

2e exemplaar

waterloopkundig laboratorium
delft hydraulics laboratory

model ter berekening van verticale diffusie
in gelaagde stromingen

AFGEHANDELD

verslag onderzoek

R 880-4

februari 1982

tow

toegepast onderzoek
waterstaat

R0880_4

BIBLIOTHEEK
Waterloopkundig Laboratorium
Postbus 177 - DELFT
NEDERLAND

5 JULI 1982

AFGEHANDELD

model ter berekening van verticale diffusie
in gelaagde stromingen

G. A. L. Delvigne

verslag onderzoek

R 880 - 4

februari 1982



INHOUD

Lijst van symbolen

Lijst van figuren

	blz.
<u>1 Inleiding.....</u>	1
<u>2 Vertikale uitwisseling in een gelaagd systeem.....</u>	3
<u>3 Vereenvoudigd turbulentiemodel.....</u>	7
<u>4 Diffusiekoëfficiënt in een homogene stroming.....</u>	12
<u>5 Diffusiekoëfficiënt in een tweelagenstroming.....</u>	14
<u>6 Diffusiekoëfficiënt in een willekeurig gelaagd systeem.....</u>	21
6.1 Afleiding van de algemene uitdrukking voor ϵ_z	21
6.2 Analytische oplossing van $\epsilon_z(z)$ bij een lineair dichtheidsprofiel	21
6.3 De koëfficiënten c en γ_1 in de algemene uitdrukking voor $\epsilon_z(z)$	23
6.4 Diffusiekoëfficiënt bij oppervlak en bodem.....	25
6.5 Numeriek model ter berekening van verticale diffusie.....	26
<u>7 Toepassing op experimenten van Schiller en Sayre.....</u>	29
7.1 Schiller en Sayre's onderzoek aan gelaagde stromingen.....	29
7.2 Diffusieberekeningen met $k-\epsilon$ model.....	31
7.3 Diffusieberekeningen met huidig model.....	31
7.4 Interpretatie van de berekeningen.....	36
<u>8 Samenvatting, konklusies, toekomstig onderzoek.....</u>	38

LITERATUUR

Figuren 1-20

APPENDIX A $\epsilon_z(z)$ voor tweelagenstroming

APPENDIX B $\epsilon_z(z)$ voor stroming met lineair dichtheidsprofiel

Lijst van symbolen

c	konstante	-
c_E	konstante van Elder	-
c_1	konstante	s^{-1}
c_2	konstante	-
C	Chezy-koefficiënt	$m^{1/2}/s$
E	turbulente energie	J
g	versnelling zwaartekracht	m/s^2
h	waterdiepte	m
i	z-koördinaat van grensvlak in tweelagenstroming	m
k	nummering van laagjes K	-
K	aantal laagjes waarin stroming verdeeld wordt	-
k_t	golftetal	m^{-1}
KE	kinetische energie van wervel	J
m	z-koördinaat van middelpunt wervel	m
ΔPE	stijging potentiële energie bij draaiing van wervel	J
r	koördinaat langs wervelstraal	m
R	wervelstraal	m
r_g	afstand tussen wervelmiddelpunt en grensvlak	m
Ri	Richardsongetal	-
Ri_o	overall Richardsongetal	-
R_m	maximale waarde van R	m
u	stroomsnelheid	m/s
u_t, u'	snelheid turbulente wervel	m/s
u_*	schuifspanningssnelheid	m/s
z	vertikale koördinaat	m
β	konstante, $\beta = 1/\Gamma_1$	m
γ	konstante	-
γ_1	konstante	-
Γ_1	konstante	m^{-1}
ϵ	diffusiekoëfficiënt (massa-uitwisseling)	m^2/s
ϵ_z	vertikale diffusiekoëfficiënt	m^2/s
$\epsilon_{z,o}$	vertikale diffusiekoëfficiënt in homogene stroming	m^2/s
ϕ	hoekkoördinaat	rad.
ν	frekwentie van voorkomen	s^{-1}

Lijst van symbolen (vervolg)

ρ	dichtheid	kg/m^3
$\Delta\rho$	dichtheidsverschil	kg/m^3
$\Delta\xi$	rotatiehoek wervel	rad.

Lijst van figuren

1. Gelaagde stromingen met diverse dichtheids- en snelheidsprofielen
- 2a. 2D turbulente stroming
- 2b. Turbulente banen in (gelaagde) stroming
3. Wervels door punt P in een ongelaagde stroming
- 4a. Wervels van diverse grootteklassen in een stromingssegment
- 4b. Energieverdeling naar wervelgrootteklasse
5. Wervel door grensvlak van tweelagenstroming
6. Diverse begrenzings van wervelgrootten als funktie van z , ϕ , h , i , Γ_i
(tweelagenstroming)
7. ϵ_z -profielen in tweelagenstroming bij diverse waarden van Γ_i
8. Gemeten snelheidsprofielen in gelaagde stroming
9. Wervel in willekeurig-gelaagde stroming
10. ϵ_z -profielen in stroming met lineair dichtheidsprofiel bij diverse waarden van Γ_i
11. Schiller en Sayre's metingen en berekeningen aan diffusie in gelaagd systeem (Fick's model)
12. Schiller en Sayre's metingen en berekeningen aan diffusie in gelaagd systeem (beta-waarschijnlijkheidscurven)
13. Schiller en Sayre's metingen en berekeningen van Hossain en Rodi met $k-\epsilon$ model
14. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 4. Aanpassing van γ
15. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 5. Aanpassing van γ
16. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 6. Aanpassing van γ
17. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 7. Aanpassing van γ
18. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 4. Gevoeligheidsanalyse
19. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 5. Gevoeligheidsanalyse
20. Diffusieberekeningen vergeleken met metingen. S&S run 7. Gevoeligheidsanalyse

MODEL TER BEREKENING VAN VERTIKALE DIFFUSIE IN GELAAGDE STROMINGEN

1 Inleiding

Het hier beschreven onderzoek heeft tot doel te komen tot een bruikbare rekenmethode om de verticale diffusie in gelaagde stromingen te voorspellen. De gelaagde stromingen worden beperkt tot open-kanaalstromingen met ongeveer logaritmisch vertikaal snelheidsprofiel; de turbulentie die tot de verticale diffusie leidt wordt in een dergelijke stroming voornamelijk veroorzaakt door de schuifspanning bij de bodem.

Dit type gelaagde stroming komt onder andere voor bij de verspreiding van afvalwater op enige afstand van het lozingspunt: oorspronkelijk aanwezige (c.q. opgelegde) snelheidsverschillen tussen geloosd en ontvangend water zijn dan verdwenen en de laag met (verdund) afvalwater wordt door de omgevende stroming meegevoerd.

Bekend is dat diffusie veroorzaakt wordt door turbulentie in de stroming, en dat de turbulente bewegingen in gelaagde stromingen in zekere mate onderdrukt wordt ten opzichte van een overeenkomstige homogene stroming. (Met overeenkomstige stroming wordt bedoeld een stroming met soortgelijk snelheidsprofiel $u(z)$.) Dit komt tot uiting in een reductie van de diffusiecoëfficiënt ϵ_z voor een gelaagde stroming, ten opzichte van $\epsilon_{z,0}$ voor de homogene stroming. Het is derhalve van belang de reductie van de turbulentie te onderzoeken.

Een methode zal nu worden opgesteld waarbij de reductie van ϵ_z ten gevolge van gelaagdheid wordt berekend bij toepassing van een zeer vereenvoudigd turbulentiemodel. Verondersteld wordt dat de berekende reductie met het vereenvoudigde turbulentiemodel maatgevend is voor de werkelijke reductie van ϵ_z .

Het is dus geenszins de bedoeling in dit rapport een juist beeld te geven van de turbulentie, maar slechts om de reductiefactor van ϵ_z te kunnen voorspellen.

In hoofdstuk 2 worden in het kort bekende methoden besproken ter berekening van verticale diffusie in een gelaagde stroming, en de bezwaren van deze methoden voor stromingen met turbulentie in eerste instantie ten gevolge van bodemschuifspanning.

Hoofdstuk 3 schetst een zeer eenvoudig beeld van turbulente wervels dat verder

als basis dient voor de berekening van ε_z in een gelaagde stroming, relatief ten opzichte van de ongelaagde situatie ($\varepsilon_{z,0}$).

In hoofdstuk 4 wordt het diffusiecoëfficiëntprofiel $\varepsilon_{z,0}(z)$ voor een homogene stroming berekend met het wervelmodel.

In hoofdstuk 5 vindt de berekening plaats van $\varepsilon_z(z)$ voor een tweelagensysteem als een speciaal geval van een gelaagde stroming; voor $\varepsilon_z(z)$ wordt dan een analytische oplossing gevonden. De berekening van $\varepsilon_z(z)$ en van de verticale diffusie in een willekeurig gelaagd systeem wordt uitgevoerd met een numeriek model, hetgeen in hoofdstuk 6 wordt beschreven.

In hoofdstuk 7 zijn uit de literatuur bekende diffusiemetingen in een gelaagd systeem vergeleken met berekeningen volgens de beschreven methode.

2 Vertikale uitwisseling in een gelaagd systeem

In een gelaagd systeem kan een tweetal beschrijvingen voor verticale massauitwisseling worden onderscheiden:

- turbulente diffusie
- entrainment.

Turbulente diffusie

De verticale uitwisseling beschreven door turbulente diffusie wordt gekenmerkt door een diffusiecoëfficiënt $\epsilon_z(z)$. In een gelaagde stroming is ϵ_z kleiner dan de waarde van $\epsilon_{z,0}$ voor de overeenkomstige homogene stroming.

Er zijn diverse formules bekend (zie Delvigne, 1977), die voor een kontinu gelaagd systeem de diffusiecoëfficiënt ϵ_z ten opzichte van $\epsilon_{z,0}$ beschrijven. Deze formules zijn in essentie alle van de vorm zoals de Munk-Anderson [1948] relatie:

$$\epsilon_z = \epsilon_{z,0} (1 + \alpha Ri)^\beta \quad (2.1)$$

waarin het Richardsongetal Ri gedefinieerd is als:

$$Ri = - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} / \left(\frac{\partial u(z)}{\partial z} \right)^2 \quad (2.2)$$

g = versnelling van de zwaartekracht

$\rho(z)$ = de lokale dichtheid

$u(z)$ = de lokale stroomsnelheid

z = verticale coördinaat

α, β = empirische konstanten met de waarden $\alpha = 10/3$, $\beta = -1,5$.

Een kontinu-gelaagd systeem, waarvoor vgl. (2.1) toepasbaar zou zijn, is in figuur 1a weergegeven. Daar in vgl. (2.1) de benadering wordt toegepast dat $\epsilon_z/\epsilon_{z,0}$ slechts afhankelijk zou zijn van de lokale waarden van $\partial \rho/\partial z$ en $\partial u/\partial z$, is de Munk-Anderson relatie niet van toepassing voor systemen met sterk wisselende waarden van $\partial \rho/\partial z$ of $\partial u/\partial z$, zoals op pagina 5 nog nader zal worden uiteengezet.

Entrainment

Wanneer een stroming te verdelen is in een sterk-turbulent deel en een zwak turbulent deel, kan de massa-uitwisseling tussen beide delen beschreven worden met het entrainmentprincipe. Bij een gelaagde open-kanaalstroming zal een verschil in turbulentieniveau tussen twee lagen gepaard gaan met een duidelijk snelheidsverschil. Een voorbeeld van een dergelijk systeem is de in figuur 1b getoonde stroming met een vrijwel stilstaande onderlaag en een stromende, turbulente bovenlaag. Door de entrainment verplaatst het grensvlak, waarover een scherp dichtheids- en snelheidsverschil aanwezig is, zich in de richting van het laag-turbulente deel van de stroming.

De entrainmentsnelheid W_e (gedefinieerd als het vloeistofvolume dat per oppervlakte- en tijdseenheid door het grensvlak stroomt) blijkt vaak te voldoen aan:

$$\frac{W_e}{\Delta u_e} = \frac{c_e}{Ri_o} \quad (2.3)$$

waarin c_e een empirisch te bepalen konstante is, en Δu_e een representatief snelheidsverschil over het grensvlak tussen de turbulente en niet-turbulente (of eventueel sterk-turbulente en zwak-turbulente) delen van de stroming.

Het overall Richardsongetal Ri_o wordt geschreven als:

$$Ri_o = - \frac{g}{\rho} \frac{\Delta \rho h}{(\Delta u_e)^2} \quad (2.4)$$

met h de waterdiepte en $\Delta \rho$ het dichtheidsverschil over het grensvlak.

In de praktijk komt veelvuldig de situatie voor dat er geen bijzondere snelheidsverschillen tussen de lagen van een gelaagde stroming bestaan, maar dat het snelheidsprofiel ongeveer overeenkomt met het snelheidsprofiel dat bij een homogene stroming zou horen. Dit is bijvoorbeeld het geval bij afvalwater- en koelwaterlozingen niet te dicht bij het lozingspunt: dichtheidsstromingen zijn dan onbelangrijk en er kan gesteld worden dat de laag met verdund afvalwater door de omgevende stroming wordt meegevoerd.

Bij experimenten in een stroomgoot door Schiller en Sayre [1973, 1975] (zie fig. 1c) en door French [1978, 1979] (zie fig. 1d) bleek het mogelijk om twee

lagen met een duidelijk dichtheidsverschil in dezelfde richting te laten stromen, waarbij het snelheidsprofiel van de tweelagenstroming niet belangrijk verschilt van het profiel van een homogene stroming. Zelfs was het bij experimenten van Sprong [1971] zo dat een gewenst en aanvankelijk opgelegd snelheidsverschil tussen de twee lagen, die overigens wel in dezelfde richting stroomden, spoedig verdwenen was door aanpassing van de onderlinge laagdikten (zie fig. 1e). Wel blijkt uit metingen (Schiller en Sayre 1975, Viollet 1980, Gartrell 1979, 1980 en McCutcheon 1981) dat het snelheidsprofiel en eventueel de ontwikkeling van dit snelheidsprofiel niet geheel gelijk is aan de homogene situatie. Dit is niet verwonderlijk gegeven het feit dat snelheidsprofiel - turbulentiegeneratie - impulsuitwisseling - massa-uitwisseling - dichtheidsprofiel elkaar beïnvloeden.

In de situaties van de figuren 1c,d,e, dus bij een ongeveer logaritmisch snelheidsprofiel, is bodemschuifspanning de voornaamste bron van turbulentie in de gelaagde stroming.

Nu is de entrainmentbeschouwing slechts toepasbaar bij een stroming verdeeld in een sterk-turbulente en een zwak-turbulente laag; meesleuring vindt plaats over het grensvlak. Ten gevolge van de hoge turbulentiegraad van de meesleurende laag wordt de meegesleurde massa snel over deze laag verdeeld.

Een entrainmentbeschouwing is dus niet van toepassing op een stroming zonder bijzondere snelheidsverschillen tussen de lagen. Dit is ook al zichtbaar in de dichtheidsprofielen bij de experimenten van Schiller en Sayre (zie fig. 11, 12 en hfdst. 7) en de experimenten van French [1979]. Deze experimenten geven aan dat de massa-uitwisseling in verticale richting moet worden beschreven met een diffusievergelijking.

Echter, het berekenen van de diffusie met behulp van formules zoals de Munk-Andersonvergelijking (2.1) leidt voor dit type stromingen tot enkele belangrijke problemen. Deze problemen worden veroorzaakt doordat ϵ_z in vgl. (2.1) slechts afhankelijk is van de lokale waarden van $\partial\rho/\partial z$ en $\partial u/\partial z$. In feite is de toepassing van deze lokale waarden een vereenvoudiging in het model; in werkelijkheid is diffusie (en dus ook de diffusiecoëfficiënt) geen lokaal verschijnsel wegens de ruimtelijke afmeting van de turbulente bewegingen. Overduidelijk treden in de nu beschouwde stromingen problemen op wanneer plaatselijk de snelheidsgradiënt $\partial u/\partial z$ gelijk is aan nul, waardoor volgens vgl. (2.1) ter plaatse $\epsilon_z = 0$ wordt. Wanneer $\partial u/\partial z$ nog niet gelijk is aan nul, maar zeer klein (zoals in de bovenste helft van genoemde stromingen veelal het geval), zal de waarde van $\partial u/\partial z$ zeer precies bekend moeten zijn om ϵ_z volgens vgl. (2.1) te berekenen.

Soortgelijke problemen zullen met vgl. (2.1) optreden bij een plaatselijk zeer grote waarde van $\partial\rho/\partial z$, die eveneens tot zeer kleine waarden van ϵ_z zullen leiden.

In dit verslag wordt een rekenmethode ontwikkeld waarbij de lokale waarde van de diffusiecoëfficiënt, in de vorm van de verhouding $\epsilon_z(z)/\epsilon_{z,0}(z)$, niet alleen afhankelijk is van de lokale dichtheidsgradiënt $\partial\rho(z)/\partial z$, maar van de waarde van $\partial\rho/\partial z$ over een groter gebied met afnemend belang op grotere afstand.

Omdat de te beschouwen gelaagde systemen ongeveer hetzelfde stroomsnelheidsprofiel zullen bezitten als een homogene stroming, zal de verhouding $\epsilon_z(z)/\epsilon_{z,0}(z)$ niet afhankelijk zijn van de snelheidsgradiënt $\partial u/\partial z$, zoals in vgl. (2.1) wel het geval is.

3 Vereenvoudigd turbulentiemodel

Beschouw een tweedimensionale (longitudinaal-vertikaal), niet-gelaagde, turbulente stroming zoals in figuur 2a getekend. De stroming kenmerkt zich door een gemiddelde stroomsnelheid en turbulente bewegingen.

Een deeltje in het punt P van deze stroming heeft op het tijdstip t een snelheid welke kan worden geschreven als

$$u = \bar{u} + u' \quad (3.1)$$

waarin $\bar{u}$ de gemiddelde snelheid is, en u' de turbulente snelheid voorstelt. Figuur 2b geeft gefotografeerde banen weer van deeltjes (in dit experiment zijn hiervoor zwevende oliedruppels in een luchtstroming genomen) in een turbulente, enigszins gelaagde stroming ($Re_0 = 3 \cdot 10^{-3}$, Frenzen [1963]).

In vergelijking (3.1) zijn de snelheden beschouwd ten opzichte van een stilstaand Eulers koördinatensysteem. In het vervolg zal echter een Lagrangiaans koördinatensysteem worden beschouwd, waarbij het punt P meebeweegt met de gemiddelde snelheid van de stroming.

Vgl. (3.1) en figuur 2b maken duidelijk dat de turbulente beweging in P op elk tijdstip kan worden gekarakteriseerd door waarden voor de

- snelheid
- richting
- kromming.

In figuur 3a zijn enkele sets van deze waarden door P aangeduid.

Later zal de verticale diffusiecoëfficiënt $\epsilon_{z,0}$ afhankelijk worden gesteld van de sommatie van de mogelijke verticale verplaatsingen ten gevolge van turbulente bewegingen in punt P. De eerste vraag is dan:

welke waarden van snelheid, richting en kromming zijn mogelijk en hoe ligt de kansverdeling van deze waarden? In een zeer vereenvoudigd model worden de volgende verdelingsfuncties van deze grootheden aangenomen, ten behoeve van de berekening van $\epsilon_{z,0}$:

- snelheid.

De turbulente snelheden die in punt P op kunnen treden, zullen een zekere verdeling om een gemiddelde turbulente snelheid u_t aannemen, waarbij u_t in het algemeen afhankelijk is van de verticale koördinaat van P. Ter vereenvoudiging wordt nu aangenomen dat de verdeling van de turbulente snelheden om u_t onbelangrijk is ter bepaling van het relatieve profiel van $\epsilon_{z,0}$, juist

omdat deze verdeling (onafhankelijk van de waarde van u_t) steeds min of meer gelijkvormig zal zijn. In de vereenvoudiging wordt dus aangenomen dat alle turbulente bewegingen in P een gelijke snelheid $u_t(P)$ bezitten, welke snelheid dus afhankelijk kan zijn van de verticale koördinaat van P.

Wat betreft de frekwentie van voorkomen van de turbulente snelheid u_t in P wordt gesteld dat in een tweedimensionale stroming zoals hier beschouwd de energie van de verticale turbulente fluktuaties ongeveer gelijkmatig over de verticale z-as is verdeeld, zolang er althans geen sprake is van beperkende invloed door bodem en/of oppervlak, zoals onder "richting en kromming" zal worden besproken. Daar de turbulente energie evenredig is met u_t^2 , geldt voor de verschillende waarden van u_t op de z-as dat $v(u_t) \sim u_t^{-2}$. Zowel u_t als de frekwentie van voorkomen $v(u_t)$ zijn dus een functie van de plaats van P.

Een homogene verdeling van de energie van de verticale turbulente fluktuaties wordt ondersteund door in de literatuur bekende metingen aan diverse stromingen waarin de verdeling van de longitudinale, verticale en eventueel laterale turbulente fluktuaties zijn bepaald. Steeds bleek de energieverdeling van de verticale fluktuaties ongeveer homogeen te zijn, in tegenstelling tot de horizontale fluktuaties. Genoemd kunnen worden de experimenten van Baines en Knapp [1966], waarin een circulatiestroming in een kanaal met gesloten uiteinden wordt beschouwd, Bowden en Ferguson [1980] die veldmetingen in de grenslaag van een getijstrooming uitvoerden, Anwar en Atkins [1980] waar de fluktuaties over de gehele diepte van een gesimuleerde getijstrooming werd gemeten. Tenslotte vonden Iwasaki en Abe [1972] in een zwak gelaagde stroming een homogene verdeling voor de verticale fluktuaties, in tegenstelling tot de horizontale fluktuaties.

- richting en kromming

Als eenvoudig model wordt aangenomen dat alle waarden van de richting en kromming van de turbulente baan in P gelijkmatig voorkomen, tenzij de bodem of het oppervlak een beperking oplegt: in dat geval komen deze geblokkeerde waarden niet voor.

Verondersteld wordt dat de combinatie van een bepaalde richting en kromming geblokkeerd wordt door oppervlak of bodem als de cirkel die door deze richting en kromming getrokken wordt, bodem of oppervlak doorsnijdt. Figuur 3b geeft aan hoe door de richtingen en krommingen van figuur 3a deze cirkels worden getrokken. Deze cirkels worden nu geïntroduceerd als "rand" in een wervel die in het turbulentieveld al of niet op kan treden.

(In eerste instantie is het voldoende om het begrip wervel te beperken tot bovengenoemde rand door P. Hoe de wervel zich binnen of buiten deze rand

voortzet doet voorlopig niet ter zake).

Aan een snelheid, richting en kromming door P wordt dus een wervel toegevoegd met snelheid u_t in P, een straal R en een oriëntatie ϕ ten opzichte van P. Figuur 3c geeft aan welke wervels door P mogelijk zijn onder de hoeken ϕ_1 en ϕ_2 voordat bodem of oppervlak worden doorsneden. Duidelijk is dat ϕ de waarden van 0° tot 360° kan doorlopen.

Tot nu toe zijn slechts oppervlak en bodem als beperkende factoren aangeduid, met als simpele konsekwentie het wél of niét voor kunnen komen van een bepaalde wervel, dus zonder te spreken over een "verminderde kans" van voorkomen. In hoofdstuk 5 en 6 zal aan een wervel die een dichtheidsgradiënt in een gelaagde stroming doorsnijdt, op grond van een beschouwing van potentiële en kinetische energie, wél een verminderde kans van voorkomen worden toegekend.

Verondersteld wordt nu dat de verticale diffusiecoëfficiënt $\varepsilon_{z,o}$ in P evenredig is met de verticale verplaatsingen die door de turbulente bewegingen in P worden veroorzaakt bij "meesleuring" gedurende een korte tijd Δt . Figuur 3d geeft aan dat de verticale verplaatsing ten gevolge van wervel (R, u_t, ϕ) gedurende een korte tijd Δt evenredig is met $u_t \sin \phi$. De bijdrage A van wervel (R, u_t, ϕ) tot $\varepsilon_{z,o}(P)$ is derhalve evenredig met:

$$A(R, u_t, \phi) \sim u_t \sin \phi$$

De relatieve waarde van $\varepsilon_{z,o}(P)$ zal later worden bepaald door sommatie over alle bijdragen A.

Nu wordt verder verondersteld dat de tijd Δt gedurende welke het deeltje in P door de wervel (R, u_t, ϕ) wordt meegenomen, evenredig is met R. (De achtergrond hiervan is dat de levensduur van een wervel door het Lagrangiaanse punt P ook toeneemt met de afmeting.) Dan is de bijdrage van deze wervel:

$$A(R, u_t, \phi) \sim R u_t \sin \phi$$

Daar de wervels met diverse waarden van R volgens een eerdere veronderstelling allen gelijke kans van voorkomen hebben (afgezien van blokkade door oppervlak of bodem) wat moet neerkomen op gelijke "meesleurtijden" voor de wervels met diverse R over een tijdsperiode T, zal het aantal keren dat in T het deeltje door een wervel R wordt meegevoerd, omgekeerd evenredig zijn met R:

$$v(R,T) \sim 1/R$$

Nu zal één grote verticale verplaatsing van meer invloed op $\varepsilon_{z,0}$ zijn dan een aantal evenredig kleinere verplaatsingen. Gesteld wordt nu dat in die situaties waarin vanwege de kans van voorkomen in periode T verschillende aantallen bijdragen bij elkaar opgeteld moeten worden, de sommatie lineair plaatsvindt maar elke term vermenigvuldigd wordt met een gewichtsfactor evenredig met de meesleurtijd dus evenredig met R. M.a.w., voor een wervel (R, u_t, ϕ) is dan de bijdrage inclusief gewichtsterm:

$$A(R, u_t, \phi) \sim R^2 u_t \sin \phi$$

Daar echter het aantal wervels met straal R in een tijdsperiode T evenredig is volgens $v(R,T) \sim 1/R$, is de bijdrage van de wervels (R, u_t, ϕ) in de periode T

$$A_T(R, u_t, \phi) \sim 1/R \cdot R^2 u_t \sin \phi = R u_t \sin \phi$$

Op soortgelijke wijze wordt de snelheid u_t behandeld, welke waarde in principe afhankelijk is van de verticale koördinaat. Zoals eerder aangeduid (p. 8) geldt voor de frekwentie van voorkomen van een dergelijke fluktuatie:

$v(u_t) \sim u_t^{-2}$. De bijdrage van één wervel (R, u_t, ϕ) inclusief gewichtsfactor is dan

$$A(R, u_t, \phi) \sim R u_t^2 \sin \phi$$

De bijdrage van de wervels (R, u_t, ϕ) in de periode T is dan

$$A_T(R, u_t, \phi) \sim u_t^{-2} \cdot R u_t^2 \sin \phi = R \sin \phi \quad (3.2)$$

De waarde u_t is daarbij dus klaarblijkelijk niet van belang voor het bepalen van de vorm van de $\varepsilon_{z,0}$ curve, zodat niet gezocht hoeft te worden naar de waarde van u_t als functie van P.

Gelijke kansen voor alle mogelijke grootte-klassen van wervels door P en gelijke snelheid aan de rand (waarbij overigens de wervel geheel uit "rand" bestaat), kan geïllustreerd worden met figuur 4a. Een volume van de stroming wordt gelijkmatig bezet door wervels van diverse grootte-klassen. In figuur 4a is daarbij de randdikte van de wervel evenredig met R genomen, zodat de waar-

schijnlijkheid van voorkomen door de randoppervlakte wordt aangeduid. Opge-merkt kan worden dat de gemiddelde levensduur van een wervel in dit plaatje niet terzake doet, als de gesommeerde levensduur gedurende een bepaalde perio-
de voor alle grootte-klassen maar gelijk is.

Daar de snelheid van de wervelranden voor alle grootte-klassen gelijk gesteld werd, is uit figuur 4a duidelijk dat in een gegeven volume-element in elke grootte-klasse evenveel kinetische energie is opgeslagen. Figuur 4b geeft dit als de onderbroken lijn weer; in deze figuur is de kinetische energie E uitge-
zet tegen, zoals gebruikelijk, het golfgetal k_t . Het golfgetal is omgekeerd evenredig met de wervelgrootte $2R$.

Turbulentiewaarnemingen in stromingen geven gewoonlijk een curve aan, zoals afgebeeld als de ononderbroken lijn in figuur 4b. Ofschoon de beide curven in figuur 4b duidelijk verschillend zijn moet wel bedacht worden dat de grootste bijdrage aan de verticale diffusiecoëfficiënt geleverd wordt door de grootste wervelklassen, wat zowel overeenkomstig waarnemingen is, als ook volgens veronderstelling 3: bijdrage $A(R, u_t, \phi) \sim R \sin \phi$. Gezien het belang van de grootste wervelklassen is de rechte lijn mogelijk een goede benadering van de waargenomen curve bij de sommatie van de bijdragen van alle wervels tot ϵ_z .

4 Diffusiekoëfficiënt in een homogene stroming

Overeenkomstig de veronderstellingen in hoofdstuk 3 zal nu het vertikale profiel van de vertikale diffusiekoëfficiënt $\epsilon_{z,o}(z)$ worden berekend voor een niet-gelaagde stroming.

$\epsilon_{z,o}(z)$ wordt dus evenredig verondersteld met de vertikale verplaatsingen ten gevolge van turbulente bewegingen in het punt z .

Daar voor elk punt P de wervels in de diverse grootte-klassen (straal R) en gezien vanuit alle richtingen (ϕ) gelijke kans van voorkomen hebben, wordt $\epsilon_{z,o}(z)$ geschreven als:

$$\epsilon_{z,o}(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(\phi,z)} R \sin\phi \, dR \, d\phi \quad (4.1)$$

De maximale waarde van R bij een zekere ϕ en z , $R_m(\phi,z)$, hangt daarbij af van de positie van oppervlak en bodem, die immers niet doorsneden mogen worden. Worden de vertikale koördinaten voor bodem, punt P en oppervlak aangeduid met respektievelijk 0 , z en h , overeenkomstig figuur 3c, dan wordt vgl. (4.1) als volgt opgelost:

$$\begin{aligned} \epsilon_{z,o}(z) \sim & \int_{\phi=0}^{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)} \int_{R=0}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} R \sin\phi \, d\phi \, dR + \\ & \text{I} \\ & + \int_{\phi=bg\cos(\frac{2z}{h}-1)}^{\pi} \int_{R=0}^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \, d\phi \, dR \\ & \text{II} \end{aligned} \quad (4.2)$$

waarbij de term I dat deel van de integratie is over richtingen ϕ waarbij de bodem de beperkende faktor is voor de afmetingen van de wervels; bij term II is het oppervlak de beperkende faktor.

