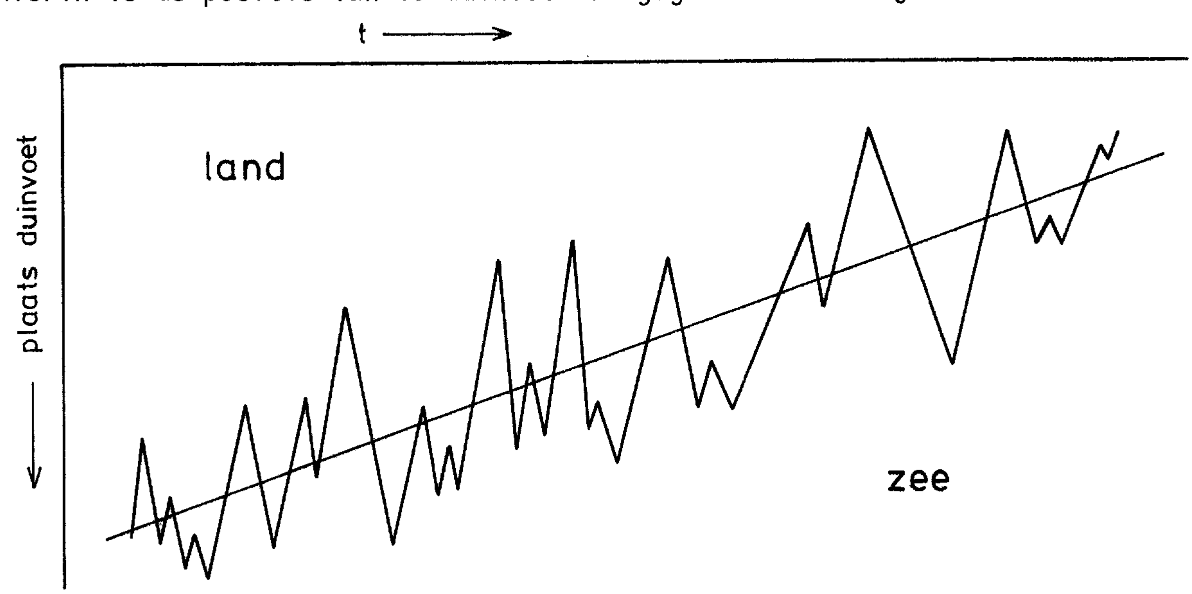
7-12-1979

Notitie S-79.027-3

Naar aanleiding van de discussie in werkgroep 5 op 30 november j.l. m.b.t. de probabilistische benadering van de veiligheid van een duinkust en eerdere discussies in het kader van de subgroep Richtlijn Zeeland het volgende.

Ik vraag mij af of het juist is om bij een sterk eroderende duinkust onderscheid te maken in enerzijds "geleidelijke teruggang" en anderzijds duinafslag door stormvloeden.
Een stormvloed is slechts een combinatie uit de hele verzameling combinaties van getij, golfhoogten, opwaaiing, windrichting etc.
Wordt het optreden van zo'n combinatie als een stochastisch proces gezien en als gevolg daarvan de optredende kustfluctuaties evenzo dan is in een geregistreerde tijdreeks van bv. de positie v.d. duinvoet of het zandvolume in een raai, statistisch gezien het effect van stormvloeden en dus ook van de superstormvloed impliciet aanwezig.
Daar komt bij dat als we al in staat zijn het verschijnsel duinafslag goed te beschrijven, we de geleidelijke teruggang m.i. wellicht nooit goed zullen kunnen beschrijven daar in de in de praktijk gemeten kustfluctuaties ook het effect van stormen met duinafslag aanwezig is en het mij niet mogelijk lijkt deze te scheiden.

Indien aangenomen mag worden dat de fluctuatie van de plaats van de duinvoet (zie bijlage 1) een stationair Gaussisch proces is, dan zijn er wellicht aardige dingen mogelijk: zie nl. de analogie met de statistische benadering van het verschijnsel windgolf/deining in het college b78 van Battjes. Onderstaand is e.e.a. nader aangegeven.
Beschouw b.v. onderstaande figuur:
Hierin is de positie van de duinvoet aangegeven in de tijd.



De plaats van de D.V. kan beschreven worden door de functie f(t). Het verloop van f(t) is grillig; toch is wel een trend aanwezig. Deze trend is te bepalen met een regressieanalyse. Het grillige verloop wordt benaderd door een rechte of gebogen lijn die een zo goed mogelijke schatting van het gemiddelde verloop geeft. Stel dat deze lijn gegeven is door a = a(t).

