1 bis c_4 sind Polynome der Form:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{1}{r^m} \quad (c_m = \text{Konstanten}) \quad (5-75)$$

denn sie entstehen aus der dreifachen Multiplikation von P_m bzw. Q_m (Glg. 5-71.a), (5-71.b)). Dies bedeutet, daß die Integrale der Glgn. (5-70) bzw. (5-68) als eine Summe von einfachen Integralen in der Form:

$$\int_R^{\infty} \frac{\cos(\alpha r)}{r^{m+1/2}} dr \quad ; \quad \int_R^{\infty} \frac{\sin(\alpha r)}{r^{m+1/2}} dr \quad (5-76)$$

ausgedrückt werden können, wobei $m = 0, 1, 2, \dots$ ist.

In der Literatur sind die Integrale (5-76) für den Wert $m = 0$ als Fresnel-Integrale bekannt.

Diese sind nach vielfacher partieller Integration analytisch zu ermitteln und für große Werte von R konvergieren sie sehr schnell. Es wurde

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(\alpha x)}{x^{m+1/2}} dx &= \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x^{m+1/2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \left[\frac{[(m-3/2) + 2j][(m-1/2) + 2j]}{(\alpha x)^2} \right] \right\} \\ &+ \frac{(m+1/2) \cos(\alpha x)}{\alpha^2 x^{m+3/2}} \left\{ -1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=2}^n \left[\frac{[(m-5/2) + 2j][(m-3/2) + 2j]}{(\alpha x)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5-77)$$

abgeleitet (s. Anhang III) mit $m = 0, 1, 2, \dots$ und mit einer reellen Zahl α .

Auf ähnliche Weise bekommt man:

$$\int \frac{\sin(\alpha x)}{x^{m+1/2}} dx = \frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha x^{m+1/2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \left[\frac{[(m-3/2)+2j][(m-1/2)+2j]}{(\alpha x)^2} \right] \right\} \\ + \frac{(m+1/2)\sin(\alpha x)}{\alpha^2 x^{m+3/2}} \left\{ -1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=2}^n \left[\frac{[(m-5/2)+2j][(m-3/2)+2j]}{(\alpha x)^2} \right] \right\} \quad (5-78)$$

bzw.

$$\int \frac{e^{i\alpha x}}{x^{m+1/2}} dx = \frac{-ie^{i\alpha x}}{\alpha x^{m+1/2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \left[\frac{[(m-3/2)+2j][(m-1/2)+2j]}{(\alpha x)^2} \right] \right\} \\ + \frac{(m+1/2)e^{i\alpha x}}{\alpha^2 x^{m+3/2}} \left\{ -1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=2}^n \left[\frac{[(m-5/2)+2j][(m-3/2)+2j]}{(\alpha x)^2} \right] \right\} \\ = \frac{-ie^{i\alpha x}}{\alpha x^{m+1/2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(m+j-1/2)}{i\alpha x} \right] \quad (5-79)$$

oder:

$$\int_R^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^{m+1/2}} dx = \frac{ie^{i\alpha R}}{\alpha R^{m+1/2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(m+j-1/2)}{i\alpha R} \right] \quad (5-80)$$

Bei der Behandlung der Polynome b_j bzw. c_j (Glg. (5-75)) durch den Rechner wurde für jedes Polynom die maximale Anzahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder einzeln bestimmt, nachdem festgestellt wurde, daß die nachfolgenden Terme (im Rahmen einer relativen Genauigkeit) keinen Beitrag mehr liefern.

Weiterhin bestehen die Reihen auf der rechten Seite der Glgn. (5-77) und (5-78) aus Gliedern mit wechselnden Vorzeichen (+, -, +, ...). Mit wachsendem n werden sie zuerst kleiner. Ab einem sehr großen $n = N$ jedoch wird der Zähler größer als der Nenner und die nachfolgenden Glieder $N + 1$, $N + 2, \dots$ werden größer im Betrag. Als Folge dessen divergiert die Reihe. Da aber die Konvergenz auf der linken Seite der Glg. (5-80) für $m \geq 0$ und eine positive reelle Zahl α bewiesen ist, muß das Aufsummieren über n höchstens bis zu $n = N$ begrenzt werden, denn für $n > N$ gelten die Formeln (5-77) bis (5-80) nicht mehr. Für $n = N$ wird auch die höchste Rechengenauigkeit erreicht. Für relativ große Werte von $\frac{R}{a_L}$ (z.B. 10) ist dieser Wert von N so groß, daß eine hohe relative Genauigkeit (z.B. 10^{-10}) des Integralwertes längst vorher erreicht wurde. Bei der Erstellung des Computer-Programmes wurde dies berücksichtigt und das Aufsummieren nicht weiter ausgeführt, wenn eine vordefinierte relative Genauigkeit erreicht wurde (z.B. 10^{-10}) oder es erfolgte (in den seltensten Fällen) eine Aufsummation bis zum Wert $n = N$.

6. NUMERISCHE ERGEBNISSE:

Für die Ermittlung aller Komponenten der Kräfte sowie der Momente bis zur 2.Ordnung auf beliebige rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse wurde am Lehrgebiet Grundlagen der Meerestechnik (LMT) der Rhein.-Westfälischen Technischen Hochschule (RWTH) Aachen das Rechenprogramm NONLIN in der Programmiersprache FORTRAN-77 erstellt. Ausführliche Berechnungen wurden auf der Rechanlage CYBER-175 des Rechenzentrums der RWTH Aachen vorgenommen.

Durch dieses Programm wird zuerst numerisch die Lösung des potentialtheoretischen Problems 1.Ordnung für Rotationskörper mit vertikaler Achse (Diffraktions- und Abstrahlungsproblem) mit Hilfe der Makroelementmethode gewonnen. Darauf aufbauend erfolgt die Berechnung der oszillierenden Kräfte 2.Ordnung sowie der Driftkräfte mit Hilfe des im Kapitel 2 beschriebenen theoretischen Verfahrens.

Für die Verifizierung des Rechenprogramms wurden zuerst Vergleichsrechnungen mit den wenigen aus der Literatur vorhandenen theoretischen und experimentellen Werten durchgeführt.

In den Abbn. 5. und 6. wurde zunächst das Beispiel eines vom Meeresboden bis über die Meeresoberfläche ragenden Zylinders dargestellt. Die Formulierung des Potentials im Definitionsbereich des einzigen Elementes A führt in diesem einfachen Fall auf die im Kapitel 3 angegebene analytische Lösung.

Für zwei Verhältnisse von Wassertiefe zu Zylinderradius bzw. $d/a = 1.16$ und $d/a = 2.0$ sind in den Abbildungen. 5.a, 5.b bzw. 6.a, 6.b die reellen und imaginären Werte der Kräfteanteile $I - V$ 2.Ordnung in horizontaler Richtung als Funktion des dimensionslosen Parameters ka abgebildet. Die Konvergenz des Meeresoberflächenintegrals wurde nach dem Herausfiltern der Oszillationen, die dieses Integral als Funktion von r aufweist, durch eine numerische Integration bis zu einem Radius $r = 15a$ erreicht. Die Ergebnisse wurden den theoretischen

Werten von Molin und Marion [21] gegenübergestellt. Die Übereinstimmung kann hier als exzellent bezeichnet werden. Die Addition dieser fünf Komponenten liefert die oszillierende Kraft 2.Ordnung (Abbn. 5.c bzw. 6.c), die weitere Superposition der Driftkraft und der Kraft 1.Ordnung führt zur auf den Körper wirkenden Gesamtkraft. Das positive Maximum über eine Wellenperiode $T = 2\pi/\omega$ dieser Gesamtkraft wurde in den Abbn. 5.d bzw. 6.d als Funktion des dimensionslosen Parameters ka für eine bestimmte Wellensteilheit bzw. Wellenhöhe gezeichnet. Ein Vergleich mit der Amplitude der Kraft 1.Ordnung zeigt, daß für große Wellensteilheiten bzw. Wellenhöhen im Vergleich zum Körperdurchmesser durch die Effekte 2.Ordnung ungewöhnlich große zusätzliche Kräfte hervorgerufen werden können. Sämtliche Anteile der Horizontalkraft für $d/a = 1.16, 2.$ und $3.$ wurden auch in tabellarischer Form angegeben (Tabelle I-III). Für alle Berechnungen mit Hilfe der Makroelementmethode und bei den Summen über n bzw. m wurden 20 bzw. 7 Reihenglieder berücksichtigt. Diese Anzahl von Reihengliedern wurde für den Bereich begrenzter Wassertiefe und für einen relativen Fehler von weniger als 1% als ausreichend empfunden. Für sehr große Wassertiefen jedoch ($d/a > 8$) ist bei der Berechnung der Summen über n eine höhere Anzahl der Reihenglieder notwendig.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von E.Taylor und Hung [47] zeigte eine Übereinstimmung der beiden Methoden für den einfachen Zylinder mit $d/a = 1., 3.,$ und $10.$ in den meisten Fällen über drei signifikante Stellen.

Als nächstes Beispiel wurde ein in der Welle festgehaltener und bis zu einem Tiefgang $h_P = 1.5a = d/2$ eingetauchter einfacher Zylinder, der auch von Abdul-Azm und Williams (1988) [46] berechnet wurde, untersucht. Die Kräfte 2.Ordnung sind in einer Form dargestellt, die einen direkten Vergleich mit den Ergebnissen von [46] ermöglichen. In der Abb. 7.a wurden die Beträge der Horizontalkräfte 2.Ordnung infolge des Potentials φ_1 (bzw. $|F_{21}^{II} + F_{21}^{III}|$) und infolge des Potentials φ_2 (bzw. $|F_{21}^I + F_{21}^{IV} + F_{21}^V|$) für eine konstante Wellensteilheit $H/\lambda = 0.1$ dargestellt. Die gesamte Driftkraft $|F_{20,1} + F_{20,1}^I|$ ist ebenfalls in der Abb. 7.a zu sehen.

Abb. 7.b zeigt die gleiche Aufteilung der Kräfte 2.Ordnung in vertikaler Richtung. Eine sehr gute Übereinstimmung mit den in [47] gewonnenen theoretischen Ergebnissen ist hier festzustellen. In den Abbn. 7.c und 7.d wurde die maximale Kraft innerhalb einer Periode für eine Wellensteilheit $H/\lambda = 0.1$ mit den aus der linearen Theorie gewonnenen Kraftamplituden verglichen. Es ist ersichtlich, daß die lineare Theorie die Wellenlasten auf die Struktur, die durch Wellen finiter Höhen verursacht werden, im gesamten Frequenzbereich unterschätzt. Die Kraft in horizontaler Richtung weist einen Unterschied von ca. 15-25% im Vergleich zur aus der linearen Theorie ermittelten Kraft auf, während für die Gesamtkraft in vertikaler Richtung noch größere Abweichungen auftreten. Ab $ka = 1.6$ wird die Komponente wegen φ_2 sogar größer als der aus der linearen Theorie errechnete Wert.

Vollständigkeitshalber wurden in den Tabellen IV und V alle Teillasten zahlenmäßig angegeben.

Die Ergebnisse für die oszillierenden Kräfte 2.Ordnung zusammen mit den Driftkräften sind für einen halb eingetauchten Zylinder in den Abbn. 8.a und 8.b angegeben. Für diesen Zylinder liegen experimentelle sowie theoretische Ergebnisse vor ([21]).

In [21] wird ein auf der Finite Elemente (FE)-Methode basierendes numerisches Verfahren für die Ermittlung des Potentials 1.Ordnung zugrunde gelegt. Im Vergleich zu den FE-Verfahren ist die Makroelementmethode bezüglich des Rechenaufwands und der Speicherkapazität wesentlich leistungsfähiger. Bei allen Makroelement-Berechnungen wurden bei den Aufsummierungen über n 20 und bei der Summation über m 7 Terme berücksichtigt. Das Meeresoberflächenintegral wurde nach der "Ausfilterung der Oszillationen" zur Konvergenz geführt. Die Übereinstimmung mit den von [21] angegebenen theoretischen Ergebnissen ist zufriedenstellend. Wegen der limitierten Ergebnisse in [21] kann nicht festgestellt werden, ob die auftretenden Unterschiede auf die von φ_1 und/oder von φ_2 abhängigen Kräfteanteile zurückzuführen sind. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, die für verschiedene Wellenhöhen ermittelt und dann auf

$(H/2)^2$ normiert wurden, kann als gut bezeichnet werden. Weiterhin sind in den Abb. 8.c und 8.d die durch die Makroelementmethode berechneten Komponenten $I - V$ dieser Kräfte gezeichnet. Es ist ersichtlich, daß die momentanen Komponenten der Kräfte 2.Ordnung wegen φ_1 und wegen φ_2 entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, und daß der dominierende Teil der aus dem Diffraktionspotential φ_2^S (hauptsächlich Teil V) hervorgerufene Teil ist. Es ist deshalb nicht richtig, gerade diesen Anteil außer Acht zu lassen. Schließlich wurde in den Abb. 8.e und 8.f die Gegenüberstellung mit der linearen Theorie dargestellt. Bei diesem Beispiel dominieren die nichtlinearen Effekte besonders in vertikaler Richtung.

Der Zylinder des vorherigen Beispiels wurde weiterhin im Bereich des Bodens mit einer Kreisplatte unterlegt und neu berechnet. Dies führte zu einer Verminderung der vertikalen Kräfte 2.Ordnung. In den Abb. 9.a bzw. 9.b wird der Betrag der Summe I bis V der Horizontal- bzw. Vertikalkräfteanteile 2.Ordnung ebenso wie im vorherigen Beispiel mit den aus der Literatur vorhandenen experimentellen und theoretischen Ergebnissen verglichen.

Der Einfluß der Wellensteilheit wird am Beispiel einer konusförmigen Schwerkraftstruktur in der Abb. 10 demonstriert. Hierfür wurden zuverlässige Experimente, die den nichtlinearen Charakter der Belastung auf dieser Struktur verdeutlichen, von Jamieson et. al. [48] durchgeführt. Für die Idealisierung des die Plattform umgebenden Wassers wurden 9 Makroelemente benutzt. Die Berechnungen haben bei der CYBER-175 im Durchschnitt ca. 200 CPU Sekunden pro Frequenz in Anspruch genommen. Für drei Werte des Verhältnisses Bodendurchmesser zu Wellenlänge (D/λ) wurde in den Abb. 10.a bis 10.c der maximale Wert der Kraft als eine Funktion der Wellensteilheit (H/λ) dargestellt. Mit wachsender Wellenhöhe nehmen die experimentell ermittelten Werte fast quadratisch zu und zeigen deutlich, daß die lineare Theorie diese Lasten unterschätzt. Dies begründet die Notwendigkeit einer nichtlinearen theoretischen Erfassung.

Die Übereinstimmung der durch die Stokessche Theorie 2.Ordnung ermittelten Diffraktionskräfte mit den experimentellen Ergebnissen kann

als gut bezeichnet werden. Wegen der besonders geneigten Körperoberflächenform wird jedoch die Welle im sehr nahen Bereich der Wasserlinie gezwungen, sich stark zu verformen bzw. zu brechen. In diesem Bereich treten u.a. Effekte von höherer als 2. Ordnung auf, die durch die in dieser Arbeit benutzte Stokessche Theorie 2. Ordnung nicht berücksichtigt wurden. Die relativ kleinen Differenzen zwischen den experimentellen Ergebnissen und der Theorie können hauptsächlich hierauf zurückgeführt werden.

Als nächstes wurden zwei abgestufte Zylinder untersucht, die im Offshore Bereich breite Anwendung finden, ein schwimmender abgestufter Zylinder und ein auf dem Boden stehender (Abb. 11 bzw. Abb. 12). Es kann festgestellt werden, daß für den auf dem Boden stehenden abgestuften Zylinder die Kräfte 2. Ordnung in vertikaler Richtung größer sind (Abb. 11.c) als die Kräfte 2. Ordnung in horizontaler Richtung (Abb. 11.b). Für den schwimmenden abgestuften Zylinder nehmen die Effekte 2. Ordnung erst ab $ka > 1.5$ zu. Dieses trifft sowohl für die horizontalen als auch für die vertikalen Gesamtkräfte zu (Abb. 12.b, 12.c).

Schließlich wurde eine schwimmende Halbkugel mit Hilfe der Makroelementmethode analysiert. Es wurde eine Idealisierung durch 6 Makroelemente vorgenommen. Die fünf Komponenten der Kräfte 2. Ordnung sind in den Abb. 13.a bis 13.d dargestellt. Bei den Makroelementen des Typs A bzw. C wurden 20 bzw. 30 Terme bei den n -Summationen berücksichtigt. Das Aufsummieren über m wurde bis $m = 7$ erstreckt. Hierfür liegen aus der Literatur keine theoretischen oder experimentellen Ergebnisse vor, bzw. sie sind dem Autor nicht bekannt.

Der Einfluß der Wellensteilheit und des Verhältnisses Wellenlänge/Durchmesser auf die Maximalkräfte in horizontaler und vertikaler Richtung sowie ein Vergleich mit den Ergebnissen aus der linearen Theorie sind in den Abb. 13.e bzw. 13.f gezeichnet. Es ist auch hier deutlich, daß die Effekte 2. Ordnung im gesamten Frequenzbereich und für Wellen mit großer Wellensteilheit H/λ auf die Belastung der Struktur einen nicht vernachlässigbaren Beitrag liefern.

7. ZUSAMMENFASSUNG :

Bei der Betrachtung der nichtlinearen Hydrodynamik kann die Erfassung der Kräfte 2.Ordnung auf Körper, die den Wellen ausgesetzt sind, von besonderer Bedeutung werden. Speziell für Wellen mit großen Steilheiten und für nichtlineare ankommende Wellen kann erst die Mitberücksichtigung des Randwertproblems 2.Ordnung zu zuverlässigen Aussagen über die Strukturbelastung führen.

In dieser Arbeit wurde eine Methode präsentiert, die die Berechnung der oszillierenden Diffraktionskräfte zweiter Ordnung auf beliebige rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse ermöglicht.

Es wurde Wert auf die Errechnung der durch das Potential 2.Ordnung hervorgerufenen Kräfte gelegt.

Diese Methode benutzt den zweiten Greenschen Satz sowie entsprechende lineare Abstrahlpotentiale, um die durch das Potential 2.Ordnung entstehenden Kräfte zu ermitteln. Die durch Molin's [21] Arbeit entstandenen theoretischen Grundlagen wurden hier auf beliebige rotationssymmetrische Körper unter Benutzung der Makroelementmethode angewandt bzw. erweitert. Die Makroelementmethode, mit deren Hilfe hier zuerst das Diffraktionsproblem 1.Ordnung gelöst wurde, hat sich auch für die Erfassung des nichtlinearen Problems 2.Ordnung, insbesondere in Verbindung mit der Behandlung der Meeresoberflächenrandbedingung, numerisch als sehr effizient erwiesen.