Uitwerking geeft:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\phi=0}^{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)} \frac{z^2 \sin\phi}{(1+\cos\phi)^2} \, d\phi = \frac{1}{2} \frac{z^2}{1+\cos\phi} \Big|_0^{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)} = \frac{1}{2} zh - \frac{1}{2} z^2$$

$$II = \frac{1}{2} \int_{\phi = b g \cos(\frac{2z}{h} - 1)}^{\pi} \frac{(h-z)^2 \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} d\phi = - \frac{\frac{1}{2}(h-z)^2}{1 - \cos \phi} \Big|_{b g \cos(\frac{2z}{h} - 1)}^{\pi} = -\frac{1}{2}(h-z)^2 + \frac{1}{2}h(h-z)$$

$$\text{Dan is } \varepsilon_{z,o}(z) \sim I + II = \frac{1}{2}z(h-z) \quad (4.3)$$

Dit is juist de formulering die veelvuldig gebruikt wordt als $\varepsilon_{z,o}(z)$ -profiel van een homogene stroming. Vgl. (4.3) kan voor de impulsdiffusiecoëfficiënt worden afgeleid voor een stroming waarbij de mengweglengte in een punt evenredig wordt gesteld aan de afstand tot de wand of tot het oppervlak, zoals de Prandtl-mengweglengte. Uit een dergelijk $\varepsilon_{z,o}(z)$ -profiel volgt ook het logaritmisch vertikaal snelheidsprofiel. Veelal wordt de massadiffusiecoëfficiënt, welke in dit rapport verder beschouwd wordt, evenredig verondersteld met de impulsdiffusiecoëfficiënt. Het logaritmisch snelheidsprofiel en het parabolische ε -profiel volgens vergelijking (4.3) wordt experimenteel bij open-kanaalstromingen bevestigd (zie bijvoorbeeld Ueda et al, 1977).

De veronderstellingen in paragraaf 3 leveren dus in ieder geval voor een homogene stroming een juist $\varepsilon_{z,o}(z)$ -profiel.

5 Diffusiecoëfficiënt in een tweelagenstroming

Beschouw een tweelagensysteem met homogene lagen en een scherp grensvlak. Beschouw daarin een wervel die het grensvlak doorsnijdt, zoals in figuur 5 aangegeven.

In het voorafgaande was het slechts nodig om van een wervel alleen de (cirkel-)rand te beschouwen, en kon nog in het midden worden gelaten hoe deze wervel zich verder voortzet. Nú zal een wervel worden beschouwd als een geheel gevulde cirkel. In eerste instantie wordt gedacht aan een "rigid body" draaiend met een bepaalde rotatiefrekwentie, zodat de snelheid van een deeltje evenredig is met de afstand tot het middelpunt.

In figuur 5 is R de straal van de wervel en r_g de afstand van middelpunt tot grensvlak (beide steeds positief gedefinieerd).

Daar in een stabiel systeem de dichtheid in de bovenlaag kleiner is dan in de onderlaag, dichtheidsverschil $\Delta\rho$, zal de potentiële energie PE bij een kleine draaiing van de wervel stijgen. De stijging van PE bij een draaiing over een kleine hoek $\Delta\xi$ is:

$$\Delta PE \sim \int_{x=Q_1}^{Q_2} \Delta\rho g \Delta\xi R \cdot \frac{\sqrt{x^2 + r_g^2}}{R} \sin\alpha(x) dx \quad (5.1)$$

Immers, de verticale afstand waarover een deeltje op het grensvlak in de onderlaag doordringt bij rotatie van de wervel over een zeer kleine hoek $\Delta\xi$,

$$\text{is evenredig met } \Delta\xi R \cdot \frac{\sqrt{x^2 + r_g^2}}{R} \sin\alpha.$$

Vgl. (5.1) kan uitgewerkt worden tot:

$$\Delta PE \sim \int_{Q_1}^{Q_2} \Delta\rho g \Delta\xi \sqrt{x^2 + r_g^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r_g^2}} = \frac{1}{2} \Delta\rho g \Delta\xi (R^2 - r_g^2) \quad (5.2)$$

ΔPE kan men beschouwen als een "weerstand" tegen rotatie van de wervel.

Bij rotatie van een wervel geldt voor de kinetische energie KE :

$$KE \sim \int_0^R 2\pi r \cdot \left(\frac{r}{R} u_t\right)^2 \rho dr = \frac{1}{2} u_t^2 R^2 \rho \quad (5.3)$$

waarin u_t de snelheid op de rand (straal R) voorstelt.

Verondersteld wordt nu dat de reductie in de kans van voorkomen van een wervel die het grensvlak van een tweelagensysteem doorsnijdt, ten opzichte van de overeenkomstige wervel in een homogeen systeem, af zal hangen van een bepaalde verhouding van de potentiële en kinetische energie.

Er wordt nu evenwel niet aangenomen dat het om de verhouding $\Delta PE/KE$ zal gaan, zoals ΔPE en KE in de vergelijkingen (5.2) en (5.3) geformuleerd zijn. Immers, de toename ΔPE bij draaiing van de wervel wordt veroorzaakt door de buitenste ring van de wervel, ter breedte van $R-r_g$, terwijl KE op de gehele wervel slaat.

In eerste instantie wordt aangenomen dat ΔPE van de buitenring moet worden opgebracht door de kinetische energie KE' van deze zelfde ring. Dan geldt volgens vergelijking (5.3): $KE' \sim \frac{1}{2} u_t^2 \rho (R^2 - r_g^2)$.

Binnen de wervel en ook binnen de ring die het grensvlak doorsnijdt zal een bepaalde snelheidsverdeling (snelheid als functie van r) moeten bestaan. Binnen de totale ring die het grensvlak doorsnijdt zullen de subringen ongelijke weerstand tegen rotatie bezitten: de buitenste subring meer dan de binnenste. Het handhaven van een bepaalde snelheidsverdeling binnen de wervel zal dus moeilijker zijn bij een relatief brede ring; relatief ten opzichte van de straal van de wervel daar de gradiënt in de snelheidsverdeling omgekeerd evenredig is met R . Voorgesteld wordt daarom om KE in de $\Delta PE/KE$ verhouding te delen door de relatieve ringbreedte $(R-r_g)/R$:

$$KE'' \sim \frac{R^2 - r_g^2}{(R-r_g)/R} \cdot \frac{1}{2} u_t^2 \rho = \frac{1}{2} u_t^2 \rho R(R+r_g)$$

De binding tussen de ringen wordt veroorzaakt door de viscositeit. Deze binding zal omgekeerd evenredig met R zijn, daar de bindingskracht evenredig is met een omtrek en de te binden massa evenredig met een oppervlak. Deel daarom KE ook nog eens door R

$$KE''' \sim \frac{R(R+r_g)}{R} \cdot \frac{1}{2} u_t^2 \rho = \frac{1}{2} u_t^2 \rho (R+r_g) \quad (5.4)$$

Veronderstelling:

Gesteld wordt dat de relatieve bijdrage f van de wervel die een grensvlak doorsnijdt, ten opzichte van de overeenkomstige wervel in de homogene situatie, tot de verticale diffusiecoëfficiënt wordt gegeven door

$$f = 1 - \gamma_1' \frac{\Delta PE}{KE},$$

met ΔPE en KE gedefinieerd als in vgl. (5.2) en (5.4), en γ_1' een konstante.

Dan is

$$f = 1 - \gamma_1' \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{g}{u_t^2} \frac{\Delta \xi}{\rho} (R - r_g) = 1 - \gamma_1 \frac{\Delta \rho}{u_*^2} \frac{g}{\rho} (R - r_g) \quad (5.5)$$

In vgl. (5.5) is dan de "oninteressante" grootte $\Delta \xi$ in de konstante γ_1 opgenomen. Van de wervelsnelheid u_t wordt aangenomen dat deze evenredig is met de stroomsnelheid u (dus $u_t \sim u$) en daardoor met de schuifspanningssnelheid bij de bodem u_* (zodat $u_t \sim u \sim u_*$), welke in de uiteindelijke vorm van vgl. (5.5) is ingevuld.

De term $\Delta \rho g (R - r_g) / \rho u_*^2$ in vgl. (5.5) is een soort Richardsongetal, wat ook verwacht kan worden bij een dergelijke energiebeschouwing.

De verticale diffusiecoëfficiënt in een tweelagensysteem wordt dan geschreven als

$$\varepsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z, \phi)} R \sin \phi \left[1 - \gamma_1 \frac{\Delta \rho g}{u_*^2 \rho} (R - r_g) \right] d\phi dR \quad (5.6)$$

Hierin neemt γ_1 de waarde $\gamma_1 = 0$ aan indien $R < r_g$, terwijl voor $R > r_g$ de waarde van γ_1 konstant is (onafhankelijk van z) voor een stroming. Tenslotte wordt de integrand in vgl. (5.6) nul gesteld indien R zo groot wordt dat

$$\left\{ 1 - \gamma_1 \frac{\Delta \rho g}{u_*^2 \rho} (R - r_g) \right\} < 0: \text{ een wervel levert immers geen negatieve bijdrage}$$

aan $\varepsilon_z(z)$.

N.B. In het vervolg van deze paragraaf zal steeds worden verondersteld dat de verticale koördinaat z waarvoor $\varepsilon_z(z)$ moet worden berekend, zich in de onderlaag bevindt. Voor z in de bovenlaag geldt een geheel analoge beschouwing door

als het ware het gehele systeem "om te keren".

De waarde van de integratiegrens $R_m(z, \phi)$ hangt af van de waarde van z en ϕ , en volgt uit de mogelijkheden dat voor een waarde van R

- de bodem wordt bereikt (b)
- het oppervlak wordt bereikt (s)
- de term $\{1 - \gamma_1 \frac{\Delta \rho g}{2 u_* \rho} (R - r_g)\}$ negatief wordt (Γ).

Integraal (5.6) kent analytische oplossingen die echter verschillend zijn voor de verschillende mogelijkheden waarop R begrensd wordt. Onderscheiden kunnen worden, voor z in de onderste laag:

K-gebied: dat aangesloten gebied van z -waarden waarvoor, bij toenemende waarden van ϕ van 0 tot π , eerst R begrensd wordt door (b) (bereiken van bodem) en daarna door (s) (bereiken van oppervlak).

L-gebied: z -gebied waarbij bij toenemende ϕ , R begrensd wordt door respectievelijk (b) en (Γ) (waarbij $\{1 - \gamma_1 \frac{\Delta \rho g}{2 u_* \rho} (R - r_g)\} < 0$).

M-gebied: z -gebied met R begrensd door respectievelijk (b), (Γ) en (s).

Men kan nagaan dat geen andere combinaties in R -begrenzingsmogelijk zijn.

Figuur 6 geeft vier tweelagenstromingen weer waarin de laagdikten en de toegestane doordringbaarheid $(R - r_g)_{\max}$ van een wervel in de "andere" laag zo gekozen zijn dat alle mogelijkheden van R -begrenzingsmogelijkheden aan het daglicht moeten komen.

In de figuur zijn de diverse K-, L- en M-gebieden aangeduid met een beschouwd punt hierin, en wervels met toenemende R onder zodanige hoeken dat de diverse R -begrenzingsmogelijkheden zichtbaar worden.

Figuur 6 laat tevens zien dat in het M-gebied, met R -begrenzingsmogelijkheden door respectievelijk (b), (Γ) en (s), de Γ -begrenzing altijd gesplitst wordt in eerst een begrenzing door de maximale doordringing in de bovenlaag (Γ_s) en daarna, bij grotere ϕ , een begrenzing door maximale doordringing in de onderlaag (Γ_b). Tevens geeft figuur 6 aan dat voor één stroming slechts of alleen het K-gebied, of een combinatie van L- en M-gebied voorkomt (dat wil zeggen, bij z in de hier gekozen onderlaag).

In appendix A zijn de analytische uitdrukkingen afgeleid voor $\varepsilon_z(z)$ in een tweelagensysteem. In eerste instantie is daarbij gebruik gemaakt van de indeling in K-, L- en M-gebied. Binnen elk gebied wordt dan de "standaardinte-

graal" (5.6) gesplitst in een aantal subintegralen die het interval $\phi = 0$ tot π in enkele delen verdelen; voor elke integraal worden daarbij uitdrukkingen afgeleid voor de minimale en maximale waarden van R (dus de integratiegrenzen van R) die in dat gebied van ϕ -waarden gelden.

Daar in de integrand van de integralen r_g voorkomt, gedefinieerd door $r_g = (1-z) + R \cos \phi$, kunnen de subintegralen twee verschillende waarden hebben daar $1 - z + R \cos \phi$ zowel positief als negatief kan zijn in het gebied van R en ϕ die in die subintegraal bij die waarde van z wordt bestreken. Dit leidt ertoe dat binnen het K -gebied weer subgebieden met verschillende analytische oplossingen bestaan zoals in appendix A uiteengezet; aldus ontstaan 3 subgebieden in het K -gebied (K_1 , K_2 , K_3). In het L - en M -gebied worden slechts enkelvoudige oplossingen gevonden.

In het onderstaande is Γ_1 (dimensie m^{-1}) gedefinieerd als:

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 \frac{\Delta \rho g}{\rho u_*^2} \quad (5.7)$$

$$\underline{K_1}: i > \frac{1}{2}h \quad \text{én} \quad h - i < \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{én} \quad z > 2i - h:$$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) + \Gamma_1 \{ (h-2i)^3 + z(z-3i)^2 + 3zh(z-2i) \} \quad (5.8)$$

$$\underline{K_2}: i > \frac{1}{2}h \quad \text{én} \quad h - i < \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{én} \quad z < 2i - h:$$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) - \frac{1}{4} \Gamma_1 z(h-i)^2 \quad (5.9)$$

$$\underline{K_3}: i < \frac{1}{2}h \quad \text{én} \quad i < \frac{1}{\Gamma_1} :$$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) + \frac{1}{12} \Gamma_1 z \{ (z-3i)^2 + 3h(z-2i) \} \quad (5.10)$$

$$\underline{L} : \text{of } i > \frac{1}{2}h \quad \text{én} \quad h - i > \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{én} \quad i > \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{én} \quad z < i - \frac{1}{\Gamma_1} ,$$

$$\text{of } i < \frac{1}{2}h \quad \text{én} \quad i > \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{én} \quad z < i - \frac{1}{\Gamma_1} :$$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(1-z) + \frac{1}{4} \frac{z}{\Gamma_1} \quad (5.11)$$

$$\underline{M} : 2zi - zh - i^2 + \frac{1}{\Gamma_1^2} < 0 \quad \text{en} \quad h - i > \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{en} \quad i > \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{en} \quad z > i - \frac{1}{\Gamma_1} \quad \text{en}$$

$$z > 2i - h:$$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) - \frac{1}{2}i(h-i) + \Gamma_1(i-z)^2 \left(\frac{1}{12}z + \frac{1}{4}h - \frac{1}{3}i \right) + \frac{h}{4\Gamma_1} - \frac{1}{6\Gamma_1^2} \quad (5.12)$$

Als voorbeeld is in figuur 7a een aantal $\varepsilon_z(z)$ curven weergegeven voor een tweelagenstroming met $i = 0,6 h$. De $\varepsilon_z(z)$ -curven zijn met bovenstaande formules berekend voor diverse waarden van Γ_1 tussen $\Gamma_1 = 0$ en $\Gamma_1 = \infty$.

Voor $\Gamma_1 = 0$ wordt de situatie gevonden van een homogene enkelvoudige laag, terwijl met $\Gamma_1 = \infty$ een tweelagensysteem wordt aangeduid zonder enige uitwisseling door het grensvlak.

In figuur 7b is aangegeven welke formules voor de diverse curven of onderdelen van curven zijn gebruikt, door aanduiding van de diverse gebieden K_1 , K_2 , K_3 , L en M .

Opvallend is in figuur 7a dat bij toenemende waarde van Γ_1 (wat dus overeen kan komen met een toenemend dichtheidsverschil over het grensvlak) aanvankelijk een algehele reductie van ε_z voor alle waarden van z optreedt. Pas bij grotere waarden van Γ_1 neemt ε_z specifiek bij het grensvlak af. De niet wezenlijk gereduceerde waarde van ε_z bij het grensvlak bij de situatie met geringe dichtheidsverschillen zou overeen kunnen komen met de experimentele waarnemingen (McCutcheon en French [1977], French [1979b]), van een zeer instabiel grensvlak ("collapsing two-layer system") voor een dergelijk systeem. Bij toenemend dichtheidsverschil is sprake van een overgang naar een stabiel grensvlak, waarover overigens wel enige uitwisseling plaatsvindt.

In eerste instantie kan het bevreemding wekken dat in figuur 7a bij $\Gamma_1 = \infty$ (dus in de situatie zonder massa-uitwisseling via het grensvlak), toch turbulente diffusie in de bovenlaag plaatsvindt. Immers, eerder was gesteld dat de bodemschuifspanning (in eerste instantie) de turbulentiebron is in de beschouwde stromingen. Echter, de experimenten van Schiller en Sayre, van French, en zeer speciaal ook de experimenten van Piat en Hopfinger [1981] (zie fig. 8) laten zien dat ook bij de hier beschouwde stromingen een dichtheidsgradiënt aanleiding geeft tot een aanpassing van het snelheidsprofiel ten opzichte van het logaritmische profiel van een homogene stroming. De bodem als turbulentiebron neemt dan af ten gunste van de schuifspanning bij een toegenomen

men snelheidsgradiënt elders in de stroming. In de limiet van $\Gamma_1 = \infty$ bij een tweelagensysteem, zoals in figuur 7, wordt de turbulentie in de bovenlaag gegenereerd door de schuifspanning over het grensvlak, waarover een snelheidsverschil zal zijn ontstaan.

6 Diffusiecoëfficiënt in een willekeurig gelaagd systeem

6.1 Afleiding van de algemene uitdrukking voor ϵ_z

Via de uitdrukking (5.7):

$$\epsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \left\{ 1 - \gamma_1 \frac{\Delta\rho g}{2u_*\rho} (R-r_g) \right\} d\phi dR \quad (5.7)$$

voor de diffusiecoëfficiënt in een tweelagensysteem, komt men tot een uitdrukking voor $\epsilon_z(z)$ in een willekeurig gelaagd systeem. Daartoe verdeelt men een willekeurig gelaagd systeem in een groot aantal dunne laagjes, zoals in figuur 9 is weergegeven. Eenvoudig is in te zien dat de argumenten die geleid hebben tot vgl. (5.7) voor een tweelagensysteem, voor een willekeurig gelaagd systeem leiden tot een benadering van $\epsilon_z(z)$ door sommatie over een groot aantal tweelagensystemen.

$$\epsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2u_*\rho} \sum_k |\rho_k - \rho_{k-1}| (R-r_k) \right\} d\phi dR \quad (6.1)$$

In (6.1) geeft $\sum_k$ daarbij de sommatie over elk grensvlak binnen de door z , R en ϕ bepaalde wervel weer. r_k is steeds de afstand van het middelpunt van de wervel tot het betreffende grensvlak. De grootheid $\Delta\rho$ in vgl. (5.7) is in het veellagensysteem van vgl. (6.1) vervangen door $|\rho_k - \rho_{k-1}|$.

Het is duidelijk dat vgl. (6.1) de diffusiecoëfficiënt slechts goed weergeeft bij een oneindig aantal laagjes k , dus volgens:

$$\epsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2u_*\rho} \int_{z_1=m-R}^{m+R} \frac{\partial\rho}{\partial z} (R-|m-z_1|) dz_1 \right\} d\phi dR \quad (6.2)$$

6.2 Analytische oplossing van $\epsilon_z(z)$ bij een lineair dichtheidsprofiel

Voor de situatie met een lineair dichtheidsprofiel, dus een konstante waarde van $\partial\rho/\partial z$, kan vgl. (6.2) worden vereenvoudigd tot:

$$\varepsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z, \phi)} R \sin \phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} R^2 \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| \right\} d\phi dR \quad (6.3)$$

Voor deze situatie kunnen analytische uitdrukkingen voor $\varepsilon_z(z)$ worden gevonden; deze uitdrukkingen zijn in appendix B afgeleid en luiden:

$\varepsilon_z(z)$ bij stroming met lineair dichtheidsprofiel, met $\Gamma_1 = \frac{\gamma_1 g h}{2 u_* \rho} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|$, is:

K-gebied $h < \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2} z(h-z) - \frac{1}{48} \Gamma_1 \frac{z}{h} (h-z)(2h^2 - zh + z^2) \quad (6.4)$$

L-gebied als $\frac{z^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ én $\frac{(h-z)^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$ én $h > \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\text{dan is } \varepsilon_z(z) \sim z \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{4} z + \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{z^3}{h} \right) \quad (6.5)$$

en als $\frac{z^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$ én $\frac{(h-z)^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ én $h > \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\text{dan is } \varepsilon_z(z) \sim (h-z) \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{4} (h-z) + \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{(h-z)^3}{h} \right\} \quad (6.6)$$

M-gebied $\frac{z^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ én $\frac{(h-z)^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ én $h > \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{5}{12} h \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} + z^2 \left(\frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{z^2}{h} - \frac{1}{4} \right) + (h-z)^2 \left\{ \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{(h-z)^2}{h} - \frac{1}{4} \right\} - \frac{h}{4 \Gamma_1} (2 - \sqrt{h \Gamma_1}) \quad (6.7)$$

N-gebied $\frac{z^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$ én $\frac{(h-z)^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2} \frac{h}{\Gamma_1} \quad (6.8)$$

Als voorbeeld is in figuur 10a een aantal $\varepsilon_z(z)$ -curven weergegeven met Γ_1 oplopend van $\Gamma_1 = 0$ tot $\Gamma_1 = \infty$. Oplopende waarde van Γ_1 komt bijvoorbeeld overeen met een toenemende dichtheidsgradiënt $\partial \rho / \partial z$.

Voor $\Gamma_1 = 0$ wordt de parabolische $\varepsilon_z(z)$ -curve gevonden, overeenkomend met een homogene stroming met $\partial \rho / \partial z = 0$. Bij $\Gamma_1 = \infty$ is $\varepsilon_z(z) = 0$ voor elke waarde van z , zodat geen enkele verticale massa-uitwisseling plaatsvindt.

In figuur 10b is aangegeven welke formules voor de diverse curven of onderdelen van curven zijn gebruikt, door aanduiding van de diverse gebieden K, L, M, N.

Opvallend is in figuur 10a de konstante waarde van $\varepsilon_z(z)$ over een zekere hoogte in het midden van de stroming, voor grotere waarden van Γ_1 (voor $h\Gamma_1 > 10$).

Een beschrijving hiervan kan ontleend worden aan Monin [1959]:

"In the case of stable stratification eddies are working against Archimedes forces and lose some part of their energy. This effect is most essential for large eddies. As a result, the turbulent energy and the turbulent mixing scale ℓ diminish as compared with the unstratified flow; the energy spectrum changes: total energy reduces and the maximum shifts to smaller scales. The mixing length ℓ becomes small. At the height $z > \ell$ the presence of the wall is not essential and turbulence tends to be homogeneous along vertical."

6.3 De koëfficiënten c en γ_1 in de algemene uitdrukking voor $\varepsilon_z(z)$

De evenredigheid (6.2) kan als vergelijking worden geschreven door:

$$\varepsilon_z(z) = c_1 \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin \phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} \int_{z_1=m-R}^{m+h} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| (R - |m - z_1|) dz_1 \right\} d\phi dR \quad (6.9)$$

waarin twee nader te bepalen koëfficiënten c_1 en γ_1 voorkomen. Over deze koëfficiënten kan het volgende gezegd worden:

De stromingen, die voor het huidige diffusiemodel in aanmerking komen, worden gekenmerkt door een viertal parameters:

- h de waterdiepte
- $\bar{u}$ de gemiddelde stroomsnelheid (gemiddeld over de diepte); voor alle stromingen wordt aangenomen dat zij ongeveer logaritmische snelheidsprofielen bezitten, zoals het geval pleegt te zijn bij een homogene stroming
- $\rho(z)$ het dichtheidsveld over de vertikaal
- C de Chézy-koëfficiënt die de bodemruwheid aangeeft en daarmee een maat is voor de intensiteit van de turbulentie in de stroming, die immers verondersteld wordt aan de bodem gegenereerd te worden.

De parameters $\bar{u}$ en C zijn te combineren tot de schuifspanningssnelheid u_* , zodat de stroming gekarakteriseerd wordt door de drie parameters h , u_* en $\rho(z)$.

Voor een homogeen systeem ($\partial\rho/\partial z = 0$) reduceert vgl. (6.9) zich tot

$$\varepsilon_z(z) = c_1 \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \, d\phi \, dR \quad (6.10)$$

met als oplossing volgens hoofdstuk 3:

$$\varepsilon_z(z) = \frac{1}{2} c_1 z(h-z) \quad (6.11)$$

waarin $z = 0$ op de bodem en $z = h$ aan het wateroppervlak.

In een homogene stroming met een logaritmischesnelheidsprofiel (open-kanaalstroming) kan de verticale diffusiecoëfficiënt geschreven worden als

$$\bar{\varepsilon}_z = c_2 h u_* \quad (6.12)$$

waarin $\bar{\varepsilon}_z$ de over de waterdiepte gemiddelde diffusiecoëfficiënt voorstelt. Voor de stroming in een breed kanaal stelde Elder [1959] empirisch de waarde $c_2 = 0,067$ vast.

Schrijft men vgl. (6.11) nu als

$$\varepsilon_z(z) = \frac{1}{2} c \frac{u_*}{h} z(h-z) \quad (6.13)$$

met derhalve $c = c_1 h / u_*$, dan is voor een homogene kanaalstroming de coëfficiënt c onafhankelijk van de stromingsparameters h en u_* .

Schrijft men de algemene uitdrukking voor $\varepsilon_z(z)$ nu analoog aan het voorgaande als:

$$\varepsilon_z(z) = \frac{c u_*}{h} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2 u_*^2 \rho} \int_{z_1=m-R}^{m+R} \left| \frac{\partial\rho}{\partial z} \right| (R - |m-z_1|) dz_1 \right\} d\phi dR \quad (6.14)$$

dan zal voor een gelaagde kanaalstroming de coëfficiënt c onafhankelijk van de stromingsparameters h , u_* en $\rho(z)$ zijn. Immers, de invloed van de gelaagdheid op de verticale diffusiecoëfficiënt wordt in de integrand uitgedrukt.

De grootheid $\frac{\gamma_1 g}{u_* \rho} \int \left| \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} \right| (R - |m - z_1|) dz_1$ zal in het algemeen afhankelijk zijn

van alle stromingsparameters h , u_* en $\rho(z)$. Verwacht wordt dat deze afhankelijkheid geheel of grotendeels expliciet in de betreffende grootheden is uitgedrukt. De expliciete schrijfwijze van u_* en $\rho(z)$ is duidelijk, terwijl de (eventuele) afhankelijkheid van h tot uiting komt (of kan komen) in de integratie over z_1 . Bij een volledig expliciete schrijfwijze zou γ_1 dus een konstante zijn met voor elke 2D-stroming gelijke waarde. γ_1 moet experimenteel bepaald worden.

De koëfficiënt c valt in feite buiten de huidige studie; deze koëfficiënt is immers dezelfde die voor een homogene stroming de relatie legt tussen ε_z en de parameters u_* en h .

6.4 Diffusiekoëfficiënt bij oppervlak en bodem

De uitdrukking (6.14) is voor zowel de homogene als de gelaagde situatie zodanig dat $\varepsilon_z(z)$ gelijk is aan 0 bij bodem en oppervlak als gevolg van veronderstelling 1 in paragraaf 3 dat wervels het oppervlak of de bodem niet mogen doorsnijden.

In de praktijk blijkt echter dat $\varepsilon_z(z)$ bij bodem ($z=0$) en oppervlak ($z=h$) meestal zeer klein, maar niet nul is. Zo zou men kunnen verwachten dat de waarde van $\varepsilon_z(z)$ dicht bij het oppervlak wordt vergroot in geval van aanwezigheid van golven of winddriftstromingen. Echter, het feit dat het verticale profiel van de stroomsnelheid dicht bij het oppervlak in aanwezigheid van golven of driftstromingen ongeveer logaritmisch is, zoals bijvoorbeeld uit metingen van Shemdin [1972] volgt, impliceert een geringe waarde van $\varepsilon_z(z)$ bij het oppervlak: een logaritmisch profiel wordt veroorzaakt door een naar nul gaande waarde van $\varepsilon_z(z)$.

In vgl. (6.14) is een eindige waarde van $\varepsilon_z(0)$ en $\varepsilon_z(h)$ te bereiken door wel toe te staan dat wervels het oppervlak of de bodem doorsnijden, terwijl tevens een (grote) dichtheidssprong bij oppervlak en bodem wordt bewerkstelligd. Het meest eenvoudige zal zijn bepaalde konstante waarden voor γ_1 en ρ te substitueren boven het oppervlak en onder de bodem. Aan het oppervlak kan daarbij nog gedacht worden dat wervels het oppervlak enigszins kunnen doordringen (zoals zeker duidelijk het geval is bij een boven de stroming gelegen niet mengbare laag met gering dichtheidsverschil) zonder diffusieve uitwisseling, bij de bodem is deze ingreep zuiver kunstmatig.

De meest algemene schrijfwijze voor vgl. (6.14) is dan:

$$\varepsilon_z(z) = \frac{c u_*}{h} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{\infty} R \sin \phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2 u_*^2 \rho} \underbrace{\int_{z_1=m-R}^{m+R} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| (R - |m - z_1|) dz_1}_A \right\} d\phi dR \quad (6.15)$$

waarin de verticale koördinaat z loopt van $z = 0$ (bodem) tot $z = h$ (oppervlak).

De verticale koördinaat m wordt gevonden door vanuit P onder een hoek ϕ in het verticale vlak de straal R te konstrueren; m vormt dan het middelpunt van de wervel met straal R .