De ruis (residu) die overblijft rond de lijn a = a(t) beschouwen we als een stochastisch proces.
De momentane uitwijking t.o.v. a = a(t) noemen we $\underline{x}(t)$.
Er geldt dan: $f(t) = a(t) + \underline{x}(t)$.

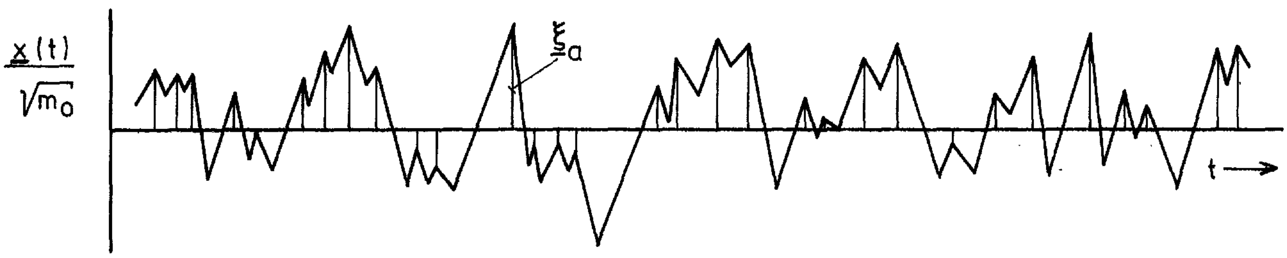
Wanneer we nu veronderstellen dat het proces $\underline{x}(t)$ stationair en Gaussisch is zijn de volgende beschouwingen mogelijk.

1. Beschouwing van de verdeling van de hoogten van de maxima $\underline{x}_a$ (in dit geval de maximale duinvoet teruggangen).
   Deze maxima zijn bepaald door de neerwaartse nuldoorgangen van
   $\frac{d\,\underline{x}(t)}{dt}$.

   In het vervolg beschouwen we het genormeerde proces $\{\underline{\xi}(t)\}$

   Het proces $\{\underline{x}(t)\}$ heeft als variantie $\sigma_x^2 = m_o$.

   Voor $\{\underline{\xi}(t)\}$ geldt p.d. $\{\underline{\xi}(t)\} = \frac{\underline{x}\,(t)}{\sqrt{m_o}}$



$\underline{\xi}_a$ is in het genormeerde proces de functiewaarde t.p.v. een maximum. N.B. $\underline{\xi}_a$ kan negatief zijn!

$\underline{\xi}_a$ heeft als kansdichtheidsfunctie: $f(\eta)$

d.w.z. $Pr[\ \eta < \underline{\xi}_a \leqslant \eta + d\eta\ ] = f(\eta)d\eta$

Door Rice is afgeleid:

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\eta^2}{2(1-\rho^2)}} + \rho\eta e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \int_{-\infty}^{\frac{\rho\eta}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \, dv \right]$$

$$\text{hierin is } \rho = \frac{m_2}{\sqrt{m_o\, m_4}} = \boxed{\frac{T_m}{T_o} = \frac{n_o}{n_m}} \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

T_m is het gem. tijdsinterval tussen maxima.
T_o is het gem. tijdsinterval tussen opwaartse nuldoorgangen.

M.b.v. T_m en T_o is dus ρ uit een registratie te schatten.
m_o, m_2, m_4 zijn resp. het o^e, 2^e en 4^e moment van de verdeling.

De bijbehorende overschrijdingskans $Q(\eta)$:

$$Q(\eta) \overset{p.d.}{=} Pr\left[\underline{\xi}_a > \eta \right]$$

$$Q(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\frac{\eta}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} \, dv + \rho . e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \int_{-\infty}^{\frac{\rho\eta}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \, dv \right]$$

Numerieke waarden van deze integralen zijn te bepalen m.b.v. tabellen voor de fouten integraal:

$$\text{erf}\,(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{o}^{u} e^{-v^2} \, dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{o}^{u\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \, dv$$

Uit een registratie is ρ te schatten door over een zekere periode T_m en T_o te bepalen.

Voor ρ=o volgt voor de verdeling van de hoogten van de maxima een Gaussische verdeling (normale verdeling).

Voor $\rho=1$ volgt de z.g. Rayleigh-verdeling.