Die Berechnung der restlichen doppelharmonischen sowie zeitunabhängigen Kräfteanteile 2.Ordnung erfolgte durch direkte Integration der Druckkomponenten auf der Körperoberfläche.

Die durch eine ankommende monochromatische Stokessche Welle 2.Ordnung entstehenden Diffraktionskräfte in horizontaler und vertikaler Richtung sowie die entsprechenden Momentenausdrücke wurden ermittelt und angegeben.

Ein effizienter Algorithmus wurde entwickelt, um die rechnerisch anspruchsvolle Integration der Meeresoberflächenfunktion bis ins Unendliche genau zu ermitteln. Die Methode erreicht eine für die Praxis erforderliche Genauigkeit in verhältnismäßig geringer Rechenzeit. Dadurch ist eine Berechnung auch auf "Mikrorechnern" (z.B. PC-AT) realisierbar.

Um den Einfluß der nichtlinearen Effekte zu demonstrieren, wurden für einige im Offshore Bereich praktische Anwendung findende Strukturformen Studien durchgeführt. Dazu wurden für eine Reihe von rotationssymmetrischen Körpern numerische Ergebnisse gezeigt und kurz erläutert. Die Beiträge aller Komponenten 2.Ordnung wurden getrennt dargestellt. Dabei wurde zwischen den rechnerisch ermittelten und den aus der Literatur bekannten experimentellen und/oder theoretischen Ergebnissen eine gute Übereinstimmung erzielt.

Es erwies sich, daß die lineare Theorie die durch Wellen größerer Steilheiten hervorgerufenen Strukturlasten zum Teil stark unterschätzt. Weiterhin wurde gezeigt, daß im allgemeinen die Effekte 2.Ordnung im gesamten Frequenzbereich einen Lastbeitrag liefern, mit Vorliebe jedoch bei größeren Verhältnissen Wellenlänge/Körperdurchmesser. Weiterhin kann festgestellt werden, daß diese Effekte in größeren Wassertiefen auch dort noch einwirken, wo die Effekte 1.Ordnung schon längst abgeklungen sind.

Um die Effekte 2.Ordnung genau genug bestimmen zu können, ist zuerst eine präzise Ermittlung der linearen Größen notwendig.

Die hier benutzte Theorie ist allgemeingültig und kann auf allgemeine 3-D Methoden (z.B. Singularitätenverfahren) angewandt werden. Die hier ermittelten Ergebnisse können u.a. als Basis dienen, um zukünftige allgemeinere Algorithmen zu vergleichen bzw. zu verifizieren.

Die Untersuchung des nichtlinearen Bewegungsverhaltens frei schwimmender bzw. schwebender Strukturen und der daraus auf den Körpern resultierenden Belastungen 2.Ordnung ist ein sinnvoller Erweiterungsschritt der vorliegenden Arbeit.

Die Berechnung der nichtlinearen Belastung infolge bichromatischer Wellen ermöglicht weiterhin (obwohl numerisch sehr intensiv) die Erfassung des nichtlinearen Verhaltens der Struktur unter natürlichem bzw. unregelmäßigem Seegang.

8. L I T E R A T U R :

1. C.M. Lee : The Second-Order Theory of Cylinders Oscillating Vertically in a Free Surface. *Dissertation, U. of California, Berkeley, Rep.66-7* (1966)
2. R. L. Potash : Second-Order Theory of Oscillating Cylinders. *Dissertation, University of California, Berkeley, California* (1970)
3. H. Söding : Second-Order Forces on Oscillating Cylinders in Waves. *Schiffstechnik*, **23** (1976)
4. G. Parissis : Second-Order Potentials and Forces for Oscillating Cylinders on a Free Surface. *Dissertation, M.I.T., Rep.66-10* (1966)
5. Y. Kiyosuka : Experimental Study on Second-Order Forces Acting on Cylindrical Body in Waves. *14th Symposium on Naval Hydrodynamics Ann. Arbor*, (1983)
6. A. Papanikolaou : Zum nichtlinearen Problem eines vertikal schwingenden zylindrischen Körpers beliebiger Form. *Dissertation, Tech. University Berlin*. (1977)
7. M. Yamagouchi and Y. Tsuchiya : Nonlinear Effect of Waves on Wave Pressure and Wave Force on a Large Cylindrical Pile (Japanisch) *Proceedings of Civil Engineering Society in Japan, Tokyo, Japan, No.229*, (1974), 290-291

8. H. Raman, G.V.Rao and P. Venkatanarasaiah : Diffraction of Non-linear Surface Waves by a Circular Cylinder. *Acta Mechanica*, 23 (1975) 145-158
9. H. Raman and P. Venkatanarasaiah : Forces due to Nonlinear Waves on Vertical Cylinders. *Journal of Waterways, Harbors, and Coastal Engineering Division, ASCE* 102 (Aug. 1976) 301-316
10. H. Raman, N. Jothishankar and P. Venkatanarasaiah : Nonlinear Wave Interaction with Vertical Cylinder of Large Diameter *Journal of Ship Research*, 21, (June 1977), 120-124
11. M. de St. Q. Isaacson : Nonlinear Wave Forces on Large Offshore Structures. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, 103 (Feb 1977), 166-170, 103 (May 1977), 299-300 and 104 (Nov 1978), 457-459
12. C.J. Garrison : Discussion of "Nonlinear Wave Forces on Large Offshore Structures", by M. de St. Q. Isaacson, *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, 104 (Feb 1978), 93-94
13. S.K. Chakrabarti : Discussion of "Nonlinear Wave Forces on Large Offshore Structures", by M.de St. Q. Isaacson. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering Division ASCE*, 103, (Nov 1977) 567-570
14. J.V. Wehausen : Perturbation Methods in Diffraction. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, 106 (May 1980), 290-291
15. T. Miloh : Irregularities in Solutions of Nonlinear Wave Diffraction Problem by Vertical Cylinder, *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, 106 (May 1980), 279-284

16. M. Chen and R.T. Hudspeth : Nonlinear Diffraction by Eigenfunction Expansions. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE*, **108**, (Aug. 1982), 306-325
17. A. Sommerfeld : Partielle Differentialgleichungen der Physik. *Vorlesungen über theoretische Physik. Verlag Harri Deutsch*, **6** (1978)
18. J.N. Hunt and R.E. Baddour : The Diffraction of Nonlinear Progressive Waves by a Vertical Cylinder. *Q. Journal. Mech. appl. Math.*, **37** (1981) Pt1.
19. J.N. Hunt and A.N. Williams : Nonlinear Diffraction of Stokes Water Waves by a Circular Cylinder for Arbitrary Uniform Depth. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, **1** No 3 (1982), 429-449
20. B. Molin : Second Order Diffraction Loads Upon Three Dimensional Bodies. *Applied Ocean Research*, **1** (1979) 197-202
21. B. Molin, A. Marion : Etude au deuxième ordre du comportement des corps flottants en houle régulière. (Französisch) *IFP. report 33031*, (1985)
22. B. Molin, A. Marion : Second-Order Loads and Motions for Floating Bodies in Regular Waves. *Fifth International Symposium in Off-shore Mechanics and Arctic Engineering OMAE*, (Tokyo April 1986.)
23. C.C. Mei : The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. *John Wiley & Sons*, (1983), 657-665
24. M. D. Haskind : The Exciting Forces and Wetting of Ships in Waves (Russisch). *Izvestia Akademii Nauk S.S.S.R., Otdelenie Tekhnicheskikh*

Naut., No. 7, 65-79 (Englische Übersetzung unter: "David Taylor Model Basin Translation No. 307, (March 1962)" vorhanden).

25. M.J. Lighthill : Waves and Hydrodynamic Loading. *Proc. 2nd. Int. Conf. Behavior of Offshore Structures.* 1 (1979), 1-40
26. M. Rahman : Wave Diffraction by Large Offshore Structures. An Exact Second Order Theory. *Applied Ocean Research*, 6 (1984), 90-100
27. G.R. Mogridge and W.W. Jamieson : Wave Loads on Large Circular Cylinders: A Design Method. *National Research Council of Canada, Hydraulics Lab., Report Nr. MH 111* (1976)
28. M. Rahman : Nonlinear Wave Loading on Offshore Structures. *Proc. Int. Symposium on Ocean Space Utilisation. Ocean Space 85* (Tokyo 1985).
29. M. Rahman : The Hydrodynamics of Waves and Tides with Some Applications. *Computational Mechanics Publications.* (1988)
30. C.J. Garrison : Nonlinear Wave Loads on Large Structures. *Proceedings of Third International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium (OMAE)*, 1, (1984) 128-135
31. K. Masuda, H. Ishisuka, W. Kato : Nonlinear Wave Forces on Plural Vertical Cylinders with Arbitrary Cross-Sections. *Proc. Int. Symposium on Ocean Space Utilisation. Ocean Space 85* (Tokyo 1985).
32. K. Kokkinowrachos, S. Asorakos und S. Mavrakos : Belastungen und Bewegungen großvolumiger Seebauwerke durch Wellen. *Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen No. 2905.* Westdeutscher Verlag. (Opladen 1980)

33. K. Kokkinowrachos, S. Asorakos and S. Mavrakos : Behaviour of Vertical Bodies of Revolution in Waves. *Ocean Engineering*, **13**, No.6, (1986) 505-538

34. S.K. Chakrabarti : Non-linear Wave Effects on Large Offshore Structures *Second Int. Symp. on Ocean Engineering and Ship Handling* (Gothenburg 1983)

35. Y. Kyojuka : On the Nonlinear Wave Forces Acting on Submerged Cylinders. *Proc. Fifth Int. Symp. Offshore Mechanics and Arctic Engineering, (OMAE)*, (Tokyo, April 1986)

36. D. Qin, Y. Wang : The Nonlinear Wave Force on Large Cylinder. *Proc. Fifth Int. Symp. Offshore Mechanics and Arctic Engineering, (OMAE)*, (Tokyo, April 1986)

37. T. Sabuncu and Ö. Gören : Second-Order Vertical and Horizontal Wave Forces On a Circular Dock. *Ocean Engineering* **12** No.4: (1985) 341-361

38. J.J. Stoker : Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. *Interscience Publishers Inc.*, (New York, 1957)

39. S. Mavrakos : Eine lineare Lösung des Oberflächenwellenproblems außerhalb und innerhalb rotationssymmetrischer Körper mit vertikaler Achse. *Dissertation* (RWTH Aachen 1981)

40. S. Asorakos : Ein potentialtheoretisches Verfahren zur Erfassung der Wechselwirkung zwischen Elementarwelle, starrem Körper und elastischem porösem Boden. *Dissertation* (RWTH Aachen 1981)

41. K. Kokkinowrachos : Ein Beitrag zur Lastermittlung für zylindrische Erdölspeicher in Offshore-Gebieten. *Habilitation RWTH Aachen* 1974.
42. K. Kokkinowrachos, I. Thanos and H.G. Zibell : Hydrodynamic Interaction Between Several Vertical Bodies of Revolution in Waves. *Proc. Fifth Int. Symp. Offshore Mechanics and Arctic Engineering, (OMAE)*, (Tokyo, April 1986)
43. K. Kokkinowrachos and I. Thanos : Structure-Wave Interaction under Earthquake Excitation *Proc. Seventh Int. Symp. Offshore Mechanics and Arctic Engineering, (OMAE)*, (Houston-Texas, February 7-12, 1988)
44. I. Sneddon : Elements of Partial Differential Equations. *Mc.Graw Hill*.
45. R. Mac Camy and R. Fuchs : Wave Forces on Piles. A Diffraction Theory. *Beach Erosion Board, Technical Memorandum (69)*, (1954)
46. A. G. Abul-Azm and A. N. Williams : Second-Order Diffraction Loads on Truncated Cylinders. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* 114 No.4 (July, 1988)
47. R. Eatock Taylor and S. M. Hung : Second-Order Diffraction Forces on a Vertical Cylinder in Regular Waves. *Applied Ocean Research* 9, No.1 (Jan. 1987)
48. W.W. Jamieson, E. Mansard, and G.R. Mogridge : Wave Loading on a Conical Gravity Platform. *Proc. 4th Int. Conf. on Behaviour of Offshore Structures*, (Delft, 1985) 673-684

49. M. Abramowitz and I. Stegun : Handbook of Mathematical Functions. *Dover Publications*, (1972)
50. G.N. Watson : A Treatise on the Theory of Bessel Functions. *Cambridge University Press*, 2nd Edition, (1944)
51. I.S. Gradstein und I.M. Ryshik : Summen -Produkt -und Integral-Tafeln. 1 und 2. *Verlag Harri Deutsch*. (1981)
52. Sir H. Lamb : Hydrodynamics . *Dover Publications*, (1945)
53. P.M. Morse and H. Feshbach : Methods of Theoretical Physics. *Mc. Graw Hill*. (1953)
54. I. S. Sokolnikoff and R.M. Redheffer : Methods of Physics and Modern Engineering. *Mc. Graw Hill* (1966)
55. I. Sneddon : Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik. *B-I. Reihe* 54, (1960)
56. G. G. Stokes : On the Theory of Oscillatory Waves *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 8, (1847), 441-455
57. G. G. Stokes : Erweiterung der im Jahre 1847 veröffentlichten Abhandlung unter dem gleichen Titel. *Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Papers*. (1880) I, 314
58. J. Wehausen and E. Laitone : "Surface Waves", in: Handbuch der Physik. *Springer Verlag*, Berlin (1960) 447-778

59. E. Krause : Strömungslehre I und II. Vorlesungen aus dem "Aerodynamischen Institut" der RWTH Aachen. (Aachen 1988).
60. B. Kinsman : Wind Waves. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.* (1965)
61. G. Neumann and W. Pierson : Principles of Physical Oceanography. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.* (1966)
62. M. McCormick : Ocean Engineering Wave Mechanics, *John Wiley & Sons*, (1973)
63. H. Söding : Numerische Methoden der Strömungsmechanik. *Vorlesungen aus dem "Institut für Schiffbau" der Universität Hamburg*, (Hamburg 1985).
64. B. Molin, J.P. Hairault : On Second-Order Motion and Vertical Drift Forces for Three-Dimensional Bodies in Regular Waves. *Int. Workshop on Ship and Platform Motions*, (Berkeley 1983).
65. B. Molin : Second-Order Double Frequency Loads and Motions for 3D Bodies. *First Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, (MIT, 1986).
65. B. Molin, L. Boudet : Second-Order Deformation of the Free-Surface Elevation Around a Vertical Cylinder. *Third Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, (Woods Hole, Massachusetts, April 1988).

9. ANHÄNGE:

ANHANG I

Trennung der Randbedingungen an der Meeresoberfläche.

Äquivalente Randbedingungen erster und zweiter Ordnung:

Mit Hilfe der Störungsrechnung (perturbation method) werden das Gesamtpotential $\Phi(r, \vartheta, z, t)$ sowie die Wellenerhöhung $\zeta(r, \vartheta, t)$ als Potenzreihen eines kleinen Parameters $\varepsilon = kH/2$ bis zum quadratischen Term entwickelt:

$$\Phi(r, \vartheta, z, t) = \varepsilon \Phi_1(r, \vartheta, z, t) + \varepsilon^2 \Phi_2(r, \vartheta, z, t) \quad (\text{I-1})$$

$$\zeta(r, \vartheta, t) = \varepsilon \zeta_1(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2 \zeta_2(r, \vartheta, t) \quad (\text{I-2})$$

Die Randbedingungen (2-2) und (2-3) gelten auf der unbekanntenen Wellenoberfläche $\zeta(r, \vartheta, t)$. Unter der Annahme kleiner Wellenerhöhung ζ kann weiterhin der Ausdruck des Potentials Φ und seiner Ableitungen für $z = \zeta + d$ nach einer Taylorschen Reihe um die Stillwasserlinie $z = d$ entwickelt werden.

$$\Phi(r, \vartheta, \zeta + z, t) = \varepsilon \Phi_1(r, \vartheta, z, t) + \varepsilon^2 \left[\Phi_2(r, \vartheta, z, t) + \zeta_1(r, \vartheta, t) \Phi_{1z}(r, \vartheta, z, t) \right] \quad (\text{I-3})$$

für $z = d$, bzw:

$$\Phi_r = \varepsilon \Phi_{1r} + \varepsilon^2 \left(\Phi_{2r} + \zeta_1 \Phi_{1rz} \right) \quad (\text{I-4})$$

$$\Phi_{\vartheta} = \varepsilon \Phi_{1\vartheta} + \varepsilon^2 \left(\Phi_{2\vartheta} + \zeta_1 \Phi_{1\vartheta z} \right) \quad (\text{I-5})$$

$$\Phi_z = \varepsilon \Phi_{1z} + \varepsilon^2 \left(\Phi_{2z} + \zeta_1 \Phi_{1zz} \right) \quad (\text{I-6})$$

$$\Phi_t = \varepsilon \Phi_{1t} + \varepsilon^2 \left(\Phi_{2t} + \zeta_1 \Phi_{1zt} \right) \quad (\text{I-7})$$

Durch Einsetzen der Gln. (I-3) bis (I-7) in die Gleichung (2-2), wobei Terme höher als 2. Ordnung vernachlässigt werden, folgt:

$$\varepsilon \zeta_{1t} + \varepsilon^2 \left(\zeta_{2t} + \zeta_{1r} \Phi_{1r} + \frac{1}{r^2} \zeta_{1\theta} \Phi_{1\theta} \right) = \varepsilon \Phi_{1z} + \varepsilon^2 (\Phi_{2z} + \zeta_1 \Phi_{1zz}) \quad (\text{I-8})$$

bzw:

$$\zeta_{1t} = \Phi_{1z} \quad \text{für } z = d \quad (\text{I-9})$$

und

$$\zeta_{2t} + \zeta_{1r} \Phi_{1r} + \frac{1}{r^2} \zeta_{1\theta} \Phi_{1\theta} = \Phi_{2z} + \zeta_1 \Phi_{1zz}, \quad \text{für } z = d \quad (\text{I-10})$$

Aus der Gleichung (2-3) folgt entsprechend:

$$g \zeta_1 + \Phi_{1t} = 0 \quad (\text{I-11})$$

und

$$\zeta_1 \Phi_{1zt} + g \zeta_2 + \Phi_{2t} + \frac{1}{2} \left(\Phi_{1r}^2 + \Phi_{1z}^2 + \frac{1}{r^2} \Phi_{1\theta}^2 \right) = 0 \quad (\text{I-12})$$

Durch die Eliminierung der Wellenerhöhung 2. Ordnung ζ_2 aus den Gln. (I-10) und (I-12) bekommt man:

$$\begin{aligned} & \Phi_{1r} \Phi_{1rt} + \Phi_{1z} \Phi_{1zt} + \frac{1}{r^2} \Phi_{1\theta} \Phi_{1\theta t} + \Phi_{2tt} + \zeta_1 \Phi_{1ttz} + \zeta_{1t} \Phi_{1tz} \\ & - g \zeta_{1r} \Phi_{1r} - \frac{g}{r^2} \zeta_{1\theta} \Phi_{1\theta} = -g \Phi_{2z} - g \zeta_1 \Phi_{1zz} \end{aligned} \quad (\text{I-13})$$

für $z = d$.