In de gestratificeerde waterlaag vormt $\rho(z)$ het dichtheidsprofiel; boven het oppervlak en onder de bodem is ρ konstant met een of andere willekeurige waarde, die samen met een te bepalen waarde van γ_s en γ_b een reële waarde voor $\varepsilon_z(h)$ en $\varepsilon_z(0)$ levert. (In de integraalvorm van vgl. (6.15) leidt dit dichtheidsprofiel tot een delta-functie van $\partial\rho/\partial z$ aan oppervlak en bodem; in een numeriek model levert dit geen moeilijkheden op).

De term A wordt in vgl. (6.15) gedefinieerd als $A \equiv 0$ voor $A < 0$.

6.5 Numeriek model ter berekening van verticale diffusie

De verticale diffusie in een tweedimensionale gelaagde stroming wordt beschreven met:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varepsilon_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} = 0 \quad (6.16)$$

waarin $\rho = \rho(z, t)$ en $\varepsilon_z = \varepsilon_z(z, t)$.

Ter berekening van de verticale diffusie in een gelaagde stroming is een eenvoudig numeriek model ontwikkeld, dat gebruik maakt van de diffusievergelijking (6.16), terwijl $\varepsilon_z(z, t)$ wordt berekend met behulp van vgl. (6.15). De vergelijkingen vormen een tweetal gekoppelde differentiaalvergelijkingen in $\varepsilon_z(z, t)$ en $\rho(z, t)$.

De berekeningen in het numerieke model beperken zich tot tweedimensionale, stationaire propstromingen, waarbij een waterkolom in de tijd wordt gevolgd. Het tweedimensionale karakter is opgelegd door het diffusiemodel zoals in vgl. (6.15) gegeven. Wat betreft vgl. (6.15) zou de stroming niet absoluut statio-

nair hoeven te zijn, hoewel in de berekening van ϵ_z geen rekening is gehouden met turbulentiewinst en -verlies bij respektievelijk vertragende en versnellende stromingen.

De veronderstelde propstroming (stroomsnelheid u konstant over de diepte) is een vereenvoudiging uitsluitend ten behoeve van het numerieke model, daar dan geen advectietermen hoeven worden meegenomen, maar een waterkolom zich in zijn geheel verplaatst. Een homogene waarde van u ten behoeve van het stromingsmodel is in feite in tegenspraak met het ongeveer logaritmische snelheidsprofiel $u(z)$ dat voor het diffusiemodel verondersteld werd. Daar dicht bij de bodem beide u -profielen duidelijk verschillend zijn, zal de berekening van het dichtheidsprofiel bij de bodem geen korrekte weergave zijn van de situatie waarin het logaritmische profiel wel optreedt. De afwijkingen zullen slechts gering zijn indien de dichtheidsprofielen dicht bij de bodem vrijwel homogeen zijn (zoals bij de experimenten van Schiller en Sayre, zie figuur 11 en 12, steeds het geval is).

In het numerieke model vindt een diskretisatie plaats van de volgende parameters:

- ϕ : De integraal in vgl. (6.15) over $\phi = 0 \rightarrow \pi$ wordt gediskretiseerd tot een sommatie $\sum_{\phi=0}^{\pi}$ met $\phi = n_1 \phi_{\text{step}}$.
- R : De integraal in vgl. (6.15) over $R = 0 \rightarrow \infty$ wordt gediskretiseerd tot $\sum_{R=0}^{\infty}$ met $R = n_2 R_{\text{step}}$. In het programma worden die gebieden van waarden R bepaald waarvoor $A \neq 0$, deze zijn in de sommatie slechts van belang.
- z_1 : De integraal in vgl. (6.15) over $z_1 = m - R \rightarrow m + R$ wordt vervangen door de sommatie $\sum_K$ zoals in paragraaf 6.1 beschreven, en uitgedrukt in de vergelijking (6.1). Daartoe wordt de stroming verdeeld in K laagjes van gelijke dikte, zoals in figuur 9 aangeduid. Binnen één laagje zijn ϵ_z en ρ homogeen. (In figuur 9 is de $\rho(z)$ curve omgevormd tot een "trapjescurve".)
- z : De berekening van $\epsilon_z(z)$ vindt plaats voor elk laagje van de voorgaande indeling. Uitwisseling volgens vgl. (6.16) vindt eveneens plaats slechts tussen de eerder genoemde laagjes.

De uitwerking van de laagjesindeling in het programma is zodanig, dat de berekening van ρ plaatsvindt op de grensvlakken tussen naburige laagjes, terwijl de berekening van ϵ_z plaatsvindt in het midden van het betreffende laagje. Dit houdt tevens in dat ϵ_z aan bodem en oppervlak (dus in feite in het onderste en bovenste laagje) niet exact nul is, maar een kleine waarde aanneemt die daarmee dus afhankelijk is van de dikte van de laagjes waarin de

stroming wordt opgedeeld. Daardoor zal de eventueel nog noodzakelijke correctie van $\epsilon_z(o)$ en $\epsilon_z(h)$, zoals in paragraaf 6.4 besproken, eveneens afhankelijk zijn van het aantal laagjes.

Ten behoeve van een correctie op $\epsilon_z(o)$ en $\epsilon_z(h)$ zet de laagjesindeling zich onder de bodem en boven het oppervlak voort. In lucht en bodem wordt een konstante, maar duidelijk afwijkende waarde van ρ gesubstitueerd, evenals een aangepaste waarde van γ_s en γ_b .

Voor het oplossen van de differentiaalvergelijkingen gelden de randvoorwaarden aan oppervlak en bodem

$$\frac{\partial \rho(z)}{\partial z} = 0 \quad \text{voor } z = 0, z = h$$

Diffusie en aanpassing van de diffusiecoëfficiënt vindt plaats na een zeker tijdsinterval, waarvoor in de praktijk 1 seconde wordt genomen.

De numerieke oplossing van de partiële differentiaalvergelijkingen vindt plaats met behulp van de "theta-methode" van Crank-Nicolson (zie Lambert, 1973), waarbij $\theta = \frac{1}{2}$ is toegepast.

Als voorbeeld voor de benodigde rekentijd van een diffusieprobleem wordt nu het narekenen van de diffusie-experimenten van Schiller en Sayre (zie hfdst. 7 en de fig. 11-20) beschouwd:

de stroming werd verdeeld in 13 laagjes (bij een totale waterdiepte in het experiment van $h = 0,0713$ m), terwijl $\phi_{\text{step}} = 15^\circ$ en $R_{\text{step}} = 0,005$ m.

Wanneer de stroming werd gevolgd over een tijdsduur van 40 s, bedroeg de rekentijd 8 s. Gebruik werd gemaakt van de CYBER 175 computer van het ECN-rekencentrum in Petten.

7 Toepassing op experimenten van Schiller en Sayre

In paragraaf 7.1 wordt een beknopte beschrijving gegeven van het theoretische en experimentele onderzoek van Schiller en Sayre [1973, 1975] met betrekking tot diffusie in gelaagde stromingen.

In paragraaf 7.3 worden de experimentele gegevens in de vorm van temperatuurprofielen gebruikt om het huidige model te testen en eventueel de coëfficiënt γ_1 te bepalen.

7.1 Schiller en Sayre's onderzoek aan gelaagde stromingen

Schiller en Sayre [1973, 1975] voerden laboratoriummetingen uit naar de verticale diffusie in gelaagde stromingen, waarbij de schuifspanning bij de bodem de voornaamste bron van menging was.

Daartoe werd op een homogene kanaalstroming met temperatuur T_{amb} een relatief dunne warmere laag aangebracht zodanig dat het stroomsnelheidsprofiel niet ernstig verstoord wordt en dus de gelaagde stroming een normaal snelheidsprofiel bezit zoals ook voor een homogene stroming wordt waargenomen (zie fig. 1c).

Op een zestal of zevental plaatsen benedenstrooms werden verticale temperatuurprofielen opgenomen. In de figuren 11 en 12 zijn voor een zestal stromingen deze temperatuurprofielen weergegeven, waarin T de lokale temperatuur is, ΔT is het temperatuurverschil tussen de opgebrachte laag en T_{amb} , en x is de afstand benedenstrooms vanaf het punt waar de gelaagde stroming werd gevormd. T_E in figuur 12 is de evenwichtstemperatuur welke door vrije warmte-uitwisseling met de atmosfeer bereikt zou worden. Naast diffusie vindt in Schiller en Sayre's proeven nog enige (overigens geringe) warmte-uitwisseling met de atmosfeer plaats.

In de figuren 11 en 12 is op de meetpunten het inwendige Froude-getal aangegeven, gedefinieerd door

$$F_1 = \frac{u}{\sqrt{g h \frac{\Delta \rho}{\rho}}} \quad (= Ri_0^{-\frac{1}{2}})$$

u = gemiddelde stroomsnelheid (gemiddeld over dwarsdoorsnede)

$\Delta \rho$ = dichtheidsverschil tussen water aan oppervlak en aan bodem.

Bij de diverse experimenten varieerde de waterdiepte h tussen 0,075 m en 0,15

m, het initiële temperatuurverschil tussen 30°C en 15°C, en de stroomsnelheid u tussen 0,03 m/s en 0,45 m/s. De warme bovenlaag voerde tussen 4% en 20% van het debiet van de totale stroming.

Schiller en Sayre vergeleken hun metingen met twee verschillende berekeningen voor verticale diffusie:

In figuur 11 zijn de metingen vergeleken met het Fickse diffusiemodel. Daarin is de verticale diffusiecoëfficiënt ϵ_z homogeen over de gehele waterdiepte. Door Sayre [1973] is de waarde van ϵ_z gekoppeld aan het lokale interne Froude-getal F_1 , zodat ϵ_z afhankelijk is van de longitudinale coördinaat. Bij de diffusieberekeningen, waarvan het resultaat in figuur 11 is weergegeven, wordt ϵ_z dus doorlopend aangepast aan het wijzigende temperatuurprofiel van de stroming. Als beginvoorwaarde werd in de berekeningen het eerste gemeten temperatuurprofiel opgelegd.

Figuur 11 geeft aan dat het Fickse diffusiemodel slechtere resultaten geeft naarmate F_1 kleiner is. Een kleinere waarde van F_1 betekent een grotere invloed van de gelaagdheid op het diffusieproces.

In figuur 12b zijn berekeningen van Schiller en Sayre vergeleken met metingen, waarbij $\epsilon_z(z)$ als functie van z volgens een beta-waarschijnlijkheidscurve wordt weergegeven. Deze waarschijnlijkheidscurve werd gekozen omdat de flexibiliteit van deze curve, die met enkele parameters wordt geregeld, zeer groot is binnen de vormen die door Schiller en Sayre voor $\epsilon_z(z)$ in hun proeven waarschijnlijk werden geacht. De parameters van deze curve werden als functie van F_1 empirisch bepaald, figuur 12a geeft deze curven weer.

De overeenstemming van berekeningen en metingen is duidelijk beter dan bij het model van Fick, maar ook nu neemt de overeenstemming weer af bij experimenten met kleinere waarden van F_1 .

Opmerking: De beta-waarschijnlijkheidscurve heeft voldoende flexibiliteit om de verwachte vorm van het $\epsilon_z(z)$ -profiel te kunnen beschrijven voor Schiller en Sayre's experimenten, waar de grootste dichtheidsgradiënt steeds aan het oppervlak is gelegen. $\epsilon_z(z)$ -curven zoals in de tweelagenstroming van figuur 7 bij een kleine waarde van F_1 (overeenkomend met een grote waarde van γ_1), welke verwacht kunnen worden bij een grotere dichtheidsgradiënt meer in het midden van de stroming, zijn met deze waarschijnlijkheidscurve niet te vormen.

7.2 Diffusieberekeningen met k- ϵ model

Door Hossain en Rodi [1980] zijn enkele experimenten van Schiller en Sayre, run 4, 5 en 6, nagerekend met een "buoyancy extended version" van het k- ϵ model. De resultaten zijn in figuur 13 weergegeven.

In tegenstelling tot de berekeningen van Schiller en Sayre en de berekeningen die in paragraaf 7.3 zullen volgen, zijn Hossain en Rodi bij hun berekeningen niet uitgegaan van de beginvoorwaarde bestaande uit het dichtheidsprofiel op het eerste meetpunt (bij $x/h = 4$ of 10), maar van de situatie die geschat kan worden te bestaan bij het samenstellen van het gelaagde systeem op $x/h = 0$. Een zeer goede overeenstemming kan dan niet verwacht worden.

Opgemerkt moet worden dat in het k- ϵ model geen konstanten zijn gebruikt waarvan de waarden zijn aangepast aan de meetresultaten; aan alle 15 konstanten in het model zijn waarden toegekend zoals deze uit de literatuur bekend zijn.

Hossain en Rodi konkluderen dat de initiële menging (vóór het eerste meetpunt) niet goed wordt weergegeven in hun berekeningen, maar wel de reductie in de verticale diffusie door de invloed van de gelaagdheid.

7.3 Diffusieberekeningen met huidig model

Een viertal experimenten van Schiller en Sayre zijn met berekeningen vergeleken. De temperatuurprofielen zijn allereerst omgerekend naar dichtheidsprofielen en weergegeven als meetpunten in de figuren 14, 15, 16 en 17. $\Delta\rho_0$ is daarbij het dichtheidsverschil bij het aanbrengen van de warmere laag.

Het viertal experimenten wordt gekarakteriseerd door de volgende parameters:

figuur 14 (run 4)	figuur 15 (run 5)	figuur 16 (run 6)	figuur 17 (run 7)
$\Delta\rho_0 = 0,3 \text{ kg/m}^3$	1,5	4,0	0,63
$h = 0,071 \text{ m}$	0,071	0,122	0,071
$u = 0,092 \text{ m/s}$	0,092	0,092	0,031
$u_* = 0,010 \text{ m/s}$	0,010	0,0092	0,0037

(Van run 4 en run 5 zijn metingen en berekeningen met het beta-waarschijnlijkheidsmodel volgens Schiller en Sayre in figuur 12 gegeven, en berekeningen met het k- ϵ model van Hossain en Rodi in figuur 13).

Run 4

Aan de hand van figuur 14a zal nu een beschrijving van de berekeningen worden gegeven:

In figuur 14a zijn de meetpunten van de dichtheidsprofielen weergegeven op de afstanden $x/h = 4, 8, 12, 20, 30, 50$ en 90 vanaf het punt waar het tweelagen-systeem werd gevormd. De gelaagde stroming gaat daarbij over in een volledig gemengde stroming.

Door de meetpunten bij $x/h = 4$ is een vloeiende curve getekend, welke als beginvoorwaarde aan het numerieke model werd opgelegd.

Bij het berekenen van de verticale diffusie werd niet (evenmin als bij de overige nagerekende runs van Schiller en Sayre) de mogelijkheid benut om de diffusiecoëfficiënt aan de bodem te verhogen via de konstante γ_b ; daar de dichtheidsprofielen in de buurt van de bodem steeds nagenoeg homogeen zijn, heeft dit immers geen merkbaar effect.

De door curve-fitting te bepalen konstanten in het rekenmodel zijn in de eerste plaats c en γ_i met eventueel nog de mogelijkheid om via γ_s (bijvoorbeeld bij de toegepaste luchtdichtheid van $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$) de diffusiecoëfficiënt aan het oppervlak te verhogen. Het is aannemelijk dat een juiste waarde van ε_z aan het oppervlak van belang zal zijn daar bij deze run (evenals de andere runs) de grootste dichtheidsgradiënt juist bij het oppervlak is gelegen.

(N.B. Het is duidelijk dat een meer kritische verificatie van de berekeningen mogelijk zou zijn bij een gelaagd systeem dat vrijwel homogeen zou zijn bij bodem en oppervlak: curve fitting zou dan plaats moeten vinden door uitsluitend c en γ_i aan te passen, daar $\varepsilon_z(0)$ en $\varepsilon_z(h)$ (en dus γ_b en γ_s) dan onbelangrijk zouden zijn).

Zoals reeds eerder opgemerkt duidt de konstante c op de waarde van de verticale diffusiecoëfficiënt in een homogene stroming. Door Elder [1959] is empirisch voor open-kanaalstromingen bepaald dat de over-de-diepte-gemiddelde verticale diffusiecoëfficiënt $\bar{\varepsilon}_{z,0}$ voor een homogene stroming kan worden geschreven als:

$$\bar{\varepsilon}_{z,0} = 0,067 \text{ } hu_* \quad (7.1)$$

Vergelijking (6.15) leidt voor $\gamma_i = \infty$ (= homogene situatie) tot:

$$\varepsilon_{z,0}(z) = \frac{cu_*}{2h} z(h-z)$$

waarna door middeling volgt

$$\bar{\epsilon}_{z,0} = \frac{1}{6} \frac{cu_*}{2h} \cdot h^2 = \frac{1}{12} cu_* h$$

De "elderse" waarde van c is dan

$$c_E = 12 \cdot 0,067 = 0,80$$

In run 4 is nu deze elderse waarde $c=c_E$ toegepast, zodat verdere curve-fitting plaats moet vinden door keuze van de koëfficiënten γ_1 en γ_s .

γ_1 levert de vorm van $\epsilon_z(z)$ zoals deze door de gelaagdheid beïnvloed wordt. γ_s levert de waarde van ϵ_z aan het oppervlak, overigens samen met de waarde van ϵ_z die door de keuze van de eindige laagdikten, waarin de stroming in het numerieke model in verticale richting wordt opgedeeld, bepaald wordt (zie par. 6.5).

Op $x/h = 20$ werden berekening en meting zo goed mogelijk aan elkaar aangepast. Het bleek mogelijk dit gemeten dichtheidsprofiel goed te berekenen met de koëfficiënten:

$$c_E = 0,80 \quad \gamma_1 = 15$$

terwijl een extra waarde van $\epsilon_z(h)$ (buiten de waarde die ontstond door de keuze van opdeling van het gelaagde systeem in 13 laagjes) niet nodig bleek, wat neerkomt op een toepassing van $\gamma_s = \infty$.

Bij de keuze $\gamma_1 = 15$ worden niet alleen de metingen bij $x/h = 20$ goed gereproduceerd, maar zijn tevens de metingen en berekeningen bij $x/h = 8, 12, 30, 50$ en 90 in zeer goede overeenstemming.

In figuur 14b zijn tevens de $\epsilon_z(z)$ curven weergegeven bij $x/h = 4, 20, 50$ en 90 . Duidelijk blijkt dat (bij de gemaakte keuze $K = 13$) ϵ_z bij bodem en oppervlak een waarde groter dan nul heeft daar de waarde van ϵ_z , berekend in het midden van een laagje, aan het gehele laagje wordt toegekend. $\epsilon_z(z)$ bij $x/h = 90$ komt overeen met de curve voor een homogene stroming.

Zeër duidelijk blijkt in de $\epsilon_z(z)$ curven dat de waarde van ϵ_z bij grote dichtheidsgradiënten, die hier dicht bij het oppervlak optreden, aanzienlijk gereduceerd wordt. In figuur 14b wordt ϵ_z dicht bij het oppervlak gereduceerd tot ongeveer 10% van de waarde voor de homogene situatie.

Een indruk van de gevoeligheid van de keuze van de koëfficiënt γ_1 is weergege-

ven in figuur 18a, bij gelijkgebleven elderse waarde $c_E = 0,80$.

Het blijkt, dat de meetpunten bij $x/h = 8$ en 12 ook nog goed gereproduceerd worden bij $\gamma_1 = 10$ in plaats van 15 , maar bij de volgende berekende profielen treedt diffusie in het gelaagde deel van de stroming te snel op door de verminderde "reduktiefaktor" γ_1 . De diffusie in het meer homogene onderste deel van de stroming, vertoont geen opvallende afwijking.

Run 5

Run 5, weergegeven in figuur 15 verschilt slechts van run 4 in figuur 14 doordat het initiële dichtheidsverschil 5 keer zo groot is: de waarde van run 5 is $1,5 \text{ kg/m}^3$ ten opzichte van $0,3 \text{ kg/m}^3$ voor run 4.

Bij curve-fitting in figuur 15 wordt weer de elderse waarde $c_E = 0,80$ aangehouden, zodat de enige vrijheid de keuze van γ_1 is, eventueel aan het oppervlak gekorrigeerd door γ_s .

Curve-fitting bleek mogelijk bij $\gamma_1 = 10$ en $\gamma_s = \infty$, waardoor alle berekende profielen bij $x/h = 10, 30, 50, 90, 140$ en 200 in perfecte overeenstemming zijn met de metingen.

Tevens zijn in figuur 15b de $\epsilon_z(z)$ curven weergegeven bij enkele waarden van x/h .

(Opmerking: bij toenemende waarde van x/h is weliswaar de vorm van de berekende curve in overeenstemming met de metingen, maar vindt een toenemende verschuiving langs de horizontale koördinaat plaats. De oorzaak is niet gekend. Wel kan gesteld worden dat de dichtheidsbalans bij de berekeningen volgens een propstroming wel in orde is, maar bij de metingen niet. Afwijkingen in de massabalans van de metingen ten opzichte van propstroomberekeningen kunnen ontstaan door warmte-uitwisseling met de atmosfeer, en door het feit dat het snelheidsprofiel niet overeenkomt met een propstroming. Gezien de richting van de verschuiving zou in het huidige geval de tweede reden de oorzaak kunnen zijn. Overigens treedt in de runs van figuur 14, 16 en 17 dit verschijnsel niet op.)

Een gevoeligheidsanalyse is toegepast in figuur 19 bij een gewijzigde waarde van γ_1 ($\gamma_1 = 4$ in plaats van 10) maar nu is, in tegenstelling tot het gevoeligheidsonderzoek in figuur 18, de waarde van c zodanig aangepast ($c = 0,27$ in plaats van de elderse waarde $c_E = 0,80$) dat de "overall"-overeenstemming tussen metingen en berekeningen nog het meest redelijk was. De te lage reduktiefaktor γ_1 wordt dan grotendeels gekompenseerd door een kleinere waarde van c , maar dit leidt in het homogenere onderste deel van de stroming tot een te

kleine diffusiecoëfficiënt. Dit is vooral in de curven bij $x/h = 50, 90$ en 140 duidelijk zichtbaar. Figuur 19b toont de verminderde diffusiecoëfficiënt ten opzichte van figuur 15, door de kleinere waarde van c .

Run 6

Run 6 (fig. 16) verschilt van run 4 en 5 vooral door de grotere waterdiepte: $h = 0,122$ m in plaats van $h = 0,071$ m.

Bij weer $c_E = 0,80$ wordt een zeer goede overeenkomst tussen metingen en berekeningen gevonden bij $\gamma_1 = 6,8$ (en $\gamma_s = \infty$).

Run 7

In figuur 17 is run 7 vergeleken met berekeningen. Run 7 verschilt van run 4, 5 en 6 niet alleen door een andere keuze van $\Delta\rho_0$, zijnde $0,63 \text{ kg/m}^3$, maar tevens door de stroomsnelheid $u = 0,0313 \text{ m/s}$, ten opzichte van $u = 0,092$ in de vorige runs.

Bij weer gelijke waarde $c_E = 0,80$ is een perfecte overeenstemming van metingen en berekeningen te verkrijgen met $\gamma_1 = 8$. Echter, door deze waarde van γ_1 én de bij dit dichtheidsprofiel zeer grote waarde van $\partial\rho/\partial z$ aan het oppervlak, is $\epsilon_z(h)$ nu zó klein dat een vergroting door middel van $\gamma_s = 0,004$ (bij substitutie van $\rho_{\text{lucht}} = 1 \text{ kg/m}^3$) noodzakelijk bleek.

In figuur 20 is run 7 vergeleken met berekeningen waarin een diffusiecoëfficiënt voor een homogene situatie werd toegepast volgens:

$$\epsilon_{z,0} = \frac{c u_*}{h} \cdot \frac{1}{2} z(h-z)$$

Deze uitdrukking wordt verkregen door in vgl. (6.15) te substitueren de waarden $\gamma_1 = 0$ en $\gamma_s = \infty$.

Past men bij de homogene diffusiecoëfficiënt de waarde $c_E = 0,80$ toe, welke ook gebruikt is in alle voorgaande berekeningen, dan is de invloed van de gelaagdheid op de diffusiecoëfficiënt het duidelijkst zichtbaar. Figuur 20b (streep-stip-lijn) geeft aan dat op het eerste meetpunt $x/h = 50$ dan al vrijwel volledige verticale menging heeft plaatsgevonden.

Tevens is in figuur 20b (stippellijn) aangegeven welke waarde van c men zou moeten nemen om een zo goed mogelijke overeenkomst tussen berekeningen en metingen te vinden. Dit blijkt de waarde $c = 0,029$ te zijn. Overigens is duidelijk dat de overeenkomst tamelijk slecht is.

De waarde $c = 0,029$ leidt tot een gemiddelde verticale diffusiecoëfficiënt $\bar{\epsilon}_z$ die slechts 1/30 is van de door de formule van Elder voorspelde waarde van $\bar{\epsilon}_{z,0}$ voor een homogene kanaalstroming.

7.4 Interpretatie van de berekeningen

De berekeningen in paragraaf 7.2 leiden tot de volgende tabel:

	run 4 (fig. 14,18)	run 5 (fig. 15,19)	run 6 (fig. 16)	run 7 (fig. 17,20)
meet- gegevens	$\Delta\rho_o = 0,3 \text{ kg/m}^3$	1,5	4,0	0,63
	$h = 0,071 \text{ m}$	0,071	0,122	0,071
	$u = 0,092 \text{ m/s}$	0,092	0,092	0,031
	$u_* = 0,010 \text{ m/s}$	0,010	0,0092	0,0037
"best-fit" be- rekeningen	$c=c_E = 0,80$	0,80	0,80	0,80
	$\gamma_1 = 15$	10	6,8	8,0
	$\gamma_s = \infty$	∞	∞	0,004
gevoeligheidsonderzoek bij andere γ_1 , waarbij c wordt aangepast	$c = 0,80$	0,27		0,029
	$\gamma_1 = 10$	4		0
	$\gamma_s = \infty$	∞		∞

De berekeningen geven de volgende succesvolle resultaten aan:

- wordt een bepaald dichtheidsprofiel beschouwd dan kan de berekening met de meting in overeenstemming worden gebracht door aanpassing van de parameter γ_1 (inclusief een marginale invloed van γ_s).
- de volledige reeks berekende en gemeten dichtheidsprofielen van één experiment kan in overeenstemming worden gebracht met één waarde γ_1 die voor het gehele experiment geldt.
- de absolute waarden van de diffusiecoëfficiënten, te bepalen met de konstante c , leiden tot een diffusiecoëfficiënt voor een homogene stroming die identiek kan worden genomen met de formule van Elder (7.1).

Minder succesvol is:

- γ_1 is geen konstante voor alle experimenten, maar nam in de diverse experimenten de waarden 15, 10, 8 en 6,8 aan.

Wat betreft het niet gelijk zijn van γ_1 in alle experimenten, is het ernstig de vraag of dit "naar elkaar toe geschoven kan worden". Een storende invloed in dit verband is de oppervlakte-korrektieterm γ_s . Bij de experimenten van Schiller en Sayre is de invloed van γ_s op het bepalen van de juiste waarde van γ_1 nog relatief groot omdat juist de grootste dichtheidsgradiënt $\partial\rho/\partial z$ aan het oppervlak ligt. Juist het gedrag van de grootste dichtheidsgradiënt in het diffusieproces is van aanzienlijk belang voor het vaststellen van de parameters.

Van meer fundamentele aard is de schrijfwijze van de "reduktieterm" in vgl. (6.15) als:

$$\frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} \int_{z_1} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| (R - |m - z_1|) dz_1$$

waarvan vermoed werd dat daarmee de afhankelijkheid van deze term voor u_* , ρ en h (de laatste via R en z_1) expliciet geschreven was. In principe kan men echter deze schrijfwijze ter discussie stellen, en bijvoorbeeld in bovenstaande term de dichtheid invoeren als

$$\left\{ \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| / \rho \right\}^\delta$$

met δ een misschien nader te bepalen konstante zodanig dat δ en γ_1 wel konstant worden voor alle experimenten.

Het is niet zinvol het gedrag van γ_1 nader te onderzoeken aan nog een drietal gepubliceerde metingenreeksen van Schiller en Sayre, te weten run 1, 2 en 3. In run 1 en 2 (zie fig. 11) is de invloed van de gelaagdheid slechts gering, gezien het succes van het eenvoudige model van Fick, en dus weinig kritisch, terwijl in run 3 (zie fig. 11) nog extremer dan in de reeds nagerekende experimenten, de grootste dichtheidsgradiënt zich aan het oppervlak bevindt.

Het zou wenselijk zijn γ_1 te onderzoeken aan de hand van een dichtheidsprofiel zoals in figuur 1d gegeven, met een grote waarde van $\partial\rho/\partial z$ meer intern in de stroming. γ_1 zou dan weer moeten worden onderzocht als functie van de waterdiepte h , de schuifspanningssnelheid u_* , en het initieel opgelegde dichtheidsverschil $\Delta\rho_0$.

8 Samenvatting, konklusies, toekomstig onderzoek

In rapport R 880-III (Delvigne [1977]) bleek het een probleem te vormen om de verticale diffusie te berekenen in een gelaagde stroming met willekeurig dichtheidsprofiel, wanneer geen specifiek snelheidsverschil over een grenslaag is opgelegd. Voor deze situatie, waarbij de turbulentie voornamelijk door bodemschuifspanning wordt gegenereerd, is geen entrainmentbeschouwing mogelijk maar zal de verticale uitwisseling door turbulente diffusie plaatsvinden.

Het berekenen van het verticale profiel van de diffusiecoëfficiënt ϵ_z in een gelaagd systeem met relaties zoals de Munk-Anderson formule:

$$\epsilon_z = \epsilon_{z,0} (1 + \alpha Ri)^\beta \quad (2.1)$$

heeft het nadeel dat óf het lokale Richardsongetal moet worden ingevuld (en dus bekend moet zijn), óf het over de vertikaal gemiddelde overall-Richardsongetal. Beide benaderingen stellen eisen aan de kennis van de vorm van het dichtheidsprofiel.