Wordt bv. ρ(grof) geschat uit bijlage 1
(WWK2 - 79.v 205^c annex 2) dan volgt

$T_m = (2 + 3,5)/2 = 2,75$
$T_o = 3,5$

$$\rho = \frac{T_m}{T_o} = \frac{2,75}{3,5} = 0,8$$

Dit gaat dus in de richting van een Rayleigh-verdeling.

2. Beschouwing van de kans dat het hoogste maximum ($\underline{\xi}_{a\ max}$) van een realisatie van <u>eindige duur</u> de waarde η zal overschrijven, dus

$$Pr\left\{ \underline{\xi}_{a\ max} > \eta \right\}$$

Het verwachte aantal maxima $\underline{\xi}_a$ in een realisatie met gegeven duur D is:

$$N = D\, n_m \qquad (n_m = \frac{1}{T_m})$$

De genormeerde hoogten van de maxima zijn te beschouwen als aselecte trekkingen uit een populatie $\left\{ \underline{\xi}_a \right\}$

die verdeeld is volgens de door Rice (zie eerder) gegeven vergelijkingen voor $f(\eta)$ en $Q(\eta)$.

De kans dat een maximum de waarde η niet overschrijdt is dan:

$$Pr\left\{ \underline{\xi}_a \leqslant \eta \right\} = \left\{ 1-Q(\eta) \right\}$$

De kans dat dit geldt voor alle N maxima is:

$$Pr\left\{ \text{alle 'N' } \underline{\xi}_a \leqslant \eta \right\} = \left\{ 1-Q(\eta) \right\}^N$$

Dit is tevens de kans dat het hoogste maximum $\underline{\xi}_{a\ max}$ de waarde η niet overschrijdt.

Dus: $Pr\left\{ \underline{\xi}_{a\ max} \leqslant \eta \right\} = \left\{ 1-Q(\eta) \right\}^N$

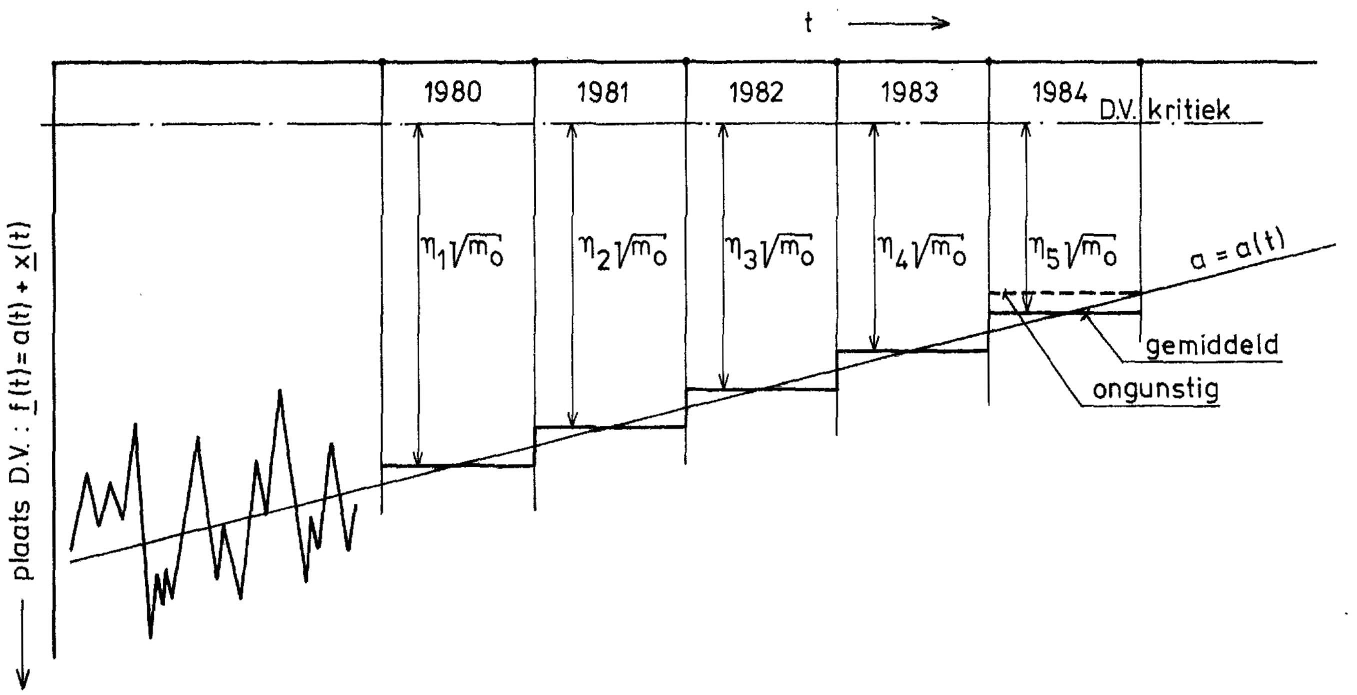
Deze kans is tevens gelijk aan de kans dat de functiewaarde (t) een bepaalde waarde η niet overschrijdt <u>op een zeker tijdsinterval met duur D.</u>