Durch Einsetzen der Gln. (I-9) und (I-11) in die Gleichung (I-13) wird auch ζ_1 eliminiert. Man bekommt dann:

$$g \Phi_{2z} + \Phi_{2tt} = -2 \left(\Phi_{1r} \Phi_{1rt} + \frac{1}{r^2} \Phi_{1\theta} \Phi_{1\theta t} + \Phi_{1z} \Phi_{1zt} \right) + \Phi_{1t} \Phi_{1rz} + \frac{1}{g} \Phi_{1t} \Phi_{1ttz} \quad (\text{I-14})$$

bzw. die Gleichung (2-11.b). Die Ermittlung der restlichen Randbedingungen 1. Ordnung (2-10) und 2. Ordnung (2-11) mit Hilfe der Störungsrechnung ist offensichtlich.

ANHANG II

Summenbildung des Produktes von zwei Fourier-Reihen

Die Multiplikation von zwei unendlichen trigonometrischen Reihen kann wie folgt formuliert werden :

$$S = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cos(i\vartheta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \cos(j\vartheta) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \cos(i\vartheta) \cos(j\vartheta) \quad (\text{I} - 1)$$

wobei $a_{ij} = \alpha_i b_j$ ist.

Die einzelnen Glieder der Summe bilden eine semi-infinite Matrix, und das Aufsummieren wird reihenweise vorgenommen.

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0j} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II} - 2)$$

Unter der Voraussetzung, daß ab einer gewissen grossen Zahl i bzw. j die Koeffizienten a_{ij} mit wachsendem i bzw. j kleiner werden (wie es hier bei den Fourier-Reihen der Fall ist), kann die Summation auch antidiagonal (Diagonale senkrecht zur Hauptdiagonale bzw. $i + j = \text{konstant}$) durchgeführt werden.

$$\begin{array}{cccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0j} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{array} \quad (\text{II} - 3)$$

oder

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,m-j} \cos(j\vartheta) \cos[(m-j)\vartheta] \quad (\text{II} - 4)$$

Durch die Anwendung des Kosinus-Theorems folgt daraus:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{i,m-j} \left\{ \cos[(m-2j)\vartheta] + \cos(m\vartheta) \right\} \quad (\text{II} - 5)$$

Die erste Summation kann jetzt über parallel zur Hauptdiagonale verlaufende Diagonalen durchgeführt werden.

$$\begin{array}{cccccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0j} & \dots & & \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & & \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & & \end{array} \quad (\text{II} - 6)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{j,m-j} \cos[(m-2j)\vartheta] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=m}^{\infty} (a_j b_{j-m} + a_{j-m} b_j) \cos(m\vartheta) \quad (\text{II} - 7)$$

Die ursprüngliche Multiplikation zweier Kosinus-Reihen erfolgt daraus:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\vartheta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \cos(j\vartheta) \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=m}^{\infty} (a_j b_{j-m} + a_{j-m} b_j) + \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} \right] \cos(m\vartheta) \quad (\text{II} - 8)$$

Entsprechendes gilt auch für die Multiplikation zweier Sinus-Fourier-Reihen:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin(m\vartheta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \sin(j\vartheta) \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=m}^{\infty} (a_j b_{j-m} + a_{j-m} b_j) - \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} \right] \cos(m\vartheta) \quad (\text{II} - 9)$$

mit $\epsilon_m = 1$ für $m = 0$ und $\epsilon_m = 2$ für $m \neq 0$. Für $a_i = b_i$ kann weiterhin vereinfacht werden:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\vartheta) \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\epsilon_m \sum_{j=m}^{\infty} a_j a_{j-m} + \sum_{j=0}^m a_j a_{m-j} \right] \cos(m\vartheta) \quad (\text{II} - 10)$$

bzw.

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin(m\vartheta) \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\epsilon_m \sum_{j=m}^{\infty} a_j a_{j-m} - \sum_{j=0}^m a_j a_{m-j} \right] \cos(m\vartheta) \quad (\text{II} - 11)$$

ANHANG III

Ermittlung der in dem asymptotischen Ausdruck der Meeresoberflächenfunktion auftretenden Integrale.

Für eine positive reelle Zahl $k \geq 1/2$ und eine komplexe Zahl β ($\beta \neq 0$) kann das unbestimmte Integral $\int e^{\beta x} x^{-k} dx$ nach einer partiellen Integration wie folgt ausgedrückt werden:

$$\int \frac{e^{\beta x}}{x^k} dx = \frac{1}{\beta} x^{-k} e^{\beta x} + \frac{k}{\beta} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+1}} dx$$

oder

$$\int \frac{e^{\beta x}}{x^k} dx - \frac{k}{\beta} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+1}} dx = \frac{1}{\beta x^k} e^{\beta x} \quad (\text{III-1})$$

Wird in der Formel (III-1) $k = k+1$ eingesetzt und die neu entstandene Gleichung mit k/β multipliziert, so bekommt man:

$$\frac{k}{\beta} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+1}} dx - \frac{k(k+1)}{\beta^2} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+2}} dx = \frac{k}{\beta^2 x^{k+1}} e^{\beta x} \quad (\text{III-2})$$

In der Gleichung (III-2) wird erneut $k = k+1$ eingesetzt und das Ergebnis mit k/β multipliziert.

$$\frac{k(k+1)}{\beta^2} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+2}} dx - \frac{k(k+1)(k+2)}{\beta^3} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+3}} dx = \frac{k(k+1)}{\beta^2 x^{k+2}} e^{\beta x} \quad (\text{III-3})$$

Nach n Schritten (wobei immer in die letzte Gleichung $k = k+1$ eingesetzt wird und mit k/β multipliziert wird) bekommt man:

$$\frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{\beta^n} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+n}} dx - \frac{k(k+1)\dots(k+n)}{\beta^{n+1}} \int \frac{e^{\beta x}}{x^{k+n+1}} dx =$$

$$= \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{\beta^{n+1} x^{k+n}} e^{\beta x} \quad (\text{III-4})$$

Für $n \rightarrow \infty$ und durch die Addition der linken und rechten Seiten aller Gleichungen bekommt man dann die Formel:

$$\int \frac{e^{\beta x}}{x^k} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\beta x}}{\beta x^k} \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{\beta^n x^n} \right) \right]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\beta x}}{\beta x^k} \left(1 + \sum_{n=1}^N \prod_{j=1}^n \frac{(k+j-1)}{\beta x} \right) \right] \quad (\text{III-5})$$

Durch Substitution von $k = m + 1/2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) und $\beta = i\alpha$ (α reelle Zahl) in die Glg (III-5) bekommt man die Formel:

$$\int \frac{e^{i\alpha x}}{x^{m+1/2}} dx = \frac{-ie^{i\alpha x}}{\alpha x^{m+1/2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \prod_{j=1}^n \frac{(m+j-1/2)}{\alpha x} \right] \quad (\text{III-6})$$

Der reelle bzw. imaginäre Teil der Glg. (III-6) ergibt nach einer Reihe von algebraischen Operationen die Ausdrücke der Glgn. (5-77) bzw. (5-78). Die zuletzt erwähnten Formeln ermittelt man leichter durch wiederholte partielle Integrationen.

Das Integral $\int x^{-k} \cos(\alpha x) dx$ für $k \geq 1/2$ und α eine reelle Zahl wird nach zweimaliger partieller Integration wie folgt ausgedrückt:

$$\int \frac{\cos \alpha x}{x^k} dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha x^k} - \frac{k \cos \alpha x}{\alpha^2 x^{k+1}} - \frac{k(k+1)}{\alpha^2} \int \frac{\cos \alpha x}{x^{k+2}} dx$$

oder

$$\int \frac{\cos \alpha x}{x^k} dx + \frac{k(k+1)}{\alpha^2} \int \frac{\cos \alpha x}{x^{k+2}} dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha x^k} - \frac{k \cos \alpha x}{\alpha^2 x^{k+1}} \quad (\text{III-7})$$

Wendet man diese Formel für $k = k + 2$ an und multipliziert dann die ermittelte Gleichung mit $-k(k+1)/\alpha^2$ so wird erhalten:

$$\begin{aligned} & -\frac{k(k+1)}{\alpha^2} \int \frac{\cos \alpha x}{x^{k+2}} dx - \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{\alpha^4} \int \frac{\cos \alpha x}{x^{k+4}} dx \\ & = -\frac{k(k+1) \sin \alpha x}{\alpha^3 x^{k+2}} + \frac{k(k+1)(k+2) \cos \alpha x}{\alpha^4 x^{k+3}} \quad (\text{III-8}) \end{aligned}$$

Wird dieser Vorgang n -mal wiederholt (indem für $k = k + 2$ eingesetzt wird und das Ergebnis mit $-k(k+1)/\alpha^2$ multipliziert wird), so kann gezeigt werden daß:

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & (-1)^n \frac{[k(k+1)][(k+2)(k+3)] \dots [(k+2n-2)(k+2n-1)]}{\alpha^{2n}} \int \frac{\cos \alpha x}{x^{k+2n}} dx \\ & + (-1)^n \frac{[k(k+1)][(k+2)(k+3)] \dots [(k+2n-1)(k+2n)]}{\alpha^{2n+2}} \int \frac{\cos \alpha x}{x^{k+2n+1}} dx \\ & = (-1)^n \frac{[k(k+1)] \dots [(k+2n-2)(k+2n-1)]}{\alpha^{2n+1} x^{k+2n}} \sin \alpha x \\ & \quad - (-1)^n \frac{k[(k+1)(k+2)] \dots [(k+2n-1)(k+2n)]}{\alpha^{2n+2} x^{k+2n+1}} \cos \alpha x \quad (\text{III-9}) \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ und durch die Summation beider Seiten der Glgn (III-7), (III-8), ..., (III-9), ..., usw. erhält man dann die Formel des gesuchten Integrals:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos \alpha x}{x^k} dx &= \frac{\sin \alpha x}{\alpha x^k} - \frac{k \cos \alpha x}{\alpha^2 x^{k+1}} \\
&+ \frac{\sin \alpha x}{\alpha x^k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \frac{(k+2j-2)(k+2j-1)}{(\alpha x)^2} \\
&- \frac{k \cos \alpha x}{\alpha^2 x^{k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \frac{(k+2j-1)(k+2j)}{(\alpha x)^2} \quad (\text{III} - 10)
\end{aligned}$$

Wird in die Glg (III - 10) $k = m + 1/2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) eingesetzt, so bekommt man den Ausdruck (5-77).

Die Berechnung des Integrals $\int x^{-(m+1/2)} \sin(\alpha x) dx$ erfolgt dann auf ähnliche Weise.

ANHANG IV

Im folgenden wird anhand eines Kraftanteiles die Herleitung der Formeln für die Kraftanteile I bis IV demonstriert. Als charakteristischer Teil wurde die vertikale Kraft 2. Ordnung F_{2s}^{II} auf eine Ringfläche mit $a_p < r < a_{p+1}$ und $z = h_p$ infolge der Quadrate der Geschwindigkeiten gewählt. Die restlichen Anteile lassen sich analog entwickeln. Aus der Formel (2-55) mit $j = 3$ und $\eta_3 = -1$ bekommt man:

$$F_{2s}^{II} = -\frac{\epsilon^2 \rho}{4} \int_0^{2\pi} \int_{a_p}^{a_{p+1}} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \eta_3 r dr d\vartheta \quad \text{für } z = h_p \quad (\text{IV} - 1)$$

denn die Geschwindigkeitskomponente in vertikaler Richtung ist gleich Null.

Die Glg. (IV-1) wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

$$F_{2s}^{II} = F_{2s}^{IIr} + F_{2s}^{II\vartheta} \quad (\text{IV} - 2)$$

wobei die Indizierung II_r und II_ϑ sich auf die entsprechenden Ableitungen der Glg.(IV-1) bezieht.

Das Potential $\varphi_1(r, \vartheta, z)$ wird in diesem Fall aus der Glg. (4-5) und (4-20) entnommen:

$$\varphi(r, \vartheta, z) = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \sum_{n_p} \epsilon_p \Lambda_{mn_p}(r) \cos\left(\frac{n_p \pi}{h_p} z\right) \cos(m\vartheta) \quad (\text{IV} - 3)$$

mit

$$\Lambda_{mn_p}(r) = R_{mn_p}(r) \mathcal{F}_{mn_p} + R^*(r)_{mn_p} \mathcal{F}_{mn_p}^* \quad (\text{IV} - 4)$$

die Ableitung des Potentials in radialer Richtung wird:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{z=h_p} = \varphi_{1r} = -\frac{i\omega d}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \sum_{n_p} \epsilon_p (-1)^{n_p} \Lambda'_{mn_p}(r) \cos(m\vartheta) \quad (\text{IV} - 5)$$

mit $\Lambda'_{mn_p} = \frac{d\Lambda_{mn_p}}{dr}$. Weiterhin durch die Abkürzung:

$$S_m(r) = -\frac{i\omega d}{k} \epsilon_m i^m \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} (-1)^{n_p} \Lambda_{mn_p}(r) \quad (\text{IV} - 6)$$

nimmt die Ableitung des Potentials nach r die Form an:

$$\varphi_{1r} = \sum_{m=0}^{\infty} S'_m(r) \cos(m\vartheta) \quad (\text{IV} - 7)$$

Durch Einsetzen in die Glg. (IV-2) folgt dann:

$$F_{2_s}^{IIr} = -\frac{\epsilon^2 \rho}{4} \int_0^{2\pi} \int_{a_p}^{a_p+1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} S'_m(r) \cos(m\vartheta) \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(S'_j(r) \cos(j\vartheta) \right) r dr d\vartheta \quad (\text{IV} - 8)$$

Durch die Anwendung der für konvergierende Reihen geltenden Formel:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m=0}^{\infty} S'_m \cos(m\vartheta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} S'_j \cos(j\vartheta) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\epsilon_m \sum_{j=m}^{\infty} S'_j S'_{j-m} + \sum_{j=0}^m S'_j S'_{m-j} \right] \cos(m\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{IV} - 9)$$

und aus der Formel:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\vartheta) d\vartheta = 2\pi \delta_{m,0} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ für } i = j \quad \delta_{ij} = 0, \text{ für } i \neq j) \quad (\text{IV} - 10)$$

folgt:

$$F_{2_s}^{IIr} = -\frac{\epsilon^2 \rho \pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_m} \int_{a_p}^{a_p+1} S_m'^2(r) r dr \quad (\text{IV} - 11)$$

Wird der Ausdruck aus der Glg.(IV-6) für $S_m(r)$ eingesetzt, so erhält man:

$$F_{2s}^{IIr} = \frac{\rho \epsilon^2 \pi}{8k^2} (\omega d)^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \epsilon_\lambda \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} (-1)^{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{j_p} \\ \times \int_{a_p}^{a_{p+1}} \Lambda'_{\lambda n_p}(r) \Lambda_{\lambda j_p}(r) r dr \quad (IV - 12)$$

bzw. in dimensionsloser Form :

$$\frac{F_{2s}^{IIr}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2ga} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \epsilon_\lambda \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{\lambda+n_p+j_p} \\ \times \int_{a_p}^{a_{p+1}} \Lambda'_{\lambda n_p}(r) \Lambda_{\lambda j_p}(r) r dr \quad (IV - 13)$$

Entsprechendes gilt für den Kraftanteil infolge der tangentialen Geschwindigkeitskomponente:

$$\frac{F_{2s}^{II\theta}}{\rho g a (H/2)^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2ga} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda^2 \epsilon_\lambda \sum_{n_p=0}^{\infty} \epsilon_{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \epsilon_{j_p} (-1)^{\lambda+n_p+j_p} \\ \times \int_{a_p}^{a_{p+1}} \Lambda_{\lambda n_p}(r) \Lambda_{\lambda j_p}(r) \frac{1}{r} dr \quad (IV - 14)$$

ANHANG V

Kräfte und Momente 1.Ordnung:

Zur Vollständigkeit des Ausdruckes für die momentane Gesamtkraft in einer Richtung als Summe der momentanen Kraft 1.Ordnung, 2.Ordnung und der Driftkraft, werden hier zusätzlich die Formeln für die Beträge der Kräfte 1.Ordnung auf eine festgehaltene rotationssymmetrische Struktur wiedergegeben. Sie wurden mit Hilfe der Formel (2-49) ermittelt, wobei das Diffraktionspotential 1.Ordnung Φ_1 mit Hilfe der Makroelementformulierung gewonnen wurde [33].

Durch Einsetzen des für den Definitionsbereich eines Elementtyps geltenden Potentialausdruckes in die Gleichung (2-49) wurden die Kräfte und Momente für eine entsprechende Wandung der idealisierten Struktur abgeleitet und in tabellarischer Form wiedergegeben.