Men kan verwachten dat bij een willekeurig dichtheidsprofiel de waarde van ϵ_z in een bepaald punt af zal hangen van het Richardsongetal in een zekere omgeving van dat punt, waarbij de omvang van die omgeving af zal hangen van het dichtheidsprofiel en de stroomsnelheid. In dit verslag is een methode ter berekening van ϵ_z ontwikkeld, dat hiermee rekening houdt.

In het in dit verslag ontwikkelde model wordt de onderdrukking van turbulente wervels (die de diffusiecoëfficiënt ϵ_z bepalen) door de gelaagde structuur van de stroming berekend aan de hand van een zeer eenvoudig model van deze turbulente wervels. Verondersteld wordt dat de reductie van deze vereenvoudigde wervels maatgevend is voor de reductie van de werkelijke wervels (en dus van de diffusiecoëfficiënt) waardoor, na het empirisch bepalen van het onderlinge verband (via één konstante γ_1), de lokale waarde van ϵ_z kan worden berekend.

Er wordt slechts gerekend aan de reductie van turbulente wervels door de gelaagde structuur, en niet aan het opwekken van turbulentie door snelheidsverschillen over grenslagen welke in gelaagde stromen kunnen voorkomen. Verondersteld wordt in wezen dat de gelaagde stroming hetzelfde snelheidsprofiel bezit als een homogene ($\partial\rho/\partial z = 0$) stroming waarvan de diffusiecoëfficiënt $\epsilon_{z,0}$ bekend is. In het model komt de snelheid slechts voor als $\bar{u}$ (gemiddelde snelheid over de verticale richting) of als u_* (maatgevende schuifspanningssnelheid, wat meestal de schuifspanningssnelheid bij de bodem zal zijn).

Belangrijke parameters in de berekening van ϵ_z zullen derhalve zijn deze maatgevende snelheid u_* , vanzelfsprekend het dichtheidsprofiel $\rho(z)$, en een lengtemaat die de afmeting van de omgeving aangeeft die van invloed is op een lokale waarde van ϵ_z ; deze afmeting zal ten hoogste de waterdiepte h bedragen.

Een beschouwing naar de potentiële energie en de kinetische energie van het wervelmodel leidt dan tot de uitdrukking voor ϵ_z :

$$\epsilon_z(z) = \frac{c u_*}{h} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{\infty} R \sin \phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} \int_{z_1=m-R}^{m+R} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| (R - |m - z_1|) dz_1 \right\} d\phi dR \quad (6.15)$$

De overeenkomst tussen (6.15) en de Munk-Anderson-relatie

$$\epsilon_z = \epsilon_{z,0} (1 + \alpha Ri)^\beta$$

is vrij duidelijk als men bedenkt dat voor een kanaalstroming geldt $\epsilon_{z,0} = c u_* h$, terwijl de term

$$\frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} \int_{z_1=m-R}^{m+R} \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| (R - |m - z_1|) dz_1$$

in feite een soort Richardsongetal is. De integraal over de verticale afstand z_1 geeft aan dat dit geen lokaal Richardsongetal is, en evenmin een overall Richardsongetal (dat voor de gehele waterdiepte geldt). De integratie-afstand hangt af van het dichtheidsprofiel $\partial \rho / \partial z$ in die omgeving waar ϵ_z bepaald wordt.

De uitdrukking (6.15) is analytisch te berekenen voor een homogene stroming, een tweelagen stroming, en een stroming met lineair dichtheidsprofiel.

De oplossing van vgl. (6.15) voor een homogene stroming luidt

$$\epsilon_z(z) = \frac{1}{2} c u_*^2 (h - z)$$

welke als de gebruikelijke oplossing geldt voor een 2D-kanaalstroming.

De uitdrukkingen voor een tweelagenstroming zijn gegeven in vgl. (5.8-5.12), en geïllustreerd in figuur 7.

Voor een stroming met lineair dichtheidsprofiel zijn uitdrukkingen gegeven in vgl. (6.4-6.8), met figuur 10 als illustratie.

Voor een willekeurig gelaagd systeem moet vgl. (6.15) numeriek worden berekend.

Gebruik makend van het tweetal gekoppelde differentiaalvergelijkingen (6.15) en (6.16) (diffusievergelijking), zijn enkele experimenten van Schiller en Sayre (fig. 14, 15, 16, 17) met een numeriek model nagerekend. De konklusies zijn:

- γ_1 kan zodanig worden aangepast aan de metingen dat de overeenkomst van berekeningen en metingen zeer goed is
- γ_1 kan konstant worden gehouden voor een gegeven experiment, waarin een gelaagd systeem tenslotte overgaat in een homogeen-gemengd systeem
- γ_1 lijkt evenwel niet goed konstant voor diverse experimenten waarbij de parameters u_* en $\rho(z)$ en h gevarieerd zijn.

Voor nader onderzoek naar dit laatste punt zijn meer, en vooral meer gevarieerde metingen nodig. Het is wenselijk het model te testen bij variatie van de positie van de maximale dichtheidsgradiënt $\{\partial\rho(z)/\partial z\}_{\max}$ in de vertikaal.

Om de overeenkomst tussen metingen en berekeningen in relatie te zien met andere rekenmethoden, zijn enkele andere berekeningen, óók aan de metingen van Schiller en Sayre, opgenomen:

- a. figuur 11 geeft een rekenmethode volgens Fick (homogene diffusiecoëfficiënt gereduceerd onder invloed van gelaagdheid)
- b. figuur 20 geeft de resultaten voor berekeningen met ϵ_z volgens een homogene stroming $\epsilon_z = c_2 z(h-z)$, toegepast op een gelaagde stroming
- c. figuur 12 laat berekeningen zien met ϵ_z -profielen van de vorm van een beta-waarschijnlijkheidscurve
- d. figuur 13 geeft berekeningen weer met een $k-\epsilon$ model.

In a, b en c zijn de konstanten aangepast aan de metingen, in d zijn de konstanten gebruikt zoals deze uit de literatuur bekend zijn.

Duidelijk is dat berekeningen met het huidige model beter in overeenstemming zijn met de metingen dan de hiervoor genoemde methoden.

Wat betreft de praktische bruikbaarheid van de rekenmethode kan het volgende gekonkludeerd worden:

- a. voor eenvoudige systemen (homogeen systeem, tweelagensysteem, systeem met lineaire dichtheid) wordt ε_z berekend met analytische uitdrukkingen
- b. voor willekeurig-gelaagde systemen is een numerieke berekening nodig die $\varepsilon_z(z,t)$ en $\rho(z,t)$ als functie van de tijd bepaalt. Het opstellen van een dergelijk numeriek model is vrij eenvoudig, terwijl de rekentijd zeer kort is (enkele seconden voor een diffusieproces, op CYBER 175 van ECN)
- c. het model is flexibel voor een aantal "korrekties", zoals het verhogen van de diffusiecoëfficiënt bij oppervlak en bodem. Deze zijn in eerste instantie gelijk aan nul, maar kunnen meer in overeenstemming met metingen worden gebracht zoals $\varepsilon_z \neq 0$ aan het oppervlak onder invloed van golven
- d. de voorspellende waarde zal afhangen van het vinden van een vaste waarde (of uitdrukking) voor γ_1 . Dit zal aan de hand van meer metingen tot stand moeten komen.

Toekomstig onderzoek

Recent zijn door het Waterloopkundig Laboratorium metingen uitgevoerd aan de diffusie van een gelaagd systeem in een stroomgoot waarbij de parameters u^* , h , $\rho(z)$ en $\{\partial\rho(z)/\partial z\}_{\max}$ gevarieerd zijn.

Tevens zijn door French (Water Resources Center, Nevada; zie ook French [1978, 1979]) metingen ter beschikking gesteld met dichtheidsprofielen zoals in figuur 1d weergegeven.

Genoemde metingen zullen worden vergeleken met berekeningen om de waarde van γ_1 te kunnen bepalen, en aldus aan de ontwikkelde rekenmethode voor ε_z in een gelaagd systeem ook voorspellende waarden toe te kennen.

In hoeverre situaties nagerekend kunnen worden waarbij bij een tweelagenstroming wel enig snelheidsverschil tussen de lagen is opgelegd, zou onderzocht kunnen worden aan de onderzoeken van Gartrell [1979, 1980] en Viollet [1980]. In deze experimenten, waarbij de lagen in dezelfde richting stromen, is de ontwikkeling van het snelheidsprofiel en van het dichtheidsprofiel gevolgd.

LITERATUUR

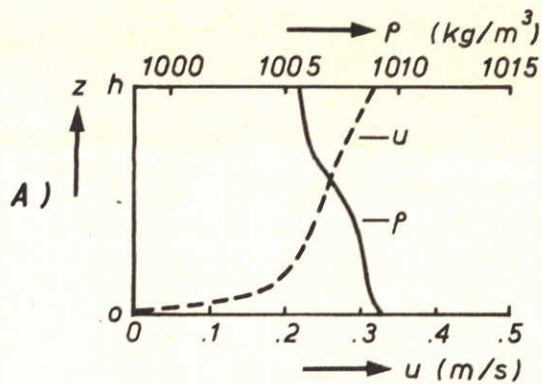
- 1980 ANWAR, H.O. and ATKINS, R., "Turbulence measurements in simulated tidal flow"
Proc. ASCE 106, HY8, 1273
- 1966 BAINES, W.D. and KNAPP, D.J., "Wind driven water currents"
Proc. ASCE 91, HY2, 205
- 1980 BOWDEN, K.F. and FERGUSON, S.R., "Variations with height of the turbulence in a tidally-induced bottom boundary layer"
In "Marine Turbulence", Ed. J.C.J. Nihoul, Elsevier Sc. Publ. Company, Amsterdam
- 1977 DELVIGNE, G.A.L., "Spreading and mixing of buoyant discharges in an ambient flow"
Rapport R 880-III, Waterloopkundig Laboratorium
- 1959 ELDER, J.W., "The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow"
J. Fluid Mech. 5, 544
- 1978 FRENCH, R.H., "Stratification and open channel flow"
Proc. ASCE 104, HY1, 21
- 1979 FRENCH, R.H., "Transfer coefficients in stratified channel flow"
Proc. ASCE 105, HY9, 1087
- 1979b FRENCH, R.H., "Interfacial stability in channel flow"
Proc. ASCE 105, HY8, 955
- 1963 FRENZEN, P., Report ANL-6794, Argonne Nat. Lab.
- 1979 GARTRELL, G., "Studies on the mixing in a density-stratified shear flow"
Rep. No. KH-R-39, W.M. Keck Lab., Calif. Inst. Technology, Pasadena, Calif.

LITERATUUR (vervolg)

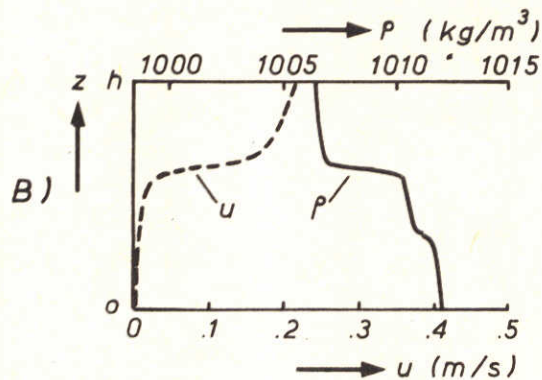
- 1980 GARTRELL, G., "Vertical flux measurements in a density-stratified shear flow"
Proc 2nd Int. Symp. on Stratified Flows, Trondheim, p. 301
- 1980 HOSSAIN, M.S. and RODI, W., "Mathematical modelling of vertical mixing in stratified channel flow"
Symp. on Stratified Flows, Trondheim, p. 280
- 1972 IWASAKI, T. and ABE, T., "Turbulence in the weakly mixing zone of the interface"
Proc. IAHR Congres, Novosibirsk
- 1973 LAMBERT, J., "Computational methods in ordinary differential equations"
John Wiley, London
- 1977 McCUTCHEON, S.C. and FRENCH, R.H., "The stability of a two-layer flow without shear in the presence of boundary-generated turbulence: field verification"
Proc. Conf. "Hydraulics in the coastal zone", Texas A & M Univ.
- 1981 McCUTCHEON, S.C., "Vertical velocity profiles in stratified flows"
Proc. ASCE 107, HY8, 973
- 1959 MONIN, A.S., "Turbulence in shear flow with stability"
J. Geophys. Res. 64, 2224
- 1948 MUNK, W.H. and ANDERSON, E.R., "Note on the theory of the thermocline"
J. Marine Res., 1, 276
- 1981 PIAT, J.-F. and HOPFINGER, E.J., "A boundary layer topped by a density interface"
J. Fluid Mech. 113, 411

LITERATUUR (vervolg)

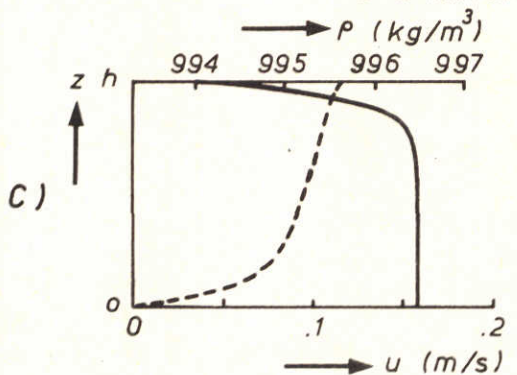
- 1973 SCHILLER, E.J. and SAYRE, W.W., "Vertical mixing of heated effluents in open-channel flow"
Report no. 148, IOWA Inst. Hydr. Res., Univ. of IOWA
- 1975 SCHILLER, E.J. and SAYRE, W.W., "Vertical temperature profiles in open-channel flow"
Proc. ASCE 101, HY6, 749
- 1972 SHEMDIN, O.H., "Wind-generated current and phase speed of wind waves"
J. Phys. Oceanogr. 2, 411
- 1971 SPRONG, T.A., "Onderzoek van menging bij dichtheidsverschillen"
Afd. Weg- en Waterbouwkunde, TH Delft
- 1977 UEDA, H., MOLLER, R., KOMORI, S. and MIZUSHINA, T., "Eddy diffusivity near the free surface of open-channel flow"
Int. J. Heat Mass Transfer 20, 1127
- 1980 VIOLLET, P.L., "Turbulent mixing in a two layer stratified shear flow"
Proc. 2nd Int. Symp. on Stratified Flows, Trondheim, p. 315



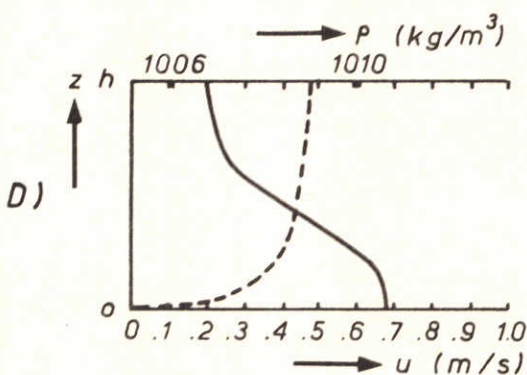
CONTINU-GELAAGDE STROMING.
DIFFUSIE VOLGENS VERGELIJKING 2.1



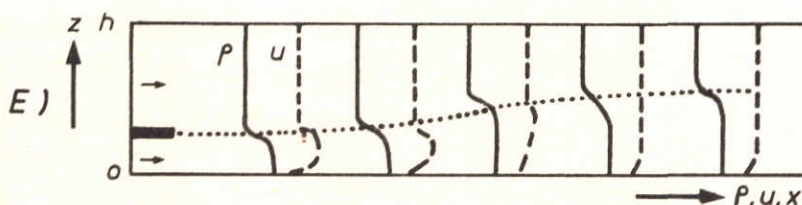
GELAAGD SYSTEEM MET STAGNANTE
EN STROMENDE LAAG. ENTRAINMENT
VOLGENS VERGELIJKING 2.3



GELAAGD SYSTEEM BIJ EXPERIMENTEN
VAN SCHILLER EN SAYRE [1973]



GELAAGD SYSTEEM BIJ EXPERIMENTEN
VAN FRENCH [1979]



ONTWIKKELEND GELAAGD
SYSTEEM BIJ
EXPERIMENTEN VAN
SPRONG [1971]

GELAAGDE STROMINGEN MET DIVERSE
DICHTHEIDS- EN SNELHEIDSPROFIELEN

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

EV

A4

R880-4-1060

FIG.1

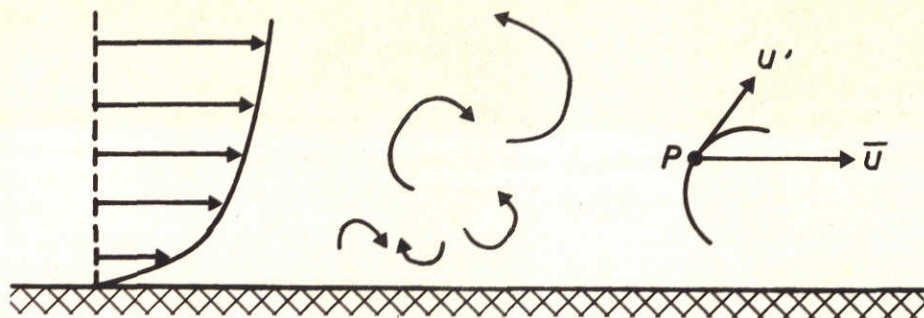


FIG.2a 2 D. TURBULENTE STROMING

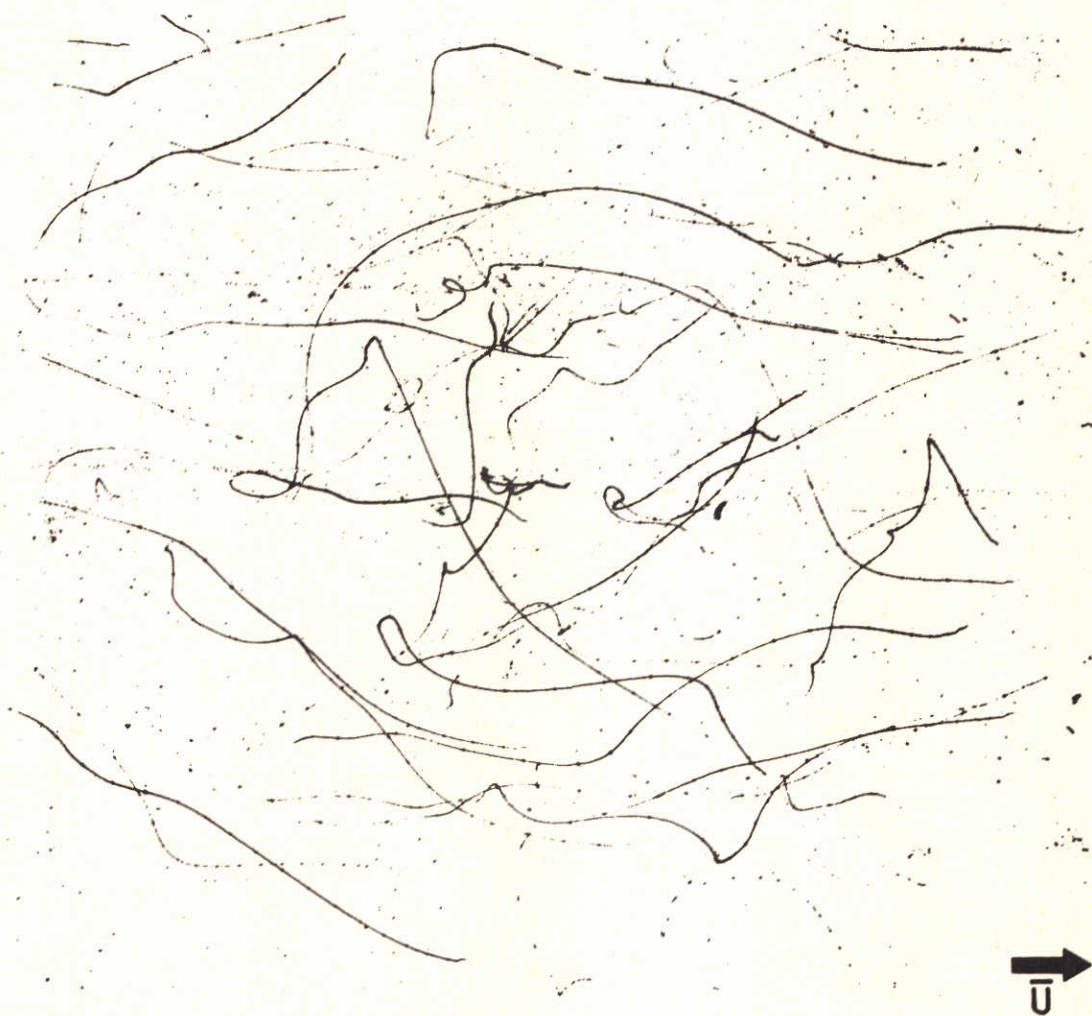
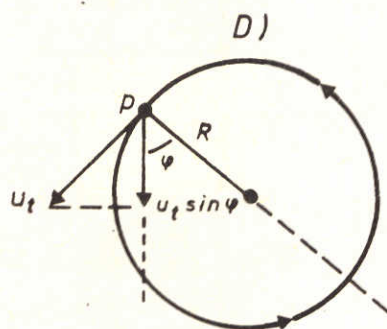
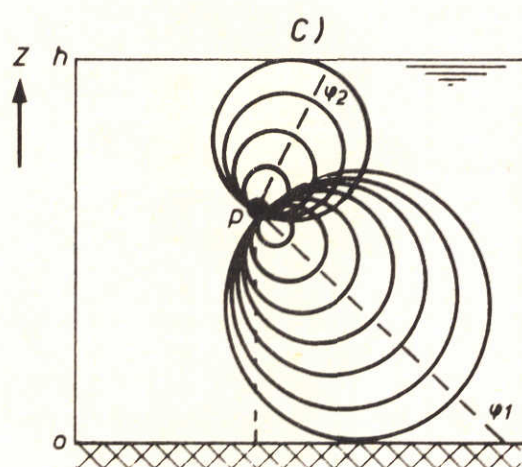
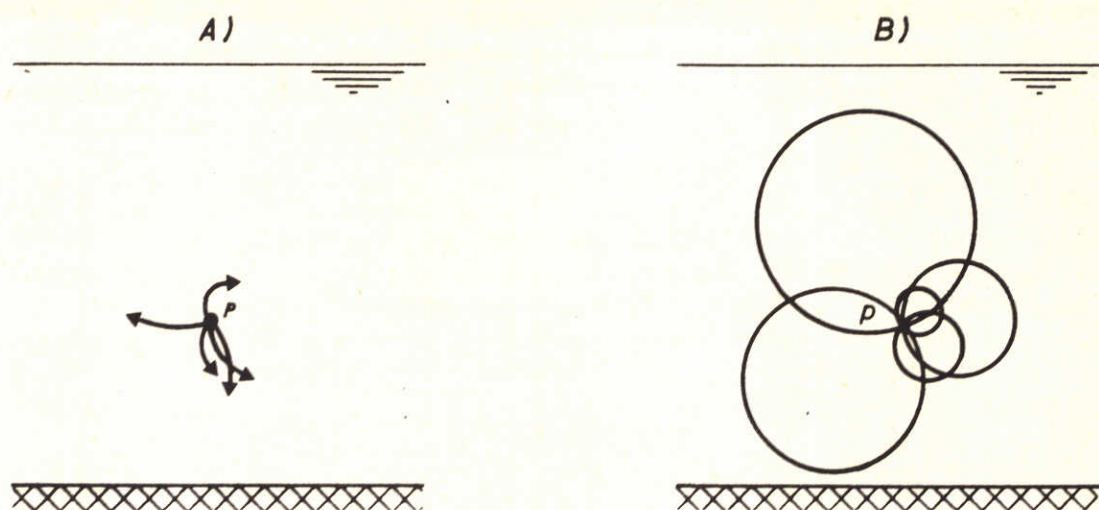


FIG.2b TURBULENTE BANEN IN (GELAAGDE) STROMING [FRENZEN 1963]

		EV
		A4
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM	R 880-4-1061	FIG.2

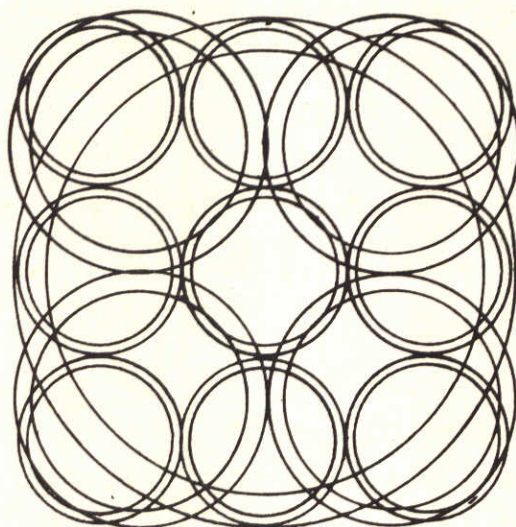


WERVELS DOOR P IN EEN ONGELAAGDE STROMING

EV

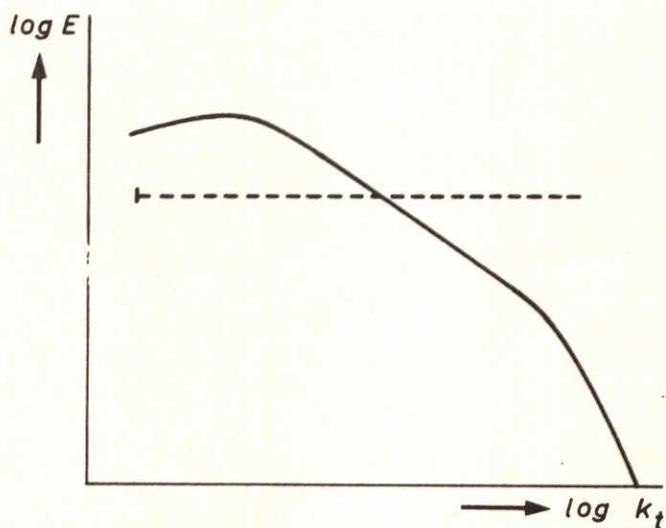
A4

a)



WERVELS VAN DIVERSE GROOTTE-KLASSEN IN EEN STROMINGSSEGMENT

b)