Dus: $Pr\left\{ \underline{\xi}(t) \leqslant \eta \right\} = Pr\left\{ \underline{\xi}_{a\ max} \leqslant \eta \right\} = Pr\left\{ \underline{x}(t) \leqslant \eta \sqrt{m_0} \right\} =$

$\left\{ 1-Q(\eta) \right\}^N$

3. Beschouwen we nu weer de duinkust.
   In het duin is een lijn aan te geven waarachter de duinvoet niet komen mag i.v.m. de veiligheid.
   Overschrijding van de lijn levert een doorbraak op.
   Deze lijn noemen we de kritieke duinvoetlijn.
   Verder is de gemiddelde teruggang van de duinvoet in de tijd te geven: de lijn a = a(t).

   Uitgaande van deze lijn a = a(t) is nu m.b.v. de statistische benadering onder 1^o en 2^o aan te geven welke waarde voor de afstand tussen a = a(t) en $DV_{kritiek}$ in enig tijdvak Δt niet mag worden overschreden. Hierbij is het wel nodig de lijn a = a(t) trapsgewijs te schematiseren (b.v. gemiddelde ligging per periode of ongunstigste ligging per periode).



Beschouwen we b.v. perioden van 1 jaar:
bv. 1980 t/m 1984.
Dan zijn de volgende kansen te bepalen:

$$\Pr\left\{(x(t) > n_1 \sqrt{m_0})_{1980}\right\} = P(A)$$
$$\Pr\left\{(x(t) > n_2 \sqrt{m_0})_{1981}\right\} = P(B)$$
$$\Pr\left\{(x(t) > n_3 \sqrt{m_0})_{1982}\right\} = P(C)$$
$$\Pr\left\{(x(t) > n_4 \sqrt{m_0})_{1983}\right\} = P(D)$$
$$\Pr\left\{(x(t) > n_5 \sqrt{m_0})_{1984}\right\} = P(E)$$

De kans op overschrijding van de $DV_{kritiek}$ in bv. de periode 1980 t/m 1982 is dan gelijk aan de kans op A of B of C.

D.w.z.: (volgens waarschijnlijkheids rekening).

$$P(A \text{ of } B \text{ of } C) \overset{p.d.}{=} P(A) + P(B) + P(C) - P(A \text{ en } B) - P(A \text{ en } C) - P(B \text{ en } C) + P(A \text{ en } B \text{ en } C)$$

Indien de gebeurtenissen X, Y en Z stochastisch onafhankelijk zijn geldt:

$$P(X \text{ en } Y) = P(X)\, P(Y)$$
$$P(X \text{ en } Y \text{ en } Z) = P(X)\, P(Y)\, P(Z)$$

zodat dan geldt:

$$P(A \text{ of } B \text{ of } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)\,P(B) - P(A)\,P(C) - P(B)\,P(C) + P(A)\,P(B)\,P(C).$$

Een iets andere benadering is ook mogelijk:

$$P_r\left\{(x(t) \leq n_1 \sqrt{m_0})_{1980}\right\} = 1 - P(A)$$
$$P_r\left\{(x(t) \leq n_2 \sqrt{m_0})_{1981}\right\} = 1 - P(B)$$
$$P_r\left\{(x(t) \leq n_3 \sqrt{m_0})_{1982}\right\} = 1 - P(C)$$

De kans dat de $DV_{kritiek}$ in deze 3 jaar niet overschreden wordt is gelijk aan de kans dat de $DV_{kritiek}$ én in 1980 én in 1981 én in 1982 niet overschreden wordt.
Volgens P(X en Y) = P(X) P(Y) indien X en Y onafhankelijk zijn volgt dan voor de bovengenoemde kans:

$$P\left[(x(t) \leq n_1 \sqrt{m_0})_{1980} \text{ én } (x(t) \leq n_2 \sqrt{m_0})_{1981} \text{ én } (x(t) \leq n_3 \sqrt{m_0})_{1982}\right]$$