Horizontale Kraft 1.Ordnung:

Elementtyp A:

$$\frac{F_{11}}{\rho g a^2 H/2} = \frac{-2\pi i k d \tanh(kd)}{a} \sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}^{-1/2}}{\alpha} \mathcal{F}_{1,\alpha} [\sin(\alpha h_L) - \sin(\alpha h_P)] \quad (V-1)$$

Elementtyp B:

Für eine vertikale Wandung mit $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$ gilt:

$$\frac{F_{11}}{\rho g a^2 H/2} = -2\pi i k d \tanh(kd) \frac{a_l}{a^2} \sum_{\alpha_l} \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2}}{\alpha_l} \mathcal{F}_{1,\alpha_l}^* \sin[\alpha_l(h_{l-1} - h_l)] \quad (V-2)$$

bzw. für $r = a_l$ und $h_l > h_{l-1}$ gilt:

$$\frac{F_{11}}{\rho g a^2 H/2} = 2\pi i k d \tanh(kd) \frac{a_l}{a^2} \sum_{\alpha_{l-1}} \frac{N_{\alpha_{l-1}}^{-1/2}}{\alpha_{l-1}} \mathcal{F}_{1,\alpha_{l-1}} \sin[\alpha_{l-1}(h_l - h_{l-1})] \quad (V-3)$$

Elementtyp C:

An einer vertikalen Wandung mit $r = a_p$ gilt:

für $h_p > h_{p-1}$

$$\frac{F_{1z}}{\rho g a^2 H/2} = -2\pi i k d \tanh(kd) \frac{a_p}{a^2} \left\{ \mathcal{F}_{1,0_p}^*(h_p - h_{p-1}) - 2 \sum_{n_p=1}^{\infty} \left(\frac{h_p}{\pi n_p} \right) \mathcal{F}_{1,n_p}^* \sin \left(\frac{\pi n_p h_{p-1}}{h_p} \right) \right\} \quad (\text{V-4})$$

bzw. für $h_p < h_{p-1}$

$$\frac{F_{1z}}{\rho g a^2 H/2} = 2\pi i k d \tanh(kd) \frac{a_p}{a^2} \left\{ \mathcal{F}_{1,0_p}(h_{p-1} - h_p) - 2 \sum_{n_{p-1}=1}^{\infty} \left(\frac{h_{p-1}}{\pi n_{p-1}} \right) \mathcal{F}_{1,n_{p-1}} \sin \left(\frac{\pi n_{p-1} h_p}{h_{p-1}} \right) \right\} \quad (\text{V-5})$$

Vertikale Kraft 1. Ordnung:

Elementtyp B:

$$\frac{F_{1z}}{\rho g a^2 H/2} = -\frac{2\pi k d \tanh(kd)}{a^2} \sum_{\alpha_l} \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2}}{\alpha_l^2} \left[\mathcal{F}_{0,\alpha_l}(A_{0,\alpha_l} - D_{0,\alpha_l}) + \mathcal{F}_{0,\alpha_l}^*(A_{0,\alpha_l}^* - D_{0,\alpha_l}^*) \right] \quad (\text{V-6})$$

mit

$$A_{m,\alpha_l} = a_{l+1} \frac{\partial R_{m,\alpha_l}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_{l+1}} ; \quad A_{m,\alpha_l}^* = a_{l+1} \frac{\partial R_{m,\alpha_l}^*(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_{l+1}} \quad (\text{V-7})$$

$$D_{m,\alpha_l} = a_l \frac{\partial R_{m,\alpha_l}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_l} ; \quad D_{m,\alpha_l}^* = a_l \frac{\partial R_{m,\alpha_l}^*(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_l} \quad (\text{V-8})$$

Elementtyp C:

$$\frac{F_{1s}}{\rho g a^2 H/2} = \frac{2\pi k d \tanh(kd)}{a^2} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{0,0}}{2} \left(a_{p+1}^2 - \frac{a_{p+1}^2 - a_p^2}{2 \ln\left(\frac{a_{p+1}}{a_p}\right)} \right) - \frac{\mathcal{F}_{0,0}^*}{2} \left(a_p^2 - \frac{a_p^2 - a_{p+1}^2}{2 \ln\left(\frac{a_p}{a_{p+1}}\right)} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n_p=1}^{\infty} (-1)^{n_p} \left(\frac{h_p}{\pi n_p} \right)^2 \left[\mathcal{F}_{0,n_p}(A_{0,n_p} - D_{0,n_p}) + \mathcal{F}_{0,n_p}^*(A_{0,n_p}^* - D_{0,n_p}^*) \right] \right\} \quad (\text{V-9})$$

$$A_{m,n_p} = a_{p+1} \frac{\partial R_{m,n_p}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_{p+1}} ; \quad A_{m,n_p}^* = a_{p+1} \frac{\partial R_{m,n_p}^*(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_{p+1}} \quad (\text{V-10})$$

$$D_{m,n_p} = a_p \frac{\partial R_{m,n_p}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_p} ; \quad D_{m,n_p}^* = a_p \frac{\partial R_{m,n_p}^*(r)}{\partial r} \Big|_{r=a_p} \quad (\text{V-11})$$

Moment 1.Ordnung:

Elementtyp A:

Für eine Wandung mit $h_p < z < h_L$ und $r = a$ erfolgt für das Teilmoment um einen Bezugspunkt auf der Rotationsachse und in der Höhe $z = \epsilon$ vom Meeresboden:

$$\frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} = \frac{2\pi k d \tanh(kd)}{a^2} \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{1,\alpha} \frac{N_{\alpha}^{-1/2}}{\alpha^2} \left\{ \alpha(e - h_L) \sin(\alpha h_L) \right. \\ \left. - \alpha(e - h_p) \sin(\alpha h_p) - \cos(\alpha h_L) + \cos(\alpha h_p) \right\} \quad (\text{V-12})$$

Elementtyp B:

Für $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$ gilt:

$$\frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} = 2i\pi k d \tanh(kd) \frac{a_l}{a^3} \sum_{\alpha_l} \mathcal{F}_{1,\alpha_l}^* \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2}}{\alpha_l^2} \left\{ \alpha_l (e - h_{l-1}) \sin[\alpha_l (h_{l-1} - h_l)] - \cos[\alpha_l (h_{l-1} - h_l)] + 1 \right\} \quad (\text{V-13})$$

bzw. für $r = a_l$ und $h_{l-1} < h_l$

$$\frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} = -2i\pi k d \tanh(kd) \frac{a_l}{a^3} \sum_{\alpha_{l-1}} \mathcal{F}_{1,\alpha_{l-1}}^* \frac{N_{\alpha_{l-1}}^{-1/2}}{\alpha_{l-1}^2} \left\{ \alpha_{l-1} (e - h_{l-1}) \sin[\alpha_{l-1} (h_l - h_{l-1})] - \cos[\alpha_{l-1} (h_l - h_{l-1})] + 1 \right\} \quad (\text{V-14})$$

Das Moment infolge des Druckes 1. Ordnung auf eine ringförmige Fläche mit $a_l < r < a_{l+1}$ und $z = h_l$ kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} = \frac{2i\pi k d \tanh(kd)}{a^3} \sum_{\alpha_l} \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2}}{\alpha_l^2} \left\{ \mathcal{F}_{1,\alpha_l} [a_{l+1}(A_{1,\alpha_l} - 1) - a_l D_{1,\alpha_l}] + \mathcal{F}_{1,\alpha_l}^* [a_{l+1} A_{1,\alpha_l}^* - a_l (D_{1,\alpha_l}^* - 1)] \right\} \quad (\text{V-15})$$

Die Ausdrücke A_{1,α_l} , A_{1,α_l}^* , D_{1,α_l} , D_{1,α_l}^* werden durch die Gleichungen (V-7) und (V-8) bestimmt.

Elementtyp C:

Für eine Wandung mit $r = a_l$ und $h_{l-1} > h_l$ bekommt man das Teilmoment:

$$\begin{aligned} \frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} &= 4i\pi k d \tanh(kd) \frac{a_p}{a^3} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{1,0p}^*}{2} \left[e(h_p - h_{p-1}) - \frac{h_p^2 - h_{p-1}^2}{2} \right] \right. \\ &\quad + \sum_{n_p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\pi n_p} \mathcal{F}_{1,n_p}^* \left[(h_{p-1} - e) \sin\left(\frac{n_p \pi}{h_p} h_{p-1}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h_p}{\pi n_p} \left\{ \cos\left(\frac{n_p \pi}{h_p} h_{p-1}\right) - (-1)^{n_p} \right\} \right] \right\} \quad (\text{V-16}) \end{aligned}$$

bzw. für $h_{p-1} > h_p$:

$$\begin{aligned} \frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} = & -4i\pi k d \tanh(kd) \frac{a_p}{a^3} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{1,0_{p-1}}}{2} \left[e(h_{p-1} - h_p) - \frac{h_{p-1}^2 - h_p^2}{2} \right] \right. \\ & + \sum_{n_{p-1}=1}^{\infty} \frac{h_{p-1}}{\pi n_{p-1}} \mathcal{F}_{1,n_{p-1}} \left[(h_p - e) \sin\left(\frac{n_{p-1}\pi}{h_{p-1}} h_p\right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{h_{p-1}}{\pi n_{p-1}} \left\{ \cos\left(\frac{n_{p-1}\pi}{h_{p-1}} h_p\right) - (-1)^{n_{p-1}} \right\} \right] \right\} \quad (V-17) \end{aligned}$$

und für $a_p < r < a_{p+1}$; $z = h_p$:

$$\begin{aligned} \frac{F_{1s}}{\rho g a^3 H/2} = & \frac{-2i\pi k d \tanh(kd)}{a^3} \left[\mathcal{F}_{1,0_p} \frac{a_{p+1}(a_{p+1}^2 - a_p^2)}{4} + \mathcal{F}_{1,0_p}^* \frac{a_p(a_{p+1}^2 - a_p^2)}{4} \right. \\ & + 2 \sum_{n_p=1}^{\infty} (-1)^{n_p} \left(\frac{h_p}{\pi n_p} \right)^2 \left\{ [a_{p+1}(A_{1,n_p} - 1) - a_p D_{1,n_p}] \mathcal{F}_{1,n_p} \right. \\ & \left. \left. + [a_{p+1} A_{1,n_p}^* - a_p (D_{1,n_p}^* - 1)] \mathcal{F}_{1,n_p}^* \right\} \right] \quad (V-18) \end{aligned}$$

Ebenso werden A_{1,n_p} , A_{1,n_p}^* , D_{1,n_p} , D_{1,n_p}^* durch die Formeln (V-10) und (V-11) errechnet.

10. BILD ANHANG

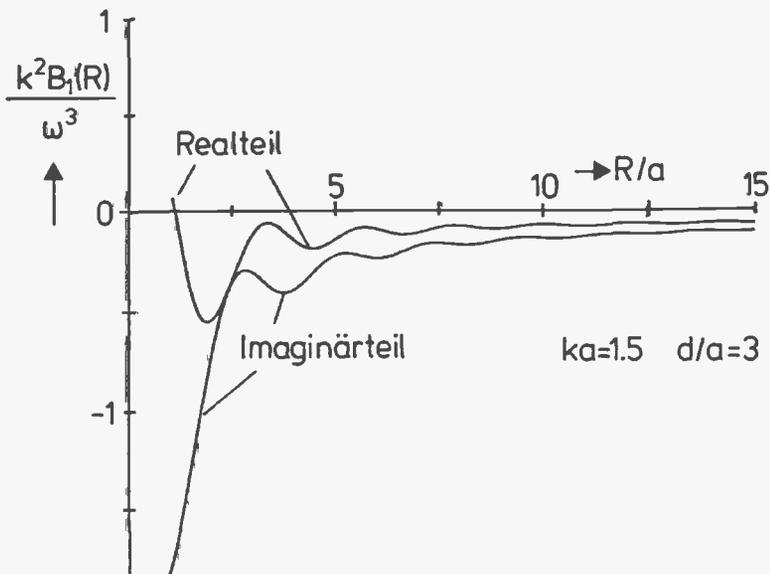


Abb.3: Verlauf der Funktion $B_1(R)$ für einen einfachen Zylinder mit $d/a=3$ und $ka=1.5$.

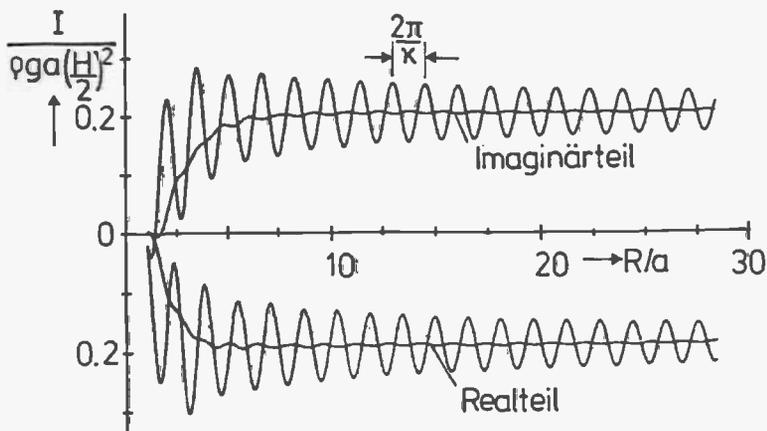


Abb.4: Konvergenz des Meeresoberflächenintegrals $I(R)$ vor und nach dem Herausfiltern der Oszillationen für einen einfachen Zylinder mit $d/a=3$ und $ka=1$.

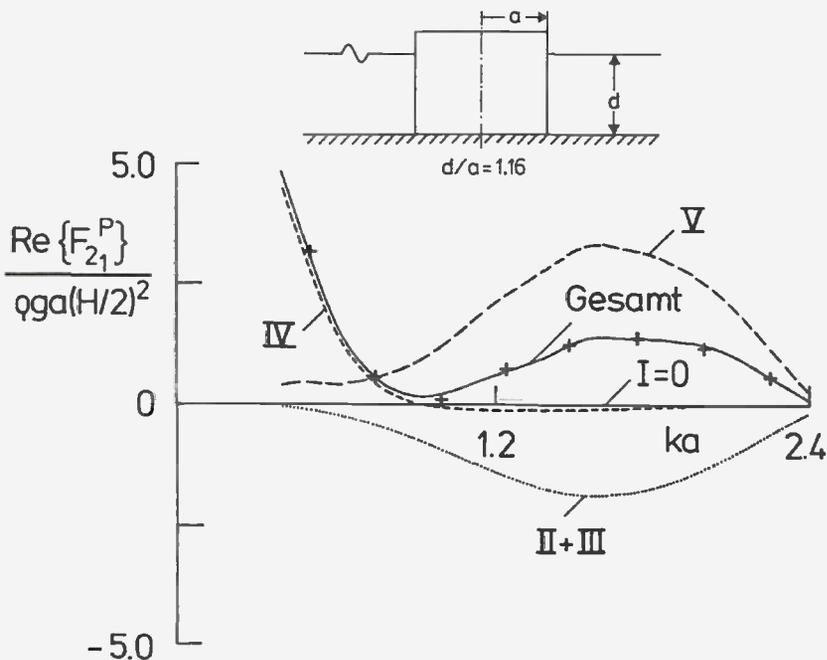


Abb.5.a: Kräfteanteile $P=I-V$ in horizontaler Richtung für einen einfachen Zylinder mit $d/a = 1.16$. Reelle Anteile.

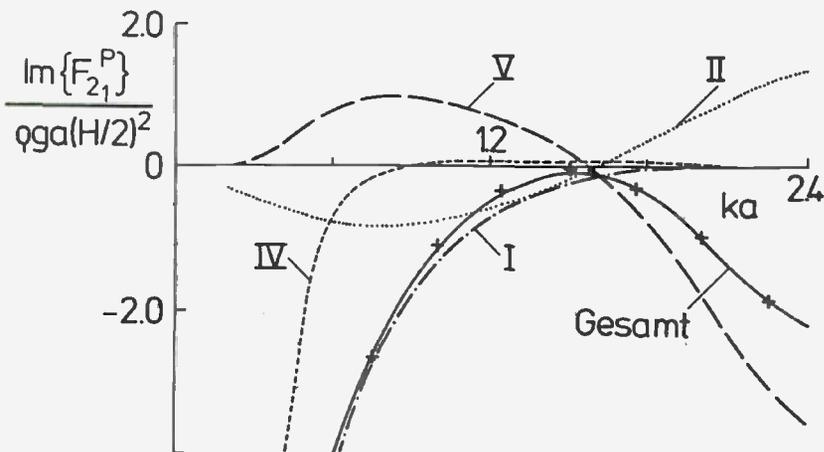


Abb.5.b: Kräfteanteile $P=I-V$ in horizontaler Richtung für einen einfachen Zylinder mit $d/a = 1.16$. Imaginäre Anteile.

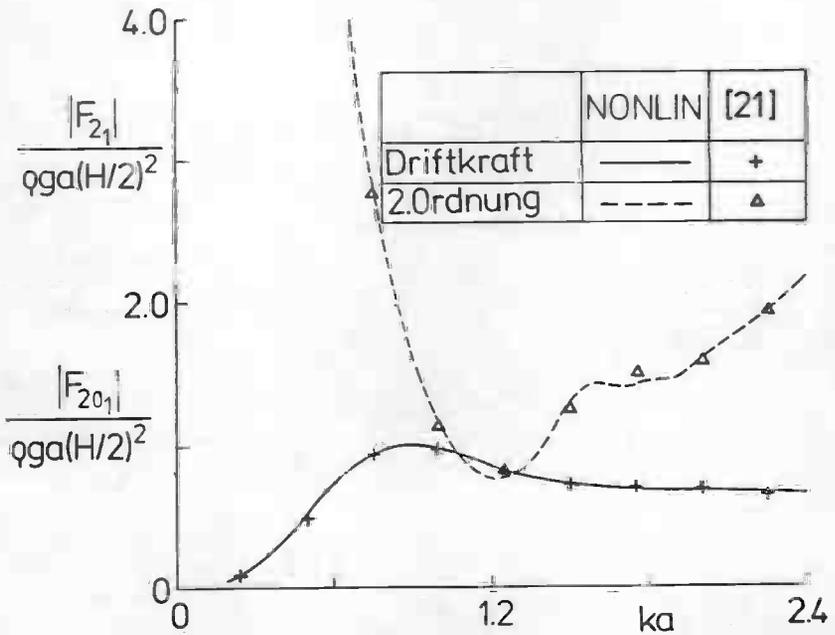


Abb.5.c: Betrag der oszillierenden Gesamtkraft 2.Ordnung und der Gesamt-Driftkraft in horizontaler Richtung für einen einfachen Zylinder.

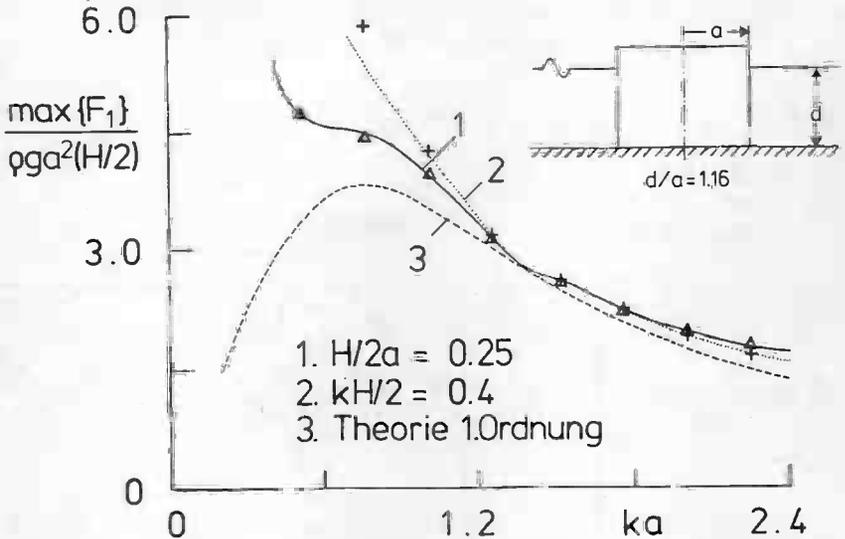


Abb.5.d: Positive Maxima der horizontalen Kraft für zwei Verhältnisse der Wellenhöhe. Vergleich mit der Theorie 1.Ordnung. ($d/a = 1.16$)

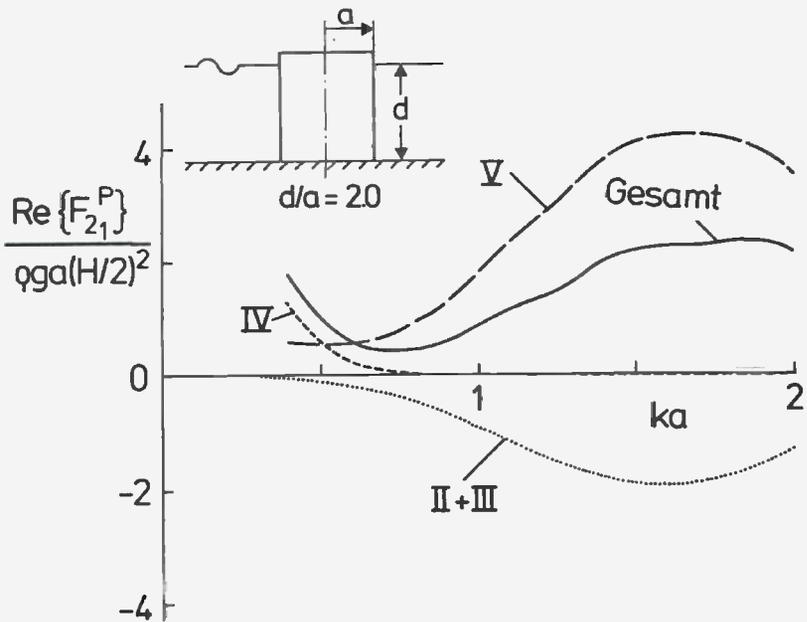


Abb.6.a : Kräfteanteile P -I-V in horizontaler Richtung für einen einfachen Zylinder mit $d/a = 2.0$. Reelle Anteile.

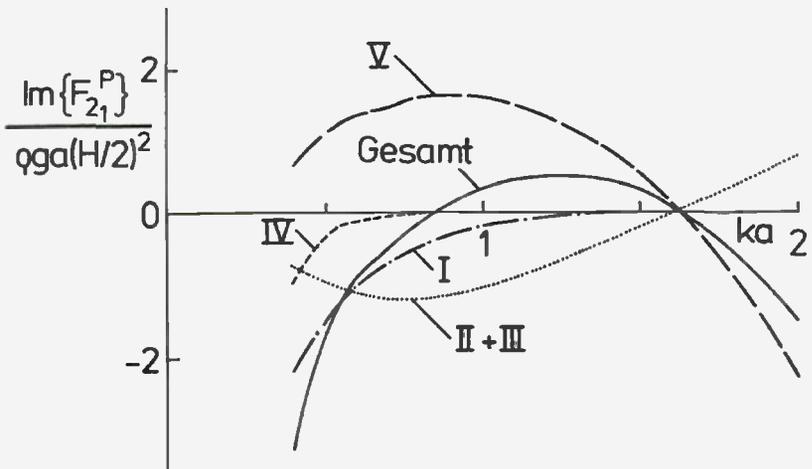


Abb.6.b : Kräfteanteile P -I-V in horizontaler Richtung für einen einfachen Zylinder mit $d/a = 2.0$. Imaginäre Anteile.

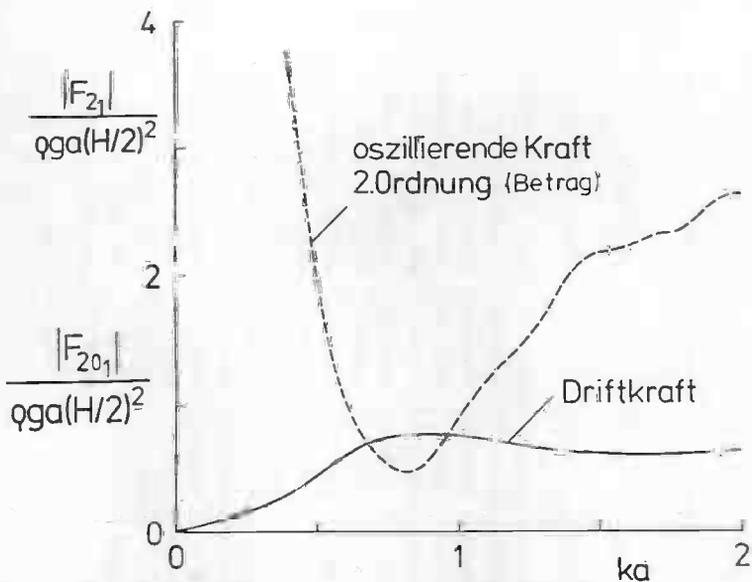


Abb.6.c : Betrag der oszillierenden Gesamtkraft 2. Ordnung und der Gesamt-Driftkraft in horizontaler Richtung für einen einfachen Zylinder mit $d/a = 2.0$.

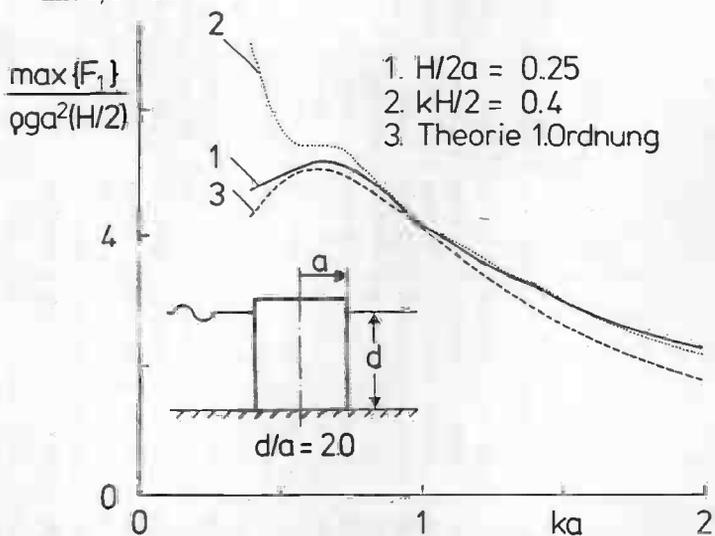


Abb.6.d : Positive Maxima der horizontalen Kraft für zwei Verhältnisse der Wellenhöhe. Vergleich mit der Theorie 1. Ordnung. ($d/a = 2.0$)

$$\frac{d}{a} = 1.16$$

ka	$\frac{F_{21}}{\rho g a^2 (H/2)}$		$\frac{F_{20}^I + F_{20}^V}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}^I}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}^I + F_{21}^{II}}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}^V}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}^V}{\rho g a (H/2)^2}$	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
0.20	.4645E-01	-.1465E+01	.4702E-01	-.1686E+02	-.9168E-02	-.3056E+00	.4512E+01	-.1820E+02	+.8100E-01	-.1118E-01	.3763E+00	.2911E+00
0.40	.3394E+00	-.2775E+01	.3118E+00	-.7518E+01	-.6690E-01	-.5785E+00	.4547E+01	-.4605E+01	.4464E+00	.5871E+00	.4464E+00	.5871E+00
0.50	.5887E+00	-.3240E+01	.5167E+00	-.5617E+01	-.1273E+00	-.6893E+00	.2871E+01	-.1865E+01	.3855E+00	.7529E+00	.3855E+00	.7529E+00
0.60	.8638E+00	-.3524E+01	.7193E+00	-.4135E+01	-.2170E+00	-.7722E+00	.1514E+01	-.6693E+00	.4691E+00	.9471E+00	.4691E+00	.9471E+00
0.70	1.079E+01	-.3632E+01	.8776E+00	-.3124E+01	-.3418E+00	-.8209E+00	.6847E+00	-.2617E+00	.5994E+00	.9738E+00	.5994E+00	.9738E+00
0.80	1.221E+01	-.3601E+01	.9690E+00	-.2359E+01	-.5033E+00	-.8330E+00	.2432E+00	-.9144E-01	.8861E+00	.8861E+00	.8861E+00	.8861E+00
1.00	1.239E+01	-.3314E+01	.9711E+00	-.1314E+01	-.9168E+00	-.7531E+00	-.7060E-01	.3599E-01	.2087E+01	.2087E+01	.2087E+01	.2087E+01
1.20	1.011E+01	-.2945E+01	.8583E+00	-.6883E+00	-.1370E+01	-.5623E+00	-.1183E+00	.8488E-01	.2812E+01	.2812E+01	.2812E+01	.2812E+01
1.40	.6858E+00	-.2595E+01	.7684E+00	-.3248E+00	-.1728E+01	-.3018E+00	-.1006E+00	.9249E-01	.3187E+01	.3187E+01	.3187E+01	.3187E+01
1.60	.5177E+00	-.2433E+01	.7293E+00	-.2086E+00	-.1828E+01	-.1534E+00	-.8576E-01	.8645E-01	.3346E+01	.3346E+01	.3346E+01	.3346E+01
1.60	.3545E+00	-.2276E+01	.7125E+00	-.1264E+00	-.1859E+01	.6290E-02	.7066E-01	.7727E-01	.3251E+01	.3251E+01	.3251E+01	.3251E+01
1.70	.1999E+00	-.2130E+01	.7034E+00	-.6805E-01	-.1818E+01	.1777E+00	.5651E-01	.6609E-01	.2879E+01	.2879E+01	.2879E+01	.2879E+01
1.80	.5591E-01	-.1988E+01	.6975E+00	-.2851E-01	-.1706E+01	.3598E+00	-.4396E-01	.5445E-01	.2591E+01	.2591E+01	.2591E+01	.2591E+01
1.90	-.7631E-01	-.1851E+01	.6913E+00	-.3017E-02	-.1529E+01	.5495E+00	-.3394E-01	.4327E-01	.1533E+01	.1533E+01	.1533E+01	.1533E+01
2.00	-.1963E+00	-.1717E+01	.6834E+00	.1226E-01	-.1239E+01	.7414E+00	-.2437E-01	.3313E-01	.2484E+00	.2484E+00	.2484E+00	.2484E+00
2.20	-.3997E+00	-.1460E+01	.6642E+00	.2350E-01	-.7284E+00	.1103E+01	-.1169E-01	.1708E-01	.6767E-02	.6767E-02	.6767E-02	.6767E-02
2.40	-.5563E+00	-.1217E+01	.6488E+00	.2165E-01	-.1127E+00	.1376E+01	-.4370E-02					

Tabelle I.: Horizontalkräfte. Dicker Zylinder

$$\frac{d}{a} = 2.00$$

ka	$\frac{F_{11}}{\rho g a^2 (H/2)}$		$\frac{F_{20} + F_{20}'}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21} + F_{21}'}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}''}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}'''}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_{21}''''}{\rho g a (H/2)^2}$	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
0.40	.5200E+00	-.4263E+01	.2791E+00	-.2204E+01	-.5633E-01	-.7476E+00	.1249E+01	-.9869E+00	+ .5648E+00	.6403E+00				
0.50	.8578E+00	-.4721E+01	.4437E+00	-.1502E+01	-.1082E+00	-.9446E+00	.5774E+00	-.3488E+00	.5263E+00	.1086E+01				
0.70	.1423E+01	-.4794E+01	.7068E+00	-.7043E+00	-.3050E+00	-.1181E+01	.9676E-01	-.6995E-01	.6235E+00	.1472E+01				
0.80	.1543E+01	-.4548E+01	.7664E+00	-.4759E+00	-.4703E+00	-.1195E+01	.3196E-01	-.2669E-01	.9003E+00	.1581E+01				
0.90	.1644E+01	-.4228E+01	.7604E+00	-.3166E+00	-.6792E+00	-.1144E+01	.3389E-02	-.3192E-02	.1247E+01	.1560E+01				
1.00	.1455E+01	-.3891E+01	.7624E+00	-.2066E+00	-.9197E+00	-.1043E+01	-.8232E-02	.8542E-02	.1769E+01	.1559E+01				
1.10	.1306E+01	-.3570E+01	.7275E+00	-.1319E+00	-.1174E+01	-.9053E+00	-.1178E-01	.1322E-01	.2287E+01	.1469E+01				
1.20	.1125E+01	-.3278E+01	.6884E+00	-.8204E-01	-.1421E+01	-.7433E+00	-.1162E-01	.1390E-01	.2738E+01	.1292E+01				
1.30	.9306E+00	-.3017E+01	.6543E+00	-.4950E-01	-.1640E+01	-.5681E+00	-.9956E-02	.1257E-01	.3234E+01	.1097E+01				
1.40	.7358E+00	-.2784E+01	.6304E+00	-.2877E-01	-.1810E+01	-.3869E+00	-.7877E-02	.1041E-01	.3783E+01	.8636E+00				
1.60	.3710E+00	-.2385E+01	.6159E+00	-.8212E-02	-.1948E+01	-.1605E-01	-.4243E-02	.6043E-02	.4155E+01	.1107E+00				
1.70	.2073E+00	-.2210E+01	.6194E+00	-.3771E-02	-.1902E+01	.1747E+00	-.2942E-02	.4325E-02	.4189E+01	-.3698E+00				
1.80	.5757E-01	-.2047E+01	.6248E+00	-.1346E-02	-.1781E+01	.3697E+00	-.1974E-02	.2987E-02	.4065E+01	-.9244E+00				
1.90	-.7811E-01	-.1894E+01	.6290E+00	-.1211E-03	-.1593E+01	.5672E+00	-.1292E-02	.1992E-02	.3919E+01	-.1591E+01				
2.00	-.2000E+00	-.1749E+01	.6305E+00	-.4179E-03	-.1350E+01	.7633E+00	-.8051E-03	.1282E-02	.3481E+01	-.2268E+01				

Tabelle II.: Horizontalkräfte. Mittlerer Zylinder.

$$\frac{d}{a} = 3.0$$

ka	$\frac{F_1}{\rho g a^2 (H/2)}$		$\frac{F_{50}^* + F_{50}^*}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_2^i}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_1^{II} + F_2^{III}}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_1^{IV}}{\rho g a (H/2)^2}$		$\frac{F_2^V}{\rho g a (H/2)^2}$	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
0.50	.1020E+01	-.5611E+01	.3716E+00	-.4574E+00	-.6929E-01	-.1197E+01	.1312E+00	-.1079E+00	.5038E+00	.1376E+01		
0.75	.1619E+01	-.5063E+01	.6289E+00	-.1196E+00	-.3599E+00	-.1416E+01	.1041E-01	-.1062E-01	.8778E+00	.1950E+01		
1.00	.1502E+01	-.4010E+01	.6847E+00	-.2708E-01	-.9208E+00	-.1151E+01	-.1022E-02	.1218E-02	.1961E+01	.1997E+01		
1.25	.1041E+01	-.3183E+01	.6332E+00	-.5188E-02	-.1549E+01	-.6830E+00	-.8648E-03	.1148E-02	.3271E+01	.1545E+01		
1.50	.5504E+00	-.2587E+01	.6017E+00	-.7889E-03	-.1930E+01	-.2102E+00	-.2903E-03	.4190E-03	.4508E+01	.6970E+01		
1.75	.1308E+01	-.2131E+01	.6146E+00	-.7131E-04	-.1858E+01	.2721E+00	-.7273E-04	.1126E-03	.4607E+01	-.6971E+00		
2.00	.2001E+00	-.1750E+01	.6273E+00	.7649E-05	-.1353E+01	.7646E+00	-.1472E-04	.2415E-04	.3948E+01	-.2537E+00		
2.25	-.4479E+00	-.1413E+01	.6244E+00	.5971E-05	-.5987E+00	.1206E+01	-.2322E-05	.4007E-05	.2188E+01	-.4340E+01		
2.50	-.6218E+00	-.1106E+01	.6226E+00	.1889E-05	.1718E+00	.1469E+01	-.2157E-06	.3890E-06	-.1084E+00	-.5313E+01		
2.75	-.7311E+00	-.8231E+00	.6286E+00	.4393E-06	.7748E+00	.1494E+01	.2371E-07	-.4448E-07	-.2368E+01	-.5297E+01		
3.00	-.7846E+00	-.5649E+00	.6327E+00	.7943E-07	.1129E+01	.1018E+01	.1894E-07	-.3660E-07	-.4474E+01	-.4042E+01		

Tabelle III.: Horizontalkräfte. Schlankerer Zylinder.

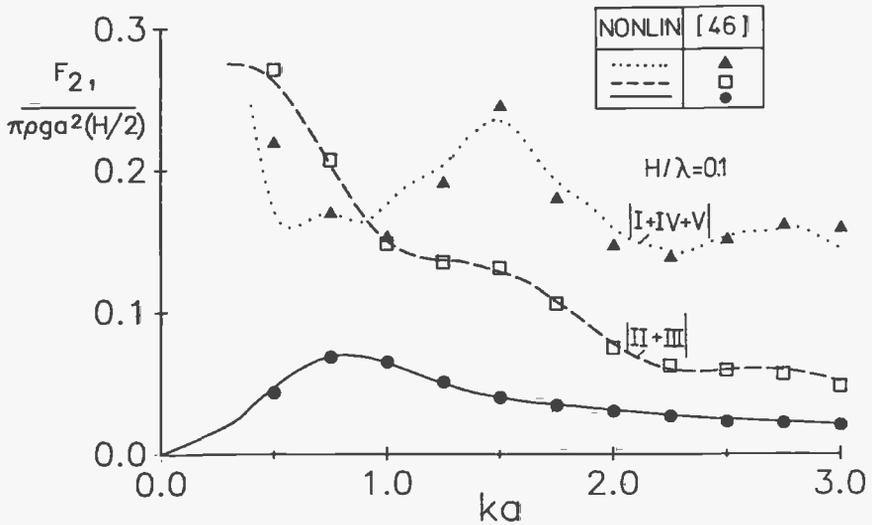


Abb.7.a: Zylinder festgehalten in der Welle. Betrag der Horizontalkraft 2.Ordnung a) infolge des Potentials 1.Ordnung φ_1 (---) und b) infolge des Potentials 2.Ordnung φ_2 (.....). c) Horizontale Driftkraft (—)

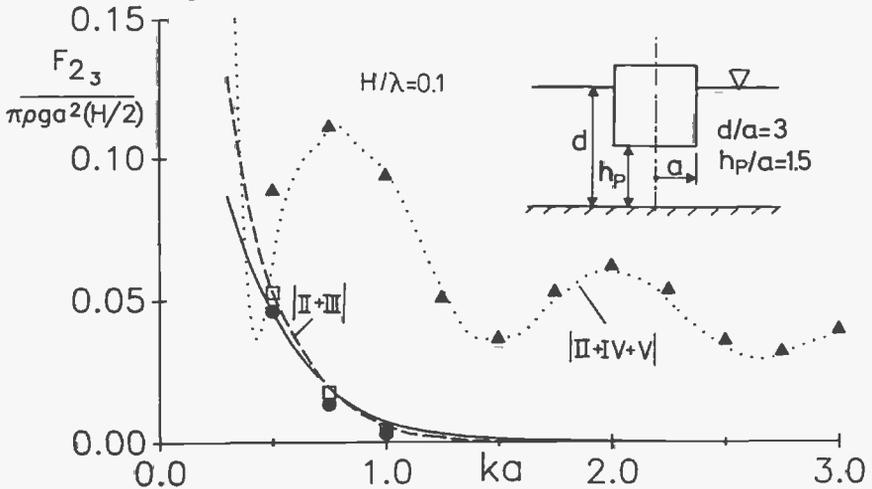


Abb.7.b: Zylinder festgehalten in der Welle. Betrag der doppelharmonischen Vertikalkraft sowie der vertikalen Driftkraft. (s. Abb.7.a).

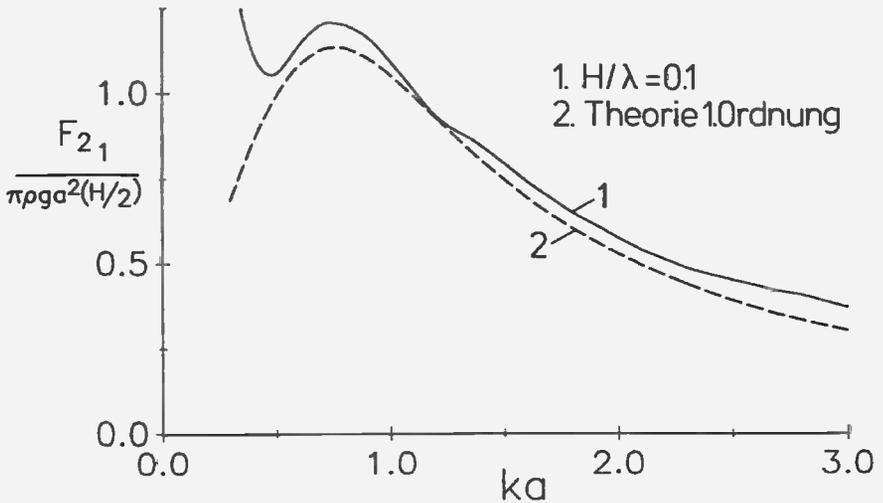


Abb. 7.c: Maxima der Gesamtkraft in horizontaler Richtung für eine Wellen-
steilheit $H/\lambda = 0.1$. Vergleich mit der Theorie 1. Ordnung.

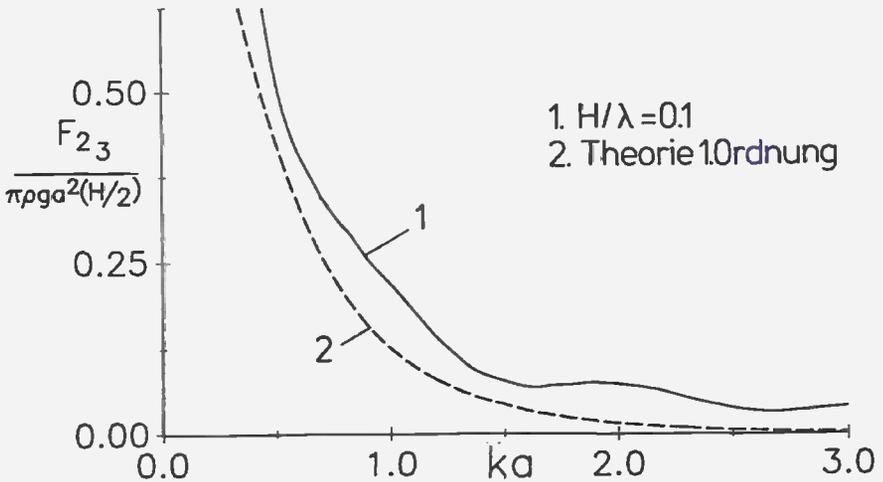


Abb. 7.d: Maxima der Gesamtkraft in vertikaler Richtung für eine Wellen-
steilheit $H/\lambda = 0.1$. Vergleich mit der Theorie 1. Ordnung.

$$\frac{d}{a} = 3.0 \quad \frac{h}{a} = 1.5$$

ka	$\frac{F_1}{\rho g a^2 (H/2)}$		$\frac{F_2 + 4 F_3}{\rho g a (H/2)}$		$\frac{F_4}{\rho g a (H/2)}$		$\frac{F_1^I + F_2^{III}}{\rho g a (H/2)}$		$\frac{F_1^V}{\rho g a (H/2)}$		$\frac{F_2^V}{\rho g a (H/2)}$	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
3	7.66E-01	-2.16E+01	6.27E-01	-8.95E+00	-3.90E-01	-8.25E+00	4.98E+00	-5.77E+00	6.32E+00	-6.09E-01	6.82E+00	-6.09E-01
4	1.84E+00	-2.69E+01	1.34E+00	-5.52E+00	-8.28E-01	-1.09E+01	2.81E+00	-1.70E+00	6.98E+00	-6.52E+00	6.98E+00	-6.52E+00
5	3.62E+00	-3.09E+01	2.34E+00	-3.60E+00	-1.44E+00	-1.30E+01	1.21E+00	-5.89E-01	6.57E+00	-9.42E+00	6.57E+00	-9.42E+00
6	5.66E+00	-3.32E+01	3.52E+00	-2.28E+00	-2.28E+00	-1.44E+01	4.88E-01	-2.43E-01	5.53E+00	-1.12E+01	5.53E+00	-1.12E+01
7	7.83E+00	-3.46E+01	4.68E+00	-1.39E+00	-3.44E+00	-1.49E+01	1.80E-01	-9.97E-02	4.87E+00	-1.16E+01	4.87E+00	-1.16E+01
7.5	8.77E+00	-3.46E+01	5.18E+00	-1.07E+00	-4.19E+00	-1.47E+01	1.02E-01	-6.03E-02	4.680E+00	-1.18E+01	4.680E+00	-1.18E+01
8	9.52E+00	-3.43E+01	5.61E+00	-8.19E-01	-5.04E+00	-1.44E+01	5.33E-02	-3.33E-02	4.787E+00	-1.17E+01	4.787E+00	-1.17E+01
9	1.04E+01	-3.31E+01	6.20E+00	-4.66E-01	-7.09E+00	-1.33E+01	4.91E-03	-3.46E-03	4.08E+01	-1.08E+01	4.08E+01	-1.08E+01
1.0	1.06E+01	-3.14E+01	6.68E+00	-2.57E-01	-9.47E+00	-1.17E+01	-1.02E-02	-7.97E-03	1.01E+01	-1.01E+01	1.01E+01	-1.01E+01
1.1	9.99E+00	-2.99E+01	6.46E+00	-1.38E-01	-1.20E+01	-9.90E+00	-1.23E-02	-1.05E-02	1.89E+01	-8.88E+00	1.89E+01	-8.88E+00
1.2	8.97E+00	-2.78E+01	6.33E+00	-7.13E-02	-1.46E+01	-7.92E+00	-1.04E-02	-9.39E-03	2.28E+01	-7.37E+00	2.28E+01	-7.37E+00
1.3	7.67E+00	-2.61E+01	6.18E+00	-3.57E-02	-1.67E+01	-5.81E+00	-7.19E-03	-7.15E-03	2.67E+01	-6.82E+00	2.67E+01	-6.82E+00
1.4	6.23E+00	-2.45E+01	6.04E+00	-1.71E-02	-1.83E+01	-3.94E+00	-4.70E-03	-4.67E-03	3.12E+01	-6.09E+00	3.12E+01	-6.09E+00
1.6	3.26E+00	-2.16E+01	6.02E+00	-3.31E-03	-1.97E+01	-1.05E-02	-1.71E-03	-2.01E-03	3.39E+01	-7.84E-01	3.39E+01	-7.84E-01
1.7	1.83E+00	-2.03E+01	6.09E+00	-1.28E-03	-1.92E+01	2.00E-01	-9.76E-04	-1.19E-03	3.39E+01	-4.00E+00	3.39E+01	-4.00E+00
1.8	4.86E-01	-1.90E+01	6.18E+00	-3.65E-03	-1.79E+01	3.94E+00	-5.37E-04	-6.83E-04	3.24E+01	-7.83E+00	3.24E+01	-7.83E+00
1.9	-7.65E-01	-1.76E+01	6.24E+00	-2.70E-05	-1.60E+01	5.79E+00	-2.86E-04	-3.77E-04	3.07E+01	-1.26E+01	3.07E+01	-1.26E+01
2.0	-1.91E+00	-1.65E+01	6.27E+00	-7.63E-05	-1.38E+01	7.74E+00	-1.47E-04	-2.00E-04	2.66E+01	-1.76E+01	2.66E+01	-1.76E+01
2.1	-2.95E+00	-1.53E+01	6.27E+00	-8.70E-05	-1.07E+01	9.60E+00	-7.39E-05	-1.02E-04	2.15E+01	-2.22E+01	2.15E+01	-2.22E+01
2.2	-3.89E+00	-1.42E+01	6.26E+00	-7.06E-05	-7.60E+00	1.13E+01	-3.45E-05	-4.97E-05	1.57E+01	-2.79E+01	1.57E+01	-2.79E+01
2.3	-4.71E+00	-1.30E+01	6.23E+00	-4.91E-05	-4.40E+00	1.28E+01	-1.54E-05	-2.27E-05	9.06E+00	-3.14E+01	9.06E+00	-3.14E+01
2.4	-5.43E+00	-1.19E+01	6.22E+00	-3.13E-05	-1.25E+00	1.40E+01	-6.25E-06	-9.46E-06	2.67E+00	-3.52E+01	2.67E+00	-3.52E+01
2.5	-6.05E+00	-1.08E+01	6.23E+00	-1.89E-05	-1.72E+00	1.49E+01	-2.16E-06	-3.34E-06	3.73E+00	-3.81E+01	3.73E+00	-3.81E+01
2.6	-6.57E+00	-9.66E+00	6.25E+00	-1.09E-05	-4.41E+00	1.50E+01	-4.68E-07	-7.39E-07	9.98E+00	-3.95E+01	9.98E+00	-3.95E+01
2.7	-7.00E+00	-8.60E+00	6.27E+00	-6.00E-06	-6.74E+00	1.47E+01	-1.32E-07	-2.12E-07	1.69E+01	-3.93E+01	1.69E+01	-3.93E+01
2.8	-7.33E+00	-7.68E+00	6.30E+00	-3.19E-06	-8.67E+00	1.39E+01	-2.76E-07	-4.62E-07	2.22E+01	-3.86E+01	2.22E+01	-3.86E+01
2.9	-7.59E+00	-6.85E+00	6.32E+00	-1.63E-06	-1.02E+01	1.24E+01	-2.54E-07	-4.24E-07	2.73E+01	-3.51E+01	2.73E+01	-3.51E+01
3.0	-7.74E+00	-6.55E+00	6.33E+00	-7.94E-07	-1.13E+01	1.04E+01	-1.98E-07	-3.20E-07	3.17E+01	-2.96E+01	3.17E+01	-2.96E+01

Tabelle IV.: Schwimmender Zylinder. Kräfte in horizontaler Richtung.

$$\frac{d}{a} = 3.0 \quad \frac{h}{a} = 1.5$$

ka	$\frac{F_3}{\rho g a (H/2)}$		$\frac{F_{30}}{\rho g a (H/2)^3}$		$\frac{F_3^I}{\rho g a (H/2)^3}$		$\frac{F_3^{II}}{\rho g a (H/2)^3}$		$\frac{F_3^{IV}}{\rho g a (H/2)^3}$		$\frac{F_3^V}{\rho g a (H/2)^3}$	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
.3	.215E+01	-.140E+00	-.259E+00	-.625E+00	-.386E+00	-.300E-01	-.155E+00	-.104E-01	.111E+00	.732E-02		
.4	.170E+01	-.190E+00	-.250E+00	-.263E+00	-.320E+00	-.501E-01	-.102E+00	-.129E-02	.213E+00	.123E+00		
.5	.132E+01	-.221E+00	-.229E+00	-.107E+00	-.264E+00	-.698E-01	-.610E-01	-.144E-03	.290E+00	.290E+00		
.6	.102E+01	-.236E+00	-.198E+00	-.461E-01	-.203E+00	-.876E-01	-.335E-01	-.163E-04	.322E+00	.505E+00		
.7	.782E+00	-.237E+00	-.162E+00	-.166E-01	-.143E+00	-.897E-01	-.174E-01	-.167E-05	.298E+00	.684E+00		
.75	.694E+00	-.234E+00	-.140E+00	-.127E-01	-.119E+00	-.848E-01	-.123E-01	-.639E-06	.281E+00	.790E+00		
.8	.598E+00	-.229E+00	-.126E+00	-.822E-02	-.950E-01	-.829E-01	-.655E-02	-.210E-06	.250E+00	.859E+00		
.9	.456E+00	-.215E+00	-.954E-01	-.337E-02	-.898E-01	-.629E-01	-.405E-02	-.250E-07	.178E+00	.908E+00		
1.0	.348E+00	-.198E+00	-.713E-01	-.135E-02	-.864E-01	-.457E-01	-.184E-02	-.290E-08	.135E+00	.943E+00		
1.1	.263E+00	-.179E+00	-.533E-01	-.628E-03	-.819E-01	-.263E-01	-.813E-03	-.321E-09	.121E+00	.878E+00		
1.2	.199E+00	-.161E+00	-.400E-01	-.200E-03	-.728E-01	-.192E-01	-.347E-03	.000E+00	.144E+00	.729E+00		
1.3	.149E+00	-.142E+00	-.303E-01	-.739E-04	-.757E-02	-.107E-01	-.143E-03	.000E+00	.214E+00	.568E+00		
1.4	.110E+00	-.125E+00	-.230E-01	-.261E-04	-.469E-02	-.469E-02	-.572E-04	.000E+00	.334E+00	.394E+00		
1.6	.571E-01	-.940E-01	-.131E-01	-.275E-05	-.238E-02	.942E-03	-.611E-06	.000E+00	.614E+00	-.604E-02		
1.7	.396E-01	-.807E-01	-.984E-02	-.760E-06	-.192E-02	.187E-02	-.280E-05	.000E+00	.762E+00	-.178E+00		
1.8	.264E-01	-.698E-01	-.734E-02	-.166E-06	-.160E-02	.210E-02	-.911E-06	.000E+00	.886E+00	-.320E+00		
1.9	.164E-01	-.562E-01	-.545E-02	-.905E-08	-.130E-02	.195E-02	-.258E-06	.000E+00	.101E+01	-.467E+00		
2.0	.908E-02	-.490E-01	-.405E-02	.189E-07	-.103E-02	.163E-02	.542E-07	.000E+00	.104E+01	-.570E+00		
2.1	.370E-02	-.409E-01	-.301E-02	.161E-07	-.775E-02	.126E-02	.000E+00	.000E+00	.102E+01	-.649E+00		
2.2	.103E-03	-.339E-01	-.224E-02	.000E+00	-.565E-03	.929E-03	.000E+00	.000E+00	.932E+00	-.708E+00		
2.3	.271E-02	-.167E-02	.167E-02	.000E+00	-.362E-03	.648E-03	.000E+00	.000E+00	.754E+00	-.719E+00		
2.4	.442E-02	-.228E-01	-.126E-02	.000E+00	-.102E-03	.431E-03	.000E+00	.000E+00	.563E+00	-.747E+00		
2.5	.544E-02	-.185E-01	-.930E-03	.000E+00	-.102E-03	.273E-03	.000E+00	.000E+00	.332E+00	-.764E+00		
2.6	.594E-02	-.149E-01	.000E+00	.000E+00	-.175E-04	.123E-03	.000E+00	.000E+00	.769E-01	-.772E+00		
2.7	-.611E-02	-.119E-01	.000E+00	.000E+00	.191E-04	.676E-04	.000E+00	.000E+00	-.187E+00	-.770E+00		
2.8	-.601E-02	-.934E-02	.000E+00	.000E+00	-.363E-04	.345E-04	.000E+00	.000E+00	-.462E+00	-.787E+00		
2.9	-.579E-02	-.727E-02	.000E+00	.000E+00	.452E-04	.155E-04	.000E+00	.000E+00	-.708E+00	-.752E+00		
3.0	-.535E-02	-.568E-02	.000E+00	.000E+00	.443E-04	.522E-05	.000E+00	.000E+00	-.914E+00	-.696E+00		

Tabelle V.: Schwimmender Zylinder. Kräfte in vertikaler Richtung.

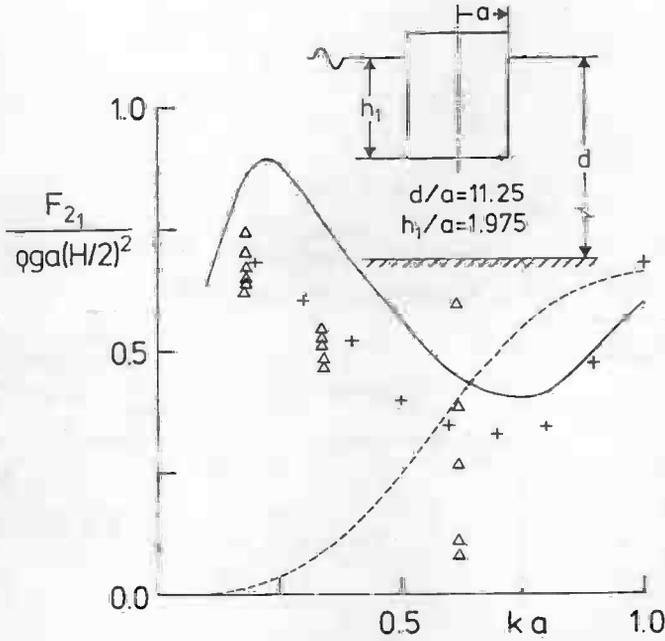


Abb. 8.a.: Eingetauchter Zylinder ohne Platte. Horizontale Kraftamplitude 2. Ordnung.

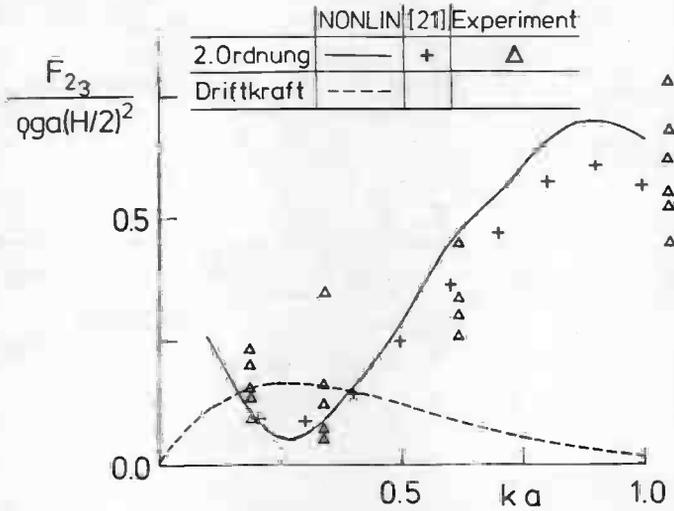


Abb. 8.b.: Eingetauchter Zylinder ohne Platte. Kraftamplitude 2. Ordnung in vertikaler Richtung.

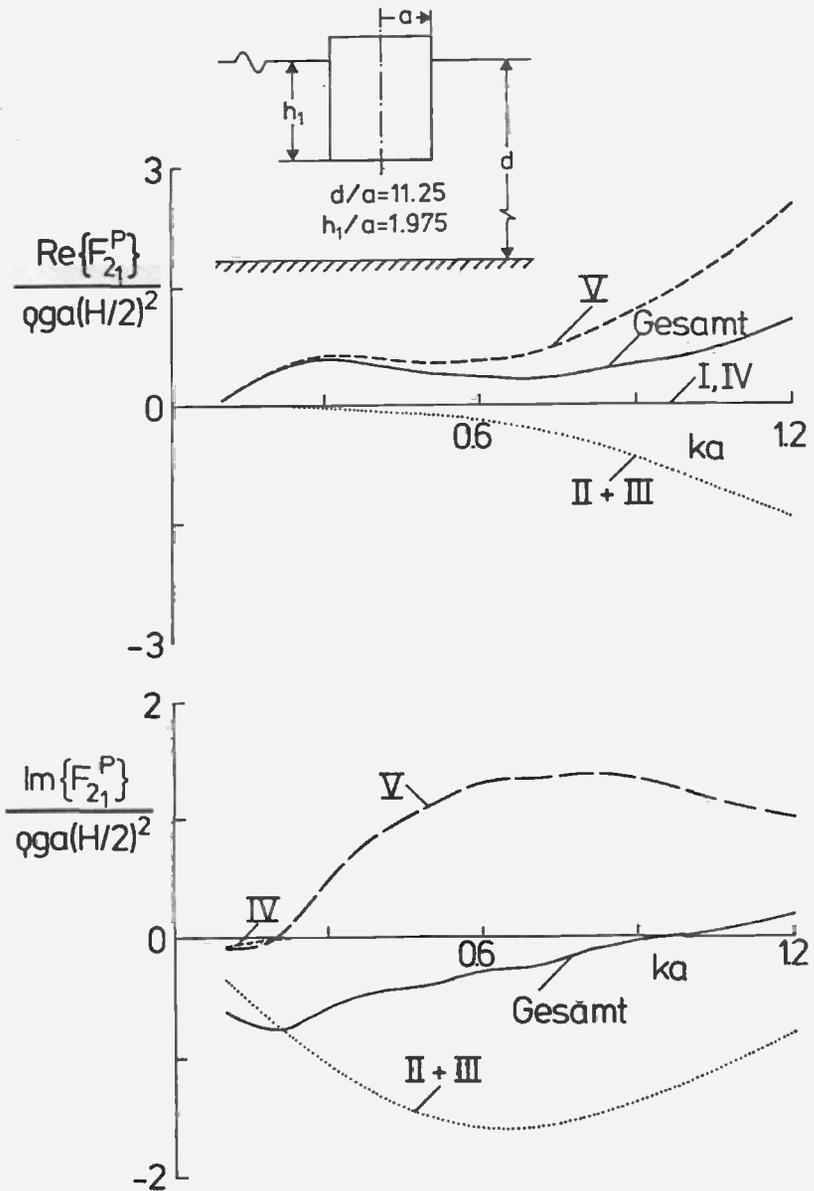


Abb.8.c.: Eingetauchter Zylinder ohne Platte. Kraftkomponente 2.Ordnung I bis V in horizontaler Richtung.

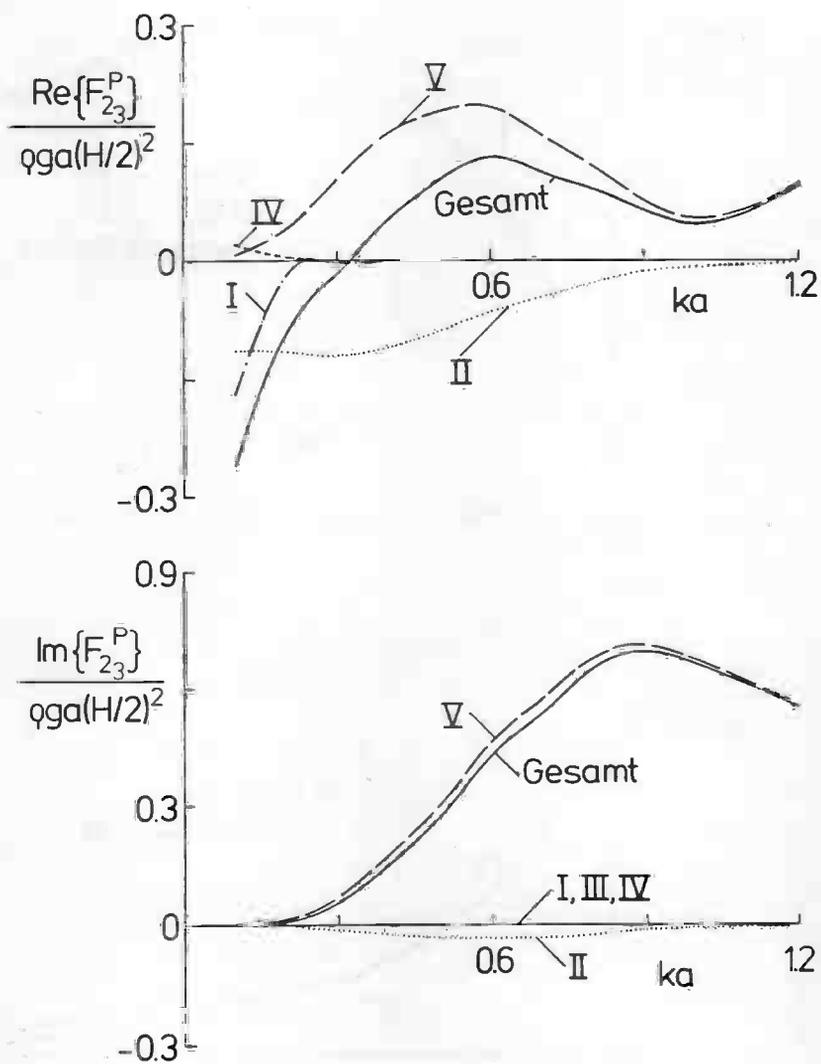


Abb.8.d : Eingetauchter Zylinder ohne Platte. Kraftkomponente 2.Ordnung I bis V in vertikaler Richtung.

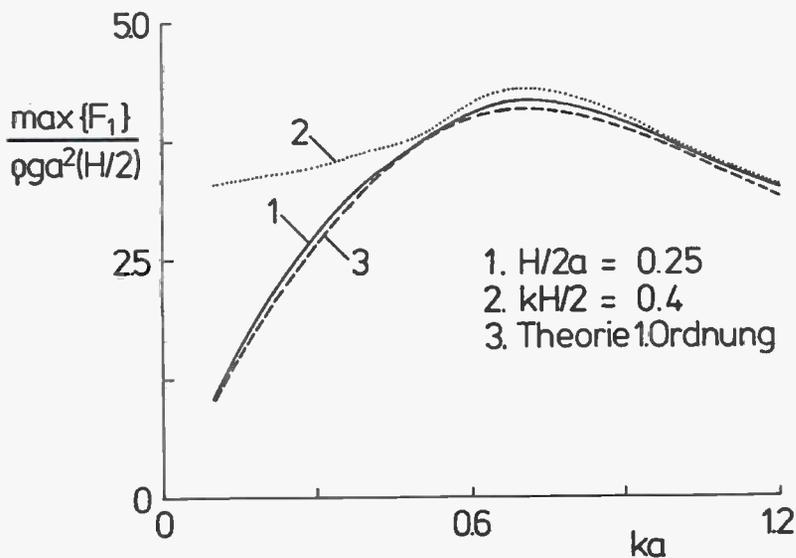


Abb.8.e: Zylinder ohne Platte. Maxima der Gesamtkraft in horizontaler Richtung.

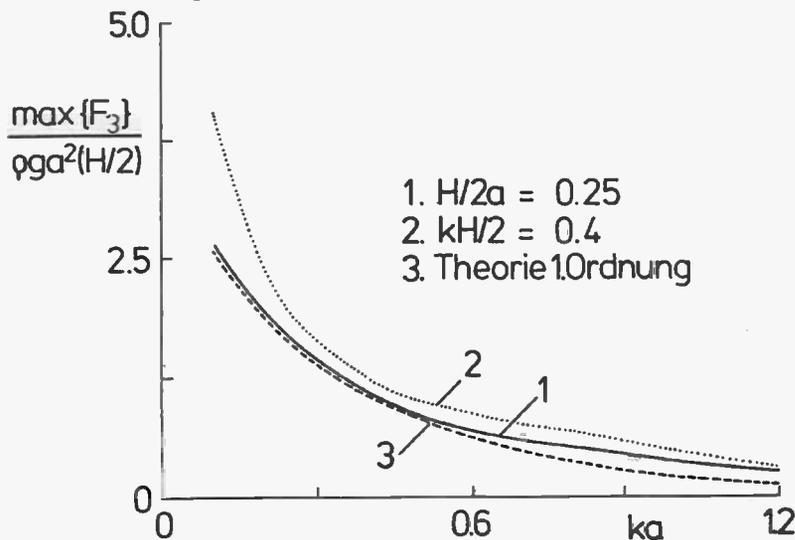


Abb.8.f: Zylinder ohne Platte. Maxima der Gesamtkraft in vertikaler Richtung.

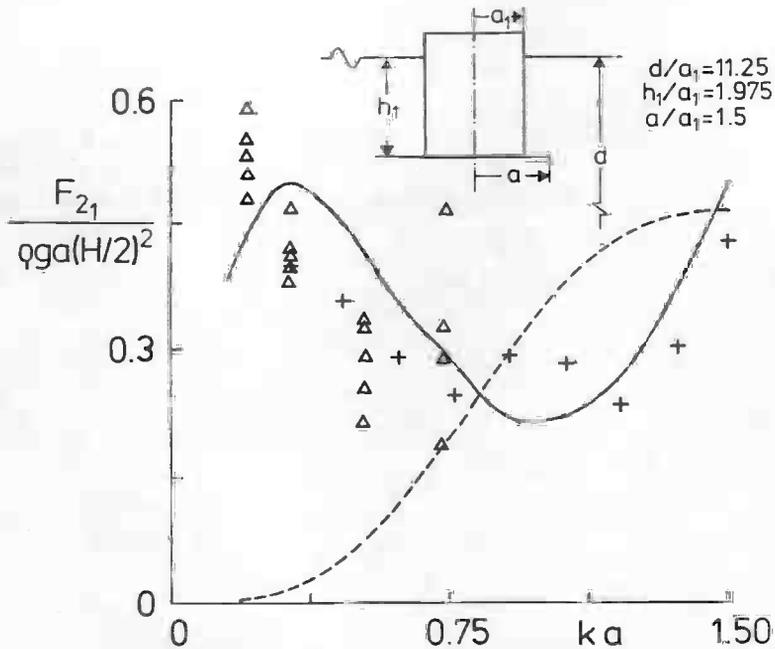


Abb.9.a.: Zylinder mit Platte. Übertragungsfunktion der oszillierenden Horizontalkraft 2.Ordnung.

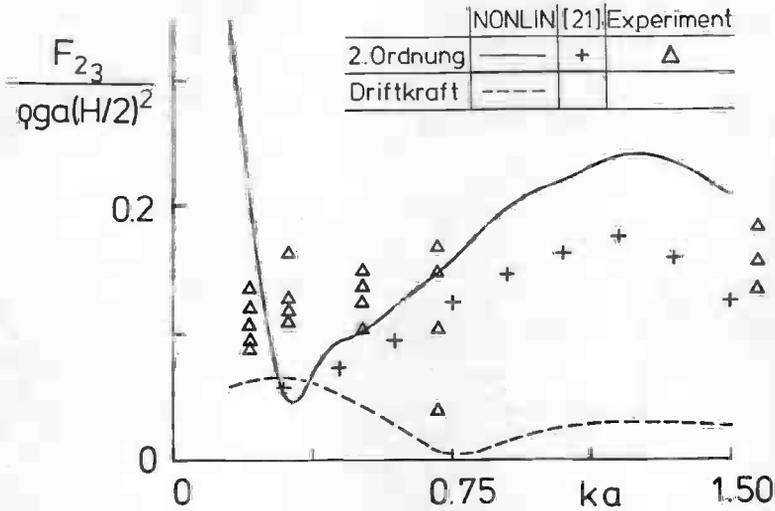
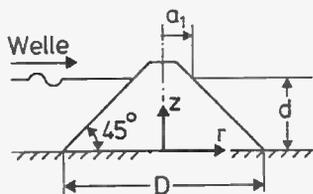


Abb.9.b.: Zylinder mit Platte. Übertragungsfunktion der oszillierenden Vertikalkraft 2.Ordnung. Vergleich mit Experiment.



$$D/d = 2.815$$

- Theorie 10. Ordnung
- Theorie 2. Ordnung
- Experiment [48]

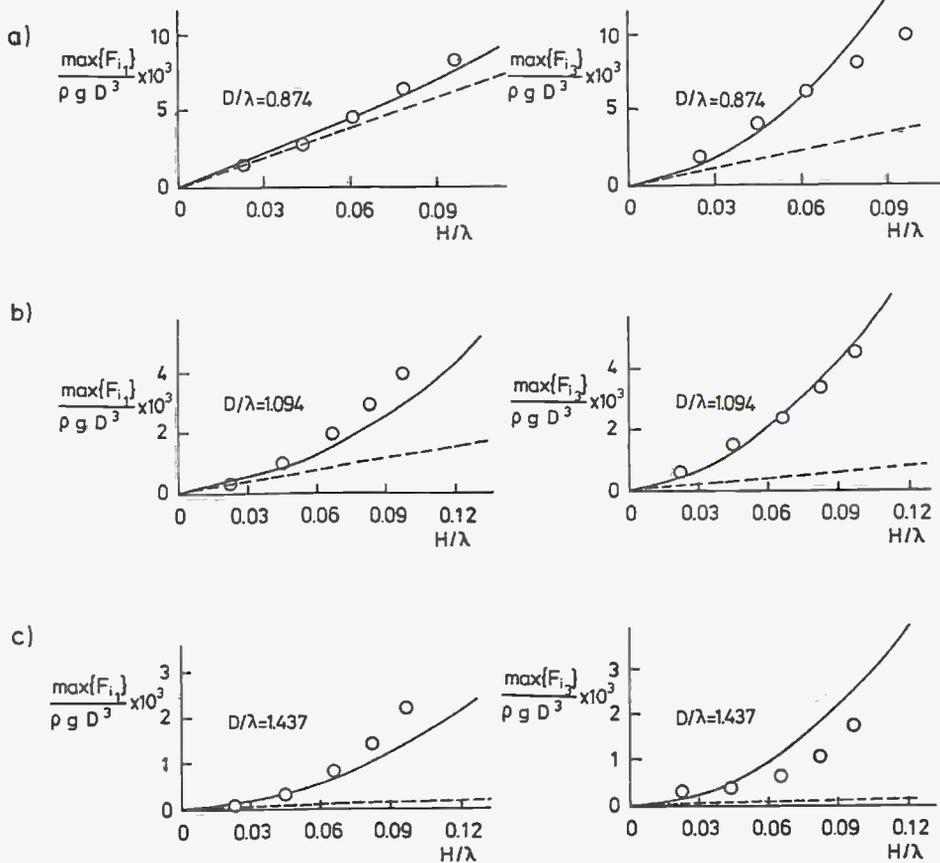
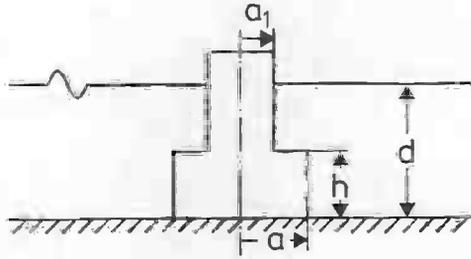


Abb.10: Konusförmige Schwerkraftstruktur. Maximalwerte der Gesamtkraft als Funktion der Wellensteilheit.



$$d/a=2$$

$$a/a_1=2$$

$$d/h=2$$

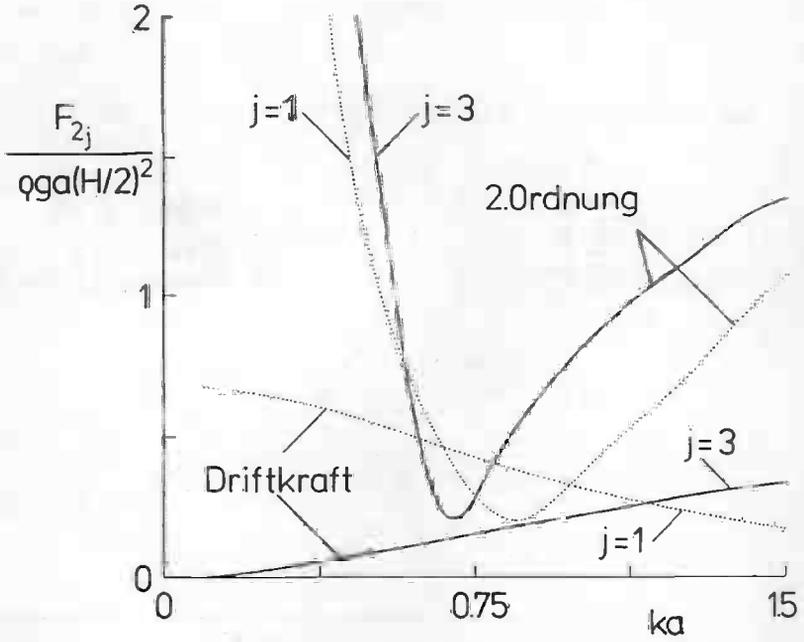


Abb. 11 a : Auf dem Boden stehender abgestufter Zylinder. Oszillierende Kräfte 2. Ordnung und Driftkräfte in horizontaler ($j=1$) und vertikaler ($j=3$) Richtung.

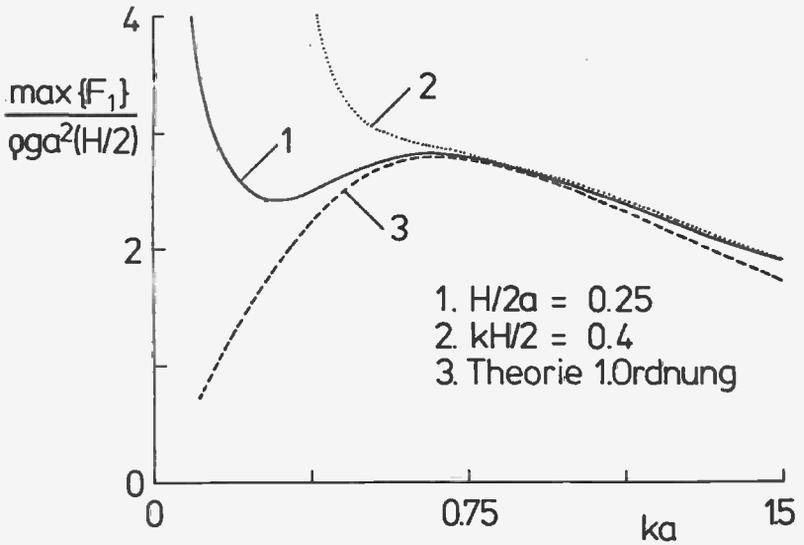


Abb.11.b: Abgestufter Zylinder. Übertragungsfunktion der Horizontalkraft.

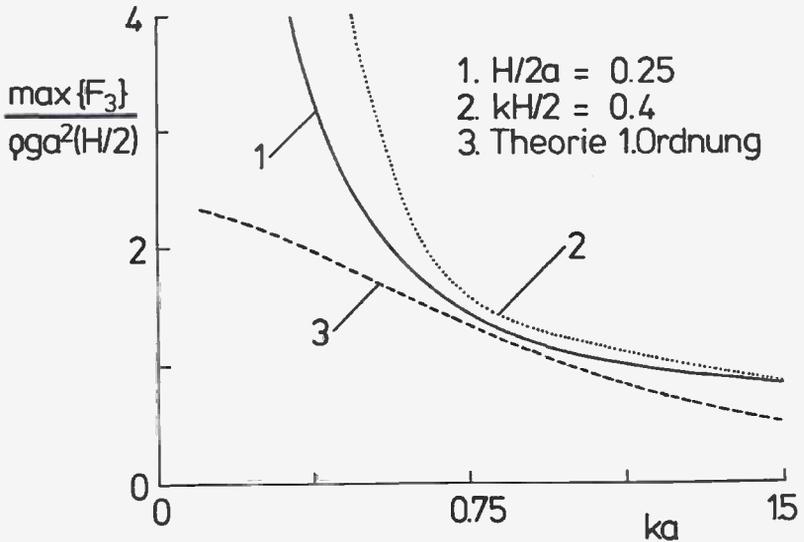


Abb.11.c: Übertragungsfunktionen der Vertikalkraft, für 1. konstante Wellenhöhe, 2. konstante Wellensteilheit. 3. Vergleich mit der linearen Theorie.

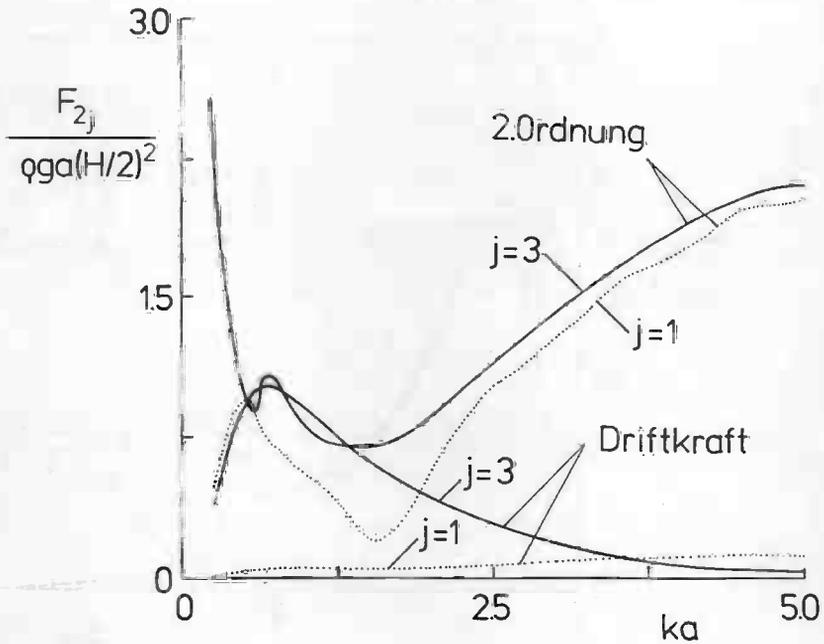
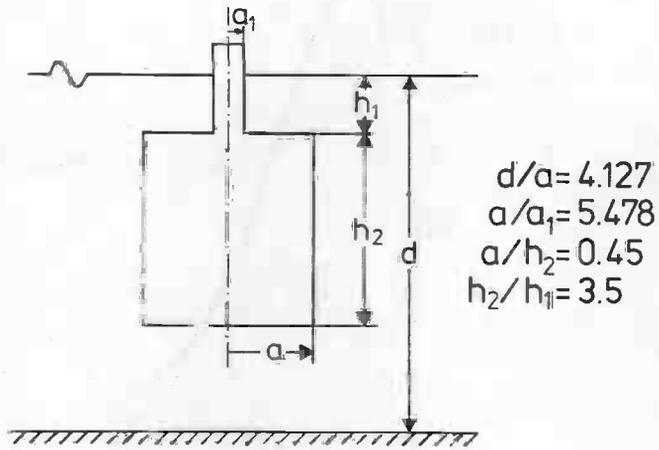


Abb.12.a.: Schwimmender abgestufter Zylinder. Doppelharmonische und zeitunabhängige Kräfte 2. Ordnung.

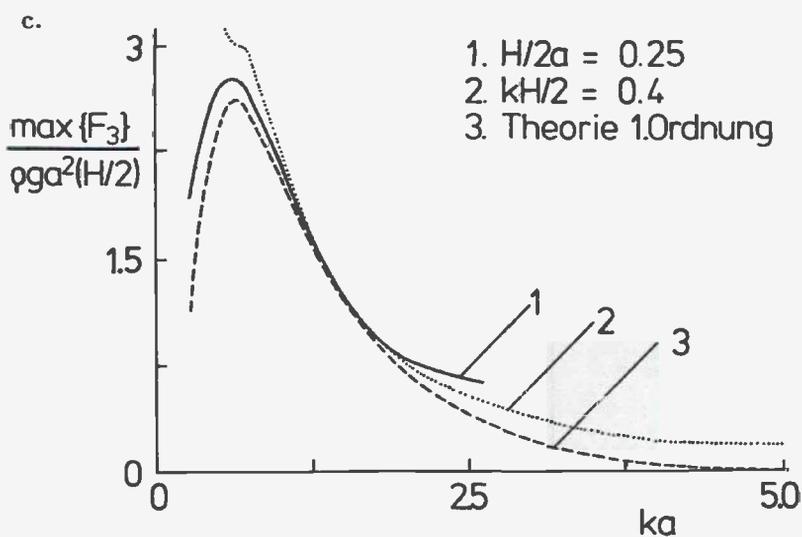
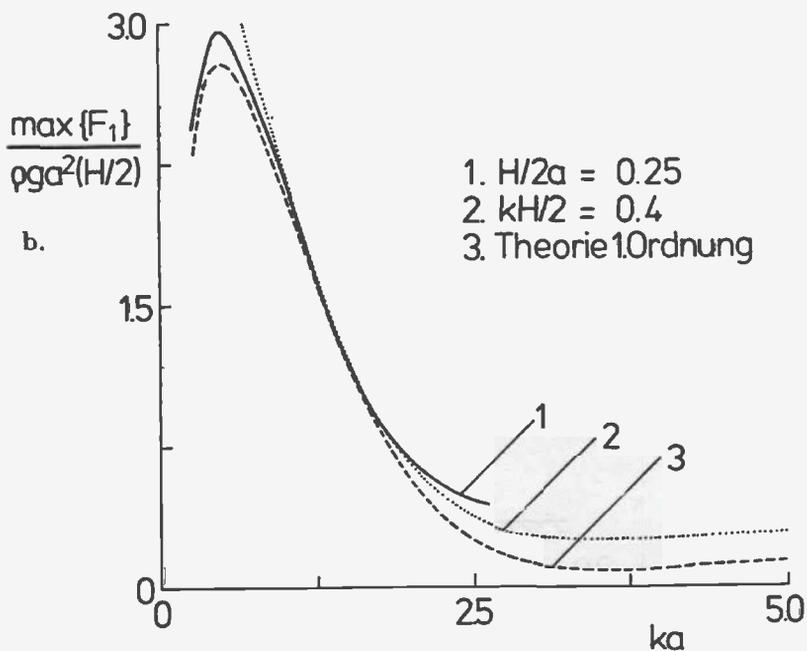


Abb.12.b-c.: Schwimmender abgestufter Zylinder. Übertragungsfunktionen der Maximalkraft in horizontaler und vertikaler Richtung.

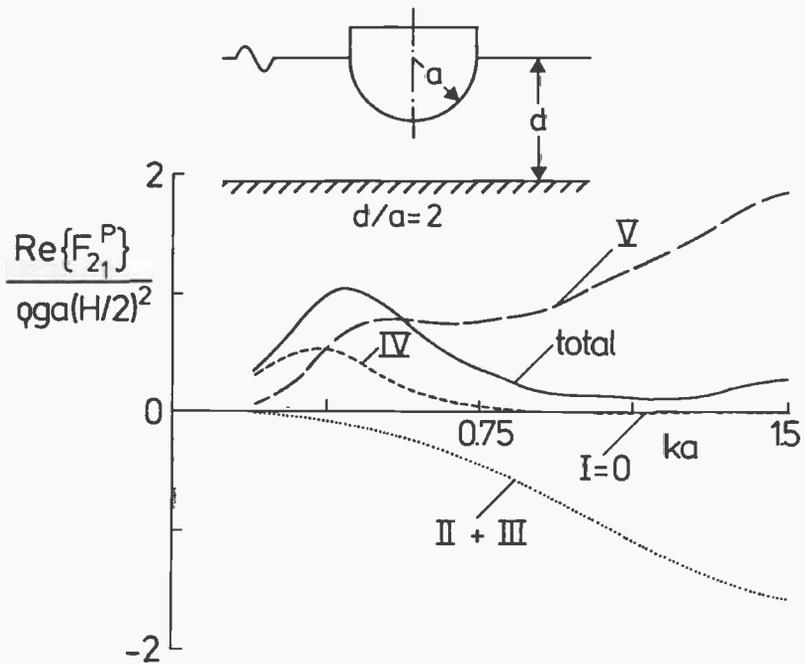


Abb.13.a : Schwimmende Halbkugel. Komponenten I - V der oszillierenden Horizontalkraft 2.Ordnung. Realteile.

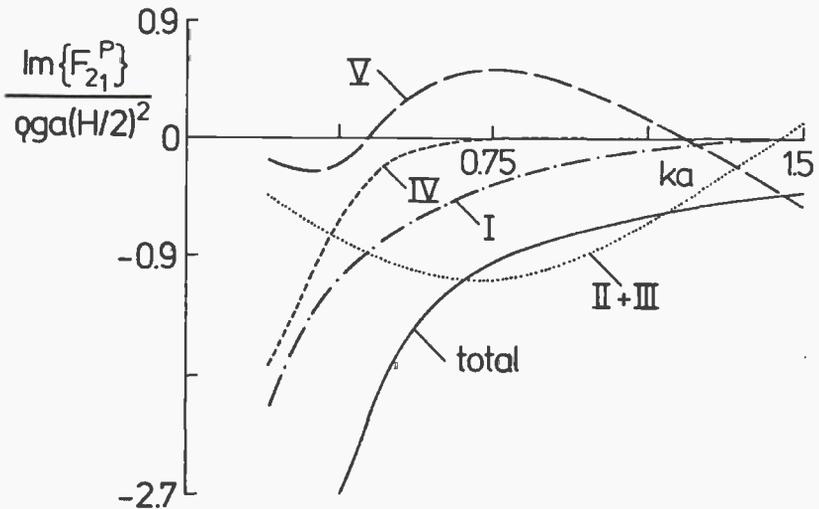


Abb.13.b : Imaginärteile.

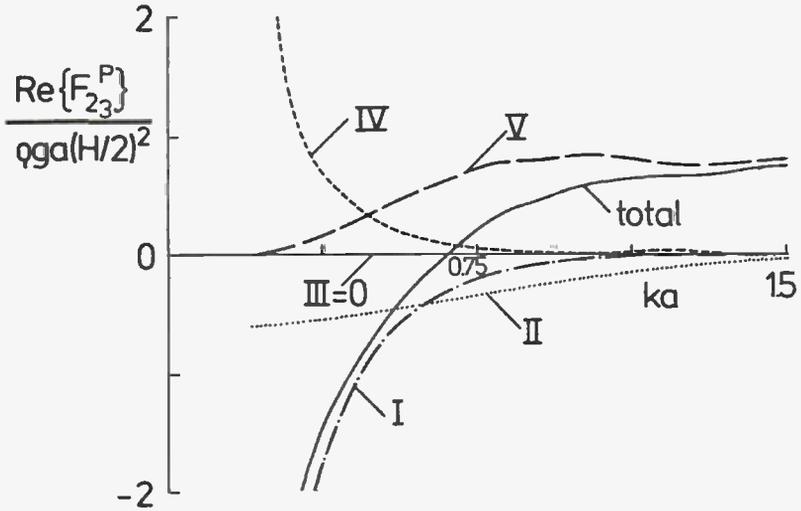


Abb.13.c: Schwimmende Halbkugel. Komponenten I - V der oszillierenden Vertikalkraft 2.Ordnung. Realteile.

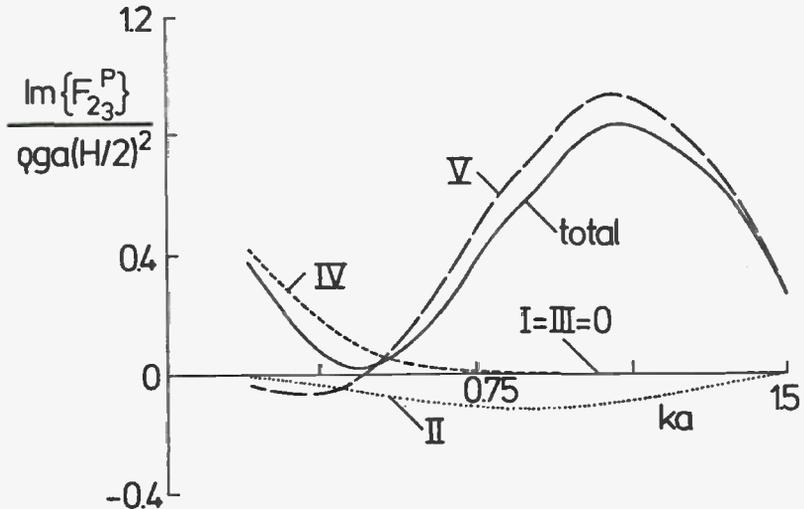


Abb.13.d: Imaginärteile.

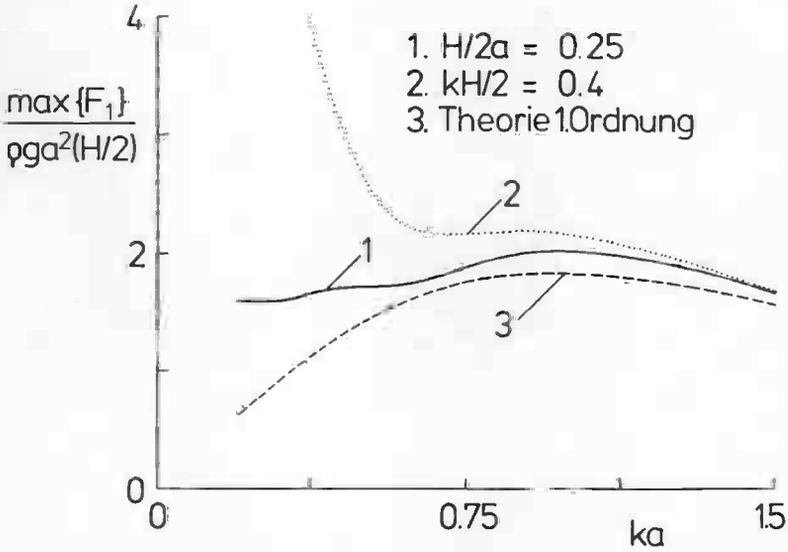


Abb.13.e: Schwimmende Halbkugel. Übertragungsfunktion der Maximalkraft in horizontaler Richtung.

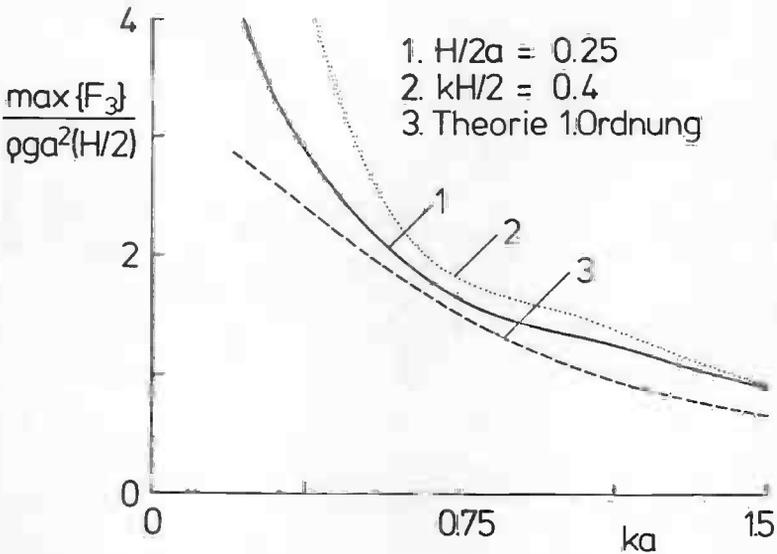


Abb.13.f: Übertragungsfunktion der Maximalkraft in vertikaler Richtung.

Lebenslauf

7. 7. 1954 : Geboren in Konstantinopel (Istanbul), als Sohn der griechischen Familie des Angestellten Frangiskos Thanos und seiner Ehefrau Kalliopi, geb. Marinaki.
- 1960-1966 : Besuch der griech. Volksschule in Pera (Konstantinopel).
- 1966-1970 : Besuch des griech. Zografion Gymnasiums in Pera (Konstantinopel).
- 1970-1972 : Besuch des 15. Jungengymnasiums in Athen. Abiturzeugnis (Apolyterion).
- 1972-1978 : Aufnahmeprüfung an der Technischen Hochschule Athen und Beginn des Studiums der Fachrichtung Schiffbau, Fakultät für Maschinenwesen.
- 1978 : Dipl. Hauptprüfung im Januar, und Erlangung des akademischen Grades "Diplomatouchos Michanikos".
- Seit 2. 1978 : Mitglied des Bundes griechischer Dipl.-Ingenieure. (T. E. E.)
3. 78-10.78 : Besuch des "Deutschkurs für ausländische Studenten" an der Universität München.
- Seit 1. 1979 : Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrgebiet "Grundlagen der Meerestechnik" an der RWTH Aachen.
- Seit 6. 1982 : Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrgebiet "Grundlagen der Meerestechnik" der RWTH Aachen.