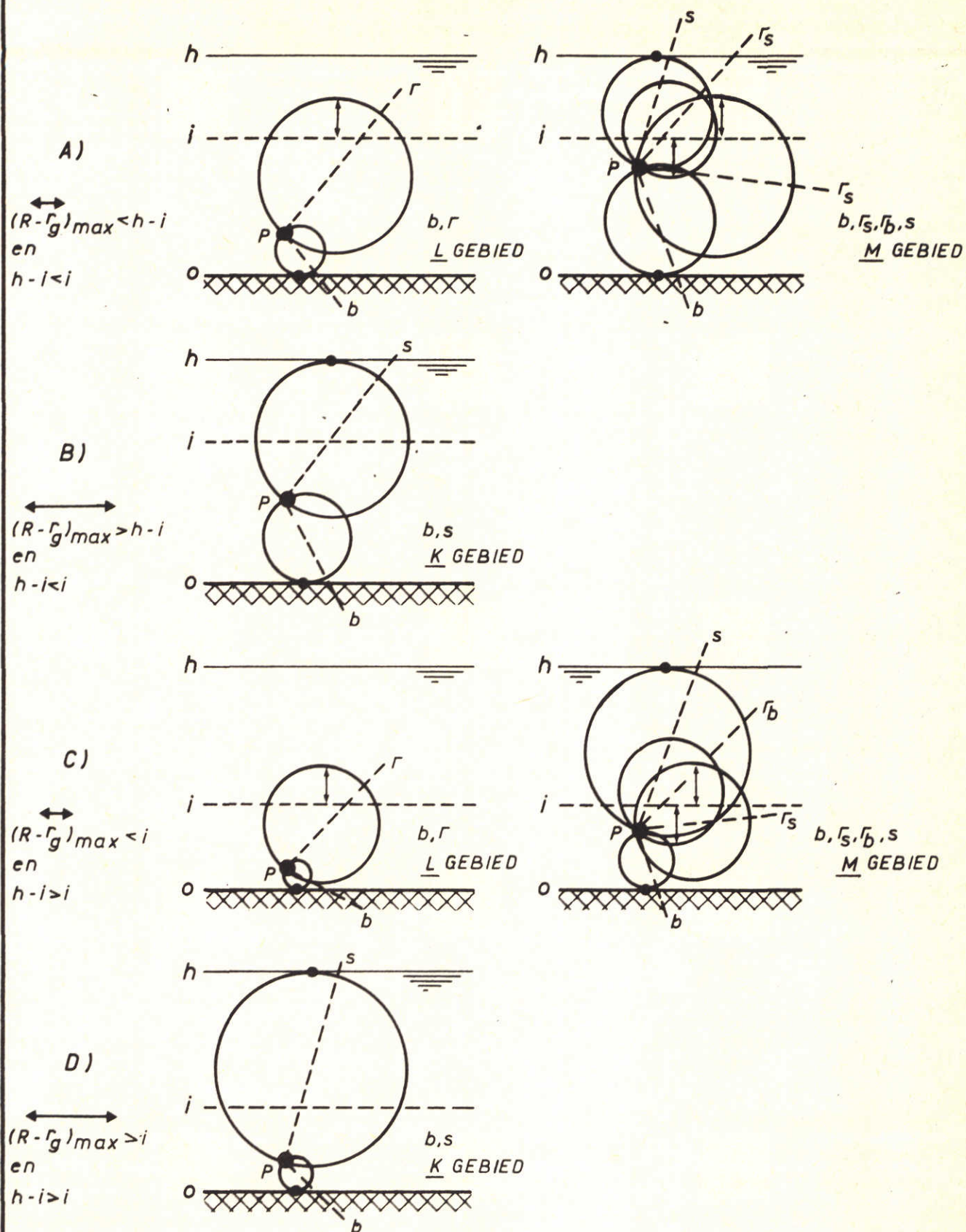


— WAARNEMINGEN

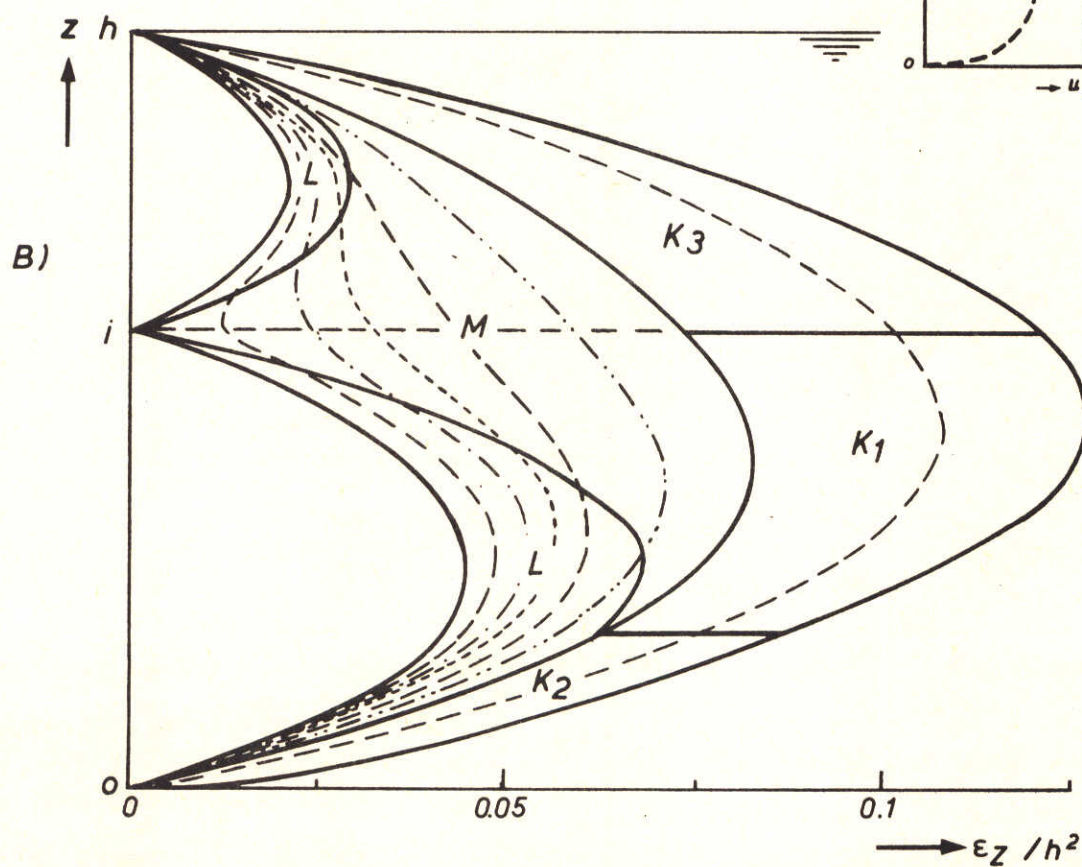
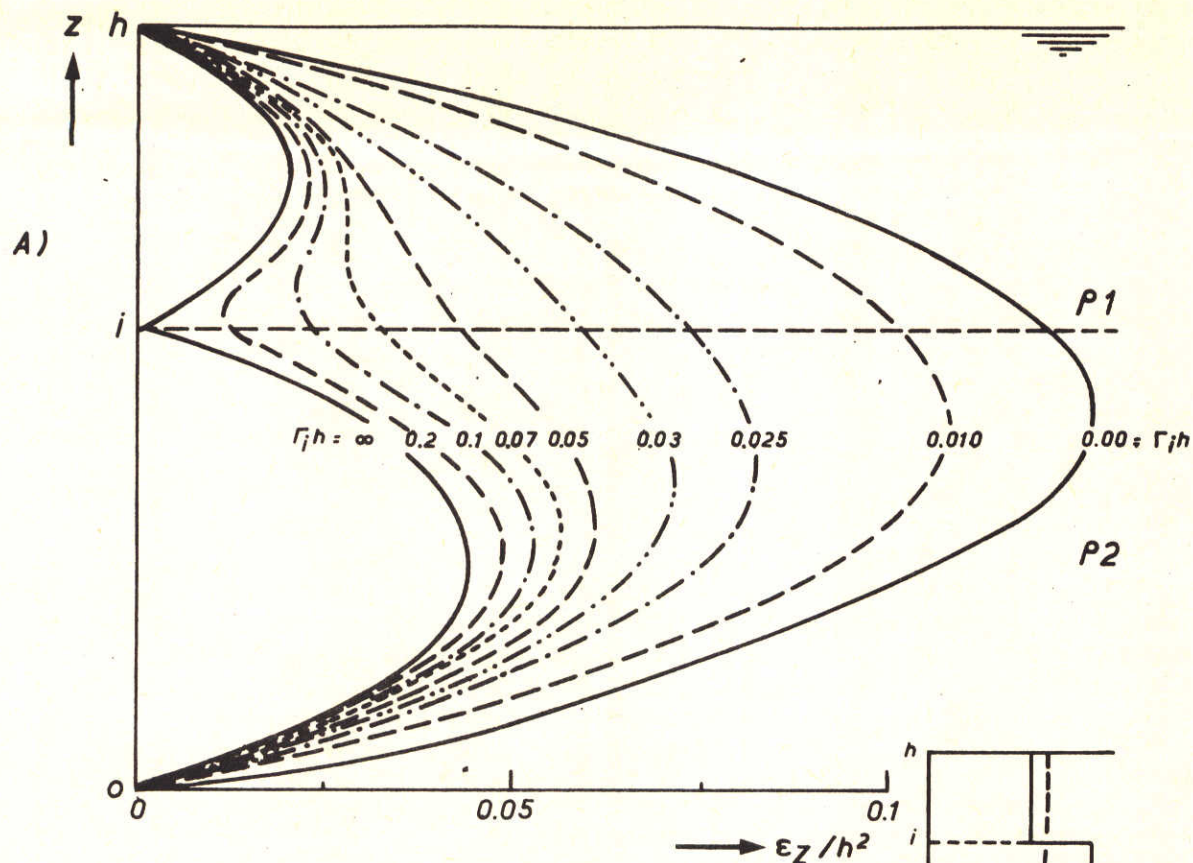
--- UIT WERVELBEELD VOLGENS HOOFDSTUK 3

ENERGIEVERDELING NAAR WERVEL-GROOTTE-KLASSE

		EV
		A4
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM	R880-4-1063	FIG. 4



DIVERSE BEGRENZINGEN VAN WERVELGROOTTEN ALS
FUNKTIE VAN z, ψ, h, i, r_i (TWEELAGENSTROMING)



ϵ_z - PROFIELEN IN TWEELAGENSTROMING

BIJ DIVERSE WAARDEN VAN Γ_i

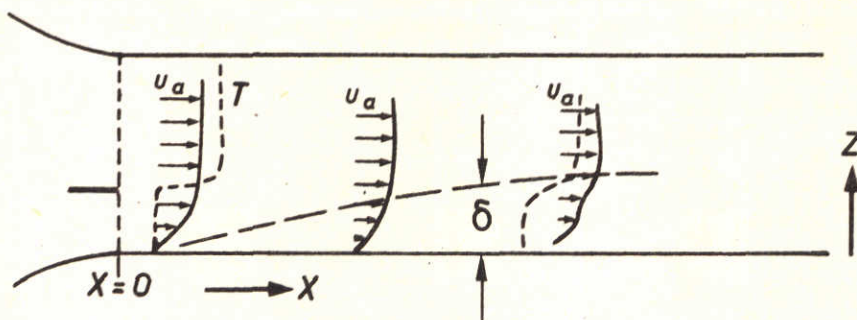
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

EV

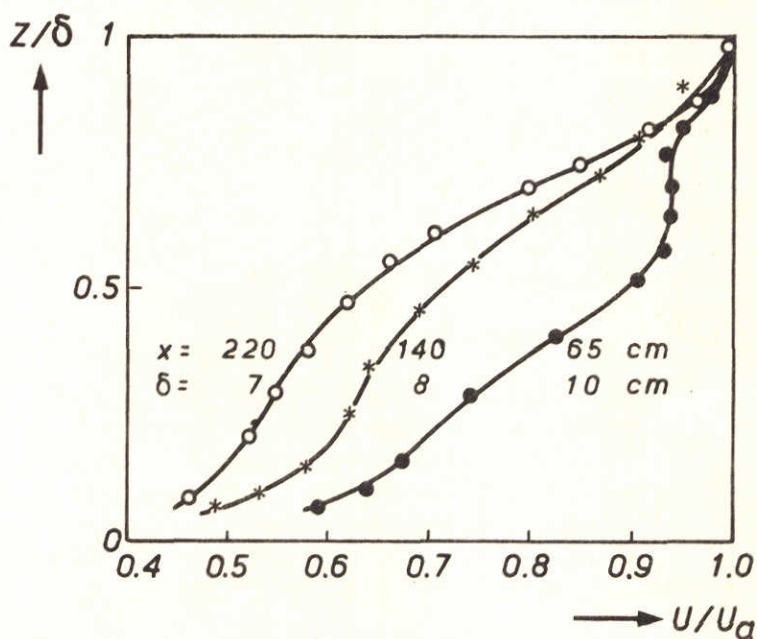
A4

R 880-4-1066

FIG. 7



a) SCHEMA EN DEFINITIESCHETS VAN GELAAGDE STROMING IN WINDTUNNEL. ONTWIKKELENDE GRENSLAAG δ . OP $x=0$ IS EEN SNELHEIDSPROFIEL VOOR EEN HOMOGENE STROMING OPGELEGD.



b) SNELHEIDSPROFIELEN IN ONTWIKKELENDE GRENSLAAG VAN GELAAGDE STROMING.

GEMETEN SNELHEIDSPROFIELEN IN GELAAGDE

STROMING (PIAT EN HOPFINGER, 1981)

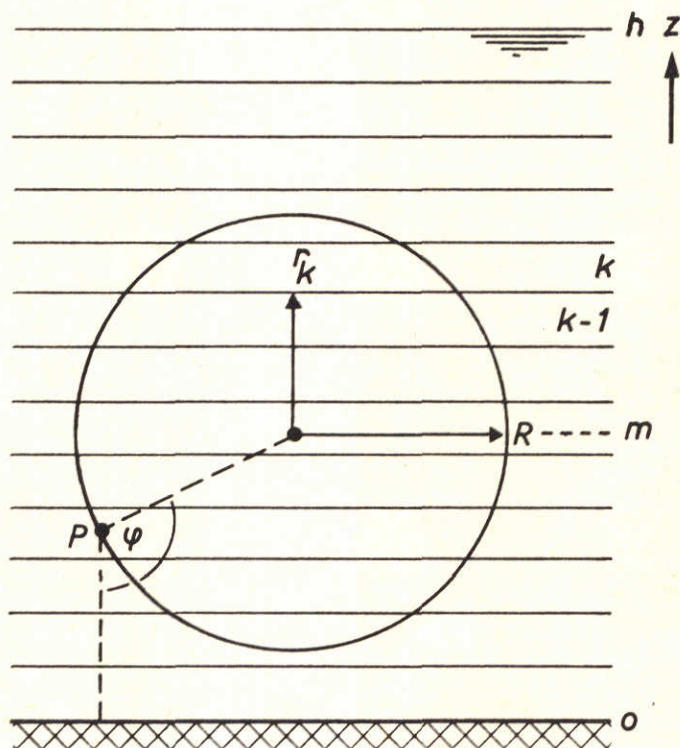
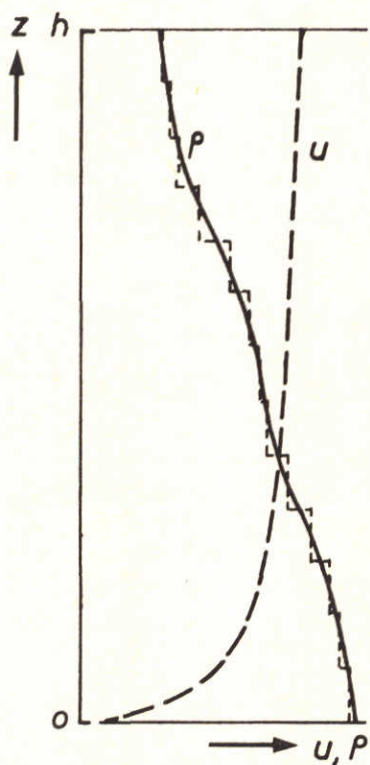
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

EV

A4

R880-4 - 1067

FIG.8



WERVEL IN WILLEKEURIG-GELAAGDE STROMING

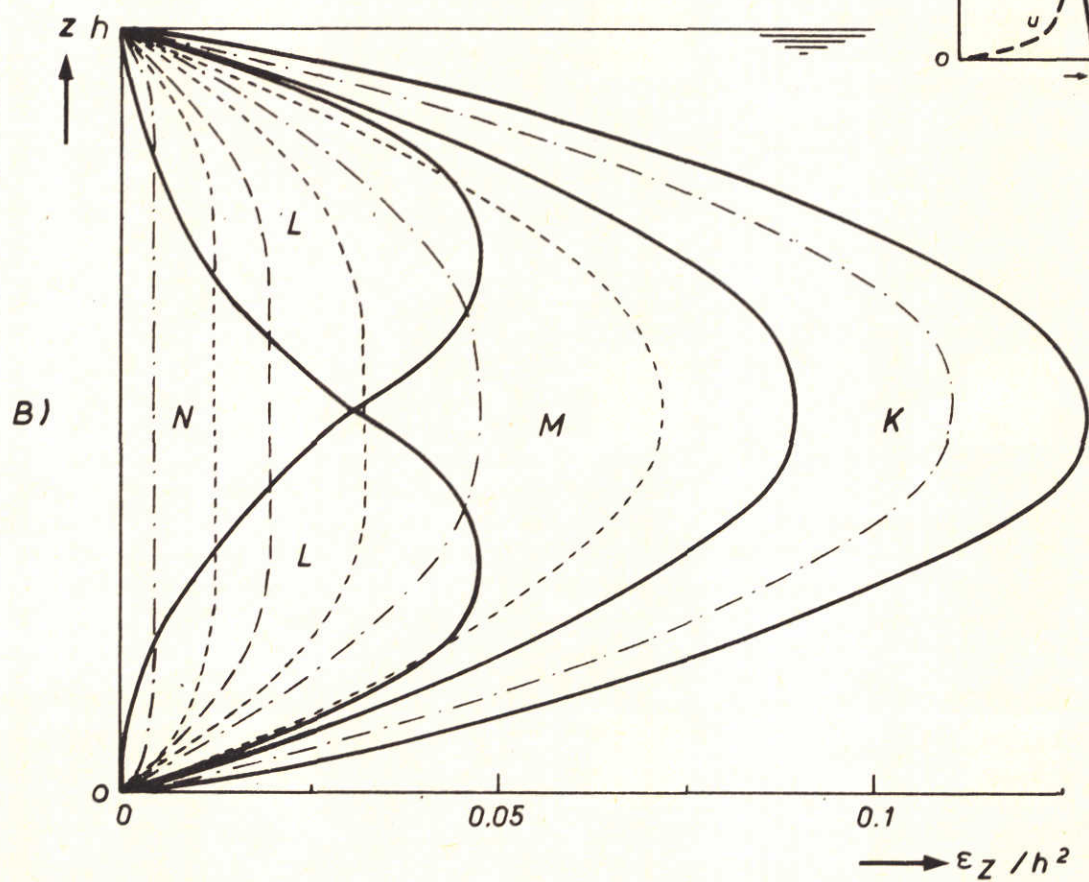
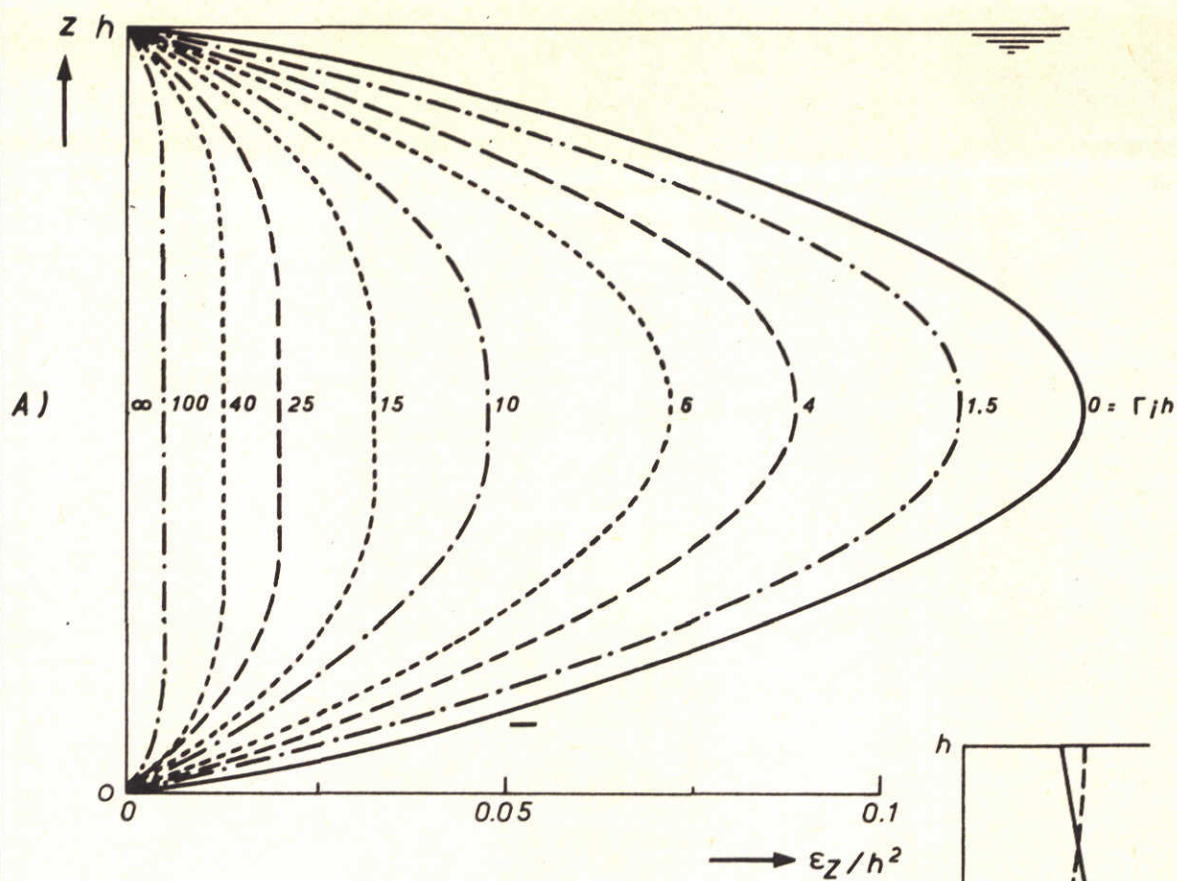
EV

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 880-4-1068

FIG. 9



ϵ_z -PROFIELEN IN STROMING MET LINEAIR DICH-
HEIDSPROFIEL BIJ DIVERSE WAARDEN VAN Γ_j

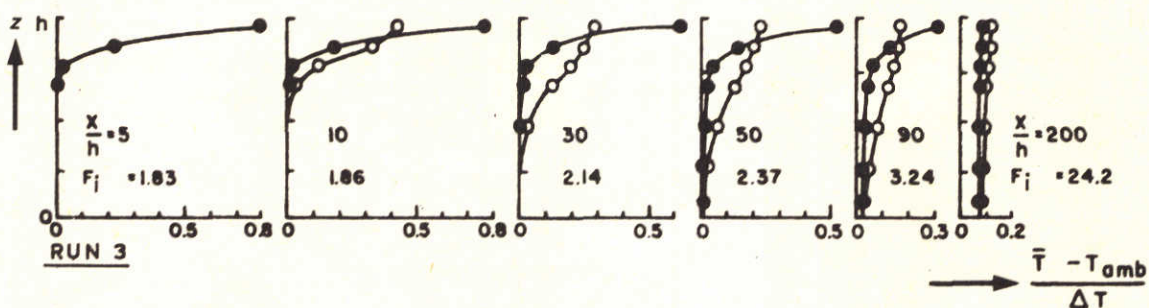
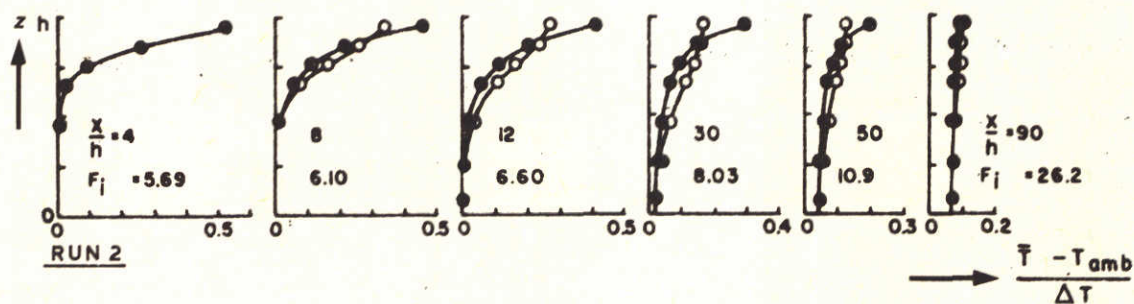
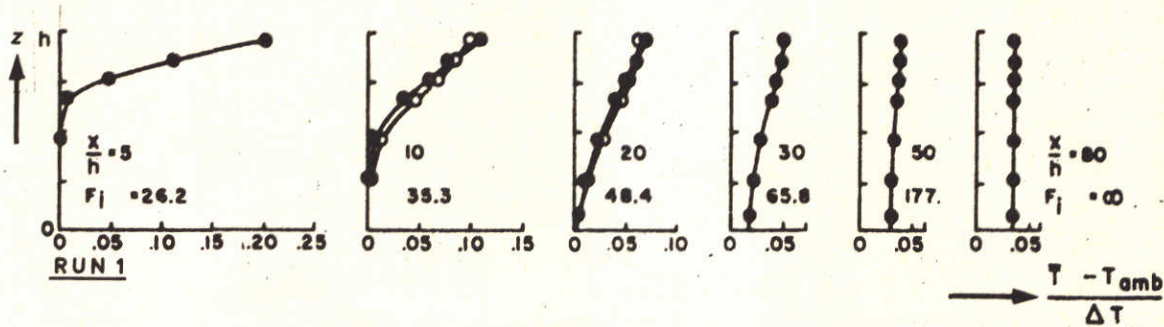
EV

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 880-4-1069

FIG.10



—●— METINGEN
 —○— BEREKENINGEN VOLGENS MODEL VAN FICK

SCHILLER EN SAYRE'S METINGEN EN BEREKENINGEN
 AAN DIFFUSIE IN GELAAGD SYSTEEM (FICK'S MODEL)

SCHILLER ET AL (1975)

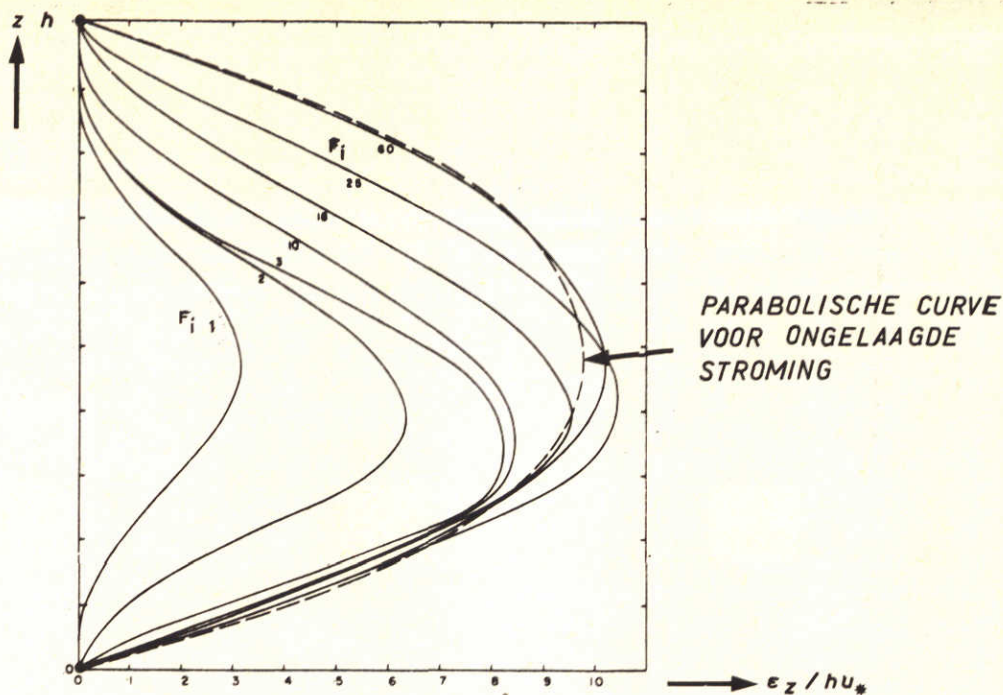
A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

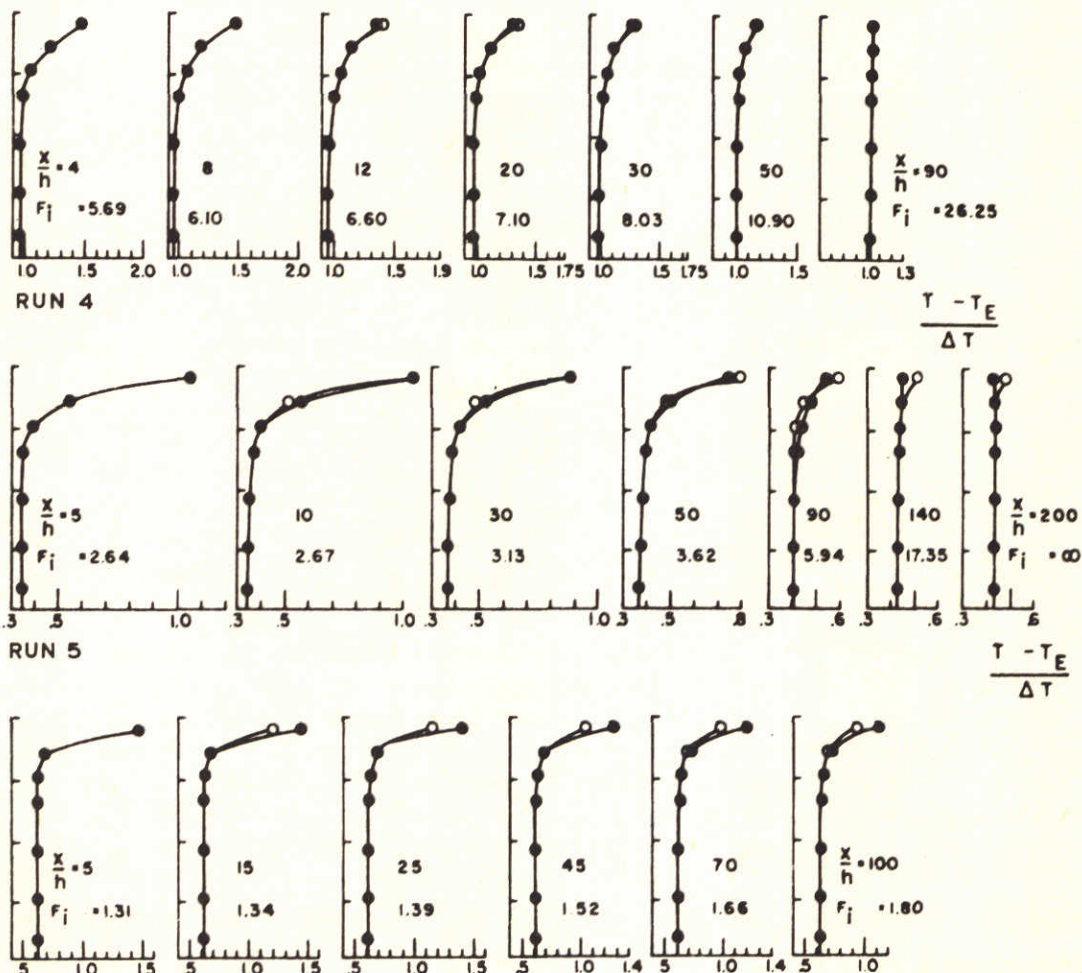
R 880-4- 1070

FIG.11

A)



B)



● METINGEN

○ BEREKENINGEN MET BETA-WAARSCHIJNLIJKHEIDSCURVEN

SCHILLER EN SAYRE'S METINGEN EN
BEREKENINGEN AAN DIFFUSIE IN GELAAGD
SYSTEEM (BETA-WAARSCHIJNLIJKHEIDSCURVEN)

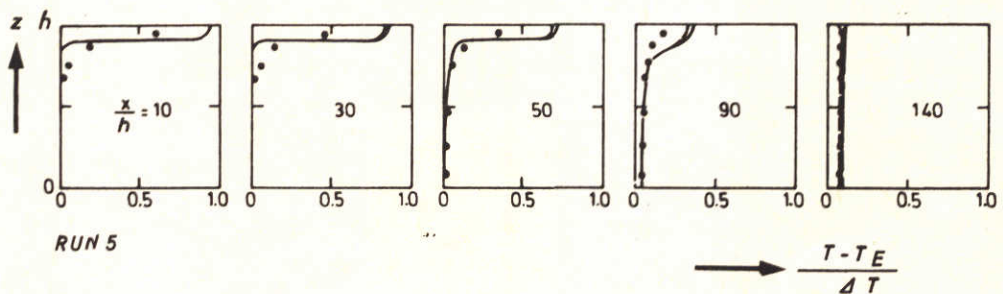
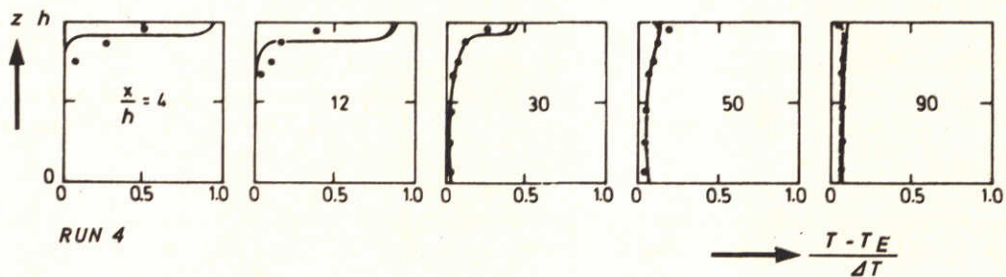
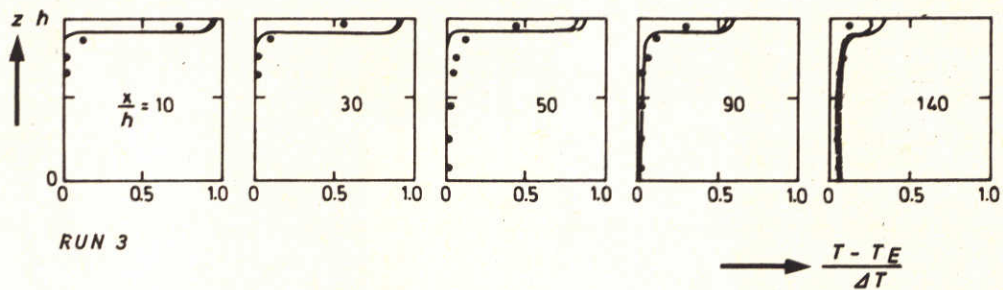
SCHILLER ET AL (1975)

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4-1071

FIG. 12



— BEREKENINGEN
 • METINGEN

SCHILLER EN SAYRE'S METINGEN, EN BEREKENINGEN VAN
 HOSSAIN EN RODI MET $k-\epsilon$ MODEL

HOSSAIN EN RODI (1980)

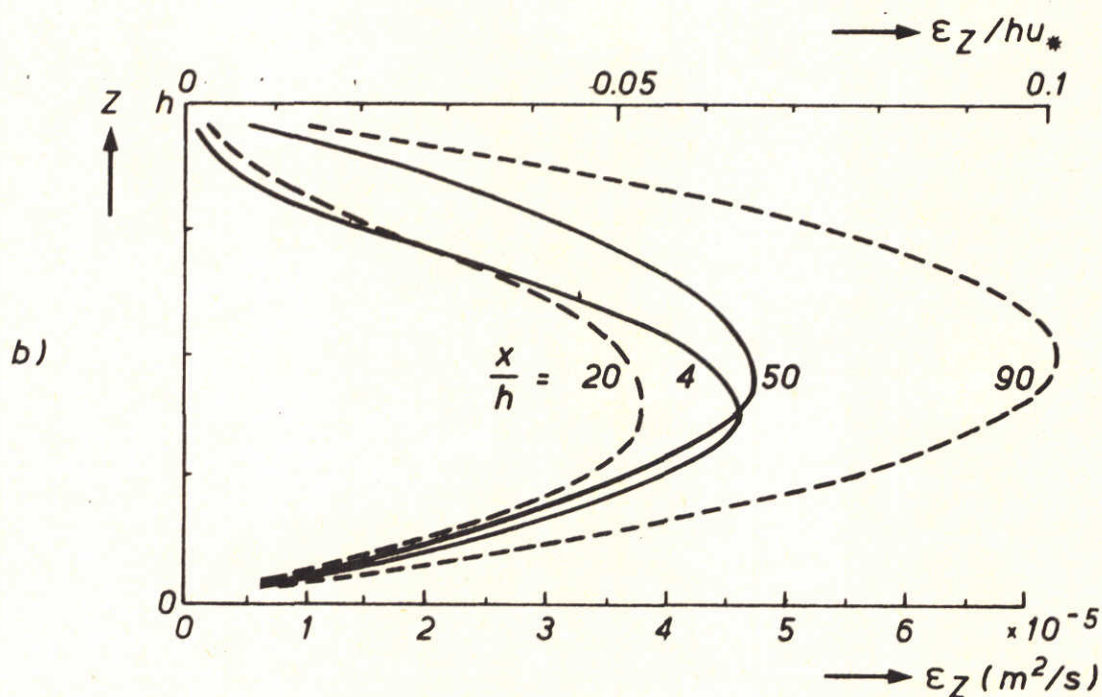
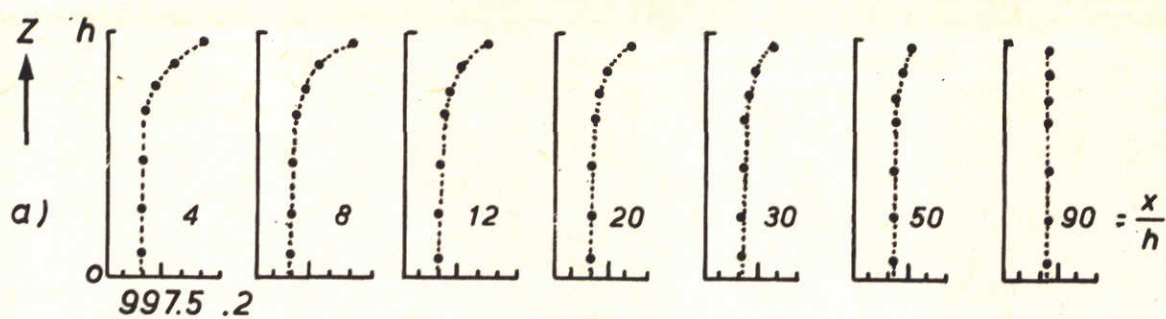
EV

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4-1072

FIG.13



$$\Delta \rho_0 = 0.3 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0.071 \text{ m}$$

$$U = 0.092 \text{ m/s}$$

$$u_* = 0.010 \text{ m/s}$$

$$c = c_E = 0.80$$

$$\gamma_i = 15.0$$

$$\gamma_s = \infty$$

$\cdots$ } BEREKENINGEN
 $\bullet$ METINGEN

DIFFUSIEBEREKENINGEN VERGELEKEN MET

METINGEN. S & S RUN 4. AANPASSING VAN γ .

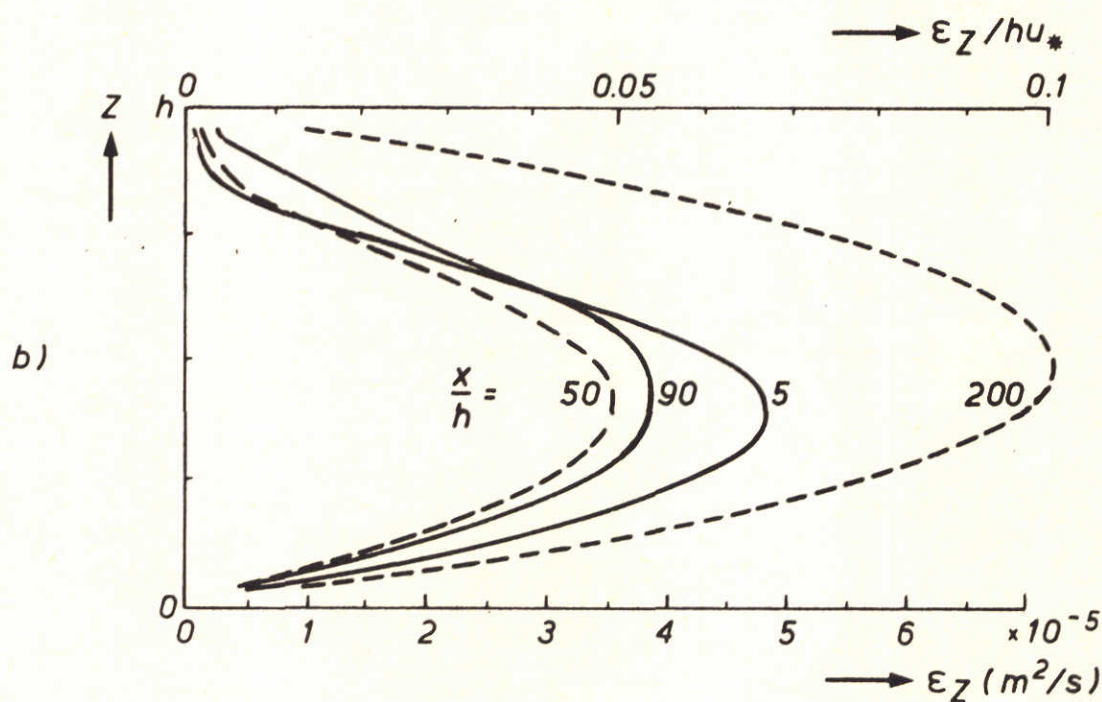
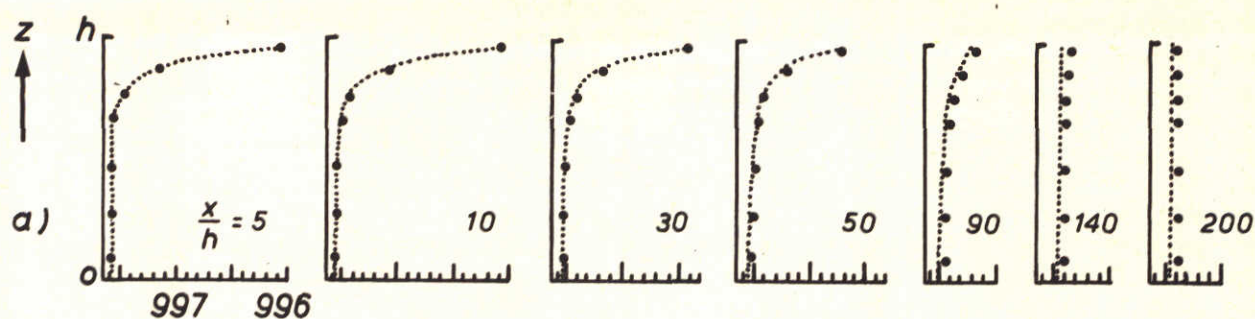
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4-1073

FIG. 14

EV

A4



$$\Delta\rho_0 = 1.5 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0.071 \text{ m}$$

$$U = 0.092 \text{ m/s}$$

$$u_* = 0.010 \text{ m/s}$$

$$c = c_E = 0.80$$

$$\gamma_i = 10.0$$

$$\gamma_s = \infty$$

$\cdots$
 $\cdots$ } BEREKENINGEN

• METINGEN

DIFFUSIEBEREKENINGEN VERGELEKEN MET

METINGEN. S & S RUN 5. AANPASSING VAN γ .

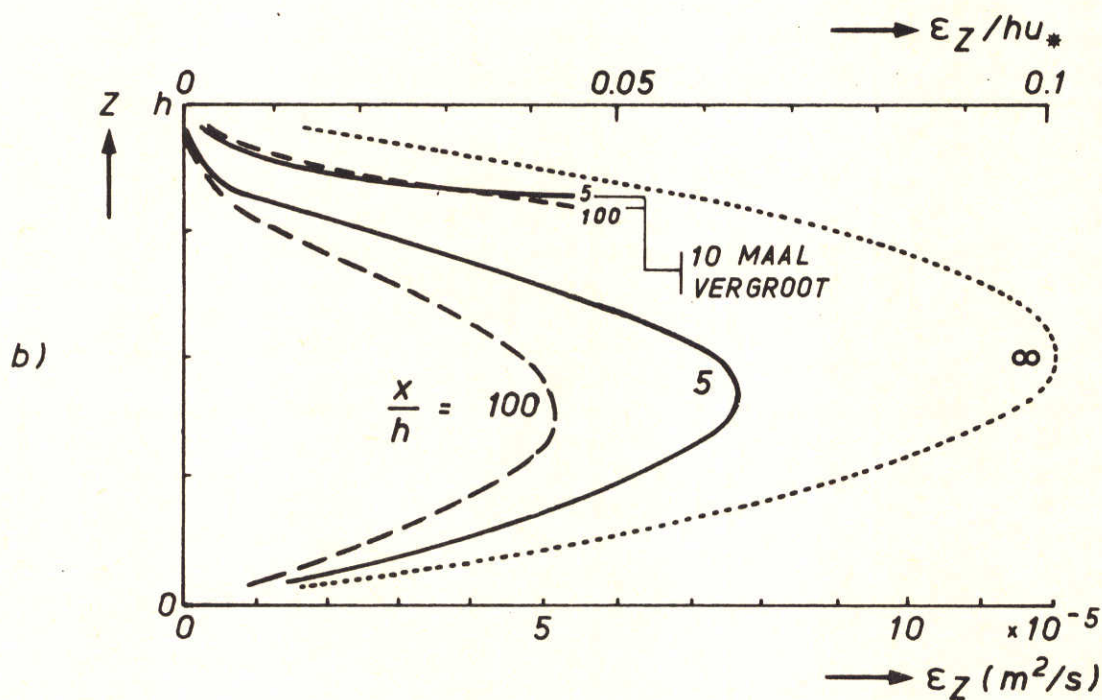
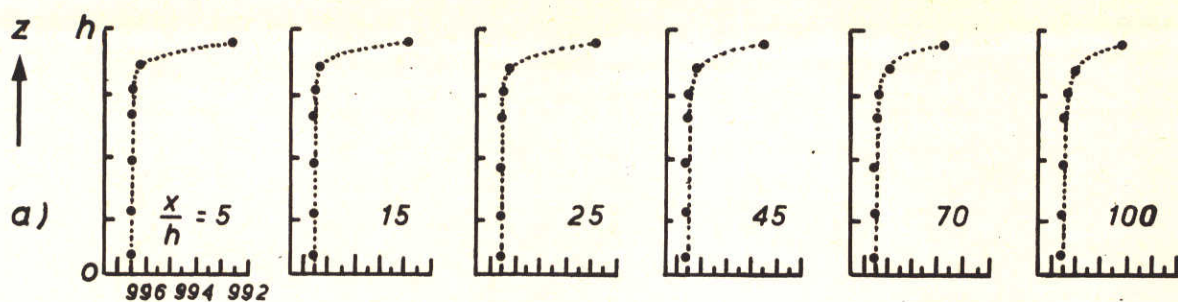
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4- 1074

FIG.15

EV

A4



$$\Delta \rho_0 = 4 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0.122 \text{ m}$$

$$U = 0.092 \text{ m/s}$$

$$u_* = 0.0092 \text{ m/s}$$

$$c = c_E = 0.80$$

$$\gamma_i = 6.8$$

$$\gamma_s = \infty$$

$\cdots$ } BEREKENINGEN
 $\cdots$ }
 $\bullet$ METINGEN

DIFFUSIEBEREKENINGEN VERGELEKEN MET

METINGEN. S & S RUN 6. AANPASSING VAN γ .

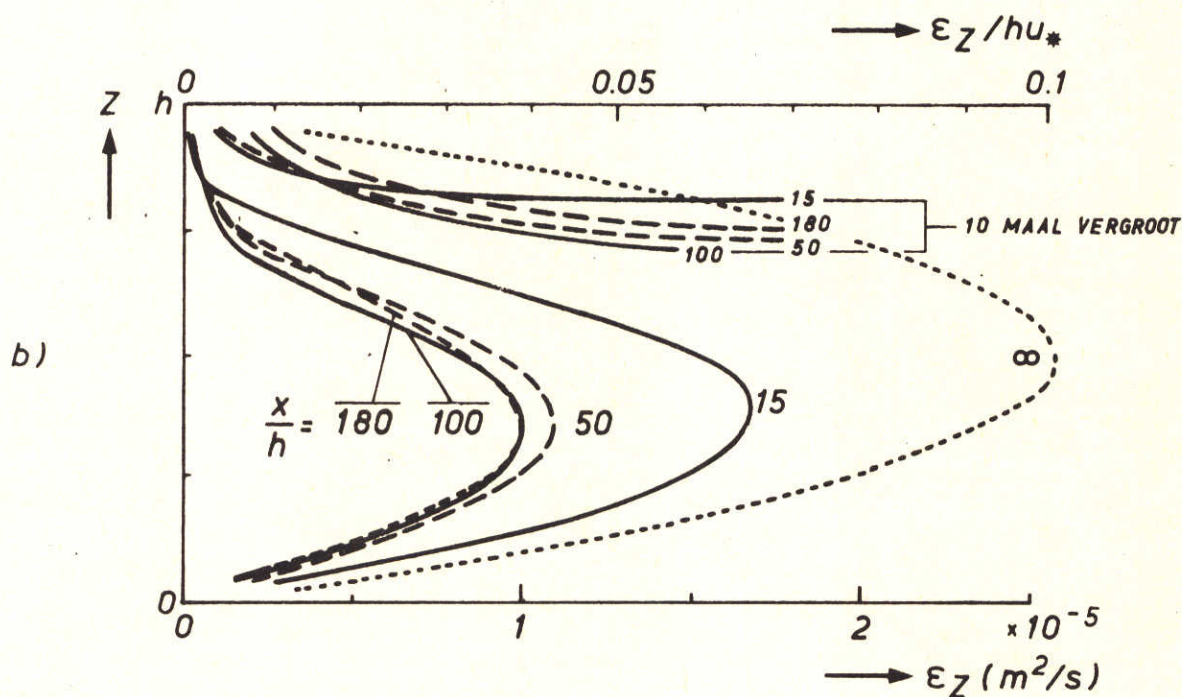
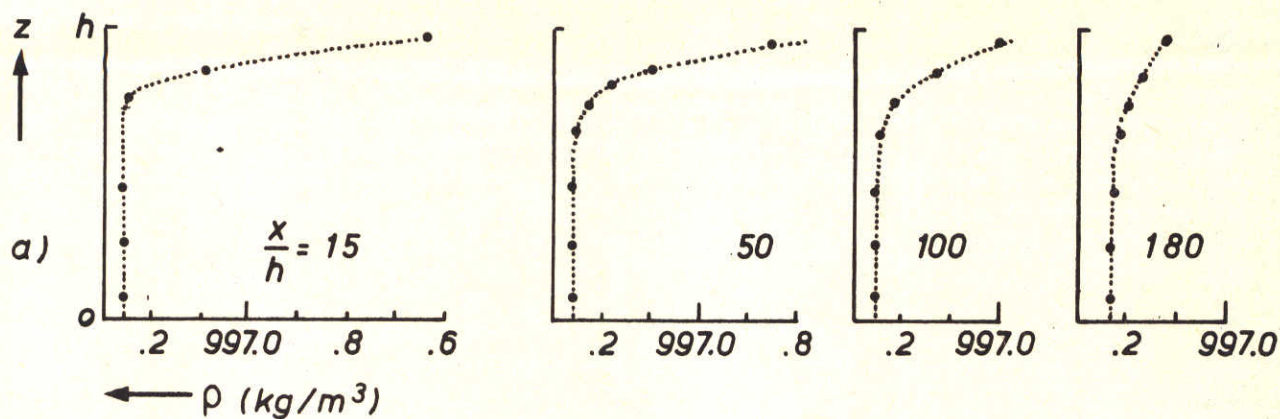
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4-1075

FIG.16

EV

A4



$$\Delta\rho_0 = 0.63 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0.071 \text{ m}$$

$$U = 0.031 \text{ m/s}$$

$$u_* = 0.0037$$

$$c = c_E = 0.80$$

$$\gamma_i = 8.0$$

$$\gamma = 0.004$$

$\cdots$ } BEREKENINGEN
 $\bullet$ METINGEN

DIFFUSIEBEREKENINGEN VERGELEKEN MET

METINGEN. S & S RUN 7. AANPASSING VAN γ .

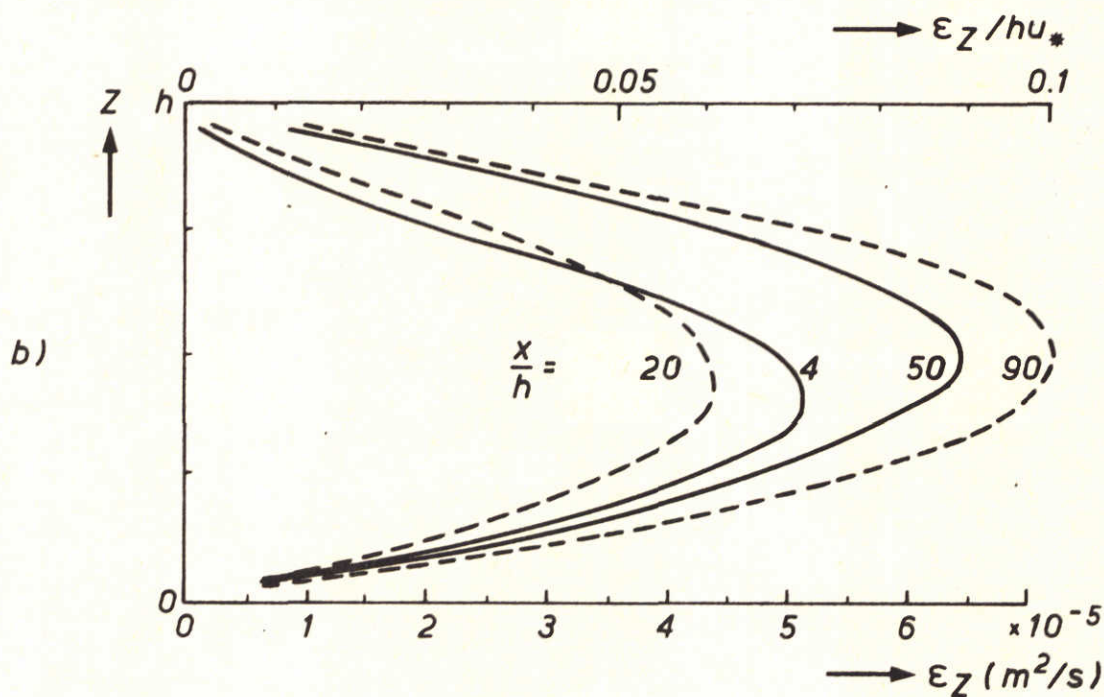
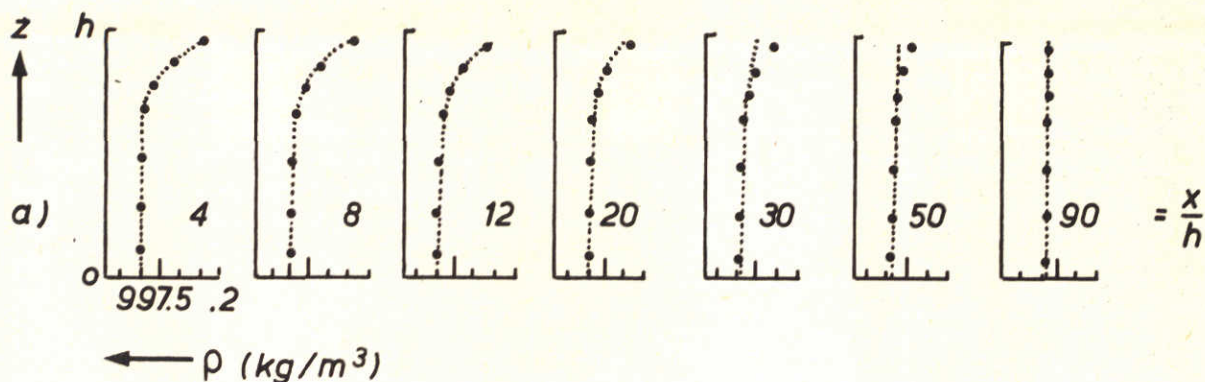
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4- 1076

FIG.17

EV

A4



$$\Delta \rho_0 = 0.3 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0.071 \text{ m}$$

$$U = 0.092 \text{ m/s}$$

$$u_* = 0.010 \text{ m/s}$$

$$c = c_E = 0.80$$

$$\gamma_i = 10.0$$

$$\gamma_s = \infty$$

--- } BEREKENINGEN
 --- }

• METINGEN

DIFFUSIEBEREKENINGEN VERGELEKEN MET

METINGEN, S & S RUN 4. GEVOELIGHEIDSANALYSE

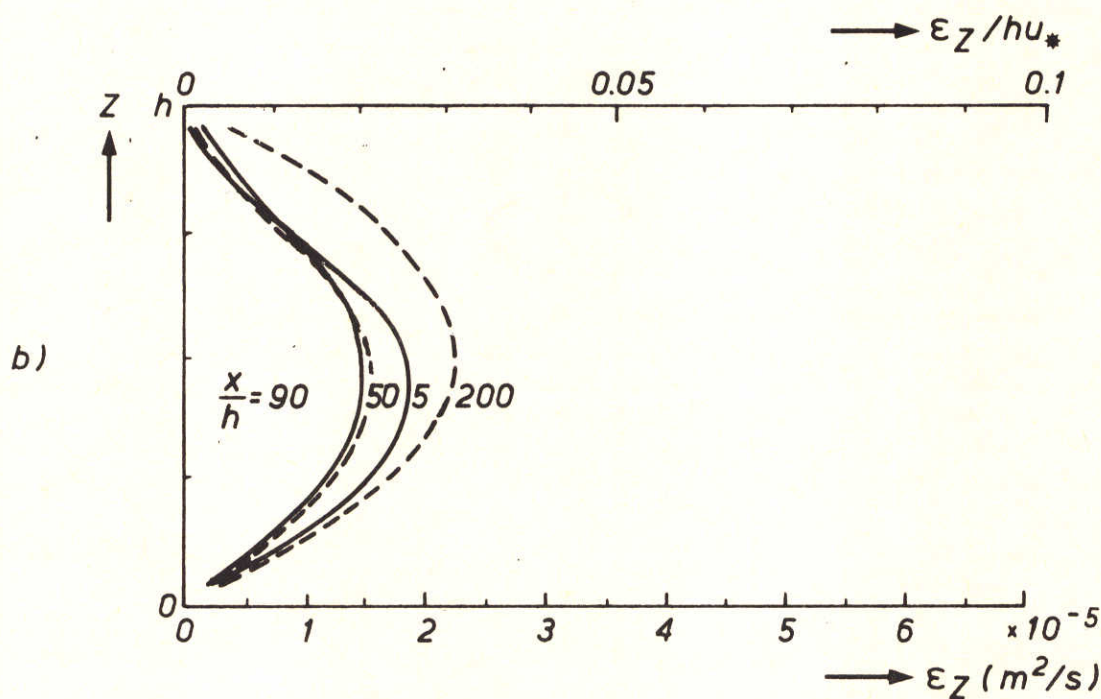
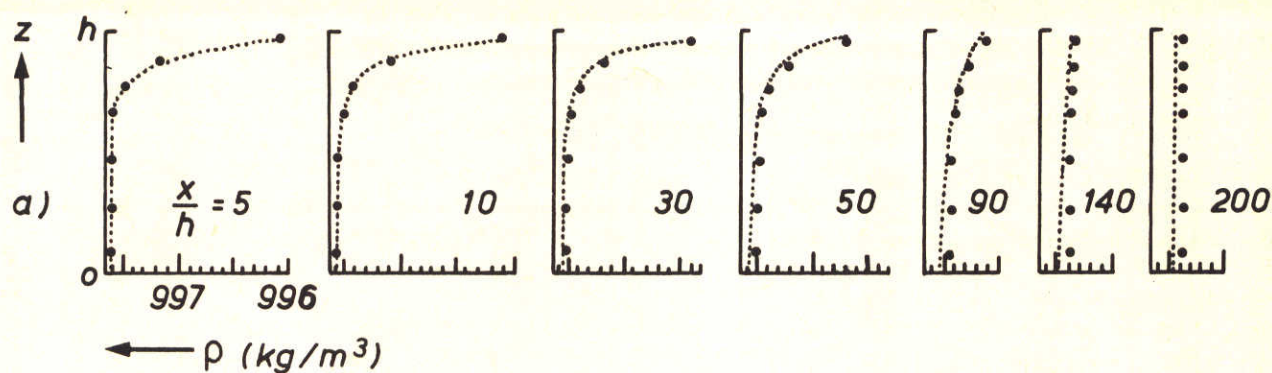
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4-1077

FIG.18

EV

A4



$$\Delta \rho_0 = 1.5 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0.071 \text{ m}$$

$$U = 0.092 \text{ m/s}$$

$$u_* = 0.010 \text{ m/s}$$

$$c = 0.27$$

$$\gamma_i = 4.0$$

$$\gamma_s = \infty$$

$\cdots$ } BEREKENINGEN
 $\cdots$ }
 $\bullet$ METINGEN

DIFFUSIEBEREKENINGEN VERGELEKEN MET

EV

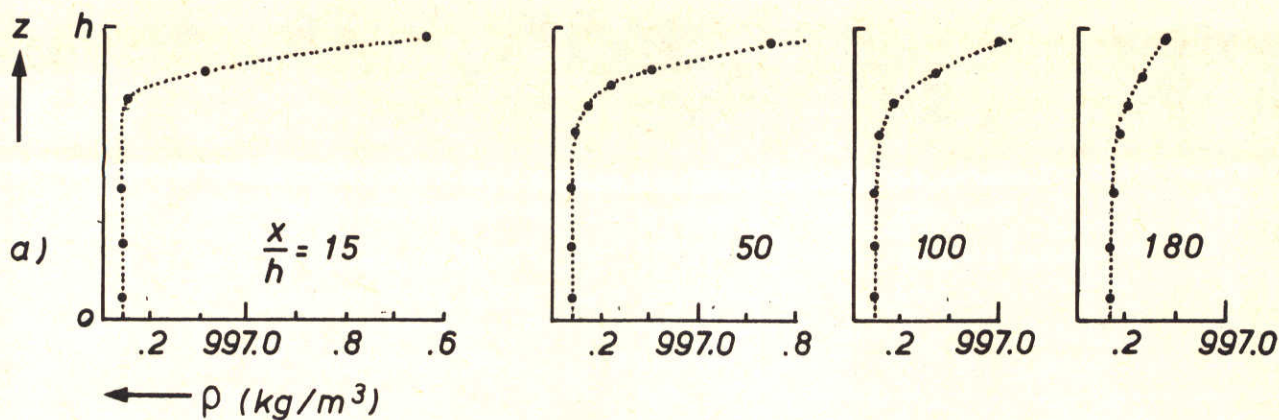
METINGEN. S & S RUN 5. GEVOELIGHEIDSANALYSE

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4- 1078

FIG.19

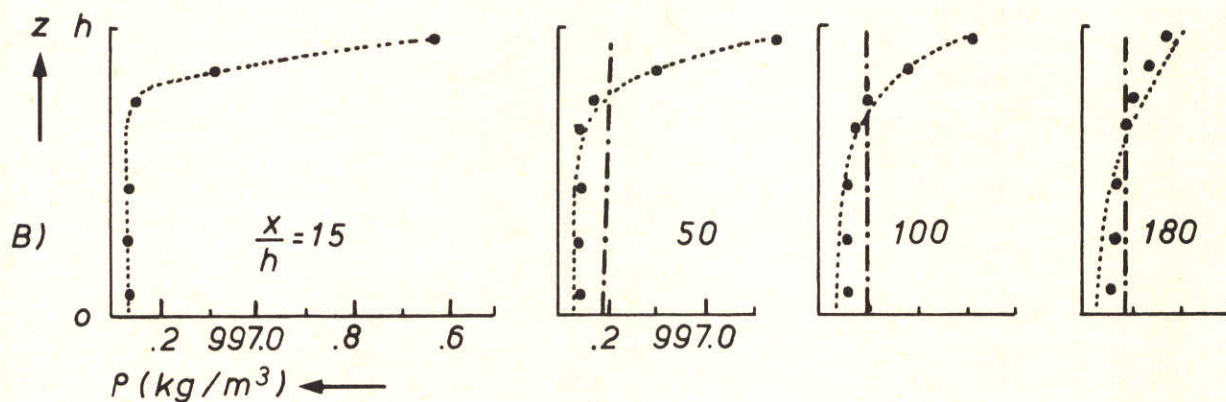


(CONSTANTEN ALS IN FIGUUR 17)

$$c = 0,80$$

$$\gamma_i = 8$$

$$\gamma_s = 0,004$$



$$c = 0,80$$

$$\gamma_i = 0$$

$$\gamma_s = \infty$$

$$c = 0,03$$

$$\gamma_i = 0$$

$$\gamma_s = \infty$$

$$\Delta P_0 = 0,63 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 0,071 \text{ m}$$

$$U = 0,031 \text{ m/s}$$

$$u = 0,0037 \text{ m/s}$$

• MEETPUNTEN

..... BEREKENINGEN

SCHILLER EN SAYRE'S RUN 7 VERGELEKEN MET

EV

BEREKENINGEN MET $\epsilon_{z,0}$

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R880-4-1079

FIG. 20

APPENDIX A $\epsilon_z(z)$ voor tweelagenstroming

Voor $\epsilon_z(z)$ in een tweelagenstroming kunnen analytische oplossingen worden gevonden. Deze zullen in deze appendix worden afgeleid.

Zoals in paragraaf 5 beschreven geldt voor $\epsilon_z(z)$ in een tweelagenstroming:

$$\epsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR \quad (A1)$$

met $\Gamma_1 = 0$ als $R < r_g$, en de integrand = 0 als $\{1-\Gamma_1(R-r_g)\} < 0$. In het overige gebied heeft Γ_1 een konstante waarde, onafhankelijk van R , ϕ en z .

Bij een bepaalde waarde van Γ_1 , z en ϕ kan bij de integratie over R door diverse oorzaken een maximale waarde $R_m(z,\phi)$ bereikt worden en wel door:

- bereiken van de bodem (zie fig. 3c).

De maximale waarde van R is dan:

$$R_{mb} = \frac{z}{1+\cos\phi} \quad (A2)$$

- bereiken van het oppervlak (zie fig. 3c).

De maximale waarde van R is dan:

$$R_{ms} = \frac{h-z}{1-\cos\phi} \quad (A3)$$

- bereiken van $\{1-\Gamma_1(R-r_g)\} = 0$.

De maximale waarde van R is dan

$$R_{m\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_1} + r_g$$

waarin $r_g = |(i-z) + R \cos\phi|$ zodat

$$R_{m\Gamma_s} = \frac{\frac{1}{\Gamma_1} + (i-z)}{1-\cos\phi} \quad (A4a)$$

wanneer het wervelmiddelpunt in de onderlaag ligt (dan is $i-z+R \cos\phi > 0$) en

$$R_{m\Gamma_b} = \frac{\frac{1}{\Gamma_1} + (z-1)}{1 + \cos\phi} \quad (\text{A4b})$$

wanneer het middelpunt in de bovenlaag ligt ($1-z+R \cos\phi < 0$).

In hoofdstuk 5 is reeds aangeduid dat voor z drie gebieden kunnen worden onderscheiden (hierbij is steeds verondersteld dat z in de onderlaag ligt; voor het berekenen van $\varepsilon_z(z)$ in de bovenlaag worden de vergelijkingen geheel analoog behandeld). Bij toenemende ϕ (in de integraal lopend van 0 tot π) worden achtereenvolgens de volgende grenzen voor R bereikt:

K-gebied (b) en (s) respektievelijk

L-gebied (b) en (Γ)

M-gebied (b), (Γ) en (s)

waarin (b) duidt op het bereiken van de bodem, (s) het bereiken van het oppervlak, en (Γ) het bereiken van een negatieve waarde van de term $\{1-\Gamma_1(R-r_g)\}$.

In het K-gebied vindt de overgang tussen het bereiken van een maximale R door (b) en door (s) plaats bij de hoek ϕ_{bs} die voldoet aan:

$$\frac{z}{1+\cos\phi_{bs}} = \frac{h-z}{1-\cos\phi_{bs}}$$

zodat

$$\phi_{bs} = \text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right) \quad (\text{A5})$$

In het L- en M-gebied wordt overeenkomstig de hoek $\phi_{b\Gamma}$, die de overgang geeft tussen het bereiken van een maximale wervelstraal R door de bodem (b) respektievelijk de maximale doordringing van een wervel in de bovenlaag (Γ) gevonden door:

$$\frac{z}{1+\cos\phi_{b\Gamma}} = \frac{\frac{1}{\Gamma_1} + (1-z)}{1-\cos\phi_{b\Gamma}}$$

zodat

$$\phi_{b\Gamma} = \text{bgcos}\left(\frac{2z-1-\frac{1}{\Gamma_1}}{1+\frac{1}{\Gamma_1}}\right) \quad (\text{A6})$$

In het M-gebied vindt de overgang tussen het bereiken van de maximale doordringing in bovenlaag en maximale doordringing in de onderlaag plaats bij de hoek $\phi_{\Gamma\Gamma}$, bij een wervel met middelpunt op het grensvlak:

$$R = \frac{1}{\Gamma_1}$$

waaruit volgt:

$$\phi_{\Gamma\Gamma} = \text{bgcos } \Gamma_1(z-1) \quad (\text{A7})$$

En in het M-gebied vindt de $\Gamma - s$ overgang plaats bij de hoek $\phi_{\Gamma s}$:

$$\frac{h-z}{1-\cos\phi_{\Gamma s}} = \frac{\frac{1}{\Gamma_1} + (z-1)}{1+\cos\phi_{\Gamma s}}$$

$$\text{zodat } \phi_{\Gamma s} = \text{bgcos}\left(\frac{2z-1-h+\frac{1}{\Gamma_1}}{h-1+\frac{1}{\Gamma_1}}\right) \quad (\text{A8})$$

Verder is, in verband met de twee verschillende waarden ($\Gamma=0$ en $\Gamma=\Gamma$) die Γ kan aannemen in de integrand, van belang wanneer door de wervels het grensvlak bereikt wordt. Wanneer geïntegreerd wordt over wervels die zich geheel in de onderlaag bevinden, wordt de integrand geschreven als $R \sin\phi$. Men kan in een tweelagensysteem de integraal (A1) dus splitsen in een deel waarin over wervels in de onderlaag worden geïntegreerd, en een deel met wervels die het grensvlak doorsnijden.

De integratie over wervels uit de onderlaag is dan overeenkomstig vgl. (4.2) (met vervanging van h in vgl. 4.2 door i) waar de integraal voor een homogeen systeem werd geformuleerd.

Overeenkomstig vgl. (A3) en (A5) kunnen R_{m1} en ϕ_{b1} gedefinieerd worden als

$$R_{m1} = \frac{1-z}{1-\cos\phi} \quad (\text{A9})$$

$$\phi_{b1} = \text{bgcos}\left(\frac{2z}{1} - 1\right) \quad (\text{A10})$$

Bij het bepalen van $\varepsilon_z(z)$ moet dus eerst worden nagegaan of z in het K-, L- of M-gebied ligt. Belangrijk daartoe zijn de hoeken ϕ_{bs} , $\phi_{b\Gamma}$ en $\phi_{\Gamma i}$.

Voor het K-gebied kan gesteld worden dat dan de wervel moet bestaan die van bodem tot oppervlak reikt (waarbij dus $R = \frac{1}{2}h$), terwijl de integrand niet negatief is: $1 - \Gamma_1(R - r_g) > 0$. Bij $R = \frac{1}{2}h$ is $R - r_g$ gelijk aan $h - i$ of gelijk aan i , al naar gelang i groter of kleiner dan $\frac{1}{2}h$ is.

Er volgt dan:

$$\begin{aligned} \text{K-gebied: als } i > \frac{1}{2}h \quad \text{dan moet} \quad h-i &< \frac{1}{\Gamma_1} \\ \text{als } i < \frac{1}{2}h \quad \text{dan moet} \quad i &< \frac{1}{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (A11)$$

Hieruit volgt dus dat de gehele curve (alle waarden z) al of niet in het K-gebied ligt, daar de voorwaarden onafhankelijk van z zijn.

Het M-gebied treedt op als $\phi_{b\Gamma}$ én $\phi_{\Gamma s}$ bestaan, terwijl $\phi_{\Gamma s} > \phi_{b\Gamma}$, en terwijl het K-gebied niet van toepassing is. Dus moet gelden:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{2z-i-\frac{1}{\Gamma_1}}{i+\frac{1}{\Gamma_1}} < 1 \quad \text{en} \quad -1 < \frac{2z-i-h+\frac{1}{\Gamma_1}}{h-i+\frac{1}{\Gamma_1}} < 1 \\ \text{én} \quad \frac{2z-i-\frac{1}{\Gamma_1}}{i+\frac{1}{\Gamma_1}} > \frac{2z-i-h+\frac{1}{\Gamma_1}}{h-i+\frac{1}{\Gamma_1}} \quad \text{én geen K-gebied, waaruit dan volgt} \end{aligned}$$

$$\text{M-gebied: } 2zi-zh-i^2+\frac{1}{\Gamma_1^2} < 0 \text{ en als}$$

$$i > \frac{1}{2}h \text{ dan moet } h-i > \frac{1}{\Gamma_1} \text{ en } z > i-\frac{1}{\Gamma_1} \quad (A12)$$

$$\text{of als } i < \frac{1}{2}h \text{ dan moet } i > \frac{1}{\Gamma_1} \text{ en } z > i-\frac{1}{\Gamma_1}$$

Het L-gebied treedt in de overige gevallen op dus:

L-gebied a. $2zi-zh-i^2 + \frac{1}{\Gamma_1^2} < 0$ en als

$$i > \frac{1}{2}h \text{ dan moet } h-i > \frac{1}{\Gamma_1} \text{ en } z < i - \frac{1}{\Gamma_1}$$

$$\text{of als } i < \frac{1}{2}h \text{ dan moet } i > \frac{1}{\Gamma_1} \text{ en } z < i - \frac{1}{\Gamma_1} \quad (\text{A13})$$

b. $2zi-zh-i^2 + \frac{1}{\Gamma_1^2} > 0$ en als

$$i > \frac{1}{2}h \text{ dan moet } h-i > \frac{1}{\Gamma_1}$$

$$\text{of als } i < \frac{1}{2}h \text{ dan moet } i > \frac{1}{\Gamma_1}$$

De integralen in K-, L- en M-gebied kunnen nu worden geschreven als:

K-gebied

$$\varepsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} \frac{b g \cos(\frac{2z}{i} - 1)}{1} R \sin\phi \, d\phi dR + \quad \text{I}$$

$$+ \int_{\phi=b g \cos(\frac{2z}{i} - 1)}^{\pi} \int_{R=0}^{\frac{i-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \, d\phi dR + \quad \text{II}$$

$$+ \int_{\phi=b g \cos(\frac{2z}{i} - 1)}^{\pi} \int_{R=\frac{i-z}{1-\cos\phi}}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} R \sin\phi \{1 - \Gamma_1(R-r_g)\} \, d\phi dR + \quad \text{III}$$

$$+ \int_{\phi=b g \cos(\frac{2z}{h} - 1)}^{\pi} \int_{R=\frac{i-z}{1-\cos\phi}}^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1 - \Gamma_1(R-r_g)\} \, d\phi dR \quad (\text{A14})$$

IV

L-gebied

$$\varepsilon_z(z) \sim I + II +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \frac{bg \cos(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})}{bg \cos(\frac{2z}{h} - 1)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-r_g)\} d\phi dR + \\
 & + \int \frac{bg \cos(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})}{bg \cos(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{i-z+\beta}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-r_g)\} d\phi dR \quad (A15) \\
 & \text{VI}
 \end{aligned}$$

waarin β gedefinieerd is als $\beta = 1/\Gamma_i$.

M-gebied

$$\varepsilon_z(z) \sim I + II +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \frac{bg \cos(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})}{bg \cos(\frac{2z}{i} - 1)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-r_g)\} d\phi dR + \\
 & + \int \frac{bg \cos \Gamma_i(z-i)}{bg \cos(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{i-z+\beta}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-r_g)\} d\phi dR + \\
 & + \int \frac{bg \cos(\frac{2z-i-h+\beta}{h-i+\beta})}{bg \cos \Gamma_i(z-i)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z-i+\beta}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-r_g)\} d\phi dR + \\
 & + \int \frac{bg \cos(\frac{2z-i-h+\beta}{h-i+\beta})}{bg \cos(\frac{2z-i-h+\beta}{h-i+\beta})} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{h-z}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-r_g)\} d\phi dR \quad (A16) \\
 & \text{IX}
 \end{aligned}$$

De integralen I, II,...IX worden nu als volgt uitgewerkt:

Integralen I + II

Overeenkomstig de oplossing in hoofdstuk 4 geldt:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\phi=0}^{b g \cos(\frac{2z}{1} - 1)} \int_{R=0}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} R \sin\phi \, d\phi dR + \\
 & + \int_{\phi=b g \cos(\frac{2z}{1} - 1)}^{\pi} \int_{R=0}^{\frac{1-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \, d\phi dR = \frac{1}{2} z(1-z) \quad (A17)
 \end{aligned}$$

Integraal III

$$\text{III} = \frac{b g \cos(\frac{2z}{h} - 1)}{b g \cos(\frac{2z}{1} - 1)} \frac{z}{1-\cos\phi} \int_{R=0}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} R \sin\phi \{1 - \Gamma_1(R-r_g)\} \, d\phi dR$$

$$\text{Nu is } r_g = |i - z + R \cos\phi|$$

Voor kleine waarden van ϕ en R is $(i - z + R \cos\phi)$ positief. De term wordt nul als

$$R = \frac{z-1}{\cos\phi} \quad (\text{met } \phi > \pi/2)$$

De R -integratie in III moet dan in twee delen worden gesplitst als

$$\frac{1-z}{1-\cos\phi} < R = \frac{z-1}{\cos\phi} < \frac{z}{1+\cos\phi}$$

De linker ongelijkheid geldt altijd daar steeds $\phi > \frac{\pi}{2}$ en $i > z$. De rechter ongelijkheid geldt als

$$\cos\phi < \frac{z-1}{1}$$

dus als $\phi > b g \cos(\frac{z}{1} - 1)$.

Integraal III wordt dan dus in tweeën gesplitst als de ϕ -bovengrens in III groter is dan $\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)$. Dit treedt op als

$$\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1) > \text{bgcos}(\frac{z}{i} - 1)$$

dus als $\frac{2z}{h} - 1 < \frac{z}{i} - 1$

zodat dat $i < \frac{1}{2}h$.

Derhalve geldt:

Voor $i \geq \frac{1}{2}h$:

$$\text{IIIa} = \frac{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)}{\text{bgcos}(\frac{2z}{i} - 1)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A18})$$

en voor $i < \frac{1}{2}h$:

$$\begin{aligned} \text{IIIb} = & \frac{\text{bgcos}(\frac{z}{i} - 1)}{\text{bgcos}(\frac{2z}{i} - 1)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR + \\ & + \frac{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)}{\text{bgcos}(\frac{z}{i} - 1)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z-i}{\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR + \\ & + \frac{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)}{\text{bgcos}(\frac{z}{i} - 1)} \frac{z-i}{\cos\phi} \int \frac{z}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R+i-z+R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A19}) \end{aligned}$$

Integraal IV

$$\text{IV} = \int \frac{\pi}{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int \frac{h-z}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR$$

De R-integraal wordt weer in tweeën gesplitst als:

$$R = \frac{z-1}{\cos\phi} < \frac{h-z}{1-\cos\phi}$$

dus als $\phi > \text{bgcos} \frac{z-1}{h-1}$.

Nu valt de waarde $\phi = \text{bgcos} \frac{z-1}{h-1}$ binnen het totale integratie-interval $\frac{2z}{h} - 1$ tot π als $i > \frac{1}{2}h$ en $z > 2i-h$, anders is $\phi > \pi$ (als $z < 2i-h$) of $\phi < \text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)$ (als $i < \frac{1}{2}h$).

Dus voor $z < 2i-h$:

$$\text{IVa} = \int_0^{\pi} \text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1) \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z-1}{1-\cos\phi}}^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A20})$$

Voor $i < \frac{1}{2}h$:

$$\begin{aligned} \text{IVb} = & \int_0^{\pi} \text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1) \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z-1}{\cos\phi}}^{\frac{z-1}{\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR + \\ & + \int_0^{\pi} \text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1) \frac{z-1}{\cos\phi} \int_{\frac{h-z}{1-\cos\phi}}^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R+i-z+R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A21}) \end{aligned}$$

en voor $i > \frac{1}{2}h$ en $z > 2i-h$:

$$\begin{aligned} \text{IVc} = & \int_0^{\pi} \text{bgcos} \frac{z-1}{h-1} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z-1}{1-\cos\phi}}^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR + \\ & + \int_0^{\pi} \text{bgcos} \frac{z-1}{h-1} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z-1}{\cos\phi}}^{\frac{z-1}{\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR + \\ & + \int_0^{\pi} \text{bgcos} \frac{z-1}{h-1} \frac{z-1}{\cos\phi} \int_{\frac{h-z}{1-\cos\phi}}^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_i(R+i-z+R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A22}) \end{aligned}$$

Integraal V

$$V = \int_{\text{bgcos}(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})}^{\text{bgcos}(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z}{1+\cos\phi}}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR$$

Men kan aantonen dat de integraal in twee delen wordt gesplitst als $i < \beta$, maar er zal blijken dat in het L- en M-gebied steeds $i > \beta$ zal moeten gelden. Dus voor $i > \beta$:

$$V = \int_{\text{bgcos}(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})}^{\text{bgcos}(\frac{2z-i-\beta}{i+\beta})} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z}{1+\cos\phi}}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A23})$$

Integraal VI

$$VI = \int_{\text{bgcos} \frac{2z-i-\beta}{i+\beta}}^{\pi} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi}}^{\frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR$$

De R-integraal moet weer in tweeën worden gedeeld als:

$$R = \frac{z-i}{\cos\phi} < \frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi}$$

dus als $\cos\phi < \frac{z-i}{\beta}$, zodat dan $\phi > \text{bgcos} \frac{z-i}{\beta}$

Deze waarde van ϕ ligt altijd boven de integratie-ondergrens $\text{bgcos} \frac{2z-i-\beta}{i+\beta}$, en onder de integratiebovengrens π als $z > i - \beta$. Maar in het L-gebied zal steeds $z \leq i - \beta$ gelden, zoals zal blijken.

Dus voor $z \leq i - \beta$ geldt:

$$VI = \int_{\text{bgcos} \frac{2z-i-\beta}{i+\beta}}^{\pi} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi}}^{\frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (\text{A24})$$

Integraal VII

$$VII = \frac{\int b g \cos \Gamma_1(z-1) \frac{2z-1-\beta}{1+\beta} \frac{1-z}{1-\cos \phi} \int \frac{1-z+\beta}{1-\cos \phi} R \sin \phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR$$

Splitsing in twee integralen voor $\phi > b g \cos \frac{z-1}{\beta}$, en dit is juist de bovengrens van de ϕ -integraal. Dus:

$$VII = \frac{\int b g \cos \Gamma_1(z-1) \frac{2z-1-\beta}{1+\beta} \frac{1-z}{1-\cos \phi} \int \frac{1-z+\beta}{1-\cos \phi} R \sin \phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos \phi)\} d\phi dR \quad (A25)$$

Integraal VIII

$$VIII = \frac{\int b g \cos(\frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}) \frac{1-z}{1-\cos \phi} \int \frac{z-1+\beta}{1+\cos \phi} R \sin \phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR$$

R-integraal wordt in tweeën gesplitst als

$$R = \frac{z-1}{\cos \phi} < \frac{1-z+\beta}{1+\cos \phi} \quad \text{dus als} \quad \phi > b g \cos \frac{z-1}{\beta}$$

Deze waarde van ϕ vormt juist de ondergrens van de integraal:

$$VIII = \frac{\int b g \cos(\frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}) \frac{1-z}{1-\cos \phi} \int \frac{z-1}{\cos \phi} R \sin \phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos \phi)\} d\phi dR +$$

$$+ \frac{\int b g \cos(\frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}) \frac{z-1}{\cos \phi} \int \frac{z-1+\beta}{1+\cos \phi} R \sin \phi \{1-\Gamma_1(R+i-z+R \cos \phi)\} d\phi dR \quad (A26)$$

Integraal IX

$$IX = \int_{\text{bgcos}(\frac{2z-i-h+\beta}{h-i+\beta})}^{\pi} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-r_g)\} d\phi dR$$

Integraal in tweeën splitsen als $\phi > \text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}$. Deze waarde van ϕ is kleiner dan de integratiebovengrens π als $z > 2i-h$.

De waarde $\phi = \text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}$ is groter dan de integratie-ondergrens als $i-h+\beta > 0$. In M-gebied zal blijken dat $i-h+\beta < 0$ en $z > 2i-h$.

Als $z > 2i-h$ en $i-h+\beta < 0$:

$$IX = \int_{\text{bgcos} \frac{2z-i-h+\beta}{h-i+\beta}}^{\pi} \frac{i-z}{1-\cos\phi} \int_{\frac{z-i}{\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR +$$

$$+ \int_{\text{bgcos} \frac{2z-i-h+\beta}{h-i+\beta}}^{\pi} \frac{z-i}{\cos\phi} \int_{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R+i-z+R \cos\phi)\} d\phi dR \quad (A27)$$

K₁ gebied met $i > \frac{1}{2}h$ en $z > 2i-h$

$$\varepsilon_z(z) \sim I + II + IIIa + IVc =$$

$$= \frac{1}{2}z(i-z) + \int_{\text{bgcos}(\frac{2z}{i}-1)}^{\text{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left| \frac{z}{1+\cos\phi} \frac{i-z}{1-\cos\phi} d\phi \right.$$

$$+ \int_{\text{bgcos}(\frac{2z}{i}-1)}^{\text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left| \frac{h-z}{1-\cos\phi} \frac{i-z}{1-\cos\phi} d\phi \right.$$

$$+ \int_{\text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}}^{\pi} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left| \frac{z-i}{\cos\phi} \frac{i-z}{1-\cos\phi} d\phi + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}}^{\pi} \sin \phi \left[\frac{1}{2} R^2 \{1 - \Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3} \Gamma_1 R^3 (1 + \cos \phi) \right] \left| \frac{h-z}{1 - \cos \phi} \frac{z-i}{\cos \phi} \right| d\phi = \\
& = \frac{1}{2} z(i-z) + \int_{\text{bgcos}(\frac{2z}{i} - 1)}^{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)} \left[\frac{\frac{1}{2} z^2 \{1 + \Gamma_1(i-z)\} \sin \phi}{(1 + \cos \phi)^2} - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 z^3 (1 - \cos \phi) \sin \phi}{(1 + \cos \phi)^3} + \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{1}{2} (i-z)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(i-z)\} \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} \right] d\phi + \\
& + \int_{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)}^{\text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}} \left[\frac{\frac{1}{2} (h-z)^2 \{1 + \Gamma_1(i-z)\} \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 (h-z)^3 \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} + \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{1}{2} (i-z)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(i-z)\} \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} \right] d\phi + \\
& + \int_{\text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}}^{\pi} \left[\frac{\frac{1}{2} (z-i)^2 \{1 + \Gamma_1(i-z)\} \sin \phi}{\cos^2 \phi} - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 (z-i)^3 (1 - \cos \phi) \sin \phi}{\cos^3 \phi} + \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{1}{2} (i-z)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(i-z)\} \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} \right] d\phi + \\
& + \int_{\text{bgcos} \frac{z-i}{h-i}}^{\pi} \left[\frac{\frac{1}{2} (h-z)^2 \{1 + \Gamma_1(z-i)\} \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 (h-z)^3 (1 + \cos \phi) \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^3} + \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{1}{2} (z-i)^2 \{1 + \Gamma_1(z-i)\} \sin \phi}{\cos^2 \phi} + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 (z-i)^3 (1 + \cos \phi) \sin \phi}{\cos^3 \phi} \right] d\phi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}z(1-z) + \left[\frac{\frac{1}{2}z^2 \{1 + \Gamma_1(1-z)\}}{1 + \cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1 z^3 \cos\phi}{(1 + \cos\phi)^2} + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)}^{\text{bgcos}(\frac{2z}{1} - 1)} + \\
&\quad + \left[\frac{-\frac{1}{2}(h-z)^2 \{1 + \Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1(h-z)^3}{1 - \cos\phi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos}(\frac{2z}{h} - 1)}^{\text{bgcos} \frac{z-1}{h-1}} + \\
&\quad + \left[\frac{\frac{1}{2}(z-1)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{\cos\phi} - \frac{\frac{1}{6}\Gamma_1(z-1)^3}{\cos^2\phi} + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{z-1}{h-1}}^{\pi} + \\
&\quad + \left[\frac{-\frac{1}{2}(h-z)^2 \{1 + \Gamma_1(z-1)\}}{1 - \cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1(h-z)^3 \cos\phi}{(1 - \cos\phi)^2} - \frac{\frac{1}{2}(z-1)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(z-1)\}}{\cos\phi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{6}\Gamma_1(z-1)^3}{\cos^2\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{z-1}{h-1}}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2}z(1-z) + \frac{1}{4}zh \{1 + \Gamma_1(1-z)\} - \frac{1}{4}zi \{1 + \Gamma_1(1-z)\} + \frac{1}{12}\Gamma_1 zh^2(\frac{2z}{h} - 1) - \frac{1}{12}\Gamma_1 zi^2(\frac{2z}{1} - 1) \\
&\quad - \frac{1}{4}i(1-z) \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\} - \frac{1}{4}\Gamma_1(h-z)(h-1)(1-z) + \frac{1}{3}\Gamma_1(h-z)^2(h-1) + \frac{1}{4}h(h-z) \{1 + \Gamma_1(1-z)\} \\
&\quad - \frac{1}{6}\Gamma_1 h(h-z)^2 - \frac{1}{6}\Gamma_1(1-z)^3 + \frac{1}{4}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\} + \frac{1}{6}\Gamma_1(h-1)(1-z)^2 - \frac{1}{4}(h-z)^2 \{1 + \Gamma_1(z-1)\} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Gamma_1(h-z)^3 - \frac{1}{6}\Gamma_1(1-z)^3 + \frac{1}{4}\Gamma_1(h-z)(h-1)(z-1) - \frac{1}{3}\Gamma_1(h-z)(h-1)(z-1) + \frac{1}{6}\Gamma_1(h-1)(1-z)^2 = \\
&= \frac{1}{2}z(h-z) + \Gamma_1 \{ (h-2i)^3 + z(z-3i)^2 + 3zh(z-2i) \}.
\end{aligned}$$

Bijzondere situaties:

1. $z=0$ kan slechts bij $i = \frac{1}{2}h$ zoals uit de voorwaarden voor dit K_1 -gebied blijkt. Dan volgt $\varepsilon_z(0) = 0$.

2. Als $z = i = h$ volgt eveneens $\varepsilon_z(h) = 0$.

K_2 -gebied met $i > \frac{1}{2}h$ en $z < 2i-h$

$$\varepsilon_z(z) \sim I + II + IIIa + IVa =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}z(i-z) + \int \frac{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)}{bg\cos(\frac{2z}{i}-1)} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2\{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left| \frac{\frac{z}{1+\cos\phi}}{\frac{i-z}{1-\cos\phi}} \right| d\phi + \\
 &\quad + \int \frac{\pi}{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2\{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left| \frac{\frac{h-z}{1-\cos\phi}}{\frac{i-z}{1-\cos\phi}} \right| d\phi = \\
 &= \frac{1}{2}z(i-z) + \int \frac{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)}{bg\cos(\frac{2z}{i}-1)} \left[\frac{\frac{1}{2}z^2\{1+\Gamma_1(i-z)\}\sin\phi}{(1+\cos\phi)^2} - \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1 z^3(1-\cos\phi)\sin\phi}{(1+\cos\phi)^3} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{2}(i-z)^2\{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(i-z)\}\sin\phi}{(1-\cos\phi)^2} \right] d\phi + \\
 &\quad + \int \frac{\pi}{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)} \left[\frac{\frac{1}{2}(h-z)^2\{1+\Gamma_1(i-z)\}\sin\phi}{(1-\cos\phi)^2} - \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1(h-z)^3\sin\phi}{(1-\cos\phi)^2} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{2}(i-z)^2\{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(i-z)\}\sin\phi}{(1-\cos\phi)^2} \right] d\phi = \\
 &= \frac{1}{2}z(i-z) + \left[\frac{\frac{1}{2}z^2\{1+\Gamma_1(i-z)\}}{1+\cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1 z^3 \cos\phi}{(1+\cos\phi)^2} + \frac{\frac{1}{2}(i-z)^2\{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(i-z)\}}{1-\cos\phi} \right] \left| \frac{bg\cos(\frac{2z}{h}-1)}{bg\cos(\frac{2z}{i}-1)} \right| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{-\frac{1}{2}(h-z)^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\}}{1-\cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1(h-z)^3}{1-\cos\phi} + \frac{\frac{1}{2}(i-z)^2 \{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(i-z)\}}{1-\cos\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)}^{\pi} = \\
& = \frac{1}{2}z(i-z) + \frac{1}{2}zh \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{2}zi \{1+\Gamma_1(i-z)\} + \frac{1}{12}\Gamma_1 zh(2z-h) - \frac{1}{12}\Gamma_1 zi(2z-i) \\
& - \frac{1}{6}i(i-z) \{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{6}(h-z)^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} + \frac{1}{6}\Gamma_1(h-z)^3 + \frac{1}{6}h(h-z) \{1+\Gamma_1(i-z)\} \\
& - \frac{1}{6}\Gamma_1 h(h-z)^2 + \frac{1}{6}(i-z)^2 \{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(i-z)\} = \\
& = \frac{1}{2}z(h-z) - \frac{1}{6}\Gamma_1 z(h-i)^2
\end{aligned}$$

Bijzondere situaties:

1. $z = 0$ leidt tot $\varepsilon_z(0) = 0$
2. als $i = h$ volgt $\varepsilon_z(z) = \frac{1}{2}z(h-z)$
3. als $z = 2i-h$ volgt $\varepsilon_z(z) = (2i-h)(h-i) + \Gamma_1(\frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{2}i^3 + \frac{5}{4}i^2h - ih^2)$, welke uitdrukking eveneens gevonden wordt voor K_1 met $z = 2i-h$.

K_3 -gebied met $i < \frac{1}{2}h$

$$\varepsilon_z(z) \sim I + II + IIIb + IVb =$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2}z(i-z) + \int_{\text{bgcos}(\frac{2z}{i}-1)}^{\text{bgcos}(\frac{z}{i}-1)} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left[\frac{z}{1+\cos\phi} - \frac{i-z}{1-\cos\phi} \right] d\phi + \\
& + \int_{\text{bgcos}(\frac{z}{i}-1)}^{\text{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left[\frac{z-i}{\cos\phi} - \frac{i-z}{1-\cos\phi} \right] d\phi + \\
& + \int_{\text{bgcos}(\frac{z}{i}-1)}^{\text{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(z-i)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1+\cos\phi) \right] \left[\frac{z}{1+\cos\phi} - \frac{z-i}{\cos\phi} \right] d\phi + \\
& + \int_{\text{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)}^{\pi} \sin\phi \left[\frac{1}{2}R^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{3}\Gamma_1 R^3(1-\cos\phi) \right] \left[\frac{z-i}{\cos\phi} - \frac{i-z}{1-\cos\phi} \right] d\phi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)}^{\pi} \sin \phi \left[\frac{1}{2} R^2 \{1 + \Gamma_1(z-1)\} - \frac{1}{3} \Gamma_1 R^3 (1 + \cos \phi) \right] \left| \frac{h-z}{1-\cos \phi} \right|_{\frac{z-1}{\cos \phi}} d\phi = \\
& = \frac{1}{2} z(1-z) + \left[\frac{\frac{1}{2} z^2 \{1 + \Gamma_1(1-z)\}}{1 + \cos \phi} + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 z^3 \cos \phi}{(1 + \cos \phi)^2} + \frac{\frac{1}{2} (1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos \phi} \right] \Big|_{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)}^{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{1}-1)} + \\
& + \left[\frac{\frac{1}{2} (z-1)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z)\}}{\cos \phi} - \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1 (z-1)^3}{\cos^2 \phi} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\frac{1}{2} (1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos \phi} \right] \Big|_{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{1}-1)}^{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)} + \\
& + \left[\frac{\frac{1}{2} z^2 \{1 + \Gamma_1(z-1)\}}{1 + \cos \phi} - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 z^3}{1 + \cos \phi} - \frac{\frac{1}{2} (z-1)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(z-1)\}}{\cos \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1 (z-1)^3}{\cos^2 \phi} \right] \Big|_{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{1}-1)}^{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)} + \\
& + \left[\frac{\frac{1}{2} (z-1)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z)\}}{\cos \phi} - \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1 (z-1)^3}{\cos^2 \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{2} (1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos \phi} \right] \Big|_{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)}^{\pi} + \\
& + \left[\frac{-\frac{1}{2} (h-z)^2 \{1 + \Gamma_1(z-1)\}}{1 - \cos \phi} + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1 (h-z)^3 \cos \phi}{(1 - \cos \phi)^2} - \frac{\frac{1}{2} (z-1)^2 \{1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(z-1)\}}{\cos \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1 (z-1)^3}{\cos^2 \phi} \right] \Big|_{\operatorname{bgcos}(\frac{2z}{h}-1)}^{\pi} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}z(1-z) + \frac{1}{2}\Gamma_1 z(1-z) + \frac{1}{3}\Gamma_1 z(1-z) - \frac{1}{4}z\{1+\Gamma_1(1-z)\} - \frac{1}{12}\Gamma_1 z(2z-1) \\
&\quad - \frac{1}{4}i(1-z)\{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\} + \frac{1}{6}\Gamma_1 i(z-1)^2 + \frac{1}{4}zh\{1+\Gamma_1(z-1)\} - \frac{1}{6}\Gamma_1 z^2 h - \frac{1}{2}\Gamma_1 z(1-z) \\
&\quad + \frac{1}{3}\Gamma_1 z^2 i + \frac{1}{6}\Gamma_1 i(z-1)^2 + \frac{1}{6}\Gamma_1 (z-1)^3 + \frac{1}{4}(1-z)^2\{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\} - \frac{1}{4}(h-z)^2\{1+\Gamma_1(z-1)\} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Gamma_1 (h-z)^3 + \frac{1}{6}\Gamma_1 (z-1)^3 + \frac{1}{4}h(h-z)\{1+\Gamma_1(z-1)\} - \frac{1}{12}\Gamma_1 (h-z)h(2z-h) = \\
&= \frac{1}{2}z(h-z) + \frac{1}{12}\Gamma_1 z\{(z-3i)^2 + 3h(z-2i)\}
\end{aligned}$$

Bijzondere situaties:

1. $z = 0$ leidt tot $\varepsilon = 0$

2. $i = \frac{1}{2}h$ leidt tot $\varepsilon_z(z) = \frac{1}{2}z(h-z) + \Gamma_1(\frac{1}{12}z^3 - \frac{1}{16}zh^2)$ welke uitdrukking eveneens gevonden wordt voor K_1 -gebied met $i = \frac{1}{2}h$.

L-gebied

$$\varepsilon_z(z) \sim I + II + V + VI$$

Nu is weer $I + II = \frac{1}{2}z(1-z)$.

Voor V zijn er twee uitdrukkingen: voor $i > \beta$ en voor $i < \beta$.

Voor VI zijn er eveneens twee uitdrukkingen: voor $z < i-\beta$ en voor $z > i-\beta$.

Van de vier mogelijke combinaties van V en VI blijft echter alleen over $i > \beta$ met $z < i-\beta$, de overige combinaties leveren een strijdig systeem met de voorwaarden voor een L-gebied.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(1-z) + \frac{\int_{\frac{2z-i-\beta}{1+\beta}}^{\frac{2z-i-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{\cos\phi} d\phi}{\int_{\frac{2z-i-\beta}{1+\beta}}^{\frac{2z-i-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{\cos\phi} d\phi} \frac{z}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR + \\
+ \int_{\frac{2z-i-\beta}{1+\beta}}^{\pi} \frac{1}{\cos\phi} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-i+z-R \cos\phi)\} d\phi dR =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}z(1-z) + \left[\frac{\frac{1}{2}z^2 \{1 + \Gamma_1(1-z)\}}{1 + \cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1 z^3 \cos\phi}{(1 + \cos\phi)^2} + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{2z-1-\beta}{1+\beta}}^{\text{bgcos}(\frac{2z}{1} - 1)} + \\
&\quad + \left[\frac{-\frac{1}{2}z(1-z+\beta)^2 \{1 + \Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1(1-z+\beta)^3}{1 - \cos\phi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1 - \cos\phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{2z-1-\beta}{1+\beta}}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2}z(1-z) + \frac{1}{4}z(1+\beta) \{1 + \Gamma_1(1-z)\} + \frac{1}{12}\Gamma_1 z(1+\beta)(2z-1-\beta) - \frac{1}{4}zi \{1 + \Gamma_1(1-z)\} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Gamma_1 zi(2z-1) - \frac{1}{4}i(1-z) \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\} - \frac{1}{4}(1-z+\beta)^2 \{1 + \Gamma_1(1-z)\} + \frac{1}{4}(1-z)^2 \{1 + \frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\} \\
&\quad + \frac{1}{6}\Gamma_1(1-z+\beta)^3 + \frac{1}{4}(1+\beta)(1-z+\beta) \{1 + \Gamma_1(1-z)\} - \frac{1}{6}\Gamma_1(1-z+\beta)^2(1+\beta) = \\
&= \frac{1}{2}z(1-z) + \frac{1}{4}\beta z
\end{aligned}$$

Bijzondere situaties:

1. $z = 0$ leidt tot $\varepsilon_z(0) = 0$
2. als $\Gamma_1 \rightarrow \infty$ (dus $\beta \rightarrow 0$) volgt $\varepsilon_z(z) = \frac{1}{2}z(1-z)$.

M-gebied

$$\varepsilon_z(z) \sim \text{I} + \text{II} + \text{V} + \text{VII} + \text{VIII} + \text{IX}.$$

Voor V zijn er twee uitdrukkingen, met $i > \beta$ en met $i < \beta$.

Voor IX zijn er drie uitdrukkingen, voor $z < 2i-h$, en voor $z > 2i-h$ welke laatste met $i-h+\beta < 0$ en $i-h+\beta > 0$.

Voor VII en VIII is er maar één uitdrukking.

Slechts de combinatie met $i > \beta$ én $z > 2i-h$ én $h-i > \beta$ is mogelijk, de overige combinaties leveren een strijdige set voorwaarden met de voorwaarden voor een M-gebied.

$$\begin{aligned}
\epsilon_z(z) \sim & \frac{1}{2}z(1-z) + \int \frac{b\gamma\cos(\frac{2z-1-\beta}{1+\beta})}{b\gamma\cos(\frac{2z}{1}-1)} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-1+z-R\cos\phi)\} d\phi dR + \\
& + \int \frac{b\gamma\cos\Gamma_1(z-1)}{b\gamma\cos\frac{2z-1-\beta}{1+\beta}} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int \frac{1-z+\beta}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-1+z-R\cos\phi)\} d\phi dR + \\
& + \int \frac{b\gamma\cos(\frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta})}{b\gamma\cos\Gamma_1(z-1)} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z-1}{\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-1+z-R\cos\phi)\} d\phi dR + \\
& + \int \frac{b\gamma\cos(\frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta})}{b\gamma\cos\Gamma_1(z-1)} \frac{z-1}{\cos\phi} \int \frac{z-1+\beta}{1+\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R+1-z+R\cos\phi)\} d\phi dR + \\
& + \int \frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta} \frac{1-z}{1-\cos\phi} \int \frac{z-1}{\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R-1+z-R\cos\phi)\} d\phi dR + \\
& + \int \frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta} \frac{z-1}{\cos\phi} \int \frac{h-z}{1-\cos\phi} R \sin\phi \{1-\Gamma_1(R+1-z+R\cos\phi)\} d\phi dR = \\
= & \frac{1}{2}z(1-z) + \left[\frac{\frac{1}{2}z^2 \{1+\Gamma_1(1-z)\}}{1+\cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1 z^3 \cos\phi}{(1+\cos\phi)^2} + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1-\cos\phi} \right] \bigg|_{b\gamma\cos\frac{2z-1-\beta}{1+\beta}}^{b\gamma\cos(\frac{2z}{1}-1)} + \\
& + \left[\frac{-\frac{1}{2}(1-z+\beta)^2 \{1+\Gamma_1(1-z)\}}{1-\cos\phi} + \frac{\frac{1}{3}\Gamma_1(1-z+\beta)^3}{1-\cos\phi} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \{1+\frac{1}{3}\Gamma_1(1-z)\}}{1-\cos\phi} \right] \bigg|_{b\gamma\cos\frac{2z-1-\beta}{1+\beta}}^{b\gamma\cos\Gamma_1(z-1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\frac{1}{2}(z-1)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z) \right\}}{\cos \phi} - \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1(z-1)^3}{\cos^2 \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z) \right\}}{1 - \cos \phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}}^{\text{bgcos} \Gamma_1(z-1)} + \\
& + \left[\frac{\frac{1}{2}(z-1+\beta)^2 \{ 1 + \Gamma_1(z-1) \}}{1 + \cos \phi} - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1(z-1+\beta)^3}{1 + \cos \phi} - \frac{\frac{1}{2}(z-1)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(z-1) \right\}}{\cos \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1(z-1)^3}{\cos^2 \phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \Gamma_1(z-1)}^{\text{bgcos} \frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}} + \\
& + \left[\frac{\frac{1}{2}(z-1)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z) \right\}}{\cos \phi} - \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1(z-1)^3}{\cos^2 \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(1-z)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z) \right\}}{1 - \cos \phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}}^{\pi} + \\
& + \left[\frac{-\frac{1}{2}(h-z)^2 \{ 1 + \Gamma_1(z-1) \}}{1 - \cos \phi} + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1(h-z)^3 \cos \phi}{(1 - \cos \phi)^2} - \frac{\frac{1}{2}(z-1)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(z-1) \right\}}{\cos \phi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{1}{6} \Gamma_1(z-1)^3}{\cos^2 \phi} \right] \Big|_{\text{bgcos} \frac{2z-1-h+\beta}{h-1+\beta}}^{\pi} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} z(1-z) + \frac{1}{2} z(1+\beta) \{ 1 + \Gamma_1(1-z) \} + \frac{1}{12} \Gamma_1 z(1+\beta)(2z-1+\beta) - \frac{1}{2} z i \{ 1 + \Gamma_1(1-z) \}$$

$$- \frac{1}{12} \Gamma_1 z i (2z-1) - \frac{1}{2} i(1-z) \left\{ 1 + \frac{1}{3} \Gamma_1(1-z) \right\} - \frac{1}{2} (1-z+\beta)^2 + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1(1-z+\beta)^3}{1 - \Gamma_1(z-1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}(i-z+\beta)(i+\beta) \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{6} \Gamma_1(i-z+\beta)^2(i+\beta) - \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1(z-1)^3(h-1+\beta)}{2z-1-h+\beta} + \\
& + \frac{1}{3}(z-1)^2 + \frac{1}{4}(z-1+\beta)(h-1+\beta) \{1+\Gamma_1(z-1)\} - \frac{1}{6} \Gamma_1(z-1+\beta)^2(h-1+\beta) - \frac{1}{4}(z-1+\beta)^2 \\
& + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1(z-1+\beta)^3}{1+\Gamma_1(z-1)} + \frac{1}{6} \Gamma_1(z-1)^3 + \frac{1}{4}(i-z)^2 \{1+\frac{1}{3} \Gamma_1(i-z)\} + \frac{\frac{1}{3} \Gamma_1(z-1)^3(h-1+\beta)}{2z-1-h+\beta} - \\
& \frac{1}{4}(h-z)^2 \{1+\Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{12} \Gamma_1(h-z)^3 + \frac{1}{4}(i-z)^2 \{1+\frac{1}{3} \Gamma_1(i-z)\} - \frac{1}{12} \Gamma_1(h-z)(h-1+\beta)(2z-1-h+\beta) = \\
& = \frac{1}{2}(i-z)(i-h+z) + \Gamma_1(i-z)^2 \left(\frac{1}{12} z + \frac{1}{4} h - \frac{1}{3} i \right) + \frac{1}{4} \beta h + \frac{1}{6} \beta^2 .
\end{aligned}$$

Bijzondere situaties:

1. $z = 0$ kan alleen bij $i = \frac{1}{\Gamma_1}$ en leidt tot $\varepsilon_z(0) = 0$
2. $z = i = h$ kan alleen bij $\Gamma_1^i \rightarrow \infty$ en leidt tot $\varepsilon_z(h) = 0$
3. Als $z = i$ dan moet $\varepsilon_z(i)$ gelijk zijn bij invullen van i of van $h-i$. Dit klopt in bovenstaande uitdrukking.

Samenvatting berekening $\varepsilon_z(z)$ in een tweelagensysteem

De verticale coördinaten van bodem, grensvlak en oppervlak in een tweelagensysteem worden voorgesteld door 0, i en h .

In de onderstaande formules is steeds verondersteld dat z zich in de onderste laag bevindt. Voor een punt in de bovenste laag kunnen onderstaande formules eveneens gebruikt worden, met substitutie van $i \rightarrow h-i$ en $z \rightarrow h-z$.

De formules voor $\varepsilon_z(z)$ luiden dan:

K₁-gebied : $i > \frac{1}{2}h$ én $h-i < \frac{1}{\Gamma_1}$ én $z > 2i-h$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) + \Gamma_1 \{ (h-2i)^3 + z(z-3i)^2 + 3zh(z-2i) \}$$

K₂-gebied : $i > \frac{1}{2}h$ én $h-i < \frac{1}{\Gamma_1}$ en $z < 2i-h$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) - \frac{1}{2}\Gamma_1 z(h-i)^2$$

K₃-gebied : $i < \frac{1}{2}h$ én $i < \frac{1}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(h-z) + \frac{1}{12}\Gamma_1 z \{ (z-3i)^2 + 3h(z-2i) \}$$

L-gebied : als $i > \frac{1}{2}h$ dan moet $h-i > \frac{1}{\Gamma_1}$, $i > \frac{1}{\Gamma_1}$ en $z < i - \frac{1}{\Gamma_1}$
als $i < \frac{1}{2}h$ dan moet $i > \frac{1}{\Gamma_1}$ en $z < i - \frac{1}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}z(i-z) + \frac{1}{2}\frac{z}{\Gamma_1}$$

M-gebied : $2zi-zh - i^2 + \frac{1}{\Gamma_1^2} < 0$, $h-i > \frac{1}{\Gamma_1}$, $i > \frac{1}{\Gamma_1}$, $z > i - \frac{1}{\Gamma_1}$, $z > 2i-h$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2}(i-z)(i-h+z) + \Gamma_1(i-z)^2 \left(\frac{1}{12}z + \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}i \right) + \frac{h}{4\Gamma_1} - \frac{1}{6\Gamma_1^2}$$

APPENDIX B $\varepsilon_z(z)$ voor stroming met lineair dichtheidsprofiel

Voor $\varepsilon_z(z)$ in een stroming met een lineair vertikaal dichtheidsprofiel (dus met $\partial\rho/\partial z = \text{konstant}$ over de diepte) kunnen analytische oplossingen worden gevonden, zoals in deze appendix zal worden afgeleid.

Voor een lineair dichtheidsprofiel geldt de uitdrukking voor $\varepsilon_z(z)$ zoals in vgl. (6.3) gegeven:

$$\varepsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \left\{ 1 - \frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} R^2 \left| \frac{\partial\rho}{\partial z} \right| \right\} d\phi dR \quad (6.3)$$

Substitutie van $\Gamma_1 = \frac{\gamma_1 g}{2 u_* \rho} h \left| \frac{\partial\rho}{\partial z} \right|$ (dimensie m^{-1} ; Γ_1 heeft hier dus een overeen-

komstige definitie als in appendix A voor een tweelagenstroming, gedefinieerd in vgl. (5.7)) leidt tot

$$\varepsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{R=0}^{R_m(z,\phi)} R \sin\phi \left\{ 1 - \frac{\Gamma_1 R^2}{h} \right\} d\phi dR \quad (B1)$$

Op analoge wijze als in appendix A kan bij de integratie over R door diverse oorzaken een maximale waarde $R_m(z, \phi)$ bereikt worden:

- bereiken van de bodem:

$$R_{mb} = \frac{z}{1 + \cos\phi} \quad (B2)$$

- bereiken van het oppervlak

$$R_{ms} = \frac{h-z}{1 - \cos\phi} \quad (B3)$$

- bereiken van $1 - \Gamma_1 R^2 = 0$

$$R_{m\Gamma} = \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} \quad (B4)$$

Naar gelang bij een bepaalde waarde van z en ϕ toenemend van 0 tot π de diverse maximale waarden $R_m(z, \phi)$ tot stand komen, onderscheidt men vier gebieden:

K-gebied grenzen (b) en (s) respektievelijk

L-gebied grenzen (b) en (Γ) respektievelijk

M-gebied grenzen (b), (Γ) en (s) respektievelijk

N-gebied grens (Γ) uitsluitend.

(N.B. Eveneens kunnen de grenzen (Γ) en (s) respektievelijk optreden, maar dit is in feite de symmetrische situatie van L, met (b) en (Γ) respektievelijk. Bij (Γ) en (s) vindt men de oplossing door in de oplossing van het L-gebied voor z te substitueren h-z.)

In het K-gebied vindt de overgang tussen het bereiken van R_m door (b) en (s) plaats bij de hoek ϕ_{bs} , die voldoet aan:

$$\frac{z}{1+\cos\phi_{bs}} = \frac{h-z}{1-\cos\phi_{bs}}$$

$$\text{zodat } \phi_{bs} = \text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right) \quad (\text{B5})$$

In het L- en M-gebied wordt de hoek $\phi_{b\Gamma}$ gevonden door:

$$\frac{z}{1+\cos\phi_{b\Gamma}} = \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}}$$

zodat

$$\phi_{b\Gamma} = \text{bgcos}(z\sqrt{\Gamma_1/h} - 1) \quad (\text{B6})$$

En in het M-gebied volgt $\phi_{\Gamma s}$ uit

$$\frac{h-z}{1-\cos\phi_{\Gamma s}} = \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}}$$

zodat

$$\phi_{\Gamma s} = \text{bgcos}\{(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h} + 1\} \quad (\text{B7})$$

Met substitutie van de diverse waarden van $R_m(z, \phi)$ kan vergelijking (B1) dan in de diverse gebieden K, L, M en N worden geschreven als:

K-gebiet

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z(z) &\sim \int_{\phi=0}^{\pi} \text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right) \int_{R=0}^{\frac{z}{1+\cos\phi}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR + \\
&+ \int_{\text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right)}^{\pi} \int_0^{\frac{h-z}{1-\cos\phi}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR = \\
&= \int_0^{\text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right)} \left\{ \frac{\frac{1}{2} z^2 \sin\phi}{(1-\cos\phi)^2} - \frac{\frac{1}{4} \Gamma_1 \frac{z^4}{h} \sin\phi}{(1+\cos\phi)^4} \right\} d\phi + \\
&+ \int_{\text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right)}^{\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{2} (h-z)^2 \sin\phi}{(1-\cos\phi)^2} - \frac{\frac{1}{4} \Gamma_1 \frac{(h-z)^4}{h} \sin\phi}{(1-\cos\phi)^4} \right\} d\phi = \\
&= \left[\frac{\frac{1}{2} z^2}{1+\cos\phi} - \frac{\frac{1}{12} \Gamma_1 \frac{z^4}{h}}{(1+\cos\phi)^3} \right]_0^{\text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right)} + \\
&+ \left[\frac{-\frac{1}{2} (h-z)^2}{1-\cos\phi} + \frac{\frac{1}{12} \Gamma_1 \frac{(h-z)^4}{h}}{(1-\cos\phi)^3} \right]_{\text{bgcos}\left(\frac{2z}{h} - 1\right)}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{4} zh - \frac{1}{96} \Gamma_1 zh^2 - \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{z^4}{h} - \frac{1}{4} (h-z)^2 + \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{(h-z)^4}{h} + \frac{1}{4} h(h-z) - \frac{1}{96} \Gamma_1 (h-z)h^2 = \\
&= \frac{1}{4} z(h-z) - \frac{1}{48} \Gamma_1 \frac{z}{h} (h-z)(2h^2 - hz + z^2)
\end{aligned}$$

L-gebiet

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z(z) &\sim \int_0^{bg\cos(z\sqrt{\Gamma_1/h-1})} \int_0^{\frac{z}{1+\cos\phi}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR + \\
&+ \int_{bg\cos(2\sqrt{\Gamma_1/h-1})}^{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR = \\
&= \left[\frac{\frac{1}{2}z^2}{1+\cos\phi} - \frac{\frac{1}{12}\Gamma_1 \frac{z^4}{h}}{(1+\cos\phi)^3} \right] \bigg|_0^{bg\cos(z\sqrt{\Gamma_1/h-1})} + \\
&\left[-\frac{h}{2\Gamma_1} \cos\phi + \frac{h}{4\Gamma_1} \cos\phi \right] \bigg|_{bg\cos(2\sqrt{\Gamma_1/h-1})}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2}z\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{12}z\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{96}\Gamma_1 \frac{z^4}{h} + \frac{h}{4\Gamma_1} + \frac{h}{4\Gamma_1} (z\sqrt{\Gamma_1/h-1}) = \\
&= z\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{96}\Gamma_1 \frac{z^3}{h}\right)
\end{aligned}$$

M-gebiet

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z(z) &\sim \int_0^{b\cos(2\sqrt{\Gamma_1/h-1})} \int_0^{\frac{z}{1+\cos\phi}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR + \\
&+ \frac{b\cos\{(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h+1}\}}{b\cos(2\sqrt{\Gamma_1/h-1})} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR + \\
&+ b\cos\{(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h+1}\} \int_0^\pi \frac{h-z}{1-\cos\phi} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR = \\
&= \left[\frac{\frac{1}{2}z^2}{1+\cos\phi} - \frac{\frac{1}{12}\Gamma_1 \frac{z^4}{h}}{(1+\cos\phi)^3} \right] \bigg|_0^{b\cos(2\sqrt{\Gamma_1/h-1})} + \left[-\frac{1}{4}\cos\phi \right] \bigg|_{b\cos(2\sqrt{\Gamma_1/h-1})}^{b\cos\{(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h+1}\}} + \\
&+ \left[\frac{-\frac{1}{2}(h-z)^2}{1-\cos\phi} + \frac{\frac{1}{12}\Gamma_1 \frac{(h-z)^4}{h}}{(1-\cos\phi)^3} \right] \bigg|_0^\pi b\cos\{(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h+1}\} = \\
&= \frac{1}{2}z\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{12}z\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{96}\Gamma_1 \frac{z^4}{h} - \frac{h}{4\Gamma_1} (z-h\sqrt{\Gamma_1/h}) + \\
&- \frac{1}{4}(h-z)^2 + \frac{1}{96}\Gamma_1 \frac{(h-z)^4}{h} + \frac{1}{2}(h-z)\sqrt{\Gamma_1/h} - \frac{1}{12}(h-z)\sqrt{\Gamma_1/h} = \\
&= \frac{5}{12}h\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} + z^2\left(\frac{1}{96}\Gamma_1 \frac{z^2}{h} - \frac{1}{4}\right) + (h-z)^2\left\{\frac{1}{96}\Gamma_1 \frac{(h-z)^2}{h} - \frac{1}{4}\right\} - \frac{h}{4\Gamma_1} (2-h\sqrt{\Gamma_1/h})
\end{aligned}$$

N-gebiet

$$\varepsilon_z(z) \sim \int_{\phi=0}^\pi \int_{R=0}^{\sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}}} \sin\phi \left(R - \Gamma_1 \frac{R^3}{h}\right) d\phi dR = \left[-\frac{h}{4\Gamma_1} \cos\phi \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \frac{h}{\Gamma_1}$$

Het K-gebied zal optreden als een wervel voor kan komen die van bodem tot oppervlak reikt; deze wervel met $R = \frac{1}{2}h$ moet dan dus kleiner zijn dan de wervel die de integrand $1 - \Gamma_1 \frac{R^2}{h}$ negatief zou maken. Dus

$$\text{K-gebied: } h < \frac{4}{\Gamma_1}$$

Het L-gebied treedt op als de hoek $\phi_{b\Gamma}$ bestaat, dus als $z\sqrt{\Gamma_1/h} - 1 > -1$ en $z\sqrt{\Gamma_1/h} - 1 < 1$, terwijl tevens ϕ_{Γ_s} niet mag bestaan, dus $(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h} + 1 < -1$ of $(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h} + 1 > 1$. Dan volgt

$$\text{L-gebied: } \frac{z^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}, \quad \frac{(h-z)^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1} \quad \text{en } h > \frac{4}{\Gamma_1}$$

Het M-gebied treedt op als $\phi_{b\Gamma}$ en ϕ_{Γ_s} bestaan, dus als $z\sqrt{\Gamma_1/h} - 1 > -1$ en $z\sqrt{\Gamma_1/h} - 1 < 1$ terwijl tevens $(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h} + 1 > -1$ en $(z-h)\sqrt{\Gamma_1/h} + 1 < 1$.

$$\text{M-gebied: } \frac{z^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}, \quad \frac{(h-z)^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1} \quad \text{en } h > \frac{4}{\Gamma_1}$$

Als $\frac{z^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$, $\frac{(h-z)^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ en $h > \frac{4}{\Gamma_1}$ (spiegelbeeld van L-gebied), dan moet de

formule voor het L-gebied worden toegepast met substitutie van $h-z$ voor z en z voor $h-z$.

Voor de overige gevallen geldt het N-gebied: $\frac{z^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$, $\frac{(h-z)^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$ waarbij automatisch $h > \frac{4}{\Gamma_1}$.

Samenvatting

$\varepsilon_z(z)$ voor stroming met lineair dichtheidsprofiel is:

K-gebied, als $h < \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2} z(h-z) - \frac{1}{48} \Gamma_1 \frac{z}{h} (h-z)(2h^2 - hz + z^2)$$

L-gebied als $\frac{z^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$, $\frac{(h-z)^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$ en $h > \frac{4}{\Gamma_1}$, dan is

$$\varepsilon_z(z) \sim z \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{2} z + \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{z^3}{h} \right)$$

en als $\frac{z^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$, $\frac{(h-z)^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ en $h > \frac{4}{\Gamma_1}$, dan is

$$\varepsilon_z(z) \sim (h-z) \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} - \frac{1}{2} (h-z) + \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{(h-z)^3}{h} \right\}$$

M-gebied als $\frac{z^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$, $\frac{(h-z)^2}{h} < \frac{4}{\Gamma_1}$ en $h > \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{5}{12} h \sqrt{\frac{h}{\Gamma_1}} + z^2 \left(\frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{z^2}{h} - \frac{1}{2} \right) + (h-z)^2 \left\{ \frac{1}{96} \Gamma_1 \frac{(h-z)^2}{h} - \frac{1}{2} \right\} - \frac{h}{4\Gamma_1} (2 - \sqrt{\Gamma_1 h})$$

N-gebied als $\frac{z^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$, $\frac{(h-z)^2}{h} > \frac{4}{\Gamma_1}$

$$\varepsilon_z(z) \sim \frac{1}{2} \frac{h}{\Gamma_1}$$

p.o. box 177

2600 mh delft

the netherlands