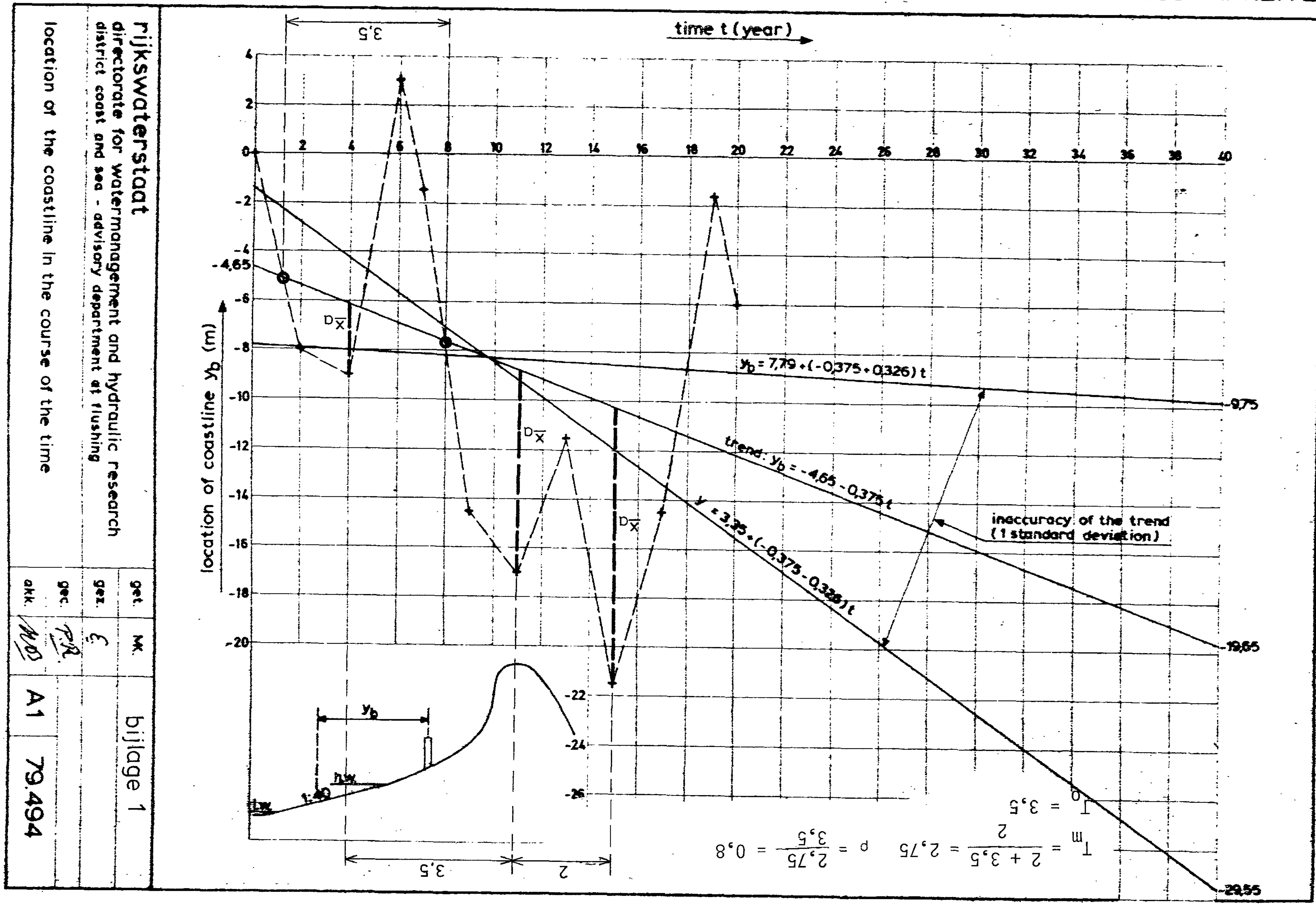
$$= (1 - P(A))\,(1 - P(B))\,(1 - P(C))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)\,P(B) + P(B)\,P(C) + P(A)\,P(C) - P(A)\,P(B)\,P(C) = R$$

De kans op overschrijding van de $DV_{kritiek}$ is dan gelijk aan 1 - R, zodat weer de eerder gevonden uitdrukking volgt.

Tot slot zij opgemerkt dat als deze benadering al juist is, zich problemen zullen voordoen bij een cijfermatige uitwerking, daar waarschijnlijk van geen enkele duinvoet in een sterk eroderend kustvak een voor dit doel geschikte plaats registratie in de tijd beschikbaar is.

ir. R.J. Cirkel



NOTES WWKZ-79.V205^c ANNEX